MEMORIE
DI
MATEMATICA
E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA

TOMO I.

VERONA

PER DIONIGI RAMANZINI

MDCCLXXXII.

ONd' è mai, che la nazione Italiana, feconda in ogni tempo d'ingegni ſingolari, par quaſi inoperoſa a paragone d'altre non poche in Europa, intente a ſegnalarſi tutto giorno, e fare a gara progreſſi luminoſi nelle Scienze? E' egli perchè o non ſia in Italia conceduto libero campo di eſercitarſi agl' intelletti, o perchè manchino i Mecenati, i mezzi, gl' incoraggiamenti? Ma tanto ſon fatti comuni i lumi della buona Filoſofia, e della ſana Morale, che non v' è per così dire regione, in cui non ſia permeſſo a' dì noſtri in materie ſcientifiche il penſare, e lo ſcrivere liberamente. Le Accademie poi, i Licei, le Univerſità, d'uomini provvedute per ogni conto ragguardevoli, paleſano a chiare note l'impegno magnanimo con cui i Principi d' Italia gli ſtudj favoriſcono, e la cultura della nazione. Nè ad altro ſono inteſe le pubbliche Biblioteche , le Specule , le Collezioni di Storia naturale, le Sale di macchine, e ſuppellettili per la Fiſica Sperimentale, i Teatri Anatomici , i Laboratorj di Chimica , ed altri egregj ſtabilimenti , fuorchè al grande oggetto di promuovere l' applicazione de' nazionali , e di porger loro i ſuffragj più prezioſi. O ſarebbe di ciò cagione radicale l' eſſere ſeparati gl' Italiani, e nell' eſercizio diviſi delle proprie forze; tal che non può averſene il frutto, che all' unione di loro verrebbe fatto di mettere indubitatamente? Non è già che non ſia tutt' altra la condizione noſtra d' oggidì da quella de' tempi andati , in cui le civili diſcordie , le invaſioni de' barbari, le ſucceſſive alternazioni di Governi, di Leggi , d' Idiomi tenevano l' Italia in continuo ſconvolgimento , e contrappoſto di umori , e coſtumi; ove gli ſtudj nazionali, ſe ve ne aveva, confondevanſi cogli ſtranieri ; ove il nativo genio era avvilito , oppreſſo il valore, e tolta ogni via di pacifica intelligenza. Ma l' eſſere or pure partita l' Italia in dominj d' indole, e d' inſtituzione non una, fa che ſieno neceſſariamente l' un dall' altro diſgiunti gli uomini illuminati , che natura ha diſtribuito imparzialmente ; difficulta e reſtrigne le relazioni ; ſparge un ſeme impercettibile di mutue gelosie; e arresta quel reciproco e libero scambio di lumi, ch'e' sarebbero naturalmente in comunione d'interessi, e di volere. Quindi è che lo splendore di loro, quantunque vivissimo, riverbera a stento, e languidamente sull'intera nazione. E non è raro il caso, che in una parte d'Italia s'ignorino persino le produzioni dell'altra, i progressi, le ricchezze letterarie, o non vengano elle in pregio ed onore, siccome alle straniere è conceduto. Come può mai in sì fatta opposizione di cose, in tanto abuso de' mezzi proprj e naturali copiosissimi, ampiarsi il fondo delle cognizioni utili, e il lustro aumentarsi, e la gloria della nazione? Certo è che l'unione de' dotti in Società patrie è l'epoca de' progressi, che si son fatti in Europa nelle Scienze e nelle Arti, e della reputazione altissima in cui son venute a' dì nostri moltissime regioni. Sbandita la pedanteria, l'illusione de' sistemi; preso per iscopo il vero, l'utile degli obbietti; appianate agli Studiosi le vie onde avanzarsi, ed eccitato coll'emulazione, e coll'esempio un gusto universale per l'applicazione, tutto per mezzo di queste Unioni concorre ad ingrandir la nazione; e non è meraviglia, che fatte ricche di tante e migliori forze combinate divengano poi elle arbitre dell' opinione, e quaſi ſantuario d' ogni arte, d' ogni dottrina nazionale. Ma ſe dobbiam convenire per una parte, eſſer queſto il mezzo più valido e ſicuro onde conciliare col promovimento delle Scienze il bene delle nazioni; e non poſſiamo diſſimulare dall' altra, che lo ſvantaggio d' Italia è l' aver ella le ſue forze diſunite; come tentarne l' unione? e per qual mezzo libero da contrarietà aſſociare le cognizioni e l' opera di tanti illuſtri Italiani ſeparati, di cui non può a talento variarſi la coſtituzione? Non è invero ardua impreſa in uno Stato anche vaſto, ove la mente di un ſolo o di pochi dirige e regola il deſtino della nazione, il diſporre ed effettuare il trapiantamento, e la concittadinanza eziandio di parecchi uomini, ſotto gli occhi, e gl' influſſi benefici del Governo. Così è che veggiam ſorte felicemente tante inſigni Compagnie, che illuſtrano la Francia, l' Inghilterra, la Pruſſia, la Moſcovia, la Svezia, ed altri floridi Stati di Europa. Ma in Italia, qualunque ſiaſi l' inſtituzione o il ſiſtema che voglia immaginarſi, repugna alla condizione delle coſe, che poſſano in ſimil guiſa avvicinarſi ed unirſi gl' Italiani in un corpo di Scienziati nazionale, animato da un ſolo fiato vivificante. Non reſta pertanto, ponderato il tutto a bilancia, che un ſolo tentativo da farſi, ch'è quello di ricorrere ad un principio motore degli uomini, principio ſempre attivo, e talora operante con entuſiaſmo, l'amor della Patria. Non v'ha certamente riſguardo che poſſa obbiettarſi ad un amichevole accordo, ad un legame innocente tra uomini della ſteſſa nazione, i quali ſenza mancare alle naturali occupazioni o a' doveri del proprio ſtato conſacrar vogliano parte del loro tempo al vantaggio, e al luſtro nazionale. Tutto eſſendo di elezione e di libera volontà, non può avervi altra legge per una Compagnia fondata ſu queſta baſe, fuorchè quella, ch'eſſa vorrà imporſi da sè, e cui l'amor patrio, e il genio naturale per le Scienze potranno rendere tollerabile, ed accetta. E queſta terrà luogo di obbligazione e di vincolo; manterrà in vigore la mutua amica corriſpondenza; animerà la comune applicazione, l'induſtria, e il fervore di tutti. Ecco i fondamenti di una Società, che prende a formarſi in Italia per l' avanzamento delle Scienze; ed ecco in queſto Volume il primo Saggio di ſue produzioni, combinate, come meglio le circoſtanze il permiſero ſul ſuo naſcimento. Da ora innanzi eſciranno regolarmente alla luce le Sociali Memorie, ſiccome ſuol farſi nelle altre Accademie dell' Europa ; e saranno elle , a scansamento di competenze , disposte ne' Volumi coll' ordine alfabetico de' Cognomi. Ognuno risponderà per sè , e delle proprie meditazioni, ed esperienze; de' proprj calcoli , e risultamenti , come se ne facesse separatamente la pubblicazione. E perchè abbia ciascheduno un agio convenevole, onde conciliare co' riguardi della propria condizione il buon genio di adoperarsi per l' incremento di questa Società, è stabilito intanto , che resti libero un anno intero dall' uscita di un Volume alla stampa del susseguente ; sì che comparirà il secondo Tomo nel 1784., il terzo nel 1786., e così successivamente. Qualunque volta l' Autore il richiegga , sarà , sì per salvezza e assicuramento di proprietà nelle scoperte , e sì ancora per qualche motivo di nobile emulazione in uno stesso argomento , segnata a piè di pagina la data del ricevimento della Memoria di lui . Se la quantità degli Opuscoli oltrepassasse le misure di un discreto Volume , sarà diviso il Tomo in due col titolo di Parti. L'edizione potrà farsi in qualunque città d' Italia, ove risieda uno o più membri della Società per la necessaria e fedele conserva delle Memorie , e pel mantenimento dell' ordine convenuto; e quivi sarà fatta scelta

di

di abili Soggetti per la revisione, e correzione della Stampa, a' quali potranno indirizzarsi gli Autori per aggiunte, troncamenti, od altre modificazioni, che volessero ne' proprj Scritti. Il governo economico è fondato con sicure e ferme provvidenze, sì che potranno distribuirsi costantemente a ciascun membro della Società un Volume degli Atti in dono, e alcuni esemplari della rispettiva Dissertazione. Le Matematiche, e la Fisica in generale sono le Scienze peculiari della Società, la quale perciò in due Classi principali si dirama. A scelta e giudizio di queste verrà ammesso nella Compagnia ogni Italiano, il quale abbia un merito maturo, e per più opere date in luce, ed applaudite riconosciuto universalmente; sì che venendo proposto alcuno da aggiugnersi all'una o all'altra Classe, non potrà aver luogo l'associazione di lui, se l'intera Classe non vi acconsenta. Ma ad ogni Socio è conceduta libertà d'inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante e nuova produzione anche di persona non aggregata, purchè voglia, come di cosa propria, risponderne egli stesso inverso la Compagnia. E perchè suol esser dolce a' posteri, toccante, e di lodevole emulazione la ricordanza di que' pochi uomini, che si adoperano a prò di tutti gli altri, farà compilato l' elogio d' ogni membro della Compagnia, che Morte andrà togliendole di tanto in tanto; cioè teſſuta la vita del Filoſofo, non quella dell'uomo ſemplicemente. Non è ammeſſo negli Atti della Società altro idioma, fuorchè l' Italiano: idioma proprio a tutto, e fatto ormai per l' Europa agli uomini non inculti familiare. Se una lingua viva ſtende vie più il ſuo impero, quanto più ſale in reputazione chi la parla, e quanto più il pregio delle opere ſcritte s' aumenta; una collezione ſcelta de' progreſſi nelle Scienze di una Nazione merita abbaſtanza di eſſere conoſciuta, perchè la lingua in cui è fatta divenga, quant'altra mai, autorevole e importante. Queſto è il piano ſemplice e concordato della Società Italiana. Parrà talvolta ſterile a primo aſpetto una ſcoperta di Anatomia, un Medico cimento, un'eſperienza di Chimica, una nuova verità di Geometria o di Calcolo. Ma ſe qualche ſoggetto non è immediatamente applicabile, è ſempre vero, che o s' attiene ad altri che il ſono, o vi ci conduce neceſſariamente. E v' ha ancora tal indole di verità, la quale ſenza il concorſo di molte altre non può per sè eſſere applicata immediatamente; ve n' ha che s' applicherebbero , ſe ci foſſe permeſſo di veder tutto , e di concatenare le anella innumerabili di una Scienza ; e ve n'ha perfine, che ſtaranno probabilmente oziofe in perpetuo , quaſi monumenti di luſſo della mente umana. Ma quand' anche ciò foſſe, non è mai inutile un' indagine , che conduce per lo meno a qualche nuova rifleſſione; in cui l'intelletto brama ardentemente d'internarſi; che lo illumina e paſce con viva e dolce soddisfazione: avendo egli pure i ſuoi biſogni, i ſuoi piaceri, e non di rado qualche capriccio da appagare. La Società non ſi propone , che l' inveſtigazione del vero in che che ſia , e di far conſerva delle ricerche de' ſuoi , intorno a ciò che è conceduto agli uomini di ſviluppare nelle Scienze con la meditazione, col ragionamento, e con l' oſſervazione. Il connettere tutto inſieme, e il rendere fruttuoſo eziandio quello, che ſembrar può oggidì infeconda ſpeculazione, è opera del tempo, e bene ſpeſſo di accidentali, e non atteſe combinazioni. Queſto è il bene, il vantaggio capitale, che mancava all' Italia, in cui, non il poſſedimento d' uomini illuſtri , e nelle Scienze quant' altri mai perſpicaci e profondiſſimi, ma ben l' unione di loro in un ſol corpo regolato poteva altrui invidiarſi da gran tempo.

Così avverrà, che ſi rivendichino pienamente i dritti di una regione, che fu prima dell' altre ricovero e ſede delle Scienze, e dell' Arti, e donde attinſe da' primi ſecoli l' Europa ſtudj, inſtituzioni, e cultura.

INDICE
DELLE MEMORIE
PRIMA SEZIONE.

SECONDA SEZIONE.

INTRODUZIONE

INTRODUZIONE

A nuovi Principj della Teoria Elettrica dedotti dall' analisi de' fenomeni delle Elettriche punte.

Del P. Carlo Barletti, Delle Scuole Pie, Professore di Fisica nell' Università di Pavia.

PARTE PRIMA.

SUppongo notissime le prime sperienze sulle Elettriche punte, pubblicate da *Franklin*, e da le *Roi*, non meno che le più recenti di *Franklin* medesimo, di *Wilson*, di *Naime*, e di *Barbier* de *Tinan*. Come però le prime non sono che fatti isolati, incapaci di formare induzione; così le altre sono unicamente ristrette all' uso delle punte stesse nel riparare le fabbriche da' danni del fulmine; e perciò non tendono a perfezionare la teoria delle punte; e per mancanza appunto di quella teoria restano in sestesse meno espressive. Ho fatto io qualche saggio per ripigliare le cose da capo, e tentarne una teoria, che renda meno incerte e precarie quelle prime, ed insieme più chiara l' espressione delle ultime. Esporrò primieramente alcune sperienze con tutta la brevità.

Comincio dal misurare l' azione di una elettrica punta opposta alla superficie armata di uno strato resistente; indi al rovescio diretta dalla superficie stessa da un conduttore elettrico. Mi sembrò questa la più sicura via per ridurre a misura ed a proporzione ciò che fino qui non si maneggiò se non a masse confuse.

Nella macchina elettrica a disco di pulito cristallo isolo il cuscinetto strofinante, ed a questo unisco un conduttore fatto a tubo di ottone lungo pollici 18, del diametro di pollici 2, in tutta la ſua lunghezza cilindrico, che termina in cono dalla parte che guarda il cuſcinetto ſtrofinante, ed all' oppoſta eſtremità finiſce in globo più groſſo di un mezzo pollice che non è il diametro del tubo. Alla più eſtrema conveſſità di queſto globo nella direzione ſteſſa dell' aſſe del tubo attacco un filo di ottone groſſo una linea, lungo pollici tre, linee nove, terminato in punta conica acutiſſima.

Lo ſtrato reſiſtente è una laſtra rettangolare di vetro di Germania alta pollici $17\frac{1}{2}$, larga pollici $12\frac{2}{3}$, coperta di foglia di ſtagno egualmente nelle due oppoſte ſuperficie con un labbro da ambe le parti nudo e pulito di pollici $1\frac{1}{2}$, talchè reſta un' armatura diſtante dall' altra pel giro di pollici tre intorno all' orlo del vetro.

Dalla cima di ciaſcuna armatura pende nel mezzo un ſottil filo di lino lungo pollici 11, teſo in fondo con un globetto di midolla di ſambuco groſſo linee tre.

Sta queſto quadro ſoſtenuto verticalmente ſecondo la ſua altezza ſopra due baſi iſolanti, col moto delle quali può a piacimento appreſſarſi, o ſcoſtarſi dalla punta qui ſopra fiſſata nel tubo. Ed appunto reſtando queſta diretta a due terzi di altezza d' un' armatura, ed appoggiando all' armatura oppoſta un groſſo filo di ottone, acciocchè la ſteſſa per tal via comunichi liberamente col ſuolo, e poſſa il quadro coricarſi; io eccito colla rotazione del diſco la reſinoſa elettricità nel tubo, e nelle varie diſtanze di quel quadro dalla punta ſteſſa faccio la ſeguente Serie di ſperienze. Avverto ora per ſempre, che in ciaſcuna variazione delle diſtanze dalla minima fino alla maſſima reſta ſempre eguale l' eccitamento di elettricità nella macchina, ed eguale è il numero de' giri del diſco in ciaſcun atto d' ogni progreſſione delle diſtanze medeſime. Furono que' giri in alcune progreſſioni trenta, in altre ſeſſanta, ma ſempre in egual numero ad ogni diſtanza della intera progreſſione.

SERIE PRIMA.

1. Ritiro paſſo paſſo il quadro dal contatto colla punta fino alla diſtanza di quattro pollici, e trovo ad ogni paſſo nel quadro piena la forza della carica ſcuotente e fulminante.

2. Seguo gradatamente a ritirare il quadro fino alla diſtanza di pollici ſei, e trovo che ne' frappoſti intervalli comincia a comparire alquanto diminuita la forza della carica.

3. Per diminuirla notabilmente e renderla ſotto la metà della piena ſua forza fa d'uopo ritirare il quadro fino alla diſtanza di pollici otto.

4. Dagli otto fino a' dodici andò ſcemando la forza della carica, la quale però fu tuttavia bene ſcintillante e ſcuotente. Scemò per altro tale forza con progreſſione più aſſai decreſcente al di là degli otto pollici, che non faceva fino agli otto.

5. La provai ancora ſenſibile tanto nella ſcintillazione, come nella ſcoſſa, ritirando il quadro fino ai quattordici pollici lontano dalla punta. In queſte ultime degradazioni per accertarmi più ſicuramente ſcarico il quadro facendone paſſare la ſcoſſa tra l'indice e il pollice della mia mano, co' quali tocco inſieme le oppoſte armature.

6. Al di là de' quattordici pollici più non s' impreſſe nel quadro forza di carica, atta a ſcuotere ſenſibilmente, ma ſoltanto a dare tenue ſcintillazione, e in fine tenui moti nel pendolino anneſſo all' armatura nell' atto che continuava a girare il diſco.

7. I cuſcinetti e il tubo, che porſero perenne vena di elettricità in tutte queſte ſperienze, non erano perfettamente iſolati dai corpi intorno, ſe non alla diſtanza di otto pollici: il che ſi deve tener a mente pel ſucceſſivo confronto.

8. Misurai la forza della scintilla nel tubo, mentre si caricò il quadro in tutte le distanze precedenti; e trovai, che nelle distanze de' primi numeri era tanto languida l'elettricità, che appena poteva trarsi la scintilla, accostando il dito al tubo ad una linea o due; ed anche alle maggiori distanze del quadro, notate negli ultimi numeri, la scintilla comparve sempre dal tubo assai fiacca alla distanza di tre linee appena.

La punta unita al tubo in questa prima Serie si chiamerà per compendio *punta di elettricità resinosa*.

PREPARAZIONE.

Ritengo l'antecedente preparazione, e soltanto stacco la punta dal globo, e la fisso nella medesima altezza e direzione dell'asse del tubo sull'armatura del quadro. Presento quella punta al globo, cui stava prima unita, e rinnovando ad ogni varietà delle distanze i trenta o sessanta giri del disco, che replico egualmente in ciascuna progressione, ho la seguente Serie di sperienze.

SERIE SECONDA.

1. Parto al rovescio dell' antecedente Serie della distanza di quattordici pollici, ed arrivo fino alla distanza di sei pollici, prima di trovare nel quadro il minimo cenno di que' moti e di quella luce, che erano ancor tanto notabili nella prima Serie molto al di là de' quattordici.

2. Dopo la distanza di sei pollici comincia qualche volta a comparire alcun tenue moto, e poi alcuna luce, ma senza verun indizio di scossa.

3. Per avere nello scaricare il quadro qualche costante segno di luce scintillante dopo i trenta o sessanta giri del disco, d'uopo è appressare la punta al globo fino

ai quattro pollici, nè questi ancora bastano per renderne sensibile la scossa.

4. Inoltrata ancor di più la punta sotto ai tre pollici dal globo, comincia a sentirsi nel quadro picciola scossa, come nella Serie antecedente alla distanza di quattordici.

5. Per avere un senso di scossa equivalente a quello, che si ebbe nell' antecedente Serie al di là degli otto pollici, fu qui necessario inoltrare la punta ai due pollici dal globo.

6. In fine la piena scarica fulminante non si ottiene mai, se non portata la punta a distanza non meno di un pollice.

7. L' isolamento del tubo era in tutta questa Serie perfetto, come nell' antecedente ad otto pollici.

8. La forza dell' elettricità nel tubo, mentre si caricò il quadro, fu tale, che essendo la punta alla distanza di quattro pollici non mancò di trarsi dal tubo scintilla piena vivissima e frequente, presentando il dito anche al di là di un pollice. Ed accostandosi la punta ai tre, ai due, e per fino verso ad un pollice, non fu mai tanto fiacca la scintilla, come lo fu nell' antecedente Serie, quando il quadro era lontano dalla punta verso i quattordici.

La punta unita al quadro in tutta questa Serie la chiamerò per brevità *punta opposta alla resinosa elettricità*.

Corollari.

1. La punta di elettricità resinosa induce la carica nell' opposto quadro con forza per lo meno quadrupla della punta opposta alla stessa elettricità.

Quella in distanza di quattordici pollici imprime nel quadro tanta carica (*Ser.* 1. *n.* 5), come questa ai tre (*Ser.* 2. *n.* 4); e nuovamente quella agli otto pollici tanta, come questa ai due (*Ser.* 2. *n.* 5); e in fine quella ai quattro pollici, come questa ad uno (*Ser.* 1. *n.* 1, e *Ser.* 2. *n.* 6).

2. La punta di elettricità resinosa disperde la sua specie raccolta, o accorrente di continuo nel suo conduttore con forza per lo meno settupla della punta opposta alla stessa elettricità.

Le scintille nel tubo con punta, quando il quadro fu alla distanza di quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 8), restarono sempre minori, che quando la punta del quadro fu vicina al tubo anche più di due pollici (*Ser.* 2. *n.* 8). Ora quelle scintille sono la più esatta misura della elettricità residua, cioè non dispersa.

3. La punta di resinosa elettricità induce notabile forza di carica nell'opposto quadro, benchè questo sia rimosso fino a' limiti dell'isolamento.

I limiti dell'isolamento sono otto pollici (*Ser.* 1. *n.* 7), e la forza della carica si trova ancora in que' limiti poco meno della metà (*Ser.* 1. *n.* 3).

4. E segue ad indurre ancora qualche forza nel quadro rimosso alla distanza di tre quarti al di là di que' limiti.

La forza della carica è ancor sensibile oltre ai dodici fino a' quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 4, 5), cioè sei pollici al di là de' limiti dell'isolamento, e questi sono appunto tre quarti di otto.

5. La forza della carica, impressa dalla punta stessa nel quadro al di là dei limiti dell'isolamento, non corrisponde alla diminuzione di forza, che si osserva nella scintilla tratta dal tubo.

Nella seconda Serie non fu mai la scintilla tanto fiacca, anche quando nel quadro s'impresse la piena forza della carica, come lo era nella prima Serie, quando la carica fu tenuissima alla distanza di quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 5, 8. *Ser.* 2. *n.* 8). Tale scintilla è lenta, e spicca appena a tre linee dal tubo; quando la scintilla piena, tolta la punta, spicca frequente a distanza di un pollice ; e frattanto la carica è tenuiſſima . Dunque l'elettricità del tubo non concorre, che in picciola ſua parte a far queſta carica.

6. Viceverſa la punta oppoſta all' elettricità reſinoſa non induce nel quadro veruna carica, nè ſcema punto la forza della ſcintilla nel tubo, finchè l' armatura ſteſſa, cui ſta unita la punta, non arriva entro i limiti dell' iſolamento.

Finchè la punta non è vicina verſo i quattro pollici al tubo, non compariſce nel quadro menoma carica, e appena qualche tenue luce (*Ser.* 2. *n.* 3). Ora il filo della punta è lungo pollici tre e nove linee, come ſi avvertì da principio. Aggiunti queſti a' quattro pollici, fanno pollici ſette e nove linee, che corriſpondono dentro i limiti dell' iſolamento.

7. Nè comincia la carica a farſi notabile nel quadro, ſe non quando l' armatura ſteſſa è inoltrata verſo un quarto entro i limiti dell' iſolamento.

Inoltrata la punta ſotto i tre pollici, e fino ai due ſi ha nel quadro notabile la ſcoſſa (*Ser.* 2. *n.* 4, 5). Aggiunti queſti alla lunghezza del filo della punta fanno verſo i pollici ſei, che portano l'armatura inoltrata due pollici, cioè verſo un quarto inoltrata entro i limiti dell' iſolamento.

8. E qui la diminuzione di ſcintilla, tratta in quell' atto dal tubo, è corriſpondente al ſucceſſivo aumento della carica impreſſa nel quadro.

Fino ſotto ai quattro pollici, ove niuna fu la carica nel quadro, reſtò piena e frequente la ſcintilla; nè andò queſta ſcemando, ſe non in proporzione che maggiore s' impreſſe nel quadro la carica (*Ser.* 2. *n.* 6, 8).

PREPARAZIONE.

Mi ſervo della ſteſſa macchina, e tubo, e quadro, e punta, ſe non che tolto l' iſolamento de' cuſcinetti, preſento il tubo nel modo ſteſſo di prima, non più ai cuſcinetti, ma al diſco, in diſtanza da quelli d' un ſeſto circa della periferia del diſco. Talchè in vece di reſinoſa elettricità raccolgo nel tubo la vitrea, e ſo con queſta la Serie di ſperienze corriſpondenti alle due premeſſe. Comincio pertanto ad applicare la punta al globo del tubo, e preſento a queſta il quadro ſimilmente, come nella prima Serie, nelle diſtanze ſeguenti con trenta e ſeſſanta giri del diſco in ciaſcuna.

SERIE TERZA.

1. Dal contatto del quadro colla punta, ritirandolo fino verſo la diſtanza di due pollici, s' induce nello ſteſſo piena forza di carica.

2. Ai tre pollici ſi riconoſce già alquanto diminuita: ai quattro è già verſo la metà.

3. Indi va per modo ſcemando, che a' ſei è già molto al di ſotto alla metà della piena ſua forza.

4. Rimoſſo il quadro a piccioli tratti da' ſei fino a' dieci pollici, reſta ad ogni ſucceſſivo tratto diminuita la carica, talchè ai dieci è alquanto minore, che non era nella prima Serie alla diſtanza di dodici.

5. Dai dieci fino ai dodici pollici ſi riduce all' ultimo termine la forza ſcuotente, e non reſtano al di là, che tenui ſcintillazioni, come erano nella prima Serie al di là dei quattordici.

6. Volli qui proſeguire a ritirar tanto il quadro da veder fin dove reſtaſſero ſenſibili quelle ſcintillazioni; e le trovai notabilmente diminuite ai quattordici pollici; indi però continuarono, ma appena notabili fino ai pollici venti; al di là de' quali non comparvero che tenuiſſimi ſegni di luce, nel toccare col pollice e indice inſieme le due oppoſte armature del quadro, fino alla diſtanza di pollici ventitre; oltre i quali non reſtò che fino ai ventiquattro pollici alcun tenue moto nel pendolino

dolino anneſſo all' armatura nell' atto che continuava a girare il diſco.

7. L' iſolamento del tubo in tutta queſta Serie era perfetto ai dieci pollici.

8. Le ſcintille al tubo, benchè ſi caricaſſe il quadro vicino alla punta più d' un pollice e mezzo, non furono mai tanto fiacche, come lo furono nella prima Serie, quando era il quadro al di là de' quattordici.

9. Quando ſi caricò il quadro al di là de' quattro pollici, la ſcintilla ſi ebbe già viva e frequente; e infine ritirato il quadro al di là degli otto pollici poco era lontana dalla prima ſua forza; alla quale giunſe, e reſtò mai ſempre, qualora era il quadro diſtante più di pollici dieci.

Si chiamerà in tutta queſta Serie *la punta di elettricità vitrea*.

PREPARAZIONE.

Rimane la ſteſſa preparazione, ſe non che traſporto la punta del globo, e la fiſſo nella ſteſſa altezza e direzione all' armatura del quadro. Indi come nelle precedenti Serie la preſento al globo ſteſſo nelle ſeguenti diſtanze.

SERIE QUARTA.

1. Comincio dalle maggiori diſtanze, e dopo trenta o ſeſſanta giri del diſco ſcorgo ſoltanto a' dieci pollici i primi moti al pendolino anneſſo all' armatura.

2. Succedono ai moti i primi cenni di luce, mentre tento di ſcaricare il quadro: ed ai nove pollici già è ſenſibile inſieme alla ſcintillazione una lieve forza di ſcuotere.

3. Più innanzi di nove pollici creſce la carica ſcuo-

tente per modo, che a' ſei è già ben vicina alla metà della piena ſua forza.

4. Ai quattro pollici è alquanto maggiore, che non era nella terza Serie alla ſteſſa diſtanza; ed al di là dei tre ſi ha ſempre piena la carica ſcuotente, e fulminante.

5. L' iſolamento fu lo ſteſſo che nell' antecedente Serie.

6. E le ſcintille comparvero dal tubo come nella Serie antecedente (*n.* 9); ſe non che qui in parità di quelle diſtanze furono alquanto più tarde e più deboli.

Dirò in tutta queſta Serie *la punta oppoſta alla vitrea elettricità*.

COROLLARJ.

1. La punta di vitrea elettricità induce la ſua ſpecie nell' oppoſto quadro, finchè queſto è dentro i limiti dell' iſolamento con forza notabilmente minore della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità; ma quando il quadro è fuori de' limiti dell' iſolamento, quella imprime nello ſteſſo la ſua ſpecie con forza non meno d' un terzo maggiore di queſta.

Finchè il quadro è dentro i limiti dell' iſolamento, quella induce piena carica ſotto la diſtanza di due pollici (*Ser.* 3. *n.* 1), queſta fa lo ſteſſo alla diſtanza di tre (*Ser.* 4. *n.* 4). In quella ai ſei pollici la carica è molto meno di metà (*Ser.* 3. *n.* 3). In queſta alla ſteſſa diſtanza è già ben vicina alla metà (*Ser.* 4. *n.* 3); ed ai quattro pollici è qui maggiore che in quella (*Ser.* 4. *n.* 4).

Fuori de' limiti poi quella induce carica da far ſenſo di ſcoſſa alla diſtanza di dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 4). Queſta fa lo ſteſſo ſoltanto a' pollici nove (*Ser.* 4. *n.* 2), nella quale diſtanza è il quadro fuori dell' iſolamento per la maggior lunghezza del filo della punta. E perciò col confronto delle ſcoſſe, e delle ſole diſtanze dalle punte ſarebbe quella maggiore d' un terzo eſatto. Ma ſiccome col confronto degli ultimi cenni di luce quella arriva al di là de' ventitre (*Ser.* 3. *n.* 5), e queſta non ſi eſtende al di là de' dieci (*Ser.* 4. *n.* 1), a' quali aggiunti pollici tre linee nove della lunghezza della punta, non arrivano a' quattordici; perciò non ho ſtimato di ſcoſtarmi dalla verità eſprimendone la proporzione non meno d' un terzo.

2. La punta di vitrea elettricità diſperde la ſua ſpecie raccolta o accorrente di continuo nel conduttore con forza minore della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità.

Le ſcintille, che moſtrano i reſidui dell' elettricità non diſperſa, furono ſempre minori in pari diſtanze colla punta oppoſta alla vitrea elettricità, che colla prima (*Ser.* 3. *n.* 9. *Ser.* 4. *n.* 6). Dunque la punta di vitrea elettricità diſperde meno.

Ma queſta minor diſperſione ſi prova ancor più eſattamente dalla maggior forza, colla quale quella ſpinge nell' oppoſto quadro i ſegni della ſua elettricità. Poichè quella inoltra la carica ſenſibile fino ai dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 4), e gli ultimi ſegni fino ai ventiquattro pollici (*ivi n.* 5). Queſta nella carica non oltrepaſſa i nove, e negli ultimi ſegni non paſſa i dieci pollici (*Ser.* 4. *n.* 1, 2). Sommando queſte ragioni ſono come 36 : 19, e perciò quella diſperſione è poco meno di ſubdupla.

3. La punta di vitrea elettricità non induce nell' oppoſto quadro ſe non tenue forza di carica, quando queſto è rimoſſo ai limiti dell' iſolamento.

Riſulta dall' immediato confronto del n. 4 e 7 della terza Serie.

4. E non arriva ad indurne forza ſenſibile al di là d' un quinto de' limiti dell' iſolamento.

Non oltrepaſſa tale forza dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 5), e l' iſolamento è dieci.

5. La forza della carica impreſſa dalla punta ſteſſa nel quadro, tanto entro, come oltre i limiti dell' iſo-

lamento, ha proporzionale diminuzione di ſcintilla tratta dal tubo nell' atto che ſi fa quella carica.

Colla progreſſione, che ſi allontana il quadro, ſcema la forza della carica impreſſa (*Ser.* 3. *n.* 3, 4, 5); e nella ſteſſa progreſſione creſce la frequenza e la vivacità della ſcintilla (*Ser.* 3. *n.* 9).

6. Viceverſa la punta oppoſta alla vitrea elettricità continua ad indurre nel ſuo quadro qualche forza di carica fino alla diſtanza di nove decime dell' iſolamento del tubo, e quando l' armatura del quadro è poco meno di tre decime fuori de' limiti dell' iſolamento.

Ai nove pollici è ancor ſenſibile nel quadro la forza di ſcuotere (*Ser.* 4. *n.* 2), e l' iſolamento è dieci.

Per dichiarazione dell' ultima parte non ſi ha, che aggiugnere ai nove altri pollici tre e linee nove, che ſono poco meno di tre decime fuori de' limiti dell' iſolamento.

7. E la carica impreſſa arriva alla metà della piena ſua forza, quando la punta è diſtante dal tubo tre quinti dell' iſolamento, e quando l' armatura è ancor di poco inoltrata entro que' limiti.

Si ha la metà della carica a pollici ſei della punta (*Ser.* 4. *n.* 3), che ſono tre quinti dell' iſolamento dieci. Ma l' armatura è più in dietro per tutta la lunghezza della punta, che è pollici tre linee nove. Dunque in tal atto l' armatura è appena inoltrata di tre linee ne' limiti dell' iſolamento.

8. E qui pure nell' atto che ſi fa la carica ſi ſcorge la ſcintilla nel tubo diminuita in proporzione dell' aumento della carica ſteſſa.

Si prova dal numero 4 e 6 della quarta Serie col raziocinio ſimile a quello del Corollario quinto, ſe non che qui a diſtanze eguali a quelle del Corollario quinto la carica è alquanto maggiore, e in proporzione minore la ſcintilla. Fuori poi de' limiti dell' iſolamento, come niuna è la carica, così niuna è la diminuzione della ſcintilla.

INTRODUZIONE

Alla teoria delle punte negli elettrici fenomeni.

NOn altro avendo io riconoſciuto colla privata meditazione de' fenomeni delle elettriche punte deſcritte dai celebri Fiſici, che ſul bel principio accennai, ſe non anguſtie d' inveſtigazione, anche ne' più grandioſi apparati, e figlia di quelle la confuſione e la contraddizione, quanto fatte per eccitare meraviglia e ſorpreſa, altrettanto inette per iſtruire; mi propoſi di riſolvere tutti i poſſibili fenomeni delle punte ciaſcuno ne' ſuoi diſtinti elementi, e di ridurre ciaſcun elemento a miſure e proporzioni, quanto più ſi poteſſero, preciſe. Trovai a queſti oggetti inſufficiente l' uſo degli elettrometri anche più delicati, come altrove dimoſtrerò; e fui per le diſaſtroſe e lunghe vie dell' analiſi condotto in fine a nuove e luminoſe ſperienze, che ho diſtribuite in tre parti. Formano la prima quelle quattro Serie di ſperienze co' Corollarj ſin qui propoſti, e co' ſeguenti Teoremi. Comprende la ſeconda parte altra Serie di ſperienze con punte oppoſte a punte, e ſuperficie a ſuperficie, ne' Corollarj e Teoremi delle quali ſaranno vie più confermate le verità ſtabilite nella prima parte; e compariranno alfine sfatati il pennello, la ſtelletta, e ſimili apparenze di elettrica luce. Abbraccia la terza parte le combinazioni delle punte e delle ſuperficie procedenti dalle oppoſte facce di bocce o quadri caricati di elettricità, le quali ſecondo l' uſo noſtro poſſono maneggiarſi con tale eſpreſſione che fanno dai veri fonti, e naturalmente ſcorrere tutte le novità con ſingolare diligenza deſcritte da *Franklin*, da *Bergman* (*), da *Barbier* de *Tinan*, e da *Naime*.

Ripigliando frattanto il filo della prima parte oſſerverò, che non per altra ragione io arrivai a dedurre chiare e diſtinte proporzioni in una materia, quanto ribadita, altrettanto confuſa, e perciò riputata alieniſſima dalla matematica preciſione, e dal calcolo, ſe non perchè raccolſi in quel quadro verticale l' elettricità del conduttore, e la riduſſi non meno nella ſcintilla, che nella ſcoſſa agli eſtremi e ai termini ſenſibili colle indicate diſtanze. E qui benchè io ſia alieniſſimo dalla novità di nomi, co' quali ſogliono alcuni abbacinare il volgo, e rarefare i più ſemplici principj delle ſcienze, fui non oſtante coſtretto a diſtinguere le precedenti Serie di ſperienze ciaſcuna col proprio nome per non involgere i miei lettori e me ſteſſo in un labirinto di vani paradoſſi, che ſorgono inevitabili qualunque volta ſotto l' ambiguità di nomi celiamo un continuo cambio di mezzo termine, ed in vece di ſeguir fedelmente l' ingenuità de' fenomeni vogliamo a bello ſtudio deviare dalla diſtinzione delle idee e de' vocaboli che le eſprimono.

Sarebbe dopo ciò più la noja che l' utile, ſe voleſſi qui trattenermi nel racconto delle varie combinazioni, e de' replicati tentativi, per mezzo de' quali fui condotto a quelle ſperienze luminoſe. Gioverà piuttoſto avvertire, che avendo provato le Serie ſteſſe con varietà d' apparato, d' iſolamento, e di elettricità, trovai in ogni Serie proporzionali le diſtanze e gli effetti; ed ho preſcelte queſte proporzioni delle diſtanze e degli effetti,

(*) Le ſperienze di *Bergman* quanto ſono più belle, tanto meno ſono conoſciute. Le riporterò qui colle ſteſſe ſue parole: *Apices poſitivi ſtant, & negativi quoque; quod ad oculum monſtrari poteſt, phoſphoro illito. Nam vapores alias vage e corpore non electriſato ſurgentes, inſtar caudæ cometæ tam poſitivi quam negativi ad magnam diſtantiam ejectant. Difficulter cum privatione, rarefactione, & adfluxu fluidi electrici conciliari poſſunt phænomena allata.* Nelle Tranſazioni Filoſofiche di Londra Vol. 54 ann. 1764 pag. 87.

come le medie, e più coftanti, dopo averle ripetute non meno di fei volte in ciafcun atto e termine loro.

E ficcome le prime Serie mi hanno prefentato facili e chiari i Corollarj precedenti; così colla combinazione di quefti fra loro e colle fteffe fperienze mi vedo nafcere inafpettati Teoremi, che comincierò ad efporre coll' ordine più naturale.

TEOREMA I.

La punta di refinofa elettricità induce nell' oppofto quadro la fua carica con forza per lo meno quadrupla, che non la punta di vitrea elettricità.

Nella refinofa la carica ancor piena è alla diftanza di quattro pollici, che fono pur quattro entro l' ifolamento, nè arriva fotto alla metà, che agli otto, limite dell' ifolamento (*Ser.* 1. *n.* 3, 8); e l' ultimo termine della carica è ai quattordici pollici, che fono tre quarti fuori del limite dell' ifolamento (*Ser.* 2. *Cor.* 4).

Nella vitrea non è piena la carica, che fotto ai due pollici, che fono piedi otto dentro l' ifolamento (*Ser.* 3. *n.* 1, 2, 7); a' fei pollici è gia molto meno di metà, benchè fia ancor quattro entro l' ifolamento (*ivi n.* 3); e l' ultimo termine è ai dodici pollici (*ivi n.* 4), che fono un quinto fuori del limite dell' ifolamento, nel qual limite, come colla refinofa era la carica poco meno di metà, così qui non è, fe non proffima all' ultimo decadimento (*ivi n.* 4).

Calcoliamo quefte proporzioni, che fono
nella piena carica in diftanza di pollici - - 4 : 2
entro l' ifolamento fono pollici - - - - - 4 : 8
Ma ficcome l' ifolamento fu aumento
maggiore di forza, così dovrà inver-

tersi (*) la seconda ragione, e saranno

perciò comparandole, come - - - - - -	32 : 8
Similmente verso la metà della carica sono le distanze pollici - - - - - - - -	8 : 6
Entro l' isolamento pollici - - - - - - - - -	0 : 4
Invertendo i termini dell' isolamento sono come - - - - - - - - - - - - - - - -	32 : 6
L' ultimo termine della scossa sono pollici quattordici ai dodici, che sono come pollici - - - - - - - - - - - - - - - -	7 : 6
Fuori dell' isolamento sono $\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{15}{4}$ come -	15 : 4
E perciò compongono la ragione, come	105 : 24

Ai confini dell' isolamento, ove non rimane che la semplice ragione della forza di carica, è questa nella prima poco meno di metà, nella seconda è prossima all' ultimo decadimento.

Ora tanto in questa ultima semplice, come nelle antecedenti proporzioni, prese solitarie, o sommate (**), è in alcuna fino a quintupla, non è mai in veruna meno di quadrupla quella forza, come abbiamo proposto.

TEOREMA

(*) Essendo che l' isolamento maggiore corrisponde alla minor distanza del quadro dalla punta: e quella fa crescere, come la maggior distanza fa scemare la carica impressa nel quadro; perciò nel misurare la forza, che la imprime, assumo la funzione dell' isolamento in ragione semplice inversa dentro i limiti, e diretta fuori di que' limiti, benchè sia forse in ragione maggiore, che non sono quelle semplici misure. Per un Matematico che bramasse d' investigare la funzione degl' isolamenti vi sono dati sufficienti nelle Serie di sperienze.

(**) Come si tratta di gradi, o varietà corrispondenti di effetti simili, le ragioni devono comporsi sommando: quando poi si considerano diversi elementi, che concorrono a compire un effetto solo, come le distanze, e gl' isolamenti in ciascun termine della forza della carica, devono comporsi moltiplicando.

TEOREMA II.

La punta di resinosa elettricità unita ad un conduttore disperde l'elettricità raccolta o accorrente di continuo nello stesso con forza per lo meno decupla della punta di vitrea elettricità.

L'elettricità non estinta, nè dispersa dalla punta, che parte da un conduttore, si riconosce colla frequenza e colla vivacità delle scintille che a quello si traggono.

Ora quando al conduttore non fu unita la punta, le scintille di resinosa elettricità comparvero più rapide e vivaci, che quelle della vitrea.

Colla punta unita al conduttore nell'una e nell'altra specie di elettricità fu tanto notabile la differenza, che posto nella vitrea il quadro vicino alla punta più d'un pollice e mezzo e fin verso ad un pollice, si ebbero ancora dal tubo conduttore assai meno fiacche le scintille, che non lo furono colla resinosa posto il quadro al di là dei quattordici pollici (*Ser. 3. n.* 8).

Se si volesse anche qui comporre la ragione delle distanze con quella degl'isolamenti, risulterebbe di lunga mano maggiore la vera superiorità di forza disperdente della resinosa in confronto della vitrea elettricità. Ma lascieremo a que' pochi, che sanno riconoscere ne' fisici fenomeni la precisione matematica, il piacere di rintracciarla, e di convincersene da per se stessi; e dall'immediata ragione dell'indebolimento di scintille, e dalle distanze di quattordici pollici a meno di uno e mezzo, concluderemo frattanto essere nella resinosa elettricità la dispersione per lo meno decupla, che nella vitrea, come abbiamo proposto.

TEOREMA III.

La punta di resinosa elettricità spinge la sua specie raccolta e accorrente da un conduttore isolato contro uno strato resistente opposto 1. fuori de' limiti dell'isolamento con forza pressochè quadrupla, che non la punta di vitrea elettricità. 2. dentro i limiti dell'isolamento con forza non meno di dupla della punta di vitrea elettricità.

1. Quella ne' limiti dell'isolamento induce nel quadro forza di carica tanto notabile, che è verso la metà (*Ser.* 2. *Cor.* 3), e segue ad indurla sensibile anche a tre quarti al di là di que' limiti (*ivi Cor.* 4).

Questa non induce che tenue forza, quando il quadro è verso i limiti dell'isolamento (*Ser.* 4. *Cor.* 3), e non arriva ad indurne se non l'ultimo grado sensibile al di là d'un quinto di que' limiti (*ivi Cor.* 4).

Ora paragonandosi la metà della carica con picciolissima forza della stessa può prendersi con sicurezza non meno di quadrupla di questa; e così ne' limiti dell'isolamento sarà la forza impressa in ragione di 4 : 1.

Al di là de' limiti l'ultima carica sensibile è nella prima oltre i tre quarti, nella seconda ad un quinto appena. Ridotta la ragione di $\frac{3}{4}$: $\frac{1}{5}$ risulta similmente per lo meno come 15 : 4, cioè pressochè quadrupla, come si è proposto.

2. Dentro i limiti dell'isolamento quella fa piena carica fino ai quattro pollici (*Ser.* 1. *n.* 1), la quale soltanto a' sei è alquanto scemata (*ivi n.* 2), agli otto, ch'è l'ultimo confine dell'isolamento, è appena sotto la metà (*ivi n.* 3).

Questa ai due pollici è appena carica piena (*Ser.* 3. *n.* 1), ai tre già scema, ed ai quattro è già verso la metà (*ivi n.* 2), a' sei è di molto sotto la metà (*ivi* *n.* 3), ai dieci, ch'è l'ultimo confine dell'isolamento, è vicina all'ultimo grado sensibile (*ivi n.* 4).

Raccogliendo queste proporzioni di semplici distanze, sono

Piena carica come - - - - - - - - - - - - -	4 : 2
Prima diminuzione di carica come - - - -	6 : 3
Verso la metà per lo meno come - - - -	8 : 4

le quali sono tutte di ragion dupla.

OSSERVAZIONE.

Abbiamo anche in questo Teorema calcolate le semplici ragioni delle distanze, tanto dentro, come fuori de' limiti dell'isolamento; e non la ragione composta, come nel primo Teorema. Se ci piaccia di calcolarla, risulterà in questo, come in quello, non solo più di quadrupla, ma ancora più di sestupla. Eccone il calcolo

Piena carica - - -	4 : 2	Prima diminuzione di carica -	6 : 3	Verso la metà -	8 : 4
Entro l'isolamento - -	4 : 8	- - - - - - - -	2 : 7	- - - -	0 : 6
moltiplicate	32 : 8	- - - - - - - -	42 : 6	- - - -	48 : 4
invertendo	42 : 6				
la seconda	48 : 4				
Sommate - -	122 : 18				

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione poco meno di settupla

Volli ridurre gl'isolamenti a misura comune per via delle frazioni seguenti

Piena carica $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$. Prima diminuzione $\frac{1}{4}:\frac{7}{10}$. Metà di carica o: e perciò si trascura quest'ultima ragione, e si compongono colle distanze le due prime soltanto.

Ridotte adunque le stesse frazioni sono			
Piena carica -	5 : 8	Prima diminuzione -	10 : 28
Distanze corrispondenti ---	4 : 2	-------------	6 : 3
Invertendo gl' isolamenti	32 : 10	-------------	168 : 30
	168 : 30		
I prodotti sommati sono	200 : 40		

C O R O L L A R I O.

Sarebbe la ragione quintupla.

T E O R E M A IV.

L'armatura opposta alla punta di resinosa elettricità continua a raccogliere (*) nel quadro 1. al di là de' limiti dell' isolamento la carica in proporzione tanto maggiore dell' armatura opposta alla punta di vitrea elettricità come 15 : 4. e 2. dentro i limiti dell' isolamento quella raccoglie la forza della carica con proporzione tanto maggiore dell' armatura opposta alla vitrea elettricità, quanto lo è la piena forza della carica a poco più della metà, o come la metà di carica al grado prossimo all' ultimo della forza di scuotere.

1. L' ultimo grado sensibile di scossa in quella è ai tre quarti fuori de' limiti dell' isolamento (*Ser.* 2. *Cor.* 3), in questa non oltrepassa un quinto fuori dell' isolamento

(*) Questo termine di *raccogliere* non si prenda in equivoco, quasichè fosse l' elettricità emanante, o sparsa dal conduttore; ma s' intenda di raccogliere l' elettricità, che intorno all' estensione dell' armatura stessa viene smossa, o sciolta da quella del conduttore per azione della punta, e per la via del continuo mezzo frapposto.

(*Ser.* 4. *Cor.* 4); onde ridotte queste ragioni sono, secondo che si è proposto nella prima parte, come 15 : 4.

2. Nell' armatura opposta alla punta di resinosa elettricità, entro i limiti dell' isolamento vi è piena carica ai quattro pollici, ch' è la metà dell' isolamento (*Ser.* 1. *n.* 1), ed è ancor vicina la metà ai pollici otto (*Ser.* 1. *n.* 3), ch' è l' ultimo confine dell' isolamento.

Nell' armatura opposta alla punta di vitrea elettricità la carica è verso la metà tra i pollici quattro e i sei (*Ser.* 3. *n.* 2, 3), e così può prendersi più della metà ai cinque pollici, che sono la metà del suo isolamento. Ai dieci pollici, che è il confine di questo isolamento, la carica è prossima all' ultimo grado (*Ser.* 3. *n.* 4).

Ritenendosi adunque i termini comuni delle distanze di metà, e de' limiti degl' isolamenti risulta in ambedue la proporzione proposta nella seconda parte (*).

TEOREMA V.

Viceversa la punta opposta alla resinosa elettricità, considerate le sole distanze, induce la carica nel quadro, da cui parte, con forza per lo meno subtripla della punta opposta alla vitrea elettricità.

Alla distanza d' un pollice dal conduttore quella fa piena la carica (*Ser.* 2. *n.* 6), nè resta vicina alla metà di carica oltre alla distanza di due pollici (*ivi n.* 5), nè principia la carica sensibile prima di tre (*ivi n.* 3).

Questa comincia la carica ben sensibile ai nove pollici (*Ser.* 4. *n.* 2), ai sei è vicina alla metà (*ivi n.* 3), ai tre è piena la carica (*ivi n.* 4).

(*) Ho stimato di servirmi di queste proporzioni di fenomeni, che esprimono una funzione da investigarsi; dell' andamento però della quale abbiamo idea molto sensibile, e reale, benchè non determinata in numeri.

Abbiamo dunque le diſtanze per la prima
carica - - - - - - - - - - - - - - - - - - = 1 : 3
per la metà di carica - - - - - - - - - - = 2 : 6
per principio ſenſibile - - - - - - - - - - = 3 : 9

Le quali o ſommate, o preſe diſtintamente, anche ſenza comporle coll' altra funzione degl' iſolamenti, che le renderebbero aſſai minori, danno la propoſta ragione per lo meno ſubtripla.

OSSERVAZIONE.

Se ſi vuole introdurre la funzione degl' iſolamenti, eccone il calcolo:

Piena carica -	1 : 3	Metà	2 : 6	Principio ſenſ.	3 : 9
Diſtanze corriſpond. entro l'iſolamento -	7 : 7	- - -	6 : 4	- - - - - - - -	5 : 1
Moltiplicate	7 : 21	- - -	8 : 36	- - - - - - - -	3 : 45
invertendo	8 : 36				
queſt' ultima	3 : 45				
Sommate	18 : 102				

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione anche meno di ſubquintupla.

Provai anche la riduzione degl' iſolamenti a comune miſura, come nel ſeguente calcolo

Piena carica - - -	1: 3	Metà	2: 6	Princ. ſenſ.	3: 9
Frazioni corriſpondenti - - - - -	7: 7	- -	3: 2	- - - - - - -	5: 1
	8: 10		4: 5		8: 10
Ridotte - - - - - -	70: 56	- -	15: 8	- - - - - -	50: 8
Moltiplicate colla	56:210	- -	16:90	- - - - - -	24:450
prima ragione in-	16: 90				
vertendo i termini	24:450				
di queſta, e in					
fine ſommate ſono	96:750				

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione anche meno di ſubſettupla.

TEOREMA VI.

La punta, oppoſta alla reſinoſa elettricità, ſcema l'elettricità del conduttore, a cui ſi preſenta con forza minore di ſubdupla della punta oppoſta alla vitrea.

Colla punta oppoſta alla reſinoſa elettricità continuò la ſcintilla dal conduttore in tutta la ſua forza, finchè quella punta non ſi accoſtò più di quattro pollici; e ſeguitò aſſai viva ai tre, e perfino al di là dei due pollici (*Ser.* 2. *n.* 8).

Colla oppoſta alla vitrea non fu mai piena la ſcintilla, che ritirata la punta al di là dei dieci pollici; agli otto era bene inferiore alla piena ſua forza; ai quattro ancor più tarda e debole (*Ser.* 3. *n.* 9. *Ser.* 4. *n.* 8).

Sono dunque per lo meno le diſtanze di

piena ſcintilla - - - - - - - - - - -	come	4 :	10
di prima diminuzione - - - - - - - - - -		3 :	8
di maggior diminuzione - - - - - - - - -		2 :	4
		9 :	24

Le quali o ſommate, o diſtinte dimoſtrano molto minore di ſubdupla la propoſta ragione.

TEOREMA VII.

La punta oppoſta alla reſinoſa elettricità 1. fuori de' limiti dell'iſolamento non induce alcun cenno di elettricità nell'armatura, o conduttore, da cui parte, mentre la punta oppoſta alla vitrea ne induce i primi ſegni; 2. e dentro que' limiti non ha forza d'indurre la carica ſe non tanto minore della punta oppoſta alla vitrea, quanto lo è il primo grado di carica ſenſibile alla piena forza della carica.

Quella fino ai quattro pollici non dà ſegni coſtanti nel ſuo quadro (*Ser.* 2. *n.* 3); comincia piccioliſſima carica ai tre (*ivi n.* 4); ai due è meno di metà (*ivi n.* 5); e la prima carica è meno d' un pollice (*ivi n.* 6).

Queſta ai limiti comincia moti (*Ser.* 4. *n.* 1); ai nove pollici già è ſenſibile carica (*ivi n.* 2); a' ſei ben vicina alla metà (*ivi n.* 3.); ai quattro è di molto ſopra la metà (*ivi n.* 4); al di là dei tre è di piena forza (*ivi n.* 5).

Riduciamo in una tavola queſte ragioni:

Dalla punta oppoſta alla reſinoſa elettricità alla punta oppoſta alla vitrea

diſtanze pollici	10	- - - - - - - - o	ai primi ſegni
	9	- - - - - - - - o	carica ſenſibile
	6	- - - - - - - - o	carica verſo la metà
	4	primi ſegni :	carica ſopra la metà
	3.	carica ſenſibile :	piena carica
	2.	carica meno di metà	carica ridondante
	1.	piena carica	

Dalla ſemplice eſpoſizione di queſte ragioni è manifeſta la prima parte; e alla diſtanza di pollici tre ſi riconoſce in termini la proporzione fiſſata nella ſeconda parte (*).

TEOREMA VIII.

L' armatura, da cui parte la punta oppoſta alla reſinoſa elettricità nello sforzo, o capacità di ricevere ſegni, o carica elettrica, ſta all' armatura, da cui parte la punta oppoſta

(*) E qui pure eſprimiamo ſenza numeri queſte ragioni, perchè comprendono quella ragione compoſta, che laſciamo da inveſtigare ai Matematici; la quale frattanto porge a noi idea ben reale della vera efficacia delle ſpecie di elettricità.

oppoſta alla vitrea ſuori de' limiti dell'iſolamento, 1. come zero alla metà della carica. 2. e dentro que' limiti quella ſta a queſta, come ſono i primi ſegni di elettricità a più di metà della carica, ovvero come lo è meno di metà alla carica piena.

Abbiamo nel Teorema quinto fiſſate le proporzioni delle punte oppoſte alla reſinoſa elettricità, ed alla vitrea colla ſemplice conſiderazione delle diſtanze loro dal conduttore: e nel precedente Teorema ſettimo abbiamo conſiderate le diſtanze ſteſſe in riguardo ai limiti dell'iſolamento. Non ci reſta qui che di paragonare le diſtanze dal conduttore delle armature, dalle quali partono quelle punte tanto fuori, come entro i limiti dell'iſolamento. Per queſto fine a ciaſcuna delle diſtanze della tavola precedente aggiugneremo pollici tre e linee nove, che ſono la lunghezza del filo della punta ſteſſa fiſſato ſu quelle armature.

Armatura oppoſta alla reſinoſa ſta all'armatura oppoſta alla vitrea elettricità

Diſt. pollici	13. lin. 9	- - - - - - - - - -	o.	primi ſegni
	12. 9	- - - - - - - - - -	o.	carica ſenſibile
	9. 9	- - - - - - - - - -	o.	verſo la metà di carica
	7. 9	primi ſegni - - -	:	molto ſopra la metà
	6. 9	carica ſenſibile - -	:	piena carica
Segg. diſt.pol.	5. lin. 9	carica meno di metà	}	carica ridondante
	4. 9	carica piena	}	

E richiamando in mente, che l'iſolamento nella reſinoſa è di pollici otto, e nella vitrea di dieci, dedurremo dalla precedente le ſeguenti proporzioni.

1. Quella oltre i limiti dell'iſolamento, e ne' limiti non dà ſegni, nè carica, queſta dà i primi ſegni quando è ancor fuori dell'iſolamento pollici tre linee nove; preſenta la prima carica ſenſibile ancor fuori di que' limiti pollici due linee nove; e porta la carica verſo la

metà quando è ancor fuori di que' limiti linee tre: onde risulta la proporzione fissata nella prima parte, come zero alla metà della carica.

2. L'armatura opposta alla resinosa sta all'armatura opposta alla vitrea elettricità entro i limiti dell'isolamento

Distanze lin.	3. primi segni di elettricità	carica molto sopra la metà	
lin.	15. prima carica sensibile		
	27. carica ancor meno di metà	: piena carica	
	39. piena carica - - - - - -	: carica ridond.te	

Onde alle distanze di linee tre, e di linee quindici entro i limiti dell'isolamento abbiamo la proporzione in primo luogo fissata nella seconda parte; ed abbiamo l'altra in termini alla distanza di linee ventisette.

OSSERVAZIONE.

Con questi primi Teoremi la causa d'ogni elettrica teoria, fin qui agitata fra le ipotesi e le scolastiche forme, io la produco al tribunale de' Matematici, che sono in fine i veri giudici dell'evidenza; e consegnandola nelle mani loro io ne rimetto a' medesimi la cognizione e la sentenza. Prima dunque di passar oltre a svolgere i distinti elementi delle elettriche punte, i quali non possono far meno di non guidarci a' veri fonti della teoria, da cui derivano, gioverà raccogliere in una tavola, e rappresentare in un colpo d'occhio le distinte proporzioni di questi fondamentali Teoremi, per dedurne con maggior sicurezza, e comprenderne con più facilità le conseguenze.

COROLLARIO.

La punta di resinosa elettricità sta alla punta di elettricità vitrea,

1. Nella forza d'imprimere la carica in ragione per lo meno quadrupla.

2. Nel disperdere l'elettricità raccolta in ragione decupla.

3. Fuori de' limiti dell'isolamento per imprimere carica ha forza quadrupla, entro que' limiti non meno di dupla.

4. L'armatura opposta alla punta di resinosa elettricità sta all'armatura opposta alla punta di elettricità vitrea nel raccogliere la carica,

fuori de' limiti dell'isolamento, come 15 : 4.

entro que' limiti, come la piena carica alla sua metà, ovvero come la metà di carica al grado prossimo all' ultima scossa sensibile.

5. La punta opposta alla resinosa elettricità sta alla punta opposta alla vitrea nella forza d'indurre carica in ragione subtripla.

6. Per disperdere, o scemare l'elettricità del conduttore in ragione subdupla.

7. Per indurre elettricità fino ai limiti dell'isolamento, siccome zero a' primi segni.

Entro que' limiti, come il primo grado di carica alla carica piena.

8. L'armatura, da cui parte la punta opposta alla vitrea nel raccogliere la carica fuori de' limiti dell'isolamento, come zero alla metà della carica.

Entro que' limiti, come meno di metà alla carica piena.

TEOREMA IX.

L'isolamento, o mezzo resistente influisce ne' fenomeni delle elettriche punte, 1. Come recipiente, e quasi vaso contenente l' una sempre a fronte dell' altra le due specie d'elettricità. 2. Come ostacolo frapposto da superarsi dalle medesime nel compiere la loro unione. 3. Ma qualsivoglia considerazione del mezzo è per se ſola inſufficiente per adeguare la ſpiegazione di que' fenomeni.

1. L' iſolamento, e mezzo reſiſtente altro non è, che l' oſtacolo frappoſto a qualſivoglia ſpecie di elettricità raccolta o accorrente, che tende a riunirſi coll' oppoſta ſpecie ſmoſſa attraverſo del mezzo ſteſſo, o raccolta nelle ſuperficie conduttrici eſteſe in tutto o in parte dagli eſteriori limiti del mezzo, o ſtrato iſolante.

(*a*) Dopo le luminoſe oſſervazioni del celebre *Epino* non è più permeſſo di chiamare effuſione di elettricità la sfera di elettrica azione attraverſo i mezzi reſiſtenti. Le piane, o cilindriche, o sferoidali ſuperficie d' un conduttore elettrico ſono come l' armatura interiore d' una boccia Leidenſe; l' aria ambiente co' corpi iſolanti, che ſoſtengono quel conduttore, ſono come la ſoſtanza del vetro della boccia ſteſſa; e i corpi non iſolanti intorno all' eſteriore limite dell' aria ambiente ſono come l' eſteriore armatura della boccia.

(*b*) A norma di queſte idee l' interiore ſuperficie del mezzo reſiſtente (*), che circonda un conduttore elettrico, può conſiderarſi (quaſi come in Idraulica ſi conſidera la capacità d' un vaſo per contenere i liquidi) come la capacità ſteſſa di contenere l' elettricità raccolta, o concorrente in quel conduttore. Colla differenza però, che in Idraulica quella capacità corriſponde alla cavità del vaſo o recipiente; qui in vece non ſono le ſole miſure della ſuperficie ambiente che determinano quella capacità, ma ſotto le ſteſſe miſure queſta ſoggiace a leggi di capacità da quelle aſſai diverſe. E primieramente deve conſiderarſi la forza propria della elettricità ſteſſa raccolta; la qual forza, per inſiſtere ſulla premeſſa

---

(*) Sia il mezzo ſolido, o fluido; ſia uniforme, e di una ſola ſoſtanza, come nelle bocce, e ne' quadri, ovvero di ſoſtanze diverſe, come intorno a' conduttori ſoſtenuti da corpi ſolidi, cioè ſete, reſine, o vetri, e nel reſto circondati dall' aria.

ſimilitudine, corriſponderebbe alla ſpecifica gravità de' varj liquidi. Inoltre ſi deve tener conto della mobilità della ſpecie oppoſta di elettricità, che attraverſo del mezzo ſteſſo deve ſmuoverſi. In terzo luogo viene da conſiderarſi la fluidità, o fiſſità delle parti del mezzo ſteſſo, nel che conſiſte la differenza de' mezzi ſolidi o fluidi. Poichè ſebbene in ſoſtanza nulla monti per l' iſolamento la ſolidità, o fluidità; pure i fluidi per la mobilità delle loro particelle ſono dalla elettricità ſteſſa agitati con moto inteſtino non meno delle proprie parti, che de' corpicciuoli eſtranei fra quelle innatanti, che ſi rende viſibile qualora ſono inveſtiti dalla luce d' un raggio ſolare; e con tale moto ſi facilita l' inſenſibile e continua riunione delle oppoſte elettricità in proporzione che vengono ſmoſſe, o raccolte. Creſce infine quella capacità ſecondo la facilità, colla quale il mezzo, o ſtrato reſiſtente ſi preſta a ritener vicine in maggior copia, ſenza però che attraverſo di quello poſſano mai riunirſi, le due oppoſte elettricità, come ne' ſottili ſtrati di vetro abilitati a tale effetto con le armature eſterne non iſolate (*). Poichè l' uffizio del mezzo non è, che di reſiſtere all' unione delle oppoſte elettricità, ma non mai d' impedire la tendenza mutua a tale unione. Che anzi quella tendenza incontra nel frappoſto mezzo capacità di eſercitarſi; e in tale eſercizio conſiſte l' ammaſſamento delle oppoſte elettricità nelle bocce, ne' quadri, e nelle elettriche batterie.

(c) Quindi è, che le oppoſte elettricità non poſſono mai conſiderarſi ſolitarie, e intieramente diſgiunte l' una dall' altra. Non può una ſcioglierſi, che non reſti

(*) Vi è un'altra maniera di accreſcere la capacità de' conduttori, oſſervata da Gordon, e Monnier, dalla quale io ho dedotto altrove (*Phyſ. Spec. art.* 5.) la coſtruzione di paradoſſi elettrici a ſomiglianza de' veri paradoſſi idroſtatici.

sciolta insieme l'altra; nè può ciascuna adunarsi, o raccogliersi, senza che si smuova, o si raccolga intorno l'opposta specie. Ma lo smovimento o scioglimento di elettricità nel mezzo resistente non è mai dell'omologa a quella del conduttore movente. Poichè questa omologa resta libera e sciolta soltanto indirettamente; ond'è, che ne' conduttori frapposti, o immersi in tal atto nel mezzo stesso, si raccoglie e si porta l'omologa in fuori, e la opposta in dentro, cioè verso il confine della elettricità movente; come risulta dalle più esatte sperienze de' moti elettrici, e si riconosce direttamente nelle opposte armature isolate d'una boccia, o d'un quadro mentre si carica.

(*d*) Ora come il modo e la specie e la quantità di tali elettriche soluzioni interamente deriva dalla specie e quantità raccolta nel conduttore; così la figura e l'andamento delle soluzioni medesime ne' successivi strati del mezzo ambiente dalla sola figura di quel conduttore pienamente si regge, e si determina. Se tale figura sia piana, ovvero di cilindrica, o sferoidale curvatura uniforme, non può non essere similmente uniforme, ed equabilmente distribuito lo sforzo dell'elettricità muovente contro tutti i successivi punti del mezzo ambiente; e perciò restano le elettricità sciolte successivamente a onde, o strati uniformi in tutta la massa del mezzo a seconda di quella prima figura. Talchè le varie onde o strati delle elettricità smosse nelle successive distanze uguali dalla superficie del conduttore rappresentano come altrettanti indumenti o coperte della superficie stessa, che vanno attenuandosi nelle successive distanze, e sono uniformi soltanto in ciascuna. Si può in questo senso dire, che si diffonde e propaga questa elettrica azione quasi per raggi divergenti dal conduttore, come diciamo del calore, e della luce, che si propagano intorno ne' mezzi uniformi quasi in una sfera procedente dal corpo infuocato, o lucido, come da centro. E per seguitare in queste idee non ancora abbastanza note e familiari a sollevare l' intelletto colle similitudini di cose già ben intese, dirò, che tolta l' uniformità e la proporzione di lunghezza nel conduttore, succede nell' andamento di quell'elettrico sforzo ciò, che succede alla luce introdotta in lenti, o in mezzi più refringenti, che non più è quella ne' successivi intervalli uguali uniformemente diffusa, nè propagata in forma di sfera.

(*e*) Ciò che sono le lenti in Ottica, lo sono le punte nella elettricità. Turbano queste l' uniforme azione delle elettricità, e le raccolgono talvolta in modo, che si esercitano come per vortice, e simulano una effusione. Qualora pertanto nell'armatura, o nel conduttore isolato vi sieno allungamenti di superficie, ovvero spigoli, o punte, le quali altro non sono che spigoli più allungati, lo sforzo della elettricità in quel conduttore raccolta converge nell' apice di tale allungamento, e ne risulta un aumento di sforzo nella stessa, che può per similitudine paragonarsi alla velocità, che vien nominata *adulta* in Idraulica, colla quale i liquidi escono dagli angusti fori, o lumi di vasi molto ampj; ovvero a quell' impeto, con cui dall' esilissimo becco d' una eolipila esce il vapore, o altro fluido elastico. Dico *per similitudine* in quanto alla somma dell' aumento, ma non nel modo. Poichè qui non è, come in quelle, semplice impeto ed effusione, ma vera effervescenza ed esplosione con infiammazione.

(*f*) Ciò che si è detto del conduttore, che è come l' interiore armatura del mezzo resistente, s' intende con proporzione de' conduttori posti intorno a' limiti dell' isolamento, che ne rappresentano l' esteriore armatura. Se in questa vi sieno allungate superficie, o spigoli, o punte, ivi si facilita lo sviluppo delle opposte elettricità mosso da quel conduttore, in quanto che nell' apice di quelle punte si raccoglie, e confluisce l' opposta specie (*c*), che senza di queste resterebbe uniformemente diffuſa nel limite di tutta l' eſtenſione degli eſterni conduttori (*d*). E può queſt' azione per ſimilitudine paragonarſi alla ſcintilla, che dallo ſpolverino ſi comunica a ſvolgere tutta la maſſa della polvere inchiuſa, e riſtretta in un cannone. Se non che ivi ſi fa l'eſploſione per mera eſpanſione verſo la bocca del cannone; ma qui ſuccede attraverſo lo ſtrato reſiſtente una ſubita e veementiſſima effervescenza, immediato effetto della riunione delle oppoſte elettricità, che per tal via viene eccitata e promoſſa con rapidiſſima progreſſione. Ed in queſta via dell' allungamento di ſuperficie conſiſte principalmente l'uſo dell' *arco conduttore* (*), col quale eccitiamo l'eſploſione delle bocce caricate. Quelle parità non ſono che per ſuſſidio dell' imaginazione; ſono ſimili in certi riguardi, e nel rimanente conducono a riconoſcerne meglio colla ſimilitudine le proprietà, e le diverſità. Il prenderle a rigore ſi chiamerebbe roveſciare le idee, e far torto alla Meccanica ed alla Chimica, non per difetto de' loro principj, ma per la chimerica applicazione.

(*g*) Così s' intende l'azione della elettricità frenata e raccolta dal mezzo reſiſtente frappoſto, e accreſciuta per la figura allungata o acuta non meno dell' eſterno conduttore, che delle conduttrici ſuperficie poſte intorno, o ſporgenti in dentro del mezzo iſolante.

A più chiara intelligenza deve qui notarſi il diverſo ſtato delle ſpecie di elettricità ſoltanto ſmoſſa ne' varj ſtati del mezzo, e di quelle che ſono raccolte nell' eſtenſione de' conduttori. A queſte conviene il momento di accelerazione,

(*) Indi accade, che la punta poſta all' eſtremità dell' arco, che ſi preſenta per cavar la ſcarica, ne accreſce per modo il momento, che indeboliſce la forza dell' eſploſione, e in certo modo la previene. Indi ſimilmente le punte procedenti da qualſivoglia conduttore ne diſperdono l'elettricità quaſi in proporzione, che in eſſo ſi raccoglie, purchè ſieno a diſtanze, ed a ſtato di mutua azione con la oppoſta ſpecie.

accelerazione, che ſpiegai, analogo all'adulta velocità, e non a quelle, finchè ſtanno fra loro in tale poſitura e diſtanza, che poſſono egualmente o ſepararſi o riunirſi l' una con l' altra a onde e ſtrati finitimi per qualunque picciola mutazione di forza movente, o accreſciuta, perchè reſtino diviſe, o diminuita, perchè tornino a riunirſi. Queſto ſtato di elettricità è ciò che io chiamo ſmovimento delle contrarie ſpecie, che coſtituiſce i primi gradi della loro ſoluzione, o ſeparazione, che ſi eſtende gradatamente minore a grandiſſime diſtanze attraverſo i mezzi reſiſtenti, ed in quello ſtato ſuſſiſtono finchè ſono come involte nella ſoſtanza de' mezzi ſteſſi reſiſtenti. Se da queſti paſſano dentro o intorno a ſoſtanze conduttrici, allora ſi raccolgono più diviſe, e ſciolte ciaſcuna nella ſua ſpecie, e ſi muovono perciò in qualche ſomiglianza come gli altri fluidi.

2. Che ſe in ſecondo luogo ſi conſideri il mezzo come ſemplice oſtacolo frappoſto alla riunione delle oppoſte elettricità, anche per la via delle punte viene quell' oſtacolo notabilmente diminuito. Poichè l' intero prodotto della reſiſtenza del mezzo conſiderato preciſamente contra tale unione non altrimenti riſulta, ſe non dalla groſſezza del mezzo ſteſſo moltiplicata per la ſua larghezza come baſe. Ora quando queſta larghezza ſi riduce all'apice d'una punta, reſta la baſe infinitamente picciola; e perciò la colonna o maſſa del mezzo reſiſtente rimane in quella proporzione minore; ed oppone conſeguentemente tanto minore oſtacolo alla riunione della elettricità. Ed in queſta diminuzione di oſtacolo, e nell'accreſciuto momento, che abbiamo qui ſopra ſpiegato, conſiſte la facilità, con cui le ſteſſe forze aſſolute, ed oppoſte ſi riuniſcono più prontamente per la via delle punte, che delle piane o sferiche ſuperficie. E qui noteremo, che mal ſi prenderebbero queſti elementi preciſamente; ma d'uopo è aver riguardo alle forze aſſolute delle elettricità, e allo ſtato di mutua loro azione, e

diſtinguere inoltre i caſi, ne' quali ſi riducono ad agire per la via delle punte le ſpecie già accumulate in copia maggiore, o minore, e le ſpecie ſteſſe, che cominciano ſoltanto, e progrediſcono ad accumularſi.

3. Sebbene però l'uno e l'altro de' ſuddetti modi influiſca nella piena azione delle punte, nondimeno nè ciaſcuno, nè l' uno e l' altro inſieme hanno ſufficienza per adeguarne i fenomeni. E primieramente quel primo aumento ſi fonda ſulle forze reali, e vere potenze eſiſtenti tanto nell'interno, che nell' eſterno conduttore, e ſuppone inoltre fra quelle forze mutua azione. Senza le quali forze, e ſenza l' azione loro vicendevole ſarebbe lo ſteſſo il conduttore negli effetti delle punte, che ſe ſi pretendeſſe in Meccanica di accreſcere il momento per la via delle macchine ſenza potenza alcuna, ovvero con applicare la potenza ſenza oppoſizione, e ſenza unità di centro del moto comune della reſiſtenza.

Nè ſimilmente può prenderſi quella diminuzione di oſtacolo proccurata dalla coſtruzione delle punte per una efficienza, o aumento di forza delle punte ſteſſe. Si riuniſcono le oppoſte elettricità con quel reſiduo dell' aſſoluta e mutua forza loro, che non reſtò diſperſa, e diſtrutta nel mezzo frappoſto. Ora queſto reſiduo non ſuſſiſte tanto maggiore, ſe non quanto per la via delle punte ſi fa minore la reſiſtenza del mezzo. Ma qui pure, come nell' antecedente, ſe ſi prende in conſiderazione il mezzo come reſiſtenza, e ſi preſcinde poi dall' aſſoluta efficacia, e coſpirazione delle elettriche forze, ſi fa lo ſteſſo, che aſſumere l'aſtratto per la realtà, e ſoſtituire l' artifizio per diminuire gli oſtacoli alla eſiſtenza, ed all'idonea applicazione delle forze naturali. Al Meccanico non baſtano le macchine, ci vogliono le forze. Come al roveſcio quando le forze non baſtano, ſi ricorre ad unire con queſte il ſuſſidio delle macchine.

Ciò poi, che ſoprattutto dimoſtra l'inſufficienza delle ſole conſiderazioni del mezzo, o iſolamento, per adeguare la ſpiegazione de' fenomeni delle punte, ſono le inſigni varietà che nelle ſteſſe circoſtanze di mezzo, e d'iſolamento, riſultano da' precedenti Corollarj, e Teoremi, della quale varietà diremo più opportunamente ne' ſeguenti.

TEOREMA X.

L' azione delle elettriche punte non è ſemplice; nè queſte conſiderate aſſolutamente per ſe ſteſſe altro preſentano, che fenomeni confuſi, e irreducibili.

(*a*) Le punte conſiderate per ſe ſteſſe altro non ſono, che una diminuzione di ſuperficie per eſemp. di una baſe di cilindro, la quale con ſuccèſſiva diminuzione ſi riduce ad apice d' un cono (*). Per dichiarare ciò adequatamente, ſupponganſi da principio due eguali baſi di cilindro a certa diſtanza oppoſte, le quali abbiano tale quantità di vicendevole azione, che ſia rappreſentata diviſa in parti eguali con un dato numero di fili paralleli fiſſati ad altrettanti punti corriſpondenti di quelle baſi. Se mentre una di queſte reſtà intera, l' altra va ſucceſſivamente diminuendoſi, è manifeſto, che per far ſuſſiſtere quella prima loro azione vicendevole, ogni volta che in quella diminuzione s' incontra un punto, cui ſta fiſſo alcuno di que' fili, che ne rappreſentano le parti, dovrà queſto riportarſi fiſſo ad altro punto di quei, che reſtano nella baſe diminuita; e così continuando la diminuzione reſteranno per ultimo tutti que' fili fiſſati al ſolo apice del cono, in cui finalmente fu ridotta.

(*) E' dunque il nome di punta termine relativo, che ſignifica confronto di ſuperficie minore con altra maggiore; e però anche la sfera, e qualſivoglia ſuperficie a fronte d' una maggiore può rappreſentare una punta.

(*b*) Al contrario se in proporzione che fu diminuita la base, si fossero troncati i fili, che fissati ne' punti di quella ne esprimevano la intera somma, è altresì manifesto, che tale azione più non sussisterebbe, se non per quell' unica parte, che corrisponde all' unico punto e filo residuo nell' apice del cono. E perciò questo sarà tratto a sè dalla base opposta con tanta superiorità di forza, quanta è la somma di tutti que' fili divisa per quell' unico.

(*c*) Riduciamo ora ambedue queste ipotesi alla estimazione de' momenti delle forze, che si usa in Meccanica. Si sa, che le potenze, e le resistenze, ossia qualsivoglia genere di forze, si rappresentano nelle macchine con pesi o masse corrispondenti. Si sa, che due sono le vie di rendere in equilibrio due masse rappresentanti forze di qualsivoglia genere; cioè, se ineguali sono le masse, si fa che dal centro del moto della macchina non descrivano, e non possano nello stesso tempo non descrivere, che spazj reciprochi alle masse medesime. Tolto l' uno, o l' altro di questi modi, più non sussiste l' equilibrio; ma vi è preponderanza in ragione delle masse, quando eguali sono gli spazj, o in ragione degli spazj, quando le masse sono eguali, o in ragione composta delle masse, e degli spazj, se quelle e questi sono ineguali.

(*d*) Nella prima ipotesi adunque sussiste l' equilibrio di azione della punta colla intera superficie dell' opposta base per la sola ragione, che colla successiva diminuzione della prima base non si rende punto alterata la vicendevole azione coll' opposta; ma ciascun filo, che da questa procede, va successivamente raccogliendosi, e concentrandosi perfino nell' ultimo punto, a cui la prima si riduce. Supponendosi ora all' uso meccanico, che ciascun punto corrispondente rappresenti una eguale quantità di massa, niuno è che non veda espressa colla base una massa tanto maggiore, che non è la massa della punta, quanto lo è il numero de' punti divisi per quell'unico, a cui fu ridotta la punta. Onde non rimane qui altra via di equilibrio, che la reciprocità degli spazj colle masse medesime. E siccome in Meccanica la reciprocità degli spazj, posto, come lo è nelle macchine, eguale il tempo, equivale alle reciproche velocità; non altrimenti sussisterà l' equilibrio della punta colla base intera, se non con altrettanta velocità nella punta sopra la velocità della base, quanta è la ragione della somma dei fili o punti, che rappresentano la massa della base, al filo unico, che rappresenta la massa della punta.

(*e*) E questo modo di considerare la vicendevole azione elettrica fra la punta e la più ampia superficie opposta, dedotto dal meccanico principio della reciprocità degli spazj e delle velocità colle masse, non altro esprime, se non che ciascun punto dell'opposta superficie esercita nello stesso tempo la sua attività contro il solo corrispondente alla punta, e questa a vicenda esercita l'azione sua in un sol tempo contro ciascun punto della base; onde ne deriva eguale nella punta e nella base la quantità di moto, o di sforzo a muoversi, che esprime nella sua estimazione la indicata velocità reciproca colle masse; nel che consiste il meccanico momento delle punte.

(*f*) Questo *momento meccanico* è diverso da quello, che spiegato abbiamo colla similitudine della velocità *adulta*, il quale perciò potrebbe a maggior distinzione chiamarsi *momento idraulico*. Poichè quello procede dalla simultanea azione delle parti del fluido contenute nel vaso, o nella capacità del conduttore elettrico, prementi per ogni verso, e raccolte contro quelle parti, che escono dalla punta, come da un tenue foro; e qui il momento nasce precisamente al rovescio, cioè per l'azione della elettricità della punta non già spinta dall'omogeneo fluido contenuto nel conduttore, ma esteriormente accresciuta dalla simultanea e mutua azione di tante parti eguali di oppoſta elettricità, quanti ſono i punti che le eſprimono nella ſuperficie della baſe.

(*g*) Siccome però ſuſſiſterebbe quel momento primo per ſola preſſione o sforzo del fluido raccolto nel conduttore, come in vaſo, da cui parte la punta; e queſto acciocchè ſuſſiſta eſige la vicendevole azione colla elettricità dell'oppoſta ſuperficie; così non doveano l'uno coll'altro confonderſi. Maſſimamente perchè queſto meccanico momento ha luogo ſenza quel primo, come accade aſſai frequente, quando un corpicello elettrico ſenza veruna unione con altro conduttore ſi preſenta per ſe ſteſſo ad una ſuperficie più ampia inveſtita da contraria elettricità; nel qual caſo ſi eſercita la vicendevole azione loro; e ne riſulta l'attrazione, per la quantità del moto richieſta dal meccanico momento, che ora ſpiegato abbiamo. Come al contrario, da che lo ſteſſo corpicello arriva al contatto della più ampia ſuperficie, ed ivi s'inveſte della ſua elettricità, ſe ſi trovi a quella adattato in modo, che preſenti come uno ſpigolo o punta procedente dalla ſteſſa ſuperficie, allora in vigore di quell'idraulico momento, che nel precedente Teorema ſpiegai, ſarà riſpinto e ripulſo inſieme alla propria elettricità, purchè ſia queſta ſuperiore di forza alla gravità, o alla coeſione del medeſimo.

(*h*) Siamo qui ridotti ad anticipare di paſſaggio un cenno della vera cagione efficiente degli elettrici moti. Poichè dai premeſſi principj ognuno per ſe ſteſſo comprende, che ſe la maſſa rappreſentante la punta ſia mobile dovrà accoſtarſi, e indi ſcoſtarſi dalla più ampia ſuperficie con tanto eccesſo di velocità, quanto è reciprocamente l'eccesſo delle maſſe che rappreſentano le forze loro. Combinandoſi poi, e riſolvendoſi così le varie ragioni di velocità, e di maſſe, di mobilità, o immobilità col primo, o ſecondo genere di momento nel concorſo de' varj corpi inveſtiti dalle elettriche potenze, che rappreſentano la baſe, o la punta, ſi porta all'ultima evidenza, come altrove dimostrerò, la ragione de' moti elettrici, non meno che delle adesioni, la quale restò finora involta nella più densa caligine di vani sforzi d'ingegno.

(*i*) Proseguendo frattanto nella proposta materia, l'azione della punta non sussiste altrimenti per se stessa. Poichè se si prescinde dalla vicendevole azione permanente, e non mutata nella successiva diminuzione della punta opposta alla base, entriamo immediatamente nella seconda ipotesi (*b*); nella quale ben lungi dal sussistere l'equilibrio colla reciprocità degli spazj, ci riduciamo alla semplice ragione delle masse, la quale è tanto maggiore nella base, che non nella punta, quanto è il numero de' fili al solo filo residuo (*b*, *c*.).

(*k*) La punta adunque per se stessa diminuirebbe il momento delle elettriche potenze in ragione della massa diminuita; il che è contrario ai più noti fenomeni. Se poi ci rivolgiamo alla varietà degli effetti delle punte, che nella resinosa sono di forza or quadrupla, or decupla della vitrea (*Teor.* 1, *e* 2), e della stessa punta, che opposta all'una o all'altra specie di elettricità non ha nell'una, se non forza or subdupla, or subtripla dell'altra (*Teor.* 5, *e* 6); sarà fuori d'ogni dubbio, non altro scorgersi nelle punte considerate in se stesse, che nodi inestricabili.

(*l*) Ma se consideriamo le punte in riguardo all'ostacolo da superarsi, cominciamo ad accrescere l'effetto delle elettriche potenze colla diminuzione della massa stessa opposta dal mezzo, come ostacolo (*Teor.* 9. *n.* 2). Se poi si riguardano come un foro più angusto d'un vaso assai ampio, da cui esce l'azione dell'elettrica potenza, seguono ad accrescerne il momento, come fanno in Idraulica i liquidi, che escono con adulta velocità (*Teor.* 9.*e*,*f*). Se in oltre si aggiunga il meccanico momento, che più sopra spiegato abbiamo, e si componga cogli antecedenti, c'inoltreremo vie più nella cognizione degli elementi diverſi, che concorrono a formare l'intera azione delle elettriche punte, ma non la compiono finora, nè ciaſcuno per ſeſteſſo, nè compoſti inſieme, come ſeguitiamo a ſpiegare ne' ſeguenti Teoremi.

TEOREMA XI.

Suſſiſtono que' confuſi, e irreducibili fenomeni, finchè ſi conſidera l'azione delle punte, come effetto d'una forza ſola procedente in qualſivoglia modo dal ſolo conduttore elettrico, da cui quelle partono, o a cui ſi preſentano.

Si richiamino qui i fenomeni, che dopo la ſeconda Serie (*Cor.* 1, *e* 2), e dopo la quarta (*Cor.* 1, *e* 2.) abbiamo ſtabilito: cioè, che la punta di reſinoſa elettricità induce carica con forza quadrupla, e diſperde la ſua ſpecie con forza ſettupla della punta oppoſta alla ſpecie medeſima; e viceverſa la punta di vitrea elettricità induce la carica con forza or minore, or d'un terzo maggiore, e diſperde la ſua ſpecie con forza ſempre minore della punta oppoſta alla ſpecie medeſima.

E ſiccome queſti fenomeni comprendono le proporzioni dell'elettrica forza procedente dal conduttore, da cui nello ſteſſo modo partono, o a cui ſi preſentano quelle punte; così eſſendo quelle proporzioni tanto diverſe non potranno ripeterſi da una forza ſola, ſenza che queſta non compariſca contraddittoria ne' ſuoi effetti, e nelle proporzioni loro, che ſono le ſole vie, che ci guidano a conoſcerne l'eſiſtenza, e l'identità, o la diverſità.

Ma rendeſi vie più manifeſta queſta contraddizione nell'ipoteſi d'una ſola forza procedente dal conduttore, da cui parte la punta, o a cui ſi preſenta, ſe ſi rivolge lo ſguardo alle proporzioni riſtrette nel Corollario univerſale de' primi otto Teoremi.

Poſte le quali io ragiono così: Se unica foſſe la forza, o un ſolo il fluido, che coſtituiſce la potenza nelle elettriche punte, poſti eguali tutti gli altri elementi, che

che concorrono a formare il momento, come sono il mezzo, e l'applicazione delle punte stesse, eguale e costante dovrebbe di necessità risultare l' azione sua tanto nell'imprimere la carica, come nel disperdere la specie raccolta, o accorrente. E qui per farmi vie meglio intendere nella novità di queste idee ricorrerò novamente alle similitudini d' idee già note e familiari nella scienza naturale. Quando in Idraulica si calcola l' effetto dell' adulta velocità, poste le medesime proporzioni di grandezza del vaso, e del lume, da cui esce il liquido, se questo pure è sempre lo stesso, niuna differenza nè varietà s' incontra giammai nell'estimazione dell' effetto. Che se, mutata la specie del liquido, risultano colla identità di vaso e di lume delle differenze di effetto, riconosciamo queste senza meno provenienti dalla diversa massa, o gravità specifica de' liquidi stessi, e concludiamo con certezza, che per estimare l'intero effetto del liquido profiliente non basta il solo elemento di adulta velocità, ma deve questo comporsi coll'altro, ch' è intrinseco ai diversi liquidi, e corrisponde alla specifica loro gravità.

Non altrimenti dobbiamo ragionare dell'azione delle elettriche punte; e perciò siccome, posti eguali i precedenti elementi, che concorrono a compierne il momento, si presentano tante e tanto insigni differenze, forza è di concludere, che tali differenze provengono dall'intrinseca diversità di que' fluidi, ai quali corrispondono, e che costituiscono le opposte specie di elettricità. Onde nel calcolare l'intero effetto delle elettriche punte d' uopo è aggiugnere ai precedenti elementi la specifica forza di ciascun fluido, come in Idraulica si aggiugne la gravità specifica di ciascun fluido emanante.

Nè, paragonando io la specifica forza de' fluidi elettrici colla specifica gravità de' liquidi, voglio in verun modo indicare, che quella abbia nulla di comune con questa, o possa l'una coll'altra sostituirsi. Che anzi, se taluno da me ricerchi, in che consista quella specifica differenza delle opposte elettricità, io dirò apertamente, che sono contento per ora di averla dimostrata reale, ed esistente, e lascio a più felice incontro, o a più felici ingegni la cura di rintracciarla. Così l'immortale *Neuton* nell'analisi della luce fu contento di aver dimostrata con esatte esperienze e proporzioni la diversa refrangibilità de' raggi, che la compongono; e ne lasciò il modo, e la natura all'arbitrio, e alla futura investigazione.

TEOREMA XII.

Nè porgesi più felice scioglimento di quel confuso e inestricabile nodo de' fenomeni, qualora si consideri l'azione delle punte, come effetto d'una sola forza procedente dall'armatura o conduttore non elettrico, da cui quelle partono, o a cui si presentano.

(*a*) Appartengono a questo Teorema i fenomeni de' Corollarj 6, 7, e 8, tanto della seconda, che della quarta Serie di sperienze, e più distintamente le proporzioni de' medesimi fenomeni raccolti in fine del Corollario universale dai Teoremi 5, 6, 7, e 8.

(*b*) Ragionando sopra di questi similmente, come sopra quelli, che furono esposti nell' antecedente Teorema, ne siegue per necessità, che non può in verun modo assumersi una sola forza, o un fluido solo smosso dal conduttore elettrico nell' armatura del quadro, o conduttore non elettrico, da cui parte quella punta, o a cui si presenta.

(*c*) Ma siccome nella varietà delle antecedenti proporzioni abbiamo riconosciuta non meno la diversa attività delle due specie di elettrici fluidi, che l'esistenza, e realtà de' medesimi; così nella presente varietà delle proporzioni di attività della punta stessa procedente dal conduttore non elettrico, ed oppoſta or all'una or all'altra ſpecie di elettricità, ovvero or dall' una or dall'altra di queſte preſentata alla ſteſſa non elettrica armatura, dovremo ſimilmente riconoſcere nell'armatura o conduttore non elettrico non meno la diverſa facilità di ricevere l'azione dell'oppoſta elettricità, che l'influenza, o neceſſità di queſta facilità ſteſſa nella piena eſtimazione, e riſoluzione di que' compoſti fenomeni.

(*d*) E qui pure gioverà farſi ſtrada alle nuove idee col parallelo di principj familiari a chi non è affatto nuovo nelle Fiſiche teorie. Per calcolare in Idraulica l'azione di un fluido proſiliente, non vaga ed aſtratta, ma effettiva e reale, non baſta, come già oſſervai, tener conto dell'adulta velocità, e inoltre della ſpecifica gravità del liquido; che queſti due elementi non riguardano, ſe non l'attività in ſe ſteſſa. Ma ſe queſta ſi riduce all'atto di produrre un dato effetto, d'uopo è allora di riguardare anche l'altro termine dell'effetto medeſimo, come ſarebbe per eſempio, l'ala d'una ruota da muoverſi, contro la quale quel liquido percuote. Ora la quantità della percoſſa corriſponde è vero in aſtratto alla formola di velocità adulta, e di gravità ſpecifica del liquido, l'effetto però è vario ſecondo la maggiore o minore ſuperficie dell'ala percoſſa, e in oltre, ſupponendoſi coſtante, anzi la ſteſſa direzione, occorre varietà nell'effetto, ſecondo la diverſa mobilità della ruota, cui quell'ala appartiene; e ſono queſti gli elementi dell'altro termine, in cui ſi compie l'effetto di quella formola prima.

(*e*) Siccome adunque in Idraulica dalle varietà e dai limiti, che riconoſciamo nell'applicazione della ſola formola aſſoluta al determinato effetto d'una ruota da muoverſi, concludiamo ſicuramente l'influenza, e la realtà degli elementi dell'altro termine, in cui ſi compie l'azione; così la varietà di proporzioni provenienti dalle punte, che partono da un conduttore non elettrico, o a questo si presentano, porgeranno la prova, e la misura della diversa facilità, con cui l'elettricità naturalmente equilibrata e fissa ne' corpi non elettrici si muove, e si svolge per l'azione dell'una, o dell'altra specie già sciolta, e raccolta nell'opposto conduttore.

(*f*) Or questa facilità, che si scorge nella elettricità fissa ne' corpi ad essere smossa e sciolta per opera delle opposte elettricità, costituisce un nuovo e distinto termine, che concorre a compiere l'azione delle elettriche punte; e vuole perciò essere considerato più distintamente. In primo luogo la punta, che procede da conduttore non altrimenti elettrico, non ha se non minima azione, che da questo si estenda all'opposto conduttore elettrico; e perciò entra nell'ipotesi, che fu antecedentemente spiegata (*Teor.* 10, 6, 4), poichè ben lungi dall'influire nell'aumento di vicendevole azione, non presenta a questa, se non soggetto tanto minore, quanto è minore la superficie stessa della punta, a confronto di quella dell'armatura, e dei conduttori. Il che, sebbene sia chiaro per se stesso, e confacente alle verità precedenti, può nondimeno direttamente dedursi dalle stabilite proporzioni.

(*g*) Invero la punta opposta alla resinosa elettricità sta alla punta opposta alla vitrea in forza d' indurre nel quadro la carica fuori de' limiti dell'isolamento, come zero ai primi segni di elettricità; e dentro i limiti dell' isolamento come il primo grado di carica alla carica piena (*Teor.* 7).

(*h*) E l'armatura, da cui parte quella punta, sta all'armatura, da cui parte la seconda, in forza d'indurre la carica fuori de' limiti dell' isolamento, come zero alla metà della carica; e dentro i limiti come meno di metà alla carica piena (*Teor.* 8).

(*i*) Per riconoscere in queste proporzioni la superiorità delle superficie in confronto della punta, si compongano in uno i termini della prima ragione delle punte fuori de' limiti dell' isolamento; e si compongano similmente in uno i termini della prima ragione delle armature fuori degli stessi limiti; e sarà il prodotto delle punte al prodotto delle armature, come sono i primi segni alla metà della carica.

(*k*) Si compongano similmente i termini dell' altra ragione delle punte, ed i corrispondenti delle armature entro i limiti dell' isolamento; ed essendo in ambeduē comune il termine di carica piena, sarà il prodotto delle punte a quello delle armature, come sono i primi termini fra loro, cioè come sta il primo grado di carica incirca alla metà della carica stessa.

(*l*) Quindi è tanto maggiore l' azione mutua del conduttore elettrico, e del quadro, quanto è maggiore certa funzione della superficie dell' armatura sopra la superficie della punta.

(*m*) La punta adunque, finchè non ha nel conduttore, da cui parte, qualche specie di elettricità smossa e sciolta, è inetta ad accrescere la mutua azione.

(*n*) Quando poi siavi nel conduttore, da cui la punta si parte, elettricità sciolta, allora si riduce alla prima ipotesi già spiegata (*Teor.* 10. *a*), ed acquista l'elettricità stessa per la via della punta quel momento che dichiarai (*Teor.* 9. *n.* 1 *e*, *f*); e che sarebbe superfluo di spiegare più diffusamente. Aggiugnerò soltanto, che di questo stesso momento ne abbiamo esempio nella celere progressione di aumento di carica, che si osserva nella Serie seconda, e nella quarta delle sperienze in confronto dell' altre due corrispondenti; nella prima delle quali dai pollici tre all' uno ascende alla piena carica, e nella seconda dai nove ai tre arriva alla carica piena: quando all' opposto nelle corrispondenti Serie, nelle quali l' armatura non ha punta, la prima ha la differenza dai quattordici pollici fino ai quattro, e la terza dai dodici fino ai due per arrivare alla prima forza della carica.

(*o*) Che se poi si consideri nella elettricità naturalmente equilibrata e fissa la rispettiva o specifica facilità ad essere smossa e sciolta dalle opposte specie, risulta dalle proporzioni stesse precedentemente citate (*g*, *h*), che tanto nelle punte, come nelle armature, si svolge più facilmente la specie opposta alla vitrea, che alla resinosa. Poichè nelle stesse distanze rispettivamente delle punte, e delle armature, tanto entro come fuori de' limiti dell' isolamento, è sempre insignemente maggiore la forza di carica raccolta nel quadro colla vitrea, che colla resinosa elettricità del conduttore. Il che servirà per convincerci tanto più efficacemente della maggiore mobilità, o facilità di sciogliersi nella specie resinosa, se si riflette, che la forza specifica della resinosa essendo per lo meno quadrupla della vitrea (*Teor.* I), dovrebbe il conduttore elettrico di quella specie imprimere quadrupla la carica nell' opposta armatura, quando la mobilità delle due specie, che devono smoversi a tal effetto, fosse in ambedue eguale. Ora quando non s' imprime quadrupla, ma di gran lunga minore colla resinosa, che colla vitrea, non può ciò d' altronde ripetersi, che dalla proposta differenza di mobilità nelle specie stesse che si sciolgono.

(*p*) Sembrano fin qui ridotti a tale distinzione e realtà i varj elementi, che concorrono a compiere l' azione delle elettriche punte, che può ciascuno di essi riconoscersi ne' suoi effetti, e persino calcolarsi nella sua quantità. Ci piace prima di por termine a questo Teorema d' indicarne alcun esempio tra i molti, che si presentano ne' precedenti Corollarj e Teoremi. Si rifletta alle proporzioni delle distanze, e alle differenze che risultano tra la prima carica sensibile e la piena carica nelle quattro Serie poco fa indicate in fine del penultimo paragrafo (*n*). Nella Serie prima le differenze della distanza della prima carica sensibile fino alla carica piena sono dai quattordici pollici fino ai quattro; e nella terza dai dodici fino ai due, cioè in ciascuna dieci pollici, i quali ſommati ſono venti. Per contrario nella Serie ſeconda ſono dai tre fino ad uno, cioè due pollici; e nella quarta dai nove fino ai tre, cioè ſei; i quali ſommati cogli antecedenti due fanno otto pollici. Siccome dunque le diſtanze calcolate anche cogl' iſolamenti ci conduſſero negli antecedenti Teoremi a conoſcere la forza ſpecifica delle ſpecie ſciolte di elettricità; così queſte ci porgeranno dati per calcolare la diverſa mobilità delle ſpecie, che devono ſcioglierſi: e ſiccome nella Serie prima, e terza, nelle quali la punta ſi trova unita al conduttore elettrico, oltre la ſpecifica forza di ciaſcuna elettricità, ha luogo l'Idraulico momento di accelerazione per la via della punta; così nella Serie ſeconda, e quarta, nelle quali la punta appartiene all'armatura ſteſſa, in cui ſi ſciolgono quelle elettricità, oltre alla riſpettiva e ſpecifica mobilità o facilità a ſciogliersi in ciaſcuna ſpecie, avrà pure luogo l'Idraulico momento, in proporzione che vengono ſciolte. Ma baſti di aver ciò accennato, che ſi ſpiegherà pienamente con nuovi appoggi di ſperienze nella Parte ſeconda, e terza della preſente Analiſi.

TEOREMA XIII.

L'azione delle elettriche punte è compoſta; nè altrimenti corriſponde ai fenomeni, ſe non ſi riſolve ne' ſuoi diſtinti elementi 1. del mezzo reſiſtente come oſtacolo frappoſto alla riunione delle oppoſte elettricità, 2. del meccanico momento di reciproca azione, 3. della ſpecifica forza di ciaſcuna ſpecie di elettricità eccitata, o ſciolta, 4. della ſpecifica mobilità o facilità a ſciogliersi di ciaſcuna ſpecie, quando ſono naturalmente equilibrate ne' corpi, 5. dell' Idraulico momento d' iſolamento conſiderato come capacità, o recipiente delle ſciolte elettricità.

1. La quantità di oſtacolo del mezzo frappoſto può diminuirſi in due modi. Primo, con diminuirne la groſſezza ſtando ſalva l'ampiezza della baſe; e queſto mo-

do facilita bensì l'azione vicendevole delle opposte elettricità, e concorre in ragione della capacità del mezzo a formare de' grandi ammassi di opposte elettricità; ma non ne compie giammai l' unione, se non per la rottura del mezzo stesso, ovvero soltanto di quelle particelle, nelle quali la grossezza frapposta sia ridotta a zero. E furono queste le vie, colle quali giunse *Epino* ad imitare non solamente la boccia Leidense con superficie simili opposte alla superficie d'un elettrico conduttore; ma inoltre a rendere esteriormente insensibile l'azione delle contrarie elettricità sciolte, e accumulate, e farla nuovamente, e ad arbitrio, sensibile colla sola separazione, e distanza delle superficie stesse, nelle quali quelle erano raccolte.

Si diminuisce in oltre l'ostacolo con diminuirne la base, salva restando la grossezza del mezzo; e ciò si ottiene per la via delle punte, come a suo luogo si dichiarò (*Teor. 9. n. 2*). Indi il massimo effetto dell' elettrica scarica, che è la riunione stessa delle opposte elettricità, si ha sempre fra due punte disposte a conveniente distanza; e se ad una punta si opponga più ampia superficie, il massimo effetto si trova sempre raccolto dalla parte della punta, e diviso al contrario in tutta quella parte di superficie, nella quale si estende l'elettrica azione, secondo certa funzione delle distanze, e della specifica forza delle elettricità. Che se si paragoni l'azione d'una specie di elettricità spinta da un conduttore per la via d' una punta ad una opposta superficie non elettrica; o viceversa dalla superficie elettrica del conduttore spinta contro una punta non elettrica, allora risulta il massimo dell' azione tanto nello sciogliere, che nel riunire le contrarie elettricità; e similmente la massima esplosione, o forza di scintilla, che corrisponde alla minima diminuzione della elettricità raccolta nel conduttore secondo le funzioni delle distanze composte cogli altri elementi di forza specifica, e di specifica mobilità. Talchè anche colla punta

punta oppoſta al conduttore elettrico ſi trova tale diſtanza, nella quale piena rimane in queſto la forza della ſcintilla non altrimenti, che ſe allo ſteſſo oppoſta foſſe una eguale ſuperficie a diſtanza tanto minore (*Ser.* 2. *Cor.* 8. *e Ser.* 4. *Cor.* 5, *e* 8).

2. Ed in queſte reciprocità di ſuperficie colle diſtanze, alle quali ſi eſtende la vicendevole azione delle elettricità o ſciolte o da ſcioglierſi, conſiſte quel meccanico momento, che più ſopra dichiarato abbiamo, e propoſto in ſecondo luogo, come diſtinto elemento delle elettriche punte.

3. Della ſpecifica forza delle oppoſte elettricità ſciolte nulla ci rimane da aggiugnere, eſſendo già colcolata la reſinoſa per lo meno quadrupla della vitrea nell' indurre la carica, e per lo meno decupla nella propria diſperſione (*Teor.* 1, *e* 2).

4. Similmente nulla aggiugneremo della mobilità, o maggiore facilità a ſcioglierſi nella ſpecie oppoſta alla vitrea ſopra la ſpecie oppoſta alla reſinoſa; eſſendoſi già ridotta a certe proporzioni tanto di numeri, come di fenomeni (*Teor.* 5, 6, 7, 8) più diſtintamente nel Teorema duodecimo.

Non tralaſcierò qui d'avvertire, che tanto la ſpecifica forza in terzo luogo propoſta, quanto queſta ſpecifica mobilità delle due ſpecie di elettricità potrebbe calcolarſi più preciſamente ſecondo le Oſſervazioni aggiunte ai Teoremi 3, e 5; e ſecondo le funzioni dell' iſolamento, e de' fenomeni, ai quali ridotte ne abbiamo le proporzioni. A noi però baſta per ora di averne ſtabilita l'eſiſtenza, e l' andamento, riſervandoci a calcolarne giuſtamente le proporzioni in progreſſo dell' Opera col ſuſſidio di nuovi dati, che ci ſomminiſtreranno le ſucceſſive ſperienze.

5. Intorno all' Idraulico momento tanto della elettricità ſciolta e raccolta, come di quelle che ſi vanno ſucceſſivamente ſciogliendo e radunando ne' conduttori

due ſole rifleſſioni ci ſembrano degne di particolare memoria, dopo ciò che detto ne abbiamo negli antecedenti Teoremi.

Primieramente come in Idraulica non ogni apertura di lume è opportuna per proccurare la maſſima velocità del fluido emanante, ma ogni determinata altezza, e grandezza di recipiente ha tale apertura, o lume, per cui eſce il liquido colla maſſima velocità, e colla minima reſiſtenza: non altrimenti negli elettrici fenomeni ogni forma o grandezza di conduttore, o di armatura ha il ſuo maſſimo per queſto momento nelle varie proporzioni di palla, o punta ſmuſſata, o più acuta, ſecondo la corriſpondente forma, o lunghezza, o grandezza di que' conduttori, come vedremo in altre ſperienze a queſto fine dirette.

In ſecondo luogo a queſta idea d'Idraulico momento non vorremmo che taluno aſſociaſſe altri modi o altre idee di forza eſpanſiva, o di elaſticità; quaſichè ciaſcuna ſpecie di elettricità aveſſe in ſe ſteſſa principio e termine di queſto momento. Sembra a noi all'oppoſto, che tanto in queſti come univerſalmente in altri fenomeni di elettricità non debba mai preſcinderſi dalla mutua azione delle ſpecie ſteſſe fra loro, ſenza la quale ſi riduce la coſa a mere finzioni, ed a caſi imaginarj; mentre in realtà non vi è mai verun ſegno di elettricità, che non prenda principio, e incremento dalla proporzione ſteſſa di mutua azione delle due oppoſte ſpecie. In queſto ſenſo ridurremo qui principalmente que' ſoffj, e quaſi sbuffi, che ſembrano partire ſpontanei dai limiti degl'iſolamenti, ove ſono ſcabrezze, e termini acuti di corpi conduttori, non oſtante che ſiano quegli involti e coperti da un ſottile intonaco di ceralacca, o di maſtice, quando è aſſai forte l'elettricità. Così quando lo ſtrato reſiſtente ſia di ſimili materie reſinoſe ſi fora ſimilmente, e ſi trapaſſa con facilità, e reſta perciò inetto a raccoglier carica, ſe ha punte ſporgenti internamente dall'una all'altra armatura. Per ſimile ragione infine i conduttori e le armature ſopraccariche e ridondanti di elettricità ſembrano ſoffiare e sbuffare ſpontaneamente per forza interna da ogni loro ſcabrezza, o ſpigolo, o prominenza; perchè appunto per queſte vie maſſimamente eſtendono la vicendevole azione coll'oppoſta elettricità ſmoſſa a grandiſſime diſtanze ne' corpi ambienti.

OSSERVAZIONE.

In queſta prima Parte della noſtra Analiſi delle punte ragionando, non come ſi è fatto da molti finora, dalla generale ipoteſi ai particolari fenomeni, ma bensì dal particolare all'univerſale, e dalla riſoluzione del compoſto al ſemplice, che ſono le uniche vie di Fiſica induzione, ci ſi preſenta naturalmente innanzi una idea delle elettriche forze ben diverſa da quella, che corre tanto alla moda della Frankliniana ipoteſi. Se dobbiamo giudicare della realità di queſta ipoteſi, che *Kinnersley* chiamò lepidamente *ortodoſſia elettrica*, dalla confuſione, e contraddizione introdotta non meno ne' fenomeni delle elettriche punte, che in ogni altro ben diſtinto fenomeno di elettricità, non ſappiamo trovar nulla, che ci rechi il minimo ſcrupolo di eſſerci ſcoſtati da quella mal concepita ortodoſſia elettrica. Chi avrà forza di ſpirito da eſaminare con imparzialità le opere degli Autori celebri, che hanno coltivate le coſe elettriche dopo *Franklin* ſeguendo la ſua ipoteſi, potrà per ſe ſteſſo convincerſi, che hanno eſſi più ſovente ſottilizzato, che analizzato, e troverà in quelle piuttoſto rarefatte, che eſteſe le cognizioni. Si forzano e ſi ſoggiogano i nuovi e diſtinti fenomeni ai precarj principj della ipoteſi; s'involgono e ſi compongono quelli con queſti; e ſi coniano di ſiffatta miſura nuovi nomi per tener fermi i ſettarj, ed abbagliare i proſeliti; in vece di estendere, o limitare, o variare que' principj secondo l'ingenuità, e l'espressione de' semplici fenomeni.

A prendere le cose nella vera sorgente l'appellazione, e la preferenza di *positiva elettricità*, e di *fluido unico* attribuita a quella specie, che si eccita nello sfregamento de' vetri lisci, sembra non avere altro fondamento, che l'azzardo per cui *Franklin*, in quelle sue bellissime sperienze, sulle quali edificò la sua ipotesi, non ebbe per mano se non vetri, e cristalli più tosto che zolfi, e resine; ovvero perchè raccolse piuttosto l'elettricità dal vetro strofinato, che dal cuscinetto strofinante. Se avesse da principio fatte le sperienze stesse con globi di zolfo, come poi le fece *Kinnersley*, forse il nome di positiva elettricità non toccava mai più alla vitrea, ma restava per lo stesso titolo di primogenitura in infinito a tutta la linea de' corpi resinosi. Per verità nella prima Risposta a *Kinnersley* si trovò *Franklin* molto sorpreso da quelle sperienze; e le sospettò piuttosto fallaci ed equivoche per sola differenza di quantità, che non per diversità nella specie, o nella direzione. E nella seconda Risposta non le esaminò distintamente, ma contentandosi di averne replicate alcune con quell'apparato, che si trovò più comodo, che perfetto, non seppe ricusarne la verità; ed imaginandosi da quelle poche ripetute anche la realtà delle altre, le spiegò colla sua idea di *elettricità negativa*, e col *difetto* di quel fluido unico, ch'egli avea stabilito nel vetro. *Mais* (conchiude egli stesso) *ce ne sont ici que des pensées jettées à la hate*.

Grande fu il genio di *Neuton*; e la sua nobile Teoria della luce, e de' colori regge costante nelle vicende dei tempi, perchè non fu egli pago di gettarla a lampo d'ingegno, ma invecchiò prima di ridurre a termine l'analisi de' fenomeni, sui quali seppe fondarla. Fu pur grande il genio di *Cartesio*; ma le sue ipotesi perirono con lui, perchè insofferente nella osservazione, e nell' analisi fisica, si contentò di ridurle a meri voli d'ingegno. Grande è il genio di *Franklin;* ma qual confidenza dovrà averſi in un ſuo penſiero azzardato ſopra le due oppoſte ſpecie di elettricità, delle quali egli non ebbe idea ben diſtinta? Tanto più che ebbe egli idea affatto falſa della sfera di attività delle medeſime, che fu impropriamente detta, e continua a dirſi *elettrica atmosfera*, la quale idea venne poi rettificata da *Epino*.

Indi fu con non minore ſpirito, che giudizio, da qualche Fiſico non volgare propoſto il problema, non mai prima d'ora ſciolto, nè rigettato, cioè: " Suppo-
„ ſta vera ſecondo l'opinione di *Franklin* la realità e
„ l'azione d'un fluido ſolo ne' fenomeni delle due op-
„ poſte ſpecie di elettricità, dimoſtrare direttamente,
„ che quel fluido abbia ſede piuttoſto nella vitrea, che
„ nella reſinoſa; ovvero a quale di queſte due realmente
„ convenga il nome di poſitiva ". Poteva in queſto aſpetto la *Frankliniana* opinione annoverarſi fra quelle ipoteſi verſatili, che ſogliono inverterſi egualmente ſenza verun pregiudizio, che ſenza vantaggio veruno della verità.

Che ſe poi voglia ridurſi ad eſattezza di miſure e di proporzioni, che ſono la vera pietra di paragone della realtà degli effetti, e delle cauſe, ſi ſcorge mancante non ſolo ne' fenomeni delle elettriche punte, ma coi più ſolenni fenomeni della elettricità. Dimoſtro in altre Memorie ſeparate l'incoerenza de' cardinali principj, da' quali ſi deriva la ſpiegazione della boccia Leidenſe. Quante fallacie, e quante illuſioni non s'intruſero poi, e non laſciano tuttavia di ſoſtenerſi tra il volgo de' Fiſici nelle vere leggi degli elettrici moti, non bene da principio conoſciute da *Franklin*, e poco felicemente in ſeguito dichiarate, o diſſimulate dai *Frankliniani*? Chi inteſe mai col ſolo difetto, o coll'aſſenza d'un fluido le ripulſioni tra i corpi dotati di reſinoſa elettricità non meno inſigni, nè meno coſtanti, che tra i corpi inveſtiti dalla vitrea? Come s'inteſero colla ſola forza eſpanſiva d'un fluido unico le elettriche adeſioni, o coeſioni? Eppure ſono queſte il primo, e più coſtante tra gli elettrici fenomeni. Poichè allo ſtrofinamento per eccitare l'elettricità immediatamente ſuccede l' adeſione de' corpi ſtrofinati fra loro, come mi occorrerà di rendere altrove manifeſto colle più ſplendide prove; e gli altri elettrici ſegni non ſi manifeſtano mai altrimenti, che inſieme, o dopo la ſeparazione di que' corpi ſtrofinati, e aderenti; la quale ſeparazione ſi fa egualmente alzando, o ſtriſciando la ſuperficie ſtrofinante, che traendo, o ruotando la ſtrofinata. Ma delle elettriche adeſioni non ebbe *Franklin*, che idea aſſai vaga; e i *Frankliniani* o le diſſimularono affatto per comodo della loro ipoteſi, non annoverandole neppure fra i ſegni; o ne declinarono la ſpiegazione con chiamarle *fenomeni acceſſorj*: quaſichè la diſſimulazione, o la tergiverſazione foſſero vie degne di un Fiſico per accoſtarſi alla verità.

TEORIA

Del nuovo Astro osservato prima in Inghilterra.

Del Sig. Ab. RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH Professore di Ottica al Dipartimento della Marina a Parigi.

PROPOSIZIONE I.

Trovare la distanza, la posizione, e la grandezza dell' arco descritto dal nuovo Astro per mezzo di quattro osservazioni fatte nell' intervallo di più mesi.

LA brevità del cammino percorso da quest' Astro in sei mesi fa conoscere abbastanza esser egli molto remoto; si dee quasi tutto alla parallasse dell' orbe annuo della terra. L' arco descritto deve essere assai prossimamente rettilineo, e la velocità in esso sensibilmente costante. Quindi la di lui distanza, posizione, e grandezza potranno determinarsi per mezzo di quattro osservazioni, applicando a tale determinazione il problema di una retta segante in modo quattro rette date di posizione, che tre segamenti di essa intercetti dalle stesse rette siano in data ragione, cioè nella proporzione degl' intervalli del tempo. Questo problema, anche dal *Neuton* proposto nella sua Aritmetica universale per le orbite rettilinee delle comete, è stato altra volta da me dimostrato non aver luogo per l' orbite comuni delle comete (*Dissert. de Cometis An.* 1746.), e più diffuſamente in altra Operetta ſu lo ſteſſo ſoggetto, che il Signor *Caſtillon* aggiunſe nell'ultimo Tomo dell'Aritmetica Neutoniana da ſe con egregie annotazioni illuſtrata. Ma nel noſtro caſo la brevità del cammino corriſpondente alla ſmiſurata diſtanza ne permette l'uſo. Trovata la diſtanza in ſuppoſizione d'un moto rettilineo ed uniforme, agevolmente ſi potrà conoſcere, che la correzione, la quale dovrebbe corriſpondere alla curvatura ed ineguaglianza della velocità, sfugge realmente ogni ſenſo nel caſo noſtro.

Siano T, T', T'', T''', (*Fig. I.*) quattro luoghi della terra, P, P', P'', P''' quattro luoghi dell'Aſtro ridotti al piano dell'ecclittica a traverſo i quali paſſano le direzioni delle longitudini oſſervate TE, $T'E'$, $T''E''$, $T'''E'''$. Si tratta di trovare la diſtanza, la poſizione, e la grandezza della retta PP''', i cui ſegamenti PP', $P'P''$, $P''P'''$ ſiano nella proporzione data degl'intervalli del tempo infra quelle oſſervazioni.

Siano A, A', A'' le interſezioni della retta TE colle rette $T'E'$, $T''E''$, $T'''E'''$, e le rette $P''B$, $P'B'$ parallele alle rette $E'T'$, $E''T''$ s'incontrino colla medeſima retta TE ne' punti B, B'.

Nel triangolo TST' dalle date diſtanze ST, ST' del ſole dalla terra, e coll'angolo dato TST' uguale al moto del ſole tra la prima oſſervazione e la ſeconda, ſi ricaverà la corda TT' cogli angoli STT', $ST'T$: gli angoli STA, $ST'A$ ſi ſcopriranno dalla differenza delle longitudini del ſole, e dell'Aſtro. Quindi ſi avranno gli angoli ATT', $AT'T$, che ſaranno la ſomma o la differenza degli angoli STT', STA, ed $ST'T$, $ST'A$. Una figura anche trivialmente delineata, che contenga i luoghi T, T' nell'orbita circolare della terra colle rette TE, $T'E'$ indefinite, farà vedere ſe prender ſi debba la ſomma, o la differenza. La ſomma ſarà da uſarſi nel caſo eſpreſſo dalla figura per l'angolo ATT'; la differenza per l'$AT'T$. Anzi baſterà trovare l'uno ſolamente

solamente di quegli angoli, essendo il terzo TAT' la differenza data delle longitudini dell'Astro nella prima, e seconda osservazione. Quindi si troverà la retta TA, e nel modo stesso troverannosi le rette TA', TA'' nei triangoli $A'TT''$, $A''TT'''$ col mezzo de' raggi ST'', ST''', degli angoli TST'', TST''', e degli angoli $TA'T''$, $TA''T'''$ uguali ai moti del sole, e dell'Astro in longitudine dalla prima alla terza, e quarta osservazione.

Si dicano t, t', t'' i tempi dalla prima osservazione alla seconda, alla terza, alla quarta; m, m', m'' i moti dell'Astro in longitudine dalla prima osservazione alla seconda, da questa alla terza, dalla terza alla quarta. L'angolo $A''P'''B$, il cui lato $A''P'''$ ha la direzione della longitudine quarta, e il lato BP''' parallelo all' AP' la direzione della seconda, sarà $= m' + m''$, l'angolo $A''P'''B'$ sarà $= m''$ per la direzione $B'P'''$ parallela alla direzione $A'P''$ della terza longitudine: l'angolo poi $A''BP'''$ sarà $= m$ per le direzioni BA'', BP''' delle longitudini prima e seconda, e l'angolo $A''B'P'''$ sarà $= m + m'$ per le direzioni $B'A''$, $B'P'''$ delle longitudini prima e terza. Si facciano i seni di questi angoli $a =$ sen. $(m' + m'')$, $a' =$ sen. m'', $b =$ sen. m, $b' =$ sen. $(m + m')$. Si facciano pure $AA'' = c$, $A'A'' = c'$, $PA'' = x$.

$$\text{Sarà } t : t'' :: PP' : PP''' :: PA = x - c : PB = \frac{t''x - c\,t''}{t};$$

$$\text{e perciò } A''B = \frac{t''x - c\,t''}{t} - x = \frac{(t'' - t)\,x - c\,t''}{t} : \text{così}$$

$$\text{sen.} A''P'''B = a : \text{sen.} A''BP''' = b :: A''B : A''P''' = \frac{(t''-t)bx - bct''}{at}.$$

Con le stesse proporzioni sostituendo le rette $A'P''$, $B'P'''$ alle rette AP', BP''', e perciò i valori a', b', c', t' ai valori a, b, c, t, si avrà l'altro valore della medesima $A''P''' = \dfrac{(t'' - t')\,b'x - b'c't''}{a'\,t'}$. Laonde fatto $\dfrac{(t''-t)b}{at} = m$,

$\frac{b\,c\,t''}{at} = n$, $\frac{(t''-t')\,b'}{a'\,t'} = m'$, $\frac{b'\,c'\,t''}{a'\,t'} = n'$, si avrà $A''P''' = m\,x - n = m'\,x - n'$, e perciò $x = \frac{n - n'}{m - m'} = A''P$.

Avuto questo valore, e il valore $AP''' = m\,x - n$ coll' angolo $PA''P'''$, il quale è il moto in longitudine dalla prima osservazione alla quarta $= m + m' + m''$, si avrà nel triangolo PAP''' tutto il cammino PP''' cogli angoli in P, e P''', che esibiscono la di lui posizione rispetto alle rette TE, $T'''E'''$; e le distanze TP, $T'''P'''$ si avranno aggiungendo le $A''P$, $A''P'''$ qui trovate alle trovate prima TA'', $T'''A''$; e perciò si avrà ciò che si dovea ritrovare.

SCOLIO.

Non ho qui in villa, dove sì fatte cose scrivo, la soluzione di questo Problema proposto dal *Neuton* nella sua Aritmetica universale, nè quella di *Simpson*, di cui mi sono servito nell' accennata Operetta stampata dal *Castillon*, e molto meno l' altre anteriori, di cui fa menzione il *Neuton*. Quelle si potranno riscontrare, ed usarle quando esibiscano un più spedito calcolo numerico. Il metodo però da me qui usato nella soluzione dello stesso Problema sembra assai naturale, e diretto, ed offre una formola molto semplice.

PROPOSIZIONE II.

Trovare la specie, e la grandezza dell' orbita.

Nella *fig.* 2. i punti S, T, P siano i medesimi che nella prima, e i punti A, P', T' siano gli A'', T''', P''' di quella: siano poi C C' i luoghi dell' Astro nella sua orbita. Moltiplicando TP, $T'P'$ per le tangenti della latitudine prima ed ultima ſi troveranno le rette PC, $P'C'$ perpendicolari al piano dell' eclittica, e perciò perpendicolari alla retta PP', a cui ſe ſi concepiſca la retta CI parallela ed uguale, ſarà anch' eſſa cognita con la differenza $C'I$ delle rette PC, $P'C'$; e però ſi avrà anche la corda dell' orbita CC', ipotenuſa del triangolo CIC', la quale per la latitudine di queſt' Aſtro piccioliſſima appena differiſce dalla retta PP'. Se queſta ſi divida in due egualmente in H, e s' inalzi HH' fino alla corda CC', che ſarà la ſemiſomma delle rette PC, $P'C'$, e ſi tirino SP, SH; ſi avranno nel triangolo SPT i lati ST, TP coll' angolo STP, che è la differenza delle longitudini del ſole, e dell' Aſtro, e perciò ſi troverà SP, e l' angolo SPT, che coll' angolo trovato APP' darà l' angolo SPH; queſto poi col lato SP, e $PH = \frac{1}{2} PP'$, darà la retta SH, dalla quale e dalla retta HH' ſi avrà SH'. E' noto poi anche il lato $CH = \frac{1}{2} CC'$, e facilmente ſi troverà SC dai lati SP, PC cogniti coll' angolo retto SPC: quindi ſi avrà anche l' angolo $SH'C$, cioè la poſizione della retta CC', la quale può prenderſi per la tangente dell' orbita per riſpetto al raggio vettore SH'. La perquiſizione diverrà molto più ſemplice ſe ſi prendano PP', SH, SHC invece di CC', SH', $SH'C'$, il che ſarà lecito in queſt' Aſtro, che ha le latitudini così picciole.

La lunghezza della corda CC' riferita al tempo tra le oſſervazioni eſtreme offre la velocità, che paragonata colla velocità del corpo che ha da rivolgerſi in cerchio nella diſtanza SH', determinerà il genere della ſezione conica, nella quale l' Aſtro ſi move, e quell' iſteſſa velocità, inſieme coll' angolo $SH'C$, determinerà la di lei ſpecie, e la grandezza nel modo ſeguente. Si dica n lo ſpazio, che col moto medio della terra vien percorſo nel tempo di un minuto, la diſtanza media della terra dal ſole poſta $= 1$, r il raggio vettore SH', c la corda CC', t il tempo dalla prima oſſervazione all' ultima. Il quadrato dello ſpazio corriſpondente al tempo t in quel moto medio ſarà $n^2 t^2$; ed eſſendo i quadrati delle velocità in cerchj intorno al ſole in ragione reciproca dei raggi, il quadrato dello ſpazio corriſpondente al medeſimo tempo nel circolo, il cui raggio $= r$, ſarà $\frac{n^2 t^2}{r}$. Per la qual coſa il quadrato della velocità in quel circolo ſarà al quadrato della velocità di quell' Aſtro come $\frac{n^2 t^2}{r}$ a c^2. L'altezza, da cui cadendo con un moto uniformemente accelerato con la forza, che rattiene il mobile nel cerchio, ſi acquiſterebbe la velocità circolare, è, per li teoremi *Hugeniani* la quarta parte del diametro; di modo che per quel cerchio è $= \frac{1}{2} r$, e le altezze dovute alle diverſe velocità, con pari forza, ſono come i quadrati delle ſteſſe velocità. Quindi l'altezza dovuta alla velocità dello ſteſſo Aſtro ſarà $= \frac{c^2 r^2}{2 n^2 t^2}$.

In una mia diſſertazione, che ha per titolo, *Del modo di trovare l'orbita d'un pianeta coll' ajuto della catottrica*, ho da gran tempo pubblicata una ſempliciſſima ed eleganitiſſima coſtruzione del problema, in cui data la diſtanza, la velocità, e la poſizione della tangente ſi cerca la ſezione conica da deſcriverſi; la qual coſtruzione ho ivi dedotta dalla ſoluzione d'un certo problema catottrico. Ho di poi dedotto la ſteſſa coſtruzione da ſoli principj appartenenti alla teoria delle forze decreſcenti in ragione reciproca duplicata delle diſtanze in altra Operetta intorno alle perturbazioni di Giove, e di Saturno, come ſegue.

Sieno nella *fig.* 3. i punti S, C i medeſimi che nella *fig.* 2., ed H ſia lo ſteſſo che H'. Si pigli HK verſo S uguale all' altezza dovuta alla velocità, ed SL terza continuatamente proporzionale a SK, SH nella direzione SK. Si conduca LT perpendicolare alla tangente HC, e ſi prolunghi in M. L'aſſe primario della curva ricercata ſarà uguale alla retta SL; i due fuochi ſaranno S, M, e nel loro mezzo il centro N; dati i quali è manifeſto, ch'è data pure la ſezione conica.

La curva ſarà un'elliſſi, una parabola, o un'iperbola ſecondo che l'altezza HK ſarà minore, uguale, o maggiore per riſpetto al raggio SH. In queſto ultimo caſo i punti K, L giaceranno nella retta SH prolungata dalla parte di S. Nel caſo dell'elliſſi ſi avrà il circolo, ſe ſarà $SK = \frac{1}{2}\, SH$, e l'angolo SHC retto. Nel caſo della parabola, ſvanendo la SK, la longitudine dell'aſſe SL diventerà infinita, e i punti N, M allontanandoſi all'infinito, la poſizione dell'aſſe, e la diſtanza perielia ſi determineranno facilmente con queſt'altra coſtruzione. Col centro S, e coll'intervallo SH ſi trovi nella ſteſſa tangente il punto Q, e tagliata in due egualmente la HQ in O, ſi trovi OV perpendicolare alla retta SQ: ſarà V il vertice della parabola, SV la diſtanza perielia, la cui direzione determinerà la longitudine del perielio nell'orbita: nel caſo dell'elliſſi la direzione SM offrirà la longitudine dell'afelio, SN l'eccentricità, SL il tempo periodico, che ſi avrà dal teorema Kepleriano, qualora ſi prenda la radice quadrata del cubo della metà dell'aſſe SL, la quale eſibirà il numero degli anni.

Per ritrovare l'altezza $HK = \dfrac{c^2\, r^2}{2n^2\, t^2}$ ſi ha il valore trovato $SH = r$, $CC' = c$, e il tempo t, che aſſumer ſi deve in minuti: biſognerà in oltre trovare il valore n. Il che potrà farſi nel ſeguente modo. L'anno ſidereo è nell'Aſtronomia del Sig. *de la Lande* di giorni 365. 6^h. $9'$. $10'' = 31558150''$; lo ſpazio fatto in queſto tempo nel cerchio, il cui raggio $= 1$, è la circonferenza $= 2 \times 3,1415927$; e però lo ſpazio n corriſpondente ad un minuto, cioè a 60″, farà $\frac{12 \times 3,1415927}{3155815}$,

e il logaritmo del valore $\frac{1}{2n}$ 2 farà $= 7,8534090$. Se gli si aggiunga il doppio logaritmo della distanza r, e del valor della corda c, e il doppio complemento aritmetico del logaritmo del tempo t espresso col numero de' minuti, si avrà il valore dell' altezza HK, il quale paragonato colla distanza SH esibirà un' ellissi, una parabola, o un' iperbola, secondo che per rispetto ad essa farà minore, uguale, o maggiore.

PROPOSIZIONE III.

Trovare tutti gli elementi della Teoria di quest' Astro.

La longitudine del nodo, e l' inclinazione con facilità si troveranno anche indipendentemente dalla specie dell' orbita. Sia nella *fig.* 2. R l' intersezione delle rette $P'P$, $C'C$: farà SR la linea dei nodi, la di cui direzione esibirà la longitudine del nodo ascendente, se tutte due le latitudini, come qui, saranno boreali, e $P'C'$ maggiore parimenti, come qui, della PC. Fatto $P'C' - PC = C'I : PC :: P'P : PR$, si troverà questo lato del triangolo SPR, in cui è manifesto anche l' angolo SPR, supplemento dell' angolo trovato SPH: il lato poi SP coll' angolo TSP si avrà nel triangolo TSP, nel quale si hanno i lati ST, TP coll' angolo in T, che è la differenza della longitudine del sole, e dell' Astro nella prima osservazione; e perciò troverassi l' angolo PSR. L' angolo STP aggiunto qui a quella longitudine del sole esibirà la longitudine eliocentrica della direzione SP, e l' angolo PSR levato da quella somma esibirà la longitudine ricercata della direzione SR tendente al nodo ascendente.

Se ſi concepiſca un piano perpendicolare alla retta SR condotto per la retta PC, colla quale SR s' incontri in D; l' inclinazione ricercata ſarà l' angolo PDC, la di cui tangente è $\frac{PC}{PD} = \frac{PC}{SP \times sen.\ PSR}$. Perciò ſi avrà anche l' inclinazione.

Per la longitudine del perielio ſi ha nella *fig.* 2. l' angolo PSH nel triangolo SPH già riſoluto; il quale aggiunto qui all' angolo RSP eſibirà l' angolo RSH : la di cui tangente diviſa pel coſeno dell' inclinazione darà l' angolo RSH'. Imperciocchè ſe il piano $HD'H'$ parallelo al piano PDC s' incontri con la medeſima SR in D'; ſarà $HD'H'$ l' inclinazione, e la retta HD ſarà il coſeno di quell' angolo col raggio $D'H'$, mentre queſte due rette ſono tangenti degli angoli RSH , RSH' col raggio comune SD'. L' angolo RSH' aggiunto qui alla longitudine del nodo, cioè della direzione SR, offrirà la longitudine della direzione SH' . Si ha l' angolo $HRD = PRD = APP' - PSR$, la di cui tangente pure moltiplicata pel coſeno dell' inclinazione somminiſtrerà l' angolo $H'RD'$. Quindi ſi avrà $SH'C' = RSH' + H'RD'$, che è il medeſimo, che l' angolo SHQ della *fig.* 3. Il ſupplemento del doppio angolo SHQ ſarà l' angolo HSQ , per eſſere iſoſcele il triangolo HSQ ; il quale aggiunto alla longitudine della direzione SH darà per il caſo della parabola la longitudine del perielio; e dalla teoria poi generale dell' orbita parabolica la diſtanza perielia SV è $= SH \times$ ſen.^{2} SHQ, e perciò anche que' due elementi facilmente ſi avranno nel caſo della parabola. Qui pure ſi conſeguirà l' effetto più facilmente ſe nella *fig.* 2. ſi aſſumano i punti P, H, P' invece de' punti S, H', C'.

Per il caſo dell' ellíſſi , date nella *fig.* 3. SH, HK, ſi avrà SK, ed SL, la cui metà ſarà il ſemiaſſe maggiore uguale alla diſtanza media. Si avrà ancora $HL = SL - SH$, e perciò anche LT perpendicolare alla tangente $HC = HL \times$ sen. LHC. Quindi si avrà LM doppia di essa; ed avendosi nel triangolo SLM anche il lato SL, e l'angolo L complemento dell'angolo LHC, si troverà SM doppia della eccentricità SN, e l'angolo MSL, il quale tolto dalla longitudine della direzione SH darà la longitudine dell'afelio. Le distanze perielia ed afelia si avranno dalla differenza, e dalla somma della distanza media, e dell' eccentricità trovata, e il semiasse minore sarà medio proporzionale geometrico tra di esse. Simile è l' operazione per l'iperbola; se qualche somma non si muti in sottrazione, o viceversa secondo le leggi della trasformazione dei luoghi geometrici.

Il tempo dell'arrivo al perielio nella parabola si avrà dalla teoria generale del moto parabolico, in cui si ha un bellissimo, e poco avvertito teorema del *Neuton* nel primo libro dei Principj della filosofia naturale, di cui ho io da gran tempo fatto uso per determinare assai facilmente per ogni giorno, e ad ogni due giorni i luoghi della cometa nella parabola graficamente delineata. Il teorema è questo. Mentre la cometa progredisce in quella curva con un moto assai ineguale, il centro del circolo che passa per il sole, per il vertice dell'asse, e pel luogo della stessa cometa, si muove con un moto uniforme nella retta linea, che taglia in due parti eguali, e ad angoli retti la distanza perielia, e nel tempo, che dal perielio la cometa deviene all' anomalia di 90 gradi, percorre un segamento di essa uguale all'istessa distanza perielia. Indi poi per qualunque anomalia, data la quale si ha pur anche il raggio vettore, dividendo la distanza perielia per il quadrato del coseno di mezza l'anomalia, si deduce agevolmente la formola molto semplice, che ci dà il tempo corrispondente a quell' anomalia.

Nella *fig.* 4. le rette MN, ON che segano in due ugualmente, e ad angoli retti la distanza perielia SV, ed il ed il raggio vettore SH s' incontrano fcambievolmente nel punto N, ch'è il centro del circolo, che paffa per li punti S, V, H: la retta MP è perpendicolare alla retta SH: e con effa s' incontra in Q la retta NQ parallela ad OS. Se il raggio vettore SH fi faccia $= r$, la diftanza perielia $SV = u$, l' anomalia $VSH = a$; farà $SP = \frac{1}{2} u \, cof. \, a$, $OP = \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} u \, cof. \, a = NQ$. L' angolo NMQ farà eguale all' angolo $MSP = a$, effendo l' uno e l' altro il complemento dell' angolo SMP. Quindi farà $MN = \frac{NQ}{fen. \, a} = \frac{r - u \, cof. \, a}{2 \, fen. \, a}$.

Il numero de' giorni corrifpondenti all' anomalia di 90 gradi nella parabola avente la diftanza perielia $= 1$ fi chiami n; il numero ad effa corrifpondente nella data parabola farà $= nu^{\frac{3}{2}}$ e però fe fi faccia $SV = u$:

$$MN = \frac{r - u \, cof. \, a}{2 \, fen. \, a} :: nu^{\frac{1}{2}} : \frac{nu^{\frac{1}{2}}}{2 \, fen. \, a} (r - u \, cof. \, a)$$

quefto ultimo termine efprimerà il numero de' giorni debito all' anomalia a. In oltre il numero n è $= 109$, 6, e perciò il numero cercato farà $\frac{54,8 \, u^{\frac{1}{2}}}{fen. \, a} (r - u \, cof. \, a)$.

Quefto numero aggiunto al tempo medio tra le offervazioni eftreme darà il tempo dell' arrivo dell' Aftro al perielio. In fatti la formola qui trovata è molto femplice, e può effere di grandiffimo ufo tanto per computare la tavola parabolica dei tempi corrifpondenti alle anomalie, quanto ancor molto più per ritrovare il tempo, qualora le tavole già computate non s' abbiano alle mani, o qualora l' anomalia ecceda la maffima di quelle, che nelle fteffe tavole fi contengono. Dove fi tratta di computare la tavola, riefce la formola anche più femplice fatto $u = 1$.

Se l' orbita è poi ellittica, quel tempo fi computerà coll' ajuto del settore ellittico riferito all' area totale. Se nella *fig.* 5. i punti S, N, H siano i medesimi, che nella *fig.* 3., e siano poi A, P i punti dell' afelio e perielio, e la retta HK perpendicolare all' asse attraverso AP prolungata dalla parte di H s' incontri col cerchio circoscritto in I, e si tirino le rette SI, SH, NI; si avrà l' angolo ASI, facendo come il semiasse maggiore trovato NI al semiasse conjugato medio geometricamente proporzionale fra le distanze AS, SP afelia e perielia similmente ritrovate, così la tangente dell' angolo NSH avuto nella risoluzione del triangolo SLM alla tangente di quell' angolo. Il valore dell' arco $IL = \frac{SN \times IK}{NI} = SN \times sen.\ ANI$ si riduca alle parti angolari facendo come $113 : 355 :: NI : \frac{355}{113} \times NI$, ch' è il valore di mezza la circonferenza, così $\frac{355}{113} \times NI : IL = SN \times$ sen. $ANI : 180° : \frac{113 \times 180°}{355} \times \frac{SN \times sen.\ ANI}{NI}$; fatto questo valore $= M$, si farà come $360°$ ad $ANI + M$, così il tempo periodico al quarto: quest' ultimo valore sarà il tempo corrispondente all' anomalia ASH; trovato il quale, si avrà il tempo dell' arrivo al perielio.

Se il moto si faccia nell' iperbola, non difficilmente si otterrà il tempo ricercato mediante il valore dell' area iperbolica, che si ha per mezzo de' logaritmi: ma egli sembra molto improbabile, che i corpi, se ve n' ha che si movano in iperbole, di tal maniera a noi s' avvicinino, che cadano sotto gli occhi.

Se il moto sia diretto, o retrogrado, facilmente si scoprirà dall' osservazione stessa della *fig.* 1., delineata anche grossolanamente dopo determinata la distanza della retta PP'', e la posizione del punto A'', che è il concorſo delle direzioni TE , $T'''E'''$. Si ha in oltre pur queſta regola generale. Se l'uno dei punti S, A'' giacerà tra le rette $T''T$, $P'''P$ indefinitamente prolungate, e l'altro fuori; il moto ſarà retrogrado: altrimenti ſarà diretto. Qui ſi troverà l'uno e l'altro dai punti di dentro: quindi il moto ſarà diretto . Così tutti ſi avranno gli elementi della Teoria, che ſi dovevano determinare.

S c o l i o.

Il metodo ſinora eſpoſto appoggiato alla prima Propoſizione non può adoperarſi, ove ſi tratti delle comete comuni che non cadono ſotto gli occhi ſe non ſe in diſtanze molto minori; perchè ſe ſi prenda l'arco maggiore, la curvatura e l' ineguaglianza della velocità ſi oppongono all' ipoteſi, ſopra di cui ſi fonda quella ſoluzione: ſe poi ſi prenda l'arco minore, in cui ſembri che quella curvatura ed ineguaglianza ſi poſſa traſcurare, allora l' arco eziandio deſcritto dalla terra è pure rettilineo ſenſibilmente, e vien percorſo colla velocità anche meno ineguale: quindi tanto l' arco cometico, quanto l' arco terreſtre ſi dovranno avere inſieme per linee rette, l'una e l' altra delle quali da quattro direzioni della longitudine è ſegata nella medeſima proporzione del tempo. Per altro in quell' antica mia Diſſertazione ſulle comete, e nello Schediaſma impreſſo dal *Caſtillon* appiè dell' Aritmetica univerſale del *Neuton* io ho dimoſtrato, che nel caſo che quelle quattro rette date paſſano per li quattro binarj de' punti appartenenti alle due rette tagliate in quei punti nella medeſima ragione, rieſce il problema indeterminato per tal modo, che preſo qualunque punto in una di quelle rette in qualunque diſtanza, poſſa condurſi altra retta, che da quelle quattro medeſime ſarà ſegata in quella ſteſſa ragione. Donde naſce, che ſe ſi abbia la determinazione, ella non corrisponde alla natura del problema, ma ai piccioli errori dell'osservazioni, e alle quantità neglette per dar luogo alla supposizione d'un moto rettilineo ed uniforme.

Nel nostro caso va la cosa molto diversamente. Altro metodo, ch'esporrò fra poco, il quale mediante tre osservazioni ricerca la distanza nell'ipotesi d'un moto parabolico, mi fa vedere, che la distanza stessa è doppia della distanza di saturno dal sole, la quale invero mi si appalesò dover'essere di quella grandezza, anche essendo il moto circolare. In quella distanza l'arco anche di sei mesi non differisce sensibilmente da una linea retta, nè il moto s'allontana dall'uniforme, di maniera che non ne può provenire l'errore neppur d'un secondo; mentre il moto della terra in un arco così grande moltissimo differisce dalla retta linea. Quindi nella *fig.* 1. le rette linee $T'E'$, $T''E''$ segano la corda TT''' in ragione assai diversa dalla ragione dei tempi, in cui segano la corda PP''', il che toglie l'indeterminazione, e dà speranza d'uno scioglimento abbastanza accurato. L'esattezza della soluzione dipende dalla grandezza del numeratore, e del denominatore della formola trovata nella Proposizione prima $x = \frac{n - n'}{m - m'}$, la quale nel caso dell'indeterminazione renderebbe vana la soluzione, dando $\frac{0}{0}$, o una frazione derivata da' soli errori delle osservazioni. Quanto più differenti saranno tra di sè le ragioni de'segamenti di quelle corde, tanto maggiori saranno que'valori, e perciò tanto meno si altereranno per li piccioli errori delle osservazioni; per la qual cosa potrà sperarsi la determinazione abbastanza esatta, se le ultime osservazioni sieno distanti l'una dall'altra l'intervallo di sei mesi. Dopo sei mesi la corda TT''', che è la base della parallasse annua, diminuisce; il che pure nuoce ad una esatta determinazione. A prima viſta ſembrano ſommamente acconce le oſſervazioni fatte tre meſi avanti, e tre dopo la congiunzione col ſole, che in queſt' anno è ſucceduta poco innanzi al ſolſtizio eſtivo, o l' oppoſizione, che ſi avrà preſſo al ſolſtizio invernale, perchè allora quella baſe non ſarà obbliqua; ma ſe ſi adoperino le oſſervazioni fatte avanti, e dopo la ſtazione, che ſi avrà prima della metà di Ottobre, i ſegamenti della corda TT''' avranno una ragione molto più diverſa dalla ragione de' ſegamenti della corda PP'''. Queſta differenza ſarà ancora molto più grande, ſe un anno intero ſia lontana l' ultima oſſervazione dalla prima; nel qual tempo altresì l' errore nato dalla curvatura dell' arco di queſt' Aſtro ſarà così picciolo, che ſi potrà traſcurare, e agevolmente potraſſi determinare, ſe piacerà, per poterne tener conto: la corda TT''' ſvanirà; ma le corde TT'', TT'' ſaranno abbaſtanza grandi, e la ſoluzione avrà luogo adattata appuntino a quel caſo. Intanto potrà ſperarſi qualche ſucceſſo dalle oſſervazioni fatte nel principio di Aprile, e da farſi nel principio del proſſimo Ottobre con due intermedie aſſai diſtanti da quelle, e da sè ſcambievolmente.

Il metodo, che ſuppone l'orbe circolare, o parabolico, non ſoggiace a queſto pericolo, ſe nella ſoluzione del problema ſi adoperi anche la relazione, che la grandezza della CC' nella *fig.* 2. deve avere alla diſtanza dal ſole. Per l' orbe circolare baſtano due oſſervazioni, tre pel parabolico. Eſporrò queſti metodi nelle due ſeguenti Propoſizioni.

PROPOSIZIONE IV.

Trovare il raggio del cerchio nell' ipotesi circolare col mezzo di due osservazioni.

Primamente questo raggio si troverà poco lontano dal vero col metodo seguente. Nella *fig.* 2., che offre due osservazioni, si troverà la corda TT', e la retta TA, come nella Proposizione prima: indi nel triangolo STA troverassi SA dai lati ST, TA, e dall' angolo in T, tutte cose note. Poichè tutto l'angolo TAT', che è il moto totale in longitudine di questo Astro assai lento, è di pochi gradi; sarà l' angolo ASH molto picciolo eziandio dopo lo spazio di sei mesi, e perciò la retta SH', che qui similmente quasi nulla differisce dalla retta SH, sarà prossimamente uguale alla somma delle rette SA, AH, la prima delle quali se si chiami a, l'altra x, sarà $SH' = a + x$. E mentre sia il triangolo PAP' isoscele, la retta PP' sarà perpendicolare alla retta AH, e perciò pochissimo differente dalla retta perpendicolare alla retta SH, intercetta dalle rette $AP \times AP'$, la quale sensibilmente non differirà dalla CC', che le corrisponde, e questa dall' arco del circolo intercetto fra le rette TC, $T'C'$. Se poi l'angolo PAP' si chiami m, sarà PP' in caso d' isoscelismo $= 2\,AH \times \tan.\frac{1}{2}\,PAP' = 2x \tan.\frac{1}{2}m$, in luogo di cui si può porre $x \tan. m$, perchè le tangenti de' piccioli angoli sono proporzionali assai prossimamente agli stessi angoli; e ciò sarà assai prossimamente il valore dell' arco CC'.

Nella Proposizione seconda si è trovato lo spazio n, che in un minuto di tempo vien percorso nella distanza media della terra dal sole. Quindi se il tempo fra queste osservazioni, ridotto a minuti, si chiami t, sarà lo spazio debito a quel tempo in quel circolo nt. Ora il raggio SH' di quest' orbita circolare essendo $a + x$, sarà il quadrato dello ſpazio corriſpondente a quel cerchio $= \frac{n^2 t^2}{a+x}$, eſſendo li quadrati delle celerità reciprocamente proporzionali ai raggi de' cerchj. Quel valore fatto $= CC'^2 = x^2 \, tan.^2 m$, ſarà $x^3 + a x^2 - \frac{n^2 t^2}{tan.^2 m} = 0$ l'equazione di terzo grado, che darà il valore ricercato x il più proſſimo al vero.

Trovato il valore x per tale equazione, agevolmente ſi troverà il valore più accurato della diſtanza col metodo di falſa poſizione. Preſo quel valore per la retta AH, e il triangolo PAP come iſoſcele (dalla qual forma pochiſſimo potrà egli differire) ſi avrà $HP = HP' = x \, tan. \frac{1}{2} a$, ed $AP = \frac{x}{cos. \frac{1}{2} a}$; e nel triangolo TSP ſi avrà ST, e $TP = TA + AP$ coll' angolo STP, e perciò troveraſſi il valore SP, che deve eſſere aſſai proſſimamente uguale al valore SH, e queſto al valore SH', come ancora CC' aſſai proſſimamente uguale al valore PP'. Il quadrato di queſto moltiplicato per SH' deve eſſer uguale al valore ritrovato $n^2 t^2$. La differenza ſarà l'errore da correggerſi per altra poſizione del valore x, il quale ſi dovrà pigliar minore o maggiore, ſecondo che per lo contrario quel prodotto riuſcirà per ſorte minore o maggiore del valore $n^2 t^2$; imperciocchè accreſciuto il valore di x s'accreſcerà tanto PP', quanto SH'. L'error nuovo paragonato col primo eſibirà il valore di x, il quale correggerà l'errore, ſe i precedenti errori ſaranno ſtati piccioli, come ſaranno di fatto: altrimenti lo diminuirà in tal guiſa, che per nuove poſizioni ſi dileguerà ben preſto.

Dalle oſſervazioni del dì 3 Aprile, e 17 Luglio ho trovato la diſtanza TP aſſai proſſimamente $= 19, 6$. Se ſi adoperi la ſeconda oſſervazione ancor più remota, trovato per mezzo di eſſa il valore TA, e da queſto valore levato TP, il rimanente ſi potrà aſſumere per AP; così PP' per $= 2AP \times$ ſen. $\frac{1}{2}$ PAP', e trovato il valore SP nel triangolo STP, ſi avrà $PP'^2 \times SP$, valore da paragonarſi col valore n^2t^2. In tal maniera ſi eviterà l'equazione del terzo grado. Ma anche più facilmente la coſa ſi condurrà ad effetto, dove foſſe nota la longitudine dell' Aſtro in oppoſizione da paragonarſi colla longitudine in congiunzione col ſole, che di leggieri ſi deduce dalle oſſervazioni del meſe di Maggio, e di Luglio: imperciocchè circa la congiunzione lo ſteſſo moto apparente, per altro lentiſſimo, dovette eſſere quaſi accuratamente equabile. La differenza di queſte longitudini ſarà il moto angolare intorno al ſole: facendo come queſta differenza delle longitudini a 360°, così l'intervallo del tempo fra quelle due poſizioni al quarto termine, queſto darà il tempo periodico, dal quale per la terza legge di *Keplero* riſulterà la diſtanza dal ſole.

Ho data qui una ſoluzione di queſto problema analoga al mio metodo più generale che ſerve per le orbite paraboliche; ma eſſo ſi ſcioglie molto più facilmente per la falſa poſizione in queſt' altra maniera. Si prenda nella ſteſſa fig. 2. un raggio SP arbitrario: nel triangolo TSP ſi avrà l'angolo in T, che è la differenza delle longitudini geocentriche del ſole, e dell' Aſtro, e la diſtanza ST del ſole dalla terra: così ſi avrà l'angolo SPT, il cui ſeno è $= \frac{ST \times sen. STP}{SP}$: eſſo dovrà eſſere aggiunto alla longitudine geocentrica dell' Aſtro data dalla oſſervazione, o dovrà eſſerne ſottratto, ſecondo le diverſe circoſtanze facili a determinarſi, per avere la longitudine eliocentrica dell' Aſtro medeſimo. Così ſi avranno le due longitudini eliocentriche di eſſo corriſpondenti a' due tempi delle due oſſervazioni, e però ſi avrà l'arco deſcritto in quell' intervallo di tempo. Queſto ſi paragonerà a quello, che dovrebbe deſcriverſi in eſſo in esso intervallo in vigore della distanza assunta. Se un anno tropico sia $= a$; la distanza assunta $= r$; quell' intervallo $= t$; la circonferenza del circolo $= c$; l'arco, che corrisponde a quel tempo, sarà $= \frac{tc}{ar^{\frac{3}{2}}}$, ciò che facilmente si ricava dalla regola di *Keplero* de' quadrati de' tempi proporzionali a' cubi delle distanze: in vigor di essa il tempo periodico di esso Astro sarà $= ar^{\frac{3}{2}}$ preso r nelle unità uguali alla distanza media del sole dalla terra; e l'arco cercato sarà il quarto termine proporzionale dopo questa quantità, il tempo t, e l'intera circonferenza. Questo arco confrontato con quello, che avevano dato le due osservazioni, dà l'errore della posizione; la quale rifatta, quanto bisogna, deve dare al fine la vera distanza, da cui si ricaverà anche il tempo della rivoluzione, che avrà per numero di anni il solo valore $r^{\frac{3}{2}}$.

Convien però avvertire di correggere le osservazioni dell' Astro col liberarle dall' aberrazione del lume, e dalla nutazione, correggendo il luogo del sole colla nutazione sola: non occorre aver riguardo alla precessione degli equinozj; giacchè la rivoluzione siderale dell' Astro contiene lo stesso numero degli anni siderali, che la rivoluzione tropica degli anni tropici.

Quando nella scorsa state del 1781 composi questo opuscolo, trovai coll' altro metodo la distanza 19, 6, servendomi di due osservazioni, che erano troppo vicine fra loro, come ho detto qui innanzi, onde i piccoli errori delle osservazioni portavano un errore più considerabile nel risultato; oltrechè non aveva impiegato le picciole correzioni sopra accennate, bastandomi allora di avere a un dipresso la distanza da determinarsi meglio colle osservazioni più lontane, come appare negli Scolj seguenti. Adoperando poi delle osservazioni più lontane con questo altro metodo, e facendo uso delle debite correzioni, ho trovato la distanza di 18, 90. Un' osſervazione del 25 Aprile confrontata con una del 12 Decembre mi ha dato 18, 914, e con una del 21 Febbrajo 18, 892: il numero di mezzo, diſprezzando le milleſime, reſta il ſuddetto 18, 90½. Queſto viene confermato anche dalla differenza delle longitudini nella congiunzione, ed oppoſizione, di cui ho pur fatta menzione in queſto opuſcolo. Ma per avere il tempo, e il luogo della congiunzione eſatti, e non all' ingroſſo, non ſi può ſupporre il moto geocentrico dell' Aſtro uniforme; giacchè la diſtanza della terra dal ſole, e dall'Aſtro medeſimo variandoſi, varia la velocità di eſſo moto; e come l' Aſtro non avendo latitudine ſenſibile, ed avendo una luce sì debole, reſta naſcoſto dietro al ſole per troppo lungo tempo; queſta diſuguaglianza nuoce ſenſibilmente alla determinazione cercata. Ho un metodo per evitare queſto inconveniente, che ſpiegherò in altro opuſcolo, dove darò anche l' applicazione di varie combinazioni di oſſervazioni a' metodi qui propoſti.

Aggiungerò qui ſolo, che il Sig. *de la Lande* ha trovato per la diſtanza 18, 913, e calcolando con queſta un gran numero di oſſervazioni ha trovato una differenza di pochi ſecondi; ciò che dimoſtra, che l' orbita non ſi diſcoſta molto dalla circolare, e ci aſſicura, che queſto è un vero pianeta diſcoſto dal ſole quaſi eſattamente al doppio di ſaturno.

PROPOSIZIONE V.

Trovare l'orbita parabolica col mezzo di tre oſſervazioni.

Sieno nella *fig. 6.* tre luoghi della terra T, T', T'' con tre direzioni delle longitudini TE, $T'E'$, $T''E''$, S il luogo del ſole, P, P', P'' tre luoghi dell' Aſtro nell' orbita parabolica, il cui arco in iſmiſurata diſtanza potrà qui prenderſi per rettilineo, e il moto per uniforme. Sia poi il ſegamento Tt della corda TT'' alla corda TT'', come il tempo fra la prima e ſeconda oſſervazione al tempo tra la prima e terza; e ſe la terra si movesse con moto uniforme per la corda TT'', il luogo di essa nella seconda osservazione sarebbe in t, e la seconda longitudine avrebbe avuto la direzione tP' in vece della direzione $T'P'$ cavata dall' osservazione. Sostituita questa longitudine alla longitudine osservata, e fatti t, t', t'' i tempi dalla prima osservazione alla seconda, dalla seconda alla terza, dalla prima alla terza, ed m, m', m'' i moti in longitudine, che corrispondono a que' tempi, si avrà la seguente proporzione $T'P' : TP :: \frac{t'}{sen.\ m'} : \frac{t''}{sen.\ m''}$, e quest' altra $T'P' : T''P'' :: \frac{t}{sen.\ m} : \frac{t''}{sen.\ m''}$.

Questo teorema si deduce da quello, che ho dimostrato nella seconda delle due operette impresse nel Tomo VI. degli Opuscoli, che dall' Accademia di Parigi si pubblicano col titolo di *Memoires presentès à l' Academie*. Ivi a' luoghi della terra, e della cometa ne' suoi archi curvilinei picciolissimi ho sostituito le interſezioni de' raggi vettori colle loro corde. Dimostrai che in caso, che la saetta dell' arco descritto intorno al centro delle forze sia picciola assai per rispetto al raggio vettore, può prendersi il moto di questa interſezione per equabile; sostituita poi la longitudine della direzione, tendente dall' interſezione del raggio terrestre colla sua corda all' interſezione del raggio cometico colla sua, alla longitudine della direzione tendente dal luogo della terra al luogo della cometa nella seconda osservazione, si ottengono le proporzioni qui proposte. Mentre alla interſezione del raggio terrestre colla sua corda si sostituisce qui il punto t segante la corda stessa in ragione de' tempi, e non curata la saetta dell'arco cometico troppo picciola per la smisurata distanza, l'interſezione del raggio cometico alla corda dell' arco ridotto al piano dell' eclittica si confonde in P col luogo dell' Aſtro, è manifeſto che il medeſimo teorema deve qui pure aver luogo.

Queſto teorema ivi m' offerſe un metodo ſpeditiſſimo, onde determinare l' orbita della cometa, aſſai proſſima alla vera, col mezzo di tre oſſervazioni, adoperando il metodo di falſa poſizione. Imperciocchè, preſa la diſtanza accorciata ſeconda $T'P'$, ſi trovano con quella proporzione la prima, e la terza; e col loro mezzo per una grafica coſtruzione ſpedita, o per la riſoluzione di ſei triangoli, de' quali tre ſono rettangoli, trovaſi tanto la corda PP'', quanto la corda dell' orbita CC'' coi raggi vettori SC, SC''. Ivi poi ho dimoſtrato anche queſt' altro teorema: ſe il prodotto dal quadrato dello ſpazio, che col moto medio della terra ſi percorrerebbe in due minuti di tempo, moltiplicato nel quadrato del tempo t'' ridotto a minuti, ſi chiami a, e la ſomma di tali raggi b; deve eſſere $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$, traſcurate le quantità, che nel caſo di queſta ſaetta picciola riſpetto al raggio vettore ſicuramente poſſono traſcurarſi: il logaritmo poi di quel quadrato trovai eſſere 0, 756499, al quale aggiunto il doppio logaritmo del valore t'', il valore a facilmente riſulta; ed una volta trovato rimane coſtante in tutte le propoſizioni. La differenza del valore della formola dal valore a è l' errore da diminuirſi dopo la nuova poſizione, o da correggerſi; donde naſce, che per una ſola ſerie di poſizioni ſi deviene ai valori ricercati, mentre col metodo comune ſi ricerca la ſerie di molte ſerie, il che eſigge una fatica di calcoli quaſi intollerabile. Ho poi anche il metodo, con cui per le comuni comete delineata facilmente una figura molto ſemplice, ſi forma giudizio della grandezza da aſſumerſi per la prima poſizione, ſicchè ſi ha appena biſogno della terza poſizione. Agevolmente poi avute tre longitudini, e latitudini l' una dall' altra diſtanti l' intervallo di pochi giorni, e adoperata l'operazione grafica coll'ajuto del calcolo numerario, nello ſpazio di due o tre ore ſi trovano gli elementi proſſimi ai veri, e da correggerſi poi facilmente coll'oſſervazioni più remote.

In queſto metodo ſpeſſe volte può traſcurarſi la riduzione della ſeconda longitudine, potendoſi dimoſtrare, che la retta che congiunge le interſezioni dei raggi vettori colle corde è parallela alla retta che congiunge gli ſteſſi punti degli archi, allor quando la cometa nella ſeconda oſſervazione è in congiunzione col ſole, o in oppoſizione, o sì veramente in una diſtanza dal ſole uguale alla diſtanza del ſole dalla terra; per la qual coſa in quell'Operetta ho omeſſa tal riduzione, di che però ed ivi, e in quell'antica prima Diſſertazione ſopra le comete fatto aveva menzione. Ho poi un metodo generale molto ſpedito d'aver la ragione della riduzione ſteſſa, che ho propoſto alla ſteſſa Accademia, e con molte altre coſe appartenenti alla teoria delle comete eſpoſto in un'opera di giuſta mole, che ho già da gran tempo bella e compiuta, cui già con molti ſupplementi da aggiungerſi ho accennato due anni fa in fine della nuova edizione del mio poema ſopra l'ecliſſi pubblicato in Parigi colla traduzione in franceſe. Queſta riduzione è qui del tutto neceſſaria, dovendoſi a cagion del moto troppo picciolo uſare le oſſervazioni avute in uno intervallo di tempo molto più lungo, in cui ſi può bensì avere per rettilineo l'arco di queſt'Aſtro; ma la curvatura dell'arco terreſtre è sì grande, che non ſi può del tutto traſcurare. Queſta riduzione ſi farà, trovato che ſia l'angolo $T'P't$ per qualunque poſizione.

Queſt'angolo ſi conſeguirà facilmente, e tutta la rimanente perquiſizione potrà effettuarſi nel modo ſeguente. Ne' triangoli TST', TST'' con le diſtanze ST, ST', ST' del ſole dalla terra, e cogli angoli in S uguali al moto del ſole in longitudine corriſpondente ai tempi t, t'', ſi troveranno le corde TT', TT'', e gli angoli in T, T', T'', e le diſtanze TA, $T''A$ nel triangolo TAT''. Facendo t'' : t : : TT'' : Tt, ſi troverà queſto lato del triangolo $TT't$, in cui avraſſi ancora il lato TT', e l'angolo $T'Tt$, differenza degli angoli STT'', STT'. Laonde ſi avrà $T't$, e l'angolo $TT't$, dal quale ſe ſi levi l'angolo $TT'E'$ differenza dell'angolo $ST'T$ dall'allungazione $ST'E'$, ſi avrà l'angolo $tT'E$. Queſte coſe dovranno trovarſi una volta; le quali ſaranno poi le medeſime per tutte le poſizioni inſieme col valore a una volta trovato per mezzo del logaritmo $0, 756499$ aggiunto al doppio logaritmo del tempo t'' ridotto a minuti.

Ora preſo un valore arbitrario per la diſtanza $T'P'$, ſi avranno nel triangolo $P'T't$ i lati $T'P'$, $T't$ coll'angolo in T', ch'è il medeſimo che il trovato $tT'E'$. Laonde ritroveraſſi l'angolo $T'P't$ da aggiungerſi qui alla longitudine della direzione $T'P'$ per aver la longitudine della direzione tP', la quale dovrà adoperarſi per trovare i valori m, m' ridotti. Il ſeno di queſt' angolo ſarà $\frac{T't \times ſen.\, T'tP'}{t\,P'}$. Per la qual coſa trovato una volta il valore $T't \times$ ſen. $T'tP' = T't \times$ ſen. $T'tE'$, queſto per ciaſcheduna delle poſizioni ſi dovrà dividere per il valore tP', per cui ſi potrà prendere $T'P' - T't$, onde avere la riduzione $T'P't$.

Allora poi ſi avrà $TP = \frac{t''\, ſen.\, m'}{t'\, ſen.\, m''} \times T'P'$, e $T''P'' = \frac{t''\, ſen.\, m}{t\, ſen.\, m''} \times T'P'$. Togliendo poi TA, $T''A$ ſi avranno le AP, $A''P''$, e perciò nel triangolo PAP'', in cui l'angolo PAP'' è uguale al moto totale m'' in longitudine, ſi avrà PP''. Quindi ſi avranno coll' ajuto delle latitudini PC, $P''C''$, $C''I = P''C'' - PC$ colla corda $CC'' = c$. Nel triangolo SPT co' lati dati ST, TP coll'angolo in T ſi troverà SP, e nello ſteſſo modo SP''. Queſti due lati con PC, $P''C''$, e cogli angoli in

P, P'' retti daranno i raggi SC, SC'', e perciò la ſomma $SC + SC'' = b$. Baſterà qui confrontare il valore bc^2 col valore a, imperciocchè il valore $\frac{c^4}{12b}$ ſvanirà, come ſarà manifeſto a chi ne faccia eſperienza, per il valore della corda c troppo picciolo riſpetto al valore b.

Diſtrutto l' errore col mezzo di alcune poſizioni ſi troveranno tutti gli elementi dell' orbita parabolica, come nella Propoſizione terza. Ho applicato queſto metodo alle oſſervazioni de' giorni 3 Aprile, 7 Maggio, e 17 Luglio, che qui eſibiſco colle poſizioni del ſole.

	T.M.	Long. dell' Aſtro	lat. B	long. ☉	diſt. ☉
Apr. 3	9ʰ.19	2ˢ.24°.52′,7	0. 5′.38″	0ˢ.14°.29′,9	1,00124
Mag. 7	8. 35	2. 26. 12,4	0. 8. 36	1. 17. 32,7	1,01019
Lug. 17	15. 17	3. 0. 17,7	0.12. 10	3. 25. 43,2	1,01612

Il tempo medio è per Parigi. Ho per altro tralaſciato i ſecondi a cauſa del moto in uno ancora e più minuti inſenſibile. Nelle longitudini ho uſato le ſole decime parti de' minuti, perchè così non ſi traſcurano ſe non ſe al più tre ſecondi, l' error de' quali in queſte oſſervazioni corriſponde unicamente alla quinta parte di un ſecondo di tempo. Nelle latitudini, che più accuratamente ſi definiſcono per le declinazioni non dipendenti dal tempo, ho ritenuto i ſecondi, e ciò molto più, perchè gli errori di eſſe, molto minori in sè, nuocono aſſai più riferiti ad eſſe cotanto picciole, qualora ſi cerca la poſizione della linea de' nodi, e l' inclinazione, i quali due elementi perciò ſaranno molto meno certi.

Ho trovato i valori $a = 13,1101$, $TA = 14,8947$, $T''A = 15,4811$. Dopo poche poſizioni, nelle quali molto tempo innanzi alla fine del calcolo oſſervai, che il valore della corda PP'' riferito alle diſtanze, era per dare gli errori troppo grandi, posi $T'P' = 20$, ed avendo veduto, che le picciole differenze della posizione mi offerivano mutazioni smisurate nella grandezza dell'errore, assunsi le rette SP, SP'', PP'' per eguali alle rette SC, SC'', CC''. Il valore bc^2 mi riuscì 13, 6920, mentre $\frac{c^4}{12\ b}$ fosse minore di 0, 0001, e perciò da trascurarsi del tutto. Quindi l'errore fu $+$ 0, 5819. Posto 19, 8, riuscì l'errore $-$ 2, 2049. Indi la nuova posizione dovette essere 19, 9584, la qual pur usata, l'errore fu depresso a 0, 0855. Per questi due ultimi errori trovai le mutazioni assai picciole delle rette TP, $T''P''$, PP'', SP, SP'' trovate in quest' ultima posizione. Queste poi corrette adoperai per trovare PC, $P''C''$, e coll' ajuto loro trovai tosto i primi due elementi, e così gli altri tutti col metodo esposto nella Proposizione terza. Può bensì essere che in tanti calcoli numerici mi siano sfuggiti degli errori in quest' età mia d' anni 71, avendogli fatti mentre villeggiava lungi dalla capitale, siccome ancora mi trovo, scrivendo queste cose, dove non ho veruno assistente ai calcoli. Nondimeno più volte ripetuti gli stessi calcoli, e corretti, mi pare di potermene fidare; e trasmessi poi questi elementi a Parigi, furono giudicati abbastanza congruenti con quelli, che ivi da altri furono ritrovati con altri metodi, e dopo fatte molte osservazioni.

Qui aggiungerò una cosa, che diminuita alquanto la distanza può ritrovarsi altra corda, che al problema soddisfaccia, in cui però l' Astro s'allontanerebbe dal sole, e dalla terra, e perciò molto tempo innanzi sarebbe egli stato visibile. Avendo da principio usate le osservazioni più vicine per la corda più vicina, col mio metodo comune alle orbite delle comete, trovai un' orbita, che restò tosto dalle seguenti osservazioni abbandonata, il che addivenne pur anche ad altri. Considerando

rando a fondo la cosa trovai avervi quattro corde, ciascuna delle quali soddisfarebbe, due prossime e due remotissime: escluse quelle, si dovette ricorrere a queste.

Proporrò qui infine dell'operetta gli elementi trovati per la parabola, e vi aggiugnerò la figura, (*Tav. annessa*), in cui è delineato ogni movimento di questo Astro, che si avrà per più anni eziandio dopo l' arrivo al perielio, se l' orbita di esso è parabolica. La specie dell' orbita si determinerà più accuratamente dopo molte combinazioni di quattro osservazioni, e ciò anche più accuratamente se ciascuno di questi luoghi si cavi per interpolazione da più osservazioni fatte in molti giorni, onde gli errori di esse si distruggano scambievolmente. Pel metodo parabolico potranno usarsi con maggior frutto, e con calcolo più facile i luoghi corrispondenti a tre mesi in circa, ma in eguali intervalli dal mezzo corrispondente alla stessa opposizione, intorno alla quale facilmente si osserverà l' Astro nel fine di quest' anno, e nel principio del seguente: imperciocchè allora il punto t cadrà nella retta $T'E'$ della *fig. 6*, cosicchè non sia d' uopo della riduzione della seconda longitudine; essendo poi eguali i tempi t, t', sarà TP : $T''P'$ :: sen. m': sen m, e perciò senz' aver alcun riguardo alla seconda distanza accorciata TP, si potrà la posizione fare per la sola TP, presa la quale, e fatto una volta il valore $\frac{\text{sen.}\, m}{\text{sen.}\, m'} = r$, sarà $T'P' = r \times TP$, come proposi nella seconda di quelle mie operette stampate per ordine dell' *Accademia*; ed in vero si potrà pur anche, se piaccia, usare il metodo della prima operetta, che riduce il problema ad un' equazione di sesto grado. Ma quelle operette intendersi non possono interamente, se non si corregga l' erronea trasposizione delle tavole, che giunto in Francia trovai in quel sesto volume impresso a Parigi avanti la mia venuta: la tavola che ivi fu apposta dopo il fine della prima operetta insieme colla terza apposta dopo il fine della seconda, devono essere la prima, e la seconda della seconda operetta; e le due prime apposte all' operetta seconda appartengono alla prima. Essendo le medesime operette moltissimo nello stesso volume distanti l' una dall' altra, e le pagine, ove debbono inserirsi da' legatori, non incontrandosi col fatto, nessuno a caso indovinerà i veri luoghi delle tavole, e perciò senza siffatto avvertimento quell' operette non possono essere di alcun uso.

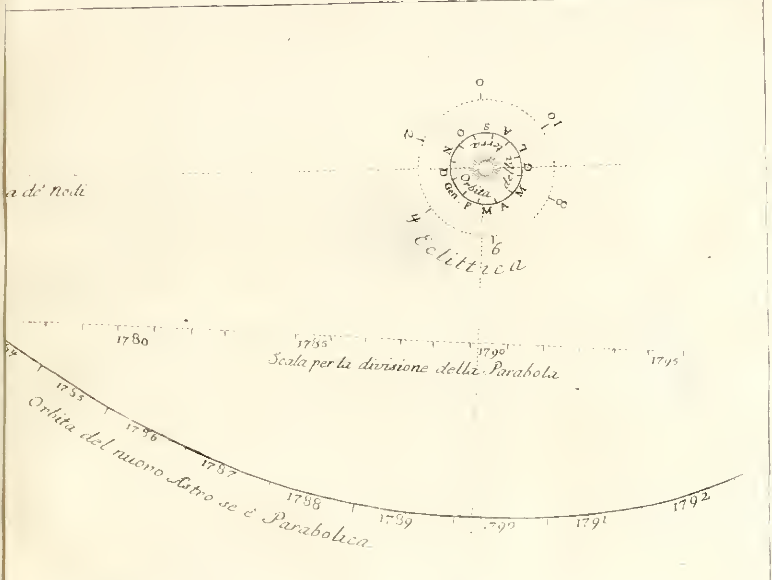
Se usar si debbano le osservazioni di due o tre anni, si dovrà far conto della curvatura, e dell' ineguale velocità, il che certamente per l' uno e l' altro metodo facilmente si otterrà, determinando l' effetto della gravità verso il sole relativamente alla distanza da esso prossimamente cognita, il quale effetto determina la posizione del punto dell' arco, in cui è l' Astro, dal punto della corda, da cui è divisa in ragione dei tempi. Qui presa la distanza = 19 trovai la riduzione della seconda longitudine indi nata non giugner neppure ad un secondo, come di sopra ho accennato.

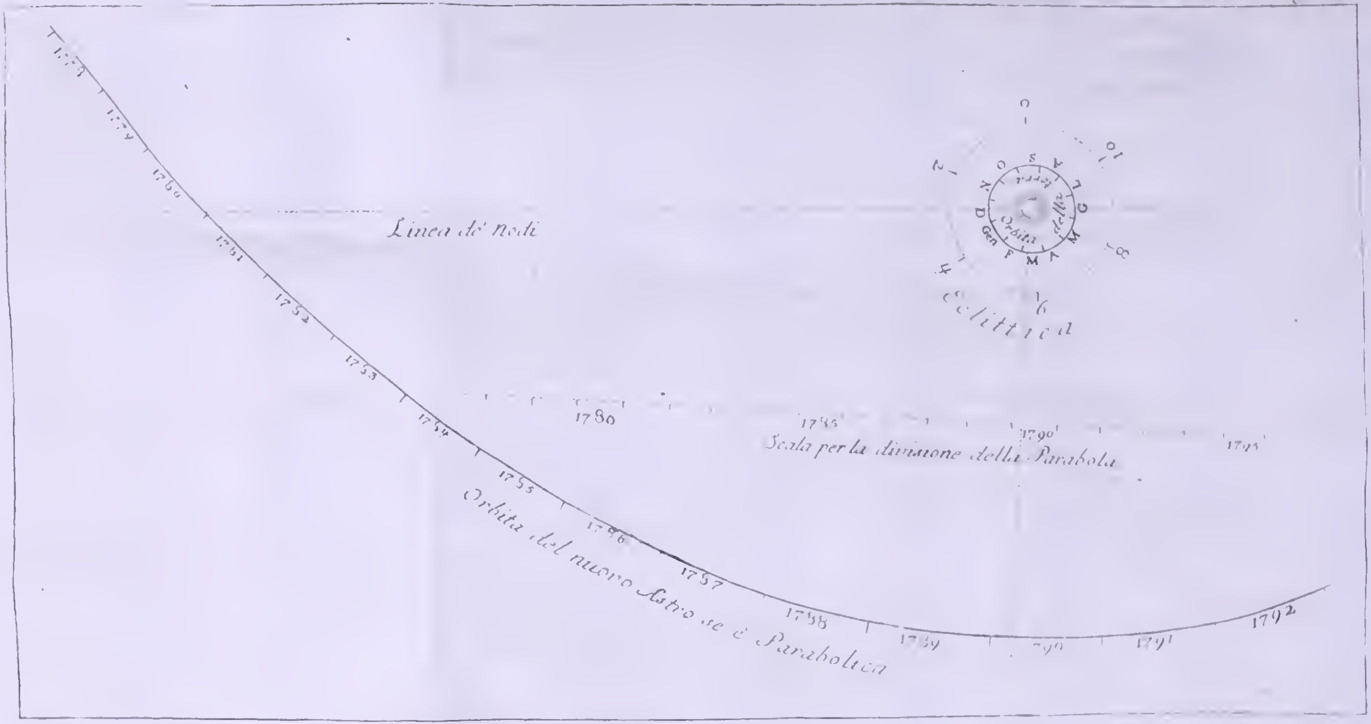
Elementi in supposizione dell' orbita parabolica.

Longitudine del nodo - - - - - - - - -	$2^s.\ 25^\circ.\ 13,\ 3$
Inclinazione - - - - - - - - - - - - - - -	$2.\ 17,\ 6$
Luogo del perielio nell' orbita - - - -	$5.\ 22.\ 16,\ 9$
Distanza perielia - - - - - - - - - - - - -	10, 2756
Arrivo al perielio - - - - - - - - - - -	13. Marzo 1790.
Moto diretto.	

Mem. della Soc. Italiana Tomo I. Pag. 82

Mem. della Società Italiana Tomo I. Pag. 82




Linea de' nodi
Eclittica
Orbita della Terra
Scala per la divisione della Parabola
1780
1785
1790
1795
Orbita del nuovo Astro se è Parabolica
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1791
1792

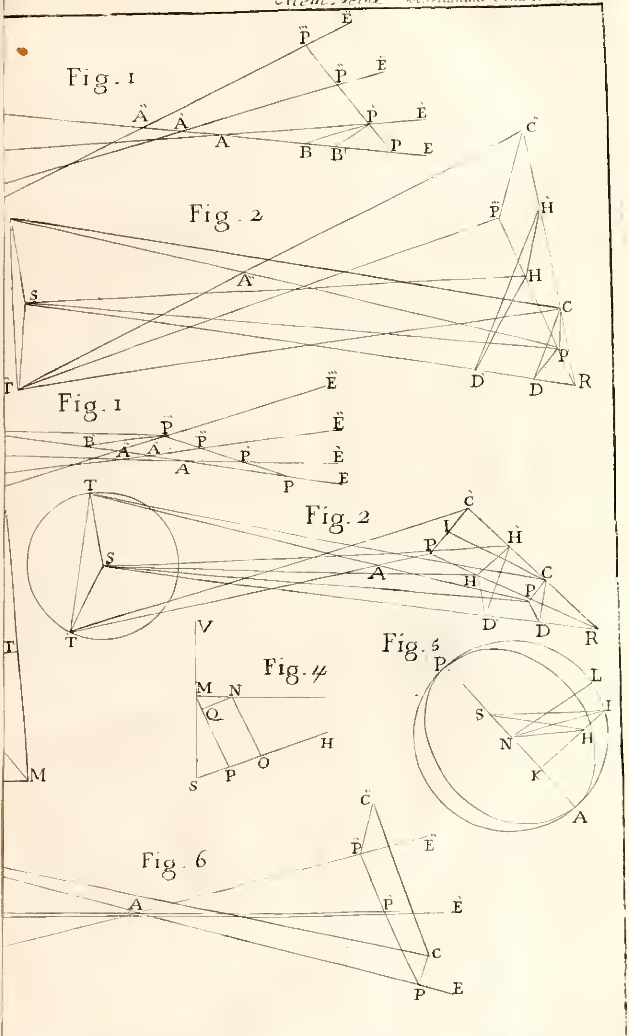


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6

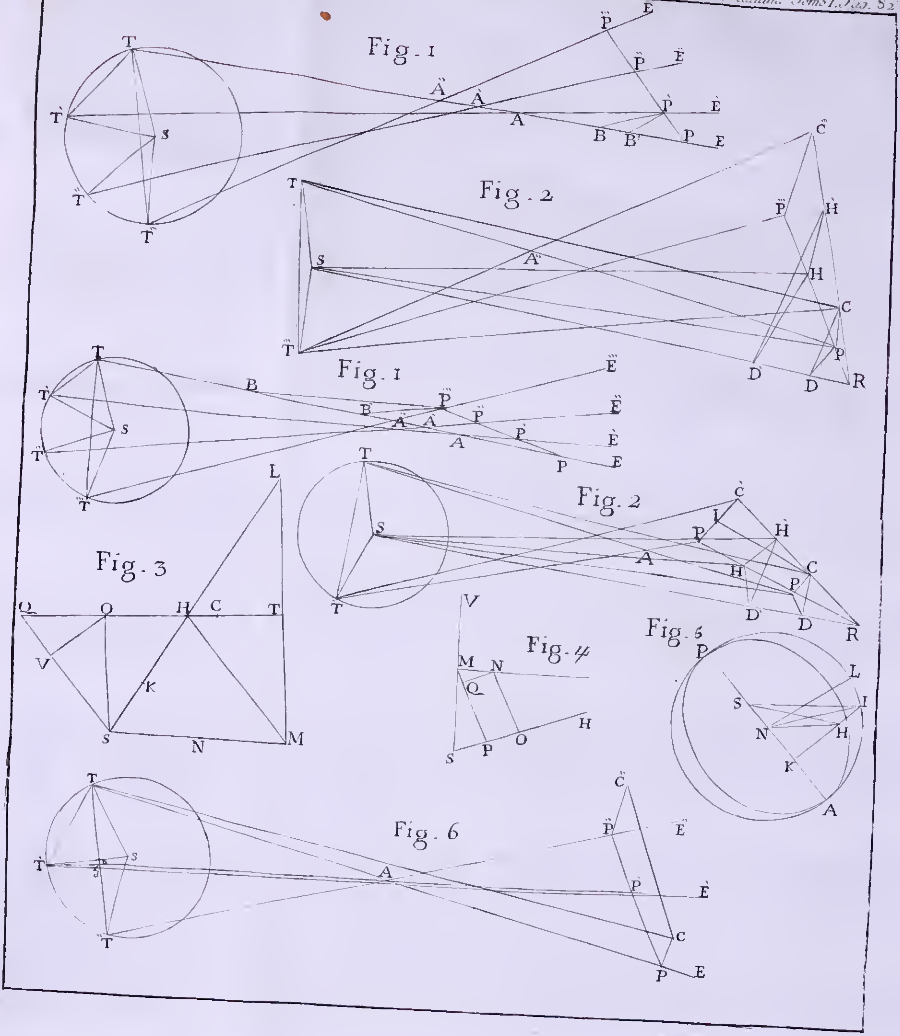


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6

RISULTATI

Di sperienze sopra l' elasticità de' Fluidi Aeriformi permanenti sul mercurio.

Del Sig. Felice Fontana Direttore del Gabinetto Fisico del Gran Duca di Toscana.

Mi pareva, che fosse una ricerca nuova ed importante per la fisica moderna di conoscere le leggi, con cui gli spazj occupati dalle arie fattizie erano diminuiti dai pesi comprimenti, e se le densità di quei fluidi elastici erano proporzionali ai pesi comprimenti, come lo sono nell' aria atmosferica.

Per maggior facilità io ho pensato di far le mie esperienze nella macchina da comprimer l' aria, ed ho paragonato gli spazj occupati dalle arie artificiali a quelli dell' aria comune, che mi servì sempre di termine di paragone. Ho fatto uso di due cilindri di cristallo alti 10 pollici e larghi mezzo pollice ben calibrati per tutto, e ne' quali il pollice era diviso in 20 parti.

La quantità delle arie introdotte era costante, ed occupava nei tubi otto pollici in altezza. In uno dei due tubi lasciai per tutto il tempo delle mie sperienze l' istessa quantità, e qualità di aria comune, cioè otto pollici in altezza. I due tubi erano situati dentro di una tazza, ed immersi in parte nel mercurio l' uno a canto dell' altro in modo che era facile osservare gli spazj occupati dalle arie attraverso il grosso recipiente della macchina di compressione. Osservava, che il calore fosse sempre il medesimo, e paragonava le diminuzioni delle arie fattizie con quelle dell' aria comune tutte le volte che queste erano ridotte a quattro pollici, a due poll., ad un poll.

I.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Deflogisticata di $\frac{1}{59}$.

II.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Flogisticata di $\frac{1}{100}$.

III.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Infiammabile di $\frac{1}{60}$.

IV.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Nitrosa di $\frac{1}{100}$.

V.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Fissa di $\frac{1}{60}$.

VI.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Vitriolica di $\frac{1}{32}$.

VII.

L' aria comune fu trovata egualmente compressibile dell' aria acida Marina.

VIII.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Alcalina di $\frac{1}{57}$.

IX.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' *aria Regia* dello stagno di $\frac{1}{100}$.

X.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Spatosa di $\frac{1}{30}$.

XI.

L' aria comune fu trovata egualmente compressibile dell' aria Arsenicale.

XII.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Epatica di $\frac{1}{45}$.

Il Cavalier *Newton* ha dimoſtrato che ſe le particelle d' un corpo ſi reſpingono con forze reciprocamente proporzionali alle loro diſtanze, comporranno un fluido, la denſità del quale ſarà proporzionale ai peſi comprimenti. Molti Fiſici hanno dedotto da quella verità matematica, che l' aria doveſſe la ſua elaſticità e natura ad una tal forza.

Qui abbiamo dodici fluidi o arie oltre l' aria comune, in cui ſi verifica la legge fiſſata dal *Newton*, giacchè le minime differenze trovate da noi coll' eſperienza ſono traſcurabili, nè l' aria comune ſteſſa ſegue a rigore quella legge, e queſte dodici arie ſon ben lontane dal formare un fluido elaſtico ſimile all' aria comune, che anzi ſono tutte dodici di una natura affatto differente fra loro, e differente dall' aria comune. Il teorema del *Newton* ſerve a provar ſolamente, che le noſtre arie fattizie convengono bensì coll' aria comune nella elaſticità, oſſia che quella forza ideale di repulſione è ſufficiente a rappreſentare i fenomeni delle elaſticità delle arie, ma non prova per queſto che eſiſta realmente ne' corpi, e che quei fluidi ſieno della medeſima natura ed indole dell' aria comune. Io ho ancor trovato per eſperienza, che gli ſteſſi fluidi aeriformi di ſopra ſi dilatano nel vuoto della ſteſſa quantità, di cui ſi ſono condenſati nel pieno, o nell' aria compreſſa.

Deve bensì parer ſingolare, che tanti fluidi, e sì diverſi fra di loro oſſervino una medeſima legge di dilatazione e di riſtringimento; il che farebbe credere che vi è una forza fiſica in natura, un principio non ancora noto agli Osservatori, per cui le particelle dei corpi nel momento, che diventano elastiche fra di loro, e permanenti sul mercurio, sono allontanate e respinte con quelle date leggi, che si sono vedute; e questa forza pare unica e sempre l' istessa, giacchè produce i medesimi effetti sopra tante sostanze diverse, e li produce costantemente in tutti i luoghi, ed in tutti i tempi.

Un' altra verità par che si possa dedurre, ed è, che l' elasticità non è una forza essenziale, non è una forza intrinseca dell' aria atmosferica, giacchè si vede che quella stessa forza è comune a tanti altri fluidi aeriformi, che sono sì differenti fra di loro.

Resterebbe da esaminare se quel medesimo principio, che rende elastici tanti fluidi aeriformi, è ancora la cagione dell'elasticità di tutti gli altri corpi anche solidi, che sarebbe una scoperta importante per la fisica generale, e di una gran semplicità. Alcune sperienze fatte sopra l' avorio, il vetro, e l'acciajo mi fanno sospettare, che l'elasticità di quei corpi è soggetta alle medesime leggi, onde che il principio fosse ancora l'istesso, e la differente elasticità nei diversi corpi potesse derivare dai diversi contatti delle molecole componenti. Ma molto mi resta ancora per assicurarmi della vera natura di questo principio generale, e come renda elastici i corpi, benchè molte sperienze da me fatte mi lusinghino, che la ricerca non è affatto impossibile.

Conviene, che io dica qualche cosa sopra l'aria, che ho chiamato *Regia*, e della quale poche persone possono intender cosa sia, e quali ne sono le principali proprietà. Io trovai il modo di far quest'aria nel 1778 in Londra, e la cavai dallo stagno per mezzo dell' acqua regia.

Nel medesimo tempo trovai un'altra aria cavata parimente coll'acqua regia, la quale si ottiene tanto dalla platina, che dall'oro, e che chiamai fin d'allora aria della *Platina*. Questa seconda aria si ottiene quando la dissoluzione della platina, o dell'oro comincia a prosciugarsi. Hanno tutte due queste arie delle proprietà singolari, che farò conoscere nella mia opera *sulle Arie in generale*. Non ho fissato nè il peso, nè l'elasticità dell'aria della platina, e dell'aria dell'oro per le ragioni che saranno dette allora. Il Signor *Fabroni* ha bensì parlato di queste due nuove mie arie nelle note al *Cronsted*, che si doveva pubblicare in Londra fino dal 1779, e che depositò manoscritte nelle mani del nostro comune e rispettabile amico il Sig. *Kirwan*.

Nella mia opera *sulle arie* da pubblicarsi io esaminerò coll'esperienza alla mano le proprietà singolari di queste due nuove arie; e farò molte altre ricerche relative alle altre arie in generale, e specialmente se le dilatazioni di esse sieno proporzionali alle differenze del calore, e quanto ne deviino. Questi esperimenti sono molto delicati, ed esigono moltissime avvertenze nel farli. Ho ancora voluto fissare le leggi delle dilatazioni dei fluidi aeriformi esposti al medesimo grado di calore, ed ho ottenuto de' risultati, che non sono gran fatto uniformi a quelli pubblicati negli Atti di Berlino l'anno passato dal chiarissimo Signor *Achard*; la medesima discrepanza e maggiore io ritrovo nelle gravità delle diverse arie pubblicate dal medesimo Sig. *Achard*, nè io posso sospettare alcun errore nel metodo da me praticato. Nell'opera del Signor *Kirwan* pubblicata nelle Transazioni di Londra l'anno passato *sopra la quantità delle molecole acide, che si trovano negli acidi ordinarj*, si leggono i risultati delle mie sperienze fatte a Londra nel 1778 sopra i pesi delle arie naturali, ed artificiali, e questi esperimenti saranno di nuovo ripetuti da me nella mia opera citata di sopra, acciocchè i pesi sieno determinati anche con maggior precisione.

PRINCIPJ

PRINCIPJ GENERALI

Della solidità, e della fluidità de' Corpi.

Del Sig. Felice Fontana Direttore del Gabinetto Fisico del Gran Duca di Toscana.

I.

Qualunque particella di materia tende ad accostarsi a qualunque altra per il principio d' attrazione, e da questa forza risultano i corpi solidi.

II.

Se nella natura non regnasse che questa sola forza, tutto sarebbe solido, ed immobile.

III.

Se vi sono de' corpi fluidi non vi possono essere che per un altro principio, o forza opposta alla prima, che li rende tali, onde se la prima forza tende ad accostare le particelle della materia, l' altra deve necessariamente allontanarle.

IV.

Tutti i corpi fluidi diventan solidi nel freddo, e il freddo naturale della Siberia rende solido il mercurio medesimo.

V.

Tutti i corpi solidi diventan fluidi nel caldo, il quale può aumentarsi a segno, che si risolvano fino in vapori invisibili; onde la materia del calore qualunque ella sia, e comunque si possa trovar modificata nelle diverse circostanze de' diversi corpi, è il secondo principio attivo, che regna nella natura, e sarà chiamato Forza Espansiva, perchè tende ad allontanare da sè le parti componenti dei corpi.

VI.

I fluidi anche i più pesanti, tolte e scemate le resistenze esterne, si dissipano in un momento, come si vede in una goccia d'acqua, e fin di mercurio messe nel vuoto. Dunque la forza espansiva, che è in essi, è in una continua azione, o *niso*, ed è maggiore della forza d'attrazione, che tenderebbe a consolidarli.

VII.

La forza espansiva ne' fluidi non è inferiore alla forza di gravità di essi fluidi, giacchè col solo scemarne la pressione esterna sopra di essi, i fluidi si dissipano in vapori, e sorton dai corpi in cui si trovano.

VIII.

L'aria comune, l'aria fissa, le sostanze spiritose e meno pesanti, messe in altre più pesanti (come per esempio l'acqua), l'aria medesima assorbita dal carbone, potranno sortire dai fluidi, e dai corpi in cui si trovano, non perchè sieno elastiche dentro quelle sostanze, ma bensì perchè, scemata la pressione esterna, la forza eſpanſiva prevale alla gravità, e le ſpinge, e urta, e caccia da eſſi in tutte le direzioni.

IX.

La fluidità ne' corpi può conſiderarſi come uno ſtato accidentale di eſſi, giacchè ſi arriva dal filoſofo a torla in tutti fuorchè nell'aria, che per analogia non può eſſere eccettuata dagli altri fluidi, benchè il grado di freddo per tal effetto debba eſſer molto maggiore che negli altri.

X.

Queſta forza eſpanſiva comune ai fluidi e ai ſolidi può eſſere una delle principali e primitive cagioni delle ordinarie evaporazioni, e produrre fino le evaporazioni de' corpi ſolidi ſtaccando e ſollevando le impercettibili molecole di eſſi, giacchè una molecola quaſi iſolata può conſiderarſi beniſſimo come dominata dalla forza eſpanſiva.

XI.

In queſta maniera ſi vede che nei fluidi ſi debbono conſiderare due forze, l'una di gravità, l'altra d'eſpanſione; e da queſti due principj biſogna partire per render ragione delle qualità, o leggi che ſi oſſervano in eſſi.

XII.

I fluidi non elaſtici, come l'acqua, il mercurio.... non ſono ſenſibilmente compreſſibili, almeno cogli ordinarj metodi, che ſi praticano: ſono eſſi egualmente incompreſſibili anche allora che ſono penetrati dal calore, e ſi ſa che ſi dilatano ſenſibilmente col creſcer ſenſibilmente il calore.

XIII.

Si può ſpiegare il ſingolar fenomeno della incompreſſibilità dei fluidi non elaſtici, e dilatati dal calore ſenza ſupporre una forza infinita nella materia del calore paragonata colle preſſioni eſterne. La ſola variazione de' contatti, e de' ſiti delle molecole incompreſſibili baſta a tutto. Queſte molecole potendo occupare per il calore introdotto degli ſpazj maggiori di prima, e nel tempo ſteſſo trovarſi in contatti continuati potranno reſiſtere a tutte le preſſioni eſterne, le quali preſſioni non avranno alcuna azione contro della materia del calore. Per iſpazj maggiori non altro intendo che un minor numero di molecole, che ſi trovano in uno ſpazio medeſimo.

XIV.

La forza de' vapori proviene da una gran quantità della materia del calore, che ſi uniſce ad eſſi in quello ſtato. Si è ſcoperto in queſt'ultimo tempo, che la materia del calore, che è in tutti i corpi, non vi è diſtribuita, nè in ragione de' volumi, nè della quantità di materia, ma ſecondo l' indole e natura diverſa dei diverſi corpi. Si è trovato ancora, che i corpi nel paſſare dallo ſtato di fluidi a quello di ſolidi perdono una grandiſſima quantità di calore, e che per l'oppoſto ne acquiſtano altrettanta quando dallo ſtato di ſolidi ritornano in fluidi. L'acqua per eſempio perde 58 gradi di calore nell'atto che ſi diaccia, e ne acquiſta il diaccio 58 nell' atto che ritorna acqua: così mille altre ſperienze hanno fatto vedere, che i corpi contengono una grandiſſima quantità di materia del calore, e questo calore è preso da quelle minime molecole nell' atto, che diventano vapori, e lo perdono quando ritornano a formare i corpi di prima. Non si ignorano le forze de' fluidi, che si riducono in vapori, e si sa quel che possono poche gocciole di acqua, o di mercurio rinserrato, a cui nulla par che possa resistere; nè si ignora la forza prodigiosa del calore, che urta, e impelle tutti i corpi per tutte le direzioni, talchè non è più sorprendente che nell' atto di unirsi la materia attivissima del calore in sì gran quantità ai vapori, e nell' unirvisi nell' istante come fa, i vapori vincano tutti gli ostacoli più forti.

XV.

I vapori sono facilmente compressibili, ossia i fluidi incompressibili ridotti in vapori si comprimono facilmente. Tutte le sperienze ci assicurano di questa verità, e basta applicare al vapore una forza maggiore di quella, ch' egli ha di espandersi, per ridurlo sotto un volume minore.

XVI.

Si è detto perchè i fluidi sieno incompressibili, benchè penetrati più o meno dal calore. Questa causa non può aver luogo per nessun conto nei vapori, perchè si può provar facilmente, che le molecole di questi non si toccano per nessun modo a differenza di quelle de' fluidi; e si può fino provare che vi è tal vapore, in cui le particelle sono delle centinaja di migliaja di volte più lontane, che in altri. L' acqua ridotta in vapore può occupare uno spazio 20000 volte maggiore di prima. Non è adunque straordinario, che i vapori si possano comprimere, giacchè non si ha da vincere in essi, che la sola forza sfiancante del calore.

Di qui si vede quanto sia precaria l'ipotesi di quei filosofi, i quali hanno immaginato una forza di *repulsione* nelle molecole de' vapori, solo perchè non sapevano spiegare altrimenti gli effetti di essi vapori. Costa poco al matematico l' immaginarsi delle forze in rapporto dei fenomeni medesimi, e di figurarsi che le une comincino ad operare dove le altre finiscono, e che passino da repulsive in attrattive, e da attrattive in repulsive secondo i bisogni. Ma prima d'ogni altro bisogna provare che tali forze veramente esistano in quelle date circostanze, e casi, e che sieno in un rapporto esatto cogli effetti che vogliamo spiegare. La forza adunque de' fluidi ridotti in vapore, come l'acqua, il mercurio..,.. deriva dalla materia del calore, che è assorbita da essi in quello stato, e non già dalla forza di repulsione per cangiate distanze di quelle impercettibili molecole. Cresce ne' vapori la forza all'aumentarsi del calore, e nel momento in cui cessa il calore corrono a ricomporre il corpo fluido di prima.

XVII.

Noi abbiamo esaminato i corpi solidi, i corpi fluidi, e i corpi sotto forma vaporosa, e si è cercato di accennar le cagioni dei loro differenti stati. Ora ci rimane di esaminare un' altra sorta di fluidi, che meritano una distinzione particolare, che forma in oggi uno de' più vasti rami della fisica delle arie, e delle operazioni chimiche più dilicate. Queste sostanze si presentano sotto forma di aria elastica, trasparente, compressibile, che il freddo e il caldo restringe e dilata, ma che non riducono a formare il fluido di prima.

XVIII.

Questi fluidi aeriformi si possono ridurre a tre classi principali, che hanno la proprietà comune di esser permanenti sul mercurio, ma non già quando sono a contatto dell' acqua, o di altre sostanze fluide. Altri sono assorbibili per intiero dall' acqua, altri solo in parte, ed altri non lo sono punto. I primi sono l' aria acida marina, l' aria acida vitriolica, l' aria alcalina, l' aria spatosa, e questi formano la prima classe. Nella seconda classe mettiamo l' aria fissa, che non è assorbita dall' acqua, che del suo proprio volume. Nella terza si dovrà collocare l' aria nitrosa, l' aria infiammabile, l' aria purissima, e l' aria detta flogisticata.

Conviene però riflettere, che questi fluidi aeriformi per rapporto alla sorbibilità coll' acqua non differiscono, che dal più al meno; perchè ho provato per esperienza, che anche i non assorbibili sono più o meno assorbiti, se si mettono in contatto dell' acqua privata della sua aria naturale; ed ho fino trovato con particolari esperienze, che sono assorbiti benissimo, se si tengono lungo tempo a contatto dell' acqua benchè saturata della sua aria naturale.

XIX.

Si è veduto che il calore riduce in vapori i fluidi, ma si è ancor veduto che appena cessato il calore ritornano i vapori a formare i fluidi di prima. Vi è adunque qualche altro principio oltre il calore, che rende permanenti nel freddo i fluidi aeriformi. Non è difficile di provare che questo principio è ciò, che i chimici chiamano flogisto, e che mille fenomeni di composizioni e decomposizioni di corpi ne dimostrano coll' ultima evidenza le sue proprietà, e l' esistenza.

XX.

Si può dimoſtrare, che le arie della prima claſſe contengono di quel principio, e che quanto più ne hanno diventano tanto meno aſſorbibili all' acqua, ma non ſono però ſaturate del tutto da eſſo, e conſervano ancora una parte della loro natura primitiva. La ſola aria nitroſa ſi può conſiderare per ſaturata dal flogiſto, cioè per l' acido nitroſo ſaturato da eſſo, giacchè non dimoſtra punto la ſua natura acida in quello ſtato, fuorchè nelle circoſtanze da me pubblicate nella mia opera ſull' *aria nitroſa*; e perchè l' aria nitroſa è ſaturata bene dal flogiſto, non è aſſorbibile dall'acqua. Laddove tutti gli altri mantengono ancora in parte almeno le loro primitive qualità, per cui hanno più attrazione coll' acqua che col flogiſto, onde quando ſono a contatto di eſſa ritornano fluidi come prima.

XXI.

L' aria fiſſa contiene del flogiſto ed un acido ſottiliſſimo e debole, e perciò è aſſorbita dall' acqua meno delle arie della prima claſſe, e più di quelle della terza.

XXII.

L' aria nitroſa è compoſta di flogiſto, e di acido nitroſo ſaturato perfettamente; onde s' intende ſubito perchè non ſia aſſorbita dall' acqua. Le altre arie di queſta ultima claſſe non ſono ancora ben conoſciute, onde poco o nulla ſi potrà pronunziare ſopra di eſſe.

XXIII.

L' aria infiammabile ha ſicuramente il flogiſto per uno de' ſuoi componenti, ma nulla ſi può dire degli altri

altri componenti, che pur deve avere. L'aria infiammabile non s' infiamma mai sola, anzi spegne i lumi, e fino il carbone acceso; ma s' infiamma, e arde se è mescolata coll' aria comune. Conviene adunque considerarla per una sostanza combustibile come tutte le altre, ma più pura e più semplice della fiamma ordinaria degli altri corpi combustibili, che non ardono mai nè anco essi senza l' aria respirabile, o nel vuoto; nè forse altro arde, e s' infiamma ne' corpi, che l' infiammabile, o i componenti di essa aria, che si trovano dentro i corpi combustibili. La gran leggerezza dell' aria infiammabile farebbe credere, che fosse composta di qualche principio sottilissimo, ed asciutto, il quale non avesse alcuna affinità, o pochissima coll' acqua, ma che fosse incorporato bene col flogisto, talchè s' intenderebbe subito allora, perchè non è assorbibile dall' acqua. Ma non è facile d' immaginare tali esperienze, che ci decompongano quell' aria, e per cui si possa giudicare della natura de' suoi componenti. Ho intrapreso altre volte un simile travaglio, ma sono ancor lontano da poter pronunziare con sicurezza. Si cava comunemente cogli acidi, ma si può cavare ancora colle sostanze alcaline, e fino col solo fuoco dai metalli. Si dimostra che non esiste in essi sotto forma d' aria, perchè non si cava dal ferro coll' acido nitroso.

XXIV.

Il fuoco o la fiamma non è una pura operazione meccanica, come la maggior parte de' filosofi ha creduto fino a questi ultimi tempi. L' ostinazione di non volere usare nella spiegazione de' fenomeni naturali, che de' principj dedotti dalle più semplici leggi del moto, e degli urti conosciuti fra corpo e corpo, ha ritardato di quasi un secolo i progressi della fisica. Ma da poco in qua felicemente questa scienza ha ricevuto un' estenſione, di cui non pareva nè anco capace, e queſta ſi deve alla ſola chimica, per cui due ſommi uomini meritano la più grande ſtima dalla poſterità i Sigg. *Bergman*, e *Scheele*.

La fiamma, o il corpo che brucia, è in uno ſtato di nuove decompoſizioni, e di nuove combinazioni, le quali variano all' infinito al variare della natura, e componenti dei corpi combuſtibili. Non ſi dà mai fiamma ſenz' aria, nè vi è altra aria per la fiamma, che l' aria reſpirabile. Da queſte moltiplici decompoſizioni ſi ſchiude la materia del calore; ed è molto veriſimile, che ſi ſchiuda allora, o ſi precipiti la materia, che forma la luce, la qual luce ſi diffonda rapidamente per tutto all' intorno, e renda viſibili i corpi. La luce terreſtre, o de' corpi combuſtibili è molto analoga alla luce ſolare, e rendono l' una e l' altra viſibili i corpi ſenza biſogno d' aria.

XXV.

La fiamma è adunque per me una operazione tutta chimica, in cui ſi fanno continuamente delle decompozioni, e compoſizioni fra l' aria pura dell' atmosfera, ed il flogiſto de' corpi combuſtibili. Nell' incontro delle materie combuſtibili coll' aria ſeguono mille modificazioni nuove relative alla diverſa natura de' corpi.

Per modificazione di ſoſtanze, e di corpi io non voglio altro intendere, che ſemplici decompoſizioni di corpi più compoſti, e compoſizioni di altri più ſemplici, non conoſcendo alcuna eſperienza, o fatto ſicuro e luminoſo nella fiſica, nè in tutta la chimica, che un corpo abbia propriamente cangiato la ſua natura di prima in un' altra eſſenzialmente diverſa. Tali metamorfoſi ſi ſuppongono, è vero, continuamente da' filoſofi, che non hanno eſaminato come conveniva le genuine proprietà de' corpi, e che hanno preſo o un cangiamento apparente e accidentale de' corpi per un cangiamento della natura medeſima del corpo, o quel che è peggio abuſando della parola *cangiamento* hanno confuſo i cangiamenti nati per diminuiti o accreſciuti principj colla cangiata natura del corpo medeſimo. All'uomo non è ancor dato, che ſcomporre un certo limitato numero di corpi compoſti in altri più ſemplici, e di ricomporne di nuovo un numero ancor minore de' primi; ed in queſto il filoſofo non fa altro, che ſecondar la natura, che tende a render più ſemplice il più compoſto, e più compoſto il più ſemplice.

XXVI.

La materia elettrica non è certamente un principio ſemplice, come una gran parte de' fiſici ha creduto, ma è una vera fiamma, o ſoſtanza in combuſtione. Si vede in fatti, che è ſempre accompagnata da un forte odore, quaſi direi di fosforo, e di zolfo. Si ſa che ſi ſpegne nel vuoto perfetto, come ſi ſpengono tutte le altre fiamme, o corpi in combuſtione; non s' ignora più, che diminuiſce le arie reſpirabili, come lo fanno tutte le arie flogiſtiche, e la fiamma ſteſſa; tinge in roſſo il tornaſole, e precipita la calce in terra calcare, e criſtalizza i ſali cauſtici vegetabili quando ſi fa paſſare attraverſo l' aria dentro cannelli di vetro anche col mezzo di conduttori d' argento puriſſimo. La luce dell' elettricità è poi in tutto ſimile a quella di tutte le altre fiamme, e rende anch' eſſa viſibili i corpi ſenza biſogno d' aria, come lo fa ancora la luce ſolare. I tre riſultati del tornaſole, della calce, e de' ſali cauſtici non ſi oſſervano mai facendo uſo di aria flogiſticata, e ceſſano nell' aria comune ſubito che ha acquiſtata la natura di aria flogiſticata. Produce adunque l' elettricità ſull' aria comune tutti quei medeſimi effetti, che produce il flogiſto oſſia la fiamma attuale.

Ad un principio di vera fiamma io ho ancora riportato, fin da quando era in Londra, la luce che si osserva ne' fosfori; ed ho dato fin d' allora delle prove dirette di questa mia opinione, come si può leggere nelle opere pubblicate in quella città dai Signori *Wilson*, e *Kirwan*. In questa maniera non solo la elettricità, ma ancora le altre sostanze lucenti, come i fosfori, sarebbono ridotte ad un medesimo principio; talchè la famiglia de' corpi combustibili, ed infiammabili comprenderebbe un più gran numero di sostanze di prima. Si sa alla fine, che gli sforzi de' filosofi, e ciò che si chiama scienza de' corpi, non ad altro si riduce, che a generalizzare i fenomeni.

XXVII.

Ci resterebbe da esaminare l'aria pura detta ancora deflogisticata, che l'acqua non assorbe, ma della vera natura, e de' componenti di quest' aria non se ne fa motto, benchè se ne conoscano le proprietà principali, che la distinguono facilmente da tutte le altre arie.

Altri la credono pregnissima di flogisto, ed altri affatto priva di esso. Se non vi sono prove certe, che la dimostrano affatto priva di flogisto, molto meno ve ne sono, che la facciano credere ricca di quel principio. E' vero, che l'acqua non l'assorbe, ma oltredichè la più piccola quantità di flogisto potrebbe forse bastare a far tutto questo, l' altro suo componente, quando sia composta, potrebbe non avere alcuna attrazione coll' acqua, e non lasciarsi sciorre da essa. Tutto bensì concorre a far credere, che nell'aria deflogisticata si trovi una grandissima quantità di fuoco; ossia della materia del calore, la quale unita agli altri componenti di essa aria rende ogni cosa inassorbibile all'acqua. Quest' aria avida di flogisto lo attrarrà da tutti que' corpi dove esso si trova, quando essi vi abbiano una minore affinità. Di qui si può spiegare, perchè decomponga l'aria nitrosa, e non l'aria infiammabile; basta che il flogisto prima vi sia unito con minor forza.

XXVIII.

L'aria detta flogisticata è ancor essa poco conosciuta, e molti la considerano per aria saturata dal flogisto, ed altri per povera molto di quel principio. Ella ha delle qualità molto diverse dall'aria infiammabile, perchè non s'infiamma nè anco allora, ch'è unita all'aria pura, e può fino spegnere i lumi. Nulla si può pronunciare della sua natura, e de' suoi componenti, e pare che sfugga qualunque analisi, o decomposizione.

XXIX.

Si è veduto che l'aria infiammabile è composta di flogisto, e che chiusa nelle bocce di cristallo d'Inghilterra rivivifica il vetro di piombo. Ma nulla di tutto questo fanno le due arie di sopra, cioè la deflogisticata, e la flogisticata, talchè nessun segno certo di esistenza di flogisto si può avere da esse, benchè poi sia vero che differiscono essenzialmente fra di loro quelle due arie, mantenendo una la vita e la fiamma, quando l'altra fa tutto l'opposto. La prima si lascia diminuire da tutti i processi flogistici, e l'altra da nessuno di essi, eccettuato il carbone spento nel mercurio, e raffreddato, che le diminuisce tutte, e distrugge.

XXX.

Finisco con una riflessione generale sull'elasticità dei fluidi Aeriformi, e le sue conseguenze. L'elasticità ne' fluidi permanenti diminuisce in ragione inversa degli ſpazj occupati, oſſia la forza elaſtica in eſſi diventa tanto minore, quanto è maggiore lo ſpazio occupato da eſſi fluidi,

Non ſi vede chi potrebbe limitare queſta forza eſpanſiva dei fluidi aeriformi ſe non vi foſſe l' attrazione terreſtre, che agiſce ſopra ogni molecola più minima de' corpi, per cui tendono perpetuamente verſo la terra. L'aria atmosferica per eſempio potrebbe beniſſimo eſtenderſi fino alla luna, e riempiere gli ſpazj celeſti, ma l'attrazione ne fiſſa il limite, il quale deve trovarſi dove le molecole dell'aria ſono attratte dalla terra con tanta forza con quanta tendono in virtù della loro a diſcoſtarſi fra di loro, e ad eſpanderſi.

Il calcolo potrebbe facilmente determinare queſto limite nelle due ipoteſi fatte da noi, e il problema potrebbe eſſere ſuſcettibile di qualche preciſione fiſica. Si potrebbe ancora tener conto della forza centrifuga cagionata dalla rotazione della terra nelle particelle dell' aria: il calore non può alterare ſenſibilmente le leggi della elaſticità, perchè è minimo ed uniforme alle più grandi diſtanze, nè i vapori arrivano mai così in alto.

La forza eſpanſiva dell' aria comune va conſiderata come una forza, che non ceſſa mai affatto, benchè diminuiſca rapidamente, come ſi è detto. Si potrà adunque conſiderare come minima, o infinitamente piccola nelle maſſime dilatazioni dell'aria. Nell' ipoteſi che le molecole dell'aria non foſſero attratte dalla terra, l'atmosfera non potrebbe eſercitare alcuna preſſione ſenſibile ſopra i corpi, che ſono ſulla ſuperficie della terra medeſima; talchè l'aria in quanto elaſtica neſſun effetto ſenſibile potrebbe produrre contro i corpi ſottopoſti. Ma nel momento che ſi vorrà ſupporre, che l'aria ſia attratta dalla terra, come lo è infatti, ogni ſtrato minimo d'aria peſerà ſull'altro, che le è ſotto, talchè gli ſtrati più baſſi ſaranno i più premuti, e i più elaſtici, e l'elaſticità e la gravità ſaranno nel medeſimo rapporto.

E' adunque la gravità dell'aria e non la ſua elaſticità la primitiva cagione, per cui l'atmosfera ha un limite, e per cui preme ſopra la ſuperficie della terra; nella ſteſſa maniera che una ſerie di elaſtri collocati gli uni ſopra degli altri premerebbono contro i corpi ſottopoſti in ragione del loro numero, e per la ſola forza del loro peſo, benchè poi foſſe vero, che la loro elaſticità ſarebbe in proporzione dei loro medeſimi peſi.

Non è ora più difficile di vedere quel che ſarebbe il calore, o qualunque altro agente, che s' inſinuaſſe fra queſti elaſtri, e come ſi devono ſpiegare le alterazioni accidentali cagionate nell'atmosfera.

ARTICOLO

Di Lettera fcritta DAL MEDESIMO al Fratello Pubblico Profeffore di Matematica nell'Univerfità di Pavia.

Sopra la Luce, la Fiamma, il Calore, e il Flogifto.

FInifco col mandarvi alcuni miei penfieri, relativi alla luce, alla fiamma, al calore, ed al flogifto, che i filofofi confondono più, o meno, e modificano, feguendo ciafcuno le idee che fen'è formate, e le ipotefi che ha abbracciato.

Io ho voluto qui confiderare que' quattro agenti, come foftanze diverfe tra di loro; e finchè il fifico fperimentatore non arriverà a dimoftrare la loro vera compofizione, e natura, fon di parere che fi debbano valutare per differenti fra loro, e per femplici nel temdo medefimo. Non già, perchè fia impoffibile che la cofa fia anco diverfamente; ma perchè non è permeffo di fingere delle compofizioni, dove non fi veggono, nè delle modificazioni femplici, dove gli effetti fono diverfi, e fpeffo oppofti.

Quefta diverfità di effetti è quella principalmente, che mi ha fatto confiderar quelle foftanze per diverfe tra loro, appoggiato al principio ricevuto, e certo nella fifica, che fe gli effetti fono diverfi, diverfe devono effere anco le caufe, quando non cofti del contrario. Io non farò, che accennare le principali qualità di quegli efferi.

LUCE

LUCE.

I.

La luce ſolare fa ſchiudere dalle piante meſſe nell' acqua aria puriſſima, detta deflogiſticata.

II.

La luce ſolare, anche allora che è privata di calore, cioè, che ſi fa agire come ſola luce, ſchiude dalle piante la medeſima aria puriſſima.

III.

La luce ſolare paſſa in iſtante attraverſo le lamine di vetro, e nell' iſtante riſcalda i corpi meſſi dietro ad eſſe.

IV.

La luce ſolare non fa detuonare il nitro, non produce l' acido zolfuroſo volatile, non rivivifica le ordinarie calci metalliche, almeno cogli ordinarj metodi praticati finora.

V.

La luce ſolare non riſcalda i corpi più traſparenti, e più ſottili, come l' aria, le lamine di criſtallo.

VI.

La luce ſolare appena riſcalda i corpi bianchi, ed opachi.

VII.

La luce ſolare non riſcalda, che que' corpi, in cui ſi è arreſtata.

FIAMMA.

I.

La fiamma anche accreſciuta, e comunque lucida, fa ſchiudere dalle piante aria meſitica, aria flogiſticata.

II.

La fiamma paſſa, come la luce, in iſtante attraverſo il criſtallo, ma non riſcalda i corpi collocati dietro del criſtallo, che molto tardi.

III.

La fiamma immediatamente applicata alle calci metalliche le rivivifica.

IV.

La fiamma riſcalda anche i corpi più traſparenti, e li fonde ſubito.

V.

La fiamma, applicata eſteriormente ai matracci di criſtallo, non rivivifica le calci metalliche comuni.

CALORE.

I.

Il calore tanto ſolare, che terreſtre, ſchiude dalle piante aria flogiſticata.

II.

Il calore non rivivifica in metallo le ordinarie calci, non fa detuonare il nitro, non produce l'acido zolfuroſo volatile.

III.

Il calore eſclude dai corpi il flogiſto, o ne diminuiſce la quantità, come par provato dalle ſperienze più moderne fatte in Inghilterra.

IV.

Il calore penetra tutti i corpi, comunque opachi, e duri, e li fonde.

FLOGISTO.

I.

Il flogiſto eſclude dai corpi il calore, o ne diminuiſce la quantità, come appare dalle moderne dottrine.

II.

Il flogiſto non paſſa attraverſo il vetro a rivivificar le calci metalliche.

I corpi meſſi nel vuoto, dentro recipienti di criſtallo, poſſono eſſere illuminati, tanto dalla luce ſolare, che dalla luce terreſtre, o fiamma. I corpi poi lucenti, o infiammati, non danno più luce meſſi nel vuoto; dunque l' aria è neceſſaria a render lucenti quei corpi, ma non già a render viſibili a noi i corpi collocati dentro il vuoto, quando ſi getti ſopra di eſſi la luce eſterna dei corpi lucenti nel pieno. Pare dalle ultime eſperienze de' fiſici, che fino la elettricità medeſima nel vuoto ſubiſca le ſteſſe leggi, perchè ſpariſce quando il vuoto è perfetto. Il che ſempre più ci aſſicura, che i corpi lucenti ſono in uno ſtato di accenſione, come l'ho io dimoſtrato di diverſi fosfori; ma la luce, che ſi manifeſta allora, ſegue le conoſciute leggi della luce ſolare, quando ſi fa cadere ſopra i corpi, e ſi riflette da eſſi.

Da tutto quello, che abbiamo rilevato ſopra, ſi vede, che la luce ſolare non conviene in tutto nè anco colla luce della fiamma, o terreſtre. 1. Perchè la prima fa ſchiuder dalle piante aria deflogiſticata, e l'altra aria mefitica. 2. Perchè la prima riſcalda i corpi in iſtanti, e l'altra molto più tardi. 3. Perchè la prima non fa detuonare il nitro, non rivivifica le calci metalliche, non rende l'olio di vitriolo acido zolſuroſo volatile all'oppoſto della fiamma. 4. Perchè la luce ſolare non riſcalda i corpi traſparenti, che riſcalda la fiamma. 5. Perchè la luce ſolare non riſcalda, che poco, e tardi i corpi opachi, bianchi, al contrario della fiamma.

Il calore non è nè luce, nè fiamma, nè flogiſto; non è luce, perchè penetra tutti i corpi, che la luce non penetra; non è nè fiamma, nè flogiſto, perchè non rivivifica le calci metalliche, non fa detuonare il nitro.......

Il flogiſto non è il calore, perchè non penetra tutti i corpi, come fa il calore, e perchè eſclude il calore de' corpi medeſimi.

Siccome abbiamo osservato delle diversità reali di effetti provenienti dalle quattro sostanze seguenti, *Luce*, *Fiamma*, *Calore*, *e Flogisto*, e nulla conosciamo ancora della vera natura di esse; vi è tanto che basta, perchè il filosofo osservatore debba considerarle come semplici, e come differenti tra loro, e perchè debba servirsene, come di principj, per ispiegare gli effetti, che sono subordinati ad esse sostanze: e così infatti facciamo, parlando degli acidi, benchè forse sieno composti, e risultino dalla modificazione di un acido solo. Sopra di questi principj il famoso *Bergman* sommo chimico, e grandissimo fisico, ha stabilito le sue cinque terre elementari primitive, che spargono tanto lume in tutta la fisica, e la storia naturale, poco curandosi, se in lor medesime sieno poi semplici, o sieno una modificazione di una sola di esse, o di più. Questa, qualunque ella sia, è la sola via che ci resta per internarci nella scienza de' corpi, e per tenerci lontano dalle illusioni, e dalle ipotesi.

Nella supposizione poi, che la materia primitiva dei corpi fosse omogenea, non ne seguirebbe per questo, che noi non dovessimo cercar di conoscere le proprietà di essa, quando è modificata in modo, da costituire delle diverse sostanze; che anzi nella sola conoscenza delle proprietà di queste sostanze diverse consisterebbe la scienza de' corpi, e la conoscenza delle cause, e de' fenomeni naturali.

Da tutte le cose dette fin qui, par che si possano considerare quelle quattro sostanze, o agenti, come principj semplici, e differenti fra di essi. Ma non ne segue già da tutto questo, che due, o più di essi non possano formarne un solo. E' vero, che in quest' ipotesi non sarebbono più nè semplici, nè quattro, ma andavano dal filosofo considerati come tali prima di trovarne i componenti. Una volta poi, che questi componenti si sieno trovati, si deve rettificar l'ipotesi, e diminuire il numero di essi a proporzione di quelli, che ci mostrerà l'esperienza.

Se si potesse dimostrare, come lo pensavano i chimici Svezzesi, che il calore è fatto di aria pura, e di flogisto, il calore non andrebbe più considerato come un principio semplice, ma bensì come un composto di due principj, di cui conosciamo alcune delle principali proprietà. Così, se si proverà, che la luce non è che il calore sopraccaricato di flogisto, allora si dirà, che la luce non è più un principio semplice, ma che è fatto di tre altri principj, talchè la fiamma per esempio si dovrà considerare come fatta di calore, e di flogisto, unita ad altri corpi eterogenei, di cui sono formati i corpi combustibili.

La luce solare, anche solo considerata in quanto luce, e non punto considerato il suo calore, sarebbe sempre accompagnata da qualche quantità di flogisto. Il famoso *Scheele* ha dimostrato il primo, che la luce solare rivivifica alla lunga la luna cornea, ed il nitro lunare; ma nulla di questo si ottiene col solo calor solare, nessuna rivivificazione si osserva di quelle calci. Così il medesimo filosofo ha scoperto, che l'acido nitroso, chiuso dentro di una boccia, ed esposto alla luce del sole, si flogistica benissimo; ma non si flogistica punto, se si espone al solo calor della luce.

Nè si creda già, che queste qualità trovate nella luce solare siano contraddette affatto dai fenomeni del §. IV, perchè le circostanze sono molto diverse, ed applicando più lungamente la luce a quelle sostanze, si arriverebbe forse a provare, che non è poi priva affatto di flogisto. Là si è voluto escludere l'ipotesi d'un flogisto abbondante, e qui si è voluto far vedere, che non ne è poi priva interamente.

SOPRA LA MISURA
DELLA LUCE IN GENERALE;
E sopra l' illuminazione de' varj segmenti del Disco Solare tagliati dall' orizzonte nel tempo del nascere e tramontare del Sole.

Del P. Gregorio Fontana Delle Scuole Pie Professore di Matematica sublime nell' Università di Pavia.

Niuno de' Fisico-Matematici prima del 1760, in cui comparvero alla luce le due opere insigni, una di *Bouguer* intitolata *Traitè d' Optique sur la gradation de la lumiere*, l' altra di *Lambert* col titolo *Photometria, sive de mensura & gradibus luminis*, avea sospettato, che nel misurare la quantità relativa della luce che da un corpo o per sestesso luminoso, o altronde irradiato viene tramandata sopra un dato punto, o picciolo spazio da illuminarsi, dovesse tenersi conto di quell' angolo, che formano i raggi colla superficie del corpo da cui partono. Eppure un' osservazione non difficile a farsi dovea far credere, che il predetto *angolo di emanazione* è un elemento indispensabile per calcolar giustamente la misura della luce. Rimirando il disco solare con un elioscopio si veggono tutti i punti del disco ugualmente chiari e brillanti, nè si scorge differenza sensibile fra lo splendore delle parti più vicine al centro, e delle parti più lontane, cosicchè il centro stesso ed il lembo non presentano all' occhio alcun divario in ordine alla loro lucidità. Da questa uguale distribuzione di lucidezza in tutte le parti del disco solare si deduce speditamente la conseguenza, che le varie quantità di luce versate sopra una data superficie dai diversi punti d'un corpo raggiante seguitano, in parità di tutte le altre cose, la ragione de' seni degli angoli di emanazione. Imperciocchè rappresenti il circolo *AFBI* (*fig.* 1) il disco del sole; e prendasi il semicircolo *APB* perpendicolare al disco per rappresentare la convessità del corpo solare rivolta allo spettatore, che si suppone situato ad una distanza immensa in direzione del semidiametro *CP* perpendicolare ad *AB*, e dividente per metà il semicircolo *APB*. Le particelle *Pp*, *Mm*, *Ee* della superficie convessa del sole compariscono uguali allo spettatore ogni qual volta le loro projezioni ortografiche *Cc*, *Nn*, *Dd* risultano eguali; nè queste riescono uguali, se quelle non crescono in ragione inversa delle rispettive ordinate *PC*, *MN*, *ED*, come è noto per la proprietà del cerchio. Se vuolsi adunque (come prima di *Lambert*, e *Bouguer* da tutti si supponeva), che qualsivoglia punto della superficie convessa del sole tramandi all' occhio dello spettatore sulla terra la stessa copia di raggi, qualunque sia la posizione di tal punto sul globo solare rispettivamente all' occhio, e se perciò la quantità di luce, che viene all' occhio da una parte qualunque di detta superficie, cresce in proporzione della grandezza di quella parte, ne nascerà la conseguenza, che le projezioni ortografiche uguali *Cc*, *Nn*, *Dd*, cioè le varie parti del disco rimirate d'in sulla terra, dovranno comparire tanto più lucide e chiare, quanto più saranno discoste dal centro *C* del disco, e ciò in ragione inversa delle ordinate rispettive, e così le parti vicine al lembo, e tutto il lembo medesimo dovranno mandare uno splendore infinito, divenendo quasi appunto infinito quel rapporto. E poichè questo è visibilmente assurdo, ed è anzi noto per esperienza, che le suddette parti *Cc*, *Nn*, *Dd* del disco gettano un egual chiarore, nè punto si osserva che una sia più o meno lucida dell'

dell' altra; quindi si scuopre evidentemente falso il principio, che da ciascun punto della superficie solare l'occhio dello spettatore riceva lo stesso numero di raggi; ed è poi agevole l' inferire, che il numero di tali raggi è proporzionale al seno dell' angolo, che essi formano, nell' uscire, colla superficie del sole. In fatti l' illuminazione delle parti *Pp*, *Mm*, *Ee* della superficie solare vedute dallo spettatore in *Cc*, *Nn*, *Dd* sul disco è in ragione composta della grandezza di tali parti convesse, e del numero de' raggi, che l' occhio riceve da ciascun punto di quelle. Se adunque compajono ugualmente illuminate, come si è detto, quella ragione composta sarà una ragione di ugualità, che è quanto dire, la grandezza di dette parti sarà inversamente come il numero de' raggi vibrati all' occhio da ciascun punto in esse assunto, e conseguentemente sarà un tal numero in ragione diretta delle ordinate corrispondenti. Ma queste ordinate sono anche come i seni degli angoli *CPp*, *NMm*, *DEe* conforme richiede la natura del cerchio, i quali angoli sono appunto formati dai raggi emananti *CP*, *NM*, *DE* dalla superficie convessa del sole; perciò si fa manifesto, che il numero de' raggi lanciati all' occhio dello spettatore da ciascun punto della superficie solare seguita la ragione semplice diretta del seno dell' angolo di emanazione. Il *Bouguer* assume una tal ragione un poco maggiore della semplice, perchè da un' osservazione gli parve di poter inferire, che le parti del disco solare compajono meno luminose quanto più son lontane dal centro; sebbene egli stesso confessa, che quell' osservazione avrebbe avuto bisogno di essere più spesso che egli non fece ripetuta.

Per riguardo a que' corpi, che riflettono il lume ricevuto, hassi un riscontro di questa legge dell' angolo di emanazione nell' osservazione ovvia e comune, che se in un muro ben imbiancato, poco prima del nasce-

P

re o poco dopo del tramontare del ſole, ſi fiſſa coll' occhio una piccola parte tinta d' altro colore, e ſi rimira da qualunque punto della circonferenza d'un cerchio, che ha per centro la ſteſſa parte, queſta ſi vede ſempre chiara ed illuminata egualmente; il che non può accadere ſenza che la quantità di luce riflettuta da eſſa nell' occhio vada creſcendo nella ragione del ſeno dell' angolo fatto da' raggi rifleſſi colla ſuperficie riflettente, vale a dire dell' angolo di emanazione. Per rettificare queſta oſſervazione troppo groſſolana, e ridurla ad un' eſattezza baſtante, il *Lambert* immaginò il ſeguente ingegnoſo eſperimento. Due piani AB, BC (*fig.* 2) uniti ſotto l' angolo ABC vengono irradiati da un lume collocato in O ad ugual diſtanza dai piani per modo, che eſſendo uguali le perpendicolari OI, OP, ſieno pure uguali le quattro BI, IA, BP, PC, e queſte inoltre ſieno molto picciole in paragone delle diſtanze OI, OP. In tali circoſtanze egli è evidente, che i piani AB, BC rimarranno illuminati egualmente, e ciaſcun punto riceverà ſenſibilmente lo ſteſſo numero di raggi. Ciò fatto ſi collochi in E una lente FG, la quale rifranga le immagini ba, bc dei piani ſopra una ſuperficie data LM poſta dietro la lente. Oſſervate attentamente le immagini ba, bc ſi trovano egualmente illuminate, nè ſi ſcorge veruna diverſità fra l' una e l' altra nel grado d' illuminazione; e queſto ſempre ſi eſperimenta comunque ſi cangi la ſituazione della lente, e comunque vadano variando gli angoli ABE, CBE. Guidiſi CN perpendicolare a BE, e ſia AB normale a BE e parallela ad LM, e ſi piglino BA, BC molto picciole in confronto di AE, BE, CE, affinchè tutti i raggi mandati da AB alla lente partano ſotto lo ſteſſo angolo a un di preſſo, e ſotto uno ſteſſo angolo anche i raggi che vanno da BC alla lente. Ora i triangoli ſimili ABE, abE, CNE, bcE danno le ſeguenti analogie $AB : ab :: BE : bE$, $CN : bc :: NE : bE$;

e poichè per la picciolezza di CB in paragone di BE diventa proſſimamente $NE = BE$, la ragione di AB : ab ſarà la ſteſſa che di CN: bc. Laonde $ab : bc :: AB : CN :: BC : CN :: BC : BC$ ſen. $CBN :: 1 :$ ſen. CBN. Ma l' eſperimento dimoſtra che le due immagini ab, bc ſono ugualmente chiare e luminoſe, e che queſta chiarezza è uniformemente diffuſa ſu ciaſcun punto; ſarà dunque la quantità di luce ſparſa ſull' immagine ab a quella ſparſa ſu bc come la grandezza di ab alla grandezza di bc, cioè come il ſeno tutto al ſeno dell' angolo CBN. Di qui appariſce, che la quantità di luce riflettuta dai piani AB, BC ſulla lente FG ſeguita la ragione dei ſeni degli angoli di emanazione. E così l' eſperienza dimoſtra, che una ſiffatta legge ha luogo non meno ne' corpi luminoſi per sè ſteſſi, che in quelli che tramandano la luce ricevuta dai primi.

Reſta ora a vedere ſe queſto nuovo elemento introdotto nel calcolo, dove ſi tratta di determinare la quantità della luce vibrata da un corpo raggiante ſopra una data ſuperficie, partoriſca de' riſultati diverſi da quelli, che ſi ottengono nell' ordinaria ipoteſi, in cui tal elemento ſi traſcura. Ciò ſi rende tanto più neceſſario da che il Sig. *Euler* nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* ſembra determinato a credere, che i problemi riguardanti la miſura della luce diano i medeſimi riſultati, ſia che vogliaſi nel calcolo tener conto dell' angolo di emanazione, ſia che voglia traſcurarſi. Per mettere alla prova queſto penſamento di sì gran Geometra, io ſcelgo a tal effetto il Problema cardinale di queſta ſcienza, cioè di *ritrovare l' illuminazione perpendicolare prodotta in una ſuperficie piana infinitamente picciola da una sfera raggiante*.

Inerendo adunque in primo luogo all' ipoteſi ordinaria io procedo nel modo ſeguente: la figura $ORMS$ (*fig. 3.*) rappreſenta una sfera luminoſa o raggiante, il di cui ſemidiametro $CR = r$; Pp rappreſenta la ſuperficie piana infinitesima in ambedue le dimensioni, che viene illuminata dalla sfera, ed è distante dal centro di lei per $PC = a$. Il segmento sferico illuminatore circoscritto dalle tangenti PR, PS è RES; finalmente $NMmn$ è una zona infinitamente piccola compresa fralle circonferenze di due cerchj paralleli normali all' asse PC. Ora posto l' angolo $MCE = \varphi$ si ha la superficie di detta zona $= 2\pi r^2\, d\varphi$ sen. φ (prendendo $1 : \pi$ pel rapporto del diametro alla periferia), ed $MP = \sqrt{(r^2 + a^2 - 2ra \text{ cos. } \varphi)}$. L' angolo d' incidenza MPp de' raggi vibrati dalla zona sul piano infinitesimo Pp è $= PMB$, e questo ha per suo seno $\frac{PB}{PM}$

$$= \frac{a - r \text{ cos.}\varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos. } \varphi)}},$$ e per coseno $\frac{BM}{PM}$

$$= \frac{r \text{ sen.}\varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos.}\varphi)}}.$$ Essendo pertanto l' illuminazione in Pp in ragion composta della zona $NMmn$ illuminatrice, del seno dell' angolo d' incidenza, e del quadrato inverso della distanza, risulterà la predetta illuminazione $$= \frac{2I\pi r^2\, d\varphi \text{ sen.}\varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos.}\varphi} \times \frac{a - r \text{ cos.}\varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos.}\varphi)}}$$ prendendo per I l' unità d' illuminazione.

Per più facilmente integrare la formola $$\frac{2I\pi r^2(a - r \text{ cos. } \varphi)d\varphi \text{ sen. } \varphi}{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos.}\varphi)^{3:2}},$$ onde conseguire la misura dell' illuminazione del segmento sferico indefinito NEM, assumo cos. $\varphi = x$, e l' illuminazione elementare di tal segmento si trasforma in $$\frac{-2I\pi r^2 (a - rx)\, dx}{(a^2 + r^2 - 2rax)^{3:2}}.$$ A questa formola più semplice applicando le note regole d' integrazione si ritrova senza pena, che il di lei integrale è $$= \frac{2I\pi r^2(r - ax)}{a^2\sqrt{(r^2 + a^2 - 2rax)}} + \text{cost.}$$ E siccome si annulla l' illuminazione all' annullarsi dell' angolo φ, ovvero quando cos. $\varphi = x = 1$, si raccoglie quindi cost.

$$= \frac{-2I\pi r^2(r-a)}{a^2\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}} = \frac{2I\pi r^2}{a^2},$$ prendendo pel valore di $\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}$ la quantità $a-r$ piuttosto che $r-a$, perchè altrimenti risulterebbe negativa la quantità d' illuminazione, che sarebbe assurdo. Dunque l' illuminazione eccitata nel piano Pp dal segmento raggiante indefinito NEM è $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}\left(1 + \frac{r-ax}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}\right)$, e posto l'angolo $\varphi = ECS$, e perciò cos. $\varphi = x = \frac{r}{a}$ nasce l' intera illuminazione generata dal segmento proposto RES $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc.

Cerco ora nell' ipotesi di *Lambert* e *Bouguer* una siffatta illuminazione, e per ottener questo non si ha che a moltiplicare l' illuminazione precedentemente trovata della zona pel seno dell' angolo di emanazione PMF fatto dalla tangente MF, e dal raggio emanante MP. Quest' angolo è $= PMB - FMB = PMB - ECM$; quindi sen. $PMF =$ sen. PMB cos. $ECM -$ sen. ECM cos. $PMB = \frac{(a-r\,\text{cos.}\varphi)\text{cos.}\varphi - r\,\text{sen.}\varphi^2}{\sqrt{(r^2+a^2-2ra\,\text{cos.}\varphi)}} = \frac{a\,\text{cos.}\varphi - r}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra\,\text{cos.}\varphi)}}$

$= \frac{ax-r}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}$, il quale moltiplicato per $\frac{-2I\pi r^2(a-rx)dx}{(a^2+r^2-2rax)^{3:2}}$ somministra nell' ipotesi di *Lambert* l' illuminazione prodotta dalla zona

$= \frac{2I\pi r^2(a-rx)(r-ax)dx}{(a^2+r^2-2rax)^2}$. Cercando l' integrale di questa espressione si trova senza difficoltà

$\frac{I\pi r}{2a}\left(x - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)}\right) + \text{coſt.}$, il quale dovendo ſparire quando $x=1$, diventa coſt.

$$= \left(\frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r-a)^2} - 1\right)\frac{I\pi r}{2a} = \left(\frac{(r+a)^2}{2ra} - 1\right)\frac{I\pi r}{2a}$$

$= \left(\frac{r^2+a^2}{2ra}\right)\frac{I\pi r}{2a}$. Dunque l' illuminazione prodotta dal ſegmento sferico indeterminato è

$= \frac{I\pi r}{2a}\left(x - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)} + \frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$; e poſto $x = \frac{r}{a}$, riſulta la totale illuminazione prodotta dall' intero ſegmento $RES = \frac{I\pi r}{2a}\left(\frac{r}{a} - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(a^2-r^2)} + \frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$

$= \frac{I\pi r}{2a} \times \frac{2r}{a} = \frac{I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc. Di qui ſi vede che la quantità dell' illuminazione calcolata ſecondo l' ordinaria ipoteſi è doppia di quella, che ſi ricava dall' ipoteſi di *Lambert*. Il che dà a divedere di qual importanza ſia in tutta la ſcienza della *miſura della luce* di preliminarmente ſtabilire l' una o l' altra ipoteſi, giacchè in uno de' più ſolenni e fondamentali Problemi di queſta ſcienza s' incontrano nelle due ipoteſi riſultati tanto differenti e diſcordi, che baſterebbono a ſpargervi il più ragionevole pirroniſmo.

Paſſo ora ad un altro Problema intereſſante e curioſo. Suppongo un punto *P* (*fig.* 4) ſituato nella cavità d' una ſuperficie sferica raggiante al di dentro, cioè che tramanda da tutti i ſuoi punti la luce verſo la cavità; e tale ſuperficie sferica ſia *BMN*. Pel punto *P* da illuminarſi guido il diametro *BF*, e perpendicolari ad eſſo diametro conduco due cerchj paralleli infinitamente proſſimi *MN*, *mn*, che ſegnano nella ſuperficie sferica la zona elementare $MNnm$, e tirando il raggio CM, la retta PM, e la tangente MR, faccio $CM = r$, $CP = a$, l'angolo $MCF = \phi$. Quindi seguitando i passi medesimi che dinanzi, si ritrova $PM^2 = a^2 + r^2 - 2ra$ cos. ϕ, la zona $MNnm = 2r^2 \pi d\phi$ sen. ϕ (esprimendo 1 : ϕ il rapporto del diametro alla periferia circolare); e però chiamando I l' unità d'illuminazione, sarà l'illuminazione prodotta dalla zona $MNnm$ nel punto P $= \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ sen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cos.} \phi}$; conseguentemente l' illuminazione prodotta dalla superficie sferica indefinita MFN sarà $= \int \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ sen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cos. } \phi} = \frac{I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2+r^2 - 2ar \text{ cos. } \phi)$ $+$ cost. E perchè si annulla coll' angolo ϕ anche l' illuminazione, nasce perciò cost. $= \frac{-I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2+r^2-2ar)$ $= \frac{-2I\pi r}{a} \text{ log. } (r-a)$. Dunque l' illuminazione predetta è $= \frac{I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2 + r^2 - 2ar \text{ cos. } \phi) - \frac{2I\pi r}{a} \times \text{ log. }$ $(r-a)$. Se ora si piglia $\phi = 180°$, si ottiene l' illuminazione eccitata nel dato punto P da tutta la sferica superficie $= \frac{2I\pi r}{a} \text{ log. } \frac{a+r}{r-a}$.

Introduco ora nel calcolo secondo l'altra ipotesi di *Lambert* l'angolo di emanazione PMR moltiplicando pel seno di quest' angolo l'espressione dianzi trovata $\frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ sen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cos.} \phi}$. A tal effetto osservo, che quest' angolo PMR è $= PMO + OMR = PMO + \phi$; e quindi sen. $PMR =$ sen. PMO cos. $\phi +$ cos. PMO sen. ϕ. E poichè sen. $PMO = \frac{PO}{PM} = \frac{CO-CP}{PM} = \frac{r \text{ cos. } \phi - a}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra \text{ cos.} \phi)}}$, e cos. $PMO = \frac{MO}{PM} = \frac{r \text{ sen.} \phi}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cos.} \phi)}}$, sarà sen.

$$PMR = \frac{(r \text{ cos.}\phi - a) \text{ cos.}\phi + r \text{ sen.}\phi^2}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{ cos.} \phi)}} = \frac{r - a \text{ cos.} \phi}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\text{cos.}\phi)}}.$$

Laonde sarà l'illuminazione prodotta nel punto P dalla zona elementare nell'ipotesi di *Lambert*

$$= \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ sen.} \phi \,(r - a \text{ cos.} \phi)}{(a^2+r^2-2ar \text{ cos.}\phi)^{3:2}} = \frac{2I\pi r^3\, d\phi \text{ sen.}\phi}{(a^2+r^2-2ar \text{ cos.}\phi)^{3:2}}$$
$$- \frac{2I\pi a r^2 d\phi \text{ sen.}\phi \text{ cos.}\phi}{(a^2+r^2-2ar \text{ cos.}\phi)^{3:2}}.$$

Passando ora all'integrazione di questi due termini si vede subito, che l'integrale del primo è $= \frac{-2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ar\text{cos.}\varphi)}}$. Per ritrovare l'integrale del secondo termine piglio $x = \text{cos.}\,\varphi$, e quel termine si cangia in $\frac{2I\pi a r^2 x dx}{(a^2+r^2-2arx)^{3:2}}$. Prendo inoltre $y = a^2 + r^2 - 2arx$, e il detto termine si trasforma di nuovo in $\frac{-2I\pi a r^2 \left(\frac{a^2+r^2-y}{2ar}\right)\frac{dy}{2ar}}{y^{3:2}}$

$= \frac{-I\pi(a^2+r^2)dy}{2ay^{3:2}} + \frac{I\pi dy}{2a\sqrt{y}}$, il di cui integrale è visibilmente $\frac{I\pi(a^2+r^2)}{a\sqrt{y}} + \frac{I\pi\sqrt{y}}{a} = \frac{I\pi(a^2+r^2)}{a\sqrt{(a^2+r^2-2arx)}}$
$+ \frac{I\pi}{a}\sqrt{(a^2+r^2-2arx)}$, a cui aggiungendo l'integrale dianzi trovato $- \frac{2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{ cos.} \varphi)}}$, e riducendo al medesimo denominatore tutti i termini, si ottiene finalmente l'illuminazione eccitata dalla superficie indeterminata

minata $MFN = -\frac{2I\pi(a-r\,\text{cof.}\varphi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{cof.}\varphi)}} + \text{coft.}$ Per ritrovare la coftante bafta riflettere, che l'illuminazione fvanifce infieme coll'angolo φ, il che dà $\text{coft.} = \frac{-2I\pi(a-r)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}} = 2I\pi$ prendendo per $\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}$ il valore $r-a$ piuttofto che $a-r$. Dunque la predetta illuminazione è $= 2I\pi + \frac{2I\pi(a-r\,\text{cof.}\varphi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{cof.}\varphi)}}$. Se pertanto in queft' equazione fi affume $\varphi = 180°$, e però $\text{cof.}\,\varphi = -1$, egli è manifefto, che allora dee rifultare la quantità dell'illuminazione prodotta nel dato punto dall'intera fuperficie sferica. Dunque una fiffatta illuminazione è $2I\pi + \frac{2I\pi(a+r)}{a+r} = 4I\pi$. Di qui fi raccoglie un Teorema molto fingolare e inafpettato, non fo fe da altri avvertito, che *una fuperficie sferica raggiante, comunque fia piccola o grande, produce la medefima illuminazione in un punto dovunque fituato dentro la cavità; e tale illuminazione non è altro che quella, che fi prende per unità, moltiplicata per quattro volte il rapporto della periferia circolare al diametro*. Per altro quefto Teorema fi prefenta immantinente allo fpirito, qualora il punto dato fia collocato nel centro della sfera cava, effendo evidente, che allora l'illuminazione in effo eccitata debb'effere uguale al prodotto dell'unità d'illuminazione moltiplicata per la fuperficie sferica, e divifa pel quadrato della diftanza, cioè del femidiametro, il che dà appunto $4I\pi$, come prefcrive il Teorema.

Confrontando pertanto l'efpreffione $\frac{2I\pi r}{a}\log.\frac{a+r}{r-a}$ ricavata nell'ordinaria ipotefi Euleriana coll'efpreffione $4I\pi$ avutafi dall'ipotefi di *Lambert*, fi conofce qual infigne divario producano ne' rifultati quefte due ipotefi, le quali nel ſolo caſo, che il punto irradiato ſia ſituato nel centro della sferica cavità, conducono sì l'una che l'altra a ritrovare la medeſima illuminazione. Imperciocchè ſebbene in tal caſo l'eſpreſſione $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\frac{a+r}{r-a}$ diventi eguale alla quantità indeterminata e vaga $\frac{0}{0}$, ſe per evitare queſto valore indeterminato ſi ſuppone a infiniteſimo, ſi trova $\frac{r+a}{r-a} = 1 + \frac{2a}{r}$ traſcurando i termini, che contengono le potenze di a. Dunque $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\frac{r+a}{r-a} = \frac{2I\pi r}{a}$ log. $\left(1 + \frac{2a}{r}\right)$, e ſiccome log. $\left(1+\frac{2a}{r}\right)$ $= \frac{2a}{r}$, diſprezzati gli altri termini come dianzi, perciò naſce $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\left(1 + \frac{2a}{r}\right) = 4I\pi$, come appunto ſi è trovato nell'ipoteſi di *Lambert*, e come eſſer doveva per la natura della coſa col puro diſcorſo metafiſico.

E qui parmi di ſcorgere un inconveniente nell'ipoteſi Euleriana, ed è di offerire un'illuminazione infinita, allorchè il punto ſi prende ſulla ſteſſa ſuperficie interna, vale a dire $r = a$, nel qual caſo l'illuminazione diventa $2I\pi$ log. $\frac{2r}{0} = \infty$. Queſta illuminazione infinita ha un non ſo che di aſpro, perchè ſebbene eſſa può ſembrare non ripugnante a motivo della diſtanza evaneſcente del punto dato dalla ſuperficie sferica, ſi ha però quivi un compenſo per parte della ſuperficie, da cui il punto ha una diſtanza evaneſcente, perchè anche la grandezza di tal ſuperficie è evaneſcente, ed a tale grandezza è ſempre proporzionale *cæteris paribus* l'illuminazione. Io non ſo ſe m'inganno, ma io trovo una certa armonica ſemplicità ed eleganza nell' ugualianza d' illuminazione per tutti i punti della cavità sferica, come eſige il Teorema precedentemente dimoſtrato, che non poſſo non creder vera l' ipoteſi, che ſomminiſtra un tal riſultato.

Oſſervo finalmente, che prendendo una ſuperficie piana infiniteſima in ambedue le dimenſioni fuori d'una sfera raggiante del ſemidiametro $= r$ ad una grandiſſima diſtanza dal di lei centro $= a$ ſi trova (come ho moſtrato precedentemente) l'illuminazione prodotta in detta ſuperficie $= \frac{I\pi r^2}{a^2}$ nell' ipoteſi di *Lambert*, ed $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$ nell' ipoteſi di *Eulero*; e poichè πr^2 è l' area del cerchio maſſimo della sfera raggiante, e $2\pi r^2$ è la ſuperficie emisferica, ne viene in conſeguenza, che l' illuminazione generata in quel piano infinitamente picciolo viene eſpreſſa dall' area del cerchio maſſimo ſecondo *Lambert*, e dalla ſuperficie emisferica ſecondo *Eulero*. Ora non par egli più veriſimile, che piuttoſto quell' area che queſta ſuperficie debba miſurare la quantità d' illuminazione, giacchè nelle grandiſſime diſtanze non ſi vede altro che l' area ſuddetta, oſſia il diſco, e non compariſce punto la ſuperficie dell' emisfero?

Proſeguendo queſta diſamina in alcun altro ſolenne e nuovo Problema ſpettante alla miſura della luce, mi porto a calcolare nell' ipoteſi Euleriana l' illuminazione generata dalla circonferenza circolare raggiante RMS (*fig.* 5) in un punto F preſo dentro l' area del circolo. Si guidi per F il diametro RB, e da un punto M qualunque della circonferenza ſi conducano MC al centro, MF al punto dato, MN perpendicolare al diametro. Si ponga l' angolo $MCB = \phi$, il raggio $CM = r$, $CF = a$: ſarà dunque $FM^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos. \phi$, l' archetto infiniteſimo $Mm = rd\phi$, e l' illuminazione in F

generata dal archetto Mm sarà $= \dfrac{Ird\varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos. } \varphi}$

prendendo per I l'unità d'illuminazione. Passo ora all' integrazione di questa formola, e per meglio riuscirvi faccio $r^2 + a^2 = f^2$, $2ar = g^2$, e la formola diventa $\dfrac{Ird\varphi}{f^2 - g^2 \text{ cos. } \varphi}$. Quindi assumo cos. $\varphi = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$; ond' è sen. $\varphi = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $d\varphi$ cos. $\varphi = \dfrac{2du(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$, e però $d\varphi$ $= \dfrac{2du}{1+u^2}$. Dunque essendo $f^2 - g^2 \text{cos. } \varphi = \dfrac{f^2-g^2+(f^2+g^2)u^2}{1+u^2}$, ne viene $\dfrac{Ird\varphi}{f^2-g^2 \text{ cos.}\varphi} = \dfrac{2Irdu}{f^2-g^2+(f^2+g^2)u^2} = \dfrac{2Irdu}{(r-a)^2+(r+a)^2u^2}$

$$= \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{du}{1+\left(\dfrac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{r-a}{r+a}$$

$$\times \frac{\dfrac{r+a}{r-a} \times du}{1+\left(\dfrac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{r^2-a^2} \times \frac{\dfrac{r+a}{r-a} \times du}{1+\left(\dfrac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2}$$

Quest' ultima formola esprime visibilmente la quantità $\dfrac{2Ir}{r^2-a^2}$ moltiplicata per l'elemento dell' arco circolare descritto col raggio 1, e colla tangente $\dfrac{r+a}{r-a}u$. Dunque l'illuminazione generata nel punto F dall' arco luminoso indefinito BM è $= \dfrac{2Ir}{r^2-a^2}$ Arc. tang. $\dfrac{r+a}{r-a}u$ $+$ cost. E poichè si è fatto cos. $\varphi = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, cioè u^2

$= \frac{1 - \text{cos.}\,\phi}{1 + \text{cos.}\,\phi}$, cioè $u = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.}\,\phi}{1 + \text{cos.}\,\phi}}$, sarà la predetta illuminazione $= \frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1 - \text{cos.}\,\phi}{1 + \text{cos.}\,\phi}} +$ cost. Siccome poi l'illuminazione svanisce in un coll' angolo ϕ, cioè quando cos. $\phi = 1$, nel qual caso Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1 - \text{cos.}\,\phi}{1 + \text{cos.}\,\phi}}$ diventa Arc. tang. 0, cioè Arc. $= 0$; perciò non vi è costante da aggiungere all' integrale ritrovato. Per ottenere presentemente l'illuminazione della semicirconferenza *BMR* nel punto dato *F* conviene prendere $\phi = 180°$, e perciò cos. $\phi = -1$; il che somministra la formola $\frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ Arc. tang. $\infty =$ $\frac{2Ir}{r^2 - a^2} \times \frac{1}{2}\pi$, chiamando π la semicirconferenza del circolo descritto col raggio 1. Dunque l' illuminazione prodotta dalla semicirconferenza nel punto F è $= \frac{Ir\pi}{r^2 - a^2}$, e l'illuminazione generata da tutta la circonferenza (che è un' illuminazione doppia dell' altra come è chiaro) è $= \frac{2Ir\pi}{r^2 - a^2}$, cioè uguale alla stessa circonferenza moltiplicata per l'unità d'illuminazione, e divisa pel quadrato dell' ordinata al diametro nel dato punto *F*.

Se ora si vuol trovare l'illuminazione del punto *F* nell' ipotesi di *Lambert*, converrà moltiplicare $\frac{Ird\phi}{a^2 + r^2 - 2ar\ \text{cos.}\,\phi}$ pel seno dell' angolo di emanazione *FMO* fatto dal raggio lucido *MF* colla tangente *MO* in *M*, il qual angolo è $= FMN + NMO = FMN + MCB$ $= FMN + \phi$. Dunque sen. $FMO =$ sen. FMN cos. ϕ

$+$ cof. FMN fen. $\phi = \frac{FN \text{ cof. } \phi}{FM} + \frac{MN \text{ fen.} \phi}{FM}$

$= \frac{(CN - CF) \text{ cof. } \phi}{FM} + \frac{r \text{ fen. } \phi^2}{FM} = \frac{(r \text{ cof.} \phi - a) \text{ cof.} \phi + r \text{ fen.} \phi^2}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \phi)}}$

$= \frac{r - a \text{ cof.} \phi}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{cof.} \phi)}}$. Laonde l'illuminazione generata nel punto F dall'archetto Mm farà $\frac{Ir(r - a \text{ cof. } \phi) \, d\phi}{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \phi)^{3:2}}$

$= \frac{Ir(r - a \text{ cof.} \phi) d\phi}{(a^2 + r^2)^{3:2} \left(1 - \frac{2ar}{a^2 + r^2} \text{ cof. } \phi\right)^{3:2}} = \frac{Ir(r - a \text{ cof. } \phi) \, d\phi}{h^{3:2} (1 - m \text{cof.} \phi)^{3:2}}$

affumendo $h = a^2 + r^2$, $m = \frac{2ar}{a^2 + r^2}$. Trovata pertanto l'illuminazione generata dall'archetto $Mm = \frac{Ir}{h^{3:2}}$ $(r - a \text{ cof. } \phi) \, (1 - m \text{ cof. } \phi)^{-3:2} \, d\phi$, io riduco in ferie l'efpreffione $(1 - m \text{ cof. } \phi)^{-3:2}$, ed ho la detta efpreffione $= 1 + \frac{1}{2} m \text{ cof. } \phi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} m^2 \text{ cof. } \phi^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^3 \text{cof. } \phi^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} m^4 \text{ cof. } \phi^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} m^5 \text{ cof. } \phi^5 +$ ecc.

Dunque l'illuminazione dell'archetto farà $\frac{Ir}{h^{3:2}} \Big(r d\phi + \frac{1}{2} mr \text{ cof. } \phi \, d\phi - a \text{ cof. } \phi \, d\phi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} rm^2 \text{ cof. } \phi^2 \, d\phi - \frac{1}{2} am \text{ cof. } \phi^2 \, d\phi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} rm^3 \text{ cof. } \phi^3 \, d\phi - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} am^2 \text{ cof. } \phi^3 \, d\phi$

$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} rm^4 \text{ cof. } \phi^4 \, d\phi - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} am^3 \text{ cof. } \phi^4 \, d\phi$

$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} rm^5 \text{ cof. } \phi^5 \, d\phi - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} am^4 \text{cof.} \phi^5 d\phi +$ ecc.

$$= \frac{Ir}{h^{3:2}} \left\{ \left.\begin{matrix} rd + \frac{1}{2}\ mr \\ -\ a \end{matrix}\right) \text{cof.}\ \varphi\, d\varphi \left.\begin{matrix} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} rm^2 \\ - \frac{3}{2}\ am \end{matrix}\right) \text{cof.}\ \varphi^2\, d\varphi \right.$$

$$\left. + \left.\begin{matrix} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} rm^3 \\ - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} am^2 \end{matrix}\right) \text{cof.}\ \varphi^3\, d\varphi \left.\begin{matrix} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} rm^4 \\ - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} am^3 \end{matrix}\right) \text{cof.}\ \varphi^4\, d\varphi \right.$$

$$\left. \left.\begin{matrix} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} rm^5 \\ - \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} am^4 \end{matrix}\right) \text{cof.}\ \varphi^5\ d\varphi \pm \text{ecc.} \right\}$$

. Chiamo A il coefficiente di cof. $\varphi d\varphi$, B quello di cof. $\varphi^2 d\varphi$, C quello di cof. $\varphi^3 d\varphi$, D ecc. Perlochè la predetta illuminazione farà $\frac{Ir}{h^{3:2}}$ $(rd\varphi + Ad\varphi\,\text{cof.} + Bd\varphi\,\text{cof.}\ \varphi^2 + C\,d\varphi\,\text{cof.}\ \varphi^3 + Dd\varphi\,\text{cof.}\ \varphi^4 + Ed\varphi\,\text{cof.}\ \varphi^5 + \text{ecc.})$ Ora fi fa dal calcolo integrale, che

I.

$$A \int d\varphi\,\text{cof.}\ \varphi = A\,\text{fen.}\ \varphi$$

II.

$$B \int d\varphi\,\text{cof.}\ \varphi^2 = \tfrac{1}{2} B\,\text{fen.}\ \varphi\,\text{cof.}\ \varphi + \tfrac{1}{2} B\varphi$$

III.

$$C \int d\varphi\,\text{cof.}\ \varphi^3 = \tfrac{1}{3} C\,\text{fen.}\ \varphi\,\text{cof.}\ \varphi^2 + \tfrac{2}{3} C\,\text{fen.}\ \varphi$$

IV.

$$D \int d\varphi\,\text{cof.}\ \varphi^4 = \tfrac{1}{4} D\,\text{fen.}\ \varphi\,\text{cof.}\ \varphi^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} D\,\text{fen.}\ \varphi\,\text{cof.}\ \varphi$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} D\,\varphi$$

V.

$$E \int d\varphi \cos.\varphi^5 = \frac{1}{5} E \text{ sen.} \varphi \cos.\varphi^4 + \frac{1.4}{3.5} E \text{ sen.} \varphi \cos.\varphi^2$$

$$+ \frac{2.4}{3.5} E \text{ sen.} \varphi$$

VI.

$$F \int d\varphi \cos.\varphi^6 = \frac{1}{6} F \text{ sen.} \varphi \cos.\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6} F \text{ sen.} \varphi \cos.\varphi^3$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} F \text{ sen.} \varphi \cos.\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F\varphi$$

VII.

ecc.

Conseguentemente integrando la precedente espressione dell' illuminazione dell' archetto, si avrà quella dell' arco indefinito $BM = \frac{Ir}{b^{3:2}} \left(r\varphi + \frac{1}{2} B\varphi + \frac{1.3}{2.4} D\varphi \right.$

$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} F\varphi +$ ecc........ $+ A$ sen. $\varphi + \frac{2}{3} C$ sen. φ

$+ \frac{2.4}{3.5} E$ sen. $\varphi +$ ecc..... $+ \frac{1}{2} B$ sen. φ cos. φ

$+ \frac{1.3}{2.4} D$ sen. φ cos. $\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F$ sen. φ cos. $\varphi +$ ecc....

$+ \frac{1}{3} C$ sen. φ cos. $\varphi^2 + \frac{1.4}{3.5}$ E sen. φ cos. $\varphi^2 +$ ecc.....

$\frac{1}{4} D$ sen. φ cos. $\varphi^3 + \frac{1.5}{4.6} F$ sen. φ cos. $\varphi^3 +$ ecc.....

$+ \frac{1}{5} E$ sen. φ cos. $\varphi^4 +$ ecc..... $+ \frac{1}{6} F$ sen. φ cos. φ^5

$\left. + \text{ecc......} \right) +$ cost. E siccome l' illuminazione diventa

venta nulla quando l' arco pure diventa nullo, nasce perciò cost. $= 0$. Posto ora $\varphi = 360° = 2\pi$, prendendo π per la semicirconferenza del cerchio descritto col raggio 1, risulta tutta l'illuminazione generata nel dato punto F dall' intera circonferenza raggiante $BMRS$

$$= \frac{2Ir\pi}{(a^2+r^2)^{3:2}} \left(r + \frac{1}{2} B + \frac{1.3}{2.4} D + \frac{1.3.5}{2.4.6} F + \text{ecc.}\right)$$

Se si volesse ora conoscere l' illuminazione generata dalla periferia lucida in un punto situato sulla medesima, basterà assumere $a = r$, e quindi $h = 2r^2$, $m = 1$,

$$B = \frac{3.5}{2.4} r - \frac{3}{2} r = \frac{3(5-4)}{2.4} r = \frac{3}{2.4} r, D = \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} r$$

$$- \frac{3.5.7}{2.4.6} r = \frac{3.5.7(9-8)}{2.4.6.8} r = \frac{3.5.7}{2.4.6.8} r,$$

$$F = \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12} r - \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10} r = \frac{3.5.7.9.11(13-12)}{2.4.6.8.10.12} r$$

$= \dfrac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12} r$, ecc., ed avrassi la detta illuminazione $= \dfrac{I\pi}{r\sqrt{2}} \left(1 + \dfrac{3}{2.2.4} + \dfrac{3.3.5.7}{2.2.4.4.6.8}\right.$

$$\left. + \frac{3.3.5.5.7.9.11}{2.2.4.4.6.6.8.10.12} + \text{ecc.}\right).$$

Passo ora a calcolare l' illuminazione generata da un cerchio luminoso FGO (*fig.* 6) sopra un punto A situato nella retta CA, che dal suo centro si conduce perpendicolare al piano del cerchio. Dal centro C descrivendo i due cerchj infinitamente prossimi MER, SNm, egli è evidente, che l' illuminazione prodotta in A dalla zona infinitesima racchiusa tralle loro circonferenze s' agguaglia all' unità d' illuminazione moltiplicata per detta zona, e divisa pel quadrato della distanza AM nell' ipotesi Euleriana, e moltiplicata nuovamente pel seno dell' angolo di emanazione CMA nell' ipotesi di *Lambert*. Dunque nominando il raggio CF del dato cerchio r, a la diſtanza AC del punto dato dal centro, x il raggio CM, $1:\pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, ſi trova la zona luminoſa $= 2\pi x dx$, $AM^2 = a^2 + x^2$, e l' illuminazione generata dalla zona in $A = \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$. Dunque integrando ſarà l' illuminazione prodotta dal cerchio RME $= \int \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2} = I\pi \log. (a^2+x^2) +$ coſt: e ſiccome l' illuminazione ſvaniſce col ſemidiametro x; quindi è coſt. $= - I\pi \log. a^2$; onde la detta illuminazione ſi fa $= I\pi \log. \frac{a^2+x^2}{a^2}$. Laonde per tutto il dato cerchio OFG ſarà l' illuminazione ricercata $= I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$ nell' ipoteſi Euleriana.

Nell' ipoteſi di *Lambert* conviene moltiplicare l' eſpreſſione $\frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$ pel ſeno dell' angolo AMC, cioè per $\frac{AC}{AM}$, oſſia per $\frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ ad effetto di ottenere l' illuminazione prodotta dalla zona circolare, la quale illuminazione ſarà in conſeguenza $= \frac{2I\pi a x dx}{(a^2+x^2)^{3:2}}$. L' integrale di queſta formola è $= - \frac{2I\pi a}{\sqrt{(a^2+x^2)}} +$ coſt. $= 2I\pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$. Onde l' illuminazione prodotta dall' area circolare indefinita RME è $= \frac{2I\pi(\sqrt{(a^2+x^2)}-a)}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, e quella che è generata dal cerchio dato FOG è $= \frac{2I\pi(\sqrt{(a^2+r^2)} - a)}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$

$= 2I\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$.

Pongasi ora al confronto questa espressione $2I\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$ colla prima $I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$, e si giudichi quanto essenzialmente differiscono l' una dall' altra. Questa differenza arriva a tal segno, che se il cerchio luminoso si suppone infinito, cioè $r = \infty$, l'illuminazione da esso prodotta nel dato punto secondo l' ipotesi di *Lambert* e *Bouguer* diventa $2I\pi$, cioè determinata e finita, ma nell' ipotesi comune Euleriana si scuopre $= 2I\pi \log. \infty$, cioè a dire infinita.

Un soggetto degno dell' attenzione de' fisici e geometri in questa scienza della misura del Lume è quello, che spetta a' varj gradi d' illuminazione, che la terra riceve dal sole nelle sue diverse altezze sopra l' orizzonte, e singolarmente dalle parti successivamente visibili del disco solare allorchè attraversa l' orizzonte così nel nascere, come nel tramontare. Volendo entrare in questa delicata ricerca, convien prima premettere il Problema di ritrovare l' illuminazione, che da una data superficie in tutti i suoi punti *egualmente luminosa* viene prodotta in un elemento o porzione infinitesima di un' altra data superficie esposta ai raggi della prima. A tal effetto sia PMQ (*fig.* 7) la superficie raggiante di qualunque forma, ugualmente luminosa in tutte le sue parti; ed EF sia la superficie esposta a ricevere i raggi di quella; cercasi l' illuminazione prodotta da PQ nell' elemento, o porzioncella infinitesima Aa. Piglisi nella superficie illuminante l'elemento Mm, che tramanda in A la piramide luminosa MAm sotto l' angolo d' incidenza $MAa = b$, e sotto l' angolo di emanazione $mMA = e$. Ciò posto, l' illuminazione eccitata nell' elemento Aa da Mm si avrà con moltiplicare la parte illuminatrice Mm pel seno dell' angolo h d' incidenza, e pel seno dell' angolo e di emanazione, e con dividere il prodotto pel quadrato della distanza MA, cioè sarà $= \frac{Mm.\,\text{sen.}\,h\,\text{sen.}\,e}{MA^2}$. Si concepisca tagliata la piramide luminosa da un piano mi perpendicolare ai lati di lei; e per la Geometria sarà come il seno tutto al seno dell' angolo mMA, così la base infinitesima Mm della piramide al piano secante mi; onde $mi = Mm.\,\text{sen.}\,e$; e quindi l' illuminazione prodotta $= \frac{mi.\,\text{sen.}\,h}{MA^2}$. Se ora intorno ad A come centro col semidiametro $AC = 1$ si descrive una superficie sferica, di cui BNC sia la porzione compresa fra la piramide luminosa PAQ tramandata in A da tutta la superficie raggiante PQ, ed Nn sia la porzioncella serrata fra la piramidetta Mam; egli è noto, che le due minime superficie mi, Na stanno fra loro come i quadrati di Ai, ovvero AM, ed AN; e però Nn $= \frac{mi.\,AN^2}{AM^2} = \frac{mi}{AM^2}$; e questo valore sostituito nella precedente espressione dell' illuminazione rende questa $= Nn.$ sen. h, per modo che chiamata I l' illuminazione prodotta da una porzione finita della superficie raggiante PMQ, ed $Nn = d\omega$, risulta $dI = d\omega$ sen. h, ed I $= \int d\omega$ sen. h.

Di qui è facile l' inferire, che se la superficie sferica BNC fosse ancor essa una superficie raggiante, ed ugualmente luminosa in tutte le sue parti, come lo è la PMQ, l' illuminazione da essa prodotta in Aa sarebbe precisamente la stessa che quella prodotta da PMQ. Imperciocchè essendo l' illuminazione in A dell' elemento Nn uguale al prodotto di detto elemento nel ſeno dell' angolo di emanazione nNA, e nel ſeno dell' angolo d'incidenza h, diviſo pel quadrato della diſtanza NA, ed eſſendo $= 1$ così queſto quadrato, come il ſeno dell' angolo retto nNA, ne viene l' illuminazione generata dall' elemento $Nn = d\omega$ ſen. h, qual'è appunto (come ſi è veduto) l' illuminazione generata dall' elemento Mm; e con ſimil diſcorſo ſi prova, che l' illuminazione eccitata in Aa da tutta la data ſuperficie PMQ è uguale all' illuminazione fatta dal ſegmento sferico BNC rinſerrato fra i lati della piramide lucida PAQ.

Per venire ora alla determinazione dell' illuminazione del ſole nelle ſue diverſe altezze ſopra l' orizzonte, ſia Cc (*fig.* 8) una ſuperficie piana orizzontale infinitamente piccola in tutte le dimenſioni, e intorno ad eſſa come centro la ſuperficie sferica $AOBZ$ col ſemidiametro $= 1$, la quale dal piano Cc prodotto viene tagliata nel cerchio maſſimo orizzontale ALB. Il cono luminoſo DCE, che partendo da tutto il diſco ſolare va ad irradiare la ſuperficie data infiniteſima Cc, ed ha per aſſe CP, taglia nella ſuperficie sferica il ſegmente $DQEP$ avente per baſe il cerchio DQE, e per polo P; e conſeguentemente, per ciò che ſi è dimoſtrato, tanta ſarà l' illuminazione, che produrrebbe in Cc la ſuperficie concava $DQEP$, ſe ſi ſupponeſſe ugualmente lucida che il diſco ſolare, quanta è l' illuminazione eccitata dal diſco medeſimo, ſicchè per conoſcer queſta baſterà ritrovar quella. Tiriſi pertanto la verticale CZ, ed il piano ZCP diſteſo ſegni nella ſuperficie sferica il cerchio verticale $ZAOE$; e per un punto M preſo ad arbitrio nel predetto ſegmento ſi faccia paſſare il parallelo FNG appartenente al polo P, conducendoſi pure il parallelo infinitamente vicino fmg. Ciò fatto pel polo P, e pel punto M ſi concepiſca guidato l' arco PMm di circolo maſſimo, e l' arco PNn ſotto un angolo infiniteſimo col primo: finalmente pel vertice Z, e per M si faccia passare il cerchio verticale $ZMKO$, che incontri in K il cerchio orizzontale. Si faccia la distanza di M dal vertice, cioè $ZM = \Delta$, la distanza dal polo, ossia $PM = p$, l'angolo al polo $ZPM = \varphi$; e sarà il semidiametro del parallelo $FMG =$ sen. p, $MN = d\varphi$ sen. p, $Mm = dp$. Laonde l'elemento $MmnN$, che si ha con moltiplicare MN per Mm, si trova $= d\varphi dp$ sen. p, e questo moltiplicato pel seno dell' angolo d' incidenza MCK, ovvero per cos. Δ dà per l' illuminazione prodotta dall' elemento $MmnN$ la formola $d\varphi dp$ sen. p cos. Δ. Posta ora la distanza del polo dal vertice, ovvero $PZ = a$, si ha nel triangolo sferico ZPM dalla Trigonometria cos. $\Delta =$ cos. p cos. $a +$ sen. p sen. a cos. φ, e surrogato nella formola precedente questo valore nasce l' espressione $d\varphi dp$ sen. p cos. p cos. $a + d\varphi\, d\, p$ sen. p^2 sen. a cos. φ, la quale rappresenta l' illuminazione del suddetto elemento. Si avverta presentemente, che l' integrazione di questa formola, nel supposto che si faccia variare la sola φ, somministra l' illuminazione prodotta dalla parte indeterminata $FfmM$ della zona infinitesima $FfgG$, e questa illuminazione trovasi $= \varphi dp$ sen. p cos. p cos. $a + dp$ sen. p^2 sen. a sen. φ: siffatta quantità dee pur essa integrarsi, ma in ipotesi che si cangi la sola p; e siccome è noto, che $\int dp$ sen. p cos. $p = \frac{1}{2}$ sen. p^2, e $\int dp$ sen. $p^2 = \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$ sen. p cos. p; quindi sarà $\int \varphi dp$ sen. p cos. p cos. $a + \int dp$ sen. p^2 sen. φ sen. $a = \frac{1}{2}\varphi$ sen. p^2 cos. $a + \frac{1}{2} p$ sen. φ sen. $a - \frac{1}{2}$ sen. p cos. p sen. φ sen. $a = \frac{1}{2}\varphi$ sen. p^2 cos. $a + \frac{1}{2}$ sen. φ sen. a (p — sen. p cos. p), che esprime l' illuminazione fatta dalla parte indefinita FMP del segmento FGP; sicchè preso $\varphi = 360° = 2\pi$, risulta l' illuminazione eccitata da tutto quel ſegmento $= \pi$ ſen. p^2 coſ. a; e facendoſi poi eſprimere da p la diſtanza PR del polo dalla baſe dell' intero ſegmento DEP rinſerrato fra i raggi del cono ſolare luminoſo, la ſteſſa formola ſempliciſſima π ſen. p^2 coſ. a rappreſenta l' illuminazione di eſſo ſegmento, e conſeguentemente quella del diſco ſolare, che è in tutto equivalente alla prima.

Per mezzo di queſta formola rieſce ora faciliſſima la coſtruzione di una Tavola, la quale rappreſenti le varie illuminazioni del ſole nelle differenti diſtanze del ſuo centro dal zenit, ovvero nelle differenti altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte, facendo $= 1$ l' illuminazione corriſpondente all' altezza di 90°.

TAVOLA.

Altezze del centro solare sopra l' orizzonte.	Illuminazioni prodotte dal sole in un piano orizzontale.						
		64°	0,8987940	33°	0,5446390	2°	0,0348995
		63°	0,8910065	32°	0,5299193	1°	0,0174524
		62°	0,8829470	31°	0,5150381		
		61°	0,8746197	30°	0,5000000		
		60°	0,8660254	29°	0,4848096		
90°	1,0000000	59°	0,8571673	28°	0,4694716		
89°	0,9998477	58°	0,8480481	27°	0,4539905		
88°	0,9993908	57°	0,8386706	26°	0,4383712		
87°	0,9986295	56°	0,8290376	25°	0,4226183		
86°	0,9975640	55°	0,8191521	24°	0,4067366		
85°	0,9961947	54°	0,8090170	23°	0,3907311		
84°	0,9945218	53°	0,7986355	22°	0,3746066		
83°	0,9925462	52°	0,7880107	21°	0,3583679		
82°	0,9902680	51°	0,7771460	20°	0,3420202		
81°	0,9876883	50°	0,7660444	19°	0,3255682		
80°	0,9848077	49°	0,7547096	18°	0,3090170		
79°	0,9816271	48°	0,7431448	17°	0,2923717		
78°	0,9781476	47°	0,7313537	16°	9,2756374		
77°	0,9743701	46°	0,7193398	15°	0,2588190		
76°	0,9702957	45°	0,7071068	14°	0,2419219		
75°	0,9659258	44°	0,6946584	13°	0,2249511		
74°	0,9612617	43°	0,6819984	12°	0,2079117		
73°	0,9563048	42°	0,6691306	11°	0,1908090		
72°	0,9510565	41°	0,6560590	10°	0,1736482		
71°	0,9455185	40°	0,6427876	9°	0,1564345		
70°	0,9396926	39°	0,6293204	8°	0,1391731		
69°	0,9335804	38°	0,6156615	7°	0,1218693		
68°	0,9271839	37°	0,6018150	6°	0,1045285		
67°	0,9205049	36°	0,5877853	5°	0,0871527		
66°	0,913545	35°	0,5735764	4°	0,0697565		
65°	0,9063078	34°	0,5591929	3°	0,0523360		

Siccome

Siccome inoltre è noto dall' Aſtronomia, che l' angolo ſotteſo dal ſemidiametro ſolare, ovvero l' arco *PD*, oppure *p* è uguale a 16′, il lembo inferiore del diſco ſolare non giugne a toccare l' orizzonte ſe non allorquando il centro del ſole ſi trova a 16′ di altezza. Conſeguentemente per le altezze del centro ſolare minori di un grado riſulta la ſeguente

TAVOLA.

Altezze del centro ſolare minori di un grado.	Illuminazioni prodotte da tutto il diſco ſolare ſopra un piano orizzontale.	43′	0, 0125079	22′	0, 0063995
		42′	0, 0122170	21′	0, 0061086
		41′	0, 0119261	20′	0, 0058177
		40′	1, 0116353	19′	0, 0055268
		39′	0, 0113444	18′	0, 0052360
59′	0, 0171616	38′	0, 0110535	17′	0, 0049451
58′	0, 0168707	37′	0, 0107627	16′	0, 0046542
57′	0, 0165799	36′	0, 0104718		
56′	0, 0162802	35′	0, 0101809		
55′	0, 0159982	34′	0, 0098900		
54′	0, 0157073	33′	0, 0095992		
53′	0, 0154165	32′	0, 0093083		
52′	0, 0151256	31′	0, 0090174		
51′	0, 0148348	30′	0, 0087265		
50′	0, 0145439	29′	0, 0084357		
49′	0, 0142530	28′	0, 0081448		
48′	0, 0139622	27′	0, 0078539		
47′	0, 0136713	26′	0, 0075630		
46′	0, 0133805	25′	0, 0072721		
45′	0, 0130896	24′	0, 0069813		
44′	0, 0127987	23′	0, 0066904		

Colle dottrine finqui eſpoſte ſi può ora dare il giuſto valore a quell' oſſervazione cardinale di *Bouguer*, ſulla quale quel celebre Geometra ſonda tutta la ſua teoria dell' indebolimento del lume degli aſtri nell' attraverſare l' atmosfera terreſtre, e coſtruiſce la ſua Tavola delle forze del lume dopo il paſſaggio per l' atmosfera nelle differenti altezze dell' aſtro. Paragona egli l' intenſità della luce lunare nell' altezza di 19° 16' con quella che corriſponde all' altezza di 66°. 11', e dopo un' attenta oſſervazione ſtabiliſce il rapporto delle due intenſità in quello di 1681 : 2500, cioè a dire ſecondo *Bouguer* la luna all' altezza apparente di 19°. 16' ſopra l' orizzonte ſparge ſulla terra una luce un terzo più debole di quella che vi manda nell' altezza di 66°. 11'.

Ma ſe ſi applica a queſto caſo la noſtra formola π ſen. p^2 coſ. a, ſi trova ſubito il rapporto di quelle due intenſità eſpreſſo da 32996 : 91484; e però la luna ſenza l' alterazione prodotta dall' atmosfera (da cui la noſtra formola preſcinde) getta ſulla terra una luce quaſi tre volte più debole all' altezza di 19°. 16', che all' altezza di 66°. 11'; e ſiffatto indebolimento dee poi creſcere molto più avendo riguardo alla diminuzione del lume nel paſſaggio per l' atmosfera, diminuzione tanto maggiore, quanto è più lungo il viaggio della luce per l' atmosfera, oſſia quanto è più vicina la luna all' orizzonte. Quindi può farſi giudizio, qual poco conto dee farſi di quell' oſſervazione fondamentale di *Bouguer*, ed a qual inſtabile principio ſi appoggia tutta la ſua teoria della diſperſione e del diſſipamento, che ſoffre il lume nel tragittare l' atmosfera terreſtre.

Finalmente il maneggio della predetta formola ci fa conoſcere un' altra verità poco o nulla atteſa, ed è la notabiliſſima diverſità nella forza della luce ſolare, e conſeguentemente nella chiarezza del giorno dall' una all' altra ſtagione dell' anno. Per cagion d' eſempio qui in Pavia, dove l' altezza meridiana del centro del fole nel giorno del folftizio d' eftate è di 68°. 17′, e nel folftizio d' inverno è di 21°. 21′, fi fcuopre, che la chiarezza del giorno in ful meriggio nel primo folftizio fta a quella dell' altro folftizio come 92902 : 36406, cioè il meriggio del giorno folftiziale eftivo è oltre il doppio più chiaro e luminofo del meriggio del giorno folftiziale iemale, ed una tal proporzione fra lo fplendore meridiano de' due folftizj crefce poi maggiormente pel diffipamento della luce folare nel fuo tragitto attraverfo l' atmosfera, il qual diffipamento è fempre vie minore quanto è maggiore l' altezza del fole full' orizzonte.

Refta ora per ultimo da indagare l' illuminazione di qualunque parte vifibile del difco folare nell' atto che attraverfa l' orizzonte. La formola efprimente l' illuminazione prodotta da qualunque parte indeterminata del difco del fole fopra un piano orizzontale fi è trovata $= \frac{\varphi}{2\pi} \text{cof.}\, a + \frac{\text{fen.}\,\varphi\ \text{fen.}\, a\, (p - \text{fen.}\, p\ \text{cof.}\, p)}{2\,\pi\ \text{fen.}\, p^2}$, nella quale p è l' angolo fottefo dal femidiametro del fole, cioè $p = 16'$; 2π è la circonferenza del cerchio defcritto col raggio 1, cioè $2\pi = 6,28318530$; a è la diftanza del centro del fole dal zenit; φ è l' angolo al polo del fegmento luminofo ecc. Siccome in quefta formola è invariabile la quantità $\frac{p - \text{fen.}\, p\ \text{cof.}\, p}{2\,\pi\ \text{fen.}\, p^2}$ in tutte le differenti altezze del centro folare fopra l' orizzonte, fia bene determinarla anticipatamente. Effendo dunque $2\pi = 360° = 21600'$, $p = 16'$, ftarà $21600' : 16' :: 6,28318530$: al quarto, che farà p efpreffo in parti del raggio 1. Sicchè

log. 6,28318530 = 0,7981799
log. 16′ . . . . . . = 1,2041200

2,0022999
log. 21600′ . . . . = 4,3344537

7,6678462 numero = 0,0046542

Dunque $p = 0,0046542$

Parimente per trovare sen. p cos. p, che dee sottrarsi da p si fa

$$\begin{array}{ll} \log.\,\text{sen.}\,p \ldots = & 7,6678445 \\ \log.\,\text{cos.}\,p \ldots = & 9,9999953 \\ \hline & 7,6678398 \text{ numero} = \underline{0,0046541} \end{array}$$

Perciò p — sen. p cos. p . . . . $= 0,0000001$

Si trova ora log. $\dfrac{2\pi\ \text{sen.}\ p^2}{p - \text{sen.}\ p\ \text{cos.}\ p}$ così:

$$\begin{array}{ll} \log.\ 2\pi \ldots\ldots = & 0,7981799 \\ 2\ \log.\ \text{sen.}\ p \ldots = & 5,3356890 \\ \hline \log.\ 2\pi\ \text{sen.}\ p^2 \ldots = & 6,1338689 \end{array}$$

$$\log.\ \frac{1}{p - \text{sen.}\,p\,\text{cos.}\,p} \ldots = 7,0000000$$

$\log.\ \dfrac{2\pi\ \text{sen.}\ p^2}{p - \text{sen.}\,p\ \text{cos.}\,p} \ldots = 3,1338689$, che è il logaritmo da sottrarsi da log. sen. φ sen. a per avere il logaritmo del secondo termine della formola, cioè di $\dfrac{\text{sen.}\,\varphi\ \text{sen.}\,a\,(p - \text{sen.}\,p\ \text{cos.}\,p)}{2\pi\ \text{sen.}\,p^2}$. Ecco dunque il prospetto

$2\pi' = 21600'$ $\qquad\qquad$ $\log.\ 2\pi' = 4,3344537$

$2\pi = 6,28318530$ $\qquad$ $\log.\ \dfrac{2\pi\ \text{sen.}\ p^2}{p - \text{sen.}\,p\ \text{cos.}\,p} = 3,1338689$

P A R T E I.

Altezze del centro solare sopra l'orizzonte.

CASO I.

Altezza del centro del sole sopra l'orizzonte $= 15'$; onde $a = 89^\circ.45'$; e così $\varphi = 90^\circ +$ arc. sen. $\dfrac{15}{16}$. Ma log. $\frac{15}{16} = 9,9719713$, a cui corrisponde arc. $= 69^\circ . 38'$.

Dunque $\phi = 90^\circ + 69^\circ\ 38' = 159^\circ . 38' = 9578'$.

Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{9578}{21600}$ sen. $15'$. Perciò

$$\begin{array}{lr}
\text{log. } 9578 = & 3,9812748 \\
\text{log. sen. } 15' \ldots = & 7,6398160 \\
\hline
 & 1,6210908 \\
\text{log. } 21600 \ldots = & 4,3344537 \\
\hline
 & 7,2866371 \text{ num.} \ldots = 0,0019348
\end{array}$$

sen. $\phi =$ sen. $159^\circ . 38' =$ sen. $20^\circ . 22'$

$$\begin{array}{lr}
\text{log. sen. } \phi \ldots = & 9,5416126 \\
\text{log. sen. } a \ldots = & 9,9999959 \\
\hline
 & 9,5416085 \\
 & -3,1338689 \\
\hline
 & 6,4077396 \text{ num.} \ldots = \underline{0,0002557}
\end{array}$$

Dunque l'illuminazione del semiseg-
mento superiore all'orizzonte .... $= 0,0021905$
e l'illuminazione di tutto quel seg-
mento superiore all'orizzonte essen-
do doppia, è .... $= 0,0043810$
(A)

CASO II.

Altezza del centro solare sopra l'orizzonte $= 14'$; perciò $a = 89^\circ . 46'$; onde $\phi = 90^\circ +$ arc. sen. $\frac{14}{16} =$ $90^\circ +$ arc. sen. $\frac{7}{8}$. Ma log. $\frac{7}{8} = 9,9420080$, a cui corrisponde arc. $= 61^\circ . 3'$.

Dunque $\phi = 151^\circ . 3' = 9063'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi}$ cos. $a = \frac{9063}{21600}$ sen. $14'$. Perciò

log. 9063 = 3, 9572720
log. ſen. 14′ = 7, 6098530

1, 5671250
log. 21600 = 4, 3344537

7, 2326713 num. = 0, 0017087

ſen. φ = ſen. 151°. 3′ = ſen. 28°. 57′

log. ſen. φ .... = 9, 6848868
log. ſen. a ... = 9, 9999964

9, 6848832
— 3, 1338689

6, 5510143 num. = 0, 0003556

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è = 0, 0020643
e però l'illuminazione doppia, cioè di
tutto il ſegmento è .... = 0, 0041286
(B)

Caso III.

Altezza del centro ſolare = 13′, quindi a = 89°. 47′; e però $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{13}{16}$. Ma log. $\frac{13}{16}$ = 9, 9098233, a cui corriſponde arc. = 54°. 21′. Dunque φ = 144°. 21′ = 8661′. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$, coſ. a = $\frac{8661}{21600}$ ſen. 13′. Sicchè

log. 8661 ... = 3, 9375680
log. ſen. 13′ .. = 7, 5776686

1, 5152366
log. 21600 = 4, 3344537

7, 1807829 num. = 0, 0015163

ſen. φ = ſen. 144°. 21′ = ſen. 35°. 39′

log. fen. $\varphi = 9,\ 7655436$
log. fen. $a = 9,\ 9999969$

$9,\ 7655405$
$-\ 3,\ 1338689$

$6,\ 6316716$ num. $= 0,\ 0004282$

Dunque l'illuminazione del femifegmento
è . . . . $= 0,\ 0019445$
e l'illuminazione totale . . . . . . $= 0,\ 0038890$
(C)

CASO IV.

Altezza del centro folare $= 12'$; cioè $a = 89°.\ 48'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. fen. $\frac{3}{4}$. Ma log. $\frac{3}{4} = 9{,}8750612$, a cui corrifponde arc. $= 48°.\ 35'$; perciò $\varphi = 138°.\ 35' = 8315'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{8315}{21600}$ fen. $12'$. Sicchè

log. $8315 = 3,\ 9198623$
log. fen. $12' = 7,\ 5429065$

$1,\ 4627688$
log. $21600 = 4,\ 3344537$

$7,\ 1283151$ num. $= 0,\ 0013437$

fen. $\varphi =$ fen. $138°.\ 35' =$ fen. $41°.\ 25'$. Onde

log. fen. $\varphi = 9,\ 8205496$
log. fen. $a = 9,\ 9999974$

$9,\ 8205470$
$-\ 3,\ 1338689$

$6,\ 6866781$ num. $= 0,\ 0004860$

Dunque l'illuminazione del femifegmento è . . . . $= 0,\ 0018297$
e l'illuminazione totale . . . . . . $= 0,\ 0036594$
(D)

CASO V.

Altezza del centro ſolare $= 11'$, ovvero $a = 89°. 49'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{11}{16}$. Ma log. $\frac{11}{16}$ $= 9,8372727$, a cui corriſponde arc. $43°. 26'$. Sicchè $\varphi = 133°. 26' = 8006'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. a $= \frac{8006}{21600}$ ſen. $11'$.

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 8006 & = & 3,9034156 \\
\text{log. ſen. } 11' & = & 7,5051181 \\ \hline
 & & 1,4085337 \\
\text{log. } 21600 & = & 4,3344537 \\ \hline
 & & 7,0740800 \quad \text{num.} = 0,0011860
\end{array}$$

ſen. $\varphi =$ ſen. $133°, 26' =$ ſen. $46°. 34'$. Dunque

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. ſen. } \varphi & = & 9,8610412 \\
\text{log. ſen. } a & = & 9,9999978 \\ \hline
 & & 9,8610390 \\
 & - & 3,1338689 \\ \hline
 & & 6,7271701 \quad \text{num.} = \underline{0,0005335}
\end{array}$$

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0,0017195$
e l' illuminazione totale . . . . . $= 0,0034390$
(*E*)

CASO VI.

Altezza del centro ſolare $= 10'$, ovvero $a = 89°. 50'$., onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{5}{8}$. Ma log. $\frac{5}{8}$ $= 9,7958800$, a cui corriſponde arc. $= 38°. 41'$.

Dunque

Dunque $\varphi = 128°.\ 41' = 7721'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. a

$= \frac{7721}{21600}$ ſen. $10'$. Dunque

log. 7721 = 3, 8876736
log. ſen. 10′ = 7, 4637255
———————
1, 3513991
log. 21600 = 4, 3344537
———————
7, 0169464 num. = 0, 0010398

ſen. φ = ſen. 108°. 41′ = ſen. 51°. 19′. Onde

log. ſen. φ = 9, 8924354
log. ſen. a = 9, 9999982
———————
9, 8924336
— 3, 1338689
———————
6, 7585647 num. = 0, 0005735

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0016133
e l'illuminazione totale . . . . . . = 0, 0032266
(F)

CASO VII.

Altezza del centro ſolare $= 9'$, cioè $a = 89°.\ 51'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{9}{16}$. Ma log. $\frac{9}{16} = 9{,}7531225$, a cui corriſponde arc. $= 34°.\ 30'$. Dunque $\varphi = 124°.\ 30' = 7470'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{7470}{21600}$ ſen. $9'$; quindi

log. 7470 = 3, 8733206
log. ſen. 9′ = 7, 4179681
———————
1, 2912887
log. 21600 = 4, 3344537
———————
6, 9568350 num. = 0, 0009054

fen. ϕ = fen. $124°. 30'$ = fen. $55°. 30'$

log. fen. ϕ = 9, 9159937
log. fen. a = 9, 9999985

9, 9159922
— 3, 1338689

6, 7821233 num. = 0, 0006055

Dunque l'illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0015109
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0030218
(*G*)

CASO VIII.

Altezza del centro folare = $8'$, cioè $a = 89°. 52'$; onde $\phi = 90° +$ arc. fen. $\frac{1}{2} = 90° + 30° = 120° = 7200'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{7200}{21600}$ fen. $8'$. Sicchè

log. 7200 = 3, 8573325
log. fen. $8'$ = 7, 3668157

1, 2241482
log. 21600 = 4, 3344537

6, 8896945 num. = 0, 0007757

fen. ϕ = fen. $120°$ = fen. $60°$. Dunque

log. fen. ϕ = 9, 9375306
log. fen. a = 9, 9999988

9, 9375294
— 3, 1338689

6, 8036605 num. = 0, 0006363

Dunque l'illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0014120
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0028240
(*H*).

CASO IX.

Altezza del centro solare $= 7'$; ovvero $a = 89°. 53'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. sen.} \frac{7}{16}$. Ma log. $\frac{7}{16} = 9,6409780$, a cui corrisponde arc. $= 25°. 56'$. Dunque $\phi = 115°. 56'$ $= 6956'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{cos.}\, a = \frac{6956}{21600}$ sen. $7'$. Sicchè

log. 6956	=	3, 8423596
log. sen. 7'	=	7, 3088239
		1, 1511835
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 8167298 num. = 0, 0006557

sen. ϕ = sen. $115°. 56'$ = sen. $64°. 4'$. Sicchè

log. sen. ϕ	=	9, 9539063
log. sen. a	=	9, 9999991
		9, 9539054
	—	3, 1338689
		6, 8200365 num. = 0, 0006608

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0013165

e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0026330

(*I*)

CASO X.

Altezza del centro solare $= 6'$, cioè $a = 89°. 54'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. sen.} \frac{3}{8}$. Ma log. $\frac{3}{8} = 9, 5740312$, a cui corrisponde arc. $= 22°. 1'$. Dunque $\phi = 112°. 1' = 6721'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{cos.}\, a = \frac{6721}{21600}$ sen. $6'$. Onde

$$
\begin{array}{lcl}
\log.\ 6721 & = & 3,\ 8274339 \\
\log.\ \text{sen.}\ 6' & = & \underline{7,\ 2418771} \\
 & & 1,\ 0693110 \\
\log.\ 21600 & = & \underline{4,\ 3344537} \\
 & & 6,\ 7348573\ \text{num.} = 0,\ 0005431
\end{array}
$$

sen. φ = sen. 112°. 1′ = sen. 67°. 59′. Sicchè

$$
\begin{array}{lcl}
\log.\ \text{sen.}\ \varphi & = & 9,\ 9671148 \\
\log.\ \text{sen.}\ a & = & \underline{9,\ 9999993} \\
 & & 9,\ 9671141 \\
 & & \underline{-\ 3,\ 1338689} \\
 & & 6,\ 8332452\ \text{num.} = \underline{0,\ 0006811}
\end{array}
$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0012242
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0024484
(L)

CASO XI.

Altezza del centro solare = 5′, cioè a = 89°. 55′; onde $\varphi = 90° + \text{arc. sen.} \frac{5}{16}$ Ma log. $\frac{5}{16} = 9,4948500$, a cui corrisponde arc. = 18°. 13′. Dunque φ = 108°. 13′ = 6493′. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{6493}{21600}$ sen. 5′.

$$
\begin{array}{lcl}
\log.\ 6493 & = & 3,\ 8124454 \\
\log.\ \text{sen.}\ 5' & = & \underline{7,\ 1626960} \\
 & & 0,\ 9751414 \\
\log.\ 21600 & = & \underline{4,\ 3344537} \\
 & & 6,\ 6406877\ \text{num.} = 0,\ 0004372
\end{array}
$$

fen. φ = fen. 108°. 13′ = fen. 71°. 47′. Onde

$$\begin{array}{lr} \text{log. fen. } \varphi = & 9,9776693 \\ \text{log. fen. } a = & 9,9999995 \\ \hline & 9,9776688 \\ & -\ 3,1338689 \\ \hline & 6,8437999 \end{array} \text{ num.} = \underline{0,0006979}$$

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0011351

e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0022702

(*M*)

CASO XII.

Altezza del centro folare = 4′, cioè a = 89°. 56′; onde φ = 90°. + arc. fen. $\frac{1}{4}$. Ma log. $\frac{1}{4}$ = 9, 3979400, a cui corrifponde arc. = 14°. 29′. Dunque φ = 104°. 29′ = 6269′. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. a = $\frac{6269}{21600}$ fen. 4′. Perciò

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 6269 = & 3,7971983 \\ \text{log. fen. } 4' = & 7,0657860 \\ \hline & 0,8629843 \\ \text{log. } 21600 = & 4,3344537 \\ \hline & 6,5285306 \end{array} \text{ num.} = 0,0003377$$

fen. φ = fen. 104°. 29′ = fen. 75°. 31′. Dunque

$$\begin{array}{lr} \text{log. fen. } \varphi = & 9,9859742 \\ \text{log. fen. } a = & 9,9999997 \\ \hline & 9,9859739 \\ & -\ 3,1338689 \\ \hline & 6,8521050 \end{array} \text{ num.} = \underline{0,0007114}$$

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0010491

e l' illuminazione totale . . . . = 0, 0020982

(*N*)

CASO XIII.

Altezza del centro ſolare $= 3'$, cioè $a = 89°.\ 57'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{3}{16}$. Ma log. $\frac{3}{16} = 9,\ 2730012$, a cui corriſponde arc. $= 10°.\ 48'$; onde $\varphi = 100°.\ 48' = 6048'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{6048}{21600}$ ſen. $3'$. Onde

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 6048 & = & 3,\ 7816118 \\
\text{log. ſen. } 3' & = & \underline{6,\ 9408473} \\
 & & 0,\ 7224591 \\
\text{log. } 21600 & = & \underline{4,\ 3344537} \\
 & & 6,\ 3880054 \quad \text{num.} = 0,\ 0002443
\end{array}$$

ſen. $\varphi =$ ſen. $100°.48' =$ ſen. $79°.\ 12'$. Dunque

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. ſen. } \varphi & = & 9,\ 9922385 \\
\text{log. ſen. } a & = & \underline{9,\ 9999998} \\
 & & 9,\ 9922383 \\
 & - & \underline{3,\ 1338689} \\
 & & 6,\ 8583694 \quad \text{num.} = \underline{0,\ 0007217}
\end{array}$$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0,\ 0009660$

e l'illuminazione totale . . . . $= 0,\ 0019320$

(O)

CASO XIV.

Altezza del centro ſolare $= 2'$, cioè $a = 89°.\ 58'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{1}{8}$. Ma log. $\frac{1}{8} = 9,\ 0969100$, a cui corriſponde arc. $= 7°.\ 11'$. Dunque $\varphi = 97°.\ 11' = 5831'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{5831}{21600}$ ſen. $2'$. Onde

$\log.\ 5831 = 3,7657430$
$\log.\ \text{sen.}\ 2' = 6,7627561$

$0,5284991$
$\log.\ 21600 = 4,3344537$

$6,1940454$ num. $= 0,0001563$

sen. $\phi =$ sen. $97°.\ 11' =$ sen. $82°.\ 49'$. Sicchè

$\log.\ \text{sen.}\ \phi = 9,9965778$
$\log.\ \text{sen.}\ a = 9,9999999$

$9,9965777$
$-\ 3,1338689$

$6,8627088$ num. $= \underline{0,0007290}$

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . $= 0,0008853$
e l' illuminazione totale . . . . $= 0,0017706$
(P).

CASO XV.

Altezza del centro solare $= 1'$, cioè $a = 89°.\ 59'$. Onde $\phi = 90° +$ arc. sen. $\frac{1}{16}$. Ma log. $\frac{1}{16} = 8,7958800$, a cui corrisponde arc. $= 3°.\ 35'$. Dunque $\phi = 93°.\ 35'$ $= 5615'$. Perciò $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{5615}{21600}$ sen. $1'$; vale a dire

$\log.\ 5615 = 3,7493498$
$\log.\ \text{sen.}\ 1' = 6,4637261$

$0,2130759$
$\log.\ 21600 = 4,3344537$

$5,8786222$ num. $= 0,0000756$

sen. $\phi =$ sen. $93°.\ 35' =$ sen. $86°.\ 25'$. Dunque

log. sen. φ = 9, 9991501
log. sen. a = 9, 9999999

9, 9991500
— 3, 1338689

6, 8652811 num. = 0, 0007333

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0008089
e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0016178
(Q).

CASO XVI.

Altezza del centro solare = 0, cioè $a = 90°$, onde $\varphi = 90° +$ arc. sen. $o = 90°$. Perciò essendo in tal caso cos. $a = 0$, svanisce il primo termine della formola, e resta il secondo, che è come segue

log. sen. φ = 10, 0000000
log. sen. a = 10, 0000000

20, 0000000
— 3, 1338689

6, 8661311 num. = 0, 0007347

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0007347
e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0014694
(R).

PARTE II.

Depressione del centro solare sotto l' orizzonte.

CASO I.

Altezza negativa del centro solare, cioè depressione = 1'; dunque $a = 90°. 1'$. In tutti questi casi si troverà

verà il valore di $\phi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{16} = 90° - 3°. 35'$ (n°. XV) $= 86°. 25' = 5185'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{5185}{21600} \times -$ sen. $1' = - \frac{5185}{21600}$ sen. $1'$. Sicchè

log. 5185	=	3, 7147488
log. sen. 1′	=	6, 4637261
		0, 1784749
log. 21600	=	4, 3344537
		5, 8440212 num. = − 0, 0000698

Ora è manifesto, che il secondo termine della formola è precisamente quello stesso che si è trovato al n°. XV, cioè 0, 0007333
da cui sottratto il precedente si ha
l' illuminazione del semisegmento = 0, 0006635
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0, 0013270
(*A*).

CASO II.

Depressione del centro solare $= 2'$; dunque $a = 90°. 2'$; onde $\phi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{8} = 90° - 7°. 11'$ (n° XIV) $= 82°. 49' = 4969'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cos. $a = - \frac{4969}{21600}$ sen. $2'$. Sicchè

log. 4969	=	3, 6962690
log. sen. 2′	=	6, 7627561
		0, 4590251
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 1245714 num. = − 0, 0001332

Il ſecondo termine della formola è lo ſteſſo, che ſi è trovato al n°. XIV; cioè 0, 0007290

Dunque ſarà l' illuminazione del ſemiſegmento . . . . = 0, 0005958
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0, 0011916 (*B*).

CASO III.

Depreſſione del centro ſolare $= 3'$, cioè $a = 90°. 3'$, onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{3}{16} = 90° - 10°. 48' = 79°. 12'$ $= 4752'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{4752}{21600}$ ſen. $3'$, cioè

log. 4752 = 3, 6768764
log. ſen. 3' = 6, 9408473
0, 6177237
log. 21600 = 4, 3344537
6, 2832700 num. = − 0, 0001919

Il ſecondo termine coincide con quello del n°. XIII, cioè ſi trova . . . . . = 0, 0007217

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento . . . . = 0, 0005298
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0, 0010596 (*C*).

CASO IV.

Depreſſione del centro ſolare $= 4'$, cioè $a = 90°. 4'$; onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{1}{4} = 90° - 14°. 29' = 75°. 31'$ $= 4531'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{4531}{21600}$ ſen. $4'$, cioè

log. 4531 = 3, 6561941
log. sen. 4′ = 7, 0657860

0, 7219801
log. 21600 = 4, 3344537

6, 3875264 num. = — 0, 0002441

Il secondo termine coincide con quello del n°. XII, cioè si trova . . . . . = 0, 0007114

Dunque l' illuminazione del semisegmento . . . . = 0, 0004673
e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0009346
(*D*).

CASO V.

Depressione del centro solare $= 5'$, cioè $a = 90°.\ 5'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.}\ \frac{5}{16} = 90° - 18°.\ 13' = 71°.\ 47'$ $= 4307'$. Onde $\frac{\varphi'}{2\pi'}$, cos. $a = -\frac{4307}{21600}$ sen. $5'$; perciò

log. 4307 = 3, 6341749
log. sen. 5′ = 7, 1626960

0, 7968709
log. 21600 = 4, 3344537

6, 4624172 num. = — 0, 0002900

Il secondo termine coincide con quello del n°. XI; cioè si trova . . . . . = 0, 0006979

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0004079
e quindi sarà l' illuminazione intera = 0, 0008158
(*E*).

CASO VI.

Depreffione del centro folare $= 6'$, cioè $a = 90°.\ 6'$. Onde $\varphi = 90° -$ arc. fen. $\frac{3}{8} = 90° - 22°.\ 1' = 67°.\ 59'$ $= 4079'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = - \frac{4079}{21600}$ fen. $6'$. Perciò

$$\begin{array}{lcl} \log.\ 4079 & = & 3,\ 6105537 \\ \log.\ \text{fen.}\ 6' & = & 7,\ 2418771 \\ \hline & & 0,\ 8524308 \\ \log.\ 21600 & = & 4,\ 3344537 \\ \hline & & 6,\ 5179771\ \text{num.} = -0,\ 0003296 \end{array}$$

Il fecondo termine è lo fteffo che quello del n°. x, cioè fi trova . . . . . . = 0, 0006811

Dunque l' illuminazione del femifegmento farà . . . . = 0, 0003515

e quindi fi ricava l' illuminazione intera . . . . = 0, 0007030 (F).

CASO VII.

Depreffione del centro folare $= 7'$, cioè $a = 90°.\ 7'$; quindi $\varphi = 90° -$ arc. fen. $\frac{7}{16} = 90° - 25°.\ 56' = 64°.\ 4'$ $= 3844'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = - \frac{3844}{21600}$ fen. $7'$. Dunque

$$\begin{array}{lcl} \log.\ 3844 & = & 3,\ 5847834 \\ \log.\ \text{fen.}\ 7' & = & 7,\ 3088239 \\ \hline & & 0,\ 8936073 \\ \log.\ 21600 & = & 4,\ 3344537 \\ \hline & & 6,\ 5591536\ \text{num.} = -0,\ 0003624 \end{array}$$

Il ſecondo termine coincide con quello
del n°. IX, cioè ſi trova . . . . . $=$, 0, 0006608

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $=$ 0, 0002984
e però naſce l' illuminazione intera $=$ 0, 0005968
(G).

CASO VIII.

Depreſſione del centro ſolare $= 8'$, cioè $a = 90°. 8'$;
onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{1}{2} = 90° - 30° = 60° = 3600'$.

Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{3600}{21600}$ ſen. $8'$. Sicchè

log. 3600 $=$ 3, 5563025
log. ſen. 8' $=$ 7, 3668157
0, 9231182
log. 21600 $=$ 4, 3344537
6, 5886645 num. $= -$ 0, 0003879

Il ſecondo termine coincide con quello
del n°. VIII prec., e però ſi trova $=$ 0, 0006363

Dunque ne verrà, che l' illuminazione
del ſemiſegmento ſarà . . . . $=$ 0, 0002484
onde l' illuminazione intera . . . . $=$ 0, 0004968
(H).

CASO IX.

Depreſſione del centro ſolare $= 9'$, cioè $a = 90°. 9'$;
onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{9}{16} = 90° - 34°. 30' = 55°. 30'$
$= 3330'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{3330}{21600}$ ſen. $9'$, cioè

log. 3330 $=$ 3, 5224442
log. sen. 9$'$ $=$ 7, 4179681

0, 9404123
log. 21600 $=$ 4, 3344537

6, 6059586 num. $= -$ 0, 0004036

Il secondo termine coincide con quello del
n.° VII Parte prima, onde si trova . . $=$ 0, 0006055

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . $=$ 0, 0002019
e però l'illuminazione intera . . . . $=$ 0, 0004038
(I)

CASO X.

Depressione del centro solare $= 10'$, cioè $a = 90°. 10'$, onde $\varphi = 90° -$ arc. sen. $\frac{5}{8} = 90° - 38°. 41' = 51°. 19' = 3079'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = - \frac{3079}{21600}$ sen. $10'$; quindi

log. 3079 $=$ 3, 4884097
log. sen. 10$'$ $=$ 7, 4637255

0, 9521352
log. 21600 $=$ 4, 3344537

6, 6176815 num. $= -$ 0, 0004146

Il secondo termine coincide con quello del
n.° VI. della prima Parte, onde si trova $=$ 0, 0005735

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . $=$ 0, 0001589
e però l'illuminazione intera . . . $=$ 0, 0003178
(L)

CASO XI.

Depreſſione del centro ſolare $= 11'$, cioè $a = 90°. 11'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{11}{16} = 90° - 43°. 26' = 46°. 34'$ $= 2794'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{coſ.}\, a = -\frac{2794}{21600} \text{ſen.}\, 11'$; quindi

log. 2794 = 3, 4462264
log. ſen. 11′ = 7, 5051181

0, 9513445
log. 21600 = 4, 3344537

6, 6168908 num. = — 0, 0004139

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° v della Parte prima, ond' è . . . . = 0, 0005335

Sicchè l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0001196
e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0002392
(M)

CASO XII.

Depreſſione del centro ſolare $= 12'$, cioè $a = 90°.$ $12'$, onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{3}{4} = 90° - 48°. 35' = 41°.$ $25' = 2485'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{coſ. a} = -\frac{2485}{11600} \text{ſen.}\, 12'$, cioè

log. 2485 = 3, 3953264
log. ſen. 12′ = 7, 5429065

0, 9382329
log. 21600 = 4, 3344537

6, 6037792 num. = — 0, 0004016

Il secondo termine coincide con quello del n.° IV. della prima Parte, cioè . . . $= 0,\ 0004860$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . $= 0,\ 0000844$

Dunque l'illuminazione intera . . . . $= 0,\ 0001688$

(N)

CASO XIII.

Depressione del centro solare $= 13'$, cioè $a = 90°.\ 13'$; onde $\varphi = 90° -$ arc. sen. $\frac{13}{16} = 90° - 54°.\ 21' = 35°.\ 39'$ $= 2139'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = - \frac{2139}{21600}$ sen. $13'$; cioè.

log. $2139 = 3,\ 3302108$
log. sen. $13' = 7,\ 5776686$
 $0,\ 9078794$
log. $21600 = 4,\ 3344537$
 $6,\ 5734275$ num. $= - 0,\ 0003745$

Il secondo termine coincide con quello del n.° III. Parte prima, onde si trova $= 0,\ 0004282$

Sicchè l'illuminazione del semisegmento $= 0,\ 0000537$
e però l'illuminazione intera . . . . $= 0,\ 0001074$

(O)

CASO XIV.

Depressione del centro solare $= 14'$, cioè $a = 90°.\ 14'$; onde $\varphi = 90° -$ arc. sen. $\frac{7}{8} = 90° - 61°.\ 3' = 28°.\ 57' = 1737'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = - \frac{1737}{21600}$ sen. $14'$, cioè

log.

$$\begin{array}{lcl} \log.\ 1737 & = & 3,\ 2397998 \\ \log.\ \text{sen.}\ 14' & = & \underline{7,\ 6098530} \\ & & 0,\ 8496528 \\ \log.\ 21600 & = & \underline{4,\ 3344537} \\ & & 6,\ 5151991\ \text{num.} = -0,\ 0003275 \end{array}$$

Il secondo termine si ha dal n.° II. della
prima Parte, cioè si trova . . . . = $\underline{0,\ 0003556}$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0000281
e l'illuminazione intera . . . . = 0, 0000562
(*P*)

CASO XV.

Depressione del centro solare $= 15'$, cioè $a = 90°. 15'$;
onde $\varphi = 90° -$ arc. sen. $\frac{15}{16} = 90° - 69°. 38' = 20°. 22'$
$= 1222'$; onde $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{1222}{21600}$ sen. $15'$, cioè

$$\begin{array}{lcl} \log.\ 1222 & = & 3,\ 0870712 \\ \log.\ \text{sen.}\ 15' & = & \underline{7,\ 6398160} \\ & & 0,\ 7268872 \\ \log.\ 21600 & = & \underline{4,\ 3344537} \\ & & 6,\ 3924335\ \text{num.} = -0,\ 0002468 \end{array}$$

Il termine secondo della formola si ha dal
n.° I. della Parte prima, cioè si trova = $\underline{0,\ 0002557}$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0000089
e l'illuminazione totale . . . . . . = 0, 0000178
(*Q*)

Per ritrovare l'illuminazione del semidisco solare superiore al diametro orizzontale quando il disco tocca col lembo inferiore l'orizzonte, convien riflettere, che in tal caso è $a = 89^\circ.\ 44'$, ed inoltre $\varphi = 90^\circ = \frac{2}{4}\pi$. Quindi il primo termine della formola, cioè $\frac{\varphi}{2\pi}$ cos. a si cangia in $\frac{1}{4}$ cos. $a = \frac{1}{4} \times 0,0046542 = 0,0011635$. Il secondo termine poi della formola è il seguente

$$\begin{array}{rl} \text{log. sen. } a = & 9,9999953 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,8661264 \quad \text{num.} = 0,0007347 \end{array}$$

Dunque l' illuminazione del quadrante superiore è $= 0,0018982$, e l' illuminazione del semidisco superiore al diametro orizzontale è $= 0,0037964$.

Se ora si sottrae questa illuminazione del semidisco superiore da quella dell' intero disco, che è $0,0046542$, il residuo dà l' illuminazione del semidisco inferiore al diametro orizzontale, la quale in conseguenza sarà $= 0,0008578$. Dunque (n.° XVI parte I.) sta l' illuminazione del semidisco inferiore (nel caso che tocchi l'orizzonte) all' illuminazione del medesimo rovesciato, cioè avente il diametro sull' orizzonte come sta 8578 a 14694. Ciò presenta una specie di paradosso, perchè quando il semidisco ha il suo diametro sull' orizzonte tramanda più obbliqui que' raggi, che sono più copiosi, cioè quelli che emanano dalle sue parti più basse e più larghe, e meno obliqui i raggi meno copiosi, ovvero emananti dalle sue parti più alte e più anguste; ed il contrario precisamente succede nel semidisco inverso avente il semidiametro orizzontale in alto; perlochè sembrerebbe, che questo e non quello dovesse produrre una maggiore illuminazione; ed è anche assai strano, che questo eccesso sia più di tre quarti dell' illuminazione minore.

Un paradoſſo così nuovo ed inaſpettato merita, che vi ci fermiamo un po' ſopra, ed eſaminiamo, ſe anche nelle maggiori altezze del ſole ſopra l'orizzonte ſi trovi eſſer vero, che il ſemidiſco diritto del ſole mandi più luce ſulla terra, che non ne manda il ſemidiſco inverſo, intendendo per ſemidiſco diritto il ſuperiore al diametro orizzontale in tale data altezza del centro ſolare, e per ſemidiſco inverſo l'inferiore al diametro orizzontale quando il centro del ſole ſi è già inoltrato ad un'altezza maggiore della precedente di ſedici minuti.

I.

Suppongo adunque in primo luogo, che l'altezza del centro ſolare $= 89°. 44'$, cioè $a = 16'$, e quindi per ottenere l'illuminazione del quadrante ſuperiore al diametro orizzontale prendo $\phi = 90°$. Laonde $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. a

$= \frac{1}{4}$ ſen. $89°. 44' = \frac{1}{4} \times 0,9999892 = 0,2499973$.

Parimente

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 7,6678445 \\ - & \underline{3,1338689} \\ & 4,5339756 \quad \text{num.} = 0,0000034 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del quadrante $= 0,2500007$, e però l'illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,5000014$. Alzatoſi il centro ſolare di altri $16'$, cioè giunto al zenit, è evidente, che in tal ſituazione ogni ſemidiſco del ſole illumina l'orizzonte terreſtre egualmente, e conſeguentemente l'illuminazione del ſemidiſco *inverſo* è la metà di quella del diſco intero, cioè $= 0,5000000$, che è un poco minore della ritrovata pel ſemidiſco *diritto*. Suſſiſte adunque il paradoſſo di prima.

II.

Paſſo all' altezza del centro ſolare $= 45°$, cioè $a = 45°$, e piglio come prima $\phi = 90°$. Sicchè $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45° = \frac{1}{4} \times 0,7071068 = 0,1767767$. Inoltre

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 9,8494850 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,7156161 \quad \text{num.} = 0,0005195 \end{array}$$

Onde l' illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1772962$, e l' illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,3545924$.

Aſcenda ora il centro del ſole per altri $16'$, e trovisi in queſto ſtato l' illuminazione del ſemidiſco superiore al diametro orizzontale, e queſta ſottraggaſi dall' illuminazione già nota di tutto il diſco; il reſiduo sarà l' illuminazione del ſemidiſco inferiore, che è appunto l' *inverſo* riſpettivamente al ſemidiſco dianzi conſiderato. Fatta pertanto l' altezza del centro ſolare $= 45°. 16'$, cioè $a = 44°. 44'$; $\phi = 90°$; ſi deduce $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45°. 16' = \frac{1}{4} \times 0,7103901 = 0,1775975$. Inoltre

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 9,8474542 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,7135853 \quad \text{num.} = 0,0005171 \end{array}$$

Dunque l' illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1781146$, e l' illuminazione del ſemidiſco ſuperiore $= 0,3562292$. Ora queſta dee ſottrarſi da quella di tutto il diſco, la quale ſi trova immantinente con cercare il valore di coſ. a, a cui unicamente ſi riduce la noſtra formola generale con aſſumere $\phi = 2\pi$. Sicchè l'illuminazione di tutto il diſco ſi rinviene $= 0,7103901$, e fatta quindi l'indicata ſottrazione proviene 0, 3541609 per l'illuminazione del ſemidiſco inferiore, cioè dell'*inverſo* riſpetto a quel di prima nell'altra ſtazione del centro ſolare. E qui pure ſi ſcorge, che il ſemidiſco *diritto* illumina più che l'*inverſo*.

Reſta finalmente a vedere, ſe ciò pur ſi verifica riguardo ad un ſegmento del diſco ſolare compreſo fra il diametro ed una corda parallela, conſiderando un tal ſegmento in due ſituazioni, prima col diametro giacente ſull'orizzonte terreſtre, che chiameremo ſegmento *diritto*, poi colla corda ſull'orizzonte e col diametro in alto, che diremo ſegmento *inverſo*. Suppongo la corda parallela diſtante dal diametro per la metà del raggio, ed eſſendoſi già ritrovata l'illuminazione generata dal ſemidiſco viſibile quando l'orizzonte taglia per mezzo il diſco ſolare, ſottraggo da eſſa l'illuminazione prodotta da quel ſegmento di detto ſemidiſco, che ha per ſaetta la metà del raggio, e col reſiduo ottengo l'illuminazione eccitata dal ſegmento *diritto* propoſto. Ma per avere in tal ſuppoſto l'illuminazione nata dal ſegmento della ſaetta $= \frac{1}{2}$, divenendo $a = 90°$, $\varphi = 60°$, ed annullandoſi il primo termine della noſtra formola, ſi ritrova pel valore del ſecondo termine

$$\begin{array}{rr} \text{log. ſen. } \varphi = & 9,\ 9375306 \\ - & 3,\ 1338689 \\ \hline & 6,\ 8036617 \end{array} \quad \text{num.} = 0,\ 0006363$$

il qual numero duplicato, cioè 0, 0012726 eſprime l'illuminazione proveniente dal detto ſegmento, e queſta ſottratta dall'illuminazione 0, 0014694 del ſemidiſco viſibile laſcia un reſiduo 0, 0001968, che rappreſenta l'illuminazione del ſegmento *diritto* di cui ſi tratta. Per ritrovar poi quella del ſegmento *inverſo* è manifeſto che baſta dall'illuminazione del ſegmento visibile, quando il centro del sole ha $8'$ di altezza sopra l'orizzonte, sottrarre l'illuminazione del semicerchio superiore, e se quella, come è stato già dimostrato, è $= 0,0028240$, questa si determina come segue: Diventa in quest'ipotesi $a = 89^\circ.52'$, $\phi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{\phi}{2\pi}$

$\text{cos}.\, a = \frac{1}{4} \text{cos}.\, a = \frac{1}{4} \text{sen}.\, 8' = \frac{1}{4} \times 0,0023271 = 0,0005818$,

che sarà il valore del primo termine della nostra formola. Pel valore del secondo si ha

$$\begin{array}{rl} \text{log. sen. } a = & 9,9999973 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,8661284 \quad \text{num.} = 0,0007347. \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del quadrante superiore $= 0,0013165$, e del semicerchio $= 0,0026330$. Sottraendo quest'ultima da $0,0028240$ resta $0,0001910$ per l'illuminazione del segmento *inverso*, la quale in conseguenza è minore che non è quella del semidisco *diritto*. Ed ecco, che l'indicato paradosso anche in questo caso s'incontra.

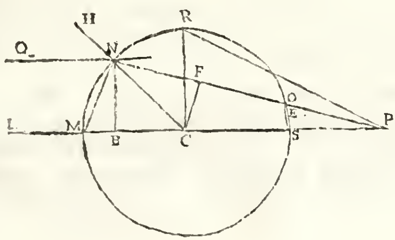
Chiuderò questo breve Scritto con un famoso Problema relativo alla misura della luce proposto da *Newton* nel suo Trattato delle *Flussioni e Serie Infinite* in questi termini: *To determine such a part of a Spherical Superficies, which can be illuminated, in its farther part, by light coming from a great distance, and which is refracted by the nearer Hemisphere*. Siccome nè egli, nè altri ch' io sappia ha data la soluzione d' un tal Problema, non eccettuando neppure il rinomato *Colson*, che illustrò con un ampio comento quell' operetta di *Newton*, ho creduto esser pregio dell'opera d' intraprenderne la disamina, e di metter qui sotto gli occhi del Pubblico il seguente scioglimento.

PROBLEMA.

Determinare quella tal parte posteriore d' una superficie sferica, che può essere illuminata dalla luce vegnente da gran lontananza e rotta nell' emisfero anteriore.

Soluzione.

Sia QN uno de' raggi scagliati da lungi contro il globo MNS, i quali per l' immensa distanza, da cui partono, si considerano come tra sè paralleli. Tagliato il globo con un piano, che passa pel suo centro C e pel raggio QN, e nella sezione circolare MNS condotto il diametro SM parallelo ai raggi di luce, si supponga, che il raggio QN rompendosi in N pieghi nella direzione NP, ed incontri la circonferenza del cerchio in O, ed in P il diametro prolungato; sicchè guidato il semidiametro CN prodotto in H sia QNH, ovvero NCM l' angolo d' incidenza, e CNP l' angolo di rifrazione. Se ora si mena la perpendicolare NB sul diametro SM, e le sottese SO, MN; e si assume $= n$ il rapporto del seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo di refrazione; il semidiametro $= r$; la retta $CP = x$; è

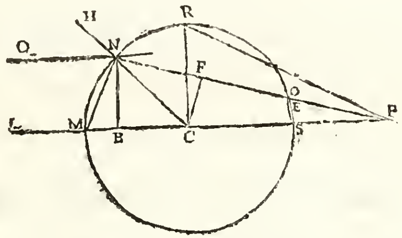


facile accorgersi, che SO è la corda della metà di quel segmento sferico, la di cui superficie curva viene illuminata da tutti que' raggi, che cadendo sull' emisfero anteriore occupano di qua e di là dal punto di mezzo M una larghezza doppia dell' arco MN. Siccome poi allorchè il raggio QN è estremamente vicino al diametro SM, la corda SO riesce piccolissima, e questa va poi crescendo quando il raggio QN si fa più lontano da MS, e ciò sino ad un certo limite, oltre il quale la detta corda decresce seguitando a crescere la distanza del raggio; quindi apparisce, che la questione si riduce a ritrovare il *massimo* segmento della superficie posteriore, il quale in tali circostanze possa ricevere la luce rotta nell' emisfero anteriore. Osservo pertanto, che nel triangolo CNP il lato NP sta a CP come il seno dell' angolo NCP, ovvero anche del suo supplemento NCM al seno dell' angolo CNP, cioè come $n:1$; e però $PN = nx$. Per la proprietà del triangolo si ha pure $CN^2 = CP^2 + PN^2 - 2PC.PB$, ovvero $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2x.PB$; e quindi $PB = \frac{x^2 + n^2x^2 - r^2}{2x}$, $MB = PM - PB = r + x + \frac{r^2 - n^2x^2 - x^2}{2x}$ $= \frac{r^2 + 2rx + x^2 - n^2x^2}{2x}$. E poichè per la proprietà del cerchio $MN^2 = SM.MB$, surrogato il valore or ritrovato ne deriva $MN^2 = \frac{r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2}{x}$. Essendo inoltre simili i due triangoli PSO, PNM a motivo del comune angolo P, e degli eguali angoli POS, PMN misurati dalla metà dell' arco SON, si ha l' analogia $PN^2 : NM^2 :: PS^2 : SO^2$, vale a dire

$$n^2x^2 : \frac{r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2}{x} :: (x - r)^2 : SO^2.$$ Dunque

$SO^2 =$

$SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2)$. Ora dovendo essere massimo il segmento della superficie illuminata, e conseguentemente massima la corda SO del semisegmento, come pure il quadrato di essa corda, si ugua-



glierà a zero il differenziale di questo quadrato, e si otterrà $\left(\frac{2(x-r)x-3(x-r)^2}{n^2x^4}\right)(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2)\,dx$ $+\frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(2r^2+2rx-2n^2rx)\,dx = 0$, la qual espressione divisa per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^3}$ si cangia in

$$\left(\frac{3r-x}{x}\right)(r^2+2rx+x^2-n^2x^2)+(x-r)(2r+2x-2n^2x)$$

$=0$, e questa si riduce all' equazione cubica x^3+rx^2 $-\frac{3r^2}{n^2-1}x-\frac{3r^3}{n^2-1}=0$. Bastano pochi momenti di riflessione per accorgersi, che tal equazione si risolve nelle due $x+r=0$

$$x^2-\frac{3r^2}{n^2-1}=0;$$

dalle quali si ricavano le tre seguenti radici

$$1°.\ x = -r$$

$$2°.\ x = -r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

$$3°.\ x = \ r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

Le due prime radici non appartengono alla questione attuale, atteso che la retta CP nelle presenti circostanze non può essere che positiva: e però questa retta viene appunto espressa dalla terza radice positiva $x = r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$. Surrogato poi questo valore in quello di SO dianzi trovato, si giugne a conoscere la corda del semisegmento illuminato, e quindi l' ampiezza o l' arco di tutto il segmento. Il che era ecc.

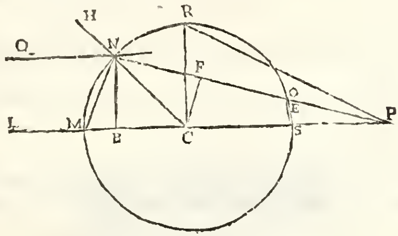
Se il globo rifrangente sarà di vetro, sicchè il *rapporto della refrazione*, ovvero n sia presso a poco $= \frac{3}{2}$, nascerà $x = r\sqrt{\frac{12}{5}} = 1,5492r$; $x^2 = 2,4r^2$; $n^2x^2 = 5,4r^2$; $(x-r)^2 = 0,30162064r^2$; $x^3 = 3,7181$; $n^2x^3 = 8,3657$. Laonde sostituendo questi valori nell'espressione di $SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2)$ si ritrae $SO^2 = 0,039602185 1r^2$, ed estraendo la radice quadrata nasce finalmente $SO = 0,199r$. Dunque l' arco $SEO = 11°.\ 26'$, e conseguentemente l' ampiezza della cupola sferica illuminata dalla luce refratta nell' emisfero anteriore ha per misura un arco di $22°.\ 52'$.

Non voglio qui tacere una singolarità, che nella soluzione di questo Problema può facilmente incontrarsi, e che può essere cagione d' inciampo, come lo fu per me in sulle prime. Tirisi il perpendicolo CF sopra il raggio refratto NP; ed essendo $CN^2 = CP^2 + PN^2 -$

$2NP.PF$, cioè $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2nx.PF$, se ne deduce $PF = \frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}$; e perciò $CF^2 = CP^2 - PF^2 = x^2$

$$- \left(\frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}\right)^2$$

$$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4n^2x^2}.$$ E poichè NB, e CF sono i seni degli angoli d'incidenza e di refrazio-



ne riferiti al seno tutto CN, nasce quindi $NB^2 = n^2.CF^2$
$$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4x^2};$$ e però CB^2
$$= r^2 - NB^2 = \frac{x^4+n^4x^4+r^4+2r^2x^2-2n^2r^2x^2-2n^2x^4}{4x^2}.$$
Prendo la radice quadrata di questa quantità, e ritrovo $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$, nella qual espressione si dee far uso o dei soli segni superiori in tutti i termini, o dei soli inferiori. Essendo poi $BM = r - CB$
$$= \frac{2rx \mp n^2x^2 \pm x^2 \pm r^2}{2x},$$ ed $MN^2 = SM.MB$, fatte le sostituzioni de' valori di SM, ed MB, si otterrà MN^2

$= \frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}$. Ma i triangoli ſimili PSO, PMN ſomminiſtrano l' analogia $PN : NM :: PS : SO$, cioè $nx : \surd \left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x} \right) :: x - r : SO$; e conſeguentemente $SO^2 = \left(\frac{x-r}{nx}\right)^2 \left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right)$: dunque differenziando queſta eſpreſſione, annullando il differenziale, e poſcia dividendo per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^2}$ naſcerà il riſultato $\frac{2}{x}\left(2r \mp n^2rx \pm rx \pm \frac{r^3}{x}\right) + (x-r)\left(\pm 1 \mp n^2 \mp \frac{r^2}{x^2}\right) = 0$, da cui proviene l' equazione cubica di queſta forma $x^3 + rx^2 - \frac{(4 \mp 1)r^2}{\pm n^2 \mp 1} x \mp \frac{3r^3}{\pm n^2 \mp 1} = 0$.

Se ora ne' termini di queſta affetti dal ſegno doppio ſi adopera il ſegno ſuperiore, compariſce l' equazione precedentemente ritrovata $x^3 + rx^2 - \frac{3r^2x}{n^2 - 1} - \frac{3r^3}{n^2 - 1} = 0$; ma ſe all' oppoſto ſi vuole aver riguardo al ſegno inferiore l' equazione ſi cangia in queſt' altra $x^3 + rx^2 + \frac{5r^2x}{n^2 - 1} - \frac{3r^3}{n^2 - 1} = 0$, la quale riſoluta dà tutt' altre radici che la precedente.

Queſta ſingolarità imbarazzante parmi che ammetta la ſeguente interpretazione. Si meni al diametro MS il ſemidiametro CR perpendicolare, e ſi congiunga RP; ſicchè $RP^2 = r^2 + x^2$. Se pertanto nel valore biforme di $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$ ſi fa uſo del ſegno inferiore, riſulta CB di valor negativo, poichè NP^2 oſſia n^2x^2 è manifeſtamente maggiore di PR^2, ovvero di $r^2 + x^2$.

Siccome poi per conseguire il valore di *BM* si è sottratto dal semidiametro *CM* il valore di *CB*; dovrà *BM* risultar maggiore del semidiametro qualora *CB* sia negativo. Ma nelle circostanze del presente Problema è visibilmente assurdo, che *MB* superi il semidiametro della sfera rifrangente. Dunque non dee recar maraviglia, che da un tal assurdo sia derivata un' equazione, le di cui radici non possono somministrare che un' erronea soluzione del Problema.

SOPRA LA DISCESA
DE' GRAVI
Per la conveſſità de' Canali curvilinei.

Del P. Gregorio Fontana Delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica ſublime nell' Univerſità di Pavia.

La conſiderazione degli accidenti del moto ne' gravi diſcendenti per la concavità delle curve, o de' canali curvilinei ſituati in piani verticali ha arricchito la Scienza generale del moto di molto belle ed inaſpettate verità, che ora formano nelle opere de' moderni Geometri una parte non ultima della Dinamica. Ma la diſceſa de' gravi non per la concavità, ma per la conveſſità delle curve, o de' canali curvilinei giacenti in piani verticali non ſembra fino ad ora eſſere ſtata l'oggetto delle ſpeculazioni de' Geometri, e indarno ſi cercherebbe di ciò alcun cenno ne' Trattati di Meccanica anche più eſteſi. Comunque però voglia interpretarſi un tal ſilenzio degli Scrittori, queſto genere di moto ha alcune proprietà che lo diſtinguono, e che pajono meritare l'eſame e lo ſtudio de' coltivatori della Dinamica. La principale di queſte proprietà conſiſte nel diſtaccarſi che ordinariamente fa un corpo dalla conveſſità della curva o del canale dopo aver traſcorſo un certo ſpazio, il quale trovaſi più o meno grande ſecondo la diverſità della curva per cui il grave diſcende, e del punto da cui comincia la diſceſa. Frutto di picciolo ſtudio intorno a sì curioſo argomento ſono i ſeguenti Teoremi, de' quali ommetto per ora la dimoſtrazione.

Ognuno intenderà, che qui ſi preſcinde dalle reſiſtenze del mezzo, e dallo sfregamento, e che ſi concepiſce la maſſa del grave ridotta e concentrata in un punto.

TEOREMA I.

Se in un cerchio verticalmente eretto per la ſua conveſſità ſcavata in forma di canale nella ſemicirconferenza ſuperiore al diametro orizzontale diſcende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, queſto ſi diſtacca dal canale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza (cioè la verticale compreſa tra le due orizzontali guidate per gli eſtremi dell'arco) è ſempre un terzo dell'altezza di detto arco continuato fino al diametro orizzontale.

TEOREMA II.

Nella parabola conica ſituata coll'aſſe verticale, un grave diſcendente per la ſua conveſſità ſcanalata, e che incomincia a muoverſi da un punto qualunque del canale parabolico, ſeguita ſempre a muoverſi lungo il canale ſenza mai diſtaccarſene o abbandonarlo.

TEOREMA III.

Situata l'elliſſe conica coll'aſſe maggiore verticale, ed eſſendo quell'aſſe $= 2a$, il ſuo parametro $= 2p$, un grave, che partendo dal vertice diſcende per la ſua conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo aver traſcorſo un arco, la di cui altezza viene rappreſentata dalla radice della ſeguente equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2p}{a-p}x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$. La ſteſſa equazione cubica ſi ritrova anche quando l'aſſe verticale dell'elliſſe è il minore, e il corpo parte dal vertice di queſt'aſſe, col ſolo divario, che in queſto caſo a indica il ſemiaſſe minore, p il ſemiparametro di queſt'aſſe, x l'aſciſſa del medeſimo.

Se poi il grave invece di cominciare il ſuo moto dal vertice dell'elliſſe ſi ſpicca da un punto più baſſo diſtante per l'intervallo b dalla orizzontale che paſſa pel vertice, convien riſolvere l'equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2px}{a-p} + \frac{pa^3+2a^3b}{a-p} = 0$ per ottenere il valore dell' aſciſſa corriſpondente a quel punto dell'elliſſe, che è il punto del diſtacco.

TEOREMA IV.

Per l'iperbola conica tenuta col ſuo aſſe traverſo verticale, con un procedere affatto ſimile a quello del Teorema precedente, s'incontra l'equazione cubica $x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2px}{a+p} + \frac{pa^3}{a+p} = 0$, la di cui radice x ſarà l'aſciſſa dell'arco iperbolico, deſcritto il quale il corpo, che incomincia a diſcendere dal vertice, ſi diſtacca dalla conveſſità del canale. Ma qui un tal diſtacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola, avvegnachè eſſendo poſitivi tutti i termini della predetta equazione, il valor reale di x non può eſſere che negativo; il che nell'ipoteſi, in cui ſiamo, è un aſſurdo. Dunque il grave che diſcende per la conveſſità d'un canale iperbolico reſta ſempre unito al canale anche protratto in infinito ſenza ſtaccarſene mai. Lo ſteſſo accade anche quando il corpo comincia a diſcendere da un punto più baſſo del vertice.

TEOREMA

TEOREMA V.

Se la figura del canale è quella d' una parabola di genere superiore rappresentata dall' equazione $y^m = x$, essendo m un numero intero > 2, il grave che si spicca dal vertice, e si rotola giù pel convesso del perimetro parabolico, si distacca allor quando ha scorso un arco, che ha per altezza o ascissa la linea $\left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{\frac{m}{2m-2}}$, la quale altezza nella parabola di terzo grado è $= \frac{1}{\sqrt[4]{(27)}}$, in quella di quarto grado è $= \frac{1}{4}$, ed in quella di quinto è $= \frac{1}{\sqrt[8]{759375}}$, e così discorrendo.

Che se il grave in vece di spiccarsi dalla sommità del canale partirà da un punto più basso, sicchè la distanza di questo punto dalla retta orizzontale che passa per la sommità sia $= a$, allora per determinare il punto del distacco converrà risolvere quest' equazione $x^{\frac{2m-2}{m}} - \frac{2(m-1)a}{m-2} x^{\frac{m-2}{m}} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$, la di cui radice rappresenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale sottratto l' arco dell' altezza a resta quello che il grave trascorre senza staccarsene.

TEOREMA VI.

Se la figura del canale è una delle parabole espresse dall' equazione $y^m = x^n$ ancora più generale della precedente, e supposto che il corpo incominci a rotolare dalla sommità dell'asse verticale giù per la convessità si trova $\left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{\frac{m}{2m-2n}}$ per l'altezza di quell'arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorso discendendo, si distacca dal canale.

Qualora poi il grave incominci il suo moto da un punto più basso del vertice, e sia a la depressione verticale di questo luogo, si ritrova il punto del distacco mediante la risoluzione dell'equazione

$$x^{\frac{2m-2n}{m}} - \frac{2(m-n)a}{m-2n}x^{\frac{m-2n}{m}} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0,$$ dalla di cui radice sottraendo la quantità a si ottiene l'altezza dell'arco, al termine del quale giunto che sia il corpo, questo abbandona il canale.

TEOREMA VII.

In tutte le ellissi, ed iperbole superiori rappresentate dall'equazione generalissima $y^{m+n} = f(a \mp x)^n x^m$, ove a esprime l'asse traverso, f una grandezza costante dipendente dalla proprietà di queste curve, il corpo che parte dalla sommità dell' asse verticale, e discende per la convessità della curva, non se ne distacca se non dopo aver passato un arco, il quale ha per altezza la radice dell'equazione $2mn(m+n)a^2x^{\frac{2n}{m+n}}(a \mp x)^{\frac{m-n}{m+n}}$, $= (ma \mp (m+n)x)\left((m+n)^2 x^{\frac{2n}{m+n}}(a \mp x)^{\frac{2m}{m+n}} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)$, e prosegue poi liberamente il suo moto in una parabola conica secondo la nota legge dei projetti.

TEOREMA VIII.

Sia l'iperbola equilatera (*fig. IX*) *FOM* fra gli asintoti ortogonali *AC*, *AB*, de' quali *AC* sia verticale, *AB* orizzontale, e guidata per la sommità *O* la verticale *ON* parallela all'asintoto *AC*, si piglino in essa le ascisse $OH = x$, e si ponga il lato della potenza dell' iperbola *OS* ovvero $SA = 1$. Un grave, che si spicca dalla sommità *O*, e discende per la convessità *OEF* dell' iperbola, non si distacca da essa se non dopo aver corso per un arco, la di cui altezza viene rappresentata dalla radice dell'equazione di quarto grado

$$x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 * - \frac{2}{3} = 0.$$

Che se il grave in vece di spiccarsi dal vertice incomincia a discendere da un punto più basso distante per l'intervallo *a* dalla orizzontale che passa pel vertice, si presenta quest'altra equazione biquadratica da risolversi $x^4 + \frac{8-4a}{3}x^3 + (2-4a)x^2 - 4ax - \left(\frac{2+4a}{3}\right) = 0$, la di cui radice dà l'altezza di quell'arco iperbolico, dal quale togliendosi il primo arco di altezza *a* il residuo è appunto quello, al di cui termine giunto che sia il corpo, si disimpegna dalla curva, e prosegue il suo cammino con moto libero.

TEOREMA IX.

Nella parabola Apolloniana (*fig. X*) *ANM* descritta col parametro *p*, e situata in un piano verticale, ma coll'asse *MO* orizzontale, dal punto dato *A*, da cui il grave si lascia cadere giù pel perimetro convesso *ANM*, condotta la verticale $AB = \lambda$, e prese su questa le ascisse $AF = x$, è mestieri risolvere l'equazione cubica

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ per determinare l'altezza AF di quel tal arco AN, al di cui estremo N giunto che sia il grave partito da A, si libera dalla curva, ed abbandona il canale, che si suppone sempre aperto esteriormente.

Qualunque volta il grave parte da un punto più basso di A, e distante per l'intervallo a dalla retta orizzontale guidata per A, ritrova l'equazione

$$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 - \frac{1}{2}p^2 a = 0,$$

e la radice di questa dà l'altezza dell'arco, dal quale sottratto l'arco di altezza a il residuo è appunto il ricercato, vale a dire quello, il di cui punto infimo è il punto del distacco.

Se nell'ipotesi della gravità costante si vuole collocato il corpo nella convessità della parabola in punto infinitamente distante dal vertice M, per modo che la verticale λ condotta da quel punto all'asse orizzontale acquisti un valore infinito, allora si fa manifesto, che nell'equazione

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda x^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ il valore della radice x non può essere che infinito, altrimenti verrebbe l'assurdo, che $-\lambda^3 = 0$, ovvero $\lambda = 0$, cioè l'infinito sarebbe uguale a zero. Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dalla sommità della parabola verticalmente collocata, ma coll'asse orizzontale, e discende per la convessità, corre uno ſpazio infinito prima di ſtaccarſi dal canale, o piuttoſto non ſi diſtacca mai.

TEOREMA X.

Nella Cicloide ſituata coll'aſſe verticale il grave, che dalla ſua ſommità diſcende per la conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo eſſere arrivato al punto, che reſta ſotto il vertice un ſemidiametro del circolo generatore. E generalmente da qualunque punto incominci il corpo a diſcendere, eſſo abbandona il canale cicloidale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza è la metà di quella dello ſteſſo arco continuato ſino alla baſe orizzontale della Cicloide.

TEOREMA XI.

Se vuolſi che il corpo partendo (*fig. XI*) dal vertice *A* diſcenda lungo la conveſſità ſcanalata della Ciſſoide *ACO* riferita all' aſſe *AM* parallelo all' aſintoto verticale *FN*, e ſi chiamano al ſolito x, y le coordinate ortogonali *AB*, *BC*, a il ſemidiametro *AP* del cerchio generatore; il punto del diſtacco del corpo ſi trova eſſer quello, a cui corriſponde $y = \frac{8}{9}a$, oſſia il corpo ſi diſtacca dal canale dopo aver paſſato un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore.

E ſe il corpo parte da un punto inferiore al vertice *A*, e diſtante dalla orizontale *AF* d'una data quantità b, la radice dell' equazione cubica $y^3 - \frac{16a}{9}y^2 + \frac{64a^2 + 36b^2}{81}y - \frac{8ab^2}{9} = 0$ dà il valore dell' ordinata appartenente a quell' arco di ciſſoide, dal quale ſe ſi ſottrae l' arco compreſo fra il vertice ed il principio del moto ſi ha l'arco ricercato, al di cui termine giunto che ſia il grave, abbandona la curva.

TEOREMA XII.

Sia (*fig. XII*) *OBS* la logaritmica ſituata in un piano verticale, col ſuo aſintoto *MN* al di ſopra di eſſa ed orizzontale. Si ſupponga la ſottangente coſtante $= 1$, e la *FB* normale all' aſintoto ed eguale alla ſottangente ſi produca indefinitamente in *P*, e ſi prendano le ordinate ortogonali $BI = x$, $IS = y$. Ciò ſtante, un corpo, che incomincia a diſcendere dal punto *B* (che chiameremo vertice) lungo la conveſſità *BS* della logaritmica, ſi allontana dalla curva dopo aver percorſo un arco, la di cui altezza o aſciſſa $x = \sqrt{2}$, cioè uguaglia la diagonale del quadrato deſcritto ſopra la ſottangente.

Qualora poi il mobile parta da un punto inferiore al vertice *B*, e la diſtanza di tal punto dalla retta orizzontale guidata per *B* ſia $= a$, il mobile ſi diſtacca dalla curva dopo eſſer caduto da un arco, che ha per altezza $x - a = \sqrt{(1 + (a+1)^2)}$, cioè l' ipotenuſa d'un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la ſottangente della logaritmica, l' altro cateto è la ſomma di queſta ſottangente e della diſtanza del principio del detto arco dalla orizzontale guidata pel vertice.

SOPRA I LOGARITMI

DELLE QUANTITA' NEGATIVE;

E SOPRA GL' IMMAGINARJ.

Del P. Gregorio Fontana Delle Scuole Pie Professore di Matematica sublime nell' Università di Pavia.

La gran controversia intorno alla qualità del valore de' logaritmi delle quantità negative, che tiene tuttora divisi i più insigni Geometri del secolo, è stata dall' immortale Sig. *Euler* pressochè fissata e decisa mercè il famoso Teorema da esso dimostrato, che *il logaritmo di qualunque quantità negativa ha un' infinità di valori, de' quali uno solo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualsivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma solamente immaginarj*. Siccome però un tal Teorema, veramente originale, e degno della penetrazione di quel sommo Geometra, viene da lui dimostrato nella sua profonda Dissertazione sopra l' indicata controversia con un metodo assai lungo e prolisso, il quale inoltre procedendo per esponenti infiniti ed infinitesimi lascia perciò nello spirito del leggitore non so qual nebbia e dubbietà, che dà luogo a mille scrupoli ed equivoci non così facili a dileguarsi, e rimane anco esposto alle eccezioni e agli attacchi del Sig. *D' Alembert*; quindi è, che non si giudicherà per avventura cosa affatto inutile ed intempestiva il proporre qui con un metodo il più semplice e rigoroso, che mai possa desiderarsi, tre differenti breviſſime dimoſtrazioni del ſuddetto Teorema, e dedurne poſcia come tanti Corollarj tutte le principali proprietà delle formole immaginarie ed eſponenziali. Sia dunque

TEOREMA.

Il logaritmo di qualunque quantità poſitiva ha un' infinità di valori, de' quali uno ſolo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualſivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma ſolamente immaginarj.

DIMOSTRAZIONE I.

I. Deſcritto un cerchio col ſemidiametro $= 1$, dicaſi ϕ l'arco, a cui corriſponde l'aſciſſa o il ſenoverſo $= x$; e ſi avrà, come è noto, $d\phi = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}}$, cioè $d\phi\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}}$

$$= \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}} \left(\frac{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}}{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}} \right) = \frac{\frac{xdx - dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}} + dx}{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}}.$$

Oſſervo, che il numeratore di queſta frazione è il differenziale del denominatore; e però paſſando agl' integrali naſce $\phi\sqrt{-1} = \log.\left(x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)} \right) + \text{coſt.}$ E perchè ſvaniſcono inſieme ϕ ed x, riſulta $\text{coſt.} = -\log. -1$. Dunque $\phi\sqrt{-1} = \log.\left(1 - x - \sqrt{(x^2 - 2x)}\right)$. Piglio ora il ſeno verſo x uguale a tutto il diametro 2, e nominando π la ſemicirconferenza del cerchio, oſſervo, che al ſeno verſo $= 2$ corriſpondono tutti gli archi ſeguenti $\pm\pi$; $\pm 3\pi$; $\pm 5\pi$; $\pm 7\pi$; ecc. in infinito, rappreſentati generalmente da $\pm(2n - 1)\pi$, dove n è un numero intero qualunque dal zero ſino all' infinito. In queſta ipoteſi adunque ſi ha $\pm(2n - 1)\pi\sqrt{-1} = \log. -1$. E però poſta A una qualſivoglia grandezza, il di cui logaritmo

logaritmo naturale sia $= a$, siccome si ha log. $- A =$ log. $A +$ log. $- 1$, sarà quindi log. $- A = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che è una parte del Teorema.

II. Per dimostrare l' altra parte, si ponga mente, che qualora si prende il seno verso $x = 0$, l' arco ϕ acquista un' infinità di valori, cioè $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi$; ecc. in infinito, espressi generalmente da $\pm 2n\pi$, dove n rappresenta qualunque numero intero dal zero fino all' infinito. In questo supposto adunque si otterrà $\pm 2n\pi\sqrt{-1} =$ log. 1. Essendo poi log. $A =$ log. $A +$ log. $1 = a +$ log. 1, sarà in conseguenza log. $A = a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Dal che si scorge, che degl' infiniti valori $a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$ uno solo è reale, cioè quello che corrisponde ad $n = 0$, e tutti gli altri infiniti sono immaginarj; che era l' altra parte del Teorema.

DIMOSTRAZIONE II.

I. Prendasi x pel coseno dell' arco ϕ, e si avrà dalla nota proprietà del cerchio $d\phi = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ $= -\frac{dx}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$; onde $d\phi\sqrt{-1} = -\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}$ $= -\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-1)}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}\right) = \frac{\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)}} - dx}{x+\sqrt{(x^2-1)}}$.

Laonde pigliando gl' integrali sarà $\phi\sqrt{-1} = -$ log. $\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right)$ senza aggiunta di costante, perchè si annullano i due membri dell' ugualtà quando $x = 1$. Sicchè proviene $\phi\sqrt{-1} = -$ log. $\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right) =$ log. $\frac{1}{x+\sqrt{(x^2-1)}} =$ log. $\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)$. Se pertanto si assume il coseno $x = -1$, acquista l' arco corrispondente ϕ tutti i seguenti infiniti valori $\pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi$; ecc.

in infinito espressi da $\pm(2n-1)\pi$. Ma nell' ipotesi di $x=-1$ diventa $\log.\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)=\log.-1$. Dunque $\log.-1=\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. E però $\log.-A=\log. A+\log.-1=a+\log.-1=a\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che è un valore infinitiforme, ma sempre immaginario.

II. Qualora poi pigliasi il coseno $x=1$, è noto, che a tal coseno corrispondono gli archi 0; $\pm 2\pi$; $\pm 4\pi$; $\pm 6\pi$; ecc. in infinito, che vengono rappresentati dall' espressione $\pm 2n\pi$, nella quale n significa qualunque numero dal zero fino all' infinito. Ma in questo assunto di $x=1$, trovasi $\log.\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)=\log. 1$. Dunque $\pm 2n\pi\sqrt{-1}=\log. 1$. Quindi $\log. A=\log. A+\log. 1=a\pm 2n\pi\sqrt{-1}$, valore infinitiforme, ed unicamente reale nel solo caso di $n=0$, ed in tutti gli altri casi immaginario.

DIMOSTRAZIONE III.

Chiamo φ l' arco di cerchio descritto col raggio 1, t la tangente, s il seno, c il coseno. Avremo pertanto $d\varphi=\frac{dt}{1+t^2}=\frac{dt}{(1+t\sqrt{-1})(1-t\sqrt{-1})}=\frac{\frac{1}{2}dt}{1+t\sqrt{-1}}+\frac{\frac{1}{2}dt}{1-t\sqrt{-1}}$; ed integrando $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}$ senza costante, perchè posto $t=0$, si annullano insieme i due membri dell' ugualtà. Posto in luogo di t il suo valore $\frac{s}{c}$, si ha $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{c+s\sqrt{-1}}{c-s\sqrt{-1}}$, e moltiplicando il numero di questo logaritmo sotto e sopra per $c+s\sqrt{-1}$ nasce $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\left(c+s\sqrt{-1}\right)^2$ $=\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.\left(c+s\sqrt{-1}\right)$. Dunque finalmente $\varphi\sqrt{-1}$ $=\log.(c+s\sqrt{-1})$. Prendo ora $c=1$, $s=0$, e chiamo

π la ſemicirconferenza del cerchio: è principio notiſſimo della Trigonometria, che al coſeno 1, e ſeno *zero* corriſpondono tutti gli archi ſeguenti $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi$; ecc. in infinito, ovvero $0; \pm 2n\pi$, denotando n tutti i numeri naturali poſitivi. Dunque in queſt' ipoteſi la noſtra formola diventerà $\log. 1 = 0$, e $\log. 1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Dunque eſſendo A qualunque grandezza poſitiva, e il ſuo logaritmo $= a$, ſi avrà $\log. A = \log. 1A = \log. A + \log. 1 = a + 0$

$$a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

cioè il logaritmo di A avrà infiniti valori, uno ſolo reale a, e tutti gli altri immaginarj $a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, che è il primo punto. Paſſo al ſecondo, e fiſſo $c = -1$, $s = 0$, e rifletto, che al coſeno -1 e al ſeno *zero* corriſpondono infiniti archi, che ſono i ſeguenti $\pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \pm 7\pi$; ecc., ovvero $\pm(2n-1)\pi$. In queſta nuova ipoteſi di $c = -1$, $s = 0$, la noſtra formola adunque ſi trasforma in queſt' altra $\log. -1 = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. Quindi eſſendo $\log. -A = \log. -1A = \log. A + \log. -1 = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$, ſi vede tantoſto, che il logaritmo della quantità negativa $-A$ ha un' infinità di valori tutti immaginarj rappreſentati dalla forma $a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che era il ſecondo punto. Dunque I. $\log. A = a$

$$a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

II. $\log. -A = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$.

Per ritrovare poi con queſto ſteſſo metodo i logaritmi di qualſivoglia grandezza immaginaria baſta por mente alla forma $a + b\sqrt{-1}$, alla quale il Sig. *D' Alembert* ha dimoſtrato il primo ridurſi tutte le quantità immaginarie più complicate, denotando a e b grandezze reali. Si ha dunque a determinare il valore di $\log. (a + b\sqrt{-1})$: Si deſcriva un cerchio col raggio $= 1$, e ſi prenda in eſſo l'arco θ, la di cui tangente ſia $\frac{b}{a}$, e però la secante $= \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)}$, il seno $= \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, il coseno $= \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Dunque sen. $\theta = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $b = \sqrt{(a^2+b^2)}$ sen. θ; e così cos. $\theta = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $\sqrt{(a^2+b^2)}$ cos. $\theta = a$. Dunque log. $(a + b\sqrt{-1})$ $=$ log. $\left(\text{cos.}\,\theta + \text{sen.}\,\theta\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{(a^2+b^2)}\right) = \frac{1}{2}$ log. (a^2+b^2) $+$ log. (cos. $\theta +$ sen. $\theta\sqrt{-1}$). Ma si è precedentemente fatto vedere log. (cos. $\theta +$ sen. $\theta\sqrt{-1}) = \theta\sqrt{-1}$. Dunque finalmente si avrà log. $(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}$ log. (a^2+b^2) $+ \theta\sqrt{-1}$, essendo θ l' arco di cerchio descritto col raggio 1, e dotato della tangente $\frac{b}{a}$. Qui pure osservo, che essendo infiniti gli archi dotati della tangente $\frac{b}{a}$, cioè θ; $\theta \pm \pi$; $\theta \pm 2\pi$; $\theta \pm 3\pi$; $\theta \pm 4\pi$; $\theta \pm 5\pi$; ecc. ossia in generale $\theta \pm n\pi$, ne viene in conseguenza, che infiniti sono i valori di log. $(a + b\sqrt{-1})$ tutti rappresentati dall' espressione infinitiforme $\frac{1}{2}$ log. $(a^2+b^2) + (\theta \pm n\pi)\sqrt{-1}$.

Con eguale facilità e speditezza io dimostro i famosi Teoremi sugl' immaginarj esprimenti le funzioni degli archi circolari. In fatti

I. Preso log. $e = 1$, ed essendosi già trovato log. (cos. $\theta +$ sen. $\theta\sqrt{-1}) = \theta\sqrt{-1}$, ne viene in conseguenza cos. $\theta +$ sen. $\theta\sqrt{-1} = e^{\theta\sqrt{-1}}$; e però pigliato l' arco negativo nasce cos. $-\theta +$ sen. $-\theta\sqrt{-1}$, cioè

$\text{cof.}\,\theta - \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}$: onde aggiunta queft' equazione alla prima fi ottiene cof. θ

$$= \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2}$$; che è il primo Teorema.

II. Delle predette due equazioni fottraggo la feconda dalla prima, e divido il refiduo per $2\sqrt{-1}$; e quindi ricavo $\text{fen.}\,\theta = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; che è il fecondo Teorema.

III. Nell' equazione $\text{cof.}\,\theta \pm \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1} = e^{\pm\theta\sqrt{-1}}$ fe in vece dell' arco θ fi foftituifce l' arco $n\theta$, fi raccoglie $\text{cof.}\,n\theta \pm \text{fen.}\,n\theta\sqrt{-1} = e^{\pm n\theta\sqrt{-1}}$. Ma $e^{\pm n\theta\sqrt{-1}}$ è la poteftà n: efima di $e^{\pm\theta\sqrt{-1}}$, ovvero di cof. $\pm$ fen. $\theta\sqrt{-1}$: Dunque $(\text{cof.}\,\theta \pm \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1})^n = \text{cof.}\,n\theta \pm \text{fen.}\,n\theta\sqrt{-1}$; che è il terzo Teorema.

IV. Effendo $\text{cof.}\,n\theta + \text{fen.}\,n\theta\sqrt{-1} = (\text{cof.}\,\theta + \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1})^n$, e $\text{cof.}\,n\theta - \text{fen.}\,n\theta\sqrt{-1} = (\text{cof.}\,\theta - \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1})^n$, fommate quefte due equazioni fi ritrova cof. $n\theta$

$$= \frac{1}{2}(\text{cof.}\,\theta + \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\text{cof.}\,\theta - \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1})^n,$$

che è il quarto Teorema.

V. Sottratta la feconda delle due medefime equazioni dalla prima, e divifo il refiduo per $2\sqrt{-1}$ fi ritrova $\text{fen.}\,n\theta = \frac{(\text{cof.}\,\theta + \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1}) - (\text{cof.}\,\theta - \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$;

che è il quinto Teorema.

Potrebbe forgere in mente a taluno una difficoltà ful numero de' valori

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm2\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm3\pi)\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm4\pi)\sqrt{-1}$$

ecc. . . . . . .
ecc. . . . . . .
ecc. . . . . . .

che competono a log. $(a+b\sqrt{-1})$, ne' quali valori gli archi $\theta;\theta\pm\pi;\theta\pm2\pi$; ecc. ſpettano tutti alla tangente $\frac{b}{a}$. Imperciocchè ſe in vece della tangente $\frac{b}{a}$ ſi vuole aver riguardo al ſeno $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e al coſeno $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, non ſi ha che la metà del numero de' predetti archi, cioè $\theta;\theta\pm2\pi;\theta\pm4\pi;\theta\pm6\pi$; ecc. e conſeguentemente anche la metà del numero de' valori di log. $(a+b\sqrt{-1})$; il che poco ſi accorda coll' eſattezza e rigore. Ma convien riflettere, che quel ſeno e coſeno hanno eſſenzialmente il doppio ſegno $\pm$ al radicale quadrato del denominatore, e gli archi corriſpondenti al ſeno $\frac{b}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e al coſeno $\frac{a}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ſono $\theta\pm\pi;\theta\pm3\pi;\theta\pm5\pi$; ecc., che formano appunto l' altra metà de' valori di log. $(a+b\sqrt{-1})$ trovati dapprima; e così tutto cammina d' accordo.

Con non minore prontezza e facilità io dimostro il famoso Teorema Alemberziano $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ $=M+N\sqrt{-1}$, essendo M, N quantità reali, il quale suole comunemente dimostrarsi mercè la supposizione un po' stravagante di dover concepire varianti le quantità a, b, M, N, che non variano. Io dico così: Abbiamo $\log.(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$:

Dunque $\log.(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = (g+h\sqrt{-1})$ $\log.(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}g\log.(a^2+b^2) - h\theta$

$+\left(\frac{1}{2}h\log.(a^2+b^2)+g\theta\right)\sqrt{-1}$. Dunque passando dai logaritmi ai numeri sarà $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$

$$=e^{\log.(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} - h\theta + \left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} \times e^{-h\theta + (\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1}}$$. Ma

prendendo $\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta$ per un arco di cerchio descritto col raggio 1 si è dimostrato essere

$$e^{\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}} = \text{cos.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)$$

$+\text{sen.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}$. Dunque

$$(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = (a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-h\theta} \left\{ \text{cos.} \right.$$

$$\left. (\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)+\text{sen.}(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1} \right\}.$$

E però posta $M=(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-b\theta} \cos.\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{b}{2}}+g\theta\right)$, ed $N=(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-b\theta} \operatorname{sen.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{b}{2}}+g\theta\right)$, si ha $M+N\sqrt{-1}=(a+b\sqrt{-1})^{g+b\sqrt{-1}}$.

Se pertanto reca meraviglia, che una quantità immaginaria $\frac{1}{2} e^{\theta\sqrt{-1}}$ aggiunta ad un' altra immaginaria $\frac{1}{2} e^{-\theta\sqrt{-1}}$ costituisca, come si è veduto, un valore affatto reale, è però incomparabilmente più mirabile, che anche senza questa aggiunta una quantità qualunque reale a elevata ad un esponente immaginario $b\sqrt{-1}$ persista in infiniti casi ad esser reale. Paragonata in fatti l'espressione $a^{b\sqrt{-1}}$ colla precedente più generale $(a+b\sqrt{-1})^{g+b\sqrt{-1}}$, si trova subito, che annullati b e g nel valore di questa, diventa $a^{b\sqrt{-1}} = \cos.(b\log.a) + \operatorname{sen.}(b\log.a)\sqrt{-1}$.
Ora tutte le volte che sarà $b=\pm\frac{m\pi}{\log.a}$ (essendo m un numero intero qualunque), egli è evidente che nascerà $a^{b\sqrt{-1}}=\pm 1$, secondo che m sarà pari o dispari, e però in tutti questi casi il valore sarà sempre reale.

Parevami una volta di aver ritrovato un argomento insolubile contro l' opinione *Euleriana* circa il valore immaginario de' logaritmi delle quantità negative, cui proposi a qualche Geometra senza ottenerne lo scioglimento, il quale però si ottiene colla più luminosa evidenza dal premesso principio. Io discorreva dunque così: Preso e pel numero, che ha per logaritmo iperbolico

lico l'unità, se questo s'inalza ad un esponente x, e così elevato e^{x} persiste ad avere un valor reale, non può non essere l'esponente x reale ancor esso. Sia pertanto $x = \log. -a$; e poichè $e^{\log. -a} = -a$, ed il valore di $-a$ è visibilmente reale; tale sarà in conseguenza anche quello di $\log. -a$. La risposta è facilissima: e^{x} può esser reale, quand'anche l'esponente x non lo sia; basta in fatti, che l'esponente x sia $= \pm m\pi\sqrt{-1}$, perchè allora $e^{x} = e^{\pm m\pi\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, m\pi \pm \text{sen.}\, m\pi\sqrt{-1} = \pm 1$, che è un valore affatto reale. Ed essendosi dimostrato $\log. -a = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1} + \log. a$, ne viene $e^{\log. -a}$ $= e^{\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1} + \log. a} = a e^{\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}}$ $= a\left(\text{cos.}\,(2n-1)\pi \pm \text{sen.}\,(2n-1)\pi\sqrt{-1}\right) = a \times -1$ $= -a$, come appunto esser dee. L'inganno nasce dal falso supposto, che a primo aspetto può sedurre chichessia, che una quantità reale elevata ad un esponente immaginario debba sempre diventare immaginaria.

Un Teorema importante, che non mi sovviene di aver trovato presso alcun Geometra, si ricava dalla formola $a^{b\sqrt{-1}} = \text{cos.}\,(b \log. a) + \text{sen.}(b \log. a)\sqrt{-1}$, nella quale se si prende $b = \pm x\sqrt{-1}$, si ha il risultato $a^{\mp x} = \text{cos.}\left(x\sqrt{-1}\,.\log. a\right) \pm \text{sen.}\left(x\sqrt{-1}\,.\log. a\right)\sqrt{-1}$; che è quanto dire ogni quantità esponenziale $a^{\mp x}$, che ha un esponente x reale, e la base logaritmica a qualunque, si riduce ad una forma, che sebbene all'aspetto immaginaria è però indubitatamente reale. Ed ecco pertanto, che se la quantità esponenziale $a^{\pm b\sqrt{-1}}$ si riduce alla nota forma cos. $(b \log. a) \pm$ sen. $(b \log. a)\sqrt{-1}$, la esponenziale $a^{\mp b}$ si riduce alla forma non per anco avvertita cos. $(b\sqrt{-1} \log. a) \pm$ sen. $(b\sqrt{-1} . \log. a)\sqrt{-1}$.

Dall'essersi finalmente dimostrato, che la generalissima espressione $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ si converte in un semplice binomio, una parte del quale è il prodotto d'una certa quantità pel coseno di un arco idoneo circolare, e l'altra parte è il prodotto della stessa quantità pel seno di quell'arco e per la specie immaginaria $\sqrt{-1}$, ne viene in conseguenza il famoso Teorema di *Cotes*, non meno che l'altro più generale di *Moivre*, come pure l'invenzione delle radici di qualunque grado d'una proposta quantità; cose tutte di troppo facile deduzione da' premessi principj per non dover essere qui sminuzzate.

Un celebratissimo Oltramontano Geometra ha voluto recentemente spiegare onde avvenga, che i settori reali del cerchio vengano espressi dai settori immaginarj dell'iperbola, e viceversa i reali dell'iperbola dagl'immaginarj del cerchio, e non dissimula la sua meraviglia, che nè *Giovanni Bernoulli* primo autore della riduzione degli uni negli altri, nè i Geometri posteriori abbiano di ciò recata ragione alcuna. Siccome però questa proposizione non pare che assolutamente sussista, non sarà qui fuor di luogo il rettificarne il significato, e dimostrare all'opposto, che non altrimenti i settori reali del cerchio, ma bensì gl'immaginarj vengono rappresentati dai settori immaginarj dell'iperbola, e viceversa.

Chiamo r il semiasse traverso dell'iperbola conica equilatera, per la retta condotta dal centro dell'iperbola ad un punto qualunque del ſuo perimetro, ϕ l'angolo compreſo da queſta retta e dal ſemiaſſe traverſo: è manifeſto, che il ſettore contenuto dai lati di queſt' angolo e dall' arco iperbolico ha per elemento $\frac{1}{2} z^2 d\phi$; e ſiccome facilmente ſi dimoſtra $z^2 = \frac{r^2 (1 + \text{tang.}\,\phi^2)}{1 - \text{tang.}\,\phi^2}$, trovaſi il detto elemento $= \frac{r^2 (1 + \text{tang.}\,\phi^2)\, d\phi}{2 (1 - \text{tang.}\,\phi^2)}$. Ma ſi fa dover eſſere $d\phi = \frac{d\,.\,\text{tang.}\,\phi}{1 + \text{tang.}\,\phi^2}$; dunque l'elemento del ſettore iperbolico ſi traſforma in $\frac{r^2\, d\,.\,\text{tang.}\,\phi}{2(1 - \text{tang.}\,\phi^2)}$, ovvero in $\frac{r^2\, d\,.\,\text{tang.}\,\phi}{4(1 + \text{tang.}\,\phi)} + \frac{r^2\, d\,.\,\text{tang.}\,\phi}{4(1 - \text{tang.}\,\phi)}$. L'integrale di queſta quantità, cioè il ſettore iperbolico indefinito riſulta $= \frac{1}{4} r^2 \log.\,\frac{1 + \text{tang.}\,\phi}{1 - \text{tang.}\,\phi}$.

Ora il ſettore d'un circolo deſcritto col ſemidiametro r, e compreſo dall' angolo ϕ ha per ſuo elemento $\frac{r^2\, d\,.\,\text{tang.}\,\phi}{2 (1 + \text{tang.}\,\phi^2)} = \frac{r^2\, d\,.\,\text{tang.}\,\phi}{4 (1 + \text{tang.}\,\phi\sqrt{-1})} + \frac{r^2 d\,.\,\text{tang.}\,\phi}{4(1 - \text{tang.}\,\phi\sqrt{-1})}$, e queſta eſpreſſione ridotta ad integrazione ſomminiſtra pel valore del ſettore indeterminato $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log.\,\frac{1 + \text{tang.}\,\phi\sqrt{-1}}{1 - \text{tang.}\,\phi\sqrt{-1}}$. Ma queſta eſpreſſione non è punto immaginaria, come a prima viſta potrebbe apparire: in fatti eſſa ſi riſolve in due parti $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$ log.

$(1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}) - \frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.(1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})$, la prima delle quali si converte nella serie $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$ $\left(\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}+\frac{1}{2}\text{tang.}\,\varphi^2-\frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1}-\frac{1}{4}\text{tang.}\,\varphi^4+\text{ecc.}\right)$, la seconda nella serie $\frac{-r^2}{4\sqrt{-1}}(-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}$ $+\frac{1}{2}\text{tang.}\,\varphi^2+\frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1}-\frac{1}{4}\text{tang.}\,\varphi^4-\text{ecc.})$: laonde raccogliendo i termini proviene $\frac{1}{2}r^2\left(\text{tang.}\,\varphi\right.$ $\left.-\frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3+\frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5-\text{ecc.}\right)$, che è visibilmente tutta reale.

La realità dell' anzidetta espressione si dimostra ancora mediante il Teorema precedentemente stabilito, che $\log.(a+b\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$, dove θ è l' arco circolare, descritto col raggio 1, e colla tangente $\frac{b}{a}$: imperciocchè fatto il debito paragone si raccoglie $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.(1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})=\frac{r^2}{8\sqrt{-1}}\log.$ $(1+\text{tang.}\,\varphi^2)+\frac{1}{4}r^2\varphi$, e parimente $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.$ $(1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})=\frac{r^2}{8\sqrt{-1}}\log.(1+\text{tang.}\,\varphi^2)$ $-\frac{1}{4}r^2\varphi$, e sottraendo questa da quella, nasce $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$

$\log. \frac{1+\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\phi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} r^2 \phi$, che è manifeſtamente l'eſpreſſione reale del ſettore circolare.

Da ciò ſi rende evidente, che l'eſpreſſione apparentemente immaginaria del ſettore reale del cerchio è effettivamente tutta reale, e che eſſa non può in verun modo equivalere all'eſpreſſione d'un ſettore immaginario della iperbola. Siccome poi d'un tal ſettore iperbolico immaginario ſi ha l'eſpreſſione, ſe nel valor generale $\frac{1}{4} r^2 \log. \frac{1+\text{tang.}\phi}{1-\text{tang.}\phi}$ ſi ſoſtituiſce in vece dell'angolo ϕ l'angolo immaginario $\phi\sqrt{-1}$, il che dà $\frac{1}{4} r^2$ $\log. \frac{1+\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}$ pel valore del detto ſettore immaginario, cioè compreſo da un angolo immaginario; paragonato perciò queſto valore con quello del ſettor reale del cerchio $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log. \frac{1+\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}$, ſi vede ſubito, che l'uno differiſce eſſenzialmente dall'altro, mancando al primo il diviſore $\sqrt{-1}$, per la di cui aſſenza quello reſta impoſſibile, mentre per la ſua preſenza divien reale il ſecondo.

Meglio ancora ciò ſi comprende col ſeguente diſcorſo: Si dica I il ſettore iperbolico, C il circolare, e ſi avrà $dI = \frac{r^2 d.\text{tang.}\phi}{2(1-\text{tang.}\phi^2)}$, $dC = \frac{r^2 d.\text{tang.}\phi}{2(1+\text{tang.}\phi^2)}$. Si prenda nel ſettor circolare l'angolo immaginario $\phi\sqrt{-1}$, ritenendo il reale ϕ pel ſettore iperbolico; e naſcerà $dC = \frac{r^2 d.\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}{2(1-\text{tang.}\phi^2)} = dI\sqrt{-1}$, e quindi integrando $C = I\sqrt{-1}$, cioè il ſettor impoſſibile C del cerchio, contenuto dall'angolo impoſſibile $\phi\sqrt{-1}$, è uguale al settore iperbolico I moltiplicato per $\sqrt{-1}$, che rende un tal valore impossibile. Così nell'espressione del settore iperbolico se si piglia $\varphi\sqrt{-1}$ in vece di φ, e si ritiene φ nel circolare, si trova $dI = \frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{2(1+\text{tang.}\varphi^2)}$ $= dC\sqrt{-1}$, e quindi $I = C\sqrt{-1}$, e $C = \frac{I}{\sqrt{-1}}$, vale a dire il settor reale C del cerchio, corrispondente al reale angolo φ, è uguale al settore impossibile I dell'iperbola diviso per $\sqrt{-1}$, la qual divisione toglie alla quantità la sua impossibilità; ovvero finalmente il settore immaginario I dell'iperbola non equivale punto al settor reale C del cerchio, nè può essere da questo rappresentato, ma viene espresso per l'opposto dal prodotto della quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ nel settore circolare, vale a dire da una quantità onninamente immaginaria.

Nell'atto di dar compimento a questa breve Memoria mi accorgo con sorpresa, che il famoso Teorema Euleriano intorno all'infinita moltiplicità de' valori del logaritmo d'una proposta quantità può dimostrarsi indipendentemente dal calcolo Infinitesimale, e da ogni ipotesi d'infinitesimi colla pura Algebra finita; ed in tal occasione mi avveggo eziandio, che il Teorema Alemberziano intorno alla riduzione di qualsisia più complicato immaginario alla forma binomiale semplicissima si dimostra ancor esso col solo calcolo delle grandezze finite, ed in un modo assai spedito e rigoroso. Ecco pertanto la dimostrazione del Teorema Euleriano senza assumere alcun principio del calcolo Infinitesimale, nè alcuna nozione di grandezze inassegnabili o infinite.

Presa x per rappresentare qualunque data grandezza, si dimostra col ritorno delle serie, come può vedersi in varj Trattati elementari di Algebra finita, che log.

$\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \text{ecc.}\right)$. Dunque se si nomina φ l'arco d'un cerchio descritto col raggio 1, e si fa $x = \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}$, nascerà $\log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}$ $= 2\left(\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1} - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1} + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5\sqrt{-1} - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7\sqrt{-1} + \text{ecc.}\right) = 2\sqrt{-1}\left(\text{tang.}\,\phi - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7 + \text{ecc.}\right)$. Ma col ritorno stesso delle serie nell'Algebra ordinaria viene dimostrato, che la serie $\text{tang.}\,\phi - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7 + \text{ecc.}$ rappresenta il valore dell'arco circolare φ: sarà dunque $2\varphi\sqrt{-1} = \log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}$, cioè sostituendo $\frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi}$ in luogo di tang. φ, sarà $2\varphi\sqrt{-1}$ $= \log.\frac{\text{cos.}\,\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1}}{\text{cos.}\,\varphi - \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1}} = \log.\frac{(\text{cos.}\,\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1})^2}{\text{cos.}\,\varphi^2 + \text{sen.}\,\varphi^2}$ $= 2\log.(\text{cos.}\,\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1})$, e quindi $\varphi\sqrt{-1} = \log.(\text{cos.}\,\varphi + \text{sen.}\,\varphi\sqrt{-1})$. Se ora si prende $\varphi = \pm 2m\pi$, denotando m tutti i numeri naturali dal zero fino all'infinito, si ha $\text{sen.} \pm 2m\pi = 0$, $\text{cos.} \pm 2m\pi = 1$: conseguentemente $\pm 2m\pi\sqrt{-1} = \log.\ 1$, cioè a dire log. 1 ha un'infinità di valori 0, $\pm 2\pi\sqrt{-1}$, $\pm 4\pi\sqrt{-1}$, $\pm 6\pi\sqrt{-1}$, ecc. Pigliato poi $\varphi = \pm(2m-1)\pi$, diventa $\text{sen.} \pm (2m-1)\pi = 0$, $\text{cos.} \pm (2m-1)\pi = -1$. Laonde $\pm(2m-1)\pi\sqrt{-1} = \log. -1$, vale a dire $\log. -1$ ha i seguenti valori infiniti $\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$, $\pm 7\pi\sqrt{-1}$, ecc.

Dimostrato in tal guisa il Teorema Euleriano, si deduce subito dal primo valore di log. -1 la celebre proporzione Bernoulliana fra il diametro e la circonferenza del cerchio, poichè essendo log. $-1 = \pi\sqrt{-1}$ ne viene $1 : \pi :: \sqrt{-1} : \log. -1$, cioè il diametro alla circonferenza come la radice dell' unità negativa al logaritmo dell' unità negativa.

Dall' ugualtà $\varphi\sqrt{-1} = \log.(\cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1})$ si ricava, preso e pel numero che ha per suo logaritmo naturale l' unità, $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1}$; e quindi $e^{n\varphi\sqrt{-1}} = \cos.n\varphi + \sin.n\varphi\sqrt{-1} = (\cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1})^n$.

Che se supponghiamo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = B^{x\sqrt{-1}}$, e conseguentemente $\varphi\sqrt{-1} = x\sqrt{-1}\log.B$, cioè $\varphi = x\log.B$, ne inferiremo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1} = B^{x\sqrt{-1}}$ $= \cos.(x\log.B) + \sin.(x\log.B)\sqrt{-1}$.

Parimente denotando p, e q due grandezze qualunque si ha $\log.(p + q\sqrt{-1}) = \log.p\left(\frac{p + q\sqrt{-1}}{p}\right)$ $= \log.p\left(1 + \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right) = \log.p$ $+ \log.\left(1 + \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right)$. Piglisi φ per l' arco del raggio 1 della tangente $\frac{q}{p}$, ovvero del seno $\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$, e del coseno $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$; ed avremo $\log.(p + q\sqrt{-1})$ $= \log.p + \log.(1 + \text{tang.}\varphi\sqrt{-1}) = \log.p$ $+ \log.\frac{\cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1}}{\cos.\varphi} = \log.p - \log.\cos.\varphi + \log.$

(cos.

$(\text{cos}.\,\varphi + \text{sen}.\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.\,p - \log.\,\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$
$+ \log.\,(\text{cos}.\,\varphi + \text{sen}.\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \log.$
$(\text{cos}.\,\varphi + \text{sen}.\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \varphi\sqrt{-1}$.

Da tali Teoremi in sì poche linee dimostrati coll' ordinario calcolo finito riesce ora facilissimo l' inferire il famoso Teorema del Sig. D' *Alembert* $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1}$. Imperciocchè essendosi trovato $\log.\,(p+q\sqrt{-1}) = \log.\,(p^2+q^2)^{1:2} + \varphi\sqrt{-1}$, posto φ per l' arco sopra indicato, ne deriva $\log.\,(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = (m+n\sqrt{-1})\log.\,(p+q\sqrt{-1}) = (m+n\sqrt{-1})\log.\,(p^2+q^2)^{1:2} + (m+n\sqrt{-1})\varphi\sqrt{-1} = \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}} + \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}n\sqrt{-1}} + m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi$. Ma abbiamo dimostrato $B^{x\sqrt{-1}} = \text{cos}.(x\log.\,B) + \text{sen}.(x\log.\,B)\sqrt{-1}$, e però $(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}n\sqrt{-1}} =$
$\text{cos}.\left(\frac{1}{2}n\log.\,(p^2+q^2)\right) + \text{sen}.\left(\frac{1}{2}n\log.\,(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}$;
dunque sostituito questo valore, nascerà
$\log.\,(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = \log.\,(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}$
$+ \log.\left(\text{cos}.\left(\frac{1}{2}n\log.\,(p^2+p^2)\right) + \text{sen}.\left(\frac{1}{2}n\log.\,(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}\right) + m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi$; e passando dai logaritmi ai numeri proviene $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$

$$= e^{m\phi\sqrt{-1} - n\phi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \left(\text{cof.}\left(\tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right) \right.$$

$$\left. + \text{fen.}\left(\tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right) \sqrt{-1} \right)$$. Ora $e^{m\phi\sqrt{-1}}$

$= \text{cof.}\, m\phi + \text{fen.}\, m\phi\sqrt{-1}$. Dunque $(p + q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$

$$= e^{-n\phi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \left(\text{cof.}\, m\phi + \text{fen.}\, m\phi \sqrt{-1} \right) \left(\text{cof.} \right.$$

$$\left. \left(\tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right) + \text{fen.}\left(\tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right) \sqrt{-1} \right)$$

$$= e^{-n\phi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \times \left(\text{cof.}\, m\phi\, \text{cof.}\left(\tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right) \right.$$

$$- \text{fen.}\, m\phi\, \text{fen.}\left(\tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right) + \text{cof.}\left(\tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right)$$

$$\left. .\text{fen.}\, m\phi \sqrt{-1} + \text{cof.}\, m\phi\, \text{fen.}\left(\tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\sqrt{-1}\right) \right)$$

$$= e^{-n\phi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \times \left(\text{cof.}\left(m\phi + \tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right) \right.$$

$$\left. + \text{fen.}\left(m\phi + \tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right) \sqrt{-1} \right)$$. Posto pertanto $P = e^{-n\phi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \text{cof.}\left(m\phi + \tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right)$,

$Q = e^{-n\phi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \text{fen.}\left(m\phi + \tfrac{1}{2} n \log.(p^2 + q^2)\right)$,

risulta finalmente $(p + q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1}$.

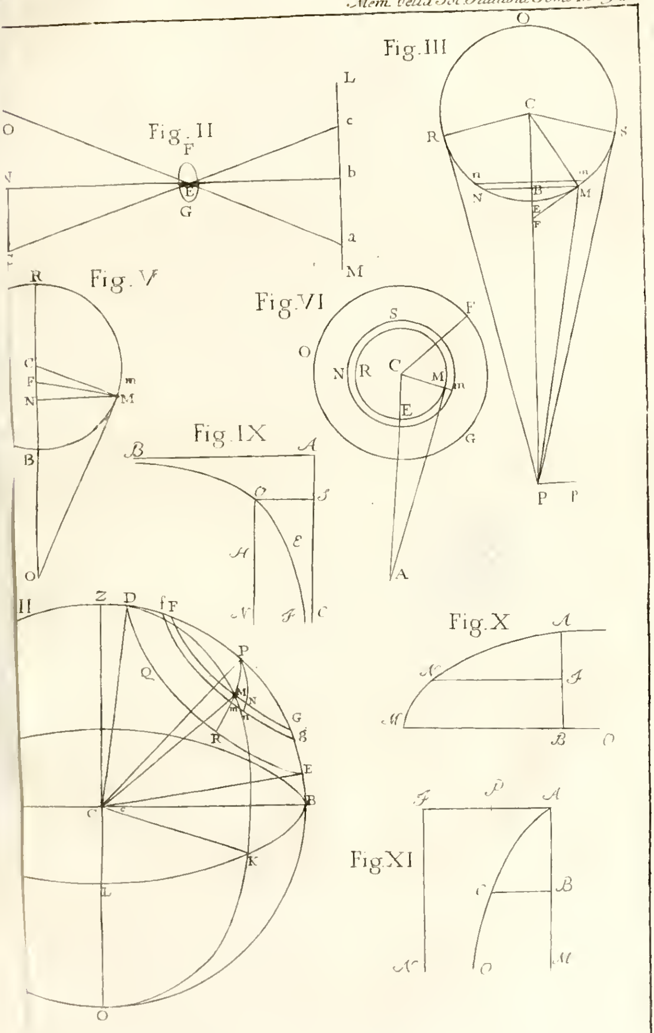


Fig. II
Fig. III
Fig. V
Fig. VI
Fig. IX
Fig. X
Fig. XI

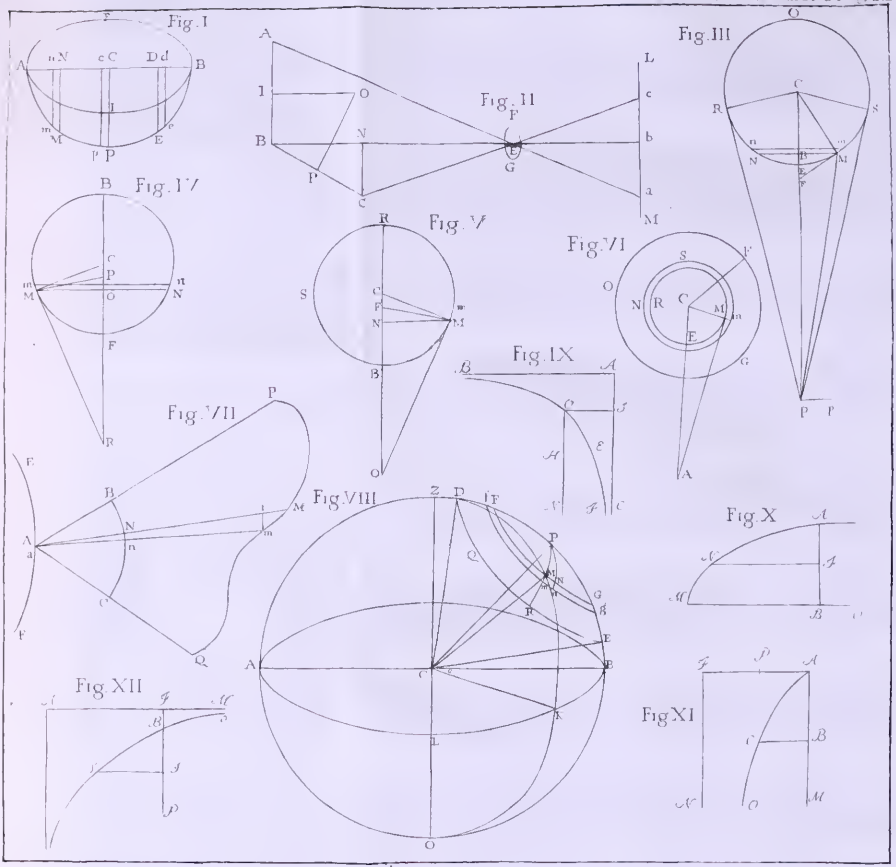


Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. X
Fig. XI
Fig. XII

DESCRIZIONE
DI UNA
MACCHINA METEREOLOGICA

Per mezzo della quale si determina di ora in ora la durata e quantità della pioggia.

Del Sig. Cavaliere MARSILIO LANDRIANI.

SEbbene fino dall' erezione delle più antiche e celebri Accademie siasi tenuto esatto conto della quantità della pioggia caduta ne' diversi giorni dell' anno, e vi sia stato persino chi ha misurato la quantità della pioggia che cade a diverse altezze; pure per quanto io sappia alcuno non vi è stato ancora che abbia intrapreso delle osservazioni circa alla durata e quantità della pioggia caduta nelle diverse ore del giorno, e della notte; essendosi soltanto limitate le osservazioni ed il registro de' giornali di coloro che hanno intraprese delle osservazioni metereologiche a indicare semplicemente, che in un tal giorno era caduta una data quantità di pioggia, e tutto al più fu lodata la diligenza di chi nel riferire i risultati delle osservazioni sulla quantità della pioggia caduta in un dato giorno vi aggiunse che la pioggia era stata o continua od interrotta.

Eppure la cognizione della durata della pioggia, non meno che della di lei quantità oraria, non è un oggetto semplicemente curioso, essendo essa certamente utile ed interessante per ben conoscere l' indole e la natura di un clima, e per render ragione di molti fenomeni dell' atmosfera. Imperocchè se si rifletta che qualunque benchè menoma modificazione del fluido che noi respiriamo non può essere in alcun modo indifferente al ben essere dell' economia animale, e che la durata non meno che la di lei quantità influiscono moltissimo nelle variazioni delle modificazioni dell' atmosfera, nessuno certamente vi sarà che risguardar possa come una vana e sterile curiosità l' occuparsi di queste osservazioni coll' ammetterle nel ruolo delle altre osservazioni metereologiche.

L' umidità dell' atmosfera, che è uno degli elementi della di lei salubrità, non solo procede dalla traspirazione dell' immensa copia de' vegetabili che coprono la terra, dalla respirazione e traspirazione degli animali, dall' evaporazione delle acque e da simili cause, ma anche dalla quantità e durata della pioggia; per modo tale che taluno si è lusingato di poter determinare l' umidità di un clima e di una stagione dalla semplice cognizione della quantità dell' acqua piovuta. Ma sebbene una tale lusinga sia stata dimostrata vana dalle osservazioni e da' confronti del Sig. *Dobson* (a), non perciò si può conchiudere che le pioggie non influiscono sull' umidità dell' atmosfera; ma che soltanto non è sempre proporzionale l' umidità dell' aria alla quantità della pioggia.

Per render più giusto, e meno fallace questo confronto fra l' umidità dell' aria e la pioggia conviene aver riguardo più alla durata della pioggia che alla di lei quantità, poichè stando l' aria per un maggiore spazio di tempo in contatto dell' acqua s' imbeve di una maggiore quantità di umido, che non assorbisce sì facilmente nelle dirotte pioggie sebbene abbondantissime.

(*a*) Phil. Transactions.

Inoltre l' aria nella caduta delle pioggie si deflogistica, ed acquista una maggiore salubrità; poichè dalle belle sperienze di *Priestley* si sa che uno dei mezzi, che la natura impiega per rendere all' atmosfera l' originaria sua salubrità, è il dilavamento delle pioggie; e si sa altronde che i fanghi, che per mancanza delle acque tramandano de' vapori mofetici, massime se sieno percossi dai raggi solari, non infettano più l' atmosfera qualora sieno coperti da una notabile quantità di acqua.

Tutto ciò è appoggiato alla giornaliera sperienza, e basta dare un' occhiata allo stato dell' aria delle campagne paludose per convincersene; imperocchè in quali stagioni l' aria è giudicata e trovata insalubre? in quelle stagioni appunto nelle quali le pioggie sono rare o di breve durata; poichè allora le terre paludose, non essendo coperte di molte acque, riscaldate dal sole fermentano, ed imputridendo esalano una notabile quantità di vapori aeriformi parte flogisticati e parte infiammabili che mescolandosi coll' atmosfera ne alterano la di lei purezza e salubrità. Nè per altra ragione nelle paludi Pontine, nelle maremme Sanesi, ed in alcuni luoghi paludosi della Lombardia Austriaca, dove e pel genere di coltivazione, e per le molte acque stagnanti l' aria è quasi abitualmente insalubre, noi non temiamo più di respirare quelle arie in quelle stagioni in cui le frequenti pioggie hanno reso all' aria una uniforme, e presso a poco eguale salubrità.

Egli è vero però che talvolta è stato osservato che dopo lunghe siccità la caduta di una breve pioggia è stata accompagnata da febri d' indole maligna, perniciosa, che non sarebbero insorte se la siccità fosse continuata più oltre; ma questa pur troppo vera osservazione non prova che insalubri siano le pioggie, ma che una tale infezione procede da uno stato particolare delle terre paludose.

Esse siccome non sono che un ammasso di cadaveri d' insetti, di foglie, di virgulti infraciditi e scomposti, quando sono coperte da un notabile strato d'acqua non fermentano, ma vanno lentamente decomponendosi, e risolvendosi ne' loro principj, senza tumulto o notabile effervescenza. Forse anche i vapori esalanti da queste sostanze scomponentisi in vece di mescolarsi coll' atmosfera, incontrando uno strato d' acqua, da quello sono come trattenuti ed imprigionati e se pur giungono fino alla superficie dell' acqua, hanno in parte perduto il loro veleno, e sono in qualche modo meno mofetici: ma quando i fanghi sono stati per lungo tempo esposti e percossi dal sole, e sono resi aridi, tostochè una copiosa quantità di acqua improvvisamente li penetra, la fermentazione per così dire sospesa, od impedita, viene dall' acqua favorita, e promossa a segno che una vera e tumultuosa fermentazione quindi ne nasce, ed un copioso torrente di vapori flogistici alkalici, e talvolta infiammabili si sparge nell' atmosfera, e quella singolarmente infetta ed avvelena.

Il Sig. *Guglielmo White* ha fatto delle belle sperienze ed osservazioni su questa materia, le quali rendono ragione di questi sovraccennati singolari fenomeni dell' atmosfera. Poichè egli ha trovato che il fango paludoso asciutto poco o niente altera l' aria che gli è in contatto; laddove se il fango sia imbevuto da molta acqua, esala una tale quantità di vapori flogistici, che in poco tempo l' aria è resa singolarmente flogisticata. Perciò se dopo una lunga siccità arriva che cada della pioggia di breve durata, l' atmosfera in vece di deflogisticarsi si flogistica, e si rende insalubre; perlochè non è da farsi le meraviglie se talora dopo la caduta di una pioggia di breve durata si sieno rese dominanti le malattie di aria cattiva. Ma se le pioggie sono abbondanti, e di una notabile durata, per cui i fanghi sieno stati abbondantemente penetrati e coperti dall' acque, le pioggie anzi che essere dannose salutari fono, e benefiche, poichè i vapori putridi fparfi per l' atmosfera fono dalle pioggie precipitati, e la vegetazione che era prima languente fi rinvigorifce, e maggior copia d' aria deflogifticata quindi efpirano le foglie di tutte le piante.

Ma fenza eftenderci più oltre a ragionare dell' utilità che ci proviene dalle pioggie bafta dare un' occhiata ai rifultati che hanno fornito le Offervazioni fatte fulla durata e quantità della pioggia caduta in tutto l' anno fcorfo (*a*) per comprendere quali utili e curiofe cognizioni ci fomminiftri una macchina che di ora in ora ci indichi la quantità non meno che la durata della pioggia. Poichè tofto fi comprende quale fia ftato il mefe, il giorno, l' ora più piovofa, fe di giorno piova affai più che di notte, e mille altre utili nozioni che dall' ufo di quefta macchina ne derivano.

La macchina che io ho immaginato e che da più di un anno ho fatto coftruire tiene conto non folo della durata, ma ancora della precifa quantità oraria della pioggia.

AA è una tavola circolare di legno annerito di circa 20 pollici di diametro (vedi *fig.* 1 *tav.* 1), che ha nel mezzo un cerchio d' ottone *BB* divifo in 24 parti, ciafcuna delle quali è fuddivifa in 30 parti. Effendo il cerchio *BB* di un diametro minore della tavola circolare *AA*, neceffariamente lafcia tutto all' intorno una zona di legno annerito di due pollici di larghezza, la quale è divifa in due parti eguali *DD*, *CC* da un anello d' ottone *EE*, incaftrato nella tavola *AA*. Quefta tavola *AA* è fiffata a sfregamento fopra l' albero di una ruota orizzontale, che mediante un movimento

(*a*) Quefte Offervazioni ficcome entrano in un piano di offervazioni metereologiche fatte in Milano faranno dal Sig. *Prof. Mofcati* pubblicate nel primo volume degli Atti della Società Patriotica di Milano.

d' orologeria compie un' intera rivoluzione nello ſpazio di 24 ore (la *fig.* 1 rappreſenta la tavola circolare che ſi vede poſta orizzontalmente nella *fig.* 2).

Sul piano del telajo del movimento d'orologeria ſottopoſto alla tavola *AA* è fiſſato un ſolido braccio d'ottone orizzontale *F* che porta il telajo *GHGH*, che ſeparatamente, e quaſi nella naturale ſua grandezza è diſegnato nella *tav.* 2 *fig.* 2.

In ciaſcuna delle due laſtre piane orizzontali *HH* di queſto telajo evvi una fineſtra quadrangolare *T*, *S*, deſtinata a ricevere l' aſta quadrangolare *MM* rappreſentata ſeparatamente nella ſua naturale grandezza nella *fig.* 5 della *tav.* 2 Acciocchè queſt' aſta poſſa liberamente muoverſi, e ſcorrere nelle ſuddette fineſtre *S*, *T* ha applicate quattro mobili rotelle d' acciajo *P*, *P* ecc. che appoggiando contro l' aſta quadrangolare *MM* la tengono regiſtrata in modo che non ſi può muover che nello ſteſſo piano, e non impediſcono punto, anzi favoriſcono la libertà de' ſuoi movimenti.

La *fig.* 6 della *tav.* 2 eſprime l' aſta *MM* colla rotella *P* applicatale, e la *fig.* 7 della ſteſſa *tav.* eſprime la rotella *P* ſeparata.

L' aſta quadrangolare *MM* porta ſul piano della ſua eſtremità ſuperiore un braccio orizzontale d'ottone *QQ* fiſſato colla vite W, il quale piega ad angolo retto in *S*, ed ha alla di lui eſtremità un porta-matita *N*. (Nella *fig.* 5 della *tav.* 2 è tutto ciò baſtevolmente eſpreſſo.)

Dal piano ſuperiore *H* del telajo *HGHG* ſorge una colonnetta d' ottone *O* ſeparatamente rappreſentata nella *tav.* 2 *fig.* 3, la quale ha ſuperiormente una cerniera *N* in cui ſi muove il braccio d' ottone *YY*, la di cui eſtremità termina in un picciolo imbuto oſſia vaſe conico *R*. Queſto braccio *YY* ha non molto lontano dalla cerniera *N* un picciolo bracciuolo tranſverſale *Z* le *Z* che appoggia e preme ſul braccio *QQ* come è baſtevolmente eſpreſſo nella *fig.* 2 della *tav.* 1.

Una molla ſpirale *RR* fiſſata ad un picciolo parallepipedo *T* che ſorga ſulla laſtra inferiore *H* (nella *fig.* 4. della *tav.* 1. ſi vede ſeparatamente la molla *RR*, ed il parallepipedo *T*) ſoſtiene tutto il peſo dell' aſta quadrangolare *MM*, del braccio *QQ*, e dell' altro braccio *YY*, poichè eſſo pure preme l' aſta *MM* per eſſere il bracciuolo *Z* appoggiato ſul braccio *QQ*. La forza di queſta molla *RR* deve eſſere tale che baſti a tener ſollevata l' aſta *MM* e tutto ciò che le è anneſſo in modo che l' eſtremità della matita *H* ſia diſtante una buona linea parigina ed anche più dalla zona *CC* della tavola circolare *AA*.

Dalla deſcrizione di queſto apparato facilmente ſi comprende che ſituando ſul colmo del tetto un ampio imbuto *AA* di latta, o di rame inverniciato che abbia più piedi quadrati di area (vedi *fig.* 9 *tav.* 2), l' acqua che pioverà in queſto imbuto cadrà nel picciolo vaſe conico *R*, ed il peſo dell' acqua contenuta in queſto vaſe farà abbaſſare la leva oſſia braccio *YY*, e con eſſo l' altro braccio *QQ*, e la matita *H* ſi abbaſſerà quindi ſulla zona *CC* della tavola circolare *AA*; e continuerà a ſtarvi appoggiata fino a tanto che il vaſe conico *C* ſarà ripieno d' acqua. Poichè per quanto picciola ſia la quantità dell' acqua caduta nel vaſetto *R* premendo ſull' eſtremità della leva *YY* è ſufficiente a deprimere la leva ſuddetta.

Ora dunque ſe col ceſſar della pioggia ſi poteſſe ottenere che il vaſetto conico *R* da sè medeſimo ſi votaſſe, la molla ſpirale *RR* toltole il peſo dell' acqua contenuta nel vaſetto *R* rialzerebbe alla primiera altezza l' aſta *MM*, e ſeco la matita *H*. Ora un tale votamento del vaſetto *R* ſi ottiene per mezzo di un picciolo ſifoncino di criſtallo *NV* (vedi la *fig.* 6. *tav.* 1.) compoſto di un tubo *N* che continua capillare fino alla curvatura dove ſi allarga e termina in *V* a foggia di una penna da ſcrivere.

La capillarità di queſto ſifoncino *NV* e la di lui lunghezza devono eſſere tali, che appena l'acqua tocca l' eſtremità della gamba capillare *N* ſpontaneamente venga attratta, e goccia a goccia fluiſca dall' eſtremità più larga *V* del ſifone *NV*: e ſiccome non è così facile il procurarſi un ſifone che ſia di una tale preciſa capillarità che attragga l' acqua ſenza aſpirar l' aria, e che l' acqua attratta fluiſca dall' altro gambo *V* goccia a goccia, perciò ſoglio procurarmi uno di queſti ſifoni che abbia la gamba *P* di un diametro ſimile a quello dei termometri a ſpirito di vino; indi inſinuando in eſſo diverſe ſetole di cignale facilmente ottengo che l' acqua appena toccato che abbia l' eſtremità del tubo capillare *P* ſia attratta, e goccia a goccia fluiſca dall' altro braccio più largo *V*.

L' uffizio di queſto ſifone *NV*, che è la parte più importante del Croniografo e che deve eſſer adattato al vaſe conico *R*, ſi è di vuotare, ceſſata che ſia la pioggia, tutta l' acqua contenuta nel vaſetto conico *R*; ed è fatto con una gamba capillare acciocchè nelle minute pioggie minore ſia la quantità dell' acqua che fluiſce dal ſifone *NV* di quella che viene raccolta nel vaſe *AA* (*fig. 9 tav. 2*) e che cade nel vaſetto *R*. Poichè anche nelle pioggie minutiſſime il vaſetto *R* è ſempre pieno, conſeguentemente la matita *H* ſta appoggiata alla zona *CC* per tutto quel tempo in cui la pioggia continua a cadere, e laſcia ſulla zona ſuddetta una ſtriſcia bianca per tutto quello ſpazio di tempo in cui è piovuto.

Affinchè la matita *H* ſia pronta a ſcrivere ſulla zona *CC* la durata della pioggia, deve eſſere fatta di una argilla bianca teneriſſima, ed io coll' eſperienza di più di un anno ho trovato ottima quella che volgarmente ſi chiama paſtello bianco de' Pittori.

La gamba *V* del ſifone *NV* è fatta della forma poc' anzi deſcritta, poichè ſe anche la gamba *V* aveſſe un diametro eguale a quello della gamba *N*, non ſempre il ſifone *NV*, ceſſata la pioggia, voterebbe il vaſetto *R*. Imperocchè un ſifone capillare aſpira l' acqua quando tutta la cavità del ſifone ſia intieramente libera ; ma ſe una goccia d' acqua all' eſtremità dell' altra gamba che non peſca nel vaſetto *R*, o nella curvatura del ſifone, ſi arreſta, il ſifone più non giuoca. Poichè come è noto dalle ſperienze di *Jurin*, e *Muſſchembroek* un tubo capillare, la di cui eſtremità ſia oſtrutta da una goccia d' acqua o ermeticamente chiuſa, non attrae più l' acqua al diſopra del ſuo livello. Ora ſe ambedue le gambe del ſifone *NV* foſſero di un diametro eguale, frequentemente ed il più delle volte accaderebbe che qualche goccia d' acqua ceſſato il fluſſo del ſifone ſi arreſterebbe o alla eſtremità della gamba più lunga del ſifone, o nella curvatura. Laddove facendo che la gamba più lunga abbia un diametro di tre in quattro linee parigine, e che la di lei eſtremità ſia fatta a foggia di una penna da ſcrivere, giammai l' acqua non può arreſtarſi nè all' eſtremità, nè nella curvatura del ſifone, conſeguentemente l' uffizio del ſifone *NV* non reſta giammai ſoſpeſo, qualunque ſiaſi la circoſtanza della pioggia.

Talvolta accade che l' acqua che piove nel vaſetto *R* porti ſeco qualche grano di ſabbia od altro corpo ſtraniero il quale potrebbe inſinuarſi coll' aſpirazione dell' acqua, introdurſi nel tubo capillare *N*, e rendere inetto l' uſo del ſifone. E certamente di poco ſicuro uſo eſſo ſarebbe ſe non ſi aveſſero varie avvertenze, per cui quand' anche l' acqua che cade nel vaſetto *R* ſia torbida, la di lui funzione non è punto ſoſpeſa. Queſte avvertenze ſono di frammettere al tubo WW (*fig.* 2 *tav.* 2.) che conduce l' acqua che piove nel grande imbuto *AA* ſituato ſul colmo del tetto, un velo che arreſta e trattiene i grani di ſabbia, e di altri corpi ſtranieri che caſualmente cader poteſſero colla pioggia. A queſto oggetto due o tre pollici al diſopra dell' eſtremità di queſto tubo, eſſo è diviſo in *S*, e *T* per potervi frammettere il velo ſuddetto. Inoltre ſebbene la pioggia prima di cadere nel vaſetto conico *R* attraverſi e filtri pel velo or ora deſcritto, ciò non oſtante varie volte a diſpetto di queſto artificio qualche picciolo grano di ſabbia colla pioggia paſſa pel velo frappoſto nel vaſetto *V*. Per impedire che queſti granelli di ſabbia ſieno aſpirati dal tubo capillare, è neceſſario di fare che la lunghezza della gamba capillare *N* del ſifone *NV* ſia tale che applicato il ſifone *NV* al vaſetto *R* l' eſtremità della gamba *N* ſia diſtante due buone linee dal fondo del ſuddetto vaſe *R*. Poichè i grani di ſabbia che dentro vi cadono, eſſendo ſpecificamente più gravi dell' acqua, precipitano nel fondo conico del vaſetto *R*, e non poſſono quindi giammai entrare nel gambo capillare del ſifone *NV*.

Ciò non pertanto accade, e dalla ſperienza di più di un anno che faccio uſo di queſta mia macchina ſono ammaeſtrato, che talvolta, nè di ciò ſaprei aſſegnarne la cagione, ſe è qualche tempo che non ſia piovuto, il ſifone *NV* avvegnachè non contenga alcun corpo ſtraniero fuori delle ſetole di cignale, pure non aſpira l' acqua, inſomma non fa le funzioni per le quali è ſtato immaginato. Forſe cagione di ciò è il diſſeccamento della ſetola inſinuata nel ſifone, la quale nel diſſeccarſi ſi attortiglia più del biſogno, e riſtringe il foro della gamba capillare *N*. Poichè ſe ſi bagni la ſetola, o a quella ſi ſoſtituiſca un' altra eguale, il ſifone *NV* riprende le primiere qualità. Perciò qualora ſia qualche giorno che non ſia piovuto, e che l' aria ſia ſtata molto aſciutta, è neceſſario d' inumidire il ſifone *NV* e la ſetola in eſſo contenuta, e qualche volta ancora ſarà ben fatto di ſoſtituirvi un' altra: così pure è neceſſario di cangiare di tempo in tempo il velo frappoſto alle due parti *SW*, *WT* del tubo W (*fig.* 2 *tav.* 2) e di pulire il fondo del vaſe conico *R* della ſabbia che a diſpetto del velo interpoſto in eſſo cade; altrimenti col tratto del tempo il velo non è più permeabile dall' acqua, ed il gambo capillare del ſifone *NV* s' interriſce.

E' inutile che io avvertiſca che tutti quegli ſpazj che nella zona *CC* della tavola circolare *AA* (*fig.* 1 e 2 della *tav.* 1) ſaranno ſegnati da una ſtriſcia bianca dinoteranno le ore ed i minuti nei quali la pioggia è caduta, e quegli ſpazj, che ſaranno indicati dalla matita *H*, quelle ore e minuti ſegneranno ne' quali non è piovuto. Poichè ſtante la coſtruzione della macchina or ora deſcritta facilmente ſi comprende che fedelmente la matita *H* ſi abbaſſa ſulla zona *CC* al cominciar della pioggia, e continua a ſtar ivi appoggiata fino a tanto che la pioggia continua, ceſſata la quale toſto ſi rialza.

Per regiſtrare i riſultati giornalieri di queſta macchina, oſſia per regiſtrare le oſſervazioni Croniografiche ho immaginato una tavola comodiſſima, mediante la quale in un ſolo colpo d' occhio ſi vede l' andamento della durata della pioggia di meſe in meſe, di giorno in giorno, di ora in ora; ſi conoſce ſubitamente quali ſieno ſtati i giorni e le ore più piovoſe, ſi ſa ſe piove più di giorno che di notte, ſe più avanti il mezzodì che dopo, e mille altri ſimili utiliſſimi riſultati ci forniſce che difficilmente ſi potrebbero altrimenti ricavare. Per dimoſtrare l' uſo di queſta tavola ho creduto di far coſa grata al lettore di preſentargli quella che comprende le oſſervazioni del meſe di Agoſto dell' anno 1781.

Queſta tavola, come ſi vede, è diviſa da linee orizzontali in 33 ſpazj di una grandezza preſſo a poco eguale, ſolo che il primo ſpazio e l' ultimo ſono alquanto più grandi degli altri intermedj. Ciascuno di questi spazj orizzontali è diviso in 26 parti eguali da alcune linee perpendicolari, solo che anche in questo caso la prima divisione e l'ultima sono più grandi delle altre intermedie.

Nel primo spazio orizzontale si scrivono 24 numeri, cioè nella seconda casella si scrive il numero 1, nella terza il 2, e così nelle altre gli altri numeri fino al 24 cioè le 24 ore di un giorno. Nell'ultima casella a mano destra si scrive *somma dei minuti ne' quali è piovuto*, e nella prima casella a mano sinistra si scrive il nome del mese di cui quella tabella comprende le osservazioni. Nelle altre caselle verticali al disotto di questa si scrivono i numeri dall'uno fino al 31 cioè i giorni di un mese, e nell'ultima di queste caselle si scrive *somma dei minuti ne' quali è piovuto in ciascun' ora*.

Posto ciò ogni intervallo orizzontale essendo diviso in 24 parti rappresenterà le singole ore di ciascun giorno, ed ogni spazio orizzontale esprimerà i singoli giorni di ciascun mese. Ora trovando io sulla zona oraria *CC* (*fig.* 2 *tav.* 1) nel giorno 3 del mese d'Agosto nello spazio corrispondente all'ora quinta di quel giorno una striscia bianca corrispondente a 15 minuti, perciò nella quinta casella del giorno 3 scrivo il numero 15; e nella sesta, settima, ottava, e nona casella di quel giorno scrivo i numeri 25, 10, 15, 5 perchè nell'ora sesta di quel giorno non piovette che per soli 25', nella settima piovette per 10' ecc. Nè essendo piovuto in tal giorno dalle 10 fino alle 16, e nell'ora 16 non essendo continuata la pioggia che per soli cinque minuti, perciò nella casella sotto l'ora 16 del giorno 3 scrivo il numero 5, e nell'ultima casella dopo la 24 scrivo il numero 75, perchè appunto in quel giorno la durata della pioggia è stata di soli 75'.

Nel giorno 4 di Agosto nella prima e seconda ora non piovette, perciò non vi è alcun numero nelle prime due caſelle di un tal giorno; nell' ora terza di un tal giorno la pioggia continuò per 30′, e nell' ora quarta per 40′, e non piovette più alcun' altra ora, perciò nella caſella terza, e quarta vi ſono ſcritti i due numeri 30′ e 40′, e le altre caſelle ſono vuote, e ſolo nell' ultima più grande evvi il numero 70′, cioè la ſomma dei minuti ne' quali è piovuto nel giorno 4.

Senza eſtendermi più oltre ad accennare le altre oſſervazioni Croniografiche che contiene queſta tavola, baſta darle un' occhiata per comprenderne l' uſo, poichè toſto ſi vede che in queſto modo ſi regiſtrano brevemente e nitidamente i riſultati giornalieri del Croniografo, e facilmente ſi poſſono quindi oſſervare gli andamenti della durata della pioggia, e determinare quali ſieno i giorni più piovoſi, e quali i meno piovoſi, ſe ſia piovuto più ne' primi dieci giorni del meſe che ne' ſecondi, ſe più ne' ſecondi che negli ultimi, poichè ſi vede toſto che nel meſe di Agoſto è piovuto aſſai più nei ſecondi dieci giorni del meſe, che nei primi e negli ultimi, e più negli ultimi che nei primi, poichè la durata della pioggia nei ſecondi dieci giorni è ſtata di 610′, negli ultimi di 580′, e nei primi di 225′, ed il totale della durata della pioggia è ſtato in quel meſe di 1415′. Tutta altra diviſione e confronto ſi può facilmente fare, e determinare per eſempio in quali punti lunari ſia maggiore la durata della pioggia ecc.

Per ſapere poi quali ore ſieno le più piovoſe, e quali le meno, ſe piova più di giorno che di notte ecc. ſi ſommano tutti i numeri contenuti in ciaſcuna delle caſelle degl' intervalli verticali, e nelle ultime caſelle più grandi a piedi della tavola ſi ſcrivono le ſomme. Ciaſcuno di queſti numeri ſcritti in ciaſcuna di queſte 24 caſelle rappreſenterà la ſomma dei minuti ne' quali è piovuto in ciaſcun' ora. Dando un' occhiata a questi numeri si vede tosto che le ore più piovose nel mese di Agosto sono state la seconda, la prima, la quarta, la terza, e la vigesima; l'ora meno piovosa è stata la diciottesima, poichè in essa non piovette, indi la nona, la diciassettesima, la ventesimaterza, e la ventesimaquarta. Dividendo in tre parti il giorno di 8 in 8 ore si trova che le prime otto ore sono state più piovose delle seconde e queste più delle ultime. In somma questa tavola dà in un momento tutti i confronti e paragoni della durata della pioggia ecc.

DELL' IOMETROGRAFO.

Non basta sapere la durata della pioggia, conviene anche determinare la quantità dell'acqua che piove di ora in ora. Se la pioggia fosse sempre uniforme, tenendo conto della durata si avrebbe anche la di lei quantità; ma rare volte anzi quasi mai succede nel nostro clima almeno che la pioggia sia uniforme massime nella state e nell'autunno, poichè durante qualche rovinoso temporale la furia dell'acqua è tale che la quantità dell'acqua che piove uguaglia, e supera quella che nello spazio d'una settimana o di un mese piove nell'inverno, o nella primavera. Perciò ho pensato di aggiugnere al Croniografo anche l'Iometrografo, una macchina cioè che sulla tavola circolare *AA* (*fig.* 2 *tav.* 1) scrive la precisa quantità dell'acqua che piove d'ora in ora.

Per avere tutta la pioggia, che cade nel grande imbuto *AA* (*fig.* 9 *tav.* 2) senza che se ne faccia la menoma dispersione, è necessario che l'apertura dell'imbuto *AA* ossia il tubetto conico *B*, in cui termina l'imbuto *AA*, entri in un tubo cilindrico *CC* di un diametro per lo meno del doppio maggiore della suddetta apertura *B*; poichè l'acqua che raccoglie l'imbuto *AA* senza strisciare lungo le pareti del tubo *CC* tutta cade nel mezzo

mezzo del tubo ſuddetto, e la prima goccia che cade dal tubetto *B* cade nel ſottopoſto vaſetto *R* (*fig.* 2 *tav.* 1).

Inoltre è neceſſario che queſto imbuto oltre all' eſſere di una notabile grandezza ſia ſituato ſulla parte più elevata del tetto acciocchè tutta la pioggia qualunque direzione eſſa abbia ſia in eſſo raccolta. Nel noſtro clima in cui nell' inverno, e nell' autunno le pioggie ſono talvolta sì minute che ſembrano piuttoſto una folta nebbia che precipiti che una pioggia, pure adoperando un imbuto che abbia nove piedi quadrati di area, la quantità dell' acqua che eſſo raccoglie è tale che le goccie che cadono dall' apertura *B* dell' imbuto *AA* (*fig.* 9 *tav.* 2) ſi ſuccedono con tale e tanta prontezza che non vi è fra l' una e l' altra un quarto di minuto ſecondo, come ho avuto occaſione di oſſervare adoperando un orologio che ſegnava i quarti di ſecondo.

Situato un tale imbuto ſul colmo del tetto, l' acqua che da eſſo fluiſce ſi raccoglie nel vaſe Iometrico *OAAO* rappreſentato nella *fig.* 5 della *tav.* 1. Queſto vaſe *AAOO* è formato di un tubo cilindrico *AA* di criſtallo, chiuſo inferiormente da una laſtra d' ottone *PP* e ſuperiormente da un coperchio parimenti d' ottone *TT*, il quale ha nel mezzo un foro circolare *V* di circa una linea e mezzo di diametro; ed ha lateralmente un tubetto d' ottone *SS*, il quale è fatto a forma di cono in tutta la groſſezza della laſtra d' ottone *TT*, indi s' inalza cilindrico fino al labbro del vaſe *OO*.

Io chiamo queſto tubo *SS* il tubo sfiatatore, perchè appunto ſerve a dar uſcita all' aria contenuta nel vaſe *AA* a miſura che eſſa è ſcacciata dall' acqua che cade pel foro *V*; ed affinchè l' apertura di queſto tubo *SS* non venga chiuſa da qualche goccia d' acqua che vi ſi poteſſe fermare, eſſa è fatta eſpreſſamente di una figura conica.

Nel mezzo di questo vase *AA* evvi un sifone tantalo *DDCCC* di cristallo composto di due bracci di disegual diametro e lunghezza. Il braccio più corto *DD* ha circa quattro linee di diametro, e conserva un tal diametro quasi fino all' origine della curvatura del sifone dove si ristringe e non ha che due linee poco più di diametro: vale a dire lo stesso diametro dell' altro braccio *CCC*. L' estremità di questo braccio *DD* giugne quasi fino a radere il fondo *PP* del vase *AA*, non lo tocca però, poichè è da quellò distante un quarto di linea francese. L' altro braccio *CCC* continua cilindrico per quasi tutta la sua lunghezza, esce dal fondo *PP*, e si scarica nell' imbuto *K* che or ora descriverò.

Al disopra del coperto *TT* evvi stabilmente fissato un altro tubo di cristallo *OO* di un diametro maggiore del vase *AA*. Questo ha lateralmente una finestra *B* per ricevere le due leve ossia aste orizzontali *QQ YY*, e i pezzi che loro appartengono.

La *fig.* 4 della *tav.* 2. rappresenta la sezione ossia spaccato di questo vase Iometrico, e dimostra che il braccio *DD* del sifone *DDCCC* non arriva a toccare il fondo *PP*, che la sommità della curvatura del suddetto sifone entra nella grossezza del coperto *TT*, in cui evvi espressamente una picciola cavità per riceverla, che il tubetto sfiatatore *SS* è aperto a forma di cono nel vase *AA*, e che finalmente nel mezzo del coperchio *TT* evvi un foro circolare *Y*.

Nelle due lastre orizzontali *HH* del telajo *HGHG* (vedi *fig.* 2 *tav.* 1, e *fig.* 2 *tav.* 2) vi sono due finestre quadrangolari *S*, *T*, nelle quali scorre un' asta quadrangolare *LL* simile in tutto all' asta *MM* solo che è alquanto più lunga. Affinchè i movimenti di questa asta sieno liberi e facili, essa pure ha applicato quattro rotelle *P*, *P*, ecc. come l' asta *MM*.

Sul piano dell' estremità superiore di questa asta *LL* è fissata con una vite W un' asta orizzontale *XX*, che da una parte ha attaccato un porta-matita *K*, e dall' altra porta un tubetto d'ottone *F*, dentro il quale si move un'asta cilindrica *I* che termina in un guancialetto di pelle *L*. L'asta *I* è attaccata ad una molla spirale che la sostiene, come si vede nella sezione di questo tubetto rappresentata nella *fig.* 3 della *tav.* 2. In vece della molla spirale si può fissare sul piano dell'asta orizzontale *XX* una molla *OO* (*fig.* 10 *tav.* 2), ed attaccare ad essa l'asta cilindrica *I*, poichè questa molla *OO* fa le veci della molla spirale contenuta nel tubetto *F*.

Oltre a ciò l'asta *LL* ha inferiormente un'asta d'ottone *FF* verso l'estremità un poco piegata acciocchè il mezzo dell'imbuto *KK* ad essa attaccato corrisponda al mezzo della grossezza dell' asta quadrangolare *LL*. Il peso dell'asta *LL* e di tutti i pezzi che le sono annessi è sostenuto da una molla spirale *SS* simile a quella che sostiene l'altra asta *MM*. Anche per questa asta *LL* la forza della molla *SS* deve essere tale che l'estremità della matita *K* sia tenuta distante dalla tavola circolare *AA* circa di due linee parigine.

A misura che l' acqua pel foro *V* cade nel vase *AA* l' aria in esso contenuta esce pel tubo sfiatatore *SS*, e intanto l'acqua va a poco a poco inalzandosi, e giunta che sia rasente la linea punteggiata *XX* (*fig.* 4. *tav.* 2) il sifone tantalo *DDCCC* in pochi secondi vota il vase *AA*, poichè giunta l' acqua alla suddetta linea *XX*, l' altra acqua che sopravviene non trovando altro spazio da occupare fuori che il picciolo spazio cilindrico che forma il foro *V* fatto nel coperchio *TT*, in esso s'inalza, e basta il peso della picciola colonnetta d' acqua contenuta nel foro *V* per obbligare il sifone *DDCCC* a vuotare il vase *AA*; e siccome anche nelle pioggie minutissime un tale spazio *V* appena arrivata che sia l' acqua nel vase *AA* alla linea punteggiata *XX* in meno di un minuto secondo è riempiuto; perciò ſenz' altro ſi può aſſerire che toſto che l' acqua è arrivata alla linea *XX* il ſifone *DDCCC* voterà il vaſe *AA*.

Se la curvatura del ſiſone *DDCC* invece di eſſere incaſſata nella groſſezza del coperchio *TT* toccaſſe ſoltanto il piano inferiore del coperchio *TT* o foſſe da quello diſtante di una qualche linea, accaderebbe che nelle minute pioggie l' acqua che cade nel vaſe *AA* giunta alla ſommità del ſiſone *DDCC* a poco a poco ſtriſciando lungo le pareti intime del ſiſone fluirebbe in goccie continue dal braccio più lungo *CC*, e continuando a piovigginare il vaſe *AA* mai non ſi voterebbe, ed allora ſoltanto ſi voterebbe quando la pioggia foſſe abbondante, poichè l' acqua in un tal caſo s' inalza toſto al diſopra della ſommità della curvatura del ſiſone *DDCC*, e forma al diſopra di eſſa una ſenſibile colonna d' acqua baſtevole a forzare il ſiſone *DDCC* a vuotare il vaſe *AA*.

L' acqua che ſcarica il ſiſone *DDCC* cade nell' imbuto *K*, e col ſuo peſo tira all' ingiù ed abbaſſa l' aſta *LL*. Il guancialetto *L* attaccato all' eſtremità dell' aſta orizzontale *XX* al momento che ſi abbaſſa l' aſta *LL* ermeticamente chiude il foro *V*, e non permette quindi che la pioggia che cade durante il fluſſo del ſiſone *DDCC* entri nel vaſe *AA*, e l' obbliga a raccoglierſi nel vaſe ſuperiore *OO*. Oltre il guancialetto *L* coll' abbaſſamento dell' aſta *LL* ſi abbaſſa anche la matita *K* attaccata all' altra eſtremità dell' aſta orizzontale *XX*, e ſta appoggiata ſulla zona *BB* della tavola circolare *AA* fino a tanto che l' imbuto *K* ſia ripieno d' acqua.

Ceſſato il fluſſo del ſiſone *DDCC* il vaſe conico *K* è toſto votato dal ſiſone *OO*, e la molla ſpirale *SS* non aggravata dal peſo dell' acqua contenuta nel vaſe conico *K* eleva alla primiera altezza l' aſta quadrangolare *LL*, e ſeco la matita *K* ed il turacciolo *L*. L' acqua piovuta nel tempo che il foro *V* è ſtato chiuſo dal turacciolo L, e che si è raccolta nel vase OO, tosto che il turacciolo L s' inalza, e schiude il foro V, entra subito nel vase Iometrico AA ed ivi s' inalza: continuando la pioggia l' acqua si eleva nel vase AA, e finalmente di bel nuovo giugne alla linea punteggiata XX; allora il sifone $DDCC$ novamente vota il vase AA. L' acqua che scarica il sifone $DDCC$ cade nel vase conico K, abbassa l' asta LL, e di bel nuovo il turacciolo L chiude il foro V, e la matita K si appoggia sulla tavola circolare AA. Questo giuoco ogni volta si ripete che il vase AA si vuota, e ad ogni votamento la matita K appoggia sulla tavola circolare AA e la segna lasciando un sensibile punto bianco sulla zona nera BB. Perciò ogni punto bianco che si troverà segnato sulla zona BB indicherà un votamento del vase AA, talchè se per cagion di esempio il vase AA si è votato 10 volte nell' ora 21, nello spazio della zona BB corrispondente ad una tal ora si troveranno segnati dieci visibili punti bianchi.

Nell' Iometrografo che io ho fatto costruire per le mie osservazioni Metereologiche la capacità del vase AA è precisamente eguale ad $\frac{1}{3}$ di linea d' acqua che piova nel vasto imbuto AA, onde se nell' ora 21 si trovano segnati dieci punti, questi esprimeranno 10 terzi di linea ossia tre linee ed un terzo d' acqua piovuta in una tal ora nell' imbuto AA. Potrebbe bastare il portare la precisione dell' osservazione della quantità dell' acqua piovuta ad un terzo di linea, pure adattando a fianco del vase AA una scala NN che divida tutta l' altezza del vase AA in 100 parti eguali, si potrà avere la quantità dell' acqua dentro la precisione di $\frac{1}{300}$ di linea, ciò che è più del bisogno.

Egli è chiaro altresì che quasi nulla è l' evaporazione dell' acqua che si misura, poichè a misura che l' acqua piove essa è misurata da questa macchina, e quella che rimane nel vase *AA* non può svaporare stante che l' acqua contenuta nel vase *AA* non comunica coll' aria esterna se non per l' angustia del foro *V* e dello sfiatatore *SS*; ed è chiaro altresì che la misura della quantità della pioggia che cade di ora in ora deve riuscir esattissima, poichè qualora il sifone *DDCC* abbia le dimensioni sovraindicate immancabilmente arrivata che sia l' acqua alla linea punteggiata *XX* voterà il vase *AA*.

Dissi, purchè il sifone *DDCC* abbia le dimensioni sovraindicate, poichè se invece di fare la gamba più corta *DD* di un diametro di 4 linee si facesse di sole due linee e mezzo, molte volte accaderebbe che il vase Iometrico *AA* si voterebbe prima che l' acqua giunga alla linea *XX*. Poichè essendo il tubo *DD* di un tal diametro, dopo che il sifone *DDCC* ha votato il vase *AA* qualche porzione d' acqua resta tuttavia sospesa nel tubo *DD*; perciò sopravvenendo nuova acqua nel vase *AA*, questa colonnetta d' acqua sospesa nel tubo *DD* a poco a poco s' inalza alla curvatura del sifone *DDCC*, e vi perviene prima che l' acqua giunga alla linea punteggiata *XX*; conseguentemente il vase *AA* si voterà ora ad un' altezza ed ora ad un' altra dell' acqua in esso contenuta secondo che maggiore o minore sarà la lunghezza della colonnetta d' acqua sospesa nel tubo *DD*. Un tale inconveniente si evita facendo il braccio più corto *DD* del sifone *DDCC* di un diametro di 4 linee, poichè in un tal tubo l' acqua non può starvi sospesa per essere la gravità di una comunque picciola colonnetta d' acqua maggiore dell' attrazione del vetro coll' acqua.

L' asta *I* a cui è attaccato il turacciolo *L* appartiene ad una molla spirale acciocchè chiuda esattamente il foro *V* al momento che è cominciato il flusso del sifone *DDCC* senza impedire che la matita *K* appoggi sulla zona *BB* della tavola circolare *AA* anche nel caſo che la ſuddetta matita ſi puntaſſe, poichè il peſo dell' acqua che cade nell' imbuto *AA* ſupera di gran lunga la reſiſtenza della molla ſpirale contenuta nel tubo *I*; ed abbaſſa l' aſta quadrangolare *LL* fino a tanto che il turacciolo *L* chiuda ermeticamente il foro *V*, e che la matita *K* appoggi ſulla zona *BB*.

Ho fatto adattare ſul piano ſuperiore del coperchio *TT* una valvola d' ottone coperta di una pelle. Una molla d' ottone tiene ſollevata queſta valvola dal piano *TT* acciocchè l' acqua poſſa liberamente entrare pel foro *V* nel vaſe *AA*. Ma al momento che il vaſe *AA* è votato dal ſifone *DDCC* la ſuddetta valvola viene abbaſſata dal turacciolo *L*, che appoggiando ſulla valvola la comprime contro il piano ſuperiore del coperchio *TT*. Ceſſato il fluſſo del ſifone, il turacciolo *L* s' inalza coll' aſta quadrangolare *LL*, e la molla attaccata alla valvola inalza la valvola ed apre il foro *V* del coperchio *TT*.

L' artificio di queſta valvola è forſe migliore dell' altro che poc' anzi ho deſcritto, poichè ſe il guancialetto *L* (*fig.* 3 *tav.* 2) non è ben fatto, non ſempre abbaſſandoſi ed appoggiando ſul foro *V* ermeticamente lo chiude; laddove la valvola per eſſere piana, e coperta di una pelle immancabilmente abbaſſandoſi ſul piano del coperto *TT* toglie ogni comunicazione fra il vaſe *AA* ed il pezzo ſuperiore di tubo *OO*.

Una tavola ſimile a quella che ſerve per regiſtrare i riſultati del Croniografo egualmente ſerve pel regiſtro di quelli che dà l' Iometrografo, poichè ogni punto che la matita *K* ſcrive ſulla zona annerita *BB* rappreſentando un terzo di linea di acqua che è piovuto nell' imbuto *AA* (*fig.* 9. *tav.* 2), ſi potrebbe per ogni punto che ſi trova ſegnato in ciaſcun' ora ſcrivere ſulla tavola nella caſella corriſpondente a ciaſcun' ora un terzo di linea. Ma ſiccome molte volte accade che per esempio il vase Iometrico *AA* (*fig.* 2 *tav.* 1) non si vuota in tre o quattro ore se non una sola volta, e che la pioggia nella prima di queste ore non durò che per soli 15 minuti, nella seconda per soli 10', e nella terza 20', perciò in un tal caso io soglio risguardare la pioggia come se fosse stata uniforme in tutto il tempo in cui è piovuto, e riparto il terzo di linea di pioggia caduta nei tempi suddetti proporzionatamente ai numeri sovraindicati 15, 10, e 20. Dividendo quindi il terzo di linea in 100 parti per li primi 15', si scriverà nella casella il n°. 34 cioè $\frac{30}{100}$ di un terzo di una linea, per li 10' si scriverà $\frac{22}{100}$, e per li 20' $\frac{44}{100}$.

La tavola della quantità della pioggia caduta nel mese di Agosto renderà più chiaro gli usi della medesima, e la di lei inspezione dimostrerà meglio come si possa facilmente con essa determinare la quantità dell' acqua che cade di giorno in giorno, di ora in ora ecc. quali sieno state le ore in cui sia caduta una maggiore copia d' acqua, se maggiore sia la quantità dell' acqua che piove di notte che di giorno ecc.

RICERCHE

AGOSTO

Quantità della pioggia

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*Somma dei trecentesimi in ciascun giorno.*	
1																										
2																										
3					300	400	60	100	40							135									1035	
4			60	100																					160	
5		300	135																						435	
6																										
7																										163
8																										
9																										
10																										
11																										
12																										
13																								130	130	
14	300	600	150	60																					1110	
15																				1800	2700	1200	100		5800	
16	9200	640																							9840	15140
17																										
18																										
19														50	60	30	50		20			50			260	
20																			1100	600	100				1800	
21																										
22																										1805
23																										
24																										
25																										
26																										
27																										
28																										
29																										
30																										
31																										
Somma dei trecentesimi in ciascun' Ora.	9500	1540	345	160	300	400	60	100	40					50	60	165	50		1120	2400	2800	1250	100	130	20570	

12605 | 315 | 7850

AGOSTO

Durata della pioggia 1781.

Agosto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*Somma dei minuti in ciascun giorno.*	
1																										
2																										
3					15	25	10	15	5							5									75	
4			30	40																					70	
5		25	50																						75	
6																				5					5	
7																										225
8																										
9																										
10																										
11																										
12																										
13																								15	15	
14	60	60	20	10																					150	
15																				40	60	60	15		175	
16	60	55																							115	610
17																										
18																										
19														60	60	15	10		5			5			155	
20																			45	60	5				110	
21			5	60	60	40	25	55		60	60	60	20	25											470	580
22																										
23																										
24																										
25																										
26																										
27																										
28																										
29																										
30																										
31																										
Somma dei minuti in ciascun' Ora.	120	140	105	110	75	65	35	70	5	60	60	60	20	85	60	20	10		50	105	65	65	15	15	1415	

720 | 370 | 325

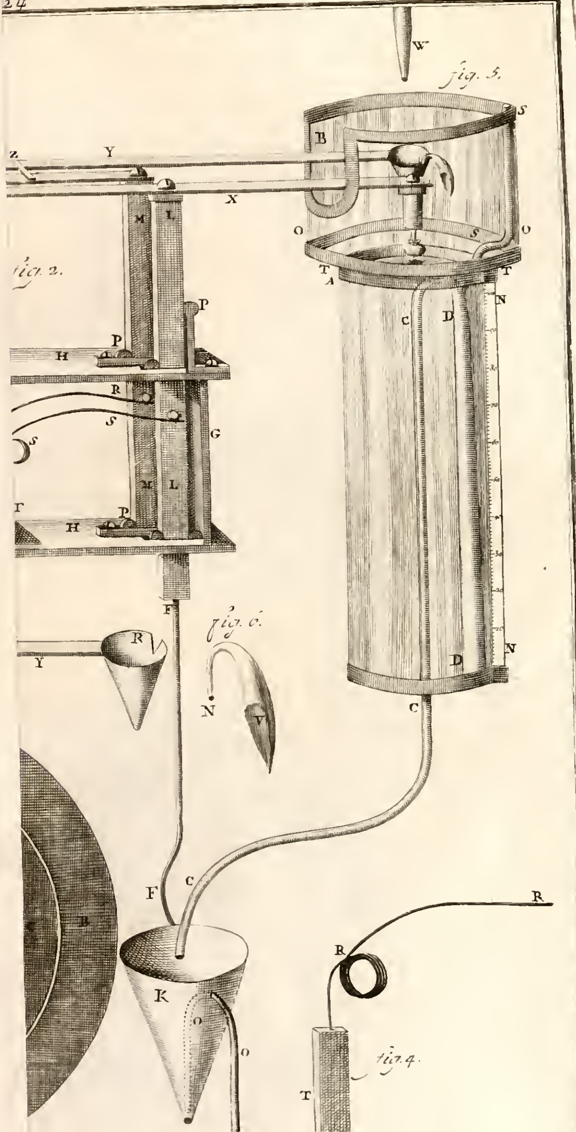


fig. 5.
W
S
B
Y
Z
X
O
S
O
T
A
T
fig. 2.
M
L
P
N
C
D
H
P
R
S
G
M
L
T
P
H
F
fig. 6.
R
Y
N
V
N
D
C
F
C
B
R
R
K
O
O
fig. 4.
T

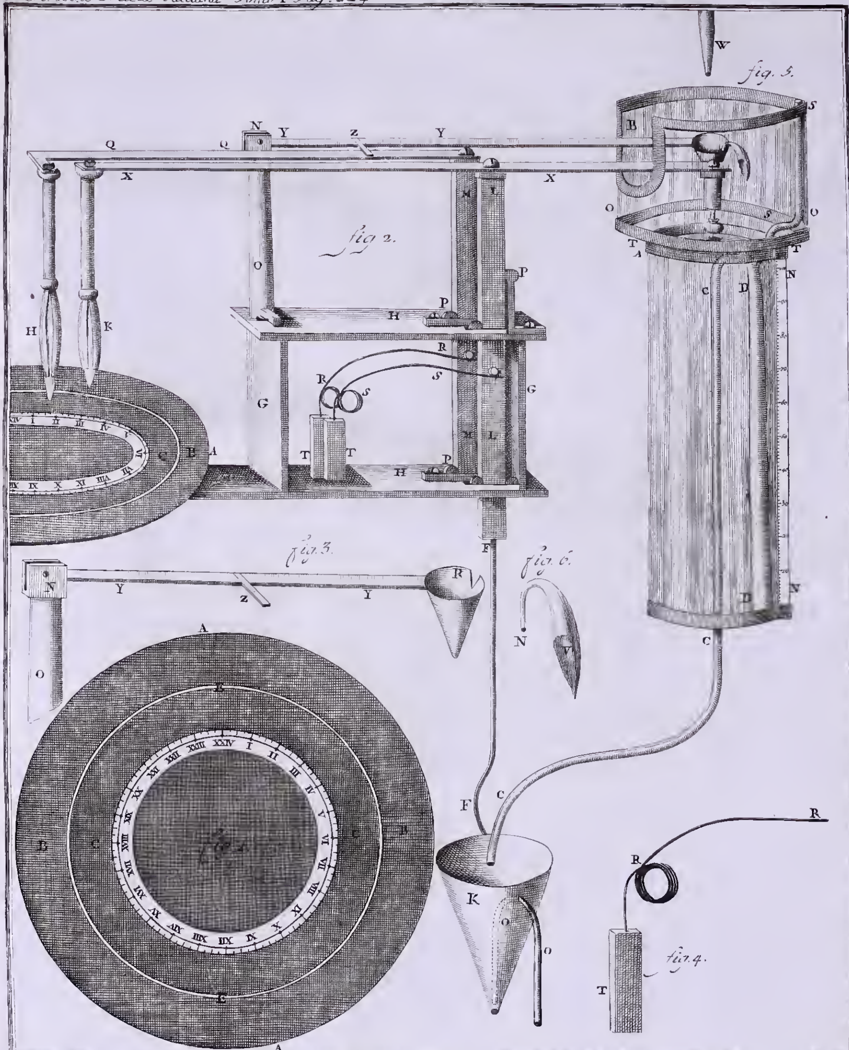
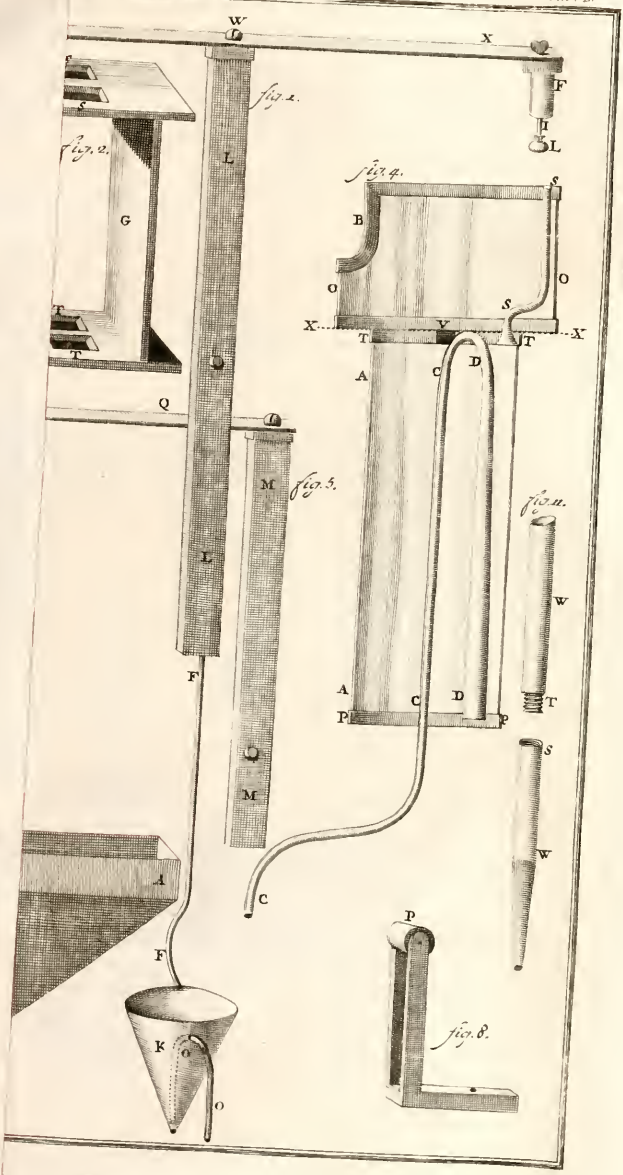


fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 6.

Tav. 2.d



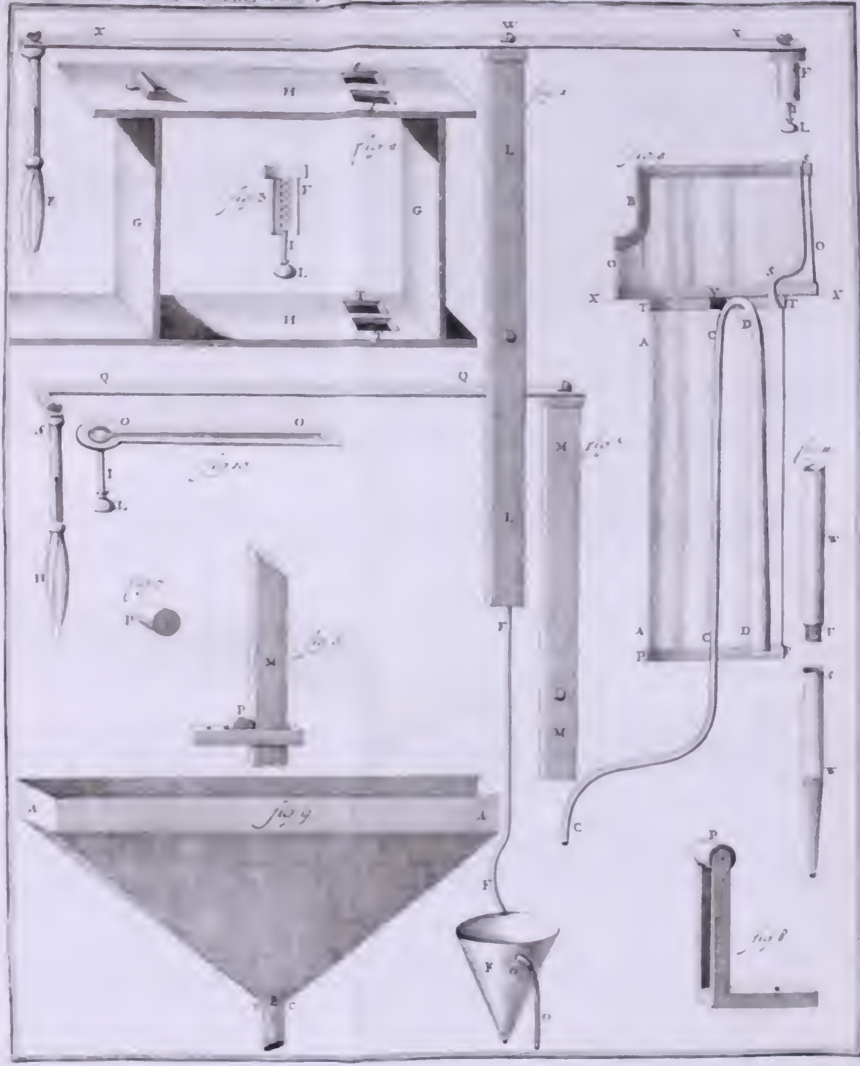


fig. 9

RICERCHE
ED
OSSERVAZIONI SOCIALI

Fatte per perfezionare il Barometro.

Del Sig. PIETRO MOSCATI Regio Professore,

e Sig. Cavaliere MARSILIO LANDRIANI.

NOnostante le immense, e laboriose ricerche del celebre Signor de *Luc*, per determinare le cagioni, per le quali i barometri nello stesso luogo non si tengono ad una eguale altezza, e per trovare i mezzi per conseguire dei barometri, che avessero la qualità di tenersi ad una altezza eguale; pure quando si è voluto accuratamente estimare la rispettiva altezza dei barometri fabbricati in diversi paesi, sebben fatti con tutte le cautele, ed avvertenze prescritte dal Sig. de *Luc*, si è trovato, che il più delle volte questi differivano fra di loro sensibilmente, e che questa loro differenza non solo non era sempre costantemente la medesima; ma perfino quel barometro, che per alcuni mesi si era tenuto costantemente più alto dell' altro, dipoi si teneva costantemente più basso, siccome fu osservato dall' illustre, ed eccellente Fisico il Cav. *Shuckburgh* (*). Per-

(*) Vedi Mem. del Cav. *Shuckburgh*, *Sperienze ed osservazioni fatte in Savoja ecc.* inserita nelle Transazioni Filosofiche vol. 65.

ciò chiunque ha voluto far uſo di queſti iſtromenti per eſperienze delicate ha dovuto ſempre prima d' intraprendere le oſſervazioni determinare, e tener conto delle riſpettive differenze nelle altezze dei barometri adoperati; ed il celebre Sig. *Magellan* (*) per evitare l' incomodo di queſta deduzione ha conſigliato di ſituare il nonio del barometro, che ſi tiene più baſſo, al medeſimo grado marcato dall' altro barometro; e quando ſi trattò di ſperienze di confronto fatte in paeſi lontani ſi è ſempre dovuto partire dalla gratuita ſuppoſizione, che i barometri adoperati aveſſero a tenerſi ad un' altezza eguale, qualora foſſero portati nello ſteſſo luogo. Alcuni altri ancora hanno oſſervato, che il barometro appena poſto in eſperienza non indica ſubito il vero e preciſo peſo dell' aria; ma che per avere la vera e giuſta altezza conviene aſpettare ed oſſervare il barometro, ſecondo alcuni un quarto d' ora, e ſecondo che vogliono altri una buona mezz' ora, conſigliando di più a dare delle picciole ſcoſſe ed urti al barometro per obbligare il mercurio a ſtaccarſi dalle pareti del tubo, che lo attraggono.

Molte altre anomalie ancora ſi ſono oſſervate in queſto genere di ſperienze, per le quali taluno ſcoraggiatoſi ha amato meglio di rigettare queſto iſtromento come inefficace per l' oggetto, a cui volevaſi farlo ſervire, la miſura cioè delle altezze, che d' indagare da quali cagioni mai derivar poteſſero queſte differenze, e quali foſſero i mezzi più opportuni per rimediarvi.

Noi non crediamo di eſſere pienamente riuſciti, meno poi di aver eſaurito queſta materia; ma ci luſinghiamo che ora, che tanti illuſtri Fiſici del primo ordine ſi ſono occupati, e ſi occupano sì utilmente di

(*) Diſſertation ſur les Barometres nouveaux. pag. 105.

ſperienze barometriche, e che non ſolo ſi penſa a far ſervire queſto utile iſtromento alla miſura delle grandi ma anche delle picciole altezze, che le ſperienze, che noi abbiamo fatte, non abbiano ad eſſere riguardate come ſterili e vane ricerche; ma che eſſe poſſano ſicuramente contribuire alla perfezione ed al miglioramento di un così utile iſtromento; eſſendo i riſultati della maggior parte di queſte noſtre ſperienze del tutto nuovi, ed oſiamo dire, di una non mediocre importanza.

Prima d' indicare i diverſi articoli di ricerca, dei quali il Sig. Profeſſor *Moſcati* ed io ci ſiamo occupati, è neceſſario di premettere la deſcrizione dell' apparato da noi uſato per queſte ſperienze, e che noi chiamiamo *Barometro di prova*, appunto per aver con eſſo eſaminato d' onde procedere poteſſero le anomalie oſſervate nelle ſperienze barometriche.

Fig. 1 *KK* è una tavola di legno ſcottata, ed eſſiccata al forno, quindi ancora molto calda unta d' olio, che nuovamente ſi fa aſciugare nel forno, affine di renderla immobile anche ad un forte calore della ſtuffa. Eſſa è lunga pollici 46, larga 5, e groſſa circa 10 linee, ed ha due feſſure oſſia fineſtre bislunghe *SS*, *OO*, ambedue larghe circa 8 linee; ma la *SS* ha circa 17 pollici di lunghezza, mentre l' inferiore *OO* non ne ha che circa quindici. Sopra queſta tavola ſta per mezzo di due collari d' ottone *BB* fermati con viti incaſſata la canna barometrica *ACD*, lunga eſſa pure 46 pollici, e curvata in *C* a forma di ſifone.

La parte rivoltata di queſto tubo è circa di 4 pollici; due pollici formano la curvatura, gli altri due pollici s'inalzano paralleli al tubo più lungo *AC*, ed entrano per circa un mezzo pollice nella coda di un pozzetto di criſtallo *E*, la di cui capacità, e lunghezza ſono arbitrarie. L' eſtremità di queſto tubo rivoltato penetra circa ad un terzo della cavità sferica del pozzetto *E*, il quale ha lateralmente un tubulo, in cui è con mastice adattato un bocchino di ferro, che si chiude colla vite *F* pure di ferro. L' apertura superiore di questo pozzetto (come si vede dalla figura 2, nella quale è disegnato separatamente il pozzetto *E*) è svasata, anzi termina in un vero imbuto, perchè venendo per qualche accidente a smoversi la canna *PP*, che si adatta nel collo di questo imbuto, il mercurio in essa contenuto non abbia a spandersi per terra. Altronde siccome in questo imbuto si sono frequentemente cangiate le canne *PP* nelle sperienze, che faremo per riferire, queste si possono con molta facilità adattare con cera, e la figura d'imbuto è molto opportuna a questo effetto. L'estremità superiore della canna *ACD* riposa in un incavo fatto nella tavola coperto di una doppia pelle; la parte curvata *CD* della suddetta canna non meno, che il pozzetto *E*, e tutta la canna al disotto dell'apertura *SS*, sono incassate per la metà della loro grossezza nella tavola *KK*, e sono con opportuno cemento su quella assicurate.

A fianco della canna *ACD* ad una certa distanza è fissata la scala d'ottone *NN*, sotto alla quale evvi un rocchetto, che s'incastra in una sega dentata, mediante la quale si può con somma facilità inalzare, od abbassare una lunga riga d'ottone *TT*, che scorre sulla lastra piana d'ottone *NN*, su cui sono le divisioni in pollici linee ecc., e che è attaccata con viti alla sottoposta sega dentata. Il lembo di questa riga scorrevole d'ottone *TT* per quella parte, che guarda le divisioni fatte sulla scala d'ottone *NN*, è fatta a smusso, e sullo smusso sono incise le divisioni di due nonj.

Questa riga d' ottone *TT*, che si move colla sega dentata, è lunga circa 30 pollici, perchè avendo alle due sue estremità attaccati due anelli *H*, *L*, per mezzo di due solide code d'ottone si può coll'anello inferiore *L* fcorrere tutta la canna *PP*, e coll' anello fuperiore *H* percorrere la canna barometrica *ACD* da *S* in *S*. La figura 6 rapprefenta in grande l'anello *H* che attaccato per mezzo della coda *M* alla riga *TT* fcorre fulla canna *AC*, e la figura 5 efprime l'altro anello più grande *L* fiffato all'eftremità della riga *TT*.

Il lembo tagliente di ciafcuno di quefti anelli deve effer tale, che precifamente corrifponda allo zero della divifione dei due nonj fatti fullo fmuffo della riga *TT*; di più è neceffario, che quefti anelli fieno più larghi della canna fu cui fcorrono, maffime l'inferiore *L*, il quale ha circa 8 in 9 linee di diametro, acciocchè poffa fcorrere fopra canne di 4 e più linee di diametro adattabili nell'imbuto del pozzetto *E* in vece della canna *PP*.

Per muover poi la fega dentata fottopofta alla fcala *NN* l' albero del rocchetto, che incontra i denti della fega, penetra la groffezza della fcala *NN*, ed è formontato da un bottone incatramato d'ottone *R*, mediante il quale con tutta facilità fi fanno muovere il rocchetto, e la fega fottopofti.

Qualora vogliafi mettere in efperienza quefto apparato conviene fofpenderlo in una pofizione verticale; e fituarlo in modo, che la luce fia al di dietro della tavola. Ciò fatto fe fi voglia per cagion d' efempio determinare di quanto fi accrefca l'altezza barometrica coll' ingrandimento del vuoto, fi fitua l'anello inferiore *L* in modo che lo zero della divifione del fuo nonio efattamente corrifponda al principio della divifione della fcala *NN*; indi fi verfa nella canna *PP* tanto mercurio, quanto bafta perchè il colmo della colonna mercuriale rada precifamente il lembo tagliente dell'anello *L* (*), facendo allora girare il bottone *R*, fi fa

(*) Nella figura 7 è rapprefentato il contatto del lembo dell'anello L colla fommità della curva mercuriale.

inalzare l'anello *H* fino a tanto che egli pure tocchi col ſuo lembo tagliente l' apice della curva ſuperiore della colonna mercuriale inalzata nella canna *ACD*, e ſi nota ſopra una carta la diſtanza che evvi fra l' apice della curva, dirò così, mercuriale del tubo *PP* e quella del tubo *ACD*. Ciò determinato ſi ſitua l'anello *H* inferiore in modo, che lo zero del ſuo nonio coincida col primo pollice della ſcala *NN*. In un tal caſo per diminuire il vuoto nella canna *ACD* di un pollice, conviene verſare nella canna *PP* del mercurio fino che l'apice della curva mercuriale tocchi il lembo dell'anello *L*, indi s' inalza l'anello *H*, e ſi miſura come nella prima ſperienza la diſtanza fra l'apice della curva inferiore e quello della curva ſuperiore: la differenza, che ſi troverà fra la diſtanza avuta nella prima ſperienza, quando ſopra la colonna mercuriale vi erano 16 pollici di vuoto, e quella che ſi è trovata nella ſeconda ſperienza, in cui non vi erano che ſoli 15 pollici di vuoto, ſarà intieramente dovuta al pollice di meno di vuoto, che era ſopra la colonna mercuriale, purchè la canna *ACD* e la canna *PP* ſieno di un diametro uniforme; poichè ſe il loro diametro nelle lunghezze *SS*, *PP* non foſſe uniforme, ſi potrebbe attribuire la maggiore o minore altezza oſſervata alla differenza de' diametri.

Simili avvertenze ſi debbono avere quando ſi fanno delle ſperienze ſulle differenze de' diametri, delle canne della diverſa attrazione, delle differenti ſpecie di vetro e ſimili.

Qualora poi ſi vogliano aver delle canne, che abbiano un diametro eguale, oppure ſi voglia eſplorare, ſe una canna ſia, o no perſettamente cilindrica, rigettati tutti gli altri metodi propoſti ne' diverſi Trattati ſopra i barometri, come inſufficienti ed ineſatti, noi crediamo che il migliore di tutti, ed inſieme il più facile ſia quello che noi abbiamo ſeguito.

La tavola deſcritta *KK* non è tutta di una eguale larghezza in tutta la ſua lunghezza, poichè verſo la metà della ſua altezza vicino alla ſcala *NN* è tagliato un pezzo della medeſima della larghezza circa di $\frac{1}{4}$ di pollice, come ſi vede nella figura 1. Alle due eſtremità di queſto taglio ſono fiſſati orizzontalmente due groſſi anelli d'ottone (*), nella groſſezza di ciaſcuno dei quali vi ſono tre lunghe viti XXX, che ſervono a comprimere, ed a trattenere ſortemente qualunque canna WW, che venga inſerita fra gli anelli ſuddetti. Situata in queſto modo immobilmente, e verticalmente negli anelli, e colle viti la canna WW, ſi verſa in eſſa un poco di mercurio, e coll'anello *V* ſi determina l'elevazione della curva della picciola colonna di mercurio verſata nel tubo WW; indi per avere delle quantità preciſamente eguali in miſura di mercurio ſi prende il tubo a chiave *AB* di criſtallo (vedi *fig.* 3), il quale è ſimile agli altri ſolo che in vece di avere tutta la chiave *C* penetrata da un foro cilindrico, il foro di queſta chiave non penetra che a ſoli due terzi della groſſezza della chiave. Queſto foro conico continua anche nel pezzo quadro, in cui gira la chiave, anzi ſi va notabilmente allargando, formando una ſpecie d'imbuto. La figura 5 rappreſenta lo ſpaccato di queſto tubo a chiave con entro la chiave *C*. *AB* è il pezzo quadro; *CC* la chiave del tubo; *V* il foro conico a forma d'imbuto; ed *I* la continuazione dello ſteſſo foro nella chiave *CC*. *S* poi è un foro cilindrico, che penetra tutta la groſſezza del pezzo quadro *AB*. Voltata pertanto la chiave *C* in modo, che il foro *I* della medeſima formi un ſolo foro col foro *V* del pezzo quadro *AB*, ſi riempie di mercurio tutta la cavità conica *VI*, e facendo girare la chiave *C* ſi taglia, e ſi ſepara dal rimanente il mercurio contenuto nel fo-

---

(*) Si vede uno di queſti anelli diſegnato più in grande nella fig. 8.

ro *I* della chiave *C*, e ſi continua a volgere la chiave ſino a tanto che ſi arriva a fare comunicare il foro *I* della chiave col foro cilindrico *S* del pezzo quadro.

Ora la quantità del mercurio contenuto nella chiave, e tagliato in queſto modo, ſarà ſempre una quantità coſtante in miſura, la quale, ſe verſata in una canna cilindrica W, deve formare in qualunque ſtato della medeſima canna un'altezza coſtante; ma ſe la canna W ſi va allargando all'in ſu, la ſeconda miſura di mercurio in eſſa verſata occuperà un minore ſpazio di quello occupato dalla prima miſura; tutto il contrario ſuccederà, ſe la canna W in vece di allargarſi ſi riſtringa; l'anello *V*, che ſcorre ſulla canna W per mezzo della ſega, e del rocchetto *R*, poichè è attaccato ſolidamente con viti alla riga d'ottone *TT*, miſurerà la lunghezza, che acquiſtano le ſucceſſive miſure eguali di mercurio verſate nella canna W, di cui vogliaſi miſurare il calibro.

Siccome noi abbiamo con queſto mezzo miſurate molte canne, che con qualunque altro conoſciuto metodo ſi ſarebbero giudicate perfettamente cilindriche, ed abbiamo trovato, che pochiſſime reſiſtono a queſta prova; e ſe vene ſono che ſieno tali, non lo ſono che per lo ſpazio di pochi pollici; perciò quando le differenze nel diametro nelle diverſe parti delle canne non ſono grandiſſime, nè eccedono $\frac{1}{12}$ di linea, noi ſogliamo riſguardarle come buone, poichè facendo una tavola eſatta di queſte differenze, quando ſi voglia ſervirſi di una di queſte canne per un barometro, o per qualunque altro iſtromento, che eſigga una canna, che ſia perfettamente cilindrica, tenendo conto, e computando le differenze notate nella tavola, ſi arriva ad aver dei riſultati di una eguale preciſione a quelli, che ſi ſarebbero avuti adoperando una canna perfettamente cilindrica.

Noi

Noi abbiamo diſtinti i diverſi articoli di ricerca, de' quali ci ſiamo occupati, in differenti paragrafi; perchè qualora ſi aveſſe voluto dare un trattato completo delle cagioni, che contribuir poſſano a fare che i barometri non ſi tengano ad un'altezza eguale poſti nel medeſimo luogo, ſaremmo ſtati coſtretti a riportare, e ripetere tutto ciò, che è ſtato detto, e pubblicato dagli altri; onde per amore della brevità abbiamo creduto che foſſe miglior partito quello di dividere gli articoli delle noſtre ſperienze in varj diſtinti paragrafi.

§. I.

Del mercurio, che ſi deve adoperare pei barometri.

Ognuno ſa, che difficilmente ſi può avere del mercurio, che ſia totalmente ſgombro di materie ſtraniere, che ne alterano la di lui purezza, e conſeguentemente la di lui ſpecifica gravità. La maggior parte de' mercurj, che ſono in commercio, contengono del biſmut, qualche volta del piombo, e dello ſtagno. Quello delle miniere d'Idria, ſciolto nell'acido nitroſo, diviene leggiermente lattiginoſo, verſando nella ſoluzione dell'acqua diſtillata, appunto perchè il biſmut ſi ſtacca dall'acido, e ſi precipita ſotto forma di magiſtero. Ciò nonoſtante queſto è un mercurio di ottima qualità.

Colla ſublimazione, e colla diſtillazione difficilmente ſi può togliere al mercurio il metallo ſtraniero in quello diſciolto.

La calce nera qualche volta interſperſa di un pulviſcolo giallo, che ſi forma agitando lungamente il mercurio, oppure triturandolo, non è gia prodotta, come alcuni penſano, dai metalli miſti col mercurio, che nella triturazione ed agitazione ſi ſtaccano; ma queſto pulviſcolo è una ſpecie di precipitato perflogiſticato, oſſia una calce mercuriale combinataſi coll' acido dell' atmosſera flogiſticato. Di fatto queſta calce è fornita anche dai mercurj, che non contengono punto alcun metallo ſtraniero.

Il filtrarlo per un cono ſottiliſſimo di carta, o per una pelle, può in alcuni caſi giovar a ſeparare porzione dei metalli miſti col mercurio, quando queſti ſieno in notabile quantità; ma non mai ſi arriverà con queſto mezzo a depurarlo interamente.

Alcuni pretendono, che ſiccome lo ſpirito di nitro ha una maggiore affinità col biſmut, che col mercurio, ſi poſſa collo ſpirito di nitro ſeparare tutto il biſmut contenuto nel mercurio. Ma chiunque conoſce l' arte degli aſſaggi, facilmente con noi converrà, che ſebbene una porzione del biſmut ſia con queſto mezzo ſeparabile, ve ne rimane tuttavia ſempre una notabile porzione inattaccata dall' acido nitroſo.

Siccome per le ſperienze barometriche è neceſſario di conoſcere la gravità ſpecifica del fluido, che ſi adopera per miſurare il peſo dell' aria, ed altronde per evitare qualunque incomoda computazione eſſendo molto opportuno il trovar un proceſſo, con cui avere un mercurio di una coſtante gravità ſpecifica, ci ſiamo anche di ciò occupati eſaminando con accurate ſperienze la diverſa gravità ſpecifica dei mercurj, ed indagando il proceſſo, che dia coſtantemente un mercurio di una data gravità ſpecifica.

Un cubo, o cilindro d' oro puriſſimo inverniciato di vernice di gomma copal per impedire, che il mercurio non lo attacchi, ſucceſſivamente peſato nei diverſi mercurj potrebbe dare la differenza delle gravità ſpecifiche dei diverſi mercurj tra la bilancia idroſtatica, non può mai indicare le menome differenze nelle gravità ſpecifiche de' corpi. Buffon nei *Supplementi all' Introduzione alla ſtoria naturale de' minerali* ha fatto osservare, che la bilancia idrostatica non può indicare se non quelle differenze nelle gravità specifiche de' corpi, che sono maggiori della viscosità, ed adesione delle molecole del fluido, in cui vengono pesati i corpi. Ma a ciò solo non si ristringe l'imperfezione della bilancia idrostatica, perchè il corpo pesato nel fluido, oltre all'adesione delle parti dello stesso fluido che egli deve superare, vincer deve anche il grado d'attrazione, che lo stesso fluido ha col corpo in esso pesato. Per esempio si supponga per un momento, che i tre metalli l'oro, il rame, ed il cobalto abbiano un'eguale gravità specifica; dico, che la bilancia idrostatica indicherebbe, che questi tre metalli abbiano una diversa gravità specifica, quando nella nostra ipotesi è in tutti loro eguale, poichè l'oro, secondo le belle sperienze del Sig. *Morveau* (*), essendo attratto dal mercurio con una forza eguale a 446, il rame con una forza eguale a 142, ed il cobalto con una forza eguale a 8; il cubo, o cilindro d'oro immerso nel mercurio, e sospeso alla bilancia si moverà in quel fluido metallico con maggior difficoltà del rame, ed il rame sarà smosso più difficilmente del cobalto nella suddetta proporzione di 446, 142, 8; onde per rendere alla bilancia il perduto equilibrio è necessario di metter nella coppa tanto di peso, che non solo equivalga all'eccesso della gravità specifica dell' oro sopra quella del mercurio, ma anche che sia equivalente alla quantità dell'attrazione del mercurio coll'oro. E minor essendo questa attrazione del mercurio col rame, e col cobalto, minor peso sarà necessario di contrapporre nella bilancia per rimettere l'equilibrio (**).

(*) Elements de Chymie de Dyon. Vol. I.

(**) L'esame delle imperfezioni della bilancia Idrostatica essendo estraneo all'oggetto di questa Memoria sarà più opportunamente trattato nelle *Lezioni di Fisica* che farò per pubblicare.

Perlochè noi ci ſiamo appigliati ad altri mezzi più opportuni; e primieramente, ſiccome la gravità ſpecifica de' corpi in parità di volume è come i loro peſi; abbiamo peſato con una bilancia ſenſibile dei volumi eguali di mercurio, ed abbiamo effettivamente trovato, che il mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo, e dal cinabro ſono più peſanti di tutti gli altri mercurj venali, e che anche la gravità ſpecifica di queſti mercurj venali è fra loro molto diverſa.

Il mezzo impiegato per avere delle quantità in volume eguali di mercurio è ſtato un tubo a chiave di criſtallo *AB* (*fig.* 4) che ha una chiave *C*, la quale in vece di eſſere traforata da un foro, che penetri tutta la di lei groſſezza ha un ampio foro *I*, che non penetra, che a $\frac{2}{3}$ circa; ſi riempie dunque di mercurio tutta queſta cavità, ed il foro ſvaſato *V* del pezzo quadro del tubo a chiave *AB*; indi col volgere la chiave *C* ſi ſepara la quantità del mercurio contenuto nel foro *I* della chiave *C*, la quale ſarà ſempre una quantità eguale in volume di mercurio. Si peſino dunque ſei, o ſette di queſti volumi eguali di una data ſpecie di mercurio con una bilancia ſenſibiliſſima, e ſi prenda la media de' loro peſi; queſta media ſarà il peſo ſpecifico di quella ſpecie di mercurio.

Si può anche preſcindere dall' uſo di queſto tubo a chiave *AB* per avere delle quantità eguali in volume di mercurio.

Si prenda un tubo termometrico *AA* (*fig.* 11), che abbia ad una delle eſtremità ſoffiata una boccia *B*, e ſi riempia tutto di mercurio, come ſi aveſſe a fare un termometro; ciò fatto col calore ſi faccia montar il mercurio fino all' apertura del tubo, e ſi adatti al tubo un cono di carta *DD* ripieno di mercurio di modo che venendo il mercurio a raffreddarſi nella boccia il tubo abbia ad eſſere perfettamente pieno di mercurio. Di fatto quando il mercurio nella boccia è ridotto ad una certa temperatura, bisogna immergerlo nel ghiaccio, e colà tenerlo immerso fino a tanto che abbia acquistato la temperatura del ghiaccio: allora si toglie il cono di carta *DD*, e per mezzo del fuoco si vuota il termometro *M* di tutto il mercurio, che egli contiene, il quale deve risguardarsi come una costante quantità. Ma questo metodo è troppo operoso, ed incomodo, ed esigge dell'abilità e destrezza nel caricare di mercurio questo termometro.

L'apparato, col quale abbiamo determinati gli altri elementi della costruzione del barometro, ci ha servito anche a determinare la gravità specifica dei diversi mercurj colla massima precisione, e facilità.

Situato il barometro di prova in una posizione verticale, e versato nella canna inferiore *PP* tanto mercurio fino che arrivi precisamente al decimoquarto pollice, si cerca, e si determina la precisa altezza del mercurio nell'altro braccio più lungo *ACD* del barometro. Ciò fatto si estrae, aprendo la vite *F* del pozzetto *E* (vedi la figura 2 in cui è rappresentata più distintamente questa vite *F*) dal braccio corto tanto mercurio, quanto basti per fare, che la superficie inferiore della colonna mercuriale segni il secondo pollice; indi si rimettano in questa canna in luogo dei dodici pollici di mercurio estratti altri dodici pollici di mercurio revivificato dal sublimato corrosivo, o dal cinabro, di modo che questo mercurio segni il pollice decimoquarto precisamente. Se il mercurio revivificato dal cinabro, o dal sublimato corrosivo è più pesante del mercurio della miniera d'Idria, i dodici pollici di questo mercurio versati nella canna inferiore *PP* dovranno contrabilanciare una colonna di mercurio d'Idria di una lunghezza maggiore di dodici pollici, conseguentemente il mercurio nel tubo lungo barometrico *ACD* dovrà tenersi più elevato, quando vi sono nel tubo corto *PP* dodici pollici di mercurio revivificato, di quando in vece di questi dodici pollici vi sono dodici pollici di mercurio della miniera d'Idria.

Tale è il metodo, che noi abbiamo ad ogni altro preferito in questa ricerca, e che ci ha dimostrato, che le diverse specie di mercurio, che sono in commercio, hanno una diversa gravità specifica; e che non sempre quello, che è revivificato dal cinabro, ha una gravità costante, perchè nei cinabri comuni evvi molte volte del piombo in istato di minio, che si revivifica, ed il mercurio resuscitato dal cinabro ha un certo untume, e forma una certa pellicola, che difficilmente gli si può torre.

Il mercurio revivificato dal sublimato corrosivo per mezzo della calce è quello, che noi abbiamo trovato avere una gravità specifica più costante d'ogni altro mercurio, e perciò deve essere ad ogni altra specie di mercurio preferito per caricare barometri, termometri, di modo che qualora i barometri sieno caricati con questa specie di mercurio non è necessario di tener conto della gravità specifica del mercurio, potendosi assumere per eguale senza alcun pericolo di sbagliare. Anzi noi consigliamo chiunque voglia intraprendere delle osservazioni barometriche di una certa precisione ad adoperare dei barometri caricati di mercurio revivificato dal sublimato corrosivo, perchè oltre all'esser questo mercurio di una gravità specifica costante è molto più fluido, ed è meno attratto dal vetro di qualunque altra specie di mercurio, che noi abbiamo sperimentato. Di fatto il colmo delle colonne di un tal mercurio è qualche poco più elevato, e convesso di quando queste colonne sono di un qualunque altro mercurio, appunto perchè essendo più fluido, vale a dire essendo meno fra loro aderenti le molecole, che lo compongono, le parti centrali della colonna mercuriale risentono meno l'attrazione delle pareti del tubo di vetro, e quella delle molecole di mercurio, che sono a quelle più vicine.

§. II.

Della qualità del vetro più opportuno pel barometro.

Il Sig. de *Luc* (*) alla pag. 161 delle *Ricerche sulle modificazioni dell' atmosfera* riflettendo alla perfezione, a cui sono stati portati i cannocchiali acromatici, dopo che si è pensato alla scelta della qualità del vetro, crede, che qualora si pensasse a trovar qualche specie di vetro omogeneo, si potrebbe forse ottenere che le colonne di mercurio chiuse in questo vetro non obbedissero, che al solo peso dell' aria, ed al calore, oppure che la loro resistenza avesse ad essere costantemente la medesima. Effettivamente deve l' attrazione del vetro col mercurio esser differente secondo la quantità, qualità, e mistura delle sostanze delle quali egli è formato (**). Sarebbero perciò interessanti sperienze quelle, che determinassero il grado d' attrazione dei diversi vetri col mercurio, ed a questo oggetto opportunissimo sarebbe l' apparato del Signor *Morveau*, con cui ha dimostrato l' attrazione del vetro col mercurio. Ma per dimostrare, che questa attrazione del mercurio colle diverse specie di vetro influisce sulle altezze barometriche, s' adattino nel pozzetto del barometro di prova varie canne di una medesima grossezza, lunghezza, e diametro, ma di vetro

---

(*) Recher. sur les Modif. de l' Athmosphere Vol. 2.

(**) Il Sig. *Balbi* supponendo, che la depressione del mercurio ne' tubi capillari dipenda dalla ripulsione, crede che questa forza ripulsiva sia differente nei diversi vetri; ed avendo immerso nel mercurio 4 tubi capillari aventi eguale diametro, e lunghezza, trovò che il mercurio stava inegualmente in essi depresso. Questi quattro tubi erano di vetro di Bologna, di Venezia, di Firenze, e di Roma. Collect. Accad. Vol. X. partie etrang. pag. 785.

diverso, e si osservi a quale altezza nel tubo lungo si tenga elevato il mercurio.

Le sperienze, che noi abbiamo fatto si limitano a tre sole specie di vetro, al vetro che si fabbrica a Venezia ad imitazione del Flint d' Inghilterra, al Flint Inglese, ed al cristallo di Boemia.

Adattato il tubo di Flint Veneto, che aveva 6 pollici di larghezza, e $2\frac{1}{2}$ linee di diametro, il mercurio si tenne a pollici 29. lin. 6. 0039.

In un tubo di Flint Inglese l' altezza fu di 29 pollici linee 6. 0049.

In un tubo di cristallo di Boemia il mercurio si tenne a 29 pollici lin. 6. 0045.

Dunque la qualità del vetro influisce sull' altezza del barometro.

§. III.

Degli effetti dell' ineguaglianza de' diametri de' tubi barometrici nell' altezza della colonna mercuriale.

La prima osservazione, che noi abbiamo intorno a questo argomento, è quella del Sig. Avvocato *la Plantade* riferita dal Sig. *Cassini* nelle *Memorie dell' Accademia Reale delle scienze* per l' anno 1773. Poichè il suddetto Avvocato ha osservato, che il mercurio ne' barometri di diametri fra loro disuguali si tiene ad una altezza ineguale. Più precisa fu l' osservazione, che fecero in seguito i Signori *Cassini*, e *Monnier* (*), i quali avendo portato sul Canigou due barometri di un diametro disuguale, osservarono, che il mercurio si teneva più basso di circa $\frac{2}{3}$ di linea nel barometro più stretto;

(*) Meridienne verifiée p. 224.

ſtretto; oſſervazione, che fu pur fatta da molti altri, e ſegnatamente nel 1750 dal Sig. le *Cat* (*) ed *Hollmann* (**), il primo de' quali parimenti ha trovato, che il mercurio ſi tiene altrettanto più baſſo ne' barometri, quanto queſti ſono di un diametro più riſtretto. Ma ſiccome alcuni credevano, che un tal fenomeno procedeſſe dalla maggiore quantità d' aria contenuta ne' tubi di un diametro anguſto; poichè ſi ſa, che è più difficile il purgar bene d' aria i tubi barometrici, quando ſono di una certa anguſtia, ed il Sig. *Hollmann* pare che non attribuiſca alla grandezza del diametro l' oſſervato fenomeno; l' ingegnoſo Sig. Dott. *Cigna* (***) fece unire aſſieme due tubi di diſugual diametro in modo, che formavano una porta romana, e riempiuti queſti due tubi di mercurio li capovolſe nel mercurio, ed oſſervò, che coſtantemente il mercurio ſi teneva di $\frac{1}{4}$ o di $\frac{1}{3}$ di linea più baſſo nel tubo riſtretto, che nell' altro, che aveva un maggior diametro; poichè in queſto caſo la quantità dell' aria contenuta nella parte vota non poteva aver alcuna parte nel fenomeno, eſſendo lo ſteſſo vuoto comune ad ambedue i tubi barometrici.

Ma il Sig. de *Luc* è andato anche più oltre in queſta ricerca, avendo trovato

1. Che i barometri, che ſono fatti a ſifone ſi tengono ſempre più alti di quelli fatti a recipiente.

2. Che i barometri fatti di un ſemplice ſifone, la di cui parte ſuperiore ſia più riſtretta dell' inferiore, ſi tengono ſempre più baſſi di quelli, che hanno una figura contraria.

(*) Magaſin Francois pour l' année 1750.

(**) Philoſophical Tranſ. an. 1742. Act. Acad. Gotting. Vol. 3. de mercurii in barometris diverſis eodem tempore & eodem loco diverſa altitudine.

(***) Acta Accademiæ Taur, Vol. 1.

3. Che i barometri, alla fommità de' quali havvi una boccia, fi tengono ad una maggiore altezza, quando la parte fuperiore della colonna mercuriale giunge nella cavità della boccia, e questo effetto tanto più fenfibilmente fi manifesta, quanto più il mercurio è inoltrato nella boccia, di modo che allora fi tiene di due linee più alto di quando il barometro ha una boccia abbaffo.

4. Che i barometri, che hanno un tubo di un diametro uniforme, fi tengono ad un' altezza preffo a poco eguale.

5. Che l' ineguaglianza nelle altezze barometriche fcomparifce ne' barometri a recipiente, quando tutto il recipiente fia riempiuto di mercurio, e che il mercurio arrivi nel tubo fuperiore al recipiente.

Perciò il Sig. de *Luc* ha prefcritto, come una condizione necceffaria per la coftruzione dei barometri di adoperare dei tubi di un dato diametro, e di rigettare affolutamente la coftruzione di quei barometri che foffero fatti a recipiente.

Ma ficcome non oftante, che il Sig. *Cardinale* de Luines (*) abbia con efperienfe dimoftrato, che la differenza nelle altezze barometriche è fenfibile anche ne' tubi di un diametro maggiore di tre linee; alcuni però vi fono, che appoggiati alle fperienze di *Hollmann* (**) dalle quali rifulta che la differenza nelle altezze barometriche è foltanto fenfibile ne' tubi di un diametro minore di tre linee, e che quefta differenza non è fenfibile ne' tubi di un diametro maggiore, credono eglino, che nelle fperienze del Sig. *Cardinale* il mercurio fi fia tenuto più alto anche nel tubo di un diametro di tredici linee, perchè foffe meglio purgato d'aria degli al-

(*) Mem. de l'Accademie Royal des Sciences 1768.

(**) Acta Accademiæ Gotting. pag. 227. Vol. 1.

tri tubi di un minor diametro, o anche perchè, supposto che in tutti i Barometri del Sig. *Cardinal* de Luines (*) fosse eguale la quantità dell' aria contenuta nel vuoto barometrico, minore doveva essere la compressione dell' aria contenuta nel tubo grande di quella, che era nel tubo di un minor diametro, mentre, essendo in un maggiore spazio doveva essere più rarefatta. Volendo cavillare sulle sperienze del Sig. *Cardinal* si potrebbe anche opporgli, che la maggiore quantità del vuoto nel Barometro di 13 linee di diametro poteva contribuire benissimo a tener sollevato il mercurio ad una maggiore altezza di quella, a cui si teneva ne' tubi di un minor diametro.

Perciò noi abbiamo creduto, che fosse per essere cosa utile, ed importante per l' ottima costruzione de' barometri il determinare con ben fatte sperienze, se veramente l' altezza del barometro diveniva maggiore coll' aumento del diametro, anche oltre all' assegnato limite delle linee tre.

Le prime sperienze, che noi abbiamo fatto per decidere pienamente questo articolo di controversia, sono state fatte con due tubi dello stesso vetro, uno de' quali aveva tre linee di diametro, e l' altro sei in sette

(*) I risultati delle sperienze del Sig. *Cardinal* de Luines sono

1. Che i barometri caricati con mercurio bollente si tengono più elevati de' barometri caricati a freddo.

2. I barometri bolliti sono quelli, che sono più regolari.

3. Un barometro caricato a mercurio bollente, che abbia due terzi di linea è egualmente esatto, che un barometro, che abbia linee $\frac{1}{2}$ o linee $\frac{2}{3}$, ovvero 2. $\frac{1}{2}$. linee di diametro.

4. Il movimento del mercurio nei tubi capillari è regolare.

5. I barometri caricati di mercurio bollente non ostante, che i tubi sieno stati lavati con ispirito di vino si tengono egualmente alti che i non lavati.

6. Ne' tubi di un grandissimo diametro, come di 13 linee parigine, il mercurio si tiene più alto, che ne' tubi di un diametro ordinario di 2 $\frac{1}{2}$ linee.

Mem. de l' Accademie Royale des Sciences année 1768. pag. 247.

linee, che noi abbiamo ſatto unire aſſieme, e curvare a forma di porta romana, e che avendo riempiuti di mercurio gli abbiamo capovolti in un comune recipiente ripieno di mercurio. Il riſultato di queſta ſperienza, che abbiamo ſatto con altri tubi di un diametro minore di 3 linee, e maggiore di 6, è ſtato, che è vera l' oſſervazione fatta dal Sig. *Cardinal* de Luines, che l' altezza nella colonna del mercurio ſoſpeſa ne' tubi vuoti d' aria è ſenſibilmente maggiore ne' tubi di 6 linee di diametro di quella de' tubi di 3 linee. Di più noi abbiamo oſſervato in queſte ſperienze, che la curva della ſuperficie del mercurio ne' tubi di un diametro maggiore, è ſenſibilmente più conveſſa di quella ſoſpeſa ne' tubi di un diametro minore, la quale è qualche volta quaſi appena ſenſibile ne' tubi di un diametro minore di 2 linee.

L' errore del Sig. *Hollmann*, e degli altri che hanno creduto, che al di là di 3 linee non aveſſe luogo il fenomeno della maggiore altezza, procede forſe dall' avere eglino eſtimata la lunghezza della colonna mercuriale, non dalla conveſſità, oſſia dall' apice della colonna mercuriale, ma bensì dai lembi, l' altezza de' quali alle volte è uguale ne' tubi di diſuguale diametro, non oſtante che diverſa ſia l' elevazione della curva oſſia dell' apice della curva della colona mercuriale.

Ma ciò, che dimoſtra pienamente l' azione, e gli effetti dell' ineguaglianza dei diametri nell' altezza del barometro ſono le ſperienze, che noi abbiamo fatte col noſtro barometro di prova, poichè i riſultati delle ſperienze fatte con eſſo non ſono ſoggette ad alcuna eccezione.

Nel pozzetto di queſto noſtro barometro ſono ſtate da noi ſucceſſivamente adattate cinque canne tutte di un' egual lunghezza, e dello ſteſſo vetro, i diametri delle quali erano linee $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, ed avendo fatto in maniera, che in queſte diverſe canne il mercurio si tenesse costante ad una data altezza abbiamo osservato che nel tubo lungo la colonna si allungava, o si accorciava in ragione della differenza de' diametri ne' tubi inferiori.

Quando si adoperò il tubo, che aveva un diametro di $2 \frac{1}{2}$ linee francesi, il mercurio si tenne costantemente a pollici 29 lin. 6.020.

Col tubo di 3 linee di diametro l' altezza fu pollici 29, lin. 6.010.

Nel tubo di $3 \frac{1}{2}$ linee francesi l' altezza fu pollici 29, lin. 6.002.

Nel tubo di 4 linee l' altezza è stata pollici 29, lin. 6. . . .

Nel tubo di $4 \frac{1}{2}$. linee il mercurio si tenne a 29, pollici, linee 5.070.

Da questa sperienza si raccoglie, che l' effetto dell' ineguaglianza del diametro ne' tubi barometrici ha luogo al di là del preteso limite di tre linee francesi, e che qualora si vogliano fare dei barometri di paragone è neccessario di tener conto del diametro delle canne che si adoperano. Inoltre siccome l' altezza varia col diametro del tubo barometrico, perciò conviene che la canna barometrica non solo ne' barometri a sifone, ma anche ne' barometri Torricelliani sia di un diametro uniforme in tutto lo spazio di variazione.

§. IV.

Se la quantità della superficie libera del vetro al disopra della colonna mercuriale influisca sull' altezza del Barometro.

Quantunque i fenomeni dei tubi capillari, e le loro leggi non sieno trasportabili ai tubi di un maggior diametro; pure per non lasciare alcuno scrupolo abbiamo voluto esperimentare, se la quantità della superficie libera del vetro al disopra della colonna mercuriale influisca sull' altezza del mercurio ne' tubi di un diametro non capillare. Poichè siccome i fluidi ne' tubi capillari dello stesso diametro si tengono elevati ad un' altezza tanto maggiore, quanto è maggiore la lunghezza del tubo al disopra del livello del fluido, in cui sono immersi; così pure si poteva dubitare, che la maggiore elevazione del mercurio osservata crescere coll' aumento del vuoto barometrico procedesse dalla maggiore lunghezza, e quantità del vetro al disopra della collonna mercuriale..

Inoltre se questa maggiore altezza avesse luogo appunto per questa cagione converrebbe, che ne' barometri a sifone, come è quello del Sig. de *Luc*, si tenesse conto della lunghezza del tubo, che sta al disopra della superficie del mercurio contenuto nel tubo inferiore più corto qualora si trattasse di avere dei barometri di paragone. Posto ciò era dunque neccessario di osservare l' altezza barometrica in un tubo a sifone, il di cui braccio inferiore avesse un costante diametro, ma una lungghezza variabile a piacimento,

Anche in queste sperienze abbiamo trovato opportunissimo il nostro barometro di prova, poichè avendo fatte adattare tre canne tutte dello stesso vetro, e diametro di disuguale lunghezza, abbiamo successivamente osservato l' altezza della colonna mercuriale in un tempo, che il peso dell' aria era invariabile, avendo la costante avvertenza in queste sperienze di mettere sempre ad un' altezza eguale la colonna mercuriale nel braccio corto, ed osservando, e determinando sempre l' altezza della colonna mercuriale nel braccio lungo col solito anello, e meccanismo di *Ramsdem*.

Il risultato di tre osservazioni fatte in diversi tempi cogli stessi tubi è stato il seguente, senza la menoma variazione.

Con un tubo di Flint Veneto lungo sei pollici, e di un diametro di lin. 2, e mezzo francesi il mercurio costantemente si tenne a pollici 29, linee 6.0045.

Con un tubo dello stesso vetro, e diametro, ma che aveva 9 $\frac{1}{2}$ pollici francesi di superficie libera al di sopra del mercurio, l'altezza della colonna mercuriale fu pollici 29, linee 7.....

Finalmente con un tubo del suddetto vetro, e diametro, e che aveva 27 pollici di superficie libera il mercurio si tenne a pollici 29, linee 7004.

Non bastandoci queste sperienze, poichè ci pareva molto importante il determinare questo articolo con esperienze decisive, abbiamo voluto osservare l'altezza barometrica adattando nel pozzetto del nostro barometro di prova un tubo lungo 6 in 7 pollici francesi, indi per mezzo di cera abbiamo aggiunto a questo tubo un' altro pezzo di canna dello stesso vetro in modo, che la superficie libera del vetro al di sopra del mercurio era in questa seconda sperienza triplice di quella, che era nella prima sperienza, ed abbiamo di fatti osservato, che l'altezza barometrica variava colla lunghezza della superficie libera del vetro al di sopra del mercurio.

Diverse conseguenze si possono dedurre da queste sperienze.

I. La quantità dell'attrazione del vetro col mercurio crescendo in ragione della quantità della superficie libera del vetro, il mercurio si deve tener più alto in quel tubo, che ha una maggiore lunghezza.

II. Crescendo l'altezza del mercurio nel barometro coll'aumento della superficie libera del vetro al disopra del mercurio, converrà ne' barometri Torricelliani tener conto di questo elemento di variazione, quando si tratti di misurar delle grandi altezze, perchè coll' ingrandimento del vuoto cresce l' azione della superficie libera del vetro.

III. Ne' barometri a sifone, nei quali a misura che cresce nel tubo lungo la superficie libera del vetro; d' altrettanto scema questa superficie libera nel tubo corto, non sarà necessaria questa deduzione, perchè i vantaggi di una parte sono compensati dalle perdite dell' altra parte.

IV. Finalmente nelle nostre sperienze intorno all'influenza del moto sull' altezza barometrica non ha luogo questo elemento di variazione appunto per essere il nostro barometro di prova fatto a sifone.

Ciò che però è d' avvertirsi in quelle sperienze, si è, che l' equazione che si può dedurre dalle nostre sperienze per l' influenza del vuoto, sarebbe soltanto applicabile ai barometri a sifone; poichè nei barometri semplici, e Torricelliani questa equazione deve essere maggiore appunto per l' azione non compensata dalla superficie libera del vetro.

Noi spieghiamo questi fenomeni tanto dei tubi di diverso diametro, come quelli dei tubi di diverse lunghezze, e qualità di vetro subordinandoli al fenomeno generale dell' attrazione del vetro col mercurio; attrazione, che è provata, e dimostrabile da mille sperienze, poichè non solo una lastra piana di cristallo posta in contatto del mercurio aderisce con un notabile grado di forza, ma quando il contatto del vetro col mercurio è più perfetto l' attrazione è sensibilmente maggiore. Prova di ciò eloquente ci forniscono gli stessi barometri, nei quali, qualora per mezzo del fuoco sieno stati ben purgati d' aria, molte volte nel raddrizzarli il mercurio sta attaccato alla sommità del tubo, e la colonna mercuriale vi sta sospesa a 40, ed anche più pollici, talchè per farla discendere, e distaccare è necessario di scuotere vivamente il tubo barometrico, ed anche nello staccarsi di questa colonna mercuriale si osserva, che questa già non si stacca dal tubo alla sommità; ma bensì si spezza al disotto di quella di 4 in 5 pollici, e questa porzione di colonna mercuriale sta tuttavia

tuttavia aderente alla sommità della canna barometrica.

Ma che giova cercare degli esempj se gli stessi tubi capillari, co' quali taluno ha preteso di dimostrare esservi una vera ripulsione fra il vetro ed il mercurio, ci forniscono la prova più convincente?

L'esperienza vien riferita da *Musschembroek* (*). Prendasi un tubo di vetro, che abbia l' estremità inferiore capillarissima, e si versi in questo tubo una certa porzione di mercurio, e si osserverà, che da questa capillare apertura il mercurio non fluirà, e soltanto fluirà, quando la colonna di mercurio versata nel tubo superi l'attrazione del vetro col mercurio (**). Posto dun-

Ii

(*) *Musschembroek Dissertationes Physic. Math. de Tubis Capill. &c.*

(**) Che il mercurio ne' tubi Capillari stia al disotto del suo livello, perchè l' attrazione delle parti, che lo compongono sia maggiore dell'attrazione del vetro col mercurio è un' ipotesi, che è resa molto plausibile dalle sperienze de' Signori *Rondelli*, e *Bonzi*. (*Act. Accad. Bon.*) i quali hanno osservato, che immergendo tre fili metallici nel mercurio, uno d'oro, d'argento l'altro, e di rame il terzo, in modo che una porzione di questi fili fosse immersa, e l'altra fuori del mercurio; osservarono, dissi, che in capo ad un certo tempo il mercurio si elevava al di sopra del suo livello, e penetrava nel filo metallico anche per quella parte, che era fuori del mercurio; di più osservarono, che nell' oro il mercurio era più in alto penetrato, che nell' argento, e meno nel rame. Ora se si rifletta alle belle sperienze del Sig. *Morveau* (*Elements de Chimie Vol.* 1.) dalle quali risulta, che il mercurio ha coll' oro un maggior grado d' attrazione, che coll' argento, e più coll' argento, che col rame, facilmente si comprenderà la ragione, per cui il mercurio si è levato più alto nel filo d'oro, che nel filo d'argento, e più nel filo d' argento, che in quello di rame, di modo che se in vece di tubi di vetro, i quali hanno sempre col mercurio un minor grado d' attrazione di quello, che hanno fra loro le molecole mercuriali, si facessero le sperienze con tubi capillari fatti o di oro, o di argento, l' attrazione delle quali sostanze col mercurio è maggiore di quella, che hanno fra loro le molecole mercuriali, il mercurio in questi tubi capillari metallici non si terrebbe al disotto del suo livello, ma si solleverebbe al di sopra più, o meno secondo la maggiore, o minore affinità del mercurio colla sostanza metallica, di cui è formato il tubo capillare ecc.

que, che il vetro attragga il mercurio s' intende perchè la ſuperficie della colonna mercuriale nei barometri ſia ſempre o conveſſa, o concava, e non mai piana; conveſſa quando il barometro s' inalza, oppure quando il mercurio è verſato in una canna inferiormente chiuſa; concava quando il barometro diſcende, perchè le parti della colonna mercuriale contenuta nel tubo, che ſono più vicine alle pareti attraenti della canna, riſentono aſſai più l' attrazione delle medeſime, che quelle, che ſono più lontane, perciò reſiſtono ad eſſere ſmoſſe con una forza proporzionata al grado d'attrazione, che paſſa fra il vetro ed il mercurio. A miſura che ſi va ſcoſtandoſi dalle pareti del tubo barometrico, l'attrazione divien minore, e perciò le parti della colonna mercuriale a miſura che ſono più vicine all' aſſe della colonna, che è il ſito più lontano dalla ſuperficie attraente, s' inalzano di più, e quelle che ſono nell' aſſe della colonna ſono quelle che ſi tengono più elevate delle altre; talchè la curva formata dalla ſuperficie della colonna mercuriale eſprime la curva dell' attrazione del vetro a diverſe diſtanze. Di fatto ſi oſſerva, che a miſura che le canne barometriche ſono di un maggior diametro, maggiore è anche in eſſe l' elevazione del mercurio, perchè le parti centrali eſſendo più lontane dalle pareti del tubo appena ſentono la loro attrazione, e non obbediſcono, che al ſolo peſo dell' aria. Che ciò ſia, facile è il farne l' eſperienza.

Si prenda un tubo di vetro, che abbia due pollici di diametro, e chiuſa una delle ſue eſtremità, verſata in eſſo una colonna di mercurio, ſi oſſerverà, che la ſuperficie della ſommità di queſta colonna non è totalmente curva, ma piano-curva, eſſendo la parte centrale di queſta ſommità quaſi piana, appunto perchè queſte parti centrali della colonna eſſendo molto diſcoſte dalle pareti della canna, ſono fuori della sfera d'attrazione. Per questa medesima ragione ancora il mercurio nei barometri si tiene altrettanto più elevato, e la curva, che il mercurio forma, è tanto più convessa, quanto più i barometri sono di un diametro maggiore; poichè le parti centrali di una colonna mercuriale non obbediscono che al solo peso dell' aria, nè la loro elevazione è impedita o disturbata dall' attrazione delle pareti del vetro. Così pure il mercurio si tiene più alto nel tubo lungo barometrico *ACD* a misura che è minore il diametro del tubo *PP* adattato nell' imbuto del pozzetto *E*, o maggiore la forza attraente della superficie libera della canna *PP*, ovvero del vetro della medesima canna *PP*.

Da questo medesimo principio d'attrazione del vetro si potrebbe facilmente dedurre la spiegazione di varj fenomeni risguardanti il barometro, che noi per brevità tralasciamo di riferire, invitando soltanto i Fisici, che desiderano di fare delle buone osservazioni barometriche, a preferire il vetro Flint d'Inghilterra a qualunque altra specie di vetro, ed a scegliere il tubo barometrico di un diametro, che sia per lo meno di 3 linee francesi, perchè dalle osservazioni, che abbiamo fatte, le parti di una tale colonna mercuriale, che sono nell' asse della medesima, risentono pochissimo l' attrazione delle pareti della canna, che le contiene; talchè estimando l' altezza della colonna mercuriale dall' apice della curva da quella formata, si è quasi sicuro di avere il vero e preciso peso dell' aria, che comprime il mercurio.

§. V.

Dei tubi barometrici interiormente inverniciati.

Siccome le ſperienze del Sig. *Jurin* (*) hanno dimoſtrato, che la depreſſione del mercurio nei tubi capillari non ha luogo, quando il tubo vitreo ſia coperto da un velo di ſevo, o di cera, poichè in queſti caſi il mercurio anzi che ſtare al diſotto del ſuo livello s'inalza in eſſo ſenſibilmente; ed altronde le ſperienze, che noi abbiamo riferite, apertamente dimoſtrano, che molti fenomeni dei tubi capillari ſono comuni anche ai tubi di un diametro non capillare, abbiamo voluto ſperimentare, ſe il mercurio ne' tubi interiormente inverniciati ſi tenga, o no più elevato, che ne' tubi di un egual diametro non inverniciati.

Per fare l'eſperienza in una maniera deciſiva e convincente abbiamo preſo un tubo di Flint d'Inghilterra lungo circa un piede, di 3 linee di diametro ſenſibilmente per tutta la ſua lunghezza, e l'abbiamo interiormente inverniciato per la lunghezza di circa 6 pollici colla vernice ordinaria di ſpirito di vino (**). Indi lo abbiamo, toſto che fu aſciutto, adattato con cera nel pozzetto *E* per la parte, che non era inverniciata, ed abbiamo verſato in eſſo tanto mercurio, fin-

---

(*) Phil. Tranſ. n. 333.

(**) Siccome taluno può avere la curioſità di rifare queſta ſperienza, e potrebbe forſe trovarſi imbarazzato nel dare la vernice alla ſola metà della canna, crediamo, che ſia neceſſario d'indicare il mezzo da noi adoperato, ed è d' immergere nella vernice la canna *PP*, per quella parte, che ſi vuole inverniciare. Indi adattando l' altra eſtremità nella bocca aſpirare l'aria in eſſa contenuta, ſino che la colonna di vernice arrivi a quella altezza, che ſi vuole coprire di vernice; ritirando la bocca applicata alla canna, la colonna di vernice cade nel vaſe, e tutta la ſuperficie della canna toccata dalla colonna di vernice reſta beniſſimo, ed uniformemente inverniciata ecc.

chè questo arrivasse precisamente all'altezza di 4 pollici; indi coll'anello scorrevole *H* abbiamo al solito determinata la lunghezza della colonna mercuriale elevata nel tubo barometrico *ACD*, che fu da noi trovata essere pollici Inglesi 29, lin. 6. 030. Ciò fatto abbiamo rivoltato il nostro tubo, ed adattatolo con cera nel pozzetto *E*, come nella prima sperienza, ma per la parte inverniciata, e versato in questo tubo precisamente 4 pollici di mercurio, abbiamo trovato, che l'elevazione della colonna mercuriale nel tubo *ACD* era di pollici 29 lin. 6. 045, cioè di 015 di linea più alta di quando il mercurio nel tubo *PP* era nella parte non verniciata.

Non si può attribuire questa maggiore elevazione del mercurio, quando fu messa in esperienza la canna *PP* per la parte inverniciata, all'essere questa canna divenuta di un diametro più ristretto pel velo di vernice, che le è stato applicato, poichè si è dimostrato nel paragrafo dell'effetto dell'ineguaglianza dei diametri nei tubi barometrici, che quando invece di una canna *PP* di $3\frac{1}{2}$ linee di diametro si adattò nel pozzetto un'altra canna di un diametro di sole 3 linee, la differenza nell'altezza del mercurio fu solo di 008, mentre nella nostra sperienza, nella quale certamente il sottile strato di vernice non poteva restringere il diametro della canna di mezza linea, l'altezza osservata del mercurio fu solo di, 0. 015.

§. VI.

Dell'azione dell'elettricità sopra il barometro.

Poichè in questa Memoria si tratta delle cagioni che influiscono sull'altezza del mercurio nel barometro indipendentemente dal peso dell'aria e del calore, non si doveva tralasciare di esaminare se l'elettricità faccia o no variare l'altezza del mercurio nel barometro. Egli è vero che il Sig. *Comus* (*) ed il Sig. *Changeux* (**) hanno su di ciò pubblicate delle osservazioni e sperienze che sembrano sciogliere questo problema, poichè esse tendono a provare che l'elettricità altera sensibilmente l'altezza del mercurio nel tubo barometrico fino a farla divenir maggiore di due linee; ma le sperienze di questi Signori non sono abbastanza circostanziate per meritarsi tutta quella fede che unicamente si accorda a sperienze fatte con tutte le avvertenze possibili, poichè è facile trascurandone alcuna di prendere de' grossi abbagli. Altronde siccome il Signor *Changeux* nella sua Memoria riferisce che non sempre elettrizzando ha luogo la maggiore elevazione della colonna mercuriale nel tubo barometrico, perciò con qualche fondamento si poteva dubitare che l' osservata maggiore altezza non all'elettricità, ma a qualche altra non avvertita circostanza si dovesse ascrivere. Onde non ci parve inutile di consultare l'oracolo della sperienza.

Elettrizzato un barometro con elettricità vitrea sempre e costantemente s' inalza colle seguenti circostanze; cioè s' inalza sempre assai più nella prima volta, che in tutte le altre consecutive, così che se quando si comincia l' esperimento si è ottenuto l'aumento di $\frac{40}{100}$ di linea, le altre volte consecutive non arriva che a $\frac{25}{100}$. Lasciato in quiete il barometro torna a dare elettrizzandolo la prima elevazione più grande. Quando si cava la scintilla si abbassa ad un tratto il mercu-

(*) Journal de physique.
(**) Journal de physique.

rio per quasi tutto lo spazio che si era inalzato; non si ricompone però all'altezza di prima se non dopo alcuni minuti.

Nell' atto che il barometro è elettrizzato sortono dalla colonna mercuriale delle visibili scintillette state già osservate da altri fisici (*); la colonna mercuriale sensibilmente oscilla, non per tremore, nè scosse del barometro, ma per mero effetto dell'elettricità. Questa oscillazione, e coscintillazione accade anche togliendo l' anello che abbraccia il tubo barometrico, così che ad esso ascrivere non si può un tale fenomeno.

Elettrizzato un barometro con elettricità resinosa, per la prima volta alquanto si alza, ma meno che colla elettricità vitrea; oscilla e dà qualche scintilla: elettrizzato in seguito altre volte consecutive non si muove visibilmente o almeno pochissimo. Toltogli l'elettricità, pare che si rialzi, e che si renda più convesso, e non ritorna alla primitiva elevazione se non dopo circa un quarto d'ora.

Ma con tutto ciò che queste sperienze provino che il fluido elettrico influisce sull'altezza barometrica, pure non si può inferire che esso possa avere alcuna parte nelle variazioni del barometro, direttamente almeno, poichè non mi è mai accaduto di osservare alcuna differenza durante un furioso temporale fra due barometri uno de' quali era isolato: dissi direttamente poichè l'elettricità può benissimo render l' aria più o meno grave, avendo avuto più volte occasione di osservare che nell'atto che scoppia qualche fulmine il mercurio sensibilmente oscilla nel tubo barometrico, probabilmente per essere l'aria scossa ed urtata dal fluido elettrico che in grande copia dalle nubi si lancia alla terra.

(*) Vedi *de Luc* Rech. sur les modif. de l'athm. Vol. I.

§. VII.

Se le oscillazioni della colonna mercuriale nei tubi barometrici contribuiscano ad accrescere l'altezza barometrica.

Nei barometri fatti di un tubo capillare che almeno non ecceda una linea di diametro è sensibilissimo il fenomeno della maggiore altezza a cui in essi si tiene sospesa la colonna mercuriale dopo che o collo smovere la tavola su cui è fissato il tubo barometrico, o con qualunque altro artificio si è obbligata la colonna mercuriale a fare delle oscillazioni in un barometro che aveva il diametro di $\frac{8}{10}$ di linea; il mercurio dopo aver oscillato per il tratto di cinque in sei pollici, si tenne più alto di 3 lin. e $\frac{6}{10}$ e non si ricompose all'equilibrio coll'aria se non dopo passate molte ore.

Ne' barometri di un maggior diametro sebbene un tal fenomeno non sia così sensibile come ne' tubi di un diametro ristretto, pure lo è abbastanza, perchè si abbia ad avere de' riguardi nelle osservazioni e sperienze barometriche.

Il Signor de *Luc* per tacer di molti altri ha consigliato di non osservare l'altezza barometrica se non dopo una buona mezz'ora che sia stato situato immobilmente il barometro, ed ha inoltre prescritto di dare al tubo barometrico de' piccioli urti, acciocchè più presto l'altezza della colonna mercuriale si ricomponga all'equilibrio col peso dell'aria.

L'apparato rappresentato nella figura 10 è ottimo per fare queste sperienze, poichè col comprimere il cilindro *SS* ed obbligarlo ad immergere più o meno nel mercurio contenuto nel vaſe *AA*, ſi può con tutta la facilità obbligare la colonna mercuriale a fare delle oſcillazioni più o meno grandi a piacimento ſenza correre alcun pericolo che l' aria s' introduca nel tubo barometrico *DD* ad alterarne il vuoto. Le ſperienze ſono ſtate più volte replicate in diverſe circoſtanze di peſo di aria, di umidità, di temperatura, ed altre ſimili.

I riſultati generali delle ſperienze ſono 1. Che quanto più grande è il numero delle oſcillazioni che ha fatto la colonna mercuriale, e quanto più eſſe ſi ſono eſteſe in uno ſpazio ſenſibile, altrettanto maggiore è l'altezza a cui ſi tiene la colonna mercuriale, e maggior tempo v' impiega a diſcendere all' altezza corriſpondente al real peſo dell' aria.

2. Che nei giorni umidi e caldi minore è queſto eccesſo di altezza nella colonna mercuriale, che nei giorni aſciutti e freddi.

3. Che ne' tubi di un diametro notabile, come di 4 in 5 linee, non ha preſſo che luogo un tal fenomeno, ed all' oppoſto è più ſenſibile ne' tubi a miſura che eſſi ſono più anguſti.

4. Che il mercurio nei tubi di un diametro di tre in quattro linee come ſono i barometri ordinarj dopo 20', o 30' ſi riduce alla vera altezza corriſpondente al peſo dell' aria.

5. Che il dare al tubo barometrico delle picciole ſcoſſe, ſiccome viene conſigliato dal Signor de *Luc*, contribuiſce moltiſſimo a fare che la colonna mercuriale più preſto ſi abbaſſi.

7. Che è un' ottima pratica quella di fare che il mercurio diſcenda lentamente quando ſi mette il barometro in eſperienza, poichè più corte, e minori rieſcono le oſcillazioni della colonna mercuriale, conſeguentemente minore è l' eccesſo dell' altezza della colonna mercuriale.

§. VIII.

Se la quantità più o meno grande del mercurio contenuto nella cisterna ossia pozzetto del barometro semplice Torricelliano influisca sull' altezza barometrica.

Da che colle sperienze riferite nei paragrafi antecedenti si è scoperto che alcune circostanze apparentemente indifferenti possono contribuire a diminuire, od accrescere l' altezza barometrica, ed altronde qualunque ricerca che riguardi la perfezione del barometro non essendo giammai inutile; si è voluto con esperienze determinare: *se la quantità più o meno grande del mercurio contenuto nel pozzetto del barometro semplice Torricelliano influisca sull' altezza barometrica*; poichè essendo la maggior parte dei barometri migliori fatti a pozzetto come sono quelli di *Ramsdem*, *Magellan*, *Brander* ecc. era necessario di stabilire se la capacità di questi pozzetti poteva essere arbitraria, siccome generalmente si riguarda, oppure se nella costruzione dei barometri paragonati esser doveva costante ed eguale.

A questo effetto si è fatto costruire un barometro in cui la massa del mercurio contenuto nel pozzetto fosse variabile senza che variasse la quantità della superficie del mercurio esposto all' aria. La figura 10 rappresenta questo barometro. *AA* è un vase cilindrico di cristallo il quale è superiormente aperto, ed inferiormente termina in un tubo cilindrico *BB* che s' inalza parallelo al vase *AA*. In questo vase *AA* pesca profondamente il tubo barometrico *DD*, sopra il quale evvi una lunga vite WW che si muove nel collare *X* fissato alla tavola del barometro. Questa vite WW ha alla di 'ei estremità inferiore fissato un lungo cilindro di legno *SS* infilato nel tubo barometrico *DD*, di modo che col muovere la vite WW si può inalzare, od abbaſſare a piacimento il cilindro *SS*, e farlo più o meno immergere nel vaſe *AA*.

Ora per fare le ſperienze neceſſarie per determinare ſe la quantità del mercurio contenuto nel vaſe *AA* influiſca ſull' altezza barometrica per mezzo della vite *WW*, s' inalza il cilindro di legno *SS* fino a tanto che appena di una linea circa ſia immerſo nel mercurio contenuto nel vaſe *AA*. Ben s' intende, che a miſura che s' inalza il cilindro *SS* è neceſſario di verſare del mercurio nel vaſe *AA* acciocchè quando il cilindro *SS* è inalzato alla maggiore altezza del mercurio nel vaſe *AA* ſia ad una altezza tale che nel tubo comunicante l' apice *BB* della colonna mercuriale tocchi il tagliente dell' anello *C* fiſſato ſulla canna *BB*. Qualora dunque il mercurio contenuto nel vaſe *AA* ſia a queſta altezza ſi miſura con tutta la preciſione l' elevazione della colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico *DD*; indi per mezzo della vite *WW* ſi abbaſſa il cilindro *SS* finchè ſia immerſo di tre, di cinque, o più linee nel vaſe *AA*; e ſiccome a miſura che il cilindro *SS* s' immerge nel vaſe *AA* eſſo ſcaccia un volume di mercurio eguale alla parte immerſa del ſuddetto cilindro *SS*, perciò facilmente ſi comprende che ſi può avere nel pozzetto *AA* ora una maggiore, ed ora una minore quantità di mercurio a piacimento, ſenza che perciò varj la quantità della ſuperficie del mercurio eſpoſto all' aria, poichè eſſendo cilindrico il vaſe *AA*, ed *SS* cilindro, l' anello mercuriale compreſo fra le pareti del vaſe *AA* ed il cilindro *SS* è coſtantemente eguale.

La grandezza del vaſe *AA*, e del cilindro *SS* nel barometro che ſi è fatto coſtruire è tale che un abbaſſamento di una linea del cilindro *SS* ſcaccia un volume di cinque oncie di mercurio, e potendoſi abbaſſare il ſuddetto cilindro di 15 linee, ſi può avere un pozzetto che abbia una capacità variabile dalle 5 oncie fino alle 65 oncie, ciò che è anche più del bisogno.

Ridotto il cilindro ligneo *SS* ad una tale altezza che esso non era immerso nel mercurio che di una sola linea, e fatto che successivamente immergesse da una linea fino a 15 linee, e presa ad ogni depressione del cilindro *SS* con tutta l' esattezza l' altezza della colonna mercuriale sospesa nel tubo barometrico *DD*, nonostante che la quantità del mercurio contenuto nel vase *AA* variasse dalle cinque oncie fino alle 65, pure non vi fu la menoma differenza. Perciò pare che si possa conchiudere che la quantità del mercurio contenuto nel pozzetto non influisca nè punto, nè poco nell' altezza della colonna mercuriale sospesa nel tubo barometrico, e che è quindi arbitraria la grandezza del pozzetto ne' barometri semplici Torricelliani.

§. IX.

Se la grandezza del vuoto barometrico influisca sull' altezza della colonna mercuriale sospesa nel barometro.

Nella parte superiore del barometro, che comunemente chiamasi il vuoto barometrico, per quanto bene sia purgato di aria il mercurio vi rimane sempre una picciola porzione di aria che è impossibile forse l' espellerla intieramente. Il Sig. de *Luc* disperando di poter rendere gli accurati suoi barometri assolutamente privi di aria si contentò di farli che non ne contenessero che una determinata e costante quantità di cui ne tenne sempre esatto conto nelle sue osservazioni. Altri per render sensibile l' effetto di questa aria contenuta nel vuoto barometrico immaginarono di fare che l' estremità superiore del tubo barometrico terminasse in un' ampia boccia affinchè quel poco d' aria che rimane nel mercurio di cui questo fluido coll' ebullizione non si può totalmente liberare, dilatandosi in uno spazio notabile abbia a comprimer meno la sotto posta colonna mercuriale (*a*). Di fatto se si facciano caricare due barometri che abbiano eguali dimensioni, che sieno egualmente caricati ecc. e solo che uno di essi in luogo di avere la parte superiore di un diametro eguale al rimanente della canna barometrica abbia invece soffiata una boccia di una sensibile capacità, si osserverà che il mercurio si terrà più elevato nel barometro che ha superiormente la suddetta boccia, che nell' altro la di cui canna da un capo all' altro è perfettamente cilindrica.

Ma un tale fenomeno non è stato bene spiegato coll' attribuirlo soltanto alla maggiore rarefazione dell' aria contenuta nello spazio voto, poichè vi ha qualche parte la maggiore superficie vitrea della boccia. Altronde se la maggiore elevazione della colonna mercuriale osservata nel barometro che ha superiormente una boccia procedesse soltanto dalla rarefazione dell' aria, ne verrebbe che in un barometro, la cui canna fosse cilindrica da un capo all' altro ed in cui la grandezza del vuoto fosse variabile, ne verrebbe, dissi, che gli aumenti nell' altezza della colonna mercuriale sarebbero proporzionali esattamente all' accresciuta grandezza dello spazio vuoto, ciò che non corrisponde alle sperienze che sono per riferire.

Situata la tavola *KK* ossia il barometro di prova in un piano esattamente perpendicolare all' orizzonte, ed adattata nell' imbuto del pozzetto *E* una canna *PP* di un diametro eguale in tutta la sua lunghezza, si

(*a*) Quand' anche con tale artificio si arrivasse a rendere insensibile l' effetto dell' aria che vi è sempre nel vuoto barometrico si avrebbe un peggiore inconveniente nell' accresciuta fragilità e peso del barometro, che essendo una macchina destinata al trasporto deve essere quanto è possibile solida, e leggera.

versò in essa tanto mercurio, finchè nel tubo barometrico *ACD* non vi fosse che un vuoto di soli due pollici. Ciò fatto per mezzo degli anelli scorrevoli *H*, *L* si determinò colla maggiore precisione possibile la distanza fra i due colmi delle due colonne di mercurio contenute ne' due tubi *AC*, *PP*, e fu trovata essere poll. 29 lin. 6.04; coll' aprire la vite *F* del pozzetto *E* (vedi la *fig.* 2) si estrasse tanto mercurio dalla canna *PP* fino che l' apice della colonna mercuriale in essa contenuta si è abbassato di due pollici esattamente. Corrispondentemente a questo abbassamento della colonna mercuriale contenuta nella canna *PP* lo spazio vuoto nel tubo *AC* crebbe di due pollici, onde fu in tutto di 4 pollici. Misurata la distanza fra i due colmi delle colonne mercuriali contenute nelle canne *AC*, *PP*, fu trovata essere poll. 29 lin. 6.011. Con 6 pollici di vuoto fu poll. 29 lin. 6.018; con 8 pollici di vuoto fu poll. 2 lin. 6.023; con 10 pollici di vuoto fu poll. 29 lin. 6.032; con 12 poll. di vuoto fu poll. 29 lin. 6.034; con 14 poll. di vuoto fu poll. 29 lin. 6.039.

Non contenti di aver determinato in questo modo che la grandezza del vuoto barometrico influisce sull' altezza barometrica si è voluto ripetere la medesima sperienza in un altro modo, cioè in un ordine contrario facendo che la grandezza del vuoto barometrico andasse di due in due pollici diminuendo, ciò che facilmente si ottenne versando del mercurio nella canna *PP* in modo che in essa il mercurio s' inalzi di due in due pollici; poichè con questo ordine retrogrado si va all' incontro di molti scrupoli e dubbj che potrebbero nascere sulla sperienza fatta nel modo sovraccennato.

Sebbene facendo rimontare in questo modo il mercurio nella canna *AC* i risultati delle osservazioni non corrispondono esattamente a quelli che si sono avuti facendo che il mercurio discenda, e che il vuoto barom etrico vada aumentando; pure sono abbastanza consistenti e sicuri per istabilire con certezza, che coll' aumento del vuoto si accresce l' altezza barometrica, ma non proporzionalmente alla rarefazione dell' aria che può esser nella parte vuota del barometro.

Non è poi meraviglia se i risultati delle sperienze ed osservazioni fatte obbligando il mercurio a rimontare, non corrispondano esattamente a quelli che si hanno facendo che il mercurio discenda, poichè dalle sperienze riferite nel paragrafo VII consta, che facendo fare delle oscillazioni alla colonna mercuriale sospesa nel tubo barometrico, l'altezza della colonna varia per l'attrazione esercitata dalla canna sulla colonna mercuriale; onde per ottenere una piena corrispondenza fra le osservazioni fatte a mercurio ascendente e discendente sarebbe stato necessario di lasciare un intervallo di tempo fra una osservazione e l' altra di una buona mezz' ora acciocchè l' effetto dell' attrazione che necessariamente insorge per lo sfregamento ed oscillazione della colonna mercuriale ascendente o discendente intieramente svanisse. Ma non si è avuto l' agio di fare queste osservazioni con questi necessarj intervalli di tempo; ciò nonostante però le differenze dei risultati delle osservazioni fatte a colonna ascendente o discendente non sono molto notabili, poichè non arrivano ad essere maggiori di 15 centesimi di linea inglese, prendendo la media di 4 serie di osservazioni fatte nello stesso giorno.

Più notabili differenze si osservano ripetendo queste sperienze in diverse circostanze di temperatura, poichè queste differenze talvolta arrivano ad essere maggiori di 30 centesimi di linea, ed anche più, e ciò per la sola ed unica circostanza di una diversa temperatura. Poichè avendo io ripetuta l' esperienza di far discendere di due in due pollici il mercurio nella canna *AC* mentre la temperatura dell' aria della stanza in cui sperimentava era stata espressamente con una stuffa riscaldata di 30° Reaumuriani, per 14 pollici di vuoto l' aumento dell' altezza barometrica fu solo di $\frac{33}{100}$ laddove fatta la medesima sperienza in un giorno in cui la temperatura dell' aria era soltanto gr. 17 Reaumuriani, l' aumento fu notabilmente maggiore cioè di $\frac{59}{100}$ di linea ed anche più.

Sarebbe inutile il riferire minutamente le sperienze fatte per assicurarsi che la grandezza del vuoto barometrico influisce moltissimo sull' altezza della colonna mercuriale; e che l' aumento dell' altezza della colonna mercuriale, posta la stessa quantità di vuoto, varia colla temperatura del mercurio contenuto nel barometro, poichè le sperienze fatte per questo oggetto non sono abbastanza numerose per poter ricavare una formola che con sicureza esprima la quantità dell' influenza del vuoto corrispondente ad ogni grado di temperatura del mercurio, e ad ogni pollice di vuoto.

Nostro progetto però era d' intraprendere questa serie d' osservazioni onde ricavare una tale cognizione, e certamente l' apparato da noi immaginato poteva fornirci questi dati: ma sfortunatamente distratti in molte altre occupazioni avendo dovuto in diversi giorni riprendere queste sperienze che esiggono molta attenzione e diligenza, nel maneggiare frequentemente il barometro di prova, avvenne che qualche bolla d' aria furtivamente entrò nella canna *AC* ad alterare l' esattezza del vuoto barometrico: nè avendo avuto finora comodo di caricare di nuovo e purgar bene d' aria questo barometro siamo costretti a pubblicare queste *Osservazioni*, che avrebbero potuto esser più perfette, qualora avessimo avuto agio di estenderle a tutte quelle combinazioni che esigge la natura di queste ricerche.

L' imperfezione

L'imperfezione però di queste osservazioni non esclude che esse non sieno attendibili per dimostrare che l'ampiezza del vuoto barometrico influisce sull' altezza della colonna mercuriale, e che una tale influenza non è proporzionale alla dilatazione dell' aria che vi è sempre nei barometri per quanto bene purgati eglino sieno, e che essa varia secondo la temperatura del mercurio contenuto nel barometro. Ora posta la verità di queste importanti osservazioni, come mai si potrà lusingarsi di una certa precisione, e corrispondenza nelle osservazioni barometriche se non si è mai tenuto conto dell'ampiezza del vuoto sovrastante alla colonna mercuriale? Se mai si è dubitato che questo effetto fosse maggiore o minore secondo la diversa temperatura del mercurio? eppure frequentemente succede nella misura delle grandi altezze che un barometro a piedi del monte abbia una temperatura notabilmente diversa da quella che ha il barometro alla sommità del monte. Inoltre se l'influenza del vuoto varia colla di lui ampiezza, e se una tale influenza arriva talora ad essere di $\frac{60}{100}$ in $\frac{70}{100}$ di linea, chi non vede la necessità di tener esatto conto di questa influenza nelle misure delle grandi altezze, nelle quali la grandezza del vuoto varia da un pollice fino a 14 e più pollici? Perlochè utilissima cosa sarebbe che taluno intraprendesse una serie di osservazioni ben fatte medianti le quali si determinasse la quantità dell' influenza della grandezza del vuoto barometrico di pollice in pollice dai 15 gradi al disotto del ghiaccio fino a 25° al disopra della congelazione. Frattanto le sperienze che abbiamo riferito in questo paragrafo bastar possono a far sentire l'importanza di una tale ricerca che contribuirebbe certamente a rendere più sicuro l'uso di questo utile istrumento.

Noi crediamo che la quantità dell' influenza del vuoto non sia proporzionale alla dilatazione dell' aria che vi è sempre anche nei barometri meglio purgati d'aria; ma proceda dalla maggiore perfezione del vuoto barometrico, perchè a misura che il vuoto s' ingrandisce esso diviene più perfetto, in quanto che quel poco d'aria che è nella parte vota dilatandosi in un maggiore spazio comprime meno la sottoposta colonna mercuriale. Ora il mercurio essendo meno compresso dall' aria contenuta nello spazio voto si cangia in un vapor elastico che estendendosi nello spazio voto comprime esso pure la sottoposta colonna mercuriale, per modo che non si deve tener conto della sola compressione dell'aria rarefatta che è nella parte vota del barometro, ma anche di questo vapor elastico mercuriale la di cui quantità ed elaterio è più o meno grande secondo che è più o meno grande e conseguentemente perfetto il vuoto barometrico.

Questo vapor elastico mercuriale non è un ente ipotetico. Negli atti dell' Accademia di Parigi (*) è riferita un' osservazione che dimostra che il mercurio quando non è compresso dall' aria ad un discreto grado di calore si cangia in vapori; poichè furono osservate le pareti della parte vuota del barometro stabilmente fissato ad un muro coperte da minutissimi globetti mercuriali; fenomeno che io pure ebbi occasione di ammirare in Toscana. Il Sig. *Roy* inoltre, il Sig. *Ramsdem* ed altri osservarono essi pure questa singolare sublimazione del mercurio; anzi il Sig. *Roy* (**) nella sua bella memoria del barometro riferisce d'aver fatto l' esperienza di riscaldare tutto il mercurio contenuto nella canna barometrica, mentre la parte vota era raf-

(*) Mem. de l' Acad. Roy. des Sciences.
(**) Phil. Transf.

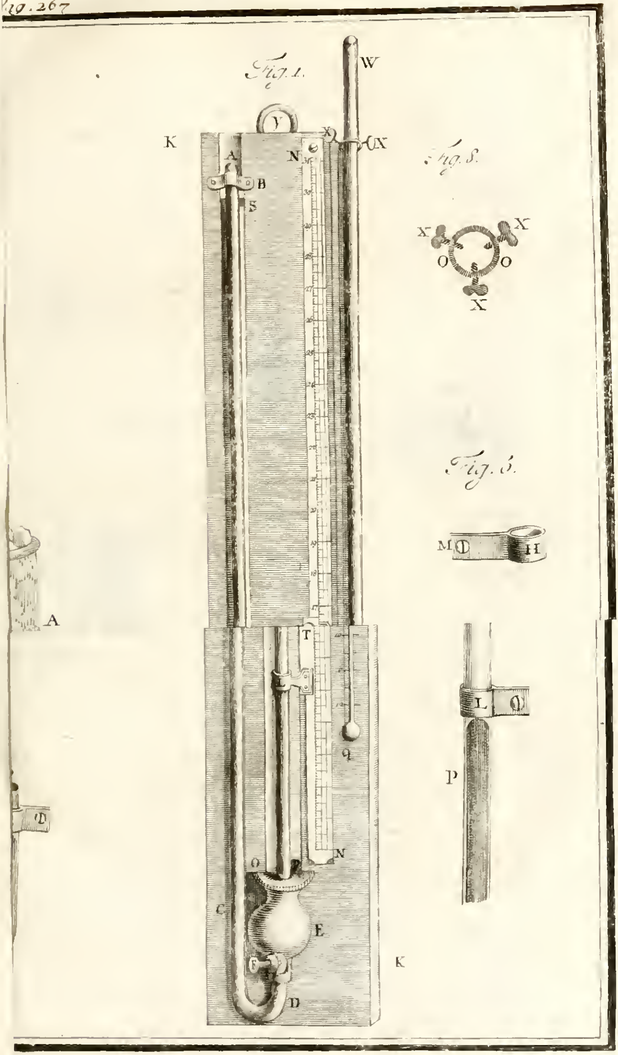


Fig.1.
Fig.8.
Fig.3.
W
Y
K
A
N
B
S
X
O
M
H
L
P
T
Q
C
E
F
D

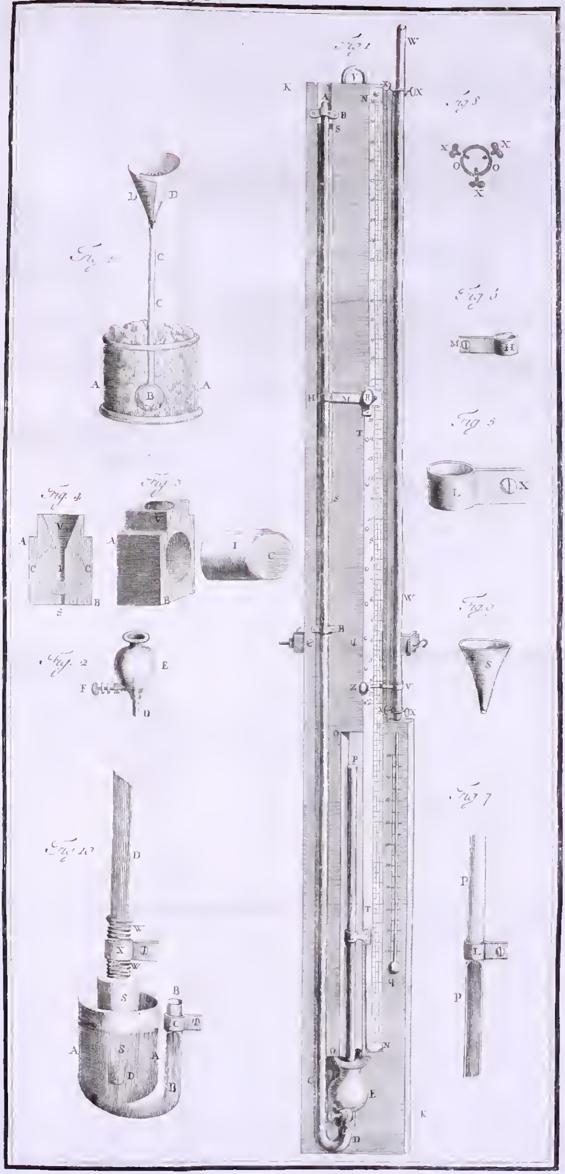


Fig. 4

freddata da un bagno di ghiaccio pesto; ed assicura di aver osservato che il freddo applicato al vuoto barometrico faceva condensare il vapor elastico mercuriale sulle pareti del tubo sotto forma di visibili globetti mercuriali. Tanto è vero che anche il mercurio, toltogli la compressione dell'aria, si volatilizza e si sublima; onde la proprietà osservata da *Nairne* (*) dei fluidi facilmente evaporabili quando non sono compressi dall'aria è comune al mercurio che è un fluido di meno facile evaporazione.

Questa evaporazione del mercurio e trasformazione in un vapore elastico è facilitata e promossa dal calore siccome accade ai liquori evaporabili, onde non è meraviglia se le osservazioni sull'influenza dell'ampiezza del vuoto barometrico non si corrispondono quando sono fatte in temperature diverse, perchè è in ragione della temperatura la quantità di questo vapore elastico mercuriale che si svolge dal mercurio quando non è compresso dal peso dell'aria.

Forse e senza forse la quantità di questo vapore svolgentesi dal mercurio variar potrebbe in ragione dell'ampiezza della superficie del mercurio. Ma non affrettiamoci a pronunziare prima di consultare l'oracolo della sperienza.

(*) Transf. Philos. Journal de Phis. de Rozier.

NUOVA INVESTIGAZIONE

DELLA

SOMMA GENERALE DELLE SERIE.

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona.

Riandando la storia de' progressi umani nelle Scienze, e nell' Arti, ella è cosa ordinaria il vedere alle più luminose scoperte fatta strada da alcune cognizioni per l'innanzi sconnesse e sterili da molti anni, che bastava ravvicinare per discernervi un' intima relazione, e una fecondità del tutto inaspettata. Si potrebbe dire in qualche modo delle produzioni dell' intelletto quello, che suol dirsi dell' operazioni della natura: che non si fanno altramente per salto. E se pur talvolta ci appariscono di getto, ciò addiviene perchè non abbiamo presenti tutte le loro relazioni, nè le fila capitali, alle quali si attengono necessariamente. Il solo ormai familiarissimo Calcolo Differenziale può darcene un esempio segnalato; calcolo, che unito al suo inverso ha fatto mutar faccia alle Scienze Matematiche. Non aveavi, che un breve passo da fare, una non difficile estensione da darsi al modo di calcolare gli elementi delle linee, e dell' aree di *Barrovio*, e di *Wallis* per metterlo in tutta la luce, che ha avuto prima dal sublime ingegno di *Newton*, indi da quello di *Leibnitz*. Così combinando i metodi di *Barrovio*, e di *Wallis* con altri precedenti, e con quello eziandio degl' indivisibili del *Cavalieri*, e questo coll' antico dell' esaustioni, è agevole il conoscere, che tutto va per iscala, e che d'ordinario un' invenzione non è che un anello aggiunto ad una lunga catena di cognizioni anteriori.

Egli è noto da gran tempo, che prendendo la differenza successivamente de' termini consecutivi di una serie, comunque essi procedano con legge o senza legge, la serie delle differenze che ne risulta ammette sempre una somma nella combinazione di alcuni termini della serie primitiva, onde ha tratto l' origine, la quale perciò vien detta comunemente Sommatoria o Sommatrice, relativamente alla serie derivata, di cui ella somministra la somma. Ma se non v' ha serie da cui non possa trarsi la serie delle differenze, non è del pari agevole cosa il ritorno, o il rimontare da una serie alla serie primitiva, da cui può ella essere stata originata. Se si eccettuino le serie a differenze costanti, e qualche caso particolare di serie frazionali, ond' è stata assegnata la somma per questa via dalla mano possente del Sig. *Eulero* nel principio delle sue Instituzioni di Calcolo Differenziale, non abbiamo su di ciò alcun altro importante tentativo, ch' egli stesso chiama difficilissimo. E pure la natura stessa della cosa il vuole, che tra l' una e l' altra v' abbia uno stretto legame, una determinata connessione, per cui, essendo dato il termine generale della serie delle differenze, sia pure in pronto il termine generale della sommatrice.

Bisogna credere, che questi due oggetti non sieno mai stati abbastanza avvicinati. Non avrebbero per certo trascurato i Geometri di profittarne, e ne sarebbe conseguito indubitatamente un passo de' più vantaggiosi nell' ardua Teoria delle serie. Di fatto pigliandola in esame a parte a parte ne' diversi Autori, che vi si sono applicati, vedesi quasi per ogni classe capitale messo in uso e adattato un metodo particolare. Ma quello che ha per obbietto le serie suscettibili di somma algebraica, non si estende su le trascendenti. Un altro le comprende entrambe, ma ſotto un' eſpreſſione composta d' infiniti termini, la quale non s' interrompe e divien finita, che in alcuni caſi ſingolari.

Dove all' oppoſito internandoſi più addentro, che non s' è fatto, nell' indole loro, ſi avrebbero ſvolti ſintomi baſtevoli, onde ſcuoprire le ſerie ſommatrici, alle quali ſi riferiſcono neceſſariamente. V' ha poi più d' un ordine di ſerie totalmente intrattabili, alle quali non può aggiugnere alcuno de' metodi conoſciuti ſinora, in cui pure non è ſommamente oſcura l' intima relazione colle ſommatrici. Queſto è quello, che imprendo a moſtrare in queſta Memoria, ove con andamento facile e ſempre uniforme ſi riducono ad un unico metodo ordini di ſerie, che potevano parere incompatibili ſotto una legge comune per tutti. L' ho fatto rapidamente, eſſendomi propoſto men di fare un Trattato generale ſu queſta immenſa dottrina, che di aprirvi una ſtrada non battuta, in cui per ſin le ſerie, che non ammettono propriamente termine generale, e quelle che non ne ammettono che di traſcendenti, non ricuſano di ſtare a fianco dell' Algebraiche, e delle Geometriche più ſemplici. Non laſcerò di ribatterla, e di far parte a' Geometri de' progreſſi, che mi ſarà permeſſo di farvi; non eſſendo infruttoſo alcun paſſo ulteriore, che poſſa farſi a perfezione ed incremento di una Scienza, ch' è il rifugio ultimo delle matematiche ſublimi, e a cui ſi attiene il calcolo integrale dell' equazioni differenziali finite, come ſi avrà occaſione di vederlo nella ſuſſeguente Memoria.

PRINCIPJ FONDAMENTALI.

§. I.

Qualunque progreſſione regolare creſcente o decreſcente, di qualunque natura ella ſiaſi, può ſempre ridurſi alla forma (K)

A, $A+b$, $A+b+c$, $A+b+c+d$, ecc. . . . . . . (K)
considerando, che una certa grandezza A vada continuamente variando stato, e diventando successivamente $A+b$, $A+b+c$, ecc. e la progressione altro non sia che la disposizione in serie di questi stati successivi della grandezza A.

§. II.

Per conseguenza la differenza di due termini prossimi sarà necessariamente la variazione dall' uno all' altro di questi stati successivi; e la serie delle differenze de' termini (L)

b, c, d, e, ecc. . . . . (L)

sarà la collezione ordinata di tutte queste variazioni consecutive.

§. III.

Se coll' indeterminata x si esprima nella progressione (K) la località in generale di uno stato qualunque della grandezza A, è cosa nota

I. Che vi ha una certa funzione di x, la quale rappresenta generalmente tutti questi stati, o tutti i termini della progressione, e per ciò suol dirsi termine generale della progressione.

II. Che qualunque volta, prendendo la somma successivamente di due termini, di tre, di quattro ecc. della progressione (K), ne risulta un'altra progressione regolare avente per termine generale una nuova funzione di x, questa funzione vien comunemente detta somma generale della progressione (K).

III. E che la somma della progressione (K) all' infinito è quello che questa funzione diventa, allorchè si assegna all' indeterminata x un valore infinito.

§. IV.

Chiamando pertanto T il termine generale della progressione (K), T' quello che diventa T sostituendovi $x+1$ in luogo di x; sarà necessariamente T' il termine generale d' una progressione, che comincia dal secondo termine della progressione (K).

§. V.

E prendendo la differenza T'' delle due funzioni T, T', è manifesto, che T'' è il termine generale della serie (L) delle variazioni (§. II.), o delle differenze successive de' termini della serie primitiva.

§. VI.

Se si sottragga la grandezza variante A dal termine $x.^{mo}$ della progressione primitiva, il residuo non è altro evidentemente, che la serie (L) delle differenze comprese tra il primo termine, e il termine $x.^{mo}$; e però, essendo T il termine generale della serie primitiva, la differenza tra la funzione T e la grandezza variante A sarà necessariamente uguale alla somma di $x-1$ termini della serie delle differenze (L).

§. VII.

Per conseguenza la differenza tra la funzione T' e il primo termine A sarà la somma generale della serie delle differenze (L), di cui T'' è il termine generale. Imperciocchè, essendo la differenza tra la funzione T e il primo termine A uguale alla somma di $x-1$ termini della serie (L) (§. VI.), e T' essendo quello che diventa T ponendovi $x+1$ in luogo di x, egli è manifesto,

manifesto, che la differenza tra T' e il primo termine A sarà uguale alla somma di x termini della serie (L).

Questa nuova funzione pertanto sarà il termine generale d'una serie avente per termini le somme successive de' termini della serie (L), e però ne esprimerà ella la somma generale (§. III).

§. VIII.

Se dunque si faccia, che la serie (L) rappresenti generalmente qualsivoglia progressione regolare, di cui sia T'' il termine generale, per determinarne la somma basterà rimontare dal termine T'' ai termini T, T'.

§. IX.

E poichè $T'' = T' - T$, sarà $T' - T$ ciò che diremo costantemente la forma differenziale di qualunque termine generale T'', siccome quello, che risulta dalla differenza de' termini T', T.

CAPITOLO PRIMO.

DELLE SERIE A DIFFERENZE COSTANTI.

PROBLEMA I.

Sommare le Serie a differenze costanti di qualunque ordine elle sieno.

RISOLUZIONE.

Essendo l' espressione (M)

$$A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2)$$
$$+ (D + 4Dx + 6Dx^2 + 4Dx^3) \ldots + \mathfrak{Q}(x+1)^n$$
$$- \mathfrak{Q}x^n \ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$

il termine generale delle ſerie a differenze coſtanti, in cui x è l' eſponente de' termini; il ſi metta ſotto la forma differenziale (N) (§. IX)

$$A(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)^3+\text{ecc.}\ldots\ldots$$
$$-Ax-Bx^2-Cx^3-\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (N)$$

Si ſoſtituiſca l' unità in luogo di x nel ſecondo membro (O)

$$Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (O)$$

preſo affermativamente, il che ſomminiſtra la quantità (O')

$$A+B+C+D+E+\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (O')$$

e ſi prenda la differenza (P) tra le eſpreſſioni (O), (O')

$$Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ecc.}-A-B-C-D-\text{ecc.}\ldots\ (P).$$

Dopo di che ſi metta in (P) $x+1$ in luogo di x; oppure ſi ſottragga, ch' è lo ſteſſo, la quantità (O') dal primo membro della forma differenziale (N); e ſi avrà l' eſpreſſione (R)

$$Ax+(2Bx+Bx^2)+(3Cx+3Cx^2+Cx^3)$$
$$+\text{ecc.}\ldots\ldots+\mathfrak{Q}(x+1)^n-\mathfrak{Q}\ldots\ldots\ldots\ (R)$$

dico, che (R) è la ſomma generale di tutte le ſerie a differenze coſtanti.

Imperciocchè, ponendo $x+1$ in luogo di x nel ſecondo membro dell' eſpreſſione (N), ne riſulta il primo manifeſtamente. Dunque, eſſendo $Ax+Bx^2+Cx^3$ $+$ecc. il termine generale d' una ſerie, ſarà neceſſariamente $A(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)^3+$ecc. il termine generale d' una ſerie, che comincia dal ſecondo termine di quella (§. IX.). E però la differenza (M) di queſte due funzioni è il termine generale della ſerie delle variazioni (§. V.) o delle differenze ſucceſſive de' termini della ſerie, di cui la funzione (O) è il termine generale; $A+B+C+D+$ecc. è la quantità variante; e l' eſpreſſione (P) è la ſomma generale di $x-1$ termini della ſerie delle differenze (§.VI). Ma l' eſpreſſione (R) è quello che diventa (P) mettendovi $x+1$ in luogo di x. Per conſeguenza ſarà

(R) la somma generale della serie (§. VII), di cui la funzione (M) è il termine generale, cioè di tutte le serie a differenze costanti. Il che ecc.

Esempio.

Sia proposta una serie a differenze costanti, di cui si dimanda la somma, essendo (S) il suo termine generale

$$9 - 2x + 2x^2 \ldots\ldots. (S)$$

Bisogna primieramente trarre dall'espressione (M), che rappresenta i termini di queste serie generalmente, il termine generale delle serie a seconde differenze costanti, cioè

$$A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2).$$

Per ritrovare i valori delle indeterminate A, B, C non s'ha che a formare le tre seguenti equazioni $A + B + C = 9$; $2B + 3C = -2$; $3C = 2$, dalle quali si ricaverà agevolmente $A = \frac{31}{3}$, $B = -2$, $C = \frac{2}{3}$. Dopo di che si traggano dall'espressione generale delle somme (R) i termini comprendenti le stesse indeterminate A, B, C, vale a dire

$$(A + 2B + 3C)x + (B + 3C)x^2 + Cx^3$$

e vi si sostituiscano i valori ritrovati. L'espressione, che ne verrà

$$\frac{25x}{3} + \frac{2x^3}{3}$$

sarà la somma generale ricercata.

Scolio I.

E' superfluo l'aggiugnere altri esempj, essendo per sè chiaro e facile il metodo per tutti gli ordini di questa natura di serie, intorno alle quali è stato scritto da tanti illuſtri uomini e così diffuſamente in altri tempi, come può vederſi nell'Opere di *Faulhaber*, *Ramellini*, *Wallis*, *Mercator*, *Preſtet* ecc. parlando de' più antichi, e in quelle più recenti de' dottiſſimi *Bernoulli*, *Eulero*, *Riccati* ecc. Ne ho trattato io ſteſſo con un mio particolar metodo in un Opuſcolo ſtampato in Verona nel 1767. Ma non laſcia per queſto di raccomandarſi abbaſtanza il metodo preſente per la ſomma facilità e ſemplicità con cui poſſono elle maneggiarſi, e con queſta ſegnata differenza da tutti gli altri, che non è altramente riſtretto a queſta ſola e ſingolar claſſe di ſerie.

SCOLIO II.

Paſſando a trattare ne' ſuſſeguenti Capitoli d' altre nature di progreſſioni, penſo di ommettere le dimoſtrazioni, che richiederebbe ogni particolare propoſizione, per non ripetere ſempre una medeſima coſa, eſſendo tutte appoggiate a' principj fondamentali, che abbiamo premeſſo, e dello ſteſſo preciſo tenore della precedente.

CAPITOLO SECONDO.

DELLE SERIE FRAZIONALI A SOMMA ALGEBRAICA.

LEMMA.

La differenza di due frazioni della forma (*I*) (*II*)

$$\frac{f}{m\,.\,2m\,.\,3m\ldots xm}\;\ldots\ldots(I)\qquad \frac{d}{2m.3m.4m\ldots(x+1)m}\;\ldots(II)$$

ſi riduce alla forma (*III*)

$$\frac{\pm f(x+1)m \mp dm}{m.2m.3m\ldots.(x+1)m} \ldots. (III).$$

Imperciocchè, non differendo i fattori de' denominatori tra di sè fuorchè in questo, che il primo della frazione (II) comincia dal secondo della frazione (I), e l'ultimo di questa riesce il penultimo di quella, è manifesto che tutti i fattori della frazione (I), eccettuato il primo, sono i fattori medesimi della frazione (II), eccettuato l'ultimo. Per conseguenza il numeratore della differenza è patentemente
$\pm f(x+1)m \mp dm$, e il denominatore $m.2m.3m\ldots.(x+1)m$. Dunque ecc.

PROBLEMA II.

Sommare le serie frazionali a fattori semplici consecutivi.

RISOLUZIONE.

Poichè l'espressione (M) è il termine generale di queste serie

$$\frac{\pm\left(A+Bx+Cx^2+\text{ecc}\ldots Qx^n\right)\left(a+b(x+n+1)\right)}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots..\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$$\frac{\mp\left(A+B(x+1)+C(x+1)^2+\text{ecc}\ldots Q(x+1)^n\right)(a+bx)}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots..\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$\ldots\ldots\ldots (M)$

la si ponga sotto forma differenziale, la quale si ridurrà, pel Lemma precedente, alla forma (N)

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2+\text{ecc}\ldots. Qx^n}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\ldots.\left(a+b(x+n)\right)}$$

$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots.+Q(x+1)^n}{\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots.\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$\ldots\ldots\ldots (N)$

Si sostituisca l'unità in luogo di x nel primo membro del binomio (N), con che si avrà l'espressione (C)

$$\frac{A+B+C\ldots\ldots+Q}{(a+b)\,(a+2b)\ldots(a+b(n+1))}\ldots\ldots(C)$$

e presa la differenza tra il secondo membro del binomio (N), e la quantità (C), si avrà l'espressione (Q)

$$\frac{\pm(A+B+C+\text{ecc}\ldots Q)\,(a+b(x+1))\,(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1))}{(a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1))\,((a+b(x+1)\,(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1)))}$$

$$\frac{\mp((a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1)))\,(A+B(x+1)+C(x+1)^2+\ldots Q(x+1)^n)}{(a+b)\,(a+2b)\ldots(a+b(n+1))\,((a+b(x+1)\,(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1)))}$$

$\ldots\ldots\ldots(Q)$

la quale è la somma generale delle serie frazionali a fattori semplici consecutivi, e a somma algebraica.

La Dimos. è la stessa, come nella I. Proposizione.

ESEMPIO.

Sia da sommarsi la serie, di cui $\frac{1+x}{x(1+x)(2+x)}$ è il termine generale.

Poichè sono tre i fattori al denominatore, si faccia $n=1$ nel termine generale (M); ed essendo decrescente la serie, si avrà generalmente

$$\frac{(A+Bx)\,(a+b(x+2))-(A+B(x+1))\,(a+bx)}{(a+bx)\,(a+b(x+1))\,(a+b(x+2))}$$

$$=\frac{2Ab-aB+bBx}{(a+bx)\,(a+b(x+1))\,(a+b(x+2))}$$

Paragonando quest'espressione generale col termine generale proposto si ricaverà pel valore delle indeterminate $a=0$, $b=1$, $A=\frac{1}{2}$, $B=1$. Si tragga ora dalla somma generale (Q), colla sostituzione di $n = 1$, l'espressione generale seguente

$$\frac{(A+B)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right) - \left(A+B(x+1)\right)(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)}$$

e vi si sostituiscano i valori ritrovati. La frazione risultante $\frac{x(3x+5)}{4(1+x)(2+x)}$ sarà la somma generale ricercata, e posto $x = \infty$, sarà $\frac{3}{4}$ la somma della serie all'infinito.

PROBLEMA III.

Sommare le serie frazionali a fattori composti consecutivi.

Risoluzione.

Essendo l'espressione (M)

$$\pm \frac{(A+Bx+Cx^2 \ldots + Qx^n)\left(M+N(x+1) \ldots + S(x+1)^{n+1}\right)}{(M+Nx+Ox^2 \ldots + Sx^{n+1})\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2 \ldots + S(x+1)^{n+1}\right)}$$

$$\mp \frac{\left(A+B(x+1) \ldots + Q(x+1)^n\right)(M+Nx \ldots + Sx^{n+1})}{(M+Nx+Ox^2 \ldots + Sx^{n+1})\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2 \ldots + S(x+1)^{n+1}\right)}$$

.... (M)

il termine generale di queste serie, il si metta sotto la forma differenziale (N)

$$\pm \frac{A+Bx+Cx^2 \ldots + Qx^n}{M+Nx+Ox^2 \ldots + Sx^{n+1}}$$

$$\mp \frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2 \ldots + Q(x+1)^n}{M+N(x+1)+O(x+1)^2 \ldots + S(x+1)^{n+1}} \ldots\ldots (N)$$

Posto ciò, si sostituisca l'unità in luogo di x nel primo membro dell'espressione (N); dal che risulterà la quantità (C);

$$\frac{A+B+C+D\ldots\ldots+Q}{M+N+O\ldots\ldots+S}\ldots\ldots(C)$$

e si prenda la differenza tra la quantità (C) e il secondo membro della forma (N). L'espressione risultante (Q).

$$\pm\frac{\left(A+B+C\ldots\ldots+Q\right)\left(M+N(x+1)\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}{\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}$$

$$\mp\frac{\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots\ldots+Q(x+1)^n\right)}{\left(M+N+O\ldots\ldots+S\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(Q)$$

sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

ESEMPIO.

Trovare la somma della serie, di cui $\frac{1+3x+x^2}{x^2(1+x)^2}$ è il termine generale.

Poichè i fattori del denominatore non eccedono il secondo grado, è agevole il vedere, che fa d'uopo supporre $n=1$, perchè i fattori del denominatore nell'espressione generale (M) non oltrepassino questo grado. E però la frazione, che rappresenta il termine generale di tali serie, sarà necessariamente di questa forma

$$\frac{AN-BM+AO+(2AO+BO)x+BOx^2}{\left(M+Nx+Ox^2\right)\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\right)}$$

Ora, paragonando questa espressione col termine generale dato, si trova facilmente essere $M=N=0$, $A=B=O=1$. Sostituendo pertanto questi valori nell'espressione (Q), ne risulta la forma

$$\frac{3x+2x^2}{(1+x)^2}$$

$$\frac{3x + 2x^2}{(1+x)^2}$$

che ſarà la ſomma generale ricercata.

SCOLIO.

Eſaminando il termine generale *(M)* di queſta ſorta di ſerie nella Propoſizione precedente, ſi riconoſce agevolmente, che il numero de' fattori ſemplici nel denominatore eccede di due unità il numero di ſimili fattori nel numeratore. Queſta condizione è neceſſaria non meno per queſte ſerie, che per quelle a fattori ſemplici conſecutivi, perchè poſſano eſſere ſuſcettibili di ſomma algebraica. Ma havvi ancora un' altra condizione da ſoddisfare nelle ſerie a fattori compoſti per riſpetto a' coefficienti. Ne' termini generali delle ſerie della II. Propoſizione il numero $n+1$ delle indeterminate, che debbono definirſi, non eccede il numero de' termini che poſſono aver luogo ne' numeratori de' termini generali propoſti; ma non è così nelle ſerie a fattori compoſti. Imperciocchè il numero delle indeterminate eſſendo parimente $n+1$, i coefficienti che poſſono aver luogo ne' numeratori de' termini generali ne' caſi particolari ſono al numero di $2n+1$. In conſeguenza è neceſſario, che queſti coefficienti abbiano tra di sè una determinata relazione, affinchè le equazioni poſte poſſano tutte aver luogo ad un tempo. E appunto, oltre all' enunciata comune colle ſerie a fattori ſemplici, v' è queſta condizione di più da adempiere per le ſerie a fattori compoſti, perchè ammettano ſomma algebraica; il che s' accorda puntualmente con quello che da altri ancora è ſtato avvertito.

CAPITOLO TERZO.

DELLE SERIE RICORRENTI.

PROBLEMA IV.

Trovare la somma generale delle progressioni geometriche.

Risoluzione.

Poichè l'espressione

$$(\pm A \mp AK^{b})\, K^{a+bx} \ldots\ldots\ (M)$$

è il termine generale delle progressioni geometriche, il si metta sotto la forma differenziale (N)

$$\pm AK^{a+bx} \mp AK^{a+b(x+1)} \ldots\ldots\ldots (N).$$

Si sostituisca poi nel primo membro AK^{a+bx} l'unità in luogo di x, e si avrà l'espressione AK^{a+b}. Se pertanto si prenda la differenza tra questa quantità e il secondo membro della forma differenziale $AK^{a+b(x+1)}$, l'espressione risultante $(\mathfrak{Q})$

$$AK^{a+b}\,(\pm 1 \mp K^{bx}) \ldots\ldots\ (\mathfrak{Q})$$

sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA V.

Sommare le serie composte di progressioni algebraiche, e geometriche.

Risoluzione.

Essendo la formula (M)

$\pm K^{a+bx}\left(A'-A'K^b+Ax-AK^b(x+1)+Bx^2-BK^b(x+1)^2\ldots+\mathfrak{Q}x^n-\mathfrak{Q}K^b(x+1)^n\right)$
. . . . (M)

il termine generale di queſte ſerie, il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$\pm\left(A'+Ax+Bx^2\ldots+\mathfrak{Q}x^n\right)K^{a+bx}\mp\left(A'+A(x+1)+B(x+1)^2\ldots+\mathfrak{Q}(x+1)^n\right)K^{a+b(x+1)}$
. . . . (N)

ſoſtituendo poi l'unità in luogo di x nel primo membro della forma (N), ſi prenda la differenza tra la quantità che ne riſulta e il ſecondo membro, e ſi troverà l'eſpreſſione ($\mathfrak{Q}$)

$\pm K^{a+b}\left(A'-A'K^{bx}+A-AK^{bx}(x+1)+B-BK^{bx}(x+1)^2\ldots+\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}K^{bx}(x+1)^n\right)$
. . . . ($\mathfrak{Q}$)

Sarà pertanto ($\mathfrak{Q}$) la ſomma generale, che ſi ricercava. Il che ecc.

Esempio.

Sia da trovarſi la ſomma generale della ſerie, che ha per termine generale la funzione $2^x(1+x+x^2)$. Giacchè la più alta poteſtà di x nel termine generale della ſerie algebraica non oltrepaſſa il ſecondo grado, ſi faccia $n=2$ nel termine generale (M). Eſſendo creſcente la ſerie, l'eſpreſſione generale, che ne riſulterà, ſarà

$K^{a+bx}\left(-A'+A'K^b-Ax+AK^b(x+1)-Bx^2+BK^b(x+1)^2\right)$

in cui poſto $K=2$, $a=0$, $b=1$, ſi avrà

$$2^x\left(A'+2A+2B+(A+4B)x+Bx^2\right)$$

e però, paragonando i termini tra di sè, ſi troverà eſſere $A'=5$, $A=-3$, $B=1$. Soſtituiti queſti valori nell' eſpreſſione ($\mathfrak{Q}$), per eſſere creſcente la ſerie, ſarà

$$2^x(6-2x+2x^2)-6$$

la ſomma generale ricercata.

COROLLARIO I.

Egli è dimoſtrato da gran tempo, che i termini generali di tutte le ſerie Ricorrenti ſono formule eſponenziali, o eſponenziali moltiplicate con quantità coſtanti, oppure con funzioni di x intiere e razionali. E poichè col mezzo della IV e V Propoſizione ſi ſommano tutte le ſerie aventi sì fatte eſpreſſioni per termini generali, ſi avrà la ſomma conſeguentemente di tutte le ſerie Ricorrenti, che a tali ſerie ſi riducono generalmente.

COROLLARIO II.

Se ſi faccia $n = o$ nelle due eſpreſſioni (M), $(\mathfrak{Q})$ della Prop. precedente, ſi ottiene il termine e la ſomma generale di tutte le ſerie eſponenziali della IV.

COROLLARIO III.

E facendo ſemplicemente $K = 1$, ſi cangiano toſto queſte ſerie in ſerie a differenze coſtanti, il che ſi conforma a quanto ha dimoſtrato il Sig. *Moivre* nel ſuo eccellente libro *de Menſura ſortis*, e il Sig. Daniele *Bernoulli* nel III. Vol. de' vecchj Comentarj di Pietroburgo per vie differentiſſime.

CAPITOLO QUARTO.

DELLE SERIE FRAZIONALI A SOMMA ESPONENZIALE.

PROBLEMA VI.

Sommare le ſerie frazionali a fattori ſemplici conſecutivi, e a ſomma eſponenziale.

RISOLUZIONE.

La formula (M)

$$\frac{\pm K^{a+bx}\left((A+Bx+Cx^2\ldots+Qx^n)\ (a+b(x+n+1))\right)}{(a+bx)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$$\frac{-K^{a+bx+b}\left((a+bx)\ (A+B(x+1)\ \ldots+Q(x+1)^n)\right)}{(a+bx)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$$\ldots\ldots\ldots (M)$$

è il termine generale di queſte ſerie. Il ſi metta dunque ſotto la forma differenziale (N), ſecondo il lemma del II. Cap.

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2\ldots+Qx^n}{(a+bx)\ldots(a+b(x+n))}K^{a+bx}$$

$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots\ldots+Q(x+1)^n}{\left(a+b(x+1)\right)\ldots\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}K^{a+b(x+1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots (N)$$

e meſſa l' unità in luogo di x nel primo membro di queſta forma, ſi prenda la differenza tra la quantità che ne riſulta e il ſecondo membro. Si ricaverà la formula (Q)

$$\frac{\pm K^{a+b}\left((\mathcal{A}+B+\text{ecc}\ldots\mathcal{Q})((a+b(x+1))\ldots\ldots(a+b(x+n+1))\right)}{\left((a+b)(a+2b)..(a+b(n+1))\right)\left((a+b(x+1))(a+b(x+2))..(a+b(x+n+1))\right)}$$
$$\frac{-K^{a+bx+b}\left(((a+b)\ldots a+b(n+1))(\mathcal{A}+B(x+1)\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^n)\right)}{\left((a+b)(a+2b)..(a+b(n+1))\right)\left((a+b(x+1))(a+b(x+2))..(a+b(x+n+1))\right)}$$
$$\ldots\ldots\ldots(\mathcal{Q})$$

la quale sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA VII.

Sommare la stessa classe di serie a fattori composti consecutivi.

RISOLUZIONE.

Poichè l' espressione (M)

$$\pm K^{a+bx}\left(\frac{(\mathcal{A}+Bx\ldots+\mathcal{Q}x^n)(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}{(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right.$$
$$\left.\frac{-K^b(\mathcal{A}+B(x+1)\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^n)(M+Nx..+Sx^{n+1})}{(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$
$$\ldots\ldots(M)$$

è il termine generale di queste serie, gli si dia la forma differenziale, che gli è propria (N)

$$\pm\frac{\mathcal{A}+Bx\ldots+\mathcal{Q}x^n}{M+Nx\ldots Sx^{n+1}}K^{a+bx}$$
$$\mp\frac{\mathcal{A}+B(x+1)\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^n}{M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}}K^{a+b(x+1)}\ldots\ldots\ldots(N)$$

Ponendo in seguito l' unità in luogo di x nel primo termine dell' espressione (N), dal che risulta la quantità (C),

$$(C)\ldots\ldots\ldots\frac{\mathcal{A}+B+C\ldots+\mathcal{Q}}{M+N+O\ldots+S}K^{a+b}$$

si prenda la differenza tra il secondo termine della formula (N) e la quantità (C), e si avrà l'espressione $(\mathfrak{Q})$

$$\pm K^{a+b}\left(\frac{((A+B+C\ldots+\mathfrak{Q})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}{(M+N+O\ldots+S)(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$
$$\left(\frac{-K^{bx}(A+B(x+1)\ldots+\mathfrak{Q}(x+1)^n)(M+N+O\ldots+S))}{(M+N+O\ldots+S)(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$

.........$(\mathfrak{Q})$

La quale sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

ESEMPIO.

Sia proposta da sommare la serie, di cui

$$\frac{(3-4x+x^3)2^x}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

è il termine generale.

Si tragga dal termine generale (M) di queste serie (*Prop. preced.*) l'espressione convenevole a questo caso, facendo $n=1$, $K=2$, $a=0$, $b=1$, $M=O=1$, $N=-1$. Si avrà la formula seguente

$$\frac{(A+2B-(3A+B)x+(A-B)x^2+Bx^3)2^x}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

la quale paragonata col termine particolare proposto somministrerà $A=B=1$. Determinati tutti questi valori, si sostituiscano nella somma generale $(\mathfrak{Q})$, e ne risulterà la formula

$$\frac{(4+2x)2^x}{x^2+x+1}-4$$

la quale sarà la somma generale ricercata.

SCOLIO.

E' neceſſario l'avvertire in queſto luogo, come s'è fatto precedentemente, che eſſendo il numero delle indeterminate del numeratore ſempre minore del numero dell'equazioni da formare, fa d'uopo neceſſariamente, che v'abbia una determinata relazione tra queſti coefficienti, perchè la ſerie ſia ſuſcettibile di ſomma eſponenziale della forma ($\mathfrak{Q}$).

PROBLEMA VIII.

Sommare la ſerie (R)

$$\frac{p}{(p\pm 1)(p^2\mp 1)}+\frac{p^2}{(p^2\pm 1)(p^3\pm 1)}+\frac{p^3}{(p^3\pm 1)(p^4\pm 1)}\ldots\ldots$$

$$+\frac{p^x}{(p^x\pm 1)(p^{x+1}\pm 1)}\ldots\ldots (R)$$

RISOLUZIONE.

Si metta ſotto forma differenziale il termine generale propoſto $\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{p^x}{(p^x\pm 1)(p^{x+1}\pm 1)}$
la quale ſarà della forma ſeguente (N)

$$\frac{1}{(p-1)(p^x\pm 1)}-\frac{1}{(p-1)(p^{x+1}\pm 1)}\ldots\ldots (N)$$

Si ponga nel primo termine l'unità in luogo di x, e ſi avrà l'eſpreſſione $\dfrac{1}{(p-1)(p\pm 1)}$; ſi ſottragga quindi il ſecondo termine da queſta eſpreſſione. La formula ($\mathfrak{Q}$) riſultante

$$\frac{p(p^x-1)}{(p-1)(p\pm 1)(p^{x+1}\pm 1)}\ldots\ldots\ldots (\mathfrak{Q})$$

ſarà

farà pe' noſtri principj la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

CAPITOLO QUINTO.

LE ſerie a differenze coſtanti, e le ſerie Ricorrenti in generale ammettono tutte ſenza eccezione una ſomma generale Algebraica, o eſponenziale, ſiccome abbiamo veduto nelle Prop. I. IV. V. All' oppoſito le ſerie frazionali non ne sonō generalmente ſuſcettibili, avendovene un' infinità, che non ammettono che ſomme traſcendenti. Le Prop. II, e VI non abbracciano che le ſerie a ſomma Algebraica o eſponenziale. Ma non laſcia perciò il noſtro metodo di ſoggettare anche quelle alle ſue leggi. In effetto le ho tutte generalmente ridotte ſotto forme Integrali, e nel preſente Capitolo eſporremo il modo di ſommarle. Così per tutt' altra via ſi vedranno compreſe ſotto generaliſſime eſpreſſioni le ſomme di queſta natura di ſerie che ſono ſtate per l' addietro tolte per mano da tanti illuſtri uomini, e ſopra le quali ho io pure pubblicato una Memoria nel 1775, che ha per titolo *Specimen de Seriebus convergentibus*. Al qual paſſo non diſdice il ricordare, che un Geometra de' primi inclinò a credere, che il metodo da me adoperato in quel Libro poteſſe avere comuni i principj con quello che l' immortale *Eulero* eſpoſe nel VI. Vol. degli antichi Com. di S. Pietroburgo. Ma per verità deriva il mio metodo da alcune propoſizioni fondamentali, che ho premeſſo, delle quali realmente non ſo di eſſere debitore a chi che ſia, e ſu le quali non s' appoggia altramente il metodo Euleriano. Moſtriamolo con qualche facile eſempio. Si tratti di ſommare le ſerie, che hanno (*A*)

$\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)}$ per termine generale. Avendo dimoſtrato al §. V. di quel mio Opuſcolo eſſere

$\frac{1}{qx^{b:a}}\int\left(x^{b:a}dx.\frac{1-x^n}{1-x}\right)$ la ſomma generale delle ſerie aventi per termine generale $\frac{x^n}{an+b}$, moltiplicando queſt' eſpreſſione, e la ſerie per $x^{e:c-b:a}$, e fatta un' integrazione, ricavo immediatamente, poſto ſempre nelle quantità finite $x=1$, la formula

$$(B)\ \ldots\ \frac{1}{bc-ae}\int\left(1-x^{e:c-b:a}\right)x^{b:a}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

ch' eſprime la ſomma generale di quelle ſerie. Continuando così a fare altra moltiplicazione e ſucceſſiva integrazione determino di mano in mano le ſomme generali per tre fattori, indi per quattro ecc. come può vederſi al §. X.

Il Sig. *Eulero* nel §. 10 di quella Memoria, per le ſerie aventi l' eſpreſſione (A) per termine generale, opera in queſto modo. Chiama S la ſomma ricercata. Moltiplica la lettera S, e la ſerie per px^π, e differenzia l' equazione; indi determina il valore di p, π in a, b. Moltiplica di nuovo queſt' equazione differenziata per px^π, e dopo un' altra differenziazione determina il valore di p, π in a, b, c, e. Paſſando poſcia a due ſucceſſive integrazioni, ov' entra s, e ds, trova finalmente per s la ſteſſa eſpreſſione noſtra (B). Se la ſerie aveſſe tre fattori, prende da capo a trattarla con ſimili operazioni, e così di mano in mano per quattro, e per tal numero di fattori che vuole. Parrebbe differente anche ne' principj un metodo che con una ſola moltiplicazione, ed una ſola integrazione di funzioni ſemplici di x, perveniſſe ad un riſultamento, che un altro non ottiene che con due moltiplicazioni, due differenziazioni, e due integrazioni; e molto più in progresso crescendo il numero de' fattori. Ma quello che siamo qui per esporre è ben da tutti diverso così ne' principj, come nell' applicazione.

Delle Serie Frazionali trascendenti.

PROBLEMA IX.

Trovare il termine generale della serie (Υ)

$$\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}+\frac{1}{m+3n}\;\ldots\ldots\ldots\;(\Upsilon)$$

sotto una forma integrale.

RISOLUZIONE.

Essendo (μ) $\frac{1}{m+nx}$ il termine generale algebraico della serie (Υ), fa d' uopo, che il nuovo termine generale dia dopo l' integrazione l' espressione (μ). Per conseguenza non si tratta che di assumere tal funzione differenziale d' una variabile z, ch' essendo integrata, e avendo posta l' unità in luogo di z nell' integrale, ne risulti la funzione algebraica (μ). Ma appunto facendo l' integrazione della funzione differenziale $\frac{1}{n}z^{m:n+x-1}dz$, è manifesto, che l' integrale

$$(r)\;\ldots\ldots\ldots\;\frac{1}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)=\frac{1}{m+nx}$$

fatto $z=1$ dopo l' integrazione. Dunque la formula (r) rappresenta il termine generale della serie (Υ). Il che ecc.

PROBLEMA X.

Sommare la serie (Y) della Prop. precedente.

RISOLUZIONE.

Poichè $\frac{1}{n}\int(z^{m:n+x-1}dz)$ è il termine generale della serie (Y), il si metta sotto la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n+x-1}\,dz}{1-z}-\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n+x}\,dz}{1-z}\;\ldots\ldots\;(N)$$

Messa poi l'unità in luogo di x nel primo termine, con che si ha $\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n}dz}{1-z}$ (C), si sottragga dall'espressione (C) il secondo termine della forma (N). La differenza, che ne risulta (Q)

$$\frac{1}{n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\ldots\ldots(Q)$$

sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA I.

La formula (M)

$$\frac{A}{nqs..\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\tau-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n+x-1}dz\;\cdots(\mathrm{M})$$

integrata da $z=0$ *fino a* $z=1$, *è il termine generale di tutte le serie* (X)

$$\frac{\mathrm{A}}{(m+n)(p+q)\ldots(\Delta+\omega)}+\frac{\mathrm{A}}{(m+2n)(p+2q)\ldots(\Delta+2\omega)}\;\text{ecc.}\ldots(\mathrm{X})$$

nelle quali il numeratore è una quantità costante, e il *denominatore il prodotto d'un numero qualunque di fattori ſemplici.*

DIMOSTRAZIONE.

Si traggano per ordine fuor de' ſegni le quantità differenziali, e ſe ne prendano ſucceſſivamente gl'integrali in modo che ſvaniſcano per la ſoſtituzione di $z=0$. Si avrà dalla prima in ordine l'integrale $\frac{nz^{m:n+x}}{m+nx}$; il che eſſendo moltiplicato per $z^{p:q-m:n-1}dz$, e integrato darà per la ſeconda

$$\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n+x-1}dz = \frac{nqz^{p:q+x}}{(m+nx)(p+qx)}$$

e così operando ſucceſſivamente ſi perverrà alla forma

$$\frac{nqs\ldots\phi\omega z^{\Delta:\omega+x}}{(m+nx)(p+qx)+\ldots(\Delta+\omega x)}$$

la quale diviſa per $nqs\ldots\phi\omega$, e moltiplicata per A, dopo di aver fatto $z=1$, è il preciſo termine generale delle ſerie propoſte (X). Il che ecc.

PROBLEMA XI.

Sommare le ſerie (X) *della Prop. precedente.*

RISOLUZIONE.

Eſſendoſi dimoſtrato, che la formula integrale (M) è il termine generale di queſte ſerie, la ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int x^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+x-1}dz}{1-z}$$

$$\frac{-A}{nqs\ldots\phi\omega}\int x^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z}\ldots\ldots(N)$$

Messa quindi l'unità in luogo di x nel primo termine, dal che risulta l'espressione

$$\frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int \overline{z^{\Delta:\omega-\mu:t-1}dz\ldots\ldots ecc.\int \frac{z^{m:n}dz}{1-z}}$$

si sottragga da questa espressione il secondo termine della forma (N). La differenza $(\mathfrak{Q})$

$$\frac{A}{nqs..\phi\omega}\int \overline{z^{\Delta:\omega-\mu:t-1}dx\ldots ecc.\int \overline{z^{r:s-p:q-1}dz\int \overline{z^{p:q-m:n-1}dz\int \overline{z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)}}}}$$

$\ldots\ldots(\mathfrak{Q})$

sarà manifestamente la somma generale dimandata. Il che ecc.

TEOREMA II.

La formula (M)

$$\frac{\delta.}{ndz}\left(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)\ldots\ldots(M)$$

è il termine della serie (μ)

$$\frac{a+b}{m+n}+\frac{a+2b}{m+2n}+\frac{a+3b}{m+3n}+ecc.\ldots\ldots\frac{a+bx}{m+nx}\ldots\ldots(\mu)$$

esprimendo la lettera $\delta.$ una differenziazione ordinaria.

DIMOSTRAZIONE.

Si prenda attualmente l' integrale della quantità sotto il segno. La formula (M) diverrà

$$\frac{\delta.(bz^{a:b+x})}{dz\,(m+nx)}$$

la quale essendo differenziata somministra

$\frac{a+bx}{m+nx}z^{a:b+x-1}$. E poichè quest' espressione svanisce facendovi $z=0$, si ponga $z=1$. Si avrà $\frac{a+bx}{m+nx}$, ch'è effettivamente il termine generale della serie (μ). Il che ecc.

COROLLARIO I.

Si perverrebbe allo stesso risultamento se la funzione (M) fosse sviluppata, com' è manifesto. Imperciocchè, facendo $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\pi$, si avrebbe l' espressione seguente

$$\frac{b\pi}{n}z^{\pi-1}\int(z^{m:n+x-1}dz)+\frac{b}{n}z^{a:b+x-1}$$

dalla quale, dopo l' integrazione compiuta, e la sostituzione di $z=1$, si ricaverebbe il medesimo termine generale di prima. In fatti, posto $z=1$ nelle quantità finite, la formula diventa

$$\frac{b\pi}{n}\int(z^{m:n+x-1}dz)+\frac{b}{n}$$

e però, integrando, si ha

$\frac{b\pi}{n}\cdot\frac{nz^{(m+nx):n}}{m+nx}+\frac{b}{n}=\frac{b\pi z^{(m+nx):n}}{m+nx}+\frac{b}{n}$, cioè, fatto $z=1$, $\frac{b}{m+nx}\left(\frac{a}{b}-\frac{m}{n}\right)+\frac{b}{n}=\frac{a+bx}{m+nx}$.

COROLLARIO II.

Nello stesso modo si proverebbe, che l' espressione

$$\frac{1}{dz}\delta.\left(ez^{c:e-a:b+1}\times\frac{1}{ndz}\delta.(bz^{a:b-m:n}\int(z^{m:n+x-1}dz))\right)$$

è il termine generale della serie

$$\frac{(a+b)(c+e)}{m+n}+\frac{(a+2b)(c+2e)}{m+2n}\ldots\ldots+\frac{(a+bx)(c+ex)}{m+nx}$$

e l' espressione

$$\frac{1}{dz}\delta.\left(gz^{f:g-c:e+1}\times\frac{1}{dz}\delta.(ez^{c:e-a:b+1}\times\frac{1}{ndz}\delta.(bz^{a:b-m:n}\int(z^{m:n+x-1}dz)\right)$$

il termine generale della serie

$$\frac{(a+b)(c+e)(f+g)}{m+n}+\frac{(a+2b)(c+2e)(f+2g)}{m+2n}$$

$$\ldots\ldots\ldots+\frac{(a+bx)(c+ex)(f+gx)}{m+nx}$$

e così successivamente.

PROBLEMA XII.

Sommare la Serie (μ) del II Teorema.

Risoluzione.

Si ponga il termine generale (M) sotto la forma differenziale (N)

$$\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x-1}dz}{1-z})-\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z})..(N)$$

E si sostituisca nel primo membro l' unità in luogo di x. Se pertanto si sottragga la quantità che ne risulta dal secondo membro; si avrà l' espressione seguente

$$\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int z^{m:n}dz(\frac{1-z^x}{1-z})$$

la quale sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA

TEOREMA III.

Si supponga $Z = \frac{b}{dz}\,\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int(z^{m:n+x-1}dz)\right).$

La formula (M)

$$\frac{1}{nqs\ldots\omega}\int \overline{z^{\Delta:\omega-\mu:\varphi-1}dz\ldots \text{ecc.}\int \overline{z^{r:s-p:q-1}dz\int \overline{z^{p:q-a:b}Zdz}}} \ldots.(M)$$

da $z=0$ *fino a* $z=1$ *è il termine generale della serie (Υ)*

$$\frac{a+b}{(m+n)(p+q)\ldots(\Delta+\omega x)}+\frac{a+2b}{(m+2n)(p+2q)\ldots(\Delta+2\omega)}$$

$$\ldots\ldots+\frac{a+bx}{(m+nx)(p+qx)\ldots(\Delta+\omega x)}\ \ldots\ldots(\Upsilon)$$

DIMOSTRAZIONE.

Essendosi dimostrato nel Teorema precedente

$$\frac{b}{dz}\,\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int(z^{m:n+x-1}dz)\right)=\frac{n(a+bx)}{m+nx}z^{a:b+x-1},$$

si moltiplichi questo valore per $z^{p:q-a:b}dz$, e prendendo l' integrale del prodotto, si avrà

$$\frac{nq(a+bx)z^{p:q+x}}{(m+nx)(p+qx)}.$$

moltiplicando di nuovo quest' espressione per $z^{r:s-p:q-1}dz$, e integrando il prodotto, si avrà

$$\frac{nqs(a+bx)z^{r:s+x}}{(m+nx)(p+qx)(r+sx)}$$

e così successivamente operando, si perverrà alla forma

$$\frac{(a+bx)nqs\ldots\phi\omega z^{\Delta:\omega+\varkappa}}{(m+nx)(p+qx)(r+sx)\ldots\ldots(\Delta+\omega x)}$$

Fatta per tanto la divisione per $nqs\ldots\phi\omega$, e sostituendo l' unità in luogo di z, si avrà il termine generale conosciuto della serie (Υ). Il che dovea dimostrarsi.

PROBLEMA XIII.

Sommare le Serie (Υ) del Teorema precedente

RISOLUZIONE.

Si metta il termine generale (M) sotto la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{p:q-a:b}\,\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+\varkappa-1}dz}{1-z}\right)$$

$$\frac{-1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{p:q-a:b}\,\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+\varkappa}dz}{1-z}\right)$$

$\ldots\ldots\ldots(N)$

posta l' unità in luogo di x nel primo termine, si sottragga dalla quantità, che ne risulta il secondo termine dell' espressione (N); Si avrà la formula $(\mathcal{Q})$

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-a:b}\,\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{\varkappa}}{1-z}\right)\right)$$

$\ldots\ldots\ldots(\mathcal{Q})$

che sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO.

In questa guisa si potranno sommare le altre Classi di Serie aventi al numeratore un numero qualunque di fattori. Imperciocchè, determinata che sia la funzione Z per n fattori al numeratore, secondo ciò che s' è detto nel II Corollario del II Teorema, si ricaverà dal III Teorema il termine generale corrispondente, e in seguito la somma generale, senza che mi diffonda maggiormente in questo luogo.

ESEMPI.

Per facilitare l' intelligenza del metodo addurremo quì due esempj.

I.

Sia da sommarsi la serie

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}\;.\;.\;.\;.\;.+\frac{1}{x(3+x)}$$

Si tragga dall'espressione generale della Prop. XI. li due ultimi integrali a cagione dei due fattori al denominatore della serie proposta, cioè

$$\frac{A}{nq}\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)$$

E poichè $A=1$, $m=0$, $n=q=1$, $p=3$, l'espressione della somma diverrà

$$\int z^2dz\int dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)=\frac{1}{3}\int\left((1-z^3)dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)\right)$$

Ma questa formula, fatto $z=1$ dopo l' integrazione, diventa l'espressione algebraica (Q)

$$\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(2+x)}+\frac{1}{3(3+x)}\right)\ldots\ldots(Q)$$

e però (Q) è la somma generale dimandata. Facendo per tanto $x=\infty$, sarà $\frac{11}{18}$ la somma della serie all' infinito.

II.

Sia da fommare la ferie

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{7.8}\,\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(-2+3x)\,(-1+3x)}$$

Effendo $A=1$, $m=-2$, $n=3$, $p=-1$, $q=3$, l'efpreffione generale dell'efempio precedente diventa

$$\frac{1}{9}\int z^{-2:3}dz\int z^{-2:3}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{(1-z^{1:3})(1-z^{x})z^{-2:3}dz}{1-z}$$

di cui l'integrale dipende manifeftamente dalle quadrature note. E volendo la fomma della ferie all'infinito, fi ponga $x=\infty$; la formula precedente fi cangia in quefta

$$\frac{1}{3}\int z^{-2:3}dz\left(\frac{1-z^{1;3}}{1-2}\right)=\int\frac{dy}{1+y+y^{2}}$$

facendo $z^{1:3}=y$. Per confeguenza la fomma della ferie all'infinito $=$ Arc. 40° di un cerchio avente $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ per raggio.

SCOLIO.

E' noto, che quefta forta di ferie va bene fpeffo unita con qualche ferie geometrica, e che non è fempre poffibile di efprimere le fomme con formule efponenziali. Un folo Problema generale bafterà, come mi fembra, per indicare la ftrada, che convien tenere in cafo che quefte ferie non ammettano altra fomma, che trafcendente.

PROBLEMA XIV.

Sommare le ferie (I)

$$\frac{K^{a+b}}{(m+n)(p+q)\,.....\,(\Delta+\omega)}+\frac{K^{a+2b}}{(m+2n)(p+2q)\,.....\,(\Delta+2\omega)}\,......\,\frac{K^{a+bx}}{(m+nx)(p+qx)...(\Delta+\omega x)}$$

. . . . (*I*)

RISOLUZIONE.

Effendo l'efpreffione (*M*)

$$\frac{1}{nqs...\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz...\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n+x-1}K^{a+bx}dz$$

. . . . (*M*)

il termine generale delle ferie (*I*) (*Teorema I. del pref. Cap.*), il fi metta fotto la forma differenziale (*N*)

$$\frac{1}{nqs...\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz...\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+x-1}K^{a+bx}dz}{1-K^{b}z}$$

$$-\frac{1}{nqs...\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz...\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+x}K^{a+b(x+1)}dz}{1-K^{b}z}$$

. . . . (*N*)

E pofta poi l'unità in luogo di x nel primo termine, dal che rifulta la quantità

$$\frac{1}{nqs...\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz...\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n}K^{a+b}dz}{1-K^{b}z}$$

fi fottragga il fecondo termine da queft' efpreffione; farà la differenza (*Q*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:p-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{p:q-m:n-1}dz\int\frac{z^{m:n}K^{a+b}dz(1-K^{bx}z^{x})dz}{1-K^{b}z}$$

. . . . . . (Q)

La fomma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO

Se la Serie aveffe de' fattori al numeratore, fi potrebbe nello fteffo modo fommarla, ricavando i termini generali convenienti da' Teoremi, che abbiamo premeffo; il che non ha bifogno di effere efemplificato.

SCOLIO.

Ma non è poi fuor di propofito, che fi prendano qui per mano le ferie Reciproche de' numeri naturali feparatamente, ancorchè non fieno elle che puri cafi particolari delle ferie generali, onde abbiamo affegnato la fomma in quefto Capitolo fotto forme trafcendenti. Ne daremo pertanto due efpreffioni differenti, una delle quali ci appartiene in particolare, ficcome può vederfi nel Libro, che abbiamo mentovato nell' introduzione del Capitolo, e l' altra è del pari tratta direttamente da' principj di quefta Memoria, ma coincide, quanto al finale rifultamento, con quella che ha trovato il Sig. *Eulero* per diverfa via, e pubblicato nel VI Vol. de' primi Com. dell' Accademia di S. Pietroburgo.

PROBLEMA XV.

Sommare le ferie Reciproche de' numeri naturali

$$1+\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{4^{n}}+\text{ecc.}\;\ldots\ldots\;\frac{1}{x^{n}}$$

RISOLUZIONE.

Se nell' espressione (M) del Termine generale (*Prop. XIV.*) si faccia m, p ecc. μ, $\Delta = 0$; n, q, s ecc. ... ϕ, $\omega = 1$; $K = 1$; il termine generale di queste serie prenderà la forma seguente

$$\int dz:z \ldots \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int z^{x-1} dz}}}}$$

e la somma generale la seguente

$$\int dz:z \ldots \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int dz \left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)}}}}$$

prendendo altrettanti integrali da destra a sinistra, quante sono le unità in u. Per conseguenza la somma all' infinito di tutte queste serie sarà manifestamente

$$\int dz:z \ldots \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int dz:(1-z)}}}}$$

Il che ecc.

PROBLEMA XVI.

Sommare direttamente le serie Reciproche de' numeri naturali.

RISOLUZIONE.

Essendo $\int z^{x-1} dz \left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1} = \frac{1.2.3....(u-1)}{x^u}$ nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, siccome è dimostrato nel Calcolo Integrale, l' espressione

$$\frac{1}{1.2.3....(u-1)} \int z^{x-1} dz \left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1} = \frac{1}{x^u}$$

sarà il termine generale di queste serie. Le si dia la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(u-1)}\int\frac{z^{x-1}dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}}{1-z}$$

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(u-1)}\int\frac{z.z^{x-1}dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}}{1-z}\ldots(N)$$

Si metta in seguito l'unità in luogo di x nel primo termine, e si sottragga il secondo dalla quantità che risulta da quella sostituzione. La differenza ($\mathfrak{Q}$).

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(u-1)}\int dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\ldots(\mathfrak{Q})$$

sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

COROLLARIO.

Sarà dunque nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione.

$$1.2.3\ldots(u-1)\int\overline{dz:z\ldots\int\overline{dz:z\int\frac{dz}{1-z}}}=\int\frac{dz}{1-z}\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}$$

$$1.2.3\ldots(u-1)\int\overline{dz:z\ldots\int\overline{dz:z\int\overline{dz:z\int\frac{dz(1-z^{x})}{1-z}}}}$$

$$=\int\left(dz\left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1}\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\right)$$

SCOLIO.

E perchè non s'abbia a ricorrere a quel mio libro per avere le somme all'infinito d'un certo numero di queste serie reciproche de' numeri naturali, non sarà inutile per le occorrenze, che qui pure si registrino, come le ho ivi accuratamente determinate.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{ecc.} \ldots = .6931471$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \text{ecc.} \ldots = .8224670$$

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \text{ecc.} \ldots = .9016769$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \text{ecc.} \ldots = .9470327$$

$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5} + \text{ecc.} \ldots = .9722291$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \text{ecc.} \ldots = .9855511$$

$$1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{6^7} + \text{ecc.} \ldots = .9926366$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \text{ecc.} \ldots = .9962322$$

$$1 - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{4^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{6^9} + \text{ecc.} \ldots = .9981151$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \text{ecc.} \ldots = .9990368$$

$$1 - \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} - \frac{1}{4^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{6^{11}} + \text{ecc.} \ldots = .9995089$$

$$1 - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} - \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} - \frac{1}{6^{12}} + \text{ecc.} \ldots = .9997928$$

ecc.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{ecc}\ldots=\infty$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\text{ecc}\ldots=1.\ 6449340$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\text{ecc}\ldots=1.\ 2022358$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0823231$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{6^5}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0370444$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0173431$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{6^7}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0083927$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0040766$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{39}+\frac{1}{4^9}+\frac{1}{5^9}+\frac{1}{6^9}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0020292$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0009918$$

$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{4^{11}}+\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{6^{11}}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0004859$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0002320$$

ecc...

CAPITOLO SESTO.

DELLE SERIE A FATTORI CRESCENTI.

LE Serie a fattori creſcenti formano una Claſſe di progreſſioni ſommamente eſteſa, ed utile baſtevolmente per aver luogo in queſte Ricerche a fianco delle Serie più note, e maneggiate da' Geometri. Tutto ciò, che ne ſapevamo prima del Sig. *Eulero* conſiſteva per verità in puri caſi particolari ſvolti cogli artifizj del calcolo. Egli è il primo, che additò la ſtrada di aſſegnare a' loro termini generali eſpreſſioni traſcendenti nel V. Vol. de' primi Com. di S. Pietroburgo. Non mancò in ſeguito di fare un tentativo intorno alle loro Somme nel VI. Vol. de' medeſimi Com. mettendole ſotto forme differenziali con un metodo non ignoto, ſe ſi vuole, a due grandi uomini, che il precedettero (*veggaſi il Com. Epiſt. tra Leibnitz e Bernoulli Tom.* 1.), ma non ancora perfezionato, nè ſpinto tant' oltre. Ancorchè creſca il grado dell' equazione differenziale, augmentandoſi il numero de' fattori ne' termini ſucceſſivi, e le indeterminate non vi ſi laſcino ſeparare, di modo che non è opera comune l' integrazione che reſta da affrontare, le ha ridotte almeno quell' uomo incomparabile a forme conoſciute e famiLiari. Dopo di lui non è a mia cognizione, che ſia ſtato fatto alcun paſſo notabile di più. Vo' credere pertanto, che non ſia per diſpiacere a' Geometri il vedere ſottomeſſe coll' altre anche le Somme di queſte ſerie alla ſemplicità de' noſtri principj.

PROBLEMA XVII.

Trovare la somma generale della serie (I)

$1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 +$ ecc...... $1.2.3 \ldots x \ldots (I)$

RISOLUZIONE.

Poichè l'espressione integrale $\int dz(-l.z)^x$ è il termine generale di questa serie (*V. Vol. de' vecchj Com. di S. Pietrob.*), le si dia la forma differenziale (N).

$$\int \frac{dz(-l.z)^{x+1}}{-1-l.z} - \int \frac{dz\,(-l.z)^x}{-1-l.z} \ldots\ldots (N)$$

Posta pertanto l'unità in luogo di x nel secondo termine, essendo crescente la serie, si sottragga la quantità risultante dal primo termine dell'espressione (N). La differenza (Q)

$$\int \frac{dz\, l.z\left((-l.z)^x - 1\right)}{1 + l.z} \ldots\ldots (Q)$$

sarà la somma ricercata della serie (I), posto $z = 1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

SCOLIO.

Il metodo è sommamente semplice, e singolarmente quando si tratti di serie, nelle quali il numero de' fattori ne' termini successivi va crescendo secondo una data legge, come sarebbe

$$1 + 1.2.3 + 1.2.3 \ldots 5 + 1.2.3 \ldots 7 \ldots\ldots + 1.2.3 \ldots \overline{2x-1}$$

$$1 + 1.2 \ldots 6 + 1.2 \ldots 11 + 1.2 \ldots 16 \ldots\ldots + 1.2.3 \ldots \overline{5x-4}$$

Se i fattori crescono secondo il numero intiero m, il metodo del Sig. *Eulero* (*Vol. VI. de' med. Com.*) porta necessariamente a equazioni differenziali del grado m, come il testifica egli medesimo alla pag. 87. *De quo no-*

tandum est, tot semper in æquatione resultante signa integralia sibi invicem esse juncta, quot sunt factores, quibus sequens quisque terminus augetur. Nel nostro metodo all' opposito non entrano equazioni differenziali da integrare con le indeterminate mescolate insieme, ma si perviene direttamente all' espressione della somma: Il che potrebbe aprire un campo a qualche utile speculazione nel calcolo integrale combinando i due metodi. Eccone un esempio.

PROBLEMA XVIII.

Sommare la serie (R)

$$1.2.3\ldots\ldots\overline{a+b}+1.2.3\ldots\ldots\overline{a+2b}\ldots\ldots\ldots+1.2.3\ldots\overline{a+bx}\ldots\ldots(R)$$

Risoluzione.

Essendo $\int dz(-l.z)^x$ il termine generale della serie a fattori crescenti consecutivi (*Prop. preced.*) è manifesto, che mettendo $a+bx$ in luogo di x, l' espressione (*M*)

$$(M)\ \ldots\ldots\ \int dz(-l.z)^{a+bx}$$

sarà il termine generale della serie (*R*). La si metta sotto la forma differenziale (*N*)

$$\int\frac{dz(-l\,z)^{a+b(x+1)}}{(-l.z)^b-1}-\int\frac{dz(-l.z)^{a+bx}}{(-l.z)^b-1}\ldots\ldots(N)$$

Posto pertanto $x=1$ nel secondo termine di quest'espressione, si sottragga dal primo la quantità che ne risulta, e la differenza

$$\int\frac{dz(-l.z)^{a+b}\left((-l.z)^{bx}-1\right)}{(-l.z)^b-1}$$

sarà, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, la somma generale della serie (*R*). Il che ecc.

PROBLEMA XIX.

Sommare la ſerie (M)

$$K^{a+b}+1.2K^{a+2b}+1.2.3K^{a+3b}\ldots\ldots+1.2.3\ldots xK^{a+bx}\ldots(M)$$

Risoluzione.

Eſſendo $\int dz(-l.z)K^{a+bx}$ il termine generale di queſta ſerie, con un' operazione ſimile alla precedente ſi troverà, che l' eſpreſſione

$$\int\frac{dz\,l.z\,K^{a+b}\left(K^{bx}(-l.z)^{x}-1\right)}{1+K^{b}l.z}$$

nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, è la ſomma generale della ſerie (M). Il che ecc.

PROBLEMA XX.

Sommare la ſerie

$$\frac{1}{K^{2}}-\frac{1.2}{K^{3}}+\frac{1.2.3}{K^{4}}-\text{ecc.}\ldots\pm\frac{1}{K^{x+1}}(1.2.3\ldots.x)$$

Risoluzione.

Eſſendo dimoſtrato (*Vol. XIX. de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 74) che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, avendo luogo il ſegno poſitivo ſe ſia x numero pari, e il negativo ſe ſia x impari,

$$\int z^{u}dz(l.z)^{x}=\pm\frac{1}{(u+1)^{x+1}}(1.2.3\ldots.x)$$

ſe ſi ponga $K-1$ in luogo di u, è manifeſto, che l' eſpreſſione (M)

$$\int z^{K-1}dz(l.z)^{x}\ \ldots\ldots(M)$$

sarà il termine generale della proposta serie. Il si metta pertanto sotto la forma differenziale (N)

$$\int \frac{z^{K-1} dz\,(l.z)^x}{1-l.z} - \int \frac{z^{K-1} dz\,(l.z)^{x+1}}{1-l.z} \quad \ldots (N)$$

e si faccia $x = 1$ nel primo membro. Dopo questo si sottragga il secondo dalla quantità che risulta da quella sostituzione, e la differenza

$$\int \frac{dz\left(1-(l.z)^x\right) z^{K-1}\, l.z}{1-l.z}$$

sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA I.

La formula integrale $\int z^m dz(1-z)^{x-1}$, *nel caso di* $z = 1$ *dopo l'integrazione, è il termine generale della serie* (R)

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1.2}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{1.2.3}{(m+1).....(m+4)}$$
$$+ \text{ecc.} \ldots\ldots (R)$$

Si vegga il V. Vol. de' vecchj Com. di S. Pietrob. pag. 41

COROLLARIO.

Si dimostrerebbe nello stesso modo, che la formula

$$\frac{1}{q^x}\int z^{p:q} dz\,(1-z)^{x-1}$$

è il termine generale della serie

$$\frac{1}{p+q} + \frac{1}{(p+q)(p+2q)} + \frac{1.2}{(p+q)....(p+3q)} + \text{ecc.}$$

e che

$$(K:q)^x \int z^{p:q} dz(1-z)^{x-1}$$

è il termine generale delle serie

$$\frac{K}{p+q}+\frac{1.K^2}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2K^3}{(p+q)....(p+3q)}+\text{ecc.}$$

PROBLEMA XXI.

Trovare la Somma generale della Serie (R)

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.3}{(m+1)....(m+3)}+\text{ecc.} \dots (R)$$

RISOLUZIONE.

Poichè $\int z^m (1-z)^{x-1}$ è il termine generale della Serie (*Teor. preced.*), il si metta sotto la forma differenziale (*N*)

$$(A)\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1} - (B)\int z^{m-1} dz(1-z)^{x} \dots (N)$$

ch' è equivalente, giacchè essendo $\int z^{m-1} dz(1-z)^x$ $=\frac{x}{m+x}\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1}$ nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, e $\frac{m}{m+x}\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1}$ $=\int z^m dz(1-z)^{x-1}$, sarà $(A)-(B)$

$$=\left(1-\frac{x}{m+x}\right)\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1}$$

$$=\frac{m}{m+x}\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1}=\int z^m dz(1-z)^{x-1}.$$

Si faccia per tanto $x=1$ nel primo membro (A), dal che

che ſi ha integrando $\frac{z^m}{m}$, e ſi ſottragga da $\frac{z^m}{m}$ il ſecondo termine (B). La differenza nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, cioè

$$\frac{1}{m}-\int z^{m-1}dz(1-z)^x$$

ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

Corollario I.

Similmente ponendo il termine generale

$$\frac{1}{q^x}\int z^{q:q}dz(1-z)^{x-1}$$

ſotto queſta forma differenziale

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q-1+z}-\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^x}{q-1+z}$$

la quale coincide con queſta

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q-1+z}-\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}(1-z)}{q-1+z}$$

col metodo ſolito ſi ricaverà l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{z^{p:q}dz\left(q^{x-1}-(1-z)^{x-1}\right)}{q-1+z}$$

la quale nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione ſarà la ſomma generale della ſerie

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2}{(p+q)..(p+3q)}+\text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

Nello ſteſſo modo ſi troverà eſſere

$$K{:}q^{x}\int\frac{z^{p:q}dz\left(q^{x-1}-(K-Kz)^{x-1}\right)}{q-K+Kz}$$

la ſomma generale della ſerie di cui è termine generale

$$\left(\frac{K}{q}\right)^{x}\int z^{q:q}dz(1-z)^{x-1}$$

TEOREMA II.

La forma (M')

$$\frac{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}}{(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x}}$$

. . . . . . (M')

nel caſo di $z=1$ *dopo l'integrazione ſi riduce alla forma (M)*

$$\frac{\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}dx(1-z)^{x-1}}\;\ldots\ldots(M)$$

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo per le regole di riduzione del calcolo integrale nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione

$$m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}=\frac{mx}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

$$(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x}=\frac{(m-p-1)x}{p+x+1}\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}$$

la forma (M') ſi riduce manifeſtamente a queſta

$$\frac{\frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}}$$

Ma per le medesime regole

$$\int z^{m}dz(1-z)^{x-1} = \frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

Dunque la forma (M') si riduce alla forma (M). Il che ecc.

PROBLEMA XXII.

Sommare la serie (R)

$$\frac{p+1}{m+1} + \frac{(p+1)(p+2)}{(m+1)(m+2)} + \frac{(p+1)\ldots(p+3)}{(m+1)\ldots(m+3)} + \text{ecc.}\ldots\ldots(R)$$

RISOLUZIONE.

La formula $\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della serie

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1.2}{(m+1)\ldots.(m+3)} + \text{ecc.}\ldots\ldots(A)$$

per il I. *Teorema*; e per conseguenza la formula $\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della serie

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1.2}{(p+1)\ldots.(p+3)} + \text{ecc.}\ldots\ldots(B)$$

Dunque, dividendo per ordine il termine x^{mo} della serie (A) pel termine x^{mo} della serie (B), l'espressione (M)

$$\frac{\int z^m dz(1-z)^{x-1}}{\int z^p dz(1-z)^{x-1}}$$

diventa neceſſariamente il termine generale della ſerie (R). Gli ſi dia pertanto la forma differenziale equivalente (M') del II. *Teorema*; e ſoſtituendo poſcia l' unità in luogo di x nel primo termine, ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità riſultante, e la differenza

$$\frac{p+1}{m-p-1} - \frac{m\int z^{m-1} dz(1-z)^x}{(m-p-1)\int z^p dz(1-z)^x}$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA III.

La forma (N)

$$\frac{(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x+1}}{m\int z^{m-1} dz(1-z)^{x+1}} - \frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^x}{m\int z^{m-1} dz(-z)^x}$$

.........(N)

nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, ſi riduce alla forma (M)

$$\frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^x}{\int z^m dz(1-z)^x} \;\ldots\ldots (M)$$

DIMOSTRAZIONE.

Poichè per le riduzioni del Calcolo Integrale

$$\int dz(-l.z)^{x+1} = z(-l.z)^{x+1} + \overline{x+1}\int dz(-l.z)^{x}$$

$$\int z^{m-1} dz(1-z)^{x+1} = \frac{z^{m}(1-z)^{x+1}}{m+x+1}$$

$$+\frac{x+1}{m+x+1}\int z^{m-1} dz(1-z)^{x}$$

nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, la forma (N) diventa manifeſtamente

$$\frac{(m+x+1)(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}} - \frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}}$$

Ma $m\int z^{m-1} dz(1-z)^{x} = (m+x+1)\int z^{m} dz(1-z)^{x}$, per le ſteſſe riduzioni. Per conſeguenza la forma (N) ſi riduce evidentemente alla forma (M). Il che ecc.

PROBLEMA XXIII.

Sommare la Serie (R)

$$(m+1)(m+2)^{2} + (m+1)(m+2)(m+3)^{2}$$
$$+(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)^{2} + \text{ecc.} \ldots (R)$$

RISOLUZIONE.

L' eſpreſſione $\int dz(-l.z)^{x}$ è il termine generale della ſerie

$1+1.2+1.2.3+1.2\ldots4+1.2\ldots.5+$ecc.... (*Prop. XVII*);

e l' espressione $\int z^m dz(1-z)^x$ è il termine generale delle serie

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2}{(m+1)\ldots(m+3)}$$
$$+\frac{1.2.3}{(m+1)\ldots\ldots(m+4)}+\text{ecc.}\ (\textit{Teor. I.})$$

dunque la formula

$$\frac{\int dz(-l.z)^x}{\int z^m dz(1-z)^x}$$

è il termine generale della serie

$$(m+1)(m+2)+(m+1)(m+2)(m+3)+(m+1)\ldots(m+4)+\text{ecc.}$$

Per conseguenza la formula (*M*) del Teor. precedente è il termine generale della serie proposta (*R*). Il si metta per tanto sotto la forma differenziale (*N*) del medesimo Teorema, e posta l' unità in luogo di x nel secondo termine, si sottragga la quantità risultante dal primo.

La differenza

$$\frac{(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x+1}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x+1}}-(m+1)(m+2)$$

Nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

S c o l i o.

Le Propos. precedenti non abbracciano tutto ciò che può ricercarsi in questa classe di serie. Per la qual cosa mi fo a risolvere le seguenti generalissime. I Teoremi, coll' ajuto de' quali ho superato la difficoltà di risolverle, meritano, a quello che mi pare, l' attenzione de' Geometri.

TEOREMA IV.

Nel caso di $z=1$ *dopo l' integrazione la formula* (M)

$$\frac{1}{q\left(z^{p:q+1}e^{1:qz}\right)}\int\left(z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}\right)\left(p+q(x+1)-z^{-1}\right)$$

. . . . (M)

è uguale all' unità, essendo e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico.

DIMOSTRAZIONE.

Si divida la formula (M) in due facendo per maggior semplicità $\Delta=\frac{1}{z^{p:q+1}e^{1:qz}}$. Ella diverrà

$$\Delta\int\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}-\Delta\int\frac{z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}}{q}$$

Ora, esprimendo $\delta.$ una differenziazione ordinaria, sarà

$$\delta.\left(z^{p:q+x+1}e^{1:qz}\right)=\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$

$$-\frac{1}{q}z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}$$

Per conseguenza, integrando, sara

$$\frac{1}{q}\int z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}=-z^{p:q+x+1}e^{1:qz}$$

$$+\frac{p+q(x+1)}{q}\int z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$

$$e\ \Delta\left(\int\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}\right.$$

$$\left.-\int\frac{z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}}{q}\right)=$$

$$\frac{\Delta}{q}\int\left(z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}\right)\left(p+q(x+1)-z^{-1}\right)$$

$$=\Delta z^{p:q+x+1}e^{1:qz}=z^{x}=1,$$

sostituendo l' unità il luogo di z. Il che ecc.

COROLLARIO.

Nello stesso modo si proverà, che

$$\frac{1}{q\left(z^{p:q}e^{-z:q}\right)}\int z^{p:q+x}e^{-z:q}dz\left((p+qx)z^{-1}-1\right)=z^{x}=1$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

TEOREMA V.

Nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int\left(\overline{p+qx}.z^{-1}-(m+nx+n)\right)z^{p:q+x}dz(q-nz)^{m:n-p:q}=1$$

DIMOSTRAZIONE

Si supponga per semplicità $\mu=\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}$, $\Delta=m:n-p:q$, e si divida la formula in due, come segue

$$(A)\ (p+qx)\mu\int z^{p:q+x-1}dz(q-nz)^{\Delta}$$

$$-(B)\ (m+nx+n)\mu\int z^{p:q+x}dz(q-nz)^{\Delta}$$

Ora,

Ora, essendo per le riduzioni del calcolo integrale,

$$\int z^{p:q+x} dz\,(q-nz)^{\Delta} = -\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{(p:q+x+\Delta+1)n}$$

$$+\frac{p+qx}{(p:q+x+\Delta+1)n}\int z^{p:q+x-1} dz\,(q-nz)^{\Delta}$$

$$= -\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{m+nx+n} + \frac{p+qx}{m+nx+n}\int z^{p:q+x-1} dz(q-nz)^{\Delta}$$

sarà

$$\int z^{p:q+x-1} dz(q-nz)^{\Delta} = \frac{m+nx+n}{p+qx}\int z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta}$$

$$+\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{p+qx}$$

e però $(A)-(B)=z^x=1$, sostituendo l'unità in luogo di z. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Essendo dimostrato (*Vol. V. de' primi Com. di S. Pietrob.*), che la forma

$$\frac{q^{x+1}\int dz\,(-l.z)^x}{\big(p+q(x+1)\big)\int z^{p:q} dz(1-z)^x} = K$$

è il termine generale della serie $(\mathfrak{Q})$

$p+q+(p+2q)+(p+q)\ldots(p+3q)$ ecc..... $(p+q)\ldots(p+qx)\ldots.$ $(\mathfrak{Q})$

nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione, ed essendo dimostrato presentemente, che nel medesimo caso la forma (M) del IV *Teorema* è uguale all'unità, egli è manifesto, che

$$K = \frac{1}{q\left(z^{p:q+1} e^{1:qz}\right)}\int z^{p:q+x} K e^{1:qz} dz\left(p+q(x+1)-z^{-1}\right)$$

. . . . . (P)

mentre per una parte K non è variabile, per quello che rappresenta il valore di

$$\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}$$

dopo l' integrazione, e la sostituzione dell' unità in luogo di z; e per l'altra la formula (M) nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione non è che l' unità, come il si è dimostrato; e però la forma (P) non esprime, che il termine generale della serie $(\mathfrak{Q})$ trasformato.

Corollario II.

Similmente, essendo la formula

$$\frac{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}=K'$$

il termine generale della serie reciproca

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1}{(p+q)\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

combinando questa forma con quella del *Coroll.* dopo il IV. *Teorema*, sarà per la stessa ragione

$$K'=\frac{1}{q\left(z^{p:q}e^{-z:q}\right)}\int z^{p:q+x}K'e^{-z:q}dz\left((p+qx)z^{-1}-1\right)\ldots(\mathfrak{Q}')$$

Corollario III.

E per fine, essendo l' espressione

$$\frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}}=K''$$

il termine generale della serie

$$\frac{m+n}{p+q}+\frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)}-\frac{(m+n)\ldots.(m+3n)}{(p+q)\ldots.(p+3q)} \text{ ecc.}$$

combinando questa forma con quella del V. *Teorema*, sarà

$$K''=\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int\overline{\left((p+qx)z^{-1}-(m+nx+n)\right)z^{p:q+x}K''dz\,(q-nz)^{\Delta}}\ldots(R)$$

PROBLEMA XXIV.

Sommare la serie

$$p+q+(p+q)(p+2q)+(p+q)\ldots.(p+3q)+\text{ecc.}$$

Risoluzione.

Essendo, per le regole di riduzione del calcolo integrale, nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione

$$q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}=xq^{x+1}\int dz(-l.z)^{x-1}$$

$$(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1+z)^{x}=qx\int z^{p:q}(dz(1-z)^{x-1}$$

il termine generale (P) (*Coroll.* I.) prende la seguente forma

$$\frac{1}{q\left(z^{p:q+1}e^{1:qz}\right)}\int\left\{z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\overline{p+q.\overline{x+1}}.z^{x}\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p.q}dz(1-z)^{x}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(p+qx)z^{x-1}\frac{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}\right)\right\}$$

Il si metta pertanto sotto la forma differenziale (N)

$$(A)\,\Delta\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\frac{\overline{p+q.x+1}}{q}z.^{x}\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}-\frac{p+q}{q}\right)$$

$$(B)-\Delta\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\frac{p+qx}{q}z^{x-1}.\frac{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{p+q}{q}\right)$$

$\ldots\ldots\ldots(N)$

ma, posta l' unità in luogo di x nel secondo membro (B), secondo i nostri principj, tutto svanisce. Dunque il primo termine

$$(A)\ldots\frac{1}{z^{p:q+1}e^{1:qz}}\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}}{q}z^{x}.\right.$$

$$\left.\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q.\overline{x+1})\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}-\frac{p+q}{q}\right)$$

sostituito il valore di Δ, sarà necessariamente la somma generale ricercata, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA XXV.

Sommare la serie Riciproca

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1}{(p+q).,..(p+3q)}+\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

Attese le riduzioni mentovate nella Prop. preced. si trova facilmente, che il termine generale $(\mathfrak{Q}')$ (*Coroll. II Teor. V*) di questa serie prende la seguente forma, posto

$$\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}=\Delta',$$

$$\Delta'\int\left\{z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(\frac{(p+qx)z^{x-1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}.z^{x}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)\right\}$$

Le si dia dunque la seguente forma differenziale,

$$(A)..\Delta'\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x}.\frac{(p+q.\overline{x+1})\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)$$

$$(B)..-\Delta'\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x-1}.\frac{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q^{x}\int dz.(-l.z)^{x-1}}\right)$$

Ma, come nella Prop. preced., se si faccia $x=1$ nel secondo termine (B), l' espressione svanisce. Dunque il primo

$$(A)\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x}.\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)$$

sarà la somma generale dimandata nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO.

La somma pertanto della serie all' infinito sarà

$$\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz$$

essendo infinitamente piccolo il termine

$$\frac{(p+q.\overline{x+1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{z}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}$$

nel caso di $x=\infty$, e svanendo nel medesimo tempo il fattore z^{∞} a cagione di z minore dell' unità prima dell' integrazione.

PROBLEMA XXVI.

Sommare la serie

$$\frac{m+n}{p+q}+\frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)}+\frac{(m+n)\ldots\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

Poichè per le regole di riduzione del calcolo integrale nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int z^{m:n}dz(p-qz)^{x-1}=\frac{m+nx+n}{nqx}\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}$$

$$\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x-1}=\frac{p+qx+q}{nqx}\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}$$

sarà

$$\frac{n\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x-1}}{q\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x-1}}=\frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}}$$

Per conseguenza il termine generale (R) (*Coroll. III Teor. V*) di questa serie prende la seguente forma, posto $\Delta=\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$,

$$\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q+x}dz(q-nz)^{\Delta}\left(\overline{m+nx}\,.\,z^{-1}K'''\right.$$

$$\left.-(m+nx+n)K''\right)$$

essendo K''' ciò che diventa K'' (*Coroll. III*) mettendovi $x-1$ in luogo di x.

Il si metta pertanto sotto la forma differenziale, che segue

$$(A)..\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q}dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+n-(m+nx+n)\,z^{x}\,K''\right)$$

$$(B)...\frac{-1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q}dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+n-(m+nx)z^{x-1}\,K'\right)$$

e poichè, facendo $x=1$ nel ſecondo membro (B), l'eſpreſſione ſvaniſce, egli è evidente, che il primo termine (A), ſoſtituiti i valori di K' e Δ

$$(A)...\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int\left\{z^{p:q}dz(q-nz)^{m:n-p:q}\right.$$
$$\left.\left(m+n-(p+qx+q)z^{x}.\;\frac{n\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q\int z^{m:n}dz(q-qz)^{x}}\right)\right\}$$

ſarà la ſomma generale ricercata nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO.

In conſeguenza, eſſendo la ſerie decreſcente, ſarà, per quello che s'è detto nel Coroll. della Prop. precedente, la ſomma all'infinito eſpreſſa in queſto modo

$$\frac{m+n}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int z^{p:q}dz\,(q-nz)^{m:n-p:q}$$

SCOLIO.

Sarebbe qui a propoſito l' applicare generalmente il metodo anche quando il numero de' fattori va creſcendo di un numero m maggiore dell' unità, come ſe n'è fatto menzione qui innanzi, e ſe n' è pure dato un eſempio (*Prop. XVIII*); ma penſo, che torni meglio ripigliare queſto ſoggetto in altra occaſione, ove farò vedere, che s' eſtende il metodo anche ai caſi ne' quali il numero m non è coſtante; il che non potrebbe farſi con alcun metodo conoſciuto; tanto più, che in sì fatta ricerca s' offrono da confiderare moltiffimi importanti Teoremi di calcolo integrale, che non fono poi di quefto luogo.

CAPITOLO SETTIMO.

DELLE SERIE LOGARITMICHE.

IL legame, che ha il calcolo integrale con le ferie logaritmiche, e l'ufo, che fe ne può fare in moltiffime occafioni, m'ha determinato a formarne una nuova Claffe, e non fenza frutto. Imperciocchè, mentre non avevamo altre forme per efprimere i termini generali delle ferie a fattori crefcenti, delle quali abbiamo trattato nel Capitolo precedente, fuorchè quelle che il Sig. *Eulero* ha pubblicato nel *V. Vol. de' Vecchj Com. di S. Pietrob.*, avremo quì un nuovo modo di efprimerli, che ho ricavato dalla confiderazione delle ferie logaritmiche, e infieme alcuni Teoremi non inutili al progreffo dell' Analifi.

PROBLEMA XXVII.

Trovare la fomma generale della ferie
$l.\,2 + l.\,3 + l.\,4 + l.\,5 + \text{ecc.} \;\ldots\ldots\; l.\,\overline{x+1}$

RISOLUZIONE.

Effendo dimoftrato nel *Vol. XIX de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 70, che

$$\int \frac{z^x dz}{l.z} = l.\,\overline{x+1} + \int \frac{dz}{l.z}$$

nel cafo di $z = 1$ dopo l' integrazione, egli è manifefto che quefta efpreffione rapprefenta il termine generale della

della ferie. Si metta pertanto la formula $\int \frac{z^x\,dz}{l.\,z}$ fotto forma differenziale, come fegue

$$(A)\int \frac{z^x\,dz}{(1-z)\,l.z} - (B)\int \frac{z^{x+1}dz}{(1-z)\,l.z}$$

e avendo foftituito l'unità in luogo di x nel termine (A), fi fottragga dalla quantità che ne rifulta $\int \frac{zdz}{(1-z)l.z}$ il fecondo termine (B). Si avrà l'efpreffione

$$\int \frac{zdz\,(1-z^x)}{(1-z)\,l.z}$$

Ma il termine generale della ferie è

$$\int \frac{z^x dz}{l.z} - \int \frac{dz}{l.z} \;\ldots\ldots\; (M)$$

Dunque la fomma generale completa della ferie farà neceffariamente

$$\int \frac{zdz\;(1-z^x)}{(1-z)\,l.z} - x\int \frac{dz}{l.z} = \int \frac{dz}{(1-z)l.z}\big(z(1-z^x)-x(1-z)\big)$$

nel cafo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

Corollario I.

Mettendo $p+qx-1$ in luogo di x nell'efpreffione (M), è manifefto che la formula

$$\int \frac{z^{p+qx-1}dz}{l.z} - \int \frac{dz}{l.z} = l.\;\overline{p+qx}$$

nel cafo di $z=1$ dopo l'integrazione, farà il termine generale della ferie

$$l.\;(p+q) + l.\;(p+2q) + l.\;(p+3q) + \text{ecc.}$$

Operando pertanto come s'è fatto nella Propofizione precedente, fi troverà, che l'efpreffione

$$\int \frac{dz}{(1-z^q)\,l.z}\big(\,z^{p+q-1}\,(1-z^{qx}) - x\,(1-z^q)\big)$$

farà la fomma generale delle ferie.

Tt

COROLLARIO II.

E poichè
$$l.2+l.3+l.4+\text{ecc.}\ldots l.(x+1)=l.\big(2.3.4\ldots(x+1)\big)$$
$$l.(p+q)+l.(p+2q)+l.(p+3q)+\text{ecc.}\ldots l.(p+qx)$$
$$=l.\big((p+q.(p+2q)\ldots(p+qx)\big)$$
Se sia e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico, sarà

$$(A)\ldots e^{\int\frac{dz}{(1-z)l.z}\left(z(1-z^x)-x(1-z)\right)}=2.3.4\ldots\overline{x+1}$$

$$(B)\ldots e^{\int\frac{dz}{(1-z^q)l.z}\left(z^{p+qx-1}(1-z^{qx})-x(1-z^q)\right)}=(p+q)(p+2q)\ldots(p+qx)$$

e però (A), (B) saranno i termini generali delle serie
$$2+2.3+2.3.4.+2.3.4.5.+\text{ecc.}$$
$$p+q+(p+q)(p+2q)+(p+q)(p+2q)(p+3q)+\text{ecc.}$$

COROLLARIO III.

Paragonandoli dunque con quei del Sig. *Eulero* usati nel Cap. precedente (*Prop. XVII e Coroll. I del Teor. V*) avremo i seguenti Teoremi

$$e^{\int\frac{dz}{(1-z)l.z}\left(z(1-z^x)-x(1-z)\right)}=\int dz(-l.z)^{x+1}$$

$$e^{\int\frac{dz}{(1-z^q)l.z}\left(z^{p+qx-1}(1-z^{qx})-x(1-z^q)\right)}=\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^x}{(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(1-z)^x}$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

PROBLEMA XXVIII.

Sommare la serie

$$l.\frac{m+n}{p+q}+l.\frac{m+2n}{p+2q}+l.\frac{m+3n}{p+3q}+\text{ecc.}\ldots l.\frac{m+nx}{p+qx}$$

RISOLUZIONE.

Essendo nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$(\mathfrak{Q})\ldots\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{p+qx-1}-1\right)=l.(p+qx)$$

$$(\mathfrak{Q}')\ldots\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{m+nx-1}-1\right)=l.(m+nx)$$

pel primo Coroll. della Prop. precedente, sarà evidentemente

$$\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{m+nx-1}-z^{p+qx-1}\right)=l.\frac{m+nx}{p+qx}=(\mathfrak{Q}')-(\mathfrak{Q})$$

Ma per lo stesso Coroll. la somma generale della serie $(\mathfrak{Q})$ è

$$\int\frac{dz}{(1-z^q)l.z}\left(z^{p+q-1}(1-z^{qx})-x(1-z^q)\right)\ldots(R)$$

e la somma generale delle serie $(\mathfrak{Q}')$

$$\int\frac{dz}{(1-z^n)l.z}\left(z^{m+n-1}(1-z^{nx})-x(1-z^q)\right)\ldots(R')$$

Dunque $(R')-(R)$

$$=\int\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{m+n-1}(1-z^{nx})}{1-z^n}-\frac{z^{p+q-1}(1-z^{qx})}{1-z^q}\right)$$

sarà la somma generale ricercata, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che &c.

COROLLARIO IV.

Sarà pertanto

$$e^{(R')-(R)} = \frac{m+n}{p+q} \cdot \frac{m+2n}{p+2q} \cdot \frac{m+3n}{p+3q} \cdots\cdots \frac{m+nx}{p+qx}$$

E comparando questo nuovo termine generale della serie

$$\frac{m+n}{p+q} + \frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)} + \frac{(m+n)\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots\ldots(p+3q)} + \text{ecc.}$$

con quello del Sig. *Eulero* usato nel *Cap. proced. Coroll. III del Teor. V* si avrà questo Teorema

$$e^{(R')-(R)} = \frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}\,dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}\,dz(q-qz)^{x}}$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

PROBLEMA XXIX.

Sommare la serie

$$l.\frac{(a+b)(c+e)}{(m+n)(p+q)} + l.\frac{(a+2b)(c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} \cdots + l.\frac{(a+bx)(c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$$

RISOLUZIONE.

Essendo, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$(A)\ldots \int \frac{dz}{l.z}\left(z^{a+bx-1} - z^{m+nx-1}\right) = l.\frac{a+bx}{m+nx}$$

$$(B)\ldots \int \frac{dz}{l.z}\left(z^{c+ex-1} - z^{p+qx-1}\right) = l.\frac{c+ex}{p+qx}$$ (*Prop. precedente*)

Sarà $(A)+(B)=l.\frac{a+bx}{m+nx}+l.\frac{c+ex}{p+qx}=l.\frac{(a+bx)(c+ex(}{(m+nx)(p+qx)}$
il termine generale della proposta serie.

Ma la somma generale della serie, di cui (A) è il termine generale, è di questa forma

$$(P)\ldots\int\left\{\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{a+b-1}(1-z^{bx})}{1-z^{b}}-\frac{z^{m+n-1}(1-z^{nx})}{1-z^{n}}\right)\right\}$$

e la somma generale della serie, che ha (B) per termine generale, è espressa così

$$(P')\ldots\int\left\{\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{c+e-1}(1-z^{ex})}{1-z^{e}}-\frac{z^{p+q-1}(1-z^{qx})}{1-z^{q}}\right)\right\}$$

(*Prop. preced.*)

Per conseguenza $(P)+(P')$ sarà manifestamente la somma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO V.

Nello stesso modo si troverebbe, che $(P)-(P')$ è la somma generale della serie

$$l.\frac{(a+b)(p+q)}{(c+e)(m+n)}+l.\frac{(a+2b)(p+2q)}{(c+2e)(m+2n)}+\text{ecc.}$$

COROLLARIO VI.

Così procedendo non sarebbe difficile cosa il ritrovare le somme di queste serie logaritmiche, qualunque si fosse il numero de' fattori.

COROLLARIO VII.

E poichè, passando dai logaritmi ai numeri, si ha

$$e^{(P)+(P')} = \frac{(a+b)\ (c+e)}{(m+n)(p+q)} \cdot \frac{(a+2b)\ (c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} \cdots \frac{(a+bx)\ (c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$$

sarà $e^{(P)+(P')}$ il termine generale della serie

$$\frac{(a+b)(c+e)}{(m+n)(p+q)} + \frac{(a+b)\ (c+e)}{(m+n)(p+q)} \cdot \frac{(a+2b)\ (c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} + \text{ecc.} \ldots\ldots (R)$$

Ma, secondo il Signor *Eulero*,

$$\frac{b(m+nx+n)\int z^{m:n}\,dz\,(b-bz)^{x}}{n(a+bx+b)\int z^{a:b}\,dz\,(n-nz)^{x}} = \mathfrak{Q}$$

è il termine generale della serie

$$\frac{a+b}{m+n} + \frac{(a+b)\ (a+2b)}{(m+n)\ (m+2n)} + \text{ecc., e}$$

$$\frac{e\,(p+qx+q)\int z^{p:q}\,dz\,(e-ez)^{x}}{q(c+ex+e)\int z^{c:e}\,dz\,(q-qz)^{x}} = \mathfrak{Q}'$$

è il termine generale della serie

$$\frac{c+e}{p+q} + \frac{(c+e)(c+2e)}{(p+q)(p+2q)} + \text{ecc.}$$

E però $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}'$ è il termine generale della serie (R). In conseguenza si avrà questo bel Teorema

$$e^{(P)+(P')} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}'$$

nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione. E facendo $c=a$, $e=b$, $p=m$, $q=n$, sarà

$$e^{2(P)} = \mathfrak{Q}^2$$

$$e^{3(P)} = \mathfrak{Q}^3$$

. . . .

$$e^{\Delta(P)} = \mathfrak{Q}^\Delta$$

PROBLEMA XXX.

Sommare le ſerie del Signor Eulero (Vol. XIX. de' nuovi Com. di S. Pietrob.)

$$l.2 + (l.3 - 2\,l.2) + (l.4 - 3\,l.3 + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}\,l.2)$$

$$+ (l.5 - 4\,l.4 + \frac{3 \cdot 4\,l.3}{1 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,l.2) + \text{ecc.} \ldots \ (I)$$

RISOLUZIONE.

Avendo dimoſtrato queſto Geometra, che nel caſo di $z = 1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{(z-1)^x dz}{l.z} = l.(x+1) - \frac{x}{1}\,l.x + \frac{x.(x-1)}{1 \cdot 2}\ l.(x-1)$$

$$- \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3.}\ l.(x-2)$$

$+$ ecc. è manifeſto, che queſta formula è il termine generale della ſerie (I). La ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$(A) \int \left(\frac{(z-1)^x dz}{(2-z)\,l.z} \right) - (B) \int \left(\frac{(z-1)^{x+1} dz}{(2-z)\,l.z} \right)$$

e avendo poſto l'unità in luogo di x nel termine (A), dalla quantità riſultante ſi ſottragga il ſecondo termine (B); l'eſpreſſione

$$\int \frac{(z-1)dz}{(2-z)l.z} \left(1-(z-1)^x\right)$$

ſarà, nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, la ſomma generale della ſerie (I). Il che ecc.

PROBLEMA XXXI.

Sommare la ſerie
$l.$ ſen. $\Delta + l.$ ſen. $2\Delta + l.$ ſen. $3\Delta \ldots\ldots + l.$ ſen. $x\Delta$

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato nel medeſimo luogo (*pag.* 86), che nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1-z^{2n}} \cdot \frac{dz}{l.z} = l.\text{ ſen. } \frac{\pi(n-u)}{2n}$$

mentre ſia π la circonferenza d'un cerchio, di cui l'unità è diametro; ſi faccia $\frac{\pi}{2n} = \Delta$, $u = \frac{\pi}{2\Delta} - x$; ſarà nel medeſimo caſo

$$\int \frac{z^{x-1}+z^{\pi:\Delta-x-1}}{1-z^{\pi:\Delta}} \cdot \frac{dz}{l.z} = l.\text{ ſen. } x\Delta$$

il termine generale della propoſta ſerie.

Il ſi metta pertanto ſotto forma differenziale così

$$\int \frac{z^{x-1}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} - \int \frac{z^{x}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

$$+ \int \frac{z^{\pi:\Delta-x-1}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} - \int \frac{z^{\pi:\Delta-x-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

e ſi ponga l'unità in luogo di x nel primo e terzo termine. Si avrà

$$(A) \int \frac{dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}, \quad (B) \int \frac{z^{\pi:\Delta-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

Si ſottragga

Si sottragga da (A) il secondo termine, e da (B) il quarto.

Si otterrà così l' espressione

$$\int \frac{(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} + \int \frac{z^{\pi:\Delta-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z}$$

La quale si riduce alla seguente forma agevolmente

$$(M) \ldots\ldots\ldots \int \frac{(1+z^{\pi:\Delta-x-1})(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

e sarà ella la somma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA XXXII.

Sommare la serie

$l.\operatorname{cos}.\Delta + l.\operatorname{cos}.2\Delta + l.\operatorname{cos}.3\Delta \ldots\ldots + l.\operatorname{cos}.x\Delta$

RISOLUZIONE.

Se nell' espressione $\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1-z^{2n}}\right)$

si faccia $\frac{\pi}{2\Delta}=n$, $u=x$, essendo sen. $\frac{\pi(n-u)}{2n}=\operatorname{cos}.\frac{\pi u}{2n}$,

sarà $\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-1}+z^{\pi:2\Delta+x-1}}{1-z^{\pi:\Delta}}\right)=l.\operatorname{cos}.x\Delta$

il termine generale della serie proposta.

Gli si dia pertanto la forma differenziale seguente

$$(1)\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-1}}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})}\right)-\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-2}}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})}\right)(2)$$

$$(3)+\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta+x-1}}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})}\right)-\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta+x}}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})}\right)(4)$$

Si sostituisca poi l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e dalle quantità risultanti si sottraggano rispettivamente i termini (2), (4). Sarà

$$\int \frac{z^{\pi:2\Delta-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z} + \int \frac{z^{\pi:2\Delta}(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

$$=\int \frac{z^{\pi:1\Delta} dz}{l.z}\left(\frac{(1+z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})}\right) \ldots\ldots (N)$$

La somma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO VIII.

Consegue evidentemente dalle due Proposizioni precedenti la verità di due importanti Teoremi; cioè, passando dai logaritmi ai numeri, sarà generalmente

$$e^{(M)} = \text{sen.}\,\Delta\ \text{sen.}\,2\Delta\ \text{sen.}\,3\Delta \ldots\ldots \text{sen.}\,x\Delta$$

$$e^{(N)} = \text{cos.}\,\Delta\ \text{cos.}\,2\Delta\ \text{cos.}\,3\Delta \ldots\ldots \text{cos.}\,x\Delta$$

TEOREMA.

Sia (N′) *quello che diventa l'espressione* (N) *della Proposizione precedente, mettendovi* $\frac{1}{2^x}$ *in luogo di* x: *dico, che quando* x $=\infty$, π *essendo la circonferenza d'un cerchio che ha l'unità per diametro, sarà* $\pi = 2e^{-(N')}$

DIMOSTRAZIONE.

Facendo $\frac{\pi}{2} = K$, K è la quarta parte della circonferenza d'un cerchio, che ha l'unità per raggio. Ma si dimostra facilmente, essere

$$\frac{1}{\text{cos.}\frac{K}{2}} = 2\ \text{sen.}\,\frac{K}{2}$$

$$\frac{1}{\text{cos.}\frac{K}{2}\ \text{cos.}\frac{K}{4}} = 4\ \text{sen.}\,\frac{K}{4}$$

. . . .

$$\frac{1}{\operatorname{cof.}\frac{K}{2}\operatorname{cof.}\frac{K}{4}\;\ldots\ldots\;\operatorname{cof.}\frac{K}{2^x}} = 2^x \operatorname{fen.}\frac{K}{2^x}.$$

Essendosi dunque dimostrato (*Coroll. VIII.*), che

$$e^{-(N)} = \frac{1}{\operatorname{cof.} K \operatorname{cof.} 2K \operatorname{cof.} 3K \text{ ecc.} \ldots \operatorname{cof.} xK}$$

sarà, mettendo $\frac{1}{2^x}$ in luogo di x,

$$e^{-(N')} = \frac{1}{\operatorname{cof.}\frac{K}{2}\operatorname{cof.}\frac{K}{4}\operatorname{cof.}\frac{K}{16}\text{ecc.}} = 2^x \operatorname{fen.}\frac{K}{2^x}$$

Ma nel caso di $x = \infty$, 2^x fen. $\frac{K}{2^x} = K$. Dunque nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione, e di $x = \infty$ sarà

$$2e^{-(N')} = 2e^{-\int\frac{(1+z^{1:2^x})(1-z^{1:2^x})dz}{z^{1:2^x}(1-z)(1-z^2)l.z}} = 2K = \pi.$$

ch'è un'espressione del cerchio totalmente nuova. Il che ecc.

PROBLEMA XXXIII.

Sommare la serie
$l.\text{ tang. } a + l.\text{ tang. } 2a + l.\text{ tang. } 3a \ldots\ldots l.\text{ tang. } xa$

Risoluzione.

Poichè nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{n+x-1} - z^{n-x-1}}{1+z^{2n}} \cdot \frac{dz}{l.z} = l.\text{ tang. } \frac{\pi(n+x)}{4n}$$

siccome è dimostrato nel *XIX Vol. de' nuovi Com. di S.*

Pietrob., si faccia $\frac{\pi}{4n}=a$, e si metta $x-\frac{\pi}{4a}$ in luogo di x; l' espressione

$$\int \frac{z^{x-1}-z^{\pi:2a-x-1}}{1+z^{\pi:2a}}\cdot\frac{dz}{l.z}$$

sarà il termine generale della serie. Gli si dia perciò la forma differenziale, che segue

$$(1)\int\frac{z^{x-1}dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}-(2)\int\frac{z^{x}dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

$$(3)-\int\frac{(z^{\pi:2a-x-1})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z}+(4)\int\frac{(z^{\pi:2a-x-2})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

Posta quindi l' unità in luogo di x ne' due termini (1), (3), si sottraggano dalle quantità risultanti i termini (2), (4). Sarà

$$\int\frac{(1-z^{x})dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}-\int\frac{z^{\pi:2a-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

$$=\int\frac{(1-z^{\pi:2a-x-1})dz(1-z^{x})}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}\;\ldots\ldots\;(P)$$

la somma generale della serie proposta nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO IX.

Ed essendo $\frac{1}{\text{cot.}\,xa}=\text{tang.}\,xa$, e $l.$ tang. $xa=-l.$ cot. xa, la somma generale della serie

$l.\ \text{cot.}\ a + l.\ \text{cot.}\ 2a + l.\ \text{cot.}\ 3a \ldots\ldots l.\ \text{cot.}\ xa$

sarà evidentemente

$$\int \frac{\left(z^{\pi:2a-x-1}-1\right)\left(1-z^{x}\right)dz}{(1-z)\left(1+z^{\pi:2a}\right)l.z} \ldots\ldots (\mathfrak{Q})$$

COROLLARIO X.

Avremo dunque, in aggiunta agli altri, anche i due Teoremi, che seguono

$$e^{(P)} = \text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ 2a\ \text{tang.}\ 3a \ldots\ \text{tag.}\ xa$$

$$e^{(\mathfrak{Q})}\ \ \text{cot.}\ a\ \text{cot.}\ 2a\ \text{cot.}\ 3a \ldots\ \text{cot.}\ xa$$

facendo passaggio dai logaritmi ai numeri.

CAPITOLO OTTAVO

DELLE SERIE A PRODOTTI INFINITI.

NOn è ignota la teoria de' prodotti infiniti dopo ciò che ne hanno sapientemente scritto *Wallis*, *Euler*, *de la Grange*, ed altri Geometri. Ma, avendolo trovato utile in alcune occasioni, credo, che importi il metterli per la prima volta in serie, e il formarne un ordine apposito. Ogni termine è realmente finito, ma apparisce sotto una forma infinita, essendo composto d' un numero infinito di fattori, che formano un prodotto continuo.

TEOREMA I.

Nel caso di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$(A)\int z^{a-1}dz(1-z^{b})^{(m+p):p}$$

$$=(B)\frac{1}{b}\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{(m+p):p}$$

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia $a-1=n$, $\frac{m+p}{p}=r$, e si sviluppi l'espressione integrale (A). Si avrà pertanto

$$(1-z^{b})^{r}=1-\frac{rz^{b}}{1}+\frac{r(r-1)z^{2b}}{1.2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}z^{3b}+\text{ecc.}$$

e però

$$\int z^{n}dz(1-z^{b})^{r}=\frac{z^{n}}{n+1}-\frac{rz^{n+b+1}}{1(n+b+1)}$$

$$+\frac{r.(r-1)z^{n+2b+1}}{1.2(n+2b+1)}-\text{ecc.}$$

Ma poichè, facendo $z=0$, tutto svanisce, si faccia $z=1$, e si avrà

$$\frac{1}{a}-\frac{r}{1(a+b)}+\frac{r(-1)}{1.2(a+2b)}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3(a+3b)}+\text{ecc} \ldots\ldots (M)$$

Similmente sviluppando la formula (B), sarà

$$(1-z)^{r}=1-\frac{rz}{1}+\frac{r(r-1)}{1.2}z^{2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}z^{3}+\text{ecc.}$$

$$\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{r}=\frac{bz^{a:b}}{a}-\frac{brz^{a:b+1}}{1(a+b)}$$

$$+\frac{br(r-1)z^{a:b+2}}{1.2(a+2b)}-\text{ecc.}$$

e infine, posto $z=1$,

$$\frac{1}{b}\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{r}=\frac{1}{a}-\frac{r}{1(a+b)}+\frac{r(r-1)}{1.2(a+2b)}$$

$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3.(a+3b)} + \text{ecc.}$$

ch' è appunto la ſerie (M). Dunque ecc. Il che ecc.

COROLLARIO I.

E poichè ſi dimoſtrerebbe nello ſteſſo modo, che $\int z^{f-1} dz(1-z^{g})^{(m+p):p} = \frac{1}{g}\int z^{f:g-1} dz(1-z)^{(m+p):p}$ ſi conchiuda, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$\frac{\int z^{a-1} dz\left(1-z^{b}\right)^{(m+p):p}}{\int z^{f-1} dz\left(1-z^{g}\right)^{(m+p):p}} = \frac{g\int z^{a:b-1} dz(1-z)^{(m+p):p}}{b\int z^{f:g-1} dz(1-z)^{(m+p):p}}$$

TEOREMA II.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\int z^{a-1} dz(1-z^{b})^{(m-p):p} = \frac{p}{am} \cdot \frac{2(ap+bm)}{(a+b)(m+p)} \cdot \frac{3\left(ap+b(m+p)\right)}{(a+2b)(m+2p)} \cdot \frac{4\left(ap+b(m+2p)\right)}{(a+3b)(m+3p)} \text{ ecc.}$$

all' infinito . . . . . . (P)

Se ne vegga la dimoſtrazione nel *I Vol. del Calc. Integrale* del Sig. *Eulero pag.* 264.

TEOREMA III.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\frac{\int z^{a-1} dz(1-z^{p})^{(m-p):p}}{\int z^{f-1} dz(1-z^{p})^{(q-p):p}}$$

$$= \frac{fq(a+m)}{am(f+q)} \cdot \frac{(p+f)(q+p)(a+m+p)}{(a+p)(m+p)(f+q+p)} \cdot \frac{(p+2f)(q+2p)(a+m+2p)}{(a+2p)(m+2p)(f+q+2p)}$$

$$\cdot \frac{(p+3f)(q+3p)(a+m+3p)}{(a+3p)(m+3p)(f+q+3p)} \text{ ecc.......} (Q) \; (\textit{ibidem pag. } 269)$$

PROBLEMA XXXIV.

Trovare la somma generale della serie (B)

$$\frac{p}{a} \cdot \frac{2(ap+b)}{(a+b)(1+p)} \cdot \frac{3(ap+b(p+1))}{(a+2b)(1+2p)} \cdot \frac{4(ap+b(2p+1))}{(a+3b)(1+3p)} \text{ ecc.}$$

$$+ \frac{p}{2a} \cdot \frac{2(ap+2b)}{(a+b)(2+p)} \cdot \frac{3(ap+b(p+2))}{(a+2b)(2+2p)} \cdot \frac{4(ap+b(2p+2))}{(a+3b)(2+3p)} \text{ ecc.}$$

$$+ \frac{p}{3a} \cdot \frac{2(ap+3b)}{(a+b)(3+p)} \cdot \frac{3(ap+b(p+3))}{(a+2b)(3+2p)} \cdot \frac{4(ap+b(2p+3))}{(a+3b)(3+3p)} \text{ ecc.}$$

$$+ \text{ ecc.........} (B)$$

Risoluzione.

Se si metta x, esponente ordinario de' termini, in luogo di m nell'equazione (*P*) *del II Teorema*, è manifesto, che sostituendo nel prodotto infinito i numeri naturali successivamente in luogo di x, ne risulta la serie (*B*), di cui la formula

$$\int z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p:p}}$$

sarà necessariamente il termine generale. Posto ciò, si metta questa formula sotto la forma differenziale

$$\int \frac{z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p:p}}}{1-(1-z^b)^{1:p}} - \int \frac{z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p+1:p}}}{1-(1-z^b)^{1:p}}$$

e, posta poi l' unità in luogo di x nel primo termine, se si sottraga il secondo termine dalla quantità risultante, l' espressione, che segue

$$\int \frac{z^{a-1} dz(1-z^{b})^{(1-p):p}\left(1-(1-z^{b})^{x:p}\right)}{1-(1-z^{b})^{1:p}}$$

farà la somma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA XXXV.

Sommare la serie (M)

$$\frac{p}{m}\cdot\frac{2(p+bm)}{(1+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(p+b(m+p)\right)}{(1+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(p+b(m+2p)\right)}{(1+3b)(m+3p)}\text{ ecc.}$$

$$+\frac{p}{2m}\cdot\frac{2(2p+bm)}{(2+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(2p+b(m+p)\right)}{(2+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(2p+b(m+2p)\right)}{(2+3b)(m+3p)}\text{ ecc.}$$

$$+\frac{p}{3m}\cdot\frac{2(3p+bm)}{(3+b)(m+p)}\cdot\frac{3\left(3p+b(m+p)\right)}{(3+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(3p+b(m+2p)\right)}{(3+3b)(m+3p)}\text{ ecc.}$$

. . . . (M)

RISOLUZIONE.

Si ponga x in luogo di a nell' equazione (P) del *II. Teorema*. E' manifesto, che l' espressione

$$\int z^{x-1} dz(1-z^{b})^{(m-p):p}$$

farà il termine generale della serie (M). Il si metta pertanto sotto la forma differenziale

$$\int \frac{z^{x-1} dz(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z} - \int \frac{z^{x} dz(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z}$$

e, procedendo come nella Proposizione antecedente, si avrà l' espressione

$$\int \frac{dz(1-z^{x})(1-z^{b})^{(m-p):p}}{1-z}$$

La quale, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, farà la somma generale dimandata. Il che ecc.

COROLLARIO II.

Con questo metodo si potranno convertire in serie i prodotti infiniti degli Esempj I, II, III, IV del calcolo integrale sopraccitato *Vol. I. pag.* 265, ed altri senza numero, subordinandoli a questa classe, e determinando col nostro metodo le somme a parte a parte.

PROBLEMA XXXVI.

Sommare la serie (I)

$$\frac{p}{(f+g)(p+q+r)} \cdot \frac{2\big(p(f+g)+b(p+q+r)\big)}{(f+g+b)(2p+q+r)} \cdot \frac{3\big(p(f+g)+b(2p+q+r)\big)}{(f+g+2b)\ (3p+q+r)} \text{ ecc.}$$

$$+\frac{p}{(f+2g)(p+q+2r)} \cdot \frac{2\big(p(f+2g)+b(p+q+2r)\big)}{(f+2g+b)(2p+q+2r)} \cdot \frac{3\big(p(f+2g)+b(2p+q+2r)\big)}{(f+2g+2b)\ (3p+q+2r)} \text{ ecc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots (I)$$

RISOLUZIONE.

Si metta $f+gx$ in luogo di a nell'equazione (P) del II Teorema, $p+q+rx$ in luogo di m. Il prodotto infinito, sostituendo successivamente i numeri naturali in luogo di x, darà la serie (I), e l'espressione

$$\int z^{f+gx-1}\, dz\,(1-z^b)^{(q+rx):p}$$

sarà il suo termine generale. Gli si dia pertanto la forma differenziale

$$\int \frac{z^{f+gx-1}\, dz\,(1-z^b)^{(q+rx):p}}{1-z^g(1-z^b)^{r:p}} - \int \frac{z^{(f+g(x+1)-1}\, dz\,(1-z^b)^{(q+r(x+1)):p}}{1-z^g(1-z^b)^{r:p}}$$

e sostituendo l'unità in luogo di x nel primo termine, si sottragga il secondo dalla quantità, che ne risulta; sarà la formula

$$\int \frac{z^{f+g-1}dz(1-z^b)^{(q+r):p}\left(1-z^{gx}(1-z^b)^{rx:p}\right)}{1-z^g(1-z^b)^{r:p}}$$

la somma generale della serie (I) nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

TEOREMA IV.

Nel caso di $z=1$ *dopo l'integrazione*

$$\int z^{\mu-1}dz(1-z)^{\omega-1} = \int z^{\omega-1}dz(1-z)^{\mu-1}$$

DIMOSTRAZIONE.

E' dimostrato dal Sig. *Eulero*, che in questo caso

$$\int z^{m-1}dz(1-z^n)^{(K-n):n} = \int z^{k-1}dz(1-z^n)^{(m-n):n}$$

(*ved. il calc. integr. T. 5 pag. 262*). Si faccia $K:n=\mu$, $m:n=\omega$. Sarà stessamente

$$\int z^{m-1}dz\left(1-z^n\right)^{\mu-1} = \int z^{K-1}dz\left(1-z^n\right)^{\omega-1}$$

Ma

$$\int z^{m-1}dz\left(1-z^n\right)^{\mu-1} = \frac{1}{n}\int z^{m:n-1}dz\left(1-z\right)^{\mu-1}$$

$$\int z^{K-1}dz\left(1-z^n\right)^{\omega-1} = \frac{1}{n}\int z^{K:n-1}dz\left(1-z\right)^{\omega-1}$$

per ciò che abbiamo dimostrato nel I Teorema. Rimettendo dunque i valori $K:n$, $m:n$, sarà evidentemente nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione

$$\int z^{\mu-1}dz\left(1-z\right)^{\omega-1} = \int z^{\omega-1}dz\left(1-z\right)^{\mu-1}$$

Il che ecc.

PROBLEMA XXXVII.

Sommare la serie (M)

$$\frac{f(a+p)}{a(f+p)}\cdot\frac{(p+f)(a+2p)}{(a+p)(f+2p)}\cdot\frac{(p+2f)(a+3p)}{(a+2p)(f+3p)}\cdot \text{ecc.}$$
$$+\frac{f(a+2p)}{a(f+2p)}\cdot\frac{(p+f)(a+3p)}{(a+p)(f+3p)}\cdot\frac{(p+2f)(a+3p)}{(a+2p)(f+4p)}\,\text{ecc.}$$
$$+\ \text{ecc.}\ \ldots\ldots\ldots\ (M)$$

Risoluzione.

Si ponga px in luogo di m, e di q nell' equazione ($\mathfrak{Q}$) del III Teorema; il prodotto infinito con la sostituzione successiva de' numeri naturali in luogo di x darà la serie (M), di cui sarà per conseguenza termine generale la formula (S)

$$\frac{\int z^{a-1}dz\left(1-z^{p}\right)^{x-1}}{\int z^{f-1}dz\left(1-z^{p}\right)^{x-1}}\ \ldots\ldots\ (S)$$

Ma l' espressione (S) pel *I Coroll. del Teor. I* si cangia nell' espressione (T)

$$\frac{\int z^{a:p-1}dz\left(1-z\right)^{x-1}}{\int z^{f:p-1}dz\left(1-z\right)^{x-1}}\ \ldots\ldots\ (T)$$

Si metta per tanto (T) sotto la forma differenziale

$$\frac{(a-p)\int z^{a:p-2}dz(1-z)^{x-1}}{(a-f-p)\int z^{f:p-1}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{(a-p)\int z^{a:p-2}dz(1-z)^{x}}{(a-f-p)\int z^{f:p-1}dz(1-z)^{x}}$$

(*veggasi il II Teorema del Cap. VI*), e fatte le stesse operazioni della Prop. XXII, sarà

$$-\frac{\int z^{a:p-2}\,dz(1-z)^x}{\int z^{f:p-2}\,dz(1-z)^x}$$

la somma generale della serie (M). Il che ecc.

Corollario III.

Nello stesso modo si troverebbe la somma della serie di cui

$$(M)\ldots\frac{\int z^{x-1}\,dz(1-z)^{m-1}}{\int z^{x-1}\,dz(1-z)^{q-1}}=\frac{q(m+x)(1+x)(1+q)(m+x+1)}{m(q+x)(1+x)(1+m)(q+x+1)}\cdot$$

$$\frac{(1+2x)(2+q)(m+x+2)}{(2+x)(2+m)(q+x+2)}\cdot\frac{(1+3x)(3+q)(m+x+3)}{(3+x)(3+m)(q+x+3)}\text{ ecc.}$$

è il termine generale. Imperciocchè, essendosi dimostrato, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione,

l' espressione $(M)=\dfrac{\int z^{m-1}\,dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{q-1}\,dz(1-z)^{x-1}}$ (*IV Teor.*),

la somma della serie si riduce agevolmente a quella della Prop. antecedente.

Scolio.

Questa Classe di serie è suscettibile di grandissima ampliazione. E molto vi avrebbe da osservare ravvicinandola a quella de' fattori crescenti. Non vo' per altro occuparmivi presentemente di più, e mi fo a prendere per mano un altr' ordine di serie anologhe, le quali hanno per termini serie infinite, di valore per altro finito, al par de' prodotti infiniti, ma trascendente.

CAPITOLO NONO

DELLE SERIE A TERMINI TRASCENDENTI.

PROBLEMA XXXVIII.

Sommare la ferie (A)

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\text{ecc.}$$
$$+1-\frac{2}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}-\frac{2^3}{4^4}+\text{ecc.}$$
$$+1-\frac{3}{2^2}+\frac{3^2}{3^3}-\frac{3^3}{4^4}+\text{ecc.}$$
$$+\text{ecc.}\ \ldots\ldots\ (A)$$

RISOLUZIONE.

Essendo dimoftrato (*Calc. Integr. di Eulero T. I pag.* 144.) che nel cafo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int z^{xz}dz=1-\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^3}-\frac{x^3}{4^4}+\text{ecc.}$$

è manifefto, che l' integrale fviluppato fomminiftra la ferie (A) con la foftituzione fucceffiva de' numeri naturali in luogo di x, oppur anche la ferie (A')

$$\int z^{z}dz+\int z^{2z}dz+\int z^{3z}dz+\text{ecc.}\ \ldots\ (A')$$

che ha $\int z^{xz}dz$ per termine generale.

Pofto ciò, fi metta quefto termine generale fotto la forma differenziale

$$\int\frac{z^{xz}dz}{1-z^z}-\int\frac{z^{z(x+1)}dz}{1-z^z}$$

e fi foftituifca l'unità in luogo di x nel primo termine. Si prenda la differenza tra il secondo termine, e la quantità $\int \frac{z^{z}dz}{1-z^{z}}$ che ne risulta; sarà ella

$$\int \frac{z^{z}dz(1-z^{xz})}{1-z^{z}}$$

ed esprimerà nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, la somma generale della serie (A), e generalmente la somma generale della serie (A'). Il che ecc.

PROBLEMA XXXIX.

Sommare la serie (B)

$$\frac{1}{m+1}-\frac{1}{(m+2)^2}-\frac{1}{(m+3)^3}-\frac{1}{(m+4)^4}+\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{m+1}-\frac{2}{(m+2)^2}-\frac{2^2}{(m+3)^3}-\frac{2^3}{(m+4)^4}+\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{m+1}-\frac{3}{(m+2)^2}-\frac{3^2}{(m+3)^3}-\frac{3^3}{(m+4)^4}+\text{ecc.}$$

$+$ ecc. . . . . (B)

RISOLUZIONE.

Essendo dimostrato nel medesimo luogo, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$\int z^{xz}z^{m}dz=\frac{1}{m+1}-\frac{x}{(m+2)^2}+\frac{x^2}{(m+3)^3}-\frac{x^3}{(m+4)^4}+\text{ecc.}$$

purchè non sia m quantità negativa, sarà quest' espressione il termine generale della serie (B), oppure della serie (B')

$$\int z^{z+m}dz+\int z^{2z+m}dz+\int z^{3z+m}dz+\text{ecc.}$$

. . . . (B')

Si dia pertanto alla formula integrale la forma differenziale

$$\int\frac{z^{xz}z^m dz}{1-z^z}-\int\frac{z^{z(x+1)}z^m dz}{1-z^z}$$

Con un' operazione ſimile all' antecedente ſi ricaverà l' eſpreſſione

$$\int\frac{z^z z^m dz(1-z^{xz})}{1-z^z}$$

che ſarà la ſomma generale della ſerie (B) nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, e generalmente della ſerie (B'). Il che ecc.

PROBLEMA XL.

Sommare la ſerie (A)

$$\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(3p-1)^2}+\frac{1}{(3p+1)^2}+\frac{1}{(5p-1)^2}+\frac{1}{(5p+1)^2}+\text{ecc.}$$
$$+\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\frac{1}{(3p-2)^2}+\frac{1}{(3p+2)^2}+\frac{1}{(5q-2)^2}$$
$+$ ecc. . . . . . (A)

RISOLUSIONE.

E' dimoſtrato nel *XIX Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob.*, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{z^{2p}-1}\cdot\frac{dz\,l.z}{z}=\frac{\pi^2}{4p^2\,\text{coſ.}\,\pi x^2:2p}=$$

$$\frac{1}{(p-x)^2}+\frac{1}{(p+x)^2}+\frac{1}{(3p-x)^2}+\frac{1}{(3p+x)^2}+\text{ecc.}$$

eſſendo π la circonferenza di un cerchio che ha l' unità per diametro. Per conſeguenza ciaſcheduna di queſte eſpreſſioni è il termine generale della ſerie (A), e parimenti delle ſerie (A'), (A''), facendo $\pi:2p=\Delta$

$$\int \frac{z^{p-1}+z^{p+1}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dz l. z}{z} + \int \frac{z^{p-2}+z^{p+2}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dz l. z}{z}$$

$+$ ecc. . . . . (A')

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\text{cof.}\ \Delta} + \frac{1}{\text{cof.}\ 4\Delta} + \frac{1}{\text{cof.}\ 9\Delta} + \text{ecc.} \right) \ldots\ldots (A)$$

Posto ciò si metta l' espressione integrale sotto la forma differenziale, che segue

$$(1) \int \frac{z^{p-x-1}\, dz.\, l.\, z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)} - (2) \int \frac{z^{p-x-2}\, dz.\, l.\, z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)}$$

$$(3) \int \frac{z^{p+x-1}\, dz.\, l.\, z}{(1-z)(z^{2p}-1)} - (4) \int \frac{z^{p+x}\, dz..\, l.\, z}{(1-z)(z^{2p}-1)}$$

Si sostituisca poi l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e si sottraggano rispettivamente dalle quantità risultanti li termini (2), (4). Sarà l' espressione

$$\int \frac{z^{p-2}(1-z^{-x})dz.\, l.\, z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)} + \int \frac{z^{p}(1-z^{x})dz.\, l.\, z}{(1-z)(z^{2p}-1)} =$$

$$\int z^p dz\, l.\, z \left(\frac{(1-z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(z^{2p}-1)} \right)$$

la somma generale ricercata delle serie (A), (A'') nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, e generalmente della serie (A'). Il che ecc.

PROBLEMA XLI.

Sommare la serie (A)

$$1 + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3p-1} - \text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p-2}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}-\text{ecc.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(A)$$

RISOLUZIONE.

Essendo nel medesimo Volume dimostrato, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{x-1}+z^{p-x-1})dz}{1+z^p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}-\frac{1}{p+x}-\frac{1}{2p-x}+\frac{1}{2p+x}+\text{ecc.}$$

quest' espressione sarà il termine generale della serie (A). Si metta pertanto la formula integrale sotto la forma differenziale, che segue

$$\int\frac{\left(z^{x-1}-z^{p-x}\right)dz}{(1-z)(1+z^p)}-\int\frac{\left(z^{x}-z^{p-x-1}\right)dz}{(1-z)(1+z^p)}$$

e, sostituita l' unità in luogo di x nel primo membro, si sottragga il secondo dalla quantità, che ne risulta; sarà l' espressione

$$\int\frac{\left(1+z^{p-x-1}\right)\left(1-z^{x}\right)dz}{(1-z)(1+z^p)}$$

la somma Generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA XLII.

Sommare la serie

$$1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{3p-1}+\frac{1}{3p+1}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{2p+2}-\frac{1}{3p-2}+\frac{1}{3p+2}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p+3}-\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

E' dimostrato nel medesimo Volume, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x-1})dz}{1-z^p}=\frac{1}{x}-\frac{1}{p-x}+\frac{1}{p+x}-\frac{1}{2p-x}+\frac{1}{2p+x}-\text{ecc.}$$

Dunque, essendo quest' espressione integrale in tal caso il termine generale della serie proposta, la si metta sotto la forma differenziale

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x})dz}{(1-z)(1-z^p)}-\int\frac{(z^{x}-z^{p-x-1})dz}{(1-z)(1-z^p)}$$

e operando come nella Prop. antecedente, si troverà, che l' espressione

$$\int\frac{(1-z^{p-x-1})(1-z^{x})dz}{(1-z)(1-z^p)}$$

sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

CAPITOLO DECIMO.

DELLE SERIE DIRETTE E RECIPROCHE DE' SENI, CO-SENI, TANGENTI, E CO-TANGENTI.

LE serie dirette, che hanno per termini potenze simili di seni, e coseni d' archi che formano tra di sè una progressione Aritmetica, sono state più d' una volta prese per mano da' Geometri (*Vegg. il Signor* Euler *nell' Introd. all' anal. degl' Inf.*, *il Sig.* Bossut *nelle Mem. della Soc. Reale per l' anno* 1769, *e li Signori* Bernoulli *e* Lexel *nel XVIII. Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob.*). Ma non si sono ancora lasciate ridurre le potenze simili delle tangenti, e delle co-tangenti; e molto meno poi tutta la classe reciproca di quelle e di queste. Avendo pertanto allo stesso metodo soggettate le une e le altre, e le loro reciproche, mi lusingo di far cosa grata a' Geometri accoppiando agli altri anche questo importante ramo della teoria delle serie.

TEOREMI.

Se a rappresenti un Arco di cerchio che ha l' unità per raggio, dico, che

I. $2\,\text{Cos.}\,xa\ \text{sen.}\,xa = \text{sen.}\,2xa$

II. $\text{Sen.}\,(x+1)\,a + \text{sen.}\,(x-1)\,a = 2\,\text{cos.}\,a\ \text{sen.}\,xa$

III. $\text{Sen.}\,(x+1)\,a - \text{sen.}\,(x-1)\,a = 2\,\text{cos.}\,xa\,\text{sen.}\,a$

IV. $\text{Sen.}\,(2x+1)\,a + \text{sen.}\,a = 2\,\text{cos.}\,xa\ \text{sen.}\,(x+1)\,a$

V. $\text{Sen.}\,(2x-1)\,a + \text{sen.}\,a = 2\,\text{cos.}\,(x-1)\,a\ \text{sen.}\,xa$

VI. $e^{nx} = (\text{cos.}\,a + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x$, se sia e la base de' logaritmi Iperbolici, $n = a\sqrt{-1}$.

VII. $e^{-nx} = (\text{cos.}\,a - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,a)^x$

Tutti questi Teoremi si dimostrano agevolmente con le regole cognite del calcolo de' seni e co-seni.

PROBLEMA XLIII.

Trovare la forma differenziale dell' espressione sen. xa.

RISOLUZIONE.

Essendo $2\,\text{cos.}\,xa\,\text{sen.}\,xa = \text{sen.}\,2xa$ (*Teor. I.*); si moltiplichi quest' equazione per sen. a; sarà

$$2\,\text{sen.}\,xa\,\text{cos.}\,xa\,\text{sen.}\,a = \text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,2xa;$$

ma pel III. Teorema

$$2\,\text{cos.}\,xa\,\text{sen.}\,a = \text{sen.}\,(x+1)\,a - \text{sen.}\,(x-1)\,a.$$

Per conseguenza, mettendo $a{:}2$ in luogo di a, si avrà

$$\frac{\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right) a\, \text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\, a{:}2} - \frac{\text{ſen.}\left(\frac{x-1}{2}\right) a\, \text{ſen.}\, \frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\, 2{:}a} = \text{ſen.}\, xa$$

Il che ecc.

Altrimenti.

Eſſendo ſen. $(x+1)a +$ ſen. $(x-1)a = 2$ coſ. a ſen. xa, pel II. Teorema, ſi aggiunga da ambe le parti 2 ſen. $xa +$ ſen. a; ſi avrà

$$\text{ſen.}a + 2\,\text{ſen.}xa - \text{ſen.}(x+1)a - \text{ſen.}(x-1)a = 2\,\text{ſen.}xa(1-\text{coſ.}a) + \text{ſen.}a$$

Per conſeguenza

$$\frac{\text{ſen.}a + \text{ſen.}xa - \text{ſen.}(x+1)a}{2-2\,\text{coſ.}a} - \frac{\text{ſen.}a + \text{ſen.}(x-1)a - \text{ſen.}xa}{2-2\,\text{coſ.}\, a} = \text{ſen.}xa.$$

Il che ecc.

PROBLEMA XLIV.

Trovare la forma differenziale dell' eſpreſſione coſ. xa

Risoluzione.

Poichè pel III. Teorema

$$2\ \text{coſ.}\, xa\, \text{ſen.}\, a = \text{ſen.}\, (x+1)\, a - \text{ſen.}\, (x-1)\, a$$

ſi metta $2x$ in luogo di x, e ſi aggiunga da ambe le parti ſen. a. Si avrà

$$\text{ſen.}a + 2\,\text{coſ.}\,2xa\,\text{ſen.}a = \text{ſen.}\, (2x+1)\, a - \text{ſen.}\, (2x-1)\, a + \text{ſen.}a\,;$$

Ma

ſen. $(2x+1)a +$ ſen. $a = 2$coſ. xa ſen. $(x-1)\, a$ (*IV Teorema*)

ſen. $(2x-1)a +$ ſen. $a = 2$coſ.$(x-1)\, a$ ſen.xa (*V Teorema*)

Dunque, ponendo $a:2$ in luogo di a, ſarà

$$\frac{\text{coſ.}\,\frac{xa}{2}\ \text{ſen.}\left(\frac{1+x}{2}\right)a}{\text{ſen.}\, a:2} - \frac{\text{coſ.}\left(\frac{x-1}{2}\right) a\, \text{ſen.}\, \frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\, a:2} = \text{coſ.}\, xa$$

Il che ecc.

PROBLEMA XLV.

Sommare la serie (*A*)
sen. a + sen. $2a$ + sen. $3a$ + ecc. . . . . . . sen. xa . . . . (A)

Risoluzione.

Essendo sen. xa il termine generale della serie (A), il si metta sotto la forma differenziale trovata poco fa (*Prop. XLIII.*)

$$\frac{\text{sen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen.}\,a:2} - \frac{\text{sen.}\left(\frac{x-1}{2}\right)a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen.}\,a:2}$$

Si sostituisca l'unità in luogo di x nel secondo termine. Ma l'espressione svanisce a cagione di $0a = 0$. Non restando dunque che il primo termine

$$\frac{\text{sen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen.}\,a:2}$$

sarà egli necessariamente la somma generale della serie (A). Il che ecc.

PROBLEMA XLVI.

Sommare la serie (B),
1 + cos. a + cos. $2a$ + cos. $3a$ + ecc. . . . . . cos. xa . . . . (B)

Risoluzione.

Si metta il termine generale xa della serie sotto la forma differenziale trovata nella Prop. XLIV.

$$\frac{\text{cos.}\frac{xa}{2}\,\text{sen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a}{\text{sen.}\,a:2} - \frac{\text{cos.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen.}\,a:2}$$

e ſi faccia $x=0$ nel ſecondo termine, perchè il primo termine della ſerie è l'unità, e non potrebbe egli riſultare da coſ. xa, ſe non ſi cominciaſſe la ſoſtituzione de' numeri naturali in luogo di x da $x=0$. Reſtando pertanto il ſolo primo termine di queſta eſpreſſione

$$\frac{\text{coſ.}\ \frac{xa}{2}\ \text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a}{\text{ſen.}\ a:2}$$

ſarà egli la ſomma generale della ſerie (B). Il che ecc.

Corollario I.

Nello ſteſſo modo ſi troverebbe

$$\frac{\text{coſ.}\left(\frac{1+x}{2}\right)a\ \text{ſen.}\ \frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\ a:2}$$

per la ſomma generale della ſerie

$$\text{coſ.}\ a+\text{coſ.}\ 2a+\text{coſ.}\ 3a\ \text{ecc.}$$

Corollario II.

Queſte due Propoſizioni ſono veramente fondamentali in queſta teoria, ſiccome quelle alle quali ſi riducono le ſomme d'altre ſerie di ſeni, e coſeni più compoſte. Di fatto

I.

Se ſi abbia la ſerie

(A)...$\text{coſ.}a\ \text{coſ.}b+\text{coſ.}2a\ \text{coſ.}2b+\text{coſ.}3a\ \text{coſ.}3b\ldots+\text{coſ.}xa\ \text{coſ.}xb$,

poichè $\text{coſ.}\ xa\ \text{coſ.}\ xb=\frac{\text{coſ.}\ x(a-b)+\text{coſ.}\ x(a+b)}{2}$

per la teoria de' ſeni, e coſeni, ella ſi traſformerà nelle due ſeguenti

$$\frac{\text{cof.}\,(a-b)+\text{cof.}\,2\,(a-b)+\text{cof.}\,3\,(a-b)\ldots+\text{cof.}\,x(a-b)}{2}$$
$$+\frac{\text{cof.}\,(a+)+\text{cof.}\,2(a+b)+\text{cof.}\,3\,(a+b)\ldots\text{cof.}\,x\,(a+b)}{2}$$

ognuna delle quali è fommabile pel Corollario I. della Propofizione antecedente.

II.

Similmente trattandofi di fommare la ferie fen. a fen. b + fen. $2a$ fen. $2b$ + ecc. ..... fen. xa fen. xb, poichè ella è reducibile alle due

$$\frac{\text{cof.}\,(a-b)+\text{cof.}\,2(a-b)\ +\text{ecc.}}{2}$$
$$-\frac{\text{cof.}\,(a+b)+\text{cof.}\,2(a+b)+\text{ecc.}}{2}$$

potrà nello fteffo modo fommarfi agevolmente.

III.

Parimenti effendo propofta la ferie

(B) ... fen. a cof. b + fen. $2a$ cof. $2b$ + ecc. ... fen. xa cof. xb fi potrà fenza difficoltà determinarne la fomma. Imperciocchè, effendo

$$\text{fen.}\,xa\,\text{cof.}\,xb=\frac{\text{fen.}\,x\,(a+b)+\text{fen.}\,x\,(a-b)}{2}$$

La ferie (B) fi trasforma nelle due

fen. $(a+b)$ + fen. $2(a+b)$ + ecc. . . . . . fen. $x(a+b)$
+ fen. $(a-b)$ + fen. $2(a-b)$ + ecc. . . . . . fen. $x(a-b)$
ciafcheduna delle quali è fommabile per la Prop. XLV.

IV.

Di più cogli fteffi fondamenti fi poffono fommare le ferie le ſerie di ſeni, e coſeni d' archi procedenti ſecondo qualſivoglia progreſſione aritmetica $p+qx$, come ſono le ſerie (C), (D)

$$(C)\ldots \text{ſen.}(p+q)\,a + \text{ſen.}(p+2q)\,a + \text{ecc.}\ldots\ldots \text{ſen.}(p+qx)\,a$$
$$(D)\ldots \text{coſ.}(p+q)\,a + \text{coſ.}(p+2q)\,a + \text{ecc.}\ldots\ldots \text{coſ.}(p+qx)\,a$$

Imperciocchè, eſſendo

$$\text{ſen.}(p+qx)\,a = \text{ſen.}\,pa\ \text{coſ.}\,xqa + \text{coſ.}\,pa\ \text{ſen.}\,xqa$$

Se ſi ſvolgano in ſerie i due Termini generali, ſi traſformerà la ſerie (C) nelle due

$$\text{ſen.}\,pa\,(\text{coſ.}\,qa + \text{coſ.}\,2qa + \text{coſ.}\,3qa \ldots\ldots \text{coſ.}\,xqa\,)$$
$$+\,\text{coſ.}\,pa\,(\,\text{ſen.}\,qa + \text{ſen.}\,2qa + \text{ſen.}\,3qa \ldots\ldots \text{ſen.}\,xqa)$$

le quali ſi poſſono ſommare per le Prop. precedenti. Lo ſteſſo accaderà della ſerie (D), la quale potrà agevolmente ridurſi a ſerie ſommabili per le medeſime propoſizioni.

SCOLIO.

Non ſarebbe difficile coſa il ſommare con lo ſteſſo metodo le ſerie

$$\text{ſen.}^m a + \text{ſen.}^m 2a + \text{ſen.}^m 3a \ldots\ldots \text{ſen.}^m xa$$
$$\text{coſ.}^m a + \text{coſ.}^m 2a + \text{coſ.}^m 3a \ldots\ldots \text{coſ.}^m xa$$

mettendo ſucceſſivamente i numeri naturali in luogo di m, come appunto hanno fatto gli autori ſopraccitati. Ma avendo oſſervato che non traeva alcun vantaggio da' caſi particolari, onde poggiare alla ſoluzione generale, l' ho cercata direttamente.

Una felice ſoſtituzione non ha reſo inutili i miei ſforzi, e in tal guiſa abbiamo per un' altra via la ſoluzione generale del Problema.

PROBLEMA XLVII.

Sommare generalmente la ſerie (I)

$$\text{ſen.}^m a + \text{ſen.}^m 2a + \text{ſen.}^m 3a + \text{ecc.}\ldots\ldots \text{ſen.}^m xa \ldots\ldots (I)$$

Risoluzione.

Poichè

$$\text{ſen.}^m\, xa = \left(\frac{(\text{coſ.}\, a+\sqrt{(-1)}\,\text{ſen.}\, a)^x-(\text{coſ.}a-\sqrt{(-1)}\text{ſen.}a)^x}{2\sqrt{(-1)}}\right)^m$$

ed è $e^{xa\sqrt{(-1)}} = e^{nx} = (\text{coſ.}a+\sqrt{(-1)}\text{ſen.}a)^x$ (*VI Teorema*)

$e^{-xa\sqrt{(-1)}} = e^{-nx} = (\text{coſ.}a-\sqrt{(-1)}\text{ſen.}a)^x$ (*VII Teorema*)

il termine generale $\text{ſen.}^m\, xa$ prende manifeſtamente la ſeguente forma

$$(e^{nx}-e^{-nx})^m : (2\sqrt{(-1)})^m \ldots\ldots (M)$$

Si alzi queſto binomio alla potenza m. Il termine generale della ſerie (I) diverrà l' eſpreſſione

$$\frac{1}{(2\sqrt{(-1)})^m}\left(e^{mnx} - \frac{m}{1}e^{(m-2)nx} + \frac{m(m-1)}{1.2}e^{(m-4)nx} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}e^{(m-6)nx} + \text{ecc.}\right)$$

compoſta di $m+1$ termini generali ſempliciſſimi. Se dunque $S.A$ rappreſenti la ſomma generale di una ſerie, di cui A è il termine generale ſi troverà, ricorrendo alla Prop. IV del III Cap.,

$$S.\, e^{mnx} = \frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}\left(e^{mnx}-1\right)$$

$$S.\, \frac{m}{1}e^{(m-2)nx} = \frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}\left(e^{(m-2)nx}-1\right)$$

$$S.\, \frac{m(m-1)}{1.2}e^{(m-4)nx} = \frac{m(m-1)e^{(m-4)n}}{1.2(e^{(m-4)n}-1)}\left(e^{(m-4)nx}-1\right)$$

ecc. e però generalmente, unendo inſieme tutte queſte ſomme particolari, ſarà l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{1}{(2\sqrt{(-1)})^m}\left(\frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}\left(e^{mnx}-1\right)-\frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}\left(e^{(m-2)nx}-1\right)\right.$$

$$+\frac{m(m-1)\,e^{(m-4)n}}{1.2\left(e^{(m-4)n}-1\right)}\left(e^{(m-4)nx}-1\right)$$

$$\left.-\frac{m(m-1)(m-2)\,e^{(m-6)n}}{1.2.3\left(e^{(m-6)n}-1\right)}\left(e^{(m-6)nx}-1\right)+\text{ecc.}\right)$$

la fomma generale della ferie (I). Il che ecc.

COROLLARIO.

Effendo manifefta la legge di quefta formula generale, non refta, che foftituire i valori convenienti ne' cafi particolari, fenza che il fi faccia qui togliendo all' efpreffione la fomma femplicità, ond' è dotata.

PROBLEMA XLVIII.

Sommare la ferie (I)

$$\operatorname{cof.}^m a+\operatorname{cof.}^m 2a+\operatorname{cof.}^m 3a+\text{ecc.}\ldots\ldots\operatorname{cof.}^m xa\ldots\ldots(I)$$

RISOLUZIONE.

Effendo

$$\operatorname{cof.}^m xa=\frac{1}{2^m}\left((\operatorname{cof.}a+\sqrt{(-1)}\operatorname{fen.}a)^x+(\operatorname{cof.}a-\sqrt{(-1)}\operatorname{fen.}a)^x\right)^m,$$

il termine generale della ferie (I) prende la feguente forma

$$\left(e^{nx}+e^{-nx}\right)^m:2^m$$

per le foftituzioni ufate nella Prop. antecedente.

Dunque, alzata quest' espressione alla potestà m, e prese insieme le somme de' termini generali risultanti da quest' evoluzione, si perverrà, come precedentemente, alla formula che segue

$$\frac{1}{2^m}\Big(\frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}(e^{mnx}-1)+\frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}(e^{(m-2)nx}-1)$$

$$+\frac{m(m-1)e^{(m-4)n}}{1.2(e^{(m-4)n}-1)}(e^{(m-4)nx}-1)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)e^{(m-6)n}}{1.2.3(e^{(m-6)n}-1)}(e^{(m-6)nx}-1)+\text{ecc.}\ldots\Big)$$

la quale sarà la somma generale della serie (I). Il che ecc.

COROLLARIO II.

Ma havvi ancora una generalità più grande, che può darsi a queste soluzioni, proponendosi di sommare le serie

(A)..sen.$^m(p+q)a$+sen.$^m(p+2q)a$+sen.$^m(p+3q)a$+ecc..sen.$^m(p+qx)a$
(B)..cos.$^m(p+q)a$+cos.$^m(p+2q)a$+cos.$^m(p+3q)a$+ecc..cos.$^m(p+qx)a$

Imperciocchè col mezzo delle sostituzioni praticate nelle due Prop. antecedenti i termini generali di queste due serie prendono le seguenti forme

$$\left(e^{n(p+qx)}-e^{-n(p+q)}\right)^m:\left(2\sqrt{(-1)}\right)^m,$$

$$\left(e^{n(p+qx)}-e^{-n(p+qx)}\right)^m:2^m$$

e però svolgendole, e sommando le serie parziali, come s' è fatto precedentemente, si può agevolmente definire cogli aggregati di queste somme particolari le somme generali delle proposte serie (A), (B).

PROBLEMA XLIX.

Sommare la ſerie (*A*)

tang. $a +$ tang. $2a +$ tang. $3a +$ ecc.... tang. xa .... (A)

Risoluzione.

E' dimoſtrato nel *XIX. Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 5. che nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{z^{p-x} - z^{p+x}}{1 - z^{2p}} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{2p} \text{ tang. } \frac{\pi x}{2p}$$

eſſendo π la circonferenza di un cerchio che ha l' unità per diametro. Si faccia pertanto Arc. $a = \frac{\pi}{2p}$.

Sarà

$$\frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a - x - 1} - z^{\pi:2a + x - 1}}{1 - z^{\pi:a}} \cdot dz = \text{tang. } xa \ldots . (N)$$

il termine generale della ſerie (A). Si metta ora l' espreſſione integrale (N) ſotto la forma differenziale, che ſegue

$$(1) \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a - x - 1}\, dz}{(1 - \frac{1}{z})(1 - z^{\pi:a})} - (2) \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a - x - 2}\, dz}{(1 - \frac{1}{z})(1 - z^{\pi:a})}$$

$$(3) - \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a + x - 1}\, dz}{(1 - z)(1 - z^{\pi:a})} + (4) \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a + x}\, dz}{(1 - z)(1 - z^{\pi:a})}$$

e ſi ſoſtituiſca l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e dalle quantità riſultanti ſi ſottraggano riſpettivamente i termini (2), (4). Si avranno le due formule

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-2}dz(1-z^{-x})}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz(1-z^{x})}{(1-z)(1-z^{\pi:a})}$$

la quali si riducono facilmente alla seguente

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz(1-z^{x})(z^{-x-1}-1)}{(1-z)(1-z^{\pi:a})}$$

che sarà la somma generale della serie (A) nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA L.

Sommare la serie (M)

cot. a + cot. $2a$ + cot. $3a$ + ecc.... cot. xa.... (M)

Risoluzione.

Essendo dimostrato nel luogo citato qui innanzi, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{x-1}-z^{\pi:a-x-1}}{1-z^{\pi:a}}.dz=\text{cot.}\,xa$$

sarà quest' espressione integrale il termine generale della serie (M). La si metta dunque sotto la seguente forma differenziale

$$(1)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{x-1}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:a})}-(2)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{x}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:a})}$$

$$-(3)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:a-x-1}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})}+(4)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:a-x-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})}$$

e, fatte le operazioni della Prop. antecedente, si avrà l' espressione ridotta di questa forma

$$\frac{1}{a}\int\frac{\left(1-z^{\pi:a-x-1}\right)\left(1-z^{x}\right)dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

che sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA LI.

Sommare la serie (A)
tang. $(p+q)a$ + tang. $(p+2q)a$ + tang. $(p+3q)a$ ...... tang. $(p+qx)a$ . . . . (A)

Risoluzione.

Si ponga $p+qx$ in luogo di x nell' espressione integrale (N) della Prop. XLIX. Diverrà ella

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}-z^{\pi:2a+p+qx}}{1-z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\text{tang.}\,(p+qx)a$$

nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione; e però sarà questo il termine generale della serie (A).

Il si metta sotto la forma differenziale

$$(1)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}}{\left(1-z^{-q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}-(2)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx-q}}{\left(1-z^{-q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$-(3)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx}}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}+(4)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx+q}}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come nelle Prop. antecedenti, si avrà l'espressione ridotta

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}-z^{p+q})}{(1-z^{q})(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione sarà la somma generale della proposta serie (A). Il che ecc.

COROLLARIO III.

Nello stesso modo si sommerà la serie
$\cot.(p+q)a+\cot.(p+2q)a+\cot.(p+3q)a+$ ecc..... $\cot.(p+qx)a$

PROBLEMA LII.

Sommare la serie reciproca de' seni

$$\frac{1}{\text{sen.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{sen.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{sen.}(p+3q)a}\cdots\cdots+\frac{1}{\text{sen.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Egli è dimostrato nel medesimo Volume, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{m}+z^{n-m}}{1+z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{sen.}\frac{m\pi}{n}}$$

Si faccia pertanto $\frac{\pi}{n}=a$, $m=p+qx$; l' espressione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}+z^{\pi:a-p-qx}}{1+z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{sen.}(p+qx)a}$$

sarà il termine generale della serie. Gli si dia perciò la seguente forma differenziale

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}-z^{\pi:a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx+q}-z^{\pi:a-p-qx}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e posta l' unità in luogo di x nel primo membro, si sottragga il secondo dalla quantità che risulta da quella sostituzione. Sarà la formula

$$\frac{1}{a}\int\frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}+z^{\pi:a-p-qx})}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

la somma generale ricercata, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA LIII.

Sommare la serie reciproca de' Co-Seni

$$\frac{1}{\operatorname{cos.}(p+q)a}+\frac{1}{\operatorname{cos.}(p+2q)a}+\frac{1}{\operatorname{cos.}(p+3q)a}\dots\frac{1}{\operatorname{cos.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Se nell' espressione

$$\int\frac{z^x+z^{n-x}}{1+z^n}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\operatorname{sen.}\frac{\pi x}{n}}$$

da cui abbiamo tratto poco fa il termine generale della serie reciproca de' seni, si faccia $n=2p$, e si metta $p-x$ in luogo di x, si ha

$$\int\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{1+z^{2p}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{2p\operatorname{sen.}\frac{\pi(p-x)}{2p}};$$

Ma $\frac{\pi}{2p\operatorname{sen.}\frac{\pi(p-x)}{2p}}=\frac{\pi}{2p\operatorname{cos.}\frac{\pi x}{2p}}$. Dunque facendo $\frac{\pi}{2p}=a$ e ponendo $p+qx$ in luogo di x, si avrà

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}+z^{\pi:2a+p+qx}}{1+z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{cof.}\,(p+qx)a}$$

pel termine generale della propofta ferie.

Il fi metta pertanto fotto la forma differenziale

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx}-z^{\pi:2a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx+q}-z^{\pi:2a-p-q}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come s' è fatto nella Prop. antecedente, fi troverà l' efpreffione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}+z^{p+q})}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che farà la fomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA LIV.

Sommare la ferie reciproca delle Tangenti

$$\frac{1}{\text{tang.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{tang.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{tang.}(p+3q)a}\ldots\frac{1}{\text{tang.}(p+qx)a}$$

Risoluzione.

Effendo nel medefimo luogo dimoftrato, che nel cafo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^x-z^{n-x}}{1-z^n}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{tang.}\,\frac{\pi x}{n}}$$

fe fi ponga a in luogo di $\frac{\pi}{n}$, $p+qx$ in luogo di x, fi avrà il termine generale della ferie fotto quefta forma

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}-z^{\pi:a-p-qx}}{1-z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{tang.}\,(p+qx)a}$$

Gli ſi dia la forma differenziale ſeguente

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}+z^{\pi:a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx+q}+z^{\pi:a-p-qx}}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come nelle *Prop.* precedenti, ſi perverrà all' eſpreſſione

$$\frac{1}{a}\int\frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}-z^{\pi:a-p-qx})}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA LV.

Sommare la ſerie reciproca delle Cotangenti

$$\frac{1}{\cot.(p+q)a}+\frac{1}{\cot.(p+2q)a}+\frac{1}{\cot.(p+3q)a}\dots\frac{1}{\cot.(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo $\dfrac{\pi}{2p\cot.\dfrac{\pi x}{2p}}=\dfrac{\pi\,\text{tang.}\dfrac{\pi x}{2p}}{2p}$, è manifeſto, che

ſarà $\dfrac{1}{\cot.(p+qx)a}=\text{tang.}(p+qx)a$. Si ripigli pertanto la formula integrale della *Prop.* LI, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione eſprime la ſomma generale della ſerie, che ha per termine tang. $(p+qx)a$, cioè

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}-z^{p+q})}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

Sarà ella la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

SCOLIO.

Se i limiti di una Memoria il comportaſſero, non ſarebbe difficile coſa l' inoltrare queſta Teoria, e ſommare le ſerie de' prodotti, potenze, ed altre affezioni delle tangenti, e cotangenti d' archi procedenti ſecondo qualſivoglia aritmetica progreſſione. Ma ciò per ora baſti intorno alle ſerie in generale, non eſſendo impoſſibile, che cada in animo ad alcuno di ſtendere e compilare ſulle tracce di queſta Memoria non meno, che col fondamento de' Saggi moltiplici, che ſi trovano ſparſi nell' opere de' più illuſtri Geometri, un Trattato generale ſu queſt' ardua e importantiſſima Scienza delle Serie.

RICERCHE

Intorno al Calcolo Integrale dell' equazioni differenziali finite.

Del Sig. Anton-Mario Lorgna Direttore delle Scuole Militari di Verona.

SE una quantità variabile riceva una qualche variazione effettiva, è certo, che qualsivoglia funzione di quella variabile varia anch' essa nello stesso tempo. E siccome sottraendo dalla quantità variata la quantità primitiva, si ottiene l' incremento stesso o il decremento indotto nella quantità variabile; così dalla forma variata, qualunque ella siasi, sottraendo la funzione primitiva, si conseguisce la quantità della variazione incontrata dalla funzione variata. Le quantità pertanto, che risultano da queste sottrazioni, diconsi in generale differenze, e queste infinitamente piccole, se infinitamente piccolo è l' incremento o il decremento indotto nella variabile; e differenze finite, se di valore finito sia la variazione apportata alla variabile. Quindi i due rami elementari, uno di calcolo differenziale, onde trovare le differenze infinitesime, e le finite di qualsivoglia funzione d' una proposta variabile; e l'altro di calcolo integrale, ove si tratta dalle differenze infinitesime, e finite di rimontare alla funzione stessa, di cui elle sono le differenze. Ma come può avervi relazione tra due o più variabili espressa per equazioni, così può avervi del pari relazione tra le differenze di due o più variabili, ed equazioni differenziali esprimenti la ragione tra di sè delle variazioni così infinitesime come finite, indotte nelle funzioni per l' incremento o decremento ricevuto dalle variabili, delle quali sono elle funzioni. Quindi di nuovo i due altri rami di calcolo differenziale per le variazioni infinitesime e finite dell' equazioni finite; e di calcolo integrale, onde trovare con la relazione data di queste variazioni la relazione finita tra le variabili. Ancorchè nel Libro del Sig. *Moivre*, che ha per titolo (*Miscellan. Analytica de Ser.*), e più particolarmente nel Trattato delle Serie del Sig. *Stirling*, si trovino maneggiate equazioni a differenze finite, ben considerandone la natura, elle si riducono piuttosto a differenziali ed integrali di semplici funzioni, di quello che al calcolo delle equazioni propriamente a due o più variabili, ch' è materia totalmente nuova. Lo stesso può dirsi del calcolo intorno alle differenze finite, che ci ha dato l' immortale Sig. *Eulero* nelle sue eccellenti Instituzioni, il quale tutto si aggira sulle funzioni d' una variabile. L' epoca vera di questo nuovo calcolo integrale dell' equazioni differenziali a differenze finite, e a più variabili è recentissima, dopo che il sommo Geometra Sig. de la *Grange* pubblicò nel primo volume degli Atti della Società Reale di Torino un metodo nel 1759. di trattare la Teoria delle Serie ricorrenti dipendentemente dall' integrazione d' una sorta di queste equazioni a due variabili. Presero in seguito diversi illustri Geometri a coltivarlo ed estenderlo con dottissime ricerche, tra' quali si distinsero i Signori de la *Place*, de *Condorcet*, *Monge*, e di nuovo il Sig. de la *Grange* (*si veggano* il T. IV. delle Mem. della *Soc. R.* di Torino, li T. VI. VII. e IX. delle *Mem.* presentate alla *Soc. R.* di Parigi, le Mem. della med. *Soc. R.* per gli anni 1769, 1770, 1771, e quelle della *R. Soc.* di Berlino per l' anno 1774). Non è a mia cognizione che dopo questi celebri uomini abbia fatto alcun altro progressi importanti in questa materia. Al più il

Sig. Ab. *Paoli* di queſta *Società* in un eccellente Opuſcolo pubblicato in Livorno nel 1780. alla progreſſione aritmetica x, $x+a$, $x+2a$, ecc. degl' incrementi ha ſoſtituito la geometrica ax, a^2x, a^3x, ecc.

Ma in un Paeſe di nuova ſcoperta è naturale coſa, che ci ſi offeriſcano agli occhi oggetti ſempre nuovi. Nel fare pertanto qualche ſtudio ſu queſto calcolo parvemi che il ſi poteſſe ampiare e promovere, battendo nuove vie nel maneggiarlo, e adoperando altri metodi dagli uſati ſinora, coll' adattarlo non ſolamente alle differenze finite coſtanti, ma alle variabili eziandio. Non vi era poi fatto alcun paſſo intorno alle equazioni differenziali a coefficienti variabili; reſtavano da trattarviſi parecchi articoli così ſu le funzioni arbitrarie, come ſu' maſſimi e minimi, e molti altri da ſvolgere, onde ravvicinarlo più e più al calcolo integrale comune, e alla Teoria delle equazioni a differenze parziali. Deſidero, che le indagini che ho fatto ſu tutti queſti argomenti meritar poſſano l' attenzione de' Geometri. Le ripartirò in più Memorie ſeguendo l' ordine ſteſſo con cui mi vi ſono ſucceſſivamente applicato.

MEMORIA I.

CAPITOLO PRIMO

DELLA DIFFERENZIAZIONE DELLE FUNZIONI ED INTEGRAZIONE DE' DIFFERENZIALI SEMPLICI.

Definizioni.

§. I. Ritenendo i consueti segni (*Instituz. di Calc. Diff. del Sig. Eulero*) s' intenda generalmente per y' quello che diventa y, funzione qualunque della variabile x, se si ponga $x+X$ in luogo di x, essendo X qualsivoglia grandezza finita, sia ella costante o una funzione di x qualunque. Similmente s' intenda per y'' ciò che diventa y', se in luogo di x si ponga in y' di nuovo $x+X$, e così successivamente.

§. II. Stessamente conservando il segno caratteristico Δ per le differenze finite, sia generalmente

$$y'-y=\Delta y$$
$$y''-y'=\Delta y'$$
$$y'''-y''=\Delta y''$$
$$- - - - - - - - -$$
$$y^{n+1}-y^n=\Delta y^n$$

Corollari.

§. III. Prendendo dunque successivamente le differenze de' membri di queste equazioni, si avranno le differenze seconde, le terze ecc. come segue

$\Delta y' - \Delta y = \Delta^2 y$

- - - - - - - - - - - - - -

$\Delta y^{n+1} - \Delta y^n = \Delta^2 y^n$

$\Delta^2 y' - \Delta^2 y = \Delta^3 y$

- - - - - - - - - - - - - -

$\Delta^2 y^{n+1} - \Delta^2 y^n = \Delta^3 y^n$

e così all' infinito

§. IV. E se in queste equazioni si sostituiscano i valori successivamente di Δy, $\Delta y'$ ecc. tratti dal §. II. si avrà

$\Delta y = y' - y$

$\Delta^2 y = y'' - 2y' + y$

$\Delta^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y$

ecc., e così all' infinito

§. V. Non dipenderà pertanto, come prima, la natura delle quantità variate y', y'' ecc. dalla sola natura della funzione y, ma e da questa, e da quella insieme della grandezza X, che costituisce l' incremento o il decremento ricevuto dalla variabile.

DEFINIZIONE.

§. VI. Si chiami $x + X$ il modulo generale delle differenze finite.

SCOLIO.

§. VII. Poichè y' è ciò che diviene la funzione y ponendovi il modulo $x + X$ in luogo di x, e y'' ciò che diviene y' ponendo $x + X$ in luogo di x, e così successivamente (§. I.), se nel modulo $x + X$ si metta lo stesso modulo $x + X$ in luogo di x, sì che risulti $x + X + X'$, essendo X' ciò che diviene X mettendovi il modulo $x + X$ in luogo di x; e poi di nuovo si ponga nel secondo termine $x + X + X'$ il modulo $x + X$ in luogo di x, sì che risulti $x + X + X' + X''$, essendo X'' ciò che diventa X' sostituendovi il modulo in luogo di x, e così successivamente, sì che ne provenga la serie

$$x+X; x+X+X'; x+X+X'+X''; x+X+X'+X''+X'''; \text{ ecc.}$$

egli è manifesto, che risulta la stessa funzione y'', così se in luogo di x si ponga il modulo $x+X$ nella funzione y', come se per x si sostituisca nella funzione y il secondo termine di questa serie $x+X+X'$. Similmente risulta la funzione y''' tanto ponendo in y'' il modulo in luogo di x, quanto sostituendo per x nella funzione y il terzo termine di questa serie, e così sempre. In conseguenza questa serie, e quella delle funzioni si corrispondono in questo modo

$$y \quad \begin{cases} x+X; x+X+X'; x+X+X'+X''; \text{ecc.} \\ \quad y'; \qquad\quad y''; \qquad\qquad\quad y'''; \text{ecc.} \end{cases}$$

che se X sia la costante a, la serie diventa

$$x+a;\ x+a+a;\ x+a+a+a;\ \text{ecc.}$$

che è il caso notissimo della variazione costante, a cui si sono comunemente limitati finora.

PROPOSIZIONE I.

§. VIII. *Essendo* y *una funzione qualsivoglia della variabile* x, *se* x *riceva un incremento o decremento finito* X, *la funzione* y *prende questa forma*, *in cui* dx *è costante*,

$$y \pm \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{X^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \text{ ecc. all' infinito}$$

Veggasi, per la dimostrazione, il Sig. *Taylor* (*Meth. increm. inv.*) che fu il primo a produrre quest' importantissima espressione, ed il Sig. *Eulero* nelle sue Instituzioni di Calcolo Diff. pag. 333. e seg., e pag. 353.

SCOLIO.

§. IX. L'espressione del valore di y, in cui sia stato posto $x \pm X$ in luogo di X, abbraccia, coll' ambiguità de' segni, così la variazione per incremento, come per decremento. Per facilità di calcolo si prenderà sempre la serie col segno permanente positivo, essendo facile di alternare i segni al caso che la variazione si faccia per decremento.

COROLLARIO.

§. X. Poichè dunque y'' è ciò che divien y ponendovi in luogo di x la quantità $x + X + X'$; e similmente y''' ciò che diviene la stessa funzione y sostituendovi per x la quantità $x + X + X' + X''$, e così successivamente (§. VII.); è facile da vedere, che torna lo stesso, come se successivamente ricevesse la variabile x nella funzione y la variazione X, $X + X'$, $X + X' + X''$, ecc.

Sarà pertanto (§. VIII.)

$$y' = y + \frac{xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + (X + X')\frac{dy}{dx} + (X + X')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y''' = y + (X + X' + X'')\frac{dy}{dx} + (X + X' + X'')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y^{n+1} = y + (X + X' \ldots X^n)\frac{dy}{dx} + (X + X' \ldots X^n)^2 \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$+ \; (X + X' \ldots X^n)^3 \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} + \text{ecc.}$$

PROPOSIZIONE II.

§. XI. *Data una funzione qualunque* y *della variabile* x *trovare le differenze finite di* y *di tutti gli ordini, posta per modulo generale delle differenze l' espressione* x + X.

RISOLUZIONE.

Essendo $y' - y = \Delta y$ (§. IV), sostituendo in quest' equazione il valore di y' (§. X), sarà la differenza prima

$$\Delta y = X\frac{dy}{dx} + X^2\frac{ddy}{1.2dx^2} + X^3\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Di nuovo essendo $y'' - 2y' + y = \Delta^2 y$, sostituendo i valori di y', y'', e facendo $X = (m')$, $X + X' = (m'')$, si avrà

$$\Delta^2 y = \big((m'') - 2(m')\big)\frac{dy}{dx} + \big((m'')^2 - 2(m')^2\big)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+ \big((m'')^3 - 2(m')^3\big)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

E parimenti sostituendo nell' equazione $y''' - 3y'' + 3y' - y = \Delta^3 y$ i valori di y', y'' ecc., e ponendo $X + X' + X'' = (m''')$, si otterrà la differenza terza della funzione y di questa forma.

$$\Delta^3 y = \big((m''') - 3(m'') + 3(m')\big)\frac{dy}{dx} + \big((m''')^2 - 3(m'')^2 + 3(m')^2\big)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+ \big((m''')^3 - 3(m'')^3 + 3(m')^3\big)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Similmente, essendo $\Delta^4 y = y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y$, sostituendo i valori corrispondenti, e ponendo $(m'''') = X + X' + X'' + X'''$, sarà

$$\Delta^4 y = \Big((m'''') - 4(m''') + 6(m'') - 4(m')\Big)\frac{dy}{dx} + \Big((m'''')^2 - 4(m''')^2$$

$$+ 6(m'')^2 - 4(m')^2\Big)\frac{ddy}{1.2dx^2} + \Big((m'''')^3 - 4(m''')^3 + 6(m'')^3$$

$$- 4(m')^3\Big)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Per determinare dunque la forma corrifpondente alla differenza $n.^{ma}$ di y non è difficile lo fcoprire, che tutto dipende dal determinare il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$, mentre prendendo a parte a parte le feconde potenze, poi le terze, quarte ecc. d' ogni termine (m^n), (m^{n-1}), (m^{n-2}) ecc. di quefto coefficiente, fi ottengono fucceffivamente i coefficienti di $\frac{ddy}{1.2dx^2}$, $\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$ ecc. Ora il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$ è manifeftamente uguale alla potenza $n.^{ma}$ di $m-1$, da cui fia fempre tolto l' ultimo termine, ch' è l' unità, cioè di quefta forma

$$(m^n) - \frac{n}{1}(m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2}) - \frac{n..(n-2)}{1.2.3}(m^{n-3}) + \text{ecc.} \pm 1$$

effendo l' unità pofitiva o negativa fecondo che n farà difpari o pari. In confeguenza farà generalmente la differenza $n.^{ma}$ di qualunque funzione y della variabile x della forma feguente.

$$\Delta^n y = \Big((m^n) - \frac{n}{1}(m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2})$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(m^{n-3}) + \text{ecc.} \pm 1\Big)\frac{dy}{dx}$$

$$+ \Big((m^n)^2 - \frac{n}{1}(m^{n-1})^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2})^2$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\overset{n-3}{m}\right)^2 + \text{ecc.} \pm 1 \Big) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$+\Big(\left(\overset{n}{m}\right)^3 - \frac{n}{1}\left(\overset{n-1}{m}\right)^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\overset{n-2}{m}\right)^3$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\overset{n-3}{m}\right)^3 + \text{ecc.} \pm 1 \Big) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

essendo $\left(\overset{n}{m}\right) = X + X' + X'' .... \overset{n-1}{X}$, e $\frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}$ ecc. quantità cognite e necessariamente finite. Il che ecc.

S c o l i o.

§. XII. Ancorchè l'uso di questa formula per ritrovare le differenze finite d' ogni grado di qualsivoglia funzione di x col modulo $x+X$ non possa avere alcuna difficoltà, ne faremo qualche applicazione a' casi particolari per rischiaramento.

I. E s e m p i o.

Sia proposto di trovare la differenza seconda di x^2, essendo il modulo $x + ax^2$. Sarà pertanto $X = ax^2$, $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $ddy = 2dx^2$, e d^3y con tutti gli altri differenziali successivi $= 0$. E perciò si avrà dalla formula

$\Delta^2 x^2 = \big((m'') - 2(m')\big)2x + \big((m'')^2 - 2(m')^2\big)$

Ma $(m') = X = ax^2$, $(m'') = X + X' = ax^2 + a(x + ax^2)^2$;

Dunque $2x(m'') = 4ax^3 + 4a^2x^4 + 2a^3x^5$; $4x(m') = 4ax^3$,

$(m'')^2 = (2ax^2 + 2a^2x^3 + a^3x^4)^2$, $2(m')^2 = 2a^2x^4$, e però

$\Delta^2 x^2 = a^6x^8 + 4a^5x^7 + 8a^4x^6 + 10a^3x^5 + 6a^2x^4$.

II. ESEMPIO.

Si cerchi la differenza terza di x col modulo $x+l.x$. Essendo $X=l.x$, $n=3$, $y=x$, $dy=dx$, e ddy, d^3y ecc. $=0$, sarà
$\Delta^3 x=(m''')-3(m'')+3(m')$. Ma $(m')=X=l.x$, $(m'')=X+X'=l.x+l.(x+l.x)$, $(m''')=X+X'+X''$ $=l.x+l.(x+l.x)+l.\big(x+l.x+l.(x+l.x)\big)$. Dunque $\Delta^3 x=l.x+l.(x+l.x)+l.\big(x+l.x+l.(x+l.x)\big)-3l.x-3l.(x+l.x)+3l.x=l.x-2l.(x+l.x)+l.\big(x+l.x+l.(x+l.x)\big)$

III. ESEMPIO.

Sia da determinarsi la differenza prima di $bx+cx^2$ essendo $x-ax+bx^2$ il modulo delle differenze. Sarà pertanto $X=bx^2-ax$, $n=1$, $y=bx+cx^2$, $dy=bdx+2cxdx$, $ddy=2cdx^2$, d^3y, d^4y ecc. $=0$. E però
$\Delta y=\Delta(bx+cx^2)=(m')(b+2cx)+(m')^2c$
Ma $(m')=X=bx^2-ax$. Dunque $\Delta y=(b^2+a^2c-2ac)x^2+(2bc-2abc)x^3-abx+b^2cx^4$.

COROLLARIO.

§. XIII. Dalla forma universale delle differenze finite d' una qualunque funzione di x, che abbiamo determinato, si può facilmente ricavare quella, che conviene alla differenza d' ogni ordine coll' incremento costante, cioè col modulo comune $x+a$. Egli è di molta utilità l' avere una sola forma generale, che esprima le differenze $n.^{me}$ di qualsivoglia funzione in questo caso particolare, ch' è il più comune, e più in uso presso i Geometri; tanto più, che non apparisce agevolmente, come si possa dedurre un' espressione generale dalle forme particolari date a queste differenze a parte a parte dal Sig. *Eulero* alla pag. 343. delle sue Instituzioni.

Basta pertanto riflettere, che nel caso dell' incremento costante a, si ha

$$X = a = (m')$$
$$X + X' = a + a = 2a = (m'')$$
$$X + X' + X'' = a + a + a = 3a = (m''')$$
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
$$X + X' \ldots . X^{n-1} = na = (m^n)$$

e però sostituendo questi multipli di a nella formula universale, si avrà generalmente per gl' incrementi costanti.

$$\Delta^n y = \left(na - \frac{n(n-1)a}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)a}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+\left(n^2a^2 - \frac{n(n-1)^2 a^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2 a^2}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+\left(n^3a^3 - \frac{n(n-1)^3 a^3}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3 a^3}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$
$$+ \text{ecc.}$$

forma, in cui la legge è visibile. In fatti sia $n = 1$.

$$\Delta y = \frac{ady}{dx} + \frac{a^2ddy}{2dx^2} + \frac{a^3d^3y}{6dx^3} + \text{ecc.}$$

posto $n = 2$

$$\Delta^2 y = \frac{a^2ddy}{dx^2} + \frac{3a^3d^3y}{3dx^3} + \frac{7a^4d^4y}{3.4dx^4} + \text{ecc.}$$

e così successivamente come porta la Tavola del Sig. *Eulero*.

SCOLIO.

§. XIV. Veduto abbastanza della differenziazione delle funzioni finite, ci faremo a versare sopra l' integrazione delle funzioni differenziali. Siccome una funzione può essere considerata integrale d' una funzione ignota, la quale si determina colla differenziazione di quella

stessa

ſteſſa quantità, che ſi ſuppone eſſere il ſuo Integrale; così ogni funzione può eſſere propoſta come differenziale d' una funzione incognita, la quale non può definirſi, che trovando l'Integrale della funzione propoſta. Ma quanto è agevole e ſoggetto a Canoni generali, come s'è veduto, il primo Calcolo, altrettanto quello dell'integrazione delle funzioni è difficile ſommamente, e forſe non fatto per ſottometterſi a regole univerſali. Appena può egli dirſi tocco da' Geometri, ſe qualche caſo ſi eccettui ſvolto ingegnoſamente dal Sig. *Eulero* nel I. Cap. di ſue Iſtituzioni. E tanto più fa meraviglia, che non ſe ne ſieno occupati prima d' ogn' altra coſa, che il Calcolo Integrale dell' Equazioni differenziali tutto ripoſa ſugl' Integrali delle funzioni differenziali, e non può un' equazione avere un Integrale finito, e ſviluppato, ſe non s' abbia quello delle funzioni, all' integrazione delle quali egli ſi riduce neceſſariamente. Ma penſando, che a poco avrebbero ſervito le mie ricerche, ſe mi foſſi intrattenuto ſu de' caſi particolari, mi poſi a tentare qualche coſa di generale, per quanto il permette l' arduità dell' aſſunto. E come è noto, che la parte più luminoſa, e più uſuale, cioè quella, in cui gl' incrementi o decrementi ſeguono la progreſſione de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, ecc., ha relazione colle ſomme generali di ſerie aventi per termine generale le funzioni ſteſſe, di cui ſi cerca l' integrale; mi ſono dato anche a coltivare di propoſito la Teoria delle ſerie con un metodo, che ha il vantaggio di legarſi ſpontaneamente col Calcolo integrale delle funzioni differenziali finite, ond' è poi nata la Memoria precedente, di cui vedremo qui un' immediata applicazione.

DEFINIZIONE.

§. XV. La Caratteristica $\int$ denoti l' integrale d' una funzione qualunque, che n' è affetta, come nel Calcolo integrale a differenze infinitesime, a distinzione della Caratteristica S, che deve indicare la somma generale d' una serie, che abbia per termine generale la funzione affetta. In tal guisa sarà $\int M$ l' integrale della funzione M della variabile x, considerata come un differenziale finito, ed SM sarà la somma generale di una serie, che ha per termine generale la funzione M, e per indice la stessa variabile x.

PROPOSIZIONE III.

§. XVI. *Proposta qualsivoglia funzione differenziale* M *di* x *e costanti col modulo* x + X *delle differenze finite, trovare l' equazione, a cui si riduce generalmente l' integrazione della funzione* M.

RISOLUZIONE.

Sia y l' integrale ricercato. Dovrà essere $y = \int M +$ cost.; e differenziando $\Delta y = y' - y = M$. Ma abbiamo veduto essere

$$y' = y + \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{X^3 d^3 y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Si avrà dunque l' equazione generale

$$(A) \ldots\ldots M = \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{X^3 d^3 y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

E però se si trovi un solo valore t per y soddisfacente all' equazione (A), sarà $t +$ cost. l' integrale completo della funzione M. Il che ecc.

PROPOSIZIONE IV.

§. XVII. *Trovare tutte le funzioni* M, *che ammettono integrale completo algebraico razionale ed intiero, con qualsivoglia modulo* $x+X$.

RISOLUZIONE.

Sia primieramente $y=\int M=K+bx$. Sostituendo questo valore nell' equazione (A) della Proposizione precedente, sarà $M=bX$, e però qualunque funzione di x algebraica o trascendente, ch' esser possa l' incremento X, sarà $\int M=b\int X=K+bx$, e K sarà la costante arbitraria.

Sia in secondo luogo $y=\int M=K+bx+cx^2$. Sarà

$$M=(b+2cx)X+cX^2$$

e qualunque funzione di x sia X, sarà $K+bx+cx^2$ l' integrale completo di $(b+2cx)X+cX^2$. Dunque generalmente essendo

$$M=(b+2cx+3ex^2+4fx^3+\text{ecc.}\ldots\ldots)X$$
$$+(1.2c+2.3ex+3.4fx^2+4.5gx^3+\text{ecc.}\ldots\ldots)\frac{X^2}{1.2}$$
$$+(1.2.3e+2.3.4fx+3.4.5gx^2+\text{ecc.}\ldots\ldots)\frac{X^3}{1.2.3}$$
$$+\text{ecc.}$$

qualunque funzione di x sia X, sarà

$\int M=K+bx+cx^2+ex^3+fx^4+gx^5+\text{ecc.}$

Il che ecc.

COROLLARIO.

§. XVIII. Si deduce quindi agevolmente, che può essere M qualunque funzione di x a piacere, purchè fia X un determinato incremento, o una funzione determinata dipendènte dal valore di M.

PROPOSIZIONE V.

§. XIX. *Di nuovo propoſta qualſivoglia funzione differenziale* y *di* x *e coſtanti*, *col modulo* x + X *delle differenze finite*, *trovare in funzioni di* y *ed* x *il ſuo integrale completo*.

RISOLUZIONE.

Sieno generalmente $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$ ecc. $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, ecc. le forme che prendono le funzioni y, M ponendovi ſucceſſivamente $x - X$ in luogo di X, come ſono le y', y'', y''' ecc. M', M'' ecc. le forme, che prendono y, M, ponendovi ſucceſſivamente $x + X$ in luogo di x (§. 11); e ſia $M = \int y$. Sarà $\Delta M = y$. Ma $\Delta M = M' - M$ (§. 11); dunque $y = M' - M$, e ponendo ſucceſſivamente ne' termini di queſt' equazione $x - X$ in luogo di X, ſarà

$$y_{,} = M - M_{,}$$
$$y_{,,} = M_{,} - M_{,,}$$
$$y_{,,,} = M_{,,} - M_{,,,}$$
$$y_{,,,,} = M_{,,,} - M_{,,,,}$$
ecc.

In conſeguenza, prendendo le ſomme all' infinito, ſarà

$$(B) \ldots\ldots M = \int y = K + y_{,} + y_{,,} + y_{,,,} + y_{,,,,} + \text{ecc.}$$

eſſendo K la coſtante arbitraria. Ma ponendo negative le variazioni nel §. X. ſi ha

$$y_{,} = y - \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} - \frac{X^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

$$y_{,,} = y - (X + X')\frac{dy}{dx} + (X + X')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} - \text{ecc.}$$

ecc.

fostituendo pertanto questi valori nell' equazione (*B*), si avrà

$$(C) \ldots y \int = K + Sy - \left(X + (X+X') + (X+X'+X'') + \text{ecc.} \ldots\right) \frac{dy}{dx}$$

$$+ \left(X^2 + (X+X')^2 + (X+X'+X'')^2 + \text{ecc.} \ldots\right) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$- \left(X^3 + (X+X')^3 + (X+X'+X'')^3 + \text{ecc.} \ldots\right) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$

$$+ \text{ecc.}$$

che è un' altra forma generale, che può avere l' integrale della funzione data y col modulo $x + X$, come s' era proposto di ritrovare.

PROPOSIZIONE VI.

§. XX. *Ritrovare l' integrale completo di qualsivoglia funzione differenziale* y *col modulo* x + 1 *delle differenze finite.*

RISOLUZIONE.

Essendo $X = 1$, e però $X + X' = 1 + 1 = 2$, $X + X' + X'' = 3$ ecc.
si sostituiscano questi valori nell' equazione (*C*) della Proposizione precedente. Sarà

$$\int y - K + Sy - (1 + 2 + 3 + 4 + \text{ecc.} \ldots) \frac{dy}{dx}$$

$$+ (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{ecc.} \ldots) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$- (1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \text{ecc.} \ldots) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$

$$+ \text{ecc.}$$

e però col prendere i termini generali delle serie ...

meriche, dando loro per indice o esponente, che voglia dirsi, la variabile x, si avrà

$$(D)\ldots \int y = K + Sy - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

integrale completo della funzione differenziale y. Il che ecc.

COROLLARIO.

§. XXI. E poichè $y = K + \frac{xdy}{dx} - \frac{x^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3 d^3y}{1.2.3dx^3}$ — ecc. (*Eulero Inst. pag.* 359), se si sostituisca questo valore nell' equazione (D) in luogo della serie infinita, sarà manifestamente

$$\int y = K + Sy - y$$

ch' è l' equazione nota di relazione tra l' integrale $\int y$ della funzione differenziale y, e la somma d' una serie Sy avente la stessa funzione y per termine generale.

SCOLIO.

§. XXII. Questo è il luogo di combinare la Teoria nostra delle serie coll' integrazione delle funzioni differenziali. Riflettendo al modo, che abbiamo adoperato per trovare i termini generali delle serie, si vede, che li abbiamo sempre ricavati dalla differenza di due funzioni di x colle stesse condizioni, con cui si trae la differenza finita, giacchè essendo M il termine generale, si sono sempre determinate due forme y, y' dalla differenza delle quali risulta la forma M, e però deve essere necessariamente $y = \int M$. Ci faremo pertanto a mettere qui alcune di queste integrazioni in via di Corollarj, perchè le si abbiano sotto forme generali, senz' altra fatica, che quella di adattarle a' casi particolari, e servano di norma per le altre.

COROLLARJ.

I.° E cominciando dalle funzioni Algebraiche razionali, ed intiere di x, se sia
$M = A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2) + (D + 4Dx + 6Dx^2 + 4Dx^3) \ldots\ldots + \mathfrak{Q}(x+1)^n - \mathfrak{Q}x^n$
sarà
$\int M = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots \mathfrak{Q}x^n +$ cost. arb.
(*Mem. preced. intorno alle serie Cap.* 1. *Probl.* 1.)
Esemp. Sia $M = f^2 x + 3gx^2$. Identificando i termini omologhi si avrà $A + B + C = 0$, $2B + 3C = f^2$; $3C = 3g$, e però $A = \frac{g - f^2}{2}$, $B = \frac{f^2 - 3g}{2}$, $C = g$. In conseguenza $\int (f^2 x + 3gx^2) = \left(\frac{g - f^2}{2}\right) x + \frac{(f^2 - 3g)x^2}{2} + gx^3$.

II.° Se sia $M = (\pm A \mp AK^b) K^{a+bx}$,
sarà $\int M = \pm AK^{a+b(x+1)} +$ cost. arb.
(*Cap.* II. *Probl. IV*)

III.° Se sia generalmente
$M = \pm K^{a+bx} \left(A' - A'K^b + Ax - AK^b(x+1) + Bx^2 - BK^b(x+1) \ldots\ldots \mathfrak{Q}x^n - \mathfrak{Q}K^b(x+1)^n \right)$
sarà
$\int M = \pm \left(A' + A(x+1) + B(x+1)^2 \ldots\ldots \mathfrak{Q}(x+1)^n \right) K^{a+b(x+1)} +$ cost. arb.
(*Cap.* II. *Probl. V.*

IV.° Se sia $M = \frac{A}{(m+nx)(p+qx) \ldots\ldots (\Delta + \varkappa x)}$
cioè una frazione di cui il numeratore è una quantità costante, e il denominatore il prodotto d' un numero qualunque di fattori semplici, sarà

$$\int M = \frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\nu-\mu:t-1}dz\ldots\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z}$$

$+$ coſt. arb.

nella qual' eſpreſſione il ſecondo membro non è un integrale a differenze finite, ma sì bene un integrale a differenze infiniteſime, in cui dopo l' integrazione completa debbe eſſer fatto $z = 1$.

Vegganſi per la dimoſtrazione il Probl. X, Teor. I., Probl. XI. del Cap. V. Nello ſteſſo modo ſi troverebbero gl' integrali della funzione M, ſe ella foſſe una frazione con de' fattori ſemplici così al numeratore come al denominatore, dietro a quanto s' è dimoſtrato nel medeſimo Capitolo delle Serie. Ma non di queſta ſola natura di funzioni conſiderate come differenziali finiti ſi può avere l' integrale completo. Tutte quelle che nella noſtra teoria delle ſerie fanno uffizio di termini generali eſſendo ſtate, in forza del metodo ivi adoperato, riſolute in una forma equivalente di due membri colla legge delle differenze finite, ammettono immediatamente integrazione, come chiaramente ſi può comprenderlo dai caſi ſvolti in queſti Corollarj, ch' io tralaſcio di moltiplicare ſenza neceſſità, eſtendendoſi la coſa ſu tutte le parti del Trattato ſopraddetto.

S C O L I O.

§. XXIII. Che ſe la ſerie, di cui è termine generale la funzione y, onde ſi cerca l' integrale, foſſe ribelle a tutti i metodi, ſicchè la formula

$$\int y = K + Sy - y$$

del §. XXI. non foſſe di alcun ſuffragio, atteſa l' ineſplicabilità della forma Sy, non manca, come in tanti altri ardui caſi delle Scienze Matematiche, il ricorſo ad una ſerie, ch' eſprima la funzione Sy con un' infinità

nità di termini. In fatti essendo (*Eulero Inst. pag.* 438.)

$$Sy = (x+1)y - a - \frac{dy}{dx} Sx + \frac{ddy}{1.2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} Sx^3 + \text{ecc.}$$

dove a è la quantità, che risulta ponendo $x = 0$ nel termine generale y, e Sx, Sx^2 ecc. sono le somme delle successive potenze intere di x, funzioni ricavabili agevolmente dalla teoria delle serie, sarà generalmente

$$\int y = K + xy - a - \frac{dy}{dx} Sx + \frac{ddy}{1.2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} Sx^3 + \text{ecc.}$$

PROPOSIZIONE VII.

§. XXIV. *Ritrovare l' integrale completo di qualunque funzione logaritmica di* x *col modulo generale delle differenze* x + X.

RISOLUZIONE.

Sia $y = l.P$, essendo P qualsivoglia funzione di x. Sarà

$$y' - y = \Delta y = \Delta l.P \qquad y - y_{,} = \Delta y_{,} = \Delta l.P_{,}$$
$$y'' - y' = \Delta y' = \Delta l.P' \qquad y_{,} - y_{,,} = \Delta y_{,,} = \Delta l.P_{,,}$$
$$y''' - y'' = \Delta y'' = \Delta l.P'' \qquad y_{,,} - y_{,,,} = \Delta y_{,,,} = \Delta l.Py_{,,,}$$

ecc. ecc.

Dunque prendendo le somme all' infinito, si avrà

$$y = -\Delta l.P - \Delta l.P' - \Delta l.P'' - \text{ecc.} = \Delta l.P_{,} + \Delta l.P_{,,} + \Delta l.P_{,,,} + \text{ecc.}$$

e integrando coll' aggiunta della costante K, sarà

$$\int y = K - l.P - l.P' - l.P'' - \text{ecc.} = K + l.P_{,} + l.P_{,,} + l.P_{,,,} + \text{ecc.}$$

Ma la somma de' logaritmi di molte quantità è uguale al logaritmo del prodotto continuo di quelle quantità. Dunque

$$\int y = K - l.P.P'.P''.P''' \text{ ecc.} = K + l.P_{,}.P_{,,}.P_{,,,} \text{ ecc.}$$

Se pertanto $\pi'(P)$ sia la caratteristica del prodotto continuo de' valori successivi di P per incremento, $\pi_{,}(P)$ la caratteristica del prodotto continuo de' medesimi valori per decremento, sarà l' integrale completo di qualunque quantità logaritmica

$$\int l.P = K - l.\pi'(P) = K + l.\pi_{,}(P)$$

il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XXV. E perchè $y = -l.\pi'(P) = l.\pi_{,}(P)$, sarà $e^{y} = e^{-l.\pi'(P)} = \frac{1}{e^{l.\pi'(P)}} = e^{l.\pi_{,}(P)}$, essendo e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico. Ma $e^{l.\pi'(P)} = \pi'(P)$, $e^{l.\pi_{,}(P)} = \pi_{,}(P)$. Dunque $\pi'(P) = \frac{1}{\pi_{,}(P)}$

COROLLARIO II.

§. XXVI. In consegueuza se si metta $\frac{1}{P}$ in luogo di P, sarà

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} = P.$$ Imperciocchè essendo

$\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{P_{,}P_{,,}P_{,,,}\text{ ecc.}}$, se vi si metta $x + X$ in luogo di x, sarà $\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right) = \frac{1}{P\,P_{,}P_{,,}\text{ecc.}}$

Dunque $\dfrac{\pi_{,}(\frac{1}{P})}{\pi_{,}(\frac{1}{P'})} = P$; e sostituendo $\dfrac{1}{\pi'(\frac{1}{P})}$ in luogo di $\pi_{,}(P)$, sarà similmente $\dfrac{\pi'(\frac{1}{P'})}{\pi'(\frac{1}{P})} = P$.

COROLLARIO III.

§. XXVII. Dunque

$$\frac{\pi_{,}(\frac{1}{P})}{\pi_{,}(\frac{1}{P'})} \times \frac{\pi_{,}(\frac{1}{Q})}{\pi_{,}(\frac{1}{Q'})} = PQ$$

$$\frac{\pi_{,}(\frac{1}{P})}{\pi_{,}(\frac{1}{P'})} \times \frac{\pi_{,}(\frac{1}{Q})}{\pi_{,}(\frac{1}{Q'})} \times \frac{\pi_{,}(\frac{1}{R})}{\pi_{,}(\frac{1}{R'})} = PQR$$

e così successivamente

CAPITOLO SECONDO

DELL' INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI FINITE A DUE VARIABILI.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XXVIII. *Proposta l' equazione differenziale* (M) *a differenze finite*

$(M) \ldots\ Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.} \ldots + Ny^n = 0$
di qualsivoglia grado n, *qualunque caso sieno i coefficienti* A, B, C ecc. *costanti o funzioni di* x, *determinare per qualsivoglia modulo* x + X *un' equazione generale in* y, X *e cofficienti dati, nella quale trovando* n *valori differenti per* y *soddisfacenti particolarmente all' equazione, si abbia l' integrale completo dell' equazione* (M).

RISOLUZIONE.

Sieno X', X'' ecc. li termini consecutivi ad X ponendo successivamente $x + X$ in luogo di x, e sia $(m') = X$, $(m'') = X + X'$ ecc.
$(m^n) = X + X' + X'' \ldots + X^{n-1}$.

Sarà (§. x.)

$$y = y$$

$$y' = y + (m')\frac{dy}{dx} + (m')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + (m')^3 \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + (m'')\frac{dy}{dx} + (m'')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + (m'')^3 \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

- -

$$y^{n+1} = y + (m^{n+1})\frac{dy}{dx} + (m^{n+1})^2 + \frac{ddy}{1.2dx^2} + (m^{n+1})^3 \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Si sostituiscano questi valori per y, y', y'' ecc. nell' equazione (M), e ordinando i termini, si avrà

$$\begin{aligned} 0 &= y\,(A + B + C + D + \text{ecc.}) \\ &+ \frac{dy}{dx}\left(B\,(m') + C\,(m'') + D\,(m''') + \text{ecc.}\right) \\ &+ \frac{d^2y}{1.2dx^2}\left(B\,(m')^2 + C\,(m'')^1 + D\,(m''')^2 + \text{ecc.}\right) \\ &+ \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}\left(B\,(m')^3 + C\,(m'')^3 + D\,(m''')^3 + \text{ecc.}\right) \end{aligned}$$

- -

$$+\frac{d^ny}{1.2\ldots ndx^n}\left(B(m')^n+C(m'')^n+D(m''')^n+\text{ecc.}\right)\ldots(H)$$

nella quale equazione (m'), (m'') ecc. ſono quantità coſtanti, o funzioni di x dipendenti dall' incremento X aſſunto. Se dunque ſi abbia n valori differenti per y colle riſpettive coſtanti arbitrarie, che ſoddisfacciano a queſt' equazione, eſſendo l' equazione (M) lineare, la ſomma di queſti valori dovrà ſoddisfare all' equazione (M). E perchè queſta ſomma contiene n coſtanti arbitrarie, ſarà ella neceſſariamente l' integrale completo dell' equazione (M). Il che ecc.

PROPOSIZIONE IX.

§. XXIX. *Propoſta l' equazione differenziale* (M)

$$(M)\ldots\ldots Ay+By'+Cy''+\text{ecc.}\ldots\ldots+Ny^n=0$$

in cui A, B, C ecc. *ſono quantità coſtanti, e* x + px *il modulo delle differenze, ritrovare il ſuo integrale completo, qualunque ſia il grado dell' equazione, e* p *qualunque coſtante.*

RISOLUZIONE.

Eſſendo $X=px$, ſarà $X'=(p+p^2)x$, $X''=(p+2p^2+p^3)x$, $X'''=(p+3p^2+3p^3+p^4)x$ ecc. Dunque $X+X'=(m'')=(2p+p^2)x$, $X+X'+X''=(m''')=(3p+3p^2+p^3)x$, $X+X'+X''+X'''=(m'''')=(4p+6p^2+4p^3+p^4)x$, cioè generalmente $X+X'+X''\ldots+X^{n+1}=(m^n)=\left((p+1)^n-1\right)x$, ſiccome è manifeſto. Soſtituendo queſti valori per (m'), (m'') ecc. nell' equazione (H) (§. XXVIII) ella ſi ridurrà a queſta forma.

$$0=y(A+B+C+D+\text{ecc.})$$

$$+\frac{dy}{dx}\left(Bpx+C\left((p+1)^2-1\right)x+D\left((p+1)^3-1\right)x+\text{ecc.}\right)$$

$$+\frac{ddy}{1.2dx^2}\Big(Bp^2x^2+C\big((p+1)^2-1\big)^2x^2+D\big((p+1)^3-1\big)^2x^2+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}\Big(Bp^3x^3+C\big((p+1)^2-1\big)^3x^3+D\big((p+1)^3-1\big)^3x^3+\text{ecc.}\Big)$$

- -

$$+\frac{d^ny}{1.2..ndx^2}\Big(Bp^nx^n+C\big((p+1)^2-1\big)^nx^n+D\big((p+1)^3-1\big)^nx^n+\text{ecc.}\Big)$$

Si finga $y=Kx^a$, essendo K, a costanti indeterminate.

Sarà $dy=aKx^{a-1}dx$, $ddy=a(a-1)Kx^{a-2}dx^2 \ldots\ldots d^ny= a(a-1)\ldots(a-n+1)Kx^{a-n}dx^n$. E però sostituendo questi valori, e dividendo l' equazione per Kx^a, si avrà

$$(N)\ldots\, 0=A+B+C+\text{ecc.}+a\Big(Bp+C\big((p+1)^2-1\big)+D\big((p+1)^3-1\big)+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{a(a-1)}{1.2}\Big(Bp^2+C\big((p+1)^2-1\big)^2+D\big((p+1)^3-1\big)^2+\text{ecc.}\Big)\ldots\ldots$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\Big(Bp^3+C\big((p+1)^2-1\big)^3+D\big((p+1)^3-\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$+$ ecc.

cioè l'equazione ordinata (N)

$$(N)\ldots 0=A+B+C+D+\text{ecc.}+B\Big(ap+\frac{a(a-1)}{1.2}p^2+\frac{a(a-1)(aa-2)}{1.2.3}p^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+C\Big(a\big((p+1)^2-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^2-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^2-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+D\Big(a\big((p+1)^3-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^3-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^3-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

- -

$$+N\Big(a\big((p+1)^n-1\big)+\frac{a(a\ 1)}{1.2}\big((p+1)^n-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^n-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

Ora essendo $(1+Z)^a=1+aZ+\frac{a(a-1)}{1.2}Z^2$

$+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}Z^3+$ ecc. se alle serie si sostituiscano i valori finiti corrispondenti, si avrà

$$o = A + B + C + D + \text{ecc.} B\big((p+1)^a - 1\big) + C\big((p+1)^{2a} - 1\big) + D\big((p+1)^{3a} - 1\big) + \text{ecc.}$$

cioè

$$o = A + B(p+1)^a + C(p+1)^{2a} + D(p+1)^{3a} + \text{ecc.}$$

e posto $(p+1)^a = z$, risulterà l' equazione determinata (N')

$$(N') \ldots\ldots o = A + Bz + Cz^2 + Dx^3 + Ez^4 + \ldots\ldots Nz^n$$

la quale somministra n valori differenti per $a = \dfrac{l.z}{l.(p+1)}$, secondo il grado n dell' equazione da integrare. Se sieno pertanto c, c', c'' ecc. questi valori, prendendo per l' arbitraria K un numero n di valori diversi K, K', K'' ecc. poichè l' equazione (M) è lineare, sarà il suo integrale completo

$$y = Kx^c + K'x^{c'} + K''x^{c''} + K'''x^{c'''} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

LEMMA.

§. XXX. Essendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità, le seguenti equazioni debbono aver luogo, qualunque cosa sia m

$$e^m - 1 = m + \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^3}{1.2.3} + \frac{m^4}{1.2.3.4} + \text{ecc.}$$

$$e^{2m} - 1 = 2m + \frac{4m^2}{1.2} + \frac{8m^3}{1.2.3} + \frac{16m^4}{1.2.3.4} + \text{ecc.}$$

ecc. . . . . . -

$$e^{nm} - 1 = nm + \frac{n^2m^2}{1.2} + \frac{n^3m^3}{1.2.3} + \frac{n^4m^4}{1.2.3.4} + \text{ecc.}$$

Veggasene la dimostrazione nell' Introduz. all' An. degl' Infin. del Sig. *Eulero*.

PROPOSIZIONE X.

§. XXXI. *Trovare l' integrale completo dell' equazione differenziale* (A) *di qualsivoglia grado n*
$(A) \ldots . Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.} \ldots \ldots + My^{n} = 0$
in cui A, B, C ecc. *sono quantità costanti, e il modulo delle differenze è* x + a.

RISOLUZIONE.

Essendo in questo caso (§. x.)

$$y' = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 d^2 y}{1.2 dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + \frac{2ady}{dx} + \frac{4a^2 d^2 y}{1.2 dx^2} + \text{ecc.}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$y^{n} = y + \frac{nady}{dx} + \frac{n^2 a^2 d^2 y}{1.2. dx^2} + \text{ecc.}$$

si sostituiscano questi valori per y, y'' ecc. nell' equazione (A). Si avrà dopo la conveniente ordinazione de' termini l' equazione (B)

$$(B) \ldots . o = (A + B + C + D + \text{ecc.})\, y$$
$$+ (aB + 2aC + 3aD + 4aE + \text{ecc.}) \frac{dy}{dx}$$
$$+ (a^2 B + 4a^2 C + 9a^2 D + 16a^2 E + \text{ecc.}) \frac{ddy}{1.2 dx^2}$$
$$+ (a^3 B + 8a^3 C + 27a^3 D + 64a^3 E + \text{ecc.}) \frac{d^3 y}{1.2.3 dx^3}$$

- -

$$+ (a^n B + 2^n a^n C + 3^n a^n D + 4^n a^n E + \text{ecc.}) \frac{d^n y}{1.2 \ldots n dx^n}$$

E posto $y = Ke^{bx}$, essendo K, b costanti indeterminate, te, ed e il numero, che ha l'unità per logaritmo iperbolico, si avrà, sostituendo i valori di y, dy, ecc. e togliendo il fattor comune Ke^{bx}, l'equazione (C)

$$(C) \ldots\ldots o = A + B + C + D + \text{ecc.}$$

$$+ B\left(ab + \frac{a^2b^2}{1.2} + \frac{a^3b^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{a^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

$$+ C\left(2ab + \frac{4a^2b^2}{1.2} + \frac{8a^3b^3}{1.2.3} \cdots + \frac{2^na^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

- -

$$+ M\left(nab + \frac{n^2a^2b^2}{1.2} + \frac{n^3a^3b^3}{1.2.3.} \cdots + \frac{n^na^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

cioè pel Lemma (§. XXX.) l'equazione (D)

$$(D) \ldots A + Be^{ab} + Ce^{2ab} + De^{3ab} + Ee^{4ab} + \text{ecc.} \ldots + Me^{nab} = o$$

oppure, posto $e^{ab} = z$, l'equazione (E)

$$(E) \ldots A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ecc.} \ldots + Mz^n = o$$

Quest'equazione essendo del grado n, è manifesto, ch'ella somministrerà n valori differenti di z, che chiameremo p, p', p'' ecc., e in conseguenza n valori di b, i quali saranno $\frac{l.p}{a}$, $\frac{l.p'}{a}$, $\frac{l.p''}{a}$, ecc. E come il coefficiente K non entra in quest'equazione, così resta egli intieramente arbitrario, sì che prendendo per K un numero n di coefficienti diversi K, K', K'', ecc. come nella Prop. IX., si avrà n valori diversi di y, cioè $Ke^{\frac{x}{a}l.p}$, $K'e^{\frac{x}{a}l.p'}$ ecc. Essendo pertanto l'equazione (A) lineare, la somma di questi valori dovrà soddisfare all'equazione, di modo che l'equazione $y = Ke^{\frac{x}{a}l.p}$ $+ K'e^{\frac{x}{a}l.p'} + K''e^{\frac{x}{a}l.p''} +$ ecc. oppure

$y = K(p)^{x:a} + K'(p')^{x:a} + K''(p'')^{x:a} +$ ecc., contenendo n costanti arbitrarie K, K' ecc., sarà l'integrale completo dell' equazione (A) del grado n. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XI.

§. XXXII. *Proposta l' equazione differenziale finita*
(A) . . . . $My + Ny' = 0$
essendo M, N *funzioni di* x *qualunque, e generalmente il modulo delle differenze* $x + X$, *ritrovare l' integrale completo dell' equazione* (A).

RISOLUZIONE.

Si finga essere $y = Ke^{A(x)}$, essendo K un' indeterminata costante, $A(x)$ funzione indeterminata di x, e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità. Sarà $y' = Ke^{A(x+X)}$. Ma $A(x+X) - A(x) = \Delta A(x)$ (§. II.). Dunque
$y' = Ke^{A(x)+\Delta A(x)}$. Si sostituiscano questi valori nell' equazione (A), e si avrà
$MKe^{A(x)} + NKe^{A(x)+\Delta A(x)} = 0$, ove fatta la divisione si ottiene
$M + Ne^{\Delta A(x)} = 0$, in cui non entrando l' indeterminata K resta ella intieramente arbitraria. Dunque
$e^{\Delta A(x)} = 1 - \frac{M+N}{N}$, e $\Delta A(x) = l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)$.

Integrando pertanto, sarà $A(x) = \int l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)$.

E però
$y = Ke^{\int l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)}$.

Ma $\int l.\left(1-\frac{M+N}{N}\right)=l.\pi_{,}\left(1-\frac{M+N}{N}\right)$ (§. XXXIV).
Dunque

$y=K\pi_{,}\left(1-\frac{M+N}{N}\right)$ sarà l' integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

PROPOSIZIONE XII.

§. XXXIII. *Proposta l' equazione differenziale precedente*

(A) . . . . $My+Ny'=0$

trovare i differenti moduli $x+X$, *a' quali corrisponde per* y *una funzione algebraica di* x *razionale ed intera.*

RISOLUZIONE.

Poichè si è dimostrato essere per qualsivoglia incremento X (§. VIII.)

$$y'=y+\frac{Xdy}{dx}+\frac{X^2ddy}{1.2.dx^2}+\text{ecc.}$$

sostituendo questo valore nell' equazione proposta (A), sarà

$$(A')\ldots 0=(M+N)y+N\left(\frac{xdy}{dx}+\frac{X^2ddy}{1.2dx^2}+\text{ecc.}\right)$$

Ora, qualunque funzione algebraica razionale ed intera possa essere l' integrale dell' equazione (A), è certo che sostituita per y, e suoi differenziali nell' equazione (A'), se sia n l' esponente della massima potestà di x sarà $d^{n+1}y$ con tutti i differenziali successivi $=0$. L' equazione dunque (A') in x ed X diverrà finita, e considerando X come un' incognita, ascenderà ella al grado X^n, sì che si avrà per X un numero n di valori $=X, (X), ((X))$ ecc. in x e costanti che soddisfaranno all' equazione, e però un numero n di moduli $x+X$, $x+(X)$, $x+((X))$ ecc. a' quali corrifponderà una fteffa funzione per y algebraica razionale ed intera del grado n.

Pofto ciò, fe fi faccia per ordine

$ddy=0$, fi ha $y=a+bx$

$d^3y=0 \ldots\ldots y=a+bx+cx^2$

- -

$d^{n+1}y=0 \ldots\ldots y=a+bx+cx^2+\text{ecc.}\ldots mx^n$

Softituendo pertanto quefti valori di y fucceffivamente nell' equazione (A'), prende ella quefte forme

$(1) \ldots 0=(M+N)(a+bx)+bNX$

$(2) \ldots 0=(M+N)(a+bx+cx^2)+(b+2cx)NX+cNX^2$

- -

$(m) \ldots 0=(M+N)(a+bx+cx^2 \ldots\ldots mx^n)+NX(b+2cx+3dx^2+4ex^3 \ldots\ldots nmx^{n-1})+NX^2(2c+2.3dx+3.4ex^2 \ldots\ldots n(n-1)mx^{n-2})+\text{ecc.}$

le quali fomminiftrano evidentemente i diverfi valori di X ai quali corrifponde per y una fteffa funzione algebraica di x razionale ed intiera della forma

$a+bx+cx^2+ex^3+fx^4$ ecc.

In fatti fe fi ponga nel modulo il valore di X tratto dall' equazione (1.) farà $y=a+bx$. Similmente avendo X due valori X, (X) nell' equazione (2) è chiaro che per entrambi i moduli $x+X$, $x+(X)$ rifulta $y=a+bx+cx^2$. E così fucceffivamente traendo dall' equazione generale (M) un' equazione in X del grado n, da tutti li n valori di X rifulterà un numero n di moduli, ai quali corrifponderà per y la fteffa funzione algebraica razionale ed intiera $a+bx+cx^2+ex^3 \ldots +mx^n$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XXXIV. Non potrà pertanto effere y funzione algebraica razionale ed intera di x, coll' incremento X

costante, se sieno $M\ N$ quantità costanti. E potrà esserlo solamente, in supposizione di $M\ N$ costanti, sempre che sia variabile l' incremento.

COROLLARIO II.

§. XXXV. Ma qualunque cosa sieno $M\ N$, se sia $x\sqrt[n]{\left(-\frac{M}{N}\right)}$ il modulo delle differenze, sarà $y = Kx^n$ l' integrale completo dell' equazione $My + Ny' = o$, essendo K una costante arbitraria, com' è facile cosa l' accertarsene col calcolo.

PROPOSIZIONE XIII.

§. XXXVI. *Proposta l' equazione differenziale* (A)
$(A) \ldots\ldots o = My + Ny' + Py'' + Qy''' + \text{ecc.}$
del grado n, *essendo* M, N, P, Q ecc. *costanti o variabili, come si vuole, trovare le equazioni degl' incrementi, ai quali corrisponde per* y *una data funzione di* x *algebraica razionale ed intiera.*

RISOLUZIONE.

Assunta generalmente per y l' equazione (B)
$(B) \ldots y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots + mx^n$
si metta in ogni termine successivamente per x il modulo $x + X$, indi $x + X + X'$, $x + X + X' + X'$ ecc. sino ad $x + X + X' \ldots + X^{n-1}$ corrispondentemente al grado n dell' equazione (A). Si avrà
$o = (a + bx + cx^2 + \text{ecc.} \ldots + mx^n)M$
$+ \left(a + b(x+X) + c(x+X)^2 + e(x+X)^3 + \text{ecc.} \ldots + m(x+X)^n\right)N$
$+ (a + b(x+X+X') + c(x+X+X')^2 + e(x+X+X')^3 + \text{ecc.} \ldots$
$+ m(x+X+X')^n)P + \text{ecc.}$
equazione generale, che abbraccia tutte le equazioni

degl' incrementi ricercate. Imperciocchè, se sia l' equazione (A) del secondo grado, sarà $\mathfrak{Q}$ con tutti gli altri coefficienti $=o$. In conseguenza l' equazione degl' incrementi, a' quali corrisponde per y la funzione semplice $a+bx$, sarà (C)

$$(C)....o=(M+N+P)a+(M+N+P)bx+(N+P)bX+PbX'$$

Similmente l' equazione degl' incrementi, a' quali corrisponde per y la funzione biforme $a+bx+cx^2$, sarà (D)

$$(D)..\ o=(M+N+P)a+(M+N+P)bx+(M+N+P)cx^2$$
$$+(Nb+2Ncx+Pb+2Pcx)X+(Nc+Pc)X^2$$
$$+(Pb+2Pcx)X'+PcX'^2+2PcXX'$$

e così successivamente per tutte le altre. Nello stesso modo si determineranno le Equazioni successive degl' incrementi per un' equazione (A) del terzo grado, del quarto ecc. a' quali corrisponde per y una funzione di x razionale ed intiera semplice, biforme, triforme ecc., come dovea trovarsi.

COROLLARIO.

§. XXXVII. Si scorge quindi I. che le equazioni degl' incrementi sono anch' esse differenziali finite, ma di grado n-1, cioè prossimo inferiore al grado dell' equazione (A). II. che non può mai avere y valore algebraico razionale ed intiero con incremento costante, se tutti li coefficienti M, N, P. ecc. sieno quantità costanti; ed essendo essi quantità costanti, l' incremento dovrà necessariamente essere variabile.

SCOLIO.

§. XXXVIII. L' introduzione de' moduli variabili $x+X$, e l' uso fatto delle espressioni differenziali

$$y+A\frac{dy}{dx}+B\frac{ddy}{dx^2}+C\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ecc.}$$

procedenti all'infinito, ci portano naturalmente a scoprire una connessione non attesa, che può avere un'infinità di queste espressioni coll' equazioni differenziali a differenze finite, essendo anche A, B ecc. coefficienti variabili. Non senza ragione parlando il Sig. *Eulero*, nel II. Vol. del suo Calcolo Integrale pag. 459, dell' equazione differenziale

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \text{ecc. all' infinito},$$

e di un comodo modo di esprimere il suo Integrale, asserisce, ch' ella è cosa, *altioris indaginis, neque adhuc ad hunc scopum Analyseos fines satis videntur promoti*. Riflettendo pertanto alla riduzione fattasi in questa Memoria dell' integrazione così di funzioni semplici, come di equazioni a differenze finite, all' integrazione di simili espressioni scorrenti all' infinito, e alla variabilità, onde possono essere affetti i coefficienti de' termini, che le compongono, attesa la variabilità de' moduli delle differenze, non è difficile, che meritar possa l' attenzione de' Geometri un sì fatto legame, per cui l' integrazione di un' infinità di simili equazioni d' infiniti termini dipende da quella di equazioni differenziali finite incomparabilmente più trattabili, che quelle non sono.

PROPOSIZIONE XIV.

§. XXXIX. *Proposta l' equazione differenziale*

$$(A) \ldots . My + Ny' = Q$$

a differenze finite con qualsivoglia modulo $y + X$, *essendo* M, N, Q *funzioni qualunque di* x *o costanti, come si vuole, trovare il suo integrale completo*.

RISOLUZIONE.

Si finga $y = A(x)\,B(x)$, essendo $A(x)$, $B(x)$ funzioni di x indeterminate. Sarà differenziando $\Delta y = \Delta A(x)\,B(x)$. Ma
$\Delta y = y' - y$, $\Delta A(x)\,B(x) = A(x+X)B(x+X) - A(x)B(x)$, e $A(x+X) = A(x) + \Delta A(x)$, $B(x+X) = B(x) + \Delta B(x)$ (§. II).
Dunque $y' - y = \big(A(x) + \Delta A(x)\big)\big(B(x) + \Delta B(x)\big) - A(x)\,B(x)$, e però $y' = A(x)\Delta B(x) + B(x)\Delta A(x) + \Delta A(x)\Delta B(x)$.
Sostituendo pertanto nell' equazione (A) i valori di y, y', e posto $A(x) = R$, $B(x) = T$, si avrà
$MRT + NR\Delta T + MT\Delta R + N\Delta R\Delta T = \mathfrak{Q}$;
e poichè due sono le funzioni indeterminate, si assumano le due equazioni

(I) $MRT + NR\Delta T = 0$

(II) $NT\Delta R + N\Delta R\Delta T = \mathfrak{Q}$.

Dalla prima risulta $MT + N\Delta T = MT + NT' - NT$
$= (M-N)T + NT' = 0$, $T = \pi_{\prime}\left(\dfrac{N-M}{N}\right)$ (§. XXXII),
$\Delta T = -\dfrac{MT}{N}$, e però $T + \Delta T = \pi_{\prime}\left(\dfrac{N-M}{N}\right) - \dfrac{MT}{N}$.
Sostituendo questi valori nell' equazione (II) si avrà

$$\Delta R = \frac{\mathfrak{Q}}{N(T+\Delta T)} = \frac{\mathfrak{Q}}{(M-N)\pi_{\prime}\left(\frac{N-M}{N}\right)}$$, e però integrando

$$R = \int\left(\mathfrak{Q} : (M-N)\pi_{\prime}\left(\frac{N-M}{N}\right)\right)$$. Dunque

$$y = RT = \pi_{\prime}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(K + \int\left(\mathfrak{Q} : (M-N)\pi_{\prime}\left(\frac{N-M}{N}\right)\right)\right)$$

sarà l' integrale completo dell' equazione (A) essendo K la costante arbitraria. Il che ecc.

Scolio.

§. XL. E' facile comprendere, che non può mai aversi il valore esplicito della funzione y, se non si assegni l' integrale della funzione $\frac{\mathfrak{Q}}{M-N}\pi,\left(\frac{N-M}{N}\right)$ essendo $x+X$ il modulo della differenza finita. E perchè avremo occasione di vedere in seguito, che di somiglianti parti integrali è composto l' integrale completo dell' equazioni differenziali di grado superiore al primo, sembra che non possa mai abbastanza coltivarsi il calcolo integrale delle funzioni semplici, su cui ci siamo trattenuti nel Cap. precedente, per quello che dall' estensione di questo, secondo differenti moduli, dipenderà sempre l' estensione e il progresso del Calcolo integrale dell' equazioni differenziali.

Proposizione XV.

§. XLI. *Proposta generalmente l' equazione differenziale finita* (A)
$(A)\ldots\mathfrak{Q}=Ay+By'+Cy''+$ ecc.
nella quale A, B, C *ecc. e* Q *sono funzioni di* x, e x+X *è il modulo delle differenze, definire il suo Integrale completo, o la sua riduzione generale.*

Risoluzione.

Si ponga I. $y'=zy+v$, essendo z ed v funzioni di x indeterminate.
Mettendo successivamente $x+X$ in luogo di x, sarà
II. $y''=z'y'+v'$
III. $y'''=z''y''+v''$
IV. $y''''=z'''y'''+v'''$
ecc.

Si sostituisca nella II. equazione il valore di y' tratto dalla I., e si avrà l'equazione (a)

(a) $y'' = z'zy + z'v + v'$

e sostituendo nella III. il valore di y'' tratto dall'equazione (a), si avrà l'equazione (b)

(b) $y''' = z''z'zy + z''z'v + z''v' + v''$

Continuando a fare queste successive sostituzioni per determinare i valori di y''', y'''' ecc. si scuopre con facilità essere generalmente

$$y^n = yz.z\ldots.z^{n-1} + vz'.z''\ldots.z^{n-1} + v'z''.z'''\ldots.z^{n-1}$$
$$+ v''z'''.z''''\ldots.z^{n-1} + v'''z''''z'''''\ldots..z^{n-1} + \text{ecc.}$$

Adunque mettendo i valori successivamente di y', y'' ecc. nell'equazione (A), si avrà l'equazione (B)

$$(B)\ldots..Q = Ay$$
$$+ Bzy + Bv$$
$$+ Cz'.zy + Cz'v + Cv'$$
$$+ Dz''.z'.zy + Dz''.z'v + Dz''v' + Dv''$$
$$+ Ez'''.z''.z'.zy + Ez'''.z''.z'v + Ez'''.z''v' + Ez'''v'' + Ev'''$$
$$+ Fz''''.z'''.z''.z'.zy + Fz''''.z'''.z''.zv + Fz''''.z'''.z''v'$$
$$+ Fz''''.z'''.v'' + Fz''''.v''' + Fv'''' + \text{ecc.}$$

Essendo pertanto due le funzioni indeterminate, si ponga $= o$ la prima serie verticale de' termini, cioè l'aggregato di tutti i termini, ne' quali entra la funzione y, e l'aggregato di tutti gli altri $= Q$. E però dividendo la prima equazione per y, si avrà

$$(C)\ldots..o = A + Bz + Cz.z' + Dz.z'.z''.Ez.z'.z''.z''' + \text{ecc.}$$
$$(D)\ldots..Q = (B + Cz' + Dz'.z'' + Ez'.z''.z''' + \text{ecc.})v$$
$$+ (C + Dz'' + Ez''.z'''. + Fz''.z'''.z'''' + \text{ecc.})v'$$
$$+ (D + Ez''' + Fz'''.z'''' + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots)v''$$
$$+ (E + Fz'''' + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots)v'''$$

ecc.

Posto ciò, si supponga $z = \frac{r'}{r}$, essendo r una nuova funzione di x indeterminata. L'equazione (C) prende questa forma.

$$o = A + B\frac{r'}{r} + C\frac{r'}{r}\cdot\frac{r''}{r'} + D\frac{r'}{r}\cdot\frac{r''}{r'}\cdot\frac{r'''}{r''} + \text{ecc.}$$

cioè questa

$$o = A + B\frac{r'}{r} + C\frac{r''}{r} + D\frac{r'''}{r} + E\frac{r''''}{r} + \text{ecc.}$$

la quale, fatta la moltiplicazione per r, diventa (E)

$$(E)\ldots\ldots o = Ar + Br' + Cr'' + Dr''' + \text{ecc.}$$

e se si faccia la stessa sostituzione nell'equazione (D), si ottiene l'equazione (F)

$$\begin{aligned}(F)\ldots\ \mathfrak{Q} = & \left(B + C\frac{r''}{r'} + D\frac{r'''}{r'} + E\frac{r''''}{r'} + \text{ecc.}\right)v \\ & + \left(C + D\frac{r'''}{r''} + E\frac{r''''}{r''} + F\frac{r'''''}{r''} + \text{ecc.}\ldots\right)v' \\ & + \left(D + E\frac{r''''}{r'''} + F\frac{r'''''}{r'''} + \text{ecc.}\ldots\ldots\right)v'' \\ & + \left(E + F\frac{r'''''}{r''''} + G\frac{r''''''}{r''''} + \text{ecc.}\ldots\ldots\right)v''' \\ & + \text{ecc.}\end{aligned}$$

L'integrazione pertanto dell' equazione (A) dipende dall'integrazione delle equazioni (E), (F), la prima delle quali è dello stesso grado n dell'equazione (A), oppure lo stesso, che l'equazione (A) in supposizione di $\mathfrak{Q} = o$, sol che si metta r in luogo di y, e la seconda del grado n-1, siccome è manifesto. Se dunque I. si abbia per r un valore, che soddisfaccia all'equazione (E), e il si sostituisca in (F), co' suoi valori successivi r', r'' ecc. ponendo cioè in r successivamente $x + X$, $x + X + X'$ ecc. in luogo di x, dipenderà l' integrazione dell' equazione (A) dall' integrazione dell'equazione (F) del grado prossimo inferiore n-1. II. Se si abbiano due valori differenti per r nell' equazione (E), e si sostituiscano successivamente in (F), risultandone due equazioni, si potrà eliminare la funzione

Fff ij

v^{n-1}, ſicchè l'integrazione dell'equazione (A) dipenderà da un'equazione del grado $n-2$, e così in ſeguito. Se dunque ſi abbia per r un numero n di valori differenti a, a', a'' ecc. nell' equazione (E), ſi potrà trovare l'integrale completo dell'equazione (A). Imperciocchè dalle ſoſtituzioni ſucceſſive di queſti valori nell'equazione (F) riſultando n equazioni differenti, ſi potranno eliminare ſucceſſivamente le funzioni v^{n-1}, v^{n-2} ecc. e determinare il valore finito di v. Ripigliando poi l'equazione $y'=zy+v$, e ſoſtituendovi ſucceſſivamente li n valori di $\frac{r'}{r}$ in luogo di z, e il valore di v, ſi avrà un numero n di equazioni di primo grado, le quali riſolute col metodo della Propoſizione XIV. daranno n valori differenti di y, sì che eſſendo l'equazione (A) lineare, queſti valori preſi inſieme coſtituiranno il ſuo integrale completo, contenendo di fatto n coſtanti arbitrarie. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XLII. Se ſi abbia pertanto l' integrale completo dell'equazione (A) in ſuppoſizione di $Q=o$, con che ſi ha pure l' integrale completo dell' equazione (E), contenendo egli un numero n di coſtanti arbitrarie, baſterà fare ſucceſſivamente tutte queſte coſtanti, meno una, eguali a zero. Si avranno per queſto mezzo n valori particolari di r, ſoddisfacenti all' equazione (E), e di più compreſi nell'integrale generale, ſicchè operando come qui ſopra, ſenza aggiugnere nuove coſtanti arbitrarie, ſi avrà l'integrale completo dell'equazione (A).

COROLLARIO II.

§. XLIII. Reſta dunque pienamente dimoſtrato, che l'equazione (A)

$(A) \ldots . Q = Ay + By' + Cy'' + Dy''' +$ ecc.
sarà completamente integrabile tutte le volte che si avranno n valori differenti di y, o l'integrale completo dell'equazione (A) in supposizione di $Q = o$.

SCOLIO.

§. XLIV. Questo è il Teorema del Sig. de la *Grange*, ch'egli dimostrò prima per le equazioni a differenze infinitesime nel III. Volume degli *Atti della Società Reale di Torino*. Dimostrarono in seguito aver egli luogo anche nell' equazioni a differenze finite cogl' incrementi costanti il Sig. Marchese de *Condorcet*, e il Sig. de la *Place*, e lo dimostrò pure ultimamente il Sig. de la *Grange* negli *Atti della Società Reale di Berlino* per l'anno 1775. Ora il si è dimostrato di bel nuovo per altra via, e per qualsivoglia modulo $x + X$ delle differenze, e l'ho fatto pure con questo stesso metodo per le equazioni lineari a differenze infinitesime. Ancorchè l'ultimo metodo immaginato dal Sig. de la *Grange* sia sommamente ingegnoso, sembra che in semplicità almeno non ceda il presente a qualunque altro nell' uno e nell'altro genere di equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XVI.

§. XLV. *Proposta l'equazione differenziale finita* (A)
$(A) \ldots . . Q = Ay + By' + Cy'' + Dy''' +$ ecc.
in cui Q *è funzione di* x, A, B, C, ecc. *sono quantità costanti*, x + X *il modulo generale*, *ritrovare il suo integrale completo*.

RISOLUZIONE.

Posto come prima I. $y' = ay + v$, essendo v funzione indeterminata di x, a costante indeterminata; sarà variando

$y'' = ay' + v'$
$y''' = ay'' + v''$
ecc.

e facendo le successive sostituzioni, come nella preced. Propos. sarà

$y'' = a^2y + av + v'$
$y''' = a^3y + a^2v + av' + v''$
$y'''' = a^4y + a^3v + a^2v' + av'' + v'''$
ecc.

e però sostituendo questi valori nell' equazione (A), si avrà l' equazione seguente

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} = Ay& \\ &+ Bay + Bv \\ &+ Ca^2y + Cav + Cv' \\ &+ Da^3y + Da^2v + Dav' + Dv'' \\ &\text{ecc.}\end{aligned}$$

e in seguito le due equazioni (B), (C)

$$(B) \ldots 0 = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + Ea^4 + \text{ecc.}$$
$$\begin{aligned}(C) \ldots \mathfrak{Q} = (B + Ca + Da^2 + Ea^3 + \text{ecc.})\, v& \\ + (C + Da + Ea^2 + \text{ecc.} \ldots)\, v'& \\ + (D + Ea + Fa^2 + \text{ecc.} \ldots)\, v''& \\ \text{ecc.}&\end{aligned}$$

delle quali la (C) è del grado $n - 1$, e può ridursi alla forma

$$(D) \ldots \mathfrak{Q} = A'v + B'v' + C'v'' + D'v''' + \text{ecc.}$$

essendo A', B', C' ecc. funzioni costanti di a, B, C ecc.. E' facile I. a vedersi, come nella Prop. precedente, che risolvendo l' equazione determinata (B) si conseguiscono n valori differenti per l' indeterminata a, la quale ascende al grado dell' equazione proposta (A); e però facendone successivamente la sostituzione nell' equazione (D), onde ottenere n equazioni, si può (§. XLI) pervenire ad un valore finito di v. Dato questo valore, che diremo P, si possono formare coll' equazione

$$y' = ay + P$$

n equazioni differenti, ponendovi successivamente li n

valori di a tratti dall' equazione (B), e trovando n valori differenti di y colle rispettive costanti arbitrarie, si può ottenere col loro aggregato l' integrale completo dell' equazione (A). II. Ma si può tenere ancora un' altra strada. Imperciocchè, essendo l' equazione (D) del grado $n-1$, la si tratti come l' equazione (A), facendo

$$\text{II. } v' = bv + q$$

essendo b una nuova costante indeterminata, q una nuova funzione di x. Si otterranno le due equazioni

$(B')\ldots\, o = A' + B'b + C'b^2 + D'b^3 +$ ecc.

$(D')\ldots\, \mathfrak{Q} = A''q + B''q' + C''q'' + D''q''' +$ ecc.

essendo A'', B'' ecc. funzioni costanti di A', B' ecc., e di b, e l' equazione (D') sarà del grado $n-2$. Di nuovo trattando l' equazione (D'), come l' equazione (A), ponendo

$$\text{III. } q' = cq + r$$

essendo c indeterminata costante, r funzione di x, si avranno le due equazioni

$(B'')\ldots\, o = A'' + B''c + C''c^2 + D''c^3 +$ ecc.

$(D'')\ldots\, \mathfrak{Q} = A''' + B'''r' + C'''r'' + D'''r''' +$ ecc.

delle quali la (D'') è del grado $n-3$, A''', B''' ecc. funzioni costanti di A'', B'' ecc. e di c; e così proseguendo si potrà pervenire ad un' equazione (D^n) del grado $n-n$. Sia per facile intelligenza (D'') quest' equazione finale. Si avrà un valore finito per r. Dunque si otterrà il valore di q dall' equazione III. con una costante arbitraria. Ma essendo data la funzione q si avrà dall' equazione II. un valore di v con una nuova costante arbitraria, cioè l' integrale completo dell' equazione (A), avendovi n costanti arbitrarie, sol che si determinino le costanti a, b, c. Basta pertanto trovare una radice unica per a dall' equazione (B), un' altra per b dall' equazione (B'), ed una terza per c dall' equazione (B''), cioè in generale una sola radice per ciascheduna delle equazioni determinate (B), (B'), (B'')

ecc.; e ſi avrà per queſto mezzo l' integrale completo dell' equazione (A). Tutte le volte dunque, che queſte equazioni determinate poſſono darci una ſola radice reale per ciaſcheduna, il metodo ci eſenta dalla conſiderazione così delle radici eguali, come dalle immaginarie, che potrebbero aver luogo nell' equazione determinata (B), attenendoſi alla ſua ſola riſoluzione, come s' è praticato ſinora in caſi ſimili. Il che ecc.

SCOLIO I.

§. XLVI. Il Metodo ſempliciſſimo uſato nelle Propoſizioni XV, e XVI non è altramente riſtretto al modulo comune $x+1$, ſiccome quello che ſi eſtende ſu d' ogni ſorta d' incremento, anche variabile. Il caſo di avere riguardo alla natura del modulo ſi riduce al momento di aſſegnare valori eſpliciti agl' integrali delle funzioni ſemplici differenziali $\int M; \pi_{,}\left(\frac{1}{M}\right)$ ecc., coſa che ſegnatamente appartiene al Cap. precedente, e di cui s' è fatto parola al §. XL.

SCOLIO II.

§. XLVII. Oſſervo, che nella Teoria dell' equazioni lineari a differenze infiniteſime eſpreſſe generalmente dall' equazione (A)

$$(A) \ldots . \mathfrak{Q} = y + \frac{Ady}{dx} + \frac{Bddy}{dx^2} + \frac{Cd^3y}{dx^3} + \text{ecc.}$$

tutti gli Analiſti ſi ſono limitati al caſo de' coefficienti A, B, C ecc. coſtanti; e nella ſuppoſizione che A, B ecc. ſieno funzioni della variabile x, ſi ſono contentati di enunciare, che dato l' integrale generale dell' equazione (A) in ſuppoſizione di $\mathfrak{Q} = 0$, o dato un numero n, o $n-1$ almeno, d' integrali particolari di quell'

quell'equazione in tale ipotesi. si conseguisce l'integrale completo dell'equazione (A). Ma non si è tentato ancora cosa alcuna di generale su questo proposito. Lo stesso è accaduto dell'equazione differenziale (A') a differenze finite.

$(A)\ldots\ldots \mathfrak{Q} = y + Ay' + By'' + Cy''' + \text{ecc.}$

E' vero, come dice il Sig. de la *Grange* (*Mem. dell' Accad. Reale di Berlino* 1775), che non è possibile il farlo *a priori* con alcun metodo cognito; ma si può bene non senza frutto mettere in opera più d'un artifizio indiretto. Mi accingo qui pertanto a fare qualche primo passo, che non sarà per avventura del tutto infruttuoso, non mai con intenzione di prevenire questo Illustre Geometra, se mai continuasse nel suo proposito di farne soggetto delle sue meditazioni, ma perchè l'occasione il richiede. Facendo considerazione, che l'equazione lineare del primo grado

$$My + Ny' = 0$$

ammette generalmente una risoluzione di questa forma (§. XXXII)

$$y = K\pi_{,}\left(-\frac{M}{N}\right)$$

qualunque funzione di x sieno M, N; e che per essere lineare l'equazione generale può il suo integrale generale essere composto dell'aggregato di un numero n d'integrali di questa forma, essendo ella forse, se non esclusiva, almeno la forma che affettano per lo più gl'integrali di queste equazioni ne' casi d'integrabilità, che ci sono in potere, mi parve che si potesse per questo mezzo aprire un campo vastissimo all'integrazione di tutte le equazioni, che fossero differenziali esatti di qualche integrale d'una tal forma generale.

Eccone un Saggio.

PROPOSIZIONE XVII.

§. XLVIII. *Trovare tutte le equazioni differenziali a differenze finite, e a coefficienti variabili, suscettibili d' Integrale completo d' una data forma generale.*

RISOLUZIONE.

Si assumano le equazioni differenziali (II), (III), (IV) ecc. di grado in grado, negletto il primo, comprese nell' equazione generale (A')

$$(A') \ldots . 0 = y + Ay' + By'' + Cy''' + Dy'''' + \text{ecc.}$$

ma sotto una forma indeterminata

$$(\mathrm{II}) \ldots . 0 = y + f(\phi, \mu) y' + f'(\phi, \mu) y''$$

$$(\mathrm{III}) \ldots . 0 = y + f(\phi, \mu, \omega) y' + f'(\phi, \mu, \omega) y'' + f''(\phi, \mu, \omega) y'''$$

$$(\mathrm{IV}) \ldots . 0 = y + f(\phi, \mu, \omega, \lambda) y' + f'(\phi, \mu, \omega, \lambda) y'' + f''(\phi, \mu, \omega, \lambda) y''' + f'''(\phi, \mu, \omega, \lambda) y'''' \text{ ecc.}$$

essendo ϕ, μ, ω, λ ecc. funzioni indeterminate di x, $f(\phi, \mu$ ecc.$)$, $f'(\phi, \mu$ ecc.$)$ ecc. funzioni indeterminate di ϕ, μ, ω, λ ecc.

Il numero delle funzioni ϕ, μ, ω ecc. introdotte in ogni equazione è uguale al grado dell' equazione da risolvere. Posto ciò, l' equazione (I) rappresenti l' integrale completo dell' equazione (A')

$$(I) . . y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(K'' + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(K''' + \text{ecc.}\right.\right.\right.\right.$$

essendo K, K', K'' ecc. le costanti arbitrarie, di modo che richiedendosi l' integrale completo dell' equazione (II), sia egli

$$(II') \ldots . y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + K' \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right),$$

l' integrale dell' equazione (III), sia

$$(III') \ldots y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + K'' \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)\right)$$

l'integrale dell'equazione (IV), sia

$$(IV')\ldots y=\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K+\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K'\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(K''+K'''\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right)\right)$$

e così in seguito.

Si prendano per ordine le differenze di queste equazioni, onde determinare le funzioni $f(\phi, \mu$ ecc.$)$, $f'(\phi,\mu$ ecc.$)$ ecc. nelle equazioni assunte (II), (III) ecc., e però cominciando dall' equazione (II'), la si divida per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, sicchè sia

$$\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)}=K+K'\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right).$$ Sarà differenziando

$$\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}-\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)}=K'\,\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right),$$ e però

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}-y=K'\,\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right).$$ Ma $$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}=\phi$$

(§. XXV.). Dunque $$\frac{\phi\,y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}-\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}=K'$$

e però, differenziando di nuovo, si avrà

$$\frac{\phi'\,y''}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)}-\frac{\phi\,y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}-\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)}$$

$$+\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}=0$$

Si faccia la moltiplicazione per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)$; e perchè $\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)}=\phi\mu$ (§. XXVII.), si avrà l'equazione

$(II')\ldots y-\phi(1+\mu)y'+\phi\phi'\mu y''=0$.

Restano pertanto determinate le funzioni f, f', essendo $f(\phi,\mu)=-\phi(1+\mu)$; $f'(\phi,\mu)=\phi\phi'\mu$, e però l' equazione (II') è l' integrale completo dell' equazione differenziale (II'), qualunque funzione di x sieno μ, e ϕ, e qualunque il modulo delle differenze.

Di nuovo si divida l' equazione (III') per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, e si differenzj. Sarà

$$\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}-\frac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)}=K'\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)+K''\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right);$$

e moltiplicando per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, sarà

$$\phi y'-y=K'\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)+K''\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Dunque

$$\frac{\phi y'-y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)}=K'+K''\int\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Si differenzj la seconda volta. Sarà

$$\frac{\phi' y''}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)} - \frac{\phi y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)} - \frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}$$

$+ \dfrac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)} = K''\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)$; e moltiplicando tutto per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, farà $\phi\phi'\mu y'' - \phi y' - \phi\mu y' + y$ $= K''\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)$; e facendo il coefficiente di $K'' = R$, fi divida l' equazione per R. Si avrà

$$\frac{\phi\phi'\mu y''}{R} - \frac{\phi(1+\mu)y'}{R} + \frac{y}{R} = K''.$$

Si differenzj la terza volta, e farà

$$\frac{\phi'\phi''\mu'y'''}{R'} - \frac{\phi\phi'\mu y''}{R} - \frac{\phi'(1+\mu')y''}{R'} + \frac{\phi(1+\mu)y'}{R} + \frac{y'}{R'}$$

$- \dfrac{y}{R} = 0$ E poichè $\dfrac{R}{R'} = \phi\mu\omega$ (§. XXVII), fe fi moltiplichi queft' equazione per R, fi avrà l' equazione differenziale

$$(\mathrm{III}'')\ldots\ldots y - \phi(1+\mu+\mu\omega)y' + \phi\phi'(\mu+\mu\mu'\omega+\mu\omega)y''$$
$$- \phi\phi'\phi''\mu\mu'\omega y''' = 0$$

di cui farà integrale completo l' equazione (III'), qualunque funzione di x fieno ϕ, μ, ω, e qualunque il modulo $x + X$.

Collo fteffo metodo differenziando quattro volte fucceffivamente l' equazione (IV'), fi perverrà all' equazione differenziale

$$(\mathrm{IV}'')\ldots\ldots y - \phi(1+\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda)y' + \phi\phi'(\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda$$
$$+ \mu\mu'\omega + \mu\mu'\omega\lambda + \mu\mu'\omega\omega'\lambda)y'' - \phi\phi'\phi''(\mu\mu'\omega + \mu\mu'\omega\lambda$$
$$+ \mu\mu'\omega\omega'\lambda + \mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda)y''' + \phi\phi'\phi''\phi'''\mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda y'''' = 0$$

e così all' infinito. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XLIX. La differenziazione può continuarsi pe' gradi superiori senza necessità di cominciare da' primi, essendo la quarta norma per la quinta, questa per la sesta, e così successivamente. E poichè integrando l'equazione (A') in supposizione, che l' omogeneo di comparazione sia $= 0$, si può ella integrare anche in supposizione ch' egli sia $= \mathfrak{Q}$ funzione di x (§. XLIII); è manifesto, che s' integreranno le equazioni (II$''$), (III$''$) ecc. anche in supposizione, che s' abbia per omogeneo una funzione di x qualunque.

COROLLARIO II.

§. L. Proposta pertanto qualsivoglia equazione differenziale finita del grado n a coefficienti variabili

$$\mathfrak{Q} = y + Ay' + By'' + Cy''' + \text{ecc.}$$

ella avrà integrale completo della forma (I) (§. XLVIII) in supposizione di $\mathfrak{Q} = 0$, sempre che sia ella reducibile all' equazione differenziale corrispondente (II$''$), (III$''$) ecc. E perchè s' identifichino, converrà che i coefficienti delle funzioni y', y'' ecc. nelle equazioni (II$''$), (III$''$) ecc. sieno rispettivamente uguali ai coefficienti A, B ecc. dell' equazione proposta. Quindi essendo il numero delle funzioni indeterminate ϕ, μ ecc. uguale al grado dell' equazione; e uguale a questo grado essendo pure il numero de' coefficienti da paragonare rispettivamente, si avranno tante equazioni, quanto è il numero delle funzioni indeterminate. E ammettendo l' equazione proposta integrale completo in ipotesi di $\mathfrak{Q} = 0$, lo avrà pure in supposizione di $\mathfrak{Q}$ funzione di x, come si è osservato poc' anzi.

COROLLARIO III.

§. LI. Non è difficile il riconoſcere anche a primo aſpetto, che non ha confini il numero delle equazioni differenziali finite a coefficienti variabili che ſi poſſono integrare con queſto metodo. Laſciando da parte l'aſſunzione libera di qualſivoglia funzione di x per le indeterminate ϕ, μ, ω ecc. col mezzo della quale ſi poſſono aſſegnare equazioni differenziali ſenza numero e di qualunque grado, ſuſcettibili tutte d' una completa integrazione, non è egli del tutto inefficace per un' infinità eziandio di equazioni differenziali a coefficienti variabili dati. Imperciocchè, eſaminando la natura delle equazioni di relazione, che ci riſultano dal paragone de' coefficienti dati cogli aſſunti, ſi vede patentemente, ch' elle ſono differenziali finite, e che ſi può ſempre pervenire prima ad una Ridotta del grado n in ϕ e coefficienti dati, indi ad altre ſucceſſivamente inferiori del grado $n-1$, $n-2$ ecc. in μ, ω ecc. In conſeguenza ſe ſi abbia un Integrale particolare per ciaſcheduna di queſte equazioni gradatamente inferiori, ſi ha immediatamente l' integrale completo dell' equazione propoſta, qualunque coſa ſieno i coefficienti dati, il che ci offeriſce una ſoluzione diretta del Problema. E ſe non ſi poſſono conſeguire *a priori* tutti queſti integrali particolari ſucceſſivi, ſi può ſempre tanti aſſumerne ad arbitrio, quanti poſſono occorrere per determinare le altre funzioni indeterminate, sì che reſti diſobbligato il maggior numero poſſibile di coefficienti dati. Facciamo di tutto ciò un qualche ſvolgimento a illuſtrazione del Metodo.

I.

Sia primieramente proposta l' equazione (A)
$(A) \ldots . 0 = y + My' + Ny''$
a cui si riducono tutte le equazioni differenziali di secondo ordine. Paragonata coll' equazione (II''), sarà d' uopo per l' identificazione, che abbiano luogo le due equazioni

$$-\phi - \phi \mu = M$$
$$\phi \phi' \mu = N$$

la seconda somministra $\mu = \frac{N}{\phi \phi'}$, il qual valore sostituito nella prima ci dà l' equazione in ϕ

$$-1 = \frac{M}{\phi} + \frac{N}{\phi \phi'}$$

cioè, posto $\frac{1}{\phi} = \frac{z'}{z}$ l' equazione

$$z + Mz' + Nz'' = 0$$

che è lo stesso che l' equazione (A) posto z in luogo di y.

Se si abbia pertanto un solo valore particolare per $z = p$ soddisfacente a quest' equazione, sarà $\phi = \frac{p}{p'}$, $\mu = \frac{Np''}{p}$, e però $y = \pi_{,} \left(\frac{p'}{p}\right)\left(K + K' \int \pi_{,} \left(\frac{p}{Np''}\right)\right)$ sarà l' integrale completo dell' equazione generale (A), essendo M, N funzioni di x qualunque. Che se non fosse per alcun modo possibile il ritrovare l' integrale particolare p, si prenda $\phi = p$ funzione qualsivoglia di x ad arbitrio. Si avrà $\mu = \frac{N}{pp'}$, e l' integrale completo

dell'

dell' equazione (A) farà $y = \pi_{,}\left(\frac{1}{p}\right)\left(K + K'\int \pi_{,}\left(\frac{pp'}{N}\right)\right)$ purchè i due coefficienti M, N abbiano tra di sè la relazione seguente

$$Mp' + pp' + N = o$$

con che uno dei due resta determinato per l' altro, e per la funzione p assunta ad arbitrio. In conseguenza le due equazioni differenziali di secondo ordine

$$o = y + My' - p'(p + M)y''$$

$$o = y - \left(\frac{N + pp'}{p'}\right)y' + Ny''$$

saranno completamente integrabili, qualunque funzione di x sieno M, e p per la prima, ed N, e p per la seconda.

II.

Sia l' equazione (B)

$(B) \ldots . o = y + My' + Ny'' + Py'''$

a cui si riducono tutte le equazioni differenziali di terzo ordine.

Perchè ammetta ella l' integrale (III'), dovranno aver luogo le equazioni

$$1 + \mu + \mu\omega = -\frac{M}{\phi} = A$$

$$\mu + \omega\mu\mu' + \mu\omega = \frac{N}{\phi\phi'} = B$$

$$\mu\mu'\omega = -\frac{P}{\phi\phi'\phi''} = C$$

Sottraendo la prima dalla seconda, e dal residuo sottraendo la terza, sarà

$$1 + \frac{M}{\phi} + \frac{N}{\phi\phi'} + \frac{P}{\phi\phi'\phi''} = o$$

cioè, posto $\frac{1}{\phi} = \frac{z'}{z}$, sarà la ridotta del grado n

$(C) \ldots\ldots z + Mz' + Nz'' + Pz''' = o$

Per trovare la feconda Ridotta in μ del grado $n-1$, fi difpongano le equazioni di relazione de' coefficienti in quefto modo

$$\frac{A-1}{\mu} = 1 + \omega$$

$$\frac{C}{\mu\mu'} = \omega$$

Sottraendo la prima dalla feconda equazione, rifulta immediatamente

$$\frac{C}{\mu\mu'} - \frac{A-1}{\mu} = -1$$

e però, pofto $\frac{1}{\mu} = \frac{r'}{r}$, fi avrà

$(D) \ldots\ldots o = r - (A-1)\,r' + C r''$

Tutte le volte pertanto, che fi poffa avere per z un valor particolare p dall'equazione (C), con che fi avrà $\phi = \frac{p}{p'}$, e foftituito quefto valore in A, e C, fi abbia pure per r un valor particolare q dall'equazione (D), il quale darà $\mu = \frac{q}{q'}$, e $\omega = \frac{C}{\mu\mu'} = \frac{Cq''}{q}$, farà

$$y = \pi_{,}\left(\frac{p'}{p}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{q'}{q}\right)\left(K' + K''\int \pi_{,}\left(\frac{q}{Cq''}\right)\right)\right)$$

l' integrale completo di tutte le equazioni differenziali di terzo ordine, qualunque funzione di x fieno M, N, P.

Ma fe non poffono averfi quefti valori particolari per ϕ, e μ, fi affumano in luogo loro funzioni di x di qualunque natura, cioè p per ϕ, q per μ. Softituendo quefti valori nelle due equazioni (C), (D), qual' ora pei coefficienti dell' equazione (B) abbiano luogo le feguenti equazioni,

$$pp'p''+Mp'p''+Np''+P=0$$
$$Mp'p''q'+pp'p''q'+pp'p''qq'-P=0$$
farà

$$y=\pi_{,}\left(\frac{1}{p}\right)\left(K+\int\pi_{,}\left(\frac{1}{q}\right)\left(K'+K''\int\pi_{,}\left(\frac{qq'}{c}\right)\right)\right)$$

l' integrale completo dell' equazione proposta.

In conseguenza generalmente le equazioni di terzo grado

$$0=y-\left(\frac{N}{p'}+Nq'+p+pq'+pqq'\right)y'+Ny''+(pp'p''qq'$$
$$-Np''q'-Np'p''q'q'-pp'p''q'q'-pp'p''q'q')y'''$$

$$0=y+My'-\left(\frac{p'M+pp'+pp'q'+pp'qq'}{1+p'q'}\right)y''$$
$$+(Mp'p''q'+pp'p''q'+pp'p''qq')y'''$$

$$0=y+\left(\frac{P-pp'p''q'-pp'p''qq'}{p'p''q'}\right)y'$$
$$+\left(\frac{pp'p'p''qq'-Pp'-(pp'q'+pp'qq')pp'p''q'}{1+p'q'}\right)y''$$
$$+Py'''$$

faranno completamente integrabili, qualunque funzione di x sieno M, N, P, p, q

III.

Sia l' equazione (F)

$(F)\ldots\ldots 0=y+My'+Ny''+Py'''+\mathfrak{Q}y''''$

di quarto grado. Perchè possa ella ammettere integrale completo della forma (IV'), sarà necessario che abbiano luogo le equazioni

$$(1)\ldots\ldots 1+\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda=-\frac{M}{\phi}=A$$

$$(2)\ldots\ldots \mu(1+\omega+\omega\lambda)+\mu\mu'(\omega+\omega\lambda+\omega\omega'\lambda)=\frac{N}{\phi\phi'}=B$$

$$(3)\ldots \mu\mu'(\omega+\omega\lambda+\omega\omega'\lambda)+\mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda=-\frac{P}{\phi\phi'\phi''}=C$$

$$(4)\ldots \mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda=\frac{Q}{\phi\phi'\phi''\phi'''}=D.$$

Sottraendo la prima dalla seconda equazione, e successivamente sottraendo il residuo dalla terza, e il nuovo residuo dalla quarta, si avrà la Ridotta in ϕ

$$-1=\frac{M}{\phi}+\frac{N}{\phi\phi'}+\frac{P}{\phi\phi'\phi''}+\frac{Q}{\phi\phi'\phi''\phi'''}$$

cioè l'equazione seguente, posto $\frac{1}{\phi}=\frac{z'}{z}$,

$$(G)\ldots\ldots z+Mz'+Nz''+Pz'''+Qz''''=0.$$

Di nuovo, disponendo le equazioni di relazione tra' coefficienti nel seguente modo

$$(5)\ldots\frac{A-1}{\mu}=1+\omega+\omega\lambda=A'$$

$$(6)\ldots\ldots\frac{B+1-A}{\mu\omega}=\omega+\omega\lambda+\omega\omega'\lambda=B'$$

$$\frac{D}{\mu\mu'\mu''}=\omega\omega'\lambda$$

si avrà immediatamente la Ridotta in μ

$$\frac{D}{\mu\mu'\mu''}-\frac{B+1-A}{\mu\mu'}+\frac{A-1}{\mu}-1=0$$

cioè, posto $\frac{1}{\mu}=\frac{r'}{r}$, l'equazione seguente

$$(H)\ldots r-(A-1)r'+(B+1-A)r''-Dr'''=0$$

E di nuovo, ripigliando le equazioni (5) (6), si ha

$$\frac{A'-1}{\omega}=1+\lambda$$

$$\frac{B'+1-A'}{\omega\omega'}=\lambda$$

donde risulta la Ridotta in ω

$$\frac{A'-1}{\omega}-\frac{B'+1-A'}{\omega\omega'}-1=0$$

cioè, posta $\frac{1}{\omega}=\frac{t'}{t}$, l' equazione

$(J)\ldots t-(A'-1)t'+(B+1-A')t''=0$

Se pertanto si abbia un valore p per z soddisfacente all' equazione (G), sicchè sia $\phi=\frac{p}{p'}$, e un valore q per r soddisfacente all' equazione (H), onde sia $\mu=\frac{q}{q'}$, e finalmente un valor particolare m per t, il quale soddisfaccia all' equazione (J), con che si abbia $\omega=\frac{m}{m'}$, e $\lambda=\frac{D}{\mu\mu'\mu''\omega\omega'}=\frac{Dm''q'''}{mq}$, sarà

$$y=\pi,\left(\frac{p'}{p}\right)\left(K+\int\pi,\left(\frac{q'}{q}\right)\left(K'+\int\pi,\left(\frac{m'}{m}\right)\left(K''+K'''\int\pi,\left(\frac{mq}{Dm''q'''}\right)\right)\right)\right)$$

l' integrale completo dell' equazione (F), essendo M, N, P, $\mathfrak{Q}$ funzioni di x qualunque. Che se non possano aversi sì fatti integrali particolari, sarà sempre possibile il conservare uno qualunque de' coefficienti M, N, ecc. non avendovi, come si è veduto qui innanzi, che un numero $n-1$ di equazioni di relazione tra essi da soddisfare, minore di un' unità del numero de' coefficienti. Imperciocchè, assunte ad arbitrio le funzioni p per ϕ, q per μ, m per ω, le equazioni necessarie tra coefficienti saranno quelle, che seguono

$$pp'p''p'''+Mp'p''p'''+Np''p'+Pp'''+\mathfrak{Q}=0$$

$$pp'p\,p''\,q\,q'q''+(M-p)p'p''p''\,q'q'+(N+pp'$$
$$+Mp')p'p''\,q''-\mathfrak{Q}=0$$

$$pp'\,qq'\,mm'+N+pp'+Mp'+pp'\,qq'-(M-p)p'\,qq'$$
$$-(M-2p)p'\,qq'\,m'=0$$

E però non sarà, che un affare di calcolo, soddisfacendo a queste equazioni, il determinare le equazioni integrabili generalmente, qualunque funzione di x ſieno M, N ecc. p, q ecc., come ſi è fatto precedentemente.

Nello ſteſſo modo potremo inoltrarci all' integrazione delle equazioni ſuperiori, ſiccome è agevole da vedere. Ma queſto per ora baſti intorno al Calcolo Integrale delle equazioni differenziali finite a due variabili.

SPERIENZE

SOPRA IL PRECIPITATO PORPORA

Ottenuto dal Gaz ricavato dallo Stagno, e dalla ſua Calce.

Del Sig. CONTE MOROZZO.

1. NEL tempo, in cui l' eſame de' diverſi fluidi aeriformi forma la particolare occupazione de' Chimici, e Fiſici moderni, non credo di far coſa infruttuoſa, ſe verrò eſponendo alcune nuove ſperienze inſtituite ſopra il gaz ſuſcitato sì dallo ſtagno, che dalla ſua calce; e ſe prenderò motivo di deſcriverne alcune altre che da quelle hanno tratto origine, ed occaſione.

Non ha dubbio, che il ſodo progreſſo delle Scienze non eſigga, che ſi aduni una gran quantità di fatti ben eſaminati, e ſi moltiplichino le oſſervazioni prima di paſſare a ſtabilire teorie luminoſe; le quali alcune volte un ſolo fatto diſtrugge, ma che ſpeſſo la luſinghiera compiacenza dell' Autore, anche a coſto di ſconvolgere i primi elementi della natura, cerca ad ogni modo di produrre, e mettere nel lume che può migliore. Laonde in vece di aumentarſi il numero delle umane cognizioni ſempre più elle s' avvolgono ſotto un velo più denſo.

Spero che non incorreranno ſimil taccia le ſperienze, che mi fo a deſcrivere, poichè le conſeguenze, che ne deduco, ſono bensì ſemplici conghietture, ma coll' eſame e ravvicinamento di molti altri fatti poſſono prendere quel grado di certezza che si richiede per ischiarire la verità in siffatte materie.

2. Prima di venire all'esposizione di queste sperienze parmi necessario di gettare un colpo d' occhio sull' apparecchio, di cui mi sono servito (veggasi la *fig. I.*). *A* è un matraccio; *B* una caraffa col tubo ricurvo perchè possa essere introdotto nel matraccio. Possono pure queste caraffe facilmente adattarsi l'una sull'altra, così che il tubo dell'una s'introduca nel collo dell'altra passando per un turacciolo di sughero; e le giunture si suggellano poi esattamente.

C è una vescica armata di chiave applicata all' ultima caraffa dell' apparecchio per raccogliere il gaz. *D* è il tubo che s' introduce nel matraccio, per cui col mezzo di un imbuto *E* si versa il liquore, e che, tolto l' imbuto, si chiude subitamente.

Sperienza I.

3. Riposi in un matraccio mezz' oncia di stagno d'Inghilterra ridotto in sogli, come pure un' oncia di spirito di Salmarino; indi aggiustato il matraccio ad una caraffa, la quale col suo tubo ricurvo avea con esso comunicazione, e conteneva una soluzione d' oro allungata nell'acqua distillata ch'era di color citrigno, vi versai due oncie circa di spirito di nitro, e tolto l' imbuto fu chiuso ben bene l' apparecchio.

Immediatamente cominciò l' effervescenza con calor grande, e il gaz sviluppatosi attraversò con rapidità la soluzione d' oro, e si gettò nella vescica.

La soluzione d'oro fu precipitata in color porpora dopo qualche tempo; ma ciò che mi sorprese alquanto, si è, che questo precipitato si radunò al fondo del vaso lasciando la soluzione limpida, e trasparente, come l' acqua distillata, di cui mi era servito per allungarla; ciò che non succede quando si fa la tintura porpora di di *Caſſius*, ove tutta la ſoluzione prende un color intenſo paonazzo, che a poco a poco ſi va depoſitando al fondo a guiſa di mucilaggine, ed in cui l'acqua ritiene ſovente un color roſſiccio.

Eſaminato il gaz raccolto nella veſcica l' ho ritrovato alcune volte infiammabile con fiamma leggera, e cerulea (1); alcune volte pareva atto alla reſpirazione, ed a mantenere la fiamma; accidenti oſſervati pure da' Sigg. *Prieſtley*, de *Laſſone*, e *Macquer* (2). Ma ho luogo di credere, che ſiffatte variazioni ſieno prodotte dalla maniera di eſaminarlo, poichè qualora è raccolto dentro ad una campana, od altro vaſo, che prima ſia riempiuto d' acqua, non è egli invero ſempre infiammabile, ma ſempre più o meno mefitico.

Avendo introdotto di queſto gaz in una ſoluzione d' oro, e meſcolato ben bene, non ſi è altramente ottenuto cangiamento nel ſuo colore, nè ſi formò precipitato veruno.

SPERIENZA II.

4. Il tutto diſpoſto come nella precedente ſperienza, ſalvo che aggiunſi una caraffa all'apparecchio, in modo che la prima, per cui paſſava il gaz, era ripiena d'acqua diſtillata, e la ſeconda conteneva la ſoluzione d'oro; ripoſi dello ſtagno nel matraccio con dello ſpirito di ſalmarino, eccitando indi per mezzo dello ſpirito di nitro l' effervеſcenza. Non ottenni in queſto modo precipitato veruno nella ſoluzione d' oro. Nella caraffa poi, che conteneva l' acqua diſtillata, quantunque non appariſſe l' acqua di color lattiginoſo, e foſſe quaſi

(1) Ben inteſo che il verſava in un vaſe con aggregazione d'aria atmosferica.

(2) Veggaſi il Dizionario Chimico di *Macquer pag.* 597. *tom.* 1. *ediz. in quarto.*

traſparente, avendovi verſato della ſoluzione d' oro, ottenni dopo alcune ore un precipitato porporino.

Il gaz eſaminato offerſe gli ſteſſi riſultamenti della precedente ſperienza.

SPERIENZA III.

5. Alcuni Chimici hanno creduto, che il precipitato porpora, che ſi ottiene dall' oro per mezzo della ſoluzione di ſtagno, non foſſe ad altro dovuto, che all' acido intenſo, che ſi carica del flogiſto dello ſtagno; e che ſe ſi aveſſe mezzo di avere un acido flogiſticato concentratiſſimo, ſi otterrebbe tale precipitato anche ſenza lo ſtagno. Feci perciò la ſperienza ſeguente.

Ripoſi nel matraccio dello ſtagno, e tutto diſpoſi come nella prima ſperienza col ſolito apparecchio, ſalvo che adoperai quattro caraffe. La prima conteneva acqua diſtillata; la ſeconda la ſoluzione d' oro; la terza era ripiena di tintura di tornaſole; e la quarta finalmente conteneva de' fiori di Ciano, ed alcune roſe (delle quali aveva preſo ſolamente i petali) rinſerrate ben bene. La veſcica era adattata all' ultima caraffa.

Non ebbi precipitato nella ſoluzione dell' oro.

Nell' acqua diſtillata avendo verſato una ſoluzione d' oro, ebbi come nella ſperienza antecedente, dopo alcune ore, il precipitato porporino.

La ſoluzione di tornaſole divenne roſſa. I fiori di Ciano preſero il colore dello ſcarlatto; e le roſe un color porporino intenſo (3). Il gaz ottenuto offerſe gli ſteſſi fenomeni delle ſopraccitate ſperienze.

---

(3) E' coſa degna d' oſſervazione, che i fiori, ch' erano fuori della corrente del gaz, non venivano viſibilmente colorati. Quelli all' oppoſto pe' quali paſſava il gaz prendevano un color carico di ſcarlatto, come ho detto. Si oſſerva lo ſteſſo nelle ſoluzioni del tornaſole, ſe vi ſi metta l' occhio nel momento ſteſſo, che il gaz le attraverſa; ma più o meno ſecondo la coſtruzione de' vaſi.

Si osserva dunque, che ancorchè l' acido fosse assai intenso per colorare con vivacità sì i colori, che la tintura di tornasole, ciò non ostante non fu egli atto a precipitare in porpora la soluzione d' oro.

6. Debbo avvertire, che in siffatte sperienze, cessato lo sviluppamento del gaz, comincia a farsi l' assorbimento; così che conviene disfare l' apparecchio a tempo se non si vuol rischiare di veder mescolati i liquori nelle differenti caraffe; e quello della prima nel matraccio; il che alcune volte mi è accaduto.

Nè debbo tacere, che i precipitati porpora ottenuti si facevano in più o meno corto spazio di tempo, le cose essendo in circostanze uguali, senza che abbia riconosciuta la causa produttrice.

7. Queste sperienze fanno chiaramente vedere, che il color porpora che si è conseguito si deve alle particelle sottili dello stagno, che sono sollevate col gaz, sì che deposte nell' oro formano l' oro di *Cassius*, o sia il precipitato porpora. Un accidente sopraggiuntomi me ne confermò la verità. Queste sperienze parendomi di gran peso per accrescere le cognizioni Fisico-Chimiche nella teoria delle arie fattizie, cercai di ripeterle più volte.

Presi dunque un altro matraccio, e più volte replicai queste sperienze, senza però ottenere gli stessi risultamenti. Già diffidava di me stesso in questa diversità di apparenze; quando presi a riflettere, che il matraccio, di cui prima mi era servito, aveva il collo sette o otto pollici più corto dell' altro. In fatti tagliato il collo a quel matraccio, e messolo di nuovo in esperienza, ottenni di bel nuovo il precipitato porpora. La lunghezza del matraccio non eccedeva così due piedi parigini.

8. Confermato in tal guisa il risultamento delle precedenti sperienze, non senza fondata ragione potei conchiudere, che le sostanze aeriformi tengono in dis-

soluzione alcune particelle de' corpi componenti (4), e che queste vengono inalzate a certe determinate altezze dal movimento rapido dell' effervescenza; ma che poi, cessato questo impulso, la gravità specifica riprendendo la propria energia sopra di esse, precipitano di nuovo. Il che dà a conoscere quanto debba esser circospetto il Fisico Osservatore, poichè i risultamenti in siffatte sperienze variano secondo le differenti altezze, alle quali deve il gaz sollevarsi, o secondo le sostanze, ch' esso dee attraversare.

9. Ottenuto, come vedesi, il precipitato porpora per mezzo dell' emanazione gazosa dello stagno per via umida, cercai per mezzo del fuoco, se dal metallo medesimo, o dalla sua calce potessi ottenere lo stesso, e feci a tal fine le seguenti sperienze.

SPERIENZA IV.

10. In una canna da fucile, alla quale era ben saldata la vite, come pure il focone, riposi tre oncie di stagno d' Inghilterra ridotto in grani. Vi adattai un tubo di vetro, il quale metteva in un vase ripieno di soluzione d'oro allungata con acqua distillata; al qual vase era pure adattata una vescica a fiasco armata di chiave (veggasi la *fig. II.*).

Diedi a questa canna un fuoco violentissimo per lo spazio di sette e più ore; ma non si sprigionò giammai alcuna sostanza gazosa. Sul principio fu depressa la soluzione dentro al tubo, ma non passò mai veruna bolla d'aria; anzi dopo due ore di fuoco si fece assorbimento. Più volte tentai la stessa sperienza, ma invano; quantunque il Sig. de *Priestley* assicuri aver estrat-

(4) Sembra che di tal sentimento sieno pure i Sigg. *Baumè*, *Morveau*, e *Vallerius*, ed altri più antichi Autori.

to del gaz infiammabile senza intermezzo d' alcuna sostanza da diversi metalli, tanto col riporli in un cannone di fucile, quanto col mezzo d'uno specchio ustorio dentro a vasi di vetro; i metalli da lui sperimentati furono il ferro, lo zinco, lo stagno (5). Nè debbo incolpare l'azione del fuoco, poichè vetrificai in quel tempo alcune sostanze nel fornello medesimo, in cui era collocata la canna.

La soluzione d' oro non avendo ricevuto il menomo cangiamento, esaminai lo stagno, e lo ritrovai nella superficie calcinato (6), anzi in qualche punto vetrificato. Il suo peso non fu sensibilmente cangiato, ma è cosa difficile in queste sperienze l' accertarsene, poichè per la violenza del fuoco si distaccano le scorie dal ferro, delle quali riesce difficile il liberarne la sostanza sperimentata.

11. Questa sperienza, che fu inutile per le mie ricerche, mi fe palese per altro un fenomeno, che può interessare i Fisici. Un' ora e mezza circa dappoichè la canna fu al fuoco, il calore era così intenso in tutta la sua lunghezza, che non poteva con la mano toccarsi francamente neppure in sommità. Quando poi cominciò a farsi l' assorbimento, cioè un' ora dopo che il fuoco nel fornello era assai più intenso, divenne la canna quasi fredda, di modo che potea senza incomodo toccarla la mano in tutta la lunghezza, anche dove era lutata al fornello.

Non potrebbesi conghietturare, che l'aria sia il conduttore del calore? Che quando questa venne assorta

Iii iij

(5) Il Sig. de *Lavoisier* non ne ha ricavato dal piombo, e si ha luogo a credere, che nella sperienza di *Hales* l' aria da esso ottenuta siasi sviluppata dall' apparecchio.

(6) Veggansi le sperienze del Sig. *Lavoisier* le quali sono analoghe sopra tal fatto (*Opuscules Phisiques, & Chimiques pag.* 281).

dal metallo nel tempo della riduzione della ſua ſuperficie in calce ſia appunto ceſſato il calore? O forſe i vapori aſſorti dall' acqua, quando ſi fece il vuoto, hanno cagionato queſto fenomeno?

SPERIENZA V.

12. Miſi in una canna da fucile ben chiuſa tre oncie di calce di ſtagno, oſſia *potèe d' etain*, eſſendo l' apparecchio come nella precedente ſperienza. Le diedi un fuoco il più violento, ma non mi riuſcì la riduzione.

Vi fu ſoltanto il liquore un po' depreſſo, ma non paſsò veruna bolla; e queſta depreſſione la giudico unicamente cagionata dalla dilatazione dell' aria contenuta nel vano.

Intrapreſi pertanto a far cimento coll' addizione di ſoſtanze flogiſtiche; il che feci con le ſeguenti ſperienze.

SPERIENZA VI.

13. Ripoſi un' oncia e mezza di calce di ſtagno, e un' egual porzione di reſina nella ſolita canna da fucile con lo ſteſſo apparecchio.

Quando il calore cominciò a penetrare la canna, immediatamente ſi ſviluppò una prodigioſa quantità di gaz, il quale attraverſando la ſoluzione dell' oro, gettoſſi nella veſcica anneſſa. La violenza con cui ſi ſviluppava mi fece diſgiungere l' apparecchio; ciò non oſtante oſſervai

Che la ſoluzione dell' oro fu leggermente precipitata in color porpora, quantunque l' acqua aveſſe preſo un color verde chiaro; il che deggio attribuire alla reſina.

Che la calce di ſtagno nella canna era ſtata quaſi tutta ridotta in metallo.

Che il gaz era infiammabile con fiamma azzurra, facendo una forte detonazione (7), e così nocivo alla respirazione animale, che un passero introdotto vi morì in pochi secondi, senza che mi sia riuscito di richiamarlo a vita col soccorso dell'alkali *fluor*.

Che una candela introdotta dopo averne infiammata la superficie si spegneva immediatamente, se più oltre veniva abbassata.

Sperienza VII.

14. In un apparecchio simile a quello delle precedenti sperienze riposi un' oncia di calce di stagno, e parte uguale di carbon pesto. La soluzione dell' oro attraversata dal gaz fu precipitata in color paonazzo circa un' ora dopo.

La calce è stata intieramente ridotta: il gaz s' infiammava con forte detonazione: la sua fiamma era piuttosto oscura.

Era egli più nocivo dell' altro, cioè mortale alla respirazione animale, poichè in minor tempo ancora vi morì un passero introdotto.

Sperienza VIII.

15. Riposi di nuovo un' oncia di calce di stagno, ed egual misura di sal nitro nella canna da fucile collo stesso apparecchio. Sviluppossi una gran quantità di gaz; ed attraversando esso la soluzione d' oro, questa diventò da principio di color lattiginoso, ed opaca,

(7) In questa sperienza, come nelle susseguenti, quando trattavasi d' infiammare il gaz, io lo versava dentro ad un vaso di vetro con bocca stretta. In tal guisa vi si mescolava dell' aria atmosferica, senza la quale non si ottiene nè infiammazione, nè detonazione.

ma poi prese una tinta porpora chiara, e precipitò in fondo del vaso una polvere di color lillà; la calce fu ridotta in metallo.

Il gaz raccolto mi sorprese per la sua natura; non era altramente infiammabile; non era gaz nitroso; non era aria deflogisticata, come potrebbe conghietturarsi, ma era gaz mefitico. Una candela che vi s'introdusse fu più volte spenta; un passero cadde in asfissia, ma non morì,

16. Non devo tacere, che in tutte queste sperienze, cessato lo sviluppamento del gaz, comincia l'assorbimento; che perciò quando si osserva il liquore del tubo ascendere, conviene disfare l' apparecchio, se non si vuole che il liquore in esperimento venga ad essere assorto nella canna; il che alcune volte m' è accaduto.

17. Provano siffatte sperienze, che la calce di stagno nella sua riduzione colle sostanze flogistiche lascia sfuggire le parti più volatili, le quali in un colla sostanza gazosa vengono sollevate, come le soluzioni d' oro precipitate in porpora ne fanno testimonianza.

18. Pensano generalmente i Chimici moderni essere dovuto all' aria il maggior peso, che acquistano i metalli quando vengono calcinati; ma la diminuzione del peso, che soffrono le calci metalliche nella riduzione, non è del solo eccedente acquistato, ma eziandio di una porzione del peso proprio (8). Quindi è che per ispiegare questo fenomeno si pretende che la perdita si faccia insieme con le materie flogistiche.

Ma

(8) La calce di piombo perde nella riduzione $\frac{1}{7}$ circa del suo peso; e quella dello stagno ne perde circa $\frac{1}{10}$; così che se molte volte si facesse la trasmutazione di calce in metallo, e di metallo in calce, verrebbe interamente a svanire la sostanza sperimentata. Tale almeno è il mio sospetto; ma le mie sperienze, che vo ad intraprendere sopra queste calcinazioni, e riduzioni, daranno luogo alla verità indubitatamente.

Ma le mie ſperienze provano chiaramente, che quel di più è la ſoſtanza metallica la più volatile, sfuggita con l' emanazione gazoſa.

19. Riflettendo ſopra i riſultamenti di queſte ſperienze, ſono entrato in penſiero, che la diſparità de' ſentimenti de' Chimici ſopra queſte arie fattizie poteſſe provenire dall' apparecchio adoperato ſinora, cioè da quello che ſi denomina apparecchio pneumato-chimico immaginato dal Sig. *Prieſtley*, indi perſezionato dal Sig. *Sigaud de la Fond*; poichè con tale apparecchio molte delle ſoſtanze gazoſe attraverſando l' acqua depongono in quella alcune quaſi inviſibili particelle, e forſe anche alcune altre ſi caricano di un principio umido, per il che più non ſono nello ſtato di purezza, o d' aggregazione, come emanano immediatamente dai corpi componenti. E per dare una convincente prova delle mie conghietture rapporterò, oltre alle già recate, due ſperienze, che pajono deciſive a queſto propoſito.

S p e r i e n z a IX.

20. L' apparecchio fu lo ſteſſo che quello adoperato nella Sperienza prima (veggaſi la *fig. I*). Ripoſi nel matraccio del ſale di tartaro, ſaturandolo con l' olio di vitriolo. Il gaz ſviluppatoſi paſſava per quattro caraffe prima di gettarſi nella veſcica adattata all' ultima caraffa. Conteneva la prima acqua diſtillata; la ſeconda acqua di calce; la terza era ripiena di fiori naturali di ciano, di roſe, e di viole gialle murali; l' ultima era ripiena di ſoluzione di tornaſole.

Oſſervai, che la tintura di tornaſole divenne roſſiccia; che l' acqua di calce precipitò; che i fiori alterarono colore (9); e finalmente che il gaz mefitico diè luogo a tutti i fenomeni defcritti da' Chimici moderni.

La caraffa dell' acqua diftillata non offerfe variazione alcuna; ma feci ch' ella foffe fempre la prima nell' apparecchio in molte fperienze, che intraprefi, sì che per ben otto volte fu occupata dal gaz mefitico.

Decantata pertanto queft' acqua dopo di averla fatta alquanto fvaporare, e lafciatala quindi tranquilla, con grande mia foddisfazione vidi formarfi nel fondo del vafe che la conteneva un precipitato, che riconobbi effere un vero tartaro vitriolato.

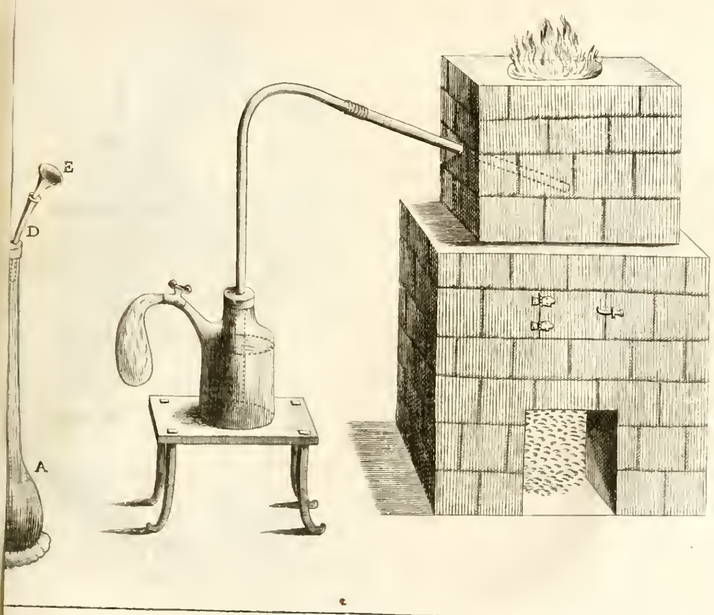
SPERIENZA X.

21. Coll' apparecchio fimile al precedente ripofi nel matraccio due oncie di limatura di ferro, faturandola con l' olio di vitriolo. La prima caraffa, per cui paffava il gaz fviluppato, era ripiena d' acqua diftilla-

(9) L'alterazione de' colori ne' fiori, e fpecialmente nelle rofe offervata da *Prieftley* qualora vengono efpofte al vapore del gaz ottenuto dalla fermentazione della birra, è ugualmente fenfibile, fe fi facciano attraverfare dal gaz ottenuto sì dal fale di tartaro, che dalle pietre calcaree per mezzo dell' olio di vitriolo; ed ho offervato, che il calore delle rofe divien più intenfo fingolarmente alle eftremità de' petali; che i fiori violacei divengono roffeggianti, e che i gialli non foffrono cangiamento veruno. In fomma ho offervato que' cangiamenti fteffi, che il vapore del zolfo ha prodotto fopra di effi, e che ho defcritto nelle *Memorie della Real Soc. di Torino* (Tom. V. pag. 31), ove conchiufi che quefte mutazioni erano dovute all' acido fprigionato dal zolfo. Nè per altra ragione fuccede l' alterazione di colore ne' fiori fottopofti all' azione de' diverfi gaz. Ho fempre preferito nel far efperimento full' acidità de' diverfi gaz di mettere de' fiori di ciano, od altri fiori violacei invece della tintura di tornafole; avendo riconofciuto effer effi più di quefta fenfibili, e pronti ad alterare il loro colore.

In tutte le fperienze fatte fopra i fiori attraverfati dal gaz ho offervato il fenomeno defcritto nella nota n. 3. della Sperienza 3, cioè che il gaz forma una corrente nel vafe, e che i fiori, che non vi fono involti, non reftano vifibilmente colorati.

Fig. II



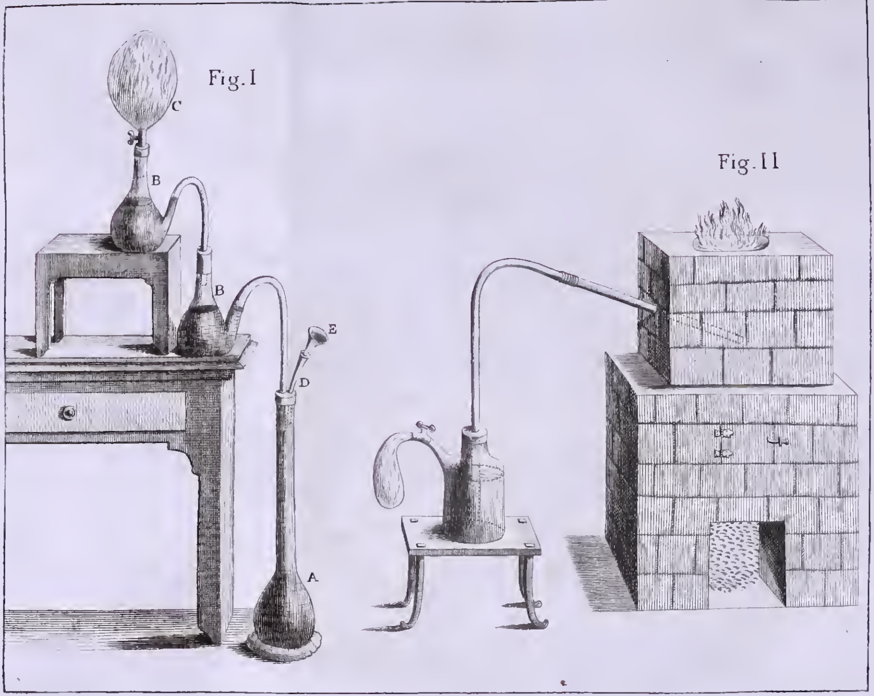


Fig. I
C
B
B
E
D
A
Fig. II

ta; la feconda, terza, e quarta contenevano fe fteffe foftanze della precedente fperienza.

Ho riconofciuto fu tutte, e rifcontrato le medefime azioni del gaz infiammabile, che ci vengono defcritte dagli Autori.

La caraffa de' fiori, che non conteneva fe non fe rofe, offerfe un fatto molto curiofo (10). Confervai, come nella precedente fperienza, la caraffa dell' acqua diftillata, la quale mi fervì coftantemente in molte fperienze, valendomene anche col gaz infiammabile eftratto dal ferro. Efaminata pofcia queft' acqua, riconobbi diftintamente effervifi formato nel fondo un precipitato, il quale era un vero vitriolo marziale; e alla fuperficie dell' acqua offervai una leggera intonacatura d' ocra alle pareti del vafe.

Feci pure cimento di foftituire all' acqua diftillata della prima caraffa una foluzione di galla, ed offervai che quefta diventava paonazza, e nericcia fe più d'una volta la faceva attraverfare dal gaz infiammabile.

(10) Quefte rofe divennero d'un color paonazzo più intenfo, che nella precedente fperienza, fpecialmente all' eftremità de' petali, il che fa conghietturare, che quefto gaz contenga una maggior quantità di acido; ciò però che mi riufcì forprendente, fi è, che quefte rofe non avendo più il loro odore naturale, prefero un odore fragrantiffimo, come quello dell' etere vitriolico, nel quale fi fentiva per altro un odore sfumato di rofe, che rendeva ancor più grato l' odore fatticcio, che avevano prefo.

DELLE VIBRAZIONI SONORE

DEI CILINDRI.

Del Sig. CONTE GIORDANO RICCATI.

I. DI parecchi cilindri di metallo, o di creta si formano certi strumenti, che riescono grati all' orecchio. Di tali corpi mia intenzione si è l' indagare le oscillazioni, le quali, come vedremo, vengono regolate da leggi diversissime da quelle delle corde cilindriche. Quantunque io abbia preso l' essenzial di questa soluzione dall' Appendice sopra le curve elastiche aggiunta dal dottissimo Sig *Leonardo Eulero* alla sua profonda Opera *Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; nulladimeno non isdegnino di leggerla i Matematici, sì perchè ho procurato di rischiarare la materia per sè stessa oscurissima, sì perchè m'è riuscito di farci per entro qualche non dispregevole scoperta, e di notare altresì alcun picciolo neo, che anderò opportunamente segnando, nelle speculazioni per altro sublimi del chiarissimo Autore.

Se nulla distendendosi le lunghezze inferiori di due cilindri, s' allungano solamente le superiori, o a rovescio, e ciò per opera di due forze minime uguali normali alle basi dei cilindri, ed applicate a' punti analoghi de' loro diametri situati ne' piani, in cui giacciono le mentovate opposte lunghezze, gli allungamenti corrispondenti a' punti analoghi de' diametri stessi stanno in ragione composta, diretta delle lunghezze de' cilindri, ed inversa della rigidità della materia, onde sono formati, e delle loro basi, o sia dei quadrati de' loro diametri.

II. Ci sieno (*fig.* 1.) due cilindri OV, ov, i quali si trovino in tali circostanze, che nulla dilatandosi le lunghezze inferiori VM, vm, si distendano a grado a grado le superiori, dimodochè gli allungamenti s' eguaglino alle ordinate dei triangoli MOL, mol. Si fingano totalmente inflessibili le loro basi $MGOI$, $mgoi$, e suppongasi, che i mentovati allungamenti sieno cagionati da due forze infinitesime uguali applicate con direzione normale alle dette basi, per esempio all' estremità O, o dei diametri MO, mo collocati ne' piani VL, vl: dico che le distensioni OL, ol corrispondenti ai punti analoghi O, o serbano la proporzione composta, diretta delle lunghezze SO, so dei cilindri, e reciproca della rigidità della materia, onde constano, e dei quadrati dei loro diametri.

Si segnino prima le linee finite MP, mp, indi le infinitesime PR, pr proporzionali ai diametri MO, mo, e si tirino parallele alle lunghezze VM, vm le linee KZ, NX; kz, nx. Per tali coppie di linee passino dei piani normali ai piani VL, vl, e questi segneranno due parallelepipedi, le cui lunghezze KP, kp, e le basi GH, gh. Essendo $MO : MP :: mo : mp$, $MO : MP :: OL : PZ$, $mo : mp :: ol : pz$, si verifica parimente l' analogia

$OL : PZ :: ol : pz$, la quale c' insegna, che gli allungamenti dei due cilindri in siti analoghi abbracciano la medesima proporzione. Vengano le distensioni PZ, pz direttamente effettuate nei solidi KR, kr da due forze minime uguali. Ho dimostrato nella mia Opera *Delle Corde, ovvero Fibre elastiche* al numero IV. dello Schediasma I, che gli allungamenti prodotti da forze infinitesime pari in due corde elastiche, che non sien tese, stanno come le loro lunghezze divise pel prodotto della rigidità della materia, onde sono composte, nelle loro basi: e le dimostrazioni ivi addotte, che non ripeto presentemente, s'adattano interamente ai parallelepipedi KR, kr. Per la qual cosa le distensioni PZ, pz serberanno la nominata relazione: ma le basi GH, gh, che sono porzioni simili delle basi circolari dei cilindri, si riferiscono nella ragione dei quadrati de' diametri MO, mo; dunque le distensioni PZ, pz dei solidi KR, kr, ed altresì quelle di tutte l' altre coppie di solidi fondati su basi simili, e similmente situati, che in pari numero compongono i nostri cilindri, accettano la proporzione delle lunghezze VM, vm divise pel prodotto della rigidità della materia nel quadrato dei diametri de' cilindri. Si cavi la conseguenza, che in qualunque pajo di parallelepipedi collocati in siti analoghi gli allungamenti, che si riguardano nella mentovata ragione, sono cagionati da forze uguali.

Si restituiscano ora i cilindri per gli spazietti LQ, lq parti infinitesime simili degli spazj OL, ol, ed agevole riuscirà la riflessione, essere $OL : PZ :: QL : YZ :: ol : pz :: ql : yz$, e che perciò gli spazietti analoghi QL, ql; YZ, yz si riferiscono nella stabilita ragione, nella quale altresì si riguarderanno le reazioni menomissime delle forze a coppia a coppia eguali applicate ai punti analoghi Z, z; L, l ecc. Lo stesso rapporto parimente accetteranno gli aggregati di queste reazioni. Se tolte di mezzo tali forze infinite di numero, io voglio collocare nei ſiti L, l due forze equipollenti per le direzioni OL, ol, egli è d'uopo, che alla ſomma delle reazioni delle forze levate s'eguagli l'unica reazione della forza ſoſtituita. Quindi le reazioni delle due forze ſurrogate dovranno ſtare come $QL : ql$; ma le dette forze reagiſcono per gli ſpazj QL, ql; dunque le reazioni ſono come gli ſpazj, per cui reſiſtono le due forze, il che non può verificarſi ſenon nel caſo, che ſieno uguali eſſe forze. Se due forze uguali pertanto normali alle baſi dei cilindri OV, ov, ed applicate ai punti analoghi O, o dei diametri MO, mo ſituati nei piani VL, vl fanno equilibrio colla forza elaſtica dei cilindri ſteſſi, le corriſpondenti diſtenſioni OL, ol devono ſerbare la ragione compoſta, diretta delle lunghezze SO, so dei cilindri, ed inverſa della rigidità della materia, di cui ſono formati, e dei quadrati de' loro diametri.

Determinare la forza, la quale, ſupponendoſi applicata per una data direzione in un ſito determinato, ſia equipollente alla forza elaſtica d'una menoma porzione di cilindro infinitamente poco incurvato.

III. Sia $AVMF$ (Fig. 2.) la curva di menoma piegatura, a cui vibrandoſi ſi ſia adattato un cilindro, ed AC, CM ſieno le coordinate l'una all'altra normali. La lunghezza pochiſſimo incurvata MV della porzione elementare LV del detto cilindro venga combaciata dal circolo MV deſcritto col raggio infinitamente lungo DM. Alla linea DVS pel punto M conduco parallela la retta MO. Potendoſi ſupporre, che nel ripiegarſi la lunghezza inferiore MV del mentovato cilindretto non abbia ricevuta alterazione, ſi farà egli ſuperiormente dilatato per OL.

Fingaſi collocata in A una forza equipollente a tutte quelle, che come vedremo ſono parallele alle ordinate MC, le quali fanno equilibrio col cilindretto LV. S' io risolverò questa forza in due, una parallela, e l' altra normale alla direzione MV d' esso cilindro, troverò la prima minima rispettivamente alla seconda; perchè discostandosi infinitamente poco la curva $AVMF$ dalla linea retta AB, la direzione della forza, che si risolve, è pressochè perpendicolare alla linea MV. La forza menomissima parallela ad MV allunga tutto il cilindretto LV egualmente, e la normale rispettivamente infinita ripiega il detto cilindro, e cagiona le distensioni espresse dalle ordinate del triangolo MOL. Ecco adunque, che trascurando l' allungamento comune a tutto il cilindro, siccome operato da una forza adequatamente uguale a nulla, mi è concesso il supporre, che la lunghezza inferiore MV ritenga la sua naturale misura.

Chiamo la lunghezza del cilindro $MV = ds$, il raggio osculatore $DM = R$, il diametro di esso cilindro $ML = D$, la rigidità della materia, che lo compone, $= r$. La similitudine dei triangoli DMV, MLO mi somministra l' analogia

$$DM : MV :: ML : LO$$

$$R : ds :: D : \frac{Dds}{R}$$, da cui si ricava $LO = Dds : R$.

Una forza costante $= 1$, che agisse per la direzione OL, allungherebbe il cilindro, come ho dimostrato al numero *II.* per lo spazio proporzionale a $ds : rD^2$, il quale sta in ragione composta, diretta della lunghezza del cilindro, ed inversa del quadrato del diametro, o sia della base del cilindro, e della rigidità della materia, della qual è formato. Essendo pertanto nello stesso cilindro le distensioni come le forze minime, che le cagionano; se l' allungamento come $ds : rD^2$ è prodotto dalla forza $= 1$, ne segue, che per ottenere la dilatazione $LO = Dds : R$ ci vorrà la forza proporzionale a $D^3 r : R$.

Si restituisca il nostro cilindro per lo spazio LQ porzione inassegnabile dello spazio LO, ed il raggio osculatore

latore MD s'allunghi, e divenga uguale ad $MG = R + dR$; troveremo la linea $QO = \frac{Dds.}{R+dR}$, la quale sottratta da $LO = Dds : R$, ci dà $LQ = DdRds : R^2$. Quindi la reazione della forza proporzionale a $D^3r : R$, che per lo spazio LQ si conserva costante, starà come $D^4rdRds : R^3$. Taglio $MT = 1 : R$, e pel punto T conduco TR parallela ad LQ. Dalla simiglianza dei triangoletti MLQ, MTR deduco l' analogia

$$ML : LQ :: MT : TR$$

$$D : \frac{DdRds}{R^2} :: \frac{1}{R} : \frac{dRds}{R^3}$$, che mi addita il valore di $TR = dRds : R^3$. Voglia collocarsi in T colla direzione RT una forza equipollente a quella, che s'è applicata in L, e che per conseguenza faccia equilibrio coll' elasticità del cilindro LV. Se le due forze in L, ed in T hanno ad essere equipollenti, le loro reazioni per gli spazj LQ, TR debbono essere uguali. S' inferisca, che divisa la reazione della prima forza, proporzionale a $D^4rdRds : R^3$ per lo spazietto $TR = dRds : R^5$, per cui reagisce la seconda, ne proverrà la grandezza della forza stessa applicata nel sito T proporzionale a D^4r, cioè a dire in ragione composta del quadrato-quadrato del diametro del cilindro, che si vibra, e della rigidità della materia, della qual è formato.

Sia M la massa di tutto il cilindro, L la sua lunghezza, g la sua gravità specifica, o densità, e la quantità $M : gL$ esprimerà la base del cilindro, la quale serba la ragione del quadrato D^2 del diametro. Sostituendo in vece di D^4 la grandezza proporzionale $M^2 : g^2L^2$ troveremo stare come $M^2r : g^2L^2$ quella forza applicata alla distanza $MT = 1 : R$, che forma equilibrio coll' elasticità del cilindretto LV, la cui minima curvatura $= 1 : R$. Nominata E la detta forza, avremo $KrM^2 : g^2L^2 = E$, ed il coefficiente K sarà costante in tutti i cilindri.

IV. Se col metodo da me tenuto rifpettivamente ai cilindri aveffi cercato il valore della forza E nelle lamine elaftiche, mi farebbe riufcito di trovarlo in ragione compofta della rigidità della materia, . della larghezza della lamina, e del cubo della fua groffezza. Alla forza E il Signor *Eulero* dà il titolo di elafticità affoluta della lamina, e fenza dimoftrarlo, l'afferifce proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della groffezza. Quefto sbaglio influifce nella legge dei tempi delle vibrazioni delle lamine elaftiche determinata dal noftro Autore, la quale non corrifponde ai fenomeni, falvochè nella circoftanza, che le diverfe lamine fieno di pari groffezza.

Trovare col mezzo degli efperimenti il valore della forza E.

V. Alla muraglia perpendicolare BK fia immobilmente raccomandato il cilindro $AVMF$, il quale prima di effere incurvato teneva la pofitura HF a fquadra della linea FB. Avverto, che la retta HF tocca la curva $AVMF$ nel punto F. Una forza P applicata al punto eftremo A con direzione fempre parallela ad FB abbia ripiegato il cilindro nella curva $AVMF$, e formi con effo equilibrio, e con tutti i fuoi elementi. Pel punto A fi tiri AB parallela ad HF, e dal punto M fi lafci cadere l' ordinata MC normale ad AB. Si tagli $ME = AC$, e fi conduca la diagonale AM. Chiamo $AB = a$, $BF = b$, $AC = x$, $CM = y$; e giacchè il cilindretto LV fta in equilibrio colla forza P, fe fupporremo, che invariata rimanga la curvatura del refto del cilindro, e che folamente l' elafticità del cilindretto LV eferciti una menoma azione, a quefta dovrà effer uguale la reazione della forza P. In cambio dell' elafticità del cilindro LV io poffo foftituire la forza equivalente E applicata in T, ovvero in R, la quale agiſca per lo ſpazietto RT. Il punto R della linea MR deſcriverà l' archetto RT, ed i raggi $MI = ME$, ed MA ſegneranno gli archi IE, AZ ſimili all' RT. Dal punto Z ſi cali ZN normale ad AB. Eſſendo la direzione della forza P perpendicolare ad AB, reagiſce per lo ſpazio NZ, mentre la forza E agiſce per lo ſpazio RT. Avremo dunque per le leggi dell' equilibrio $P.NZ = E.RT$. I triangoli ſimili MAC, AZN m' inſegnano eſſere $MA:AZ::AC:NZ$; ma per la ſimiglianza dei ſettori MAZ, MIE, $MA:AZ::MI:IE$; dunque $AC:NZ::MI:IE$; e giacchè per la coſtruzione $AC = MI = x$, ſarà parimente $NZ = IE$. Avremo pertanto $P.IE = E.RT$, e ſurrogando in luogo degli archetti IE, RT i raggi proporzionali $MI = AC = x$, $MR = 1:R$, $Px = E:R$.

VI. Chiamano i Meccanici la quantità Px il momento della forza P riſpettivamente al punto M, e dovendo queſta far equilibrio coll' elaſticità del cilindro, il cui momento $E:R$, ſtabiliſcono l' equazione $Px = E:R$. Ho ſtimato opportuna coſa riſchiarar la materia, deducendo la noſtra formola dall' eguaglianza delle azioni menomiſſime, che mutuamente s' impediſcono, nella quale conſiſte il vero fondamento dell' equilibrio. Fa vedere il progreſſo del mio raziocinio, che le grandezze Px, $E:R$ ſono proporzionali alle azioni eguali, e contrarie, l' una delle quali ſerve all' altra d' impedimento, della forza P, e dell' elaſticità del cilindro LV. Quindi ſiccome rettamente ſi nomina Px il momento della forza P, così $E:R$ ſi dee appellare il momento della forza elaſtica del cilindretto LV, la cui curvatura $1:R$, e per queſta parola momento altro non ſi dee intendere, ſalvochè le mentovate virtuali infiniteſime azioni uguali, e contrarie, o quantità ad eſſe proporzionali.

VII. Dopo queſta forſe non inutile digreſſione torno in ſentiero, e ripigliata per mano l' equazione Px

$=E:R$, osservo che preso siccome costante l' elemento dx dell' assissa, abbiamo il raggio osculatore R
$= \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3:2}}{-dxddy}$. Ponendo in opera un tal valore, trovo $Px = \frac{-Edxddy}{(dx^2+dy^2)^{3:2}}$, o sia $Pxdx$
$= \frac{-Edx^2ddy}{(dx^2+dy^2)^{3:2}}$, formola, che riceve la seguente integrazione $P.(\frac{1}{2}x^2+f) = \frac{-Edy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, la quale maneggiata mi dà $dy = \frac{-Pdx.(\frac{1}{2}x^2+f)}{\sqrt{(E^2-P^2.(\frac{1}{2}x^2+f)^2)}}$. Si determina la costante f riflettendo, che nel sito F la tangente HF è parallela all' assissa AB; laonde $dy:dx=0$, e perciò $\frac{1}{2}x^2+f=0$, ovvero $f=-\frac{1}{2}x^2$: ma in questo caso $x=AB=a$; dunque $f=-\frac{1}{2}a^2$. Fatto uso di questo valore, ed adempiuti i necessarj calcoli, ci si presenterà $dy = \frac{(a^2-x^2).dx}{\sqrt{(4E^2:P^2-a^4+2a^2x^2-x^4)}}$.

S' adatti all' estremità A del cilindro $AVMF$ una forza, o peso P assai picciolo rispettivamente alla forza E, dimodochè il cilindro stesso si ripieghi per una saetta FB fisicamente menoma, ma che per altro possa accuratamente misurarsi. In sì fatta ipotesi la quantità $4E^2:P^2$ sarà talmente grande, che si potrà in riguardo alla pratica trascurare la grandezza $-a^4+2a^2x^2-x^4$. Avremo pertanto $dy = \frac{(a^2-x^2)dx}{2E:P}$, ed integrando $y = \frac{P.(a^2x-\frac{1}{3}x^3)}{2E}$: ma quando $x=a$, $y=b$; dunque $b=Pa^3:3E$, e finalmente $E=Pa^3:3b$, valore della forza E, che non si discosterà dal vero sensibilmente, purchè la curvatura del cilindro ſia piccioliſſima.

VIII. Avendo dimoſtrato eſſere E come rD^4, ſtarà per conſeguenza rD^4 come $Pa^3 : 3b$, ed r come $Pa^3 : 3bD^4 = E : D^4$. Col mezzo adunque della premeſſa eſperienza ſi può ſcoprire la proporzione fra le rigidità delle materie, onde ſono compoſti i cilindri. Stabilirò in progreſſo al numero XXV un altro canone ugualmente ſemplice che ſerve a determinare la detta proporzione.

IX. Nella formola $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{(4E^2 : P^2 - a^4 + 2a^2x - x^4)}}$ ſi faccia $2E : P = c^2 - a^2$, e conſeguentemente $4E^2 : P^2 = c^4 - 2c^2a^2 + a^4$. Supponendoſi $2E : P$ una quantità aſſai grande riſpettivamente ad x, e ad a, ſarà parimente tale la quantità c, come agevolmente raccoglieſi dall' equazione aſſunta $2E : P = c^2 - a^2$. Soſtituito in cambio di $2E : P$ il ſuo valore, troveremo $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2 + 2a^2x^2 - x^4)}}$. Se nel denominatore io traſcuro i ſoli due termini $2a^2x^2 - x^4$, la cui ſomma è fiſicamente nulla non ſolo in riguardo a c^4, ma ancora per rapporto a $-2c^2a^2$, mi ſi preſenta la formula $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2)}}$, che s' adegua alla ſeguente $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{c^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{2E : P}$, da cui ricavo $E = Pa^3 : 3b$.

Ma s' io traſando altresì il termine $-2c^2a^2$, ho l' equazione $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{c^2}$, la quale integrata mi dà $y = \frac{a^2x - \frac{1}{3}x^3}{c^2}$. Corriſpondendo $y = b$ ad $x = a$, troveremo $b = 2a^3 : 3c^2$, e ponendo in luogo di c^2 il ſuo valore $2E:P+a^2$, $3b = \frac{2a^3}{2E:P+a^2}$. Dal maneggio di questa formola si ricava $E = \frac{Pa^2.(2a-3b)}{6b}$. Il Signor *Eulero* assegna alla forza E un tal valore, il quale è meno semplice, e meno esatto di quello, che da me è stato determinato.

Determinare l' equazione della curva, a cui s' adatta un cilindro, che si vibra.

X. Tenga il cilindro prima di vibrarsi la positura rettilinea ACB (*fig.* 3), e messo poscia in oscillazione s' adatti alla curva $aEcFb$, la quale si discosti dalla linea retta ACB per minimi spazj. Sia la lunghezza del cilindro acb, ovvero $ACB = L$, la sua massa $= M$, il raggio osculatore in $M = R$, il momento dell' elasticità del cilindro nel sito medesimo $= E:R$. Si chiami inoltre $Aa = b$, $AP = aM = x$, $PM = y$. Effettuando il nostro cilindro nel tempo stesso le sue menome vibrazioni più, o meno estese, dee necessariamente oscillare colla legge di un pendolo a cicloide. Sia f la lunghezza del pendolo semplice isocrono, e giacchè questo, mentre gli resta da scorrere lo spazio $MP = y$, viene animato dalla forza acceleratrice $y:f$, tale sarà altresì la forza acceleratrice del cilindro nel sito M. La massa d' un elemento d' esso cilindro, la cui lunghezza dx s' eguaglia ad $Mdx:L$, la quale moltiplicata per $y:f$, mi dà la forza sollecitante il detto elemento collocato in $M = Mydx:Lf$. Il cilindro dopo compiuta un' oscillazione si trovi nella positura $aEcFb$, e se in tale istante a tutti i punti d' esso cilindro s' applicheranno le convenienti forze $Mydx:Lf$ con direzioni contrarie, per esempio MH, mh, a quelle delle forze sollecitanti, non seguirà più moto, ed il cilindro si fermerà in equilibrio. Le forze applicate alla curva aM stanno in equilibrio colla forza elastica del cilindro in M: ed in fatti se questa si minorasse, tutte le dette forze si porrebbero in azione. Quindi l' aggregato dei momenti delle mentovate forze dee pareggiare il momento $E:R$ della forza elastica nel sito M.

Nomino p la somma delle forze applicate alla curva am, e dp per conseguenza sarà la forza, che tira l' elemento mu per la direzione mb. Il momento di essa forza rispettivamente al punto M, mettendo $Ap=q$, s'eguaglia ad $(x-q).dp$. Per trovare la somma desiderata dei momenti delle nostre forze in riguardo al punto M, si considerino per poco il detto punto, e l' assissa $AP=x$ come costanti, prendendo $Ap=q$ in qualità di variabile. Avremo pertanto l' aggregato dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate alla porzione di curva am $=xp-\int qdp$: ma $\int qdp=qp-Spdq$; dunque la mentovata somma $=xp-qp+\int pdq$. Giunga il punto m in M, e diverrà $q=x$, $dq=dx$. Sostituiti questi valori, troveremo la somma dei momenti per rapporto al punto M di tutte le forze applicate alla parte di cilindro $aM=Spdx$. Ora dovendosi un tale aggregato eguagliare al momento $E:R$ dell' elasticità del cilindro nel sito M, siam pervenuti all' equazione $E:R=Spdx$, e surrogando in vece di p l' eguale grandezza $\int\frac{Mydx}{Lf}$, $E:R=\int\left(dx\int\frac{Mydx}{Lf}\right.$. Nel caso presente, in cui la flussione costante dx dell' assissa s' adegua all' elemento ds della curva, si verifica essere $R=dx^2:ddy$, e perciò avremo $Eddy:dx^2=\int\left(dx\int\frac{Mydx}{Lf}\right)$. Prendo le differenze, e trovo $Ed^3y:dx^2=dx\int Mydx:Lf$, e nuovamente differenziando $Ed^4y = Mydx^4 : Lf$, equazione alla curva cercata $aEcFb$.

XI. La somma dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate al rimanente del cilindro $MEcFb$ esser dee uguale, e contraria alla somma dei momenti delle forze applicate alla porzione aM, e l' una e l' altra di queste somme dee pareggiare il momento dell' elasticità $= \dot{E} : R$ del cilindro nel sito M. Così l' elemento di cilindro collocato in M sta in equilibrio, essendo preso in mezzo da due aggregati di momenti eguali, e contrarj. Se avessi considerati i momenti delle forze applicate alla parte $MEcFb$ del cilindro, fatta la riflessione essere $BP = L - x$, ed il suo incremento $= -dx$, avrei scoperto $Eddy : dx^2$ $= \int\left(-dx\,f - \frac{Mydx}{Lf}\right)$, espressione, che ci guida alla formula testè trovata $Edy = Mydx^4 : Lf$.

La premessa avvertenza me ne suggerisce un' altra, cioè che la somma dei momenti rispettivamente ai punti estremi a, b delle forze applicate a tutto il cilindro $aEcFb$ deve uguagliarsi a nulla, siccome quella, che ha da formar equilibrio coll' aggregato dei momenti delle forze applicate al residuo del cilindro, che ne' due mentovati casi pareggia il nulla. Posta dunque $x = 0$, o pure $x = AB = L$, avremo $E : R = Dddy : dx^2$ $= \int\left(\pm dx\,f \pm \frac{Mydx}{Lf}\right) = 0$. Si cavi la conseguenza essere nulla la curvatura $1 : R$ del cilindro nei siti a, b, e nullo parimente il momento della sua elasticità.

XII. Le forze MH uguali, e contrarie a quelle, che tentano di far reciprocare il cilindro, e spingono i suoi punti, per esempio M, verso la linea retta AB, debbono trattenere il cilindro stesso nella positura $aEcFb$ totalmente immobile, senza che possa in esso seguire o moto progressivo per l' una, o l' altra direzione Cc,

cC,

cC, o moto di giramento intorno qualſivoglia punto. Queſt' ultimo movimento non ſuccederà, quando i momenti delle forze applicate a deſtra; e a ſiniſtra di qualunque punto M ſieno eguali, e contrarj, e che per conſeguenza facciano equilibrio. Non accaderà nè pure il moto progreſſivo, qualora s' adempia la condizione, che l' aggregato delle forze traenti il cilindro per la direzione cC pareggi quello, che il tira per la direzione contraria Cc. Abbiamo veduto, che la ſomma delle forze applicate alla porzione aM s' eguaglia ad $M:LF \int ydx$: ma $\int ydx$ dinota l' aja $auMPA$; dunque la nominata ſomma delle forze applicate alla parte di cilindro aM ſcelta ad arbitrio è ſempre proporzionale alla corriſpondente aja $auMPA$. Dovendo il cilindro eſſer ugualmente tirato per le due direzioni oppoſte cC, Cc, egli è d' uopo che l' aja poſitiva $aEA + bFB$ pareggi la negativa $EFcE$, dimodochè facendo $x = AB = L$, ſi trovi $\int ydx = 0$.

Oſſerveremo in progreſſo, che il cilindro AB ſi può oſcillando adattare ad infinite curve, la metà delle quali tagliano l' aſſe AB in un numero pari di punti, ed il rimanente in un numero impari. Le più ſemplici fra le dette curve ſi veggono eſpreſſe nelle figure 3, e 4. Pretende il Signor *Eulero*, che le curve del ſecondo genere non ſervano per le vibrazioni delle lamine elaſtiche; ma queſta ſua aſſerzione non è conforme alla verità, potendoſi anco riſpettivamente a tali curve determinare le coſtanti aggiunte nelle integrazioni, di maniera che ſieno eguali i momenti delle forze a deſtra, e a ſiniſtra d'un qualunque punto, e che di più ad $x = AB = L$ corriſponda $\int ydx = 0$. L' eſperienza favoriſce i miei penſamenti; imperciocchè ſoſtenendo in bilico una lamina con un dito, ed indi percuotendola, ſi ſente chiaro quel ſuono, che rende la lamina ſteſſa, mentre s' uniforma alla curva della figura 4, che non viene punto diſturbata dal dito, il quale tocca la lamina nel ſito immobile C. Il dito applicato in C ammortiſce la metà dei ſuoni della lamina, cioè a dire tutti quelli ch'eſſa produce, mentre s'adatta alle curve del primo genere, nelle quali tutte al punto C (*Fig.* 3, 5, 7 ecc.) ſi riferiſce la maſſima ordinata Cc.

Integrare l'equazione $\frac{ELfd^4y}{M} = ydx^4$, *e determinare i valori delle coſtanti aggiunte nelle integrazioni.*

XIII. Pongaſi $ELf : M = c^4$, onde s' abbia $c^4d^4y = ydx^4$. Il celebratiſſimo Sig. *Eulero nel Tomo VII. delle Miſcellanee di Berlino* ci ha inſegnata la generale integrazione di tali equazioni differenziali di alto grado. Col mezzo di queſto metodo ſi trova $y = Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C \text{ ſen.}\, x:c + D \text{ coſ.}\, x:c$ (1), in cui e dinota il numero, che ha per logaritmo l' unità nella logiſtica delle ſottotangente $= 1$. I logaritmi preſi nella ſuddetta logiſtica ſi chiamano naturali, o iperbolici; perchè ſi ſuole con eſſi eſprimere la quadratura dell' iperbola. Il lodato Autore nella ſua eccellente Introduzione all' Analiſi degl' infiniti ha computato il valore del numero e, che, preſa l' unità come protonumero, ſi ſuol nominare la baſe della logiſtica $= 2,7182818$. Ci ha dato parimente nello ſteſſo luogo la ſerie dei logaritmi iperbolici dall' 1 ſino al 10. Per i computi, che ſiam per fare, baſta il ſapere, che il numero 10 nelle tavole ha per logaritmo 1,0000000, e nella logiſtica iperbolica 2,3025851, e che nella ſteſſa proporzione ſi deggiono riferire i logaritmi dell' una e dell' altra logiſtica, che corriſpondono allo ſteſſo numero. Coll' ajuto dunque dei logaritmi delle tavole ſi potrà trovare il logaritmo iperbolico di qualunque numero. Nella ſovrappoſta formola ſen. $x:c$, e coſ. $x:c$ dinotano il ſeno, ed il coſeno dell' arco $x:c$ preſo nel circolo, il cui raggio $= 1$. A, B, C, D ſono quattro coſtanti introdotte nelle altrettante integrazioni, a cui è d' uopo aſſegnare i convenienti valori.

Si prendano nella noſtra equazione le prime, ed indi le ſeconde, le terze, e le quarte differenze, ed avvertendo eſſere diff. $e^{x:c} = 1:c\, e^{x:c}\, dx$, diff. ſen. $x:c = dx:c$ coſ. $x:c$, diff. coſ. $x:c = -\, dx:c$ ſen. $x:c$, troveremo

$$dy = \frac{A}{c}\, e^{x:c} dx - \frac{B}{c} e^{-x:c} dx + \frac{Cdx}{c} \text{coſ.} \frac{x}{c} - \frac{Ddx}{c} \text{ſen.} \frac{x}{c} \ (2)$$

$$ddy = \frac{A}{c^2} e^{x:c} dx^2 + \frac{B}{c^2} e^{-x:c} dx^2 - \frac{Cdx^2}{c^2} \text{ſen.} \frac{x}{c} - \frac{Ddx^2}{c^2} \text{coſ.} \frac{x}{c} \ (3)$$

$$d^3y = \frac{A}{c^3} e^{x:c} dx^3 - \frac{B}{c^3} e^{-x:c} dx^3 - \frac{Cdx^3}{c^3} \text{coſ.} \frac{x}{c} + \frac{Ddx^3}{c^3} \text{ſen.} \frac{x}{c} \ (4)$$

$$d^4y = \frac{A}{c^4} e^{x:c} dx^4 + \frac{B}{c^4} d^{-x:c} dx^4 + \frac{Cdx^4}{c^4} \text{ſen.} \frac{x}{c} + \frac{Ddx^4}{c^4} \text{coſ.} \frac{x}{c} \ (5)$$

Se nell' equazione (5) ſoſtituiremo y in cambio del ſuo valore $Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ ſen. $x:c + D$ coſ. $x:c$ ſomminiſtrato dall' equazione (1), torneremo a trovare la formola differenziale $d^4y = ydx^4 : c^4$.

Le cinque notate formule ci guidano alla determinazione delle coſtanti.

In primo luogo ad $x = 0$ dee corriſpondere $y = b$. Eſſendo in tal caſo $e^{x:c} = 1$, $e^{-x:c} = 1$, ſen. $x:c = 0$, coſ. $x:c = 1$, la prima equazione ſi trasforma così $b = A + B + D\ (6)$.

In ſecondo luogo m' inſegna il numero XI, che poſta $x = 0$, o pure $x = L$, deve uguagliarſi a nulla riſpettivamente ai punti eſtremi a, b la ſomma dei momenti delle forze applicate a tutto il cilindro $aEcFb$, onde s' abbia $Eddy:dx^2 = \int(\pm dx \int \pm Mydx:Lf) = 0$, ovvero ſoſtituendo c^4 in luogo di $ELf:M$, $c^4 ddy : dx^2 = \int(\pm dx \int \pm ydx) = 0$. Fatta pertanto nell' equazione (3) $ddy : dx^2 = 0$, e ponendo prima $x = 0$, indi $x = L$, troveremo

$0 = A + B - D\ (7)$

$o = Ae^{L:c} + B^{-L:c} - C \text{ſen.} L:c - D \text{coſ.} L:c$ (8).

In terzo luogo poſta $x = o$, è parimente nulla l'aja $APMa = \int ydx$: ma come s' è ſtabilito al numero X $ELf:M.d^3y:dx^3 = c^4d^3y:dx^3 = \int ydx$; dunque uguagliata a nulla nell' equazione (4) la grandezza $d^3y:dx^3$, e mettendo $x = o$, ſi preſenterà

$o = A - B - C$ (9).

Finalmente al numero XII abbiamo ſtabilito, che ancor nell' ipoteſi di $x = L$ eſſer dee $\int ydx = o$. Quindi ponendo nell' equazione (4) $d^3y:dx^3 = o$, ed $x = L$, ſi ſcoprirà

$o = Ae^{L:c} - Be^{-L:c} - C \text{coſ.} L:c + D \text{ſen.} L:c$ (10).

Col mezzo delle cinque notate condizioni s' aſſegneranno i loro valori alle quantità coſtanti A, B, C, D, ed alla frazione $L:c$, la quale ſervirà poi per determinare la lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono al cilindro AB.

Le formole (7), e (9) mi danno $D = A + B$, $C = A - B$, valori che ſurrogati nelle formole (8), e (10) fanno loro prendere il ſeguente aſpetto

$o = Ae^{L:c} + Be^{-L:c}(-A+B).\text{ſen.}L:c(-A-B).\text{coſ.} L:c$,

$o = Ae^{L:c} - Be^{-L:c}(-A+B).\text{coſ.} L:c(+A+B).\text{ſen.} L:c$.

Si deduce da queſte

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-L:c} - \text{ſen.}\,L:c + \text{coſ.}\,L:c}{e^{L:c} - \text{ſen.}\,L:c - \text{coſ.}\,L:c} = \frac{e^{-L:c} - \text{coſ.}L:c - \text{ſen.}L:c}{e^{L:c} - \text{coſ.}L:c + \text{ſen.}\,L:c} \text{(11)},$$

e dall' equazione (11)

$o = 2 - e^{L:c}\text{coſ.} L:c - e^{-L:c}\text{coſ.} L:c$, o ſia

$e^{2L:c} - \frac{2e^{L:c}}{\text{coſ.}\,L.c} = -1$. Si ſuppliſca il quadrato, ed eſtratta poſcia la radice ſi troverà

$$e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} \quad (12).$$

Il primo dei due valori, che per la formola (11) competono alla frazione $A:B$, s'eguaglia a $\frac{\text{coſ.}\, L:c}{1 - \text{ſen.}\, L:c}$, il ſecondo a $\frac{-\text{coſ.}\, L:c}{1 + \text{ſen.}\, L:c}$.

Giacchè, come ho teſtè dimoſtrato $e^{L:c} = \frac{1 - \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c}$, ſarà, ſoſtituendo una tale grandezza in luogo di $e^{L:c}$ nel primo valore di $A:B$ contenuto nella formola

$$(11) = \frac{\frac{-\text{coſ.}\, L:c}{1 - \text{ſen.}\, L:c} - \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c}{\frac{1 - \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} - \text{ſen.}\, L:c - \text{coſ.}\, L:c} =$$

$$\frac{\text{coſ.}\, L:c}{1 - \text{ſen.}\, L:c} \left(\frac{-\text{ſen.}\, L:c + (\text{ſen.}\, L:c)^2 - \text{ſen.}\, L:c \,.\, \text{coſ.}\, L:c}{1 - \text{ſen.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c \,.\, \text{coſ.}\, L:c - (\text{coſ.}\, L:c)^2} \right):$$ ma

$1 - (\text{coſ.}\, L:c)^2 = (\text{ſen.}\, L:c)^2$; dunque effettuata queſta ſoſtituzione nel denominatore,

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{coſ.}\, L:c}{1 - \text{ſen.}\, L:c} \times \frac{-\text{ſen.}\, L:c + (\text{ſen.}\, L:c)^2 - \text{ſen.}\, L:c \,.\, \text{coſ.}\, L:c}{-\text{ſen.}\, L:c + (\text{ſen.}\, L:c)^2 - \text{ſen.}\, L:c \,.\, \text{coſ.}\, L:c}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\, L:c}{1 - \text{ſen.}\, L:c}.$$

Con pari metodo proverò eſſere

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-L:c} - \text{coſ.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c}{e^{L:c} - \text{coſ.}\, L:c + \text{ſen.}\, L:c} = \frac{-\text{coſ.}\, L:c}{1 + \text{ſen.}\, L:c},$$ e perciò avremo

$\frac{A}{B} = \frac{\pm \text{cof.}\, L:c}{1 \pm \text{fen.}\, L:c}$. Da questa formola io ricavo

$$B = A \cdot \left(\frac{1 \mp \text{fen.}\, L:c}{\pm \text{cof.}\, L:c}\right) = A \cdot \left(\frac{\pm 1 - \text{fen.}\, L:c}{\text{cof.}\, L:c}\right)$$

Essendo per la formola (9) $C = A - B$, scopriremo

$$C = A \cdot \frac{(\text{cof.}\, L:c + \text{fen.}\, L:c \mp 1)}{\text{cof.}\, L:c}$$

L'equazione (7) determina $D = A + B$, e quindi troverassi

$$D = A \cdot \frac{(\text{cof.}\, L:c - \text{fen.}\, L:c \pm 1)}{\text{cof.}\, L:c}$$

Dandoci inoltre la formola (6) $b = A + B + D$, e la (7) $D = A + B$, ne risulta

$$D = b:2 = A \cdot \frac{(\text{cof.}\, L:c - \text{fen.}\, L:c \pm 2)}{\text{cof.}\, L:c}.$$

I due valori di D mi somministrano quello di

$$A = \frac{b\, \text{cof.}\, L:c}{2. (\text{cof.}\, L:c - \text{fen.}\, L:c \pm 1)}$$

Or ecco i valori delle quattro costanti, i quali si renderanno noti, ridotta che sia a computo la frazione $L:c$ coll'mezzo dell'equazione (12.)

$$A = \frac{b.\, \text{cof.}\, L:c}{2.\, (\text{cof.}\, L:c - \text{fen.}\, L:c \mp 1)} = \frac{b.(\pm 1 + \text{fen.}\, L:c - \text{cof.}\, L:c)}{4.\, \text{fen.}\, L:c} \quad (13.)$$

$$B = \frac{b.\, (\pm 1 - \text{fen.}\, L:c)}{2.(\text{cof.}\, L:c - \text{fen.}\, L:c \pm 1)} = \frac{b.\, (\mp 1 + \text{fen.}\, L:c + \text{cof.}\, L:c)}{4\, \text{fen.}\, L:c} \quad (14.)$$

$$C = \frac{b.\, (\mp 1 + \text{fen.}\, L:c + \text{cof.}\, L:c)}{2.\, (\text{cof.}\, L:c - \text{fen.}\, L:c \pm 1)} = \frac{b.\, (\pm 1. - \text{cof.}\, L:c)}{2.\, \text{fen.}\, L:c} \quad (15.)$$

$$D = b:2. = \frac{b\, \text{fen.}\, L:c}{2.\, \text{fen.}\, L:c} \quad (16.)$$

Le seconde espressioni delle costanti A, B, C si provano eguali alle prime con un breve giro di computo, ch'io lascio all'industria di chi legge.

Sostituiti questi valori nell'equazione (1), troveremo

$$\frac{y}{b}=\frac{e^{x:c}\text{cos}.\,L:c+e^{-x:c}.(\pm 1-\text{sen}.\,L:c)}{2.(\text{cos}.\,L:c-\text{sen}.\,L:c\pm 1)}$$

$$\frac{(\pm 1-\text{cos}.\,L:c).\,\text{sen}.\,x:c+\text{sen}.\,L:c\,.\,\text{cos}.\,x:c}{2\,\text{sen}.\,L:c}\quad(17).$$

Ridurre a forma più semplice la formola (17).

XIV. Prendano le assisse l' origine dal punto medio C (*fig.* 3 e 4), e posta $CP=z$, sarà $\frac{1}{2}L-z=x$. Avremo pertanto $e^{x:c}=e^{L:2c\ -z:c}$, e giacchè per l'equazione (12) $e^{L:2c}=\surd\left(\frac{1\mp\text{sen}.\,L:c}{\text{cos}.\,L:c}\right)$, scopriremo

$$e^{x:c}=e^{-z:c}.\surd\left(\frac{1\mp\text{sen}.\,L:c}{\text{cos}.\,L:c}\right),\ e^{-x:c}=e^{z:c}\surd\left(\frac{\text{cos}.\,L:c}{1\mp\text{sen}.\,L:c}\right).$$

Quindi sarà

$$\frac{Ae^{x:c}+Be^{-x:c}}{b}=\frac{e^{x:c}\text{cos}.\,L:c+e^{-x:c}.(\pm 1-\text{sen}.\,L:c)}{2.(\text{cos}.\,L:c-\text{sen}.\,L:c\pm 1)}$$

$$=\frac{(\pm e^{z:c}+e^{-z:c})\surd(\text{cos}.\,L:c.(1\mp\text{sen}.\,L:c))}{2.(\text{cos}.\,L:c-\text{sen}.\,L:c\pm 1)}$$

$$=\frac{\pm e^{z:c}+e^{-z:c}}{2.\left(\pm e^{L:2c}+e^{-L:2c}\right)}.$$ Quest' ultimo valore dipende da ciò, che per la formola (12) $\pm e^{L:2c}+e^{-L:2c}$

$$=\pm\surd\left(\frac{1\mp\text{sen}.\,L:c}{\text{cos}.\,L:c}\right)+\surd\left(\frac{\text{cos}.\,L:c}{1\mp\text{sen}.\,L:c}\right)$$

$$=\frac{\text{cos}.\,L:c-\text{sen}.\,L:c\pm 1}{\surd(\text{cos}.\,L:c.(1\pm\text{sen}.\,L:c))}.$$

La Trigonometria c' istruisce essere $(\pm 1-\text{cos}.\,L:c)$. $\text{sen}.\,x:c+\text{sen}.\,L:c\,.\,\text{cos}.\,x:c=\pm\,\text{sen}.\,x:c+\text{sen}.\left(\frac{L-x}{c}\right)$, e ſoſtituendo nell' omogeneo di comparazione in cambio di x il ſuo valore $\frac{1}{2}L - z$, $(\pm 1 - \text{coſ.}\, L{:}c)$. ſen. $x{:}c$ $+$ ſen. $L{:}c$ coſ. $x{:}c = \pm$ ſen. $(L{:}2c - z{:}c) +$ ſen. $(L{:}2c + z{:}c)$. Nella formola (17) alle grandezze eſpreſſe per x ſi ſoſtituiſcano le uguali eſpreſſe per z or ora determinate, e s' avrà

$$\frac{2y}{b} = \frac{\pm e^{z:c} + e^{-z:c}}{\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}} \pm \frac{\text{ſen.}(L{:}2c - z{:}c) + \text{ſen.}(L{:}2c + z{:}c)}{\text{ſen.}\, L{:}c} \quad (18).$$

Abbiamo inoltre $e^{L:2c} + e^{-L:2c}$

$$= \frac{\text{coſ.}\, L{:}c - \text{ſen.}\, L{:}c + 1}{\sqrt{\left(\text{coſ.}\, L{:}c\,.\,(1 - \text{ſen.}\, L{:}c)\right)}} = \frac{\mp 2\, \text{coſ.}\, L{:}2c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}} \quad (a),$$

$- e^{L:2c}$

(*a*) L' accennata riduzione ſi può dimoſtrare così. Il ſecondo membro dell' equazione, laſciato da parte il diviſore $\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}$, s' eguaglia, alzandolo al quadrato, alla quantità

$$\frac{(\text{coſ.}\, L{:}c)^2 - 2\,\text{ſen.}\, L{:}c\ \text{coſ.}\, L{:}c + (\text{ſen.}\, L{:}c)^2 + 2\,\text{coſ.}\, L{:}c - 2\,\text{ſen.}\, L{:}c + 1}{1 - \text{ſen.}\, L{:}c}$$

$$= \frac{2 - 2\,\text{ſen.}\, L{:}c + 2\,\text{coſ.}\, L{:}c - 2\,\text{ſen.}\, L{:}c\ \text{coſ.}\, L{:}c}{1 - \text{ſen.}\, L{:}c} = 2 + 2\,\text{coſ.}\, L{:}c.$$

Il noto Teorema trigonometrico ci ſuggeriſce l' equazione coſ. $L{:}c = (\text{coſ.}\, L{:}2c)^2 - (\text{ſen.}\, L{:}2c)^2$: ma $(\text{ſen.}\, L{:}2c)^2 = 1 - (\text{coſ.}\, L{:}2c)^2$; dunque $1 + \text{coſ.}\, L{:}c = 2\,(\text{coſ.}\, L{:}2c)^2$, o ſia $2 + 2\,\text{coſ.}\, L{:}c = 4\,(\text{coſ.}\, L{:}2c)^2$. Il perchè ſoſtituito in cambio di $2 + 2\,\text{coſ.}\, L{:}c$ lo ſcoperto valore, eſtratta la radice, e reſtituito il diviſore $\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}$, troveremo $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \dfrac{\text{coſ.}\, L{:}c - \text{ſen.}\, L{:}c + 1}{\sqrt{\left(\text{coſ.}\, L{:}c\,.\,(1 - \text{ſen.}\, L{:}c)\right)}}$

$$= \frac{\mp 2\,\text{coſ.}\, L{:}2c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L{:}c}}.$$

$$-e^{L:2c}+e^{-L:2c}=\frac{\text{cof. } L:c-\text{fen. } L:c-1}{\sqrt{\left(\text{cof.}L:c.(1+\text{fen.}L:c)\right)}}=\frac{\pm 2\,\text{fen.}L:2c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\,(b),$$

$$\frac{\text{fen.}(L:2c-z:c+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. } L:c}=\frac{\text{cof. } L:2c}{\text{cof.}L:2c}\,(c),$$

$$-\frac{\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. } L:c}=\frac{\text{fen. } z:c}{\text{fen. } L:2c}\,(d).$$

Nnn

(b) Questa riduzione si prova con un metodo simile al precedente. Imperciocchè il quadrato del secondo membro senza il divisore $\sqrt{\text{cof. } L:c}$ è

$$=\frac{(\text{cof.}L:c)^2-2\,\text{fen.}L:c\,\text{cof.}L:c+(\text{fen.}L:c)^2-2\,\text{cof.}L:c+2\,\text{fen.}L:c+1}{1+\text{fen. } L:c}$$

$$=\frac{2+2\,\text{fen. } L:c-2\,\text{cof. } L:c-2\,\text{fen. } L:c\,\text{cof. } L:c}{1+\text{fen. } L:c}=2-2\,\text{cof.}$$

$L:c$. Ora $2-2\,\text{cof. } L:c=4\,(\text{fen. } L:c)^2$; dunque cavando la radice, e restituito il divisore $\sqrt{\text{cof. } L:c}$, $-e^{L:2c}$ $+e^{-L:2c}=\dfrac{\text{cof.}L:c-\text{fen. } L:c-1}{\sqrt{(\text{cof. } L:c\,.\,(1+\text{fen. } L:c)}}=\dfrac{\pm 2\,\text{fen. } L:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$.

(c) (d) E' noto essere $\pm\,\text{fen.}\,(L:2c-z:c)=\pm\,\text{fen. } L:2c$ $\text{cof. } z:c\mp\text{cof. } L:2c\,\text{fen. } z:c$, $\text{feno}\,(L:2c+z:c)=\text{fen. } L:2c$ $\text{cof. } z:c+\text{cof. } L:2c\,\text{fen. } z:c$, e perciò $\text{fen.}\,(L:2c-z:c)$ $+\text{fen.}\,(L:2c+z:c)=2\,\text{fen. } L:2c\,\text{cof. } z:c$, $-\text{fen.}\,(L:2c$ $-z:c)+\text{fen.}\,(L:2c+z:c)=2\,\text{cof. } L:2c\,\text{fen. } z:c$: ma come parimente si sa, $\text{fen. } L:c=2\,\text{fen. } L:2c\,\text{cof. } L:2c$; dunque $\dfrac{\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}\,(L:2c+z:c)}{\text{fen. } L:c}=\dfrac{\text{cof. } z:c}{\text{cof. } L:2c}$,

$$\frac{-\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. } L:c}=\frac{\text{fen. } z:c}{\text{fen. } L:2c}.$$

Nella formola (*a*) i segni del meno, e del più anteposti a $2\,\text{cos.}\,L:2c$ sono adattati alle due circostanze, quello che $\text{cos.}\,L:2c$ sia quantità negativa, questo che $\text{cos.}\,L:2c$ sia quantità positiva. I segni più e meno nella formola (*b*), che precedono $2\,\text{sen.}\,L:2c$, servono ai due casi, che $\text{sen.}\,L:2c$ sia negativo, o positivo.

La surrogazione dei nuovi valori ci somministra le due seguenti equazioni, che nella più semplice forma esprimono le curve dei due diversi generi analoghe a quelle, che sono nelle figure 3, e 4 delineate

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{\text{cos.}\,L:c}}{2\,\text{cos.}\,L:2c} + \frac{\text{cos.}\,z:c}{\text{cos.}\,L:2c}\ (19)$$

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{\text{cos.}\,L:c}}{2\,\text{sen.}\,L:2c} + \frac{\text{sen.}\,z:c}{\text{sen.}\,L:2c}\ (20).$$

Secondo ciò, che poco fa ho notato, i segni superiori nell' equazioni (19), e (20) suppongono $\text{cos.}\,L:2c$, $\text{sen.}\,L:2c$ grandezze negative, gl' inferiori le suppongono positive.

XV. Le cose, che sono per dire, richiedono, che rispettivamente alla formola (19) si dimostri essere

$$-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{-1 + \text{sen.}\,L:c + \text{cos.}\,L:c}{\sqrt{(\text{cos.}\,L:c.(1 - \text{sen.}\,L:c))}} = \frac{\mp 2\,\text{sen.}\,L:2c}{\sqrt{\text{cos.}\,L:c}}.$$

E primieramente la formola (12) ci dà per riguardo all' equazione (19) $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = -\sqrt{\left(\frac{1 - \text{sen.}\,L:c}{\text{cos.}\,L:c}\right)}$ $+\sqrt{\left(\frac{\text{cos.}\,L:c}{1 - \text{sen.}\,L:c}\right)} = \frac{-1 + \text{sen.}\,L:c + \text{cos.}\,L:c}{\sqrt{(\text{cos.}\,L:c\,.\,(1 - \text{sen.}\,L:c))}}$. Provo in secondo luogo, che s' avvera l' equazione $\frac{-1 + \text{sen.}\,L:c + \text{cos.}\,L:c}{\sqrt{(1 - \text{sen.}\,L:c)}} = \mp 2\,\text{sen.}\,L:2c$. Abbiamo dalla Trigonometria $2\,\text{sen.}\,L:c = 4\,\text{sen.}\,L:2c\,\text{cos.}\,L:2c$, e moltiplicando, e dividendo per $1 - \text{sen.}\,L:c$, $\frac{2\,\text{sen.}\,L:c - 2(\text{sen.}\,L:c)^2}{1 - \text{sen.}\,L:c} = 4\,\text{sen.}\,L:2c\,\text{cos.}\,L:2c$. Pongo in cambio d' uno de' due quadrati $-(\text{sen.}\,L:c)^2$ il suo valore $-1+(\text{cos.}\,L:c)^2$, e mi si presenta

$$\frac{-1+2\,\text{sen.}\,L:c-(\text{sen.}\,L:c)^2+(\text{cos.}\,L:c)^2}{1-\text{sen.}\,L:c} = 4\,\text{sen.}\,L:2c\,\text{cos.}\,L:2c.$$

Dall' annotazione (a) ricavasi $\mp 2\,\text{cos.}\,L:2c$ $= \frac{1-\text{sen.}\,L:c+\text{cos.}\,L:c}{\sqrt{(1-\text{sen.}\,L:c)}}$. Sostituiscasi questo valore, e dividendo poscia per lo stesso, ritroverassi

$$\frac{-1+\text{sen.}\,L:c+\text{cos.}\,L:c}{\sqrt{(1-\text{sen.}\,L:c)}} = \mp 2\,\text{sen.}\,L:2c,$$ e perciò $-e^{L:2c}$

$$+e^{-L:2c} = \frac{-1+\text{sen.}\,L:c+\text{cos.}\,L:c}{\sqrt{\left(\text{cos.}\,L:c.(1-\text{sen.}\,L:c)\right)}} = \frac{\mp 2\,\text{sen.}\,L:2c}{\sqrt{\text{cos.}\,L:c}}.$$

Corollarj, che si deducono dalla formola (19.)

XVI. Dalla formola (19.) si deducono i seguenti corollarj.

1. Ponendo nella detta formola l' assissa $z=0$, ne risulterà il valore dell' applicata $y=Cc$ in tutte le curve analoghe alla figura (3.), dalle quali viene l' asse AB tagliato in un numero pari di punti. Avremo pertanto $Cc:Aa=y:b=\mp\frac{\sqrt{(\text{cos.}\,L:c)}+1}{2\,\text{cos.}\,L:2c}=1:2\,\text{sec.}\,L:2c\mp$ $\text{sec.}\,L:c\sqrt{\text{cos.}\,L:c}$ (e).

Dal ridurre a computo rispettivamente a ciascuna curva del genere di quella della figura (3.) la frazione $L:c$ dipende la determinazione del valore della linea Cc.

(e) Stando come il seno tutto al coseno, così la secante al seno tutto, si verifica l' equazione $\text{sec.}\,L:2c = \frac{1}{\text{cos.}\,L:2c}$, o sia $\frac{1}{2}\,\text{sec.}\,L:2c = \frac{1}{2\,\text{cos.}\,L:2c}$.

Mi rifervo d' infegnare il metodo d' un tal calcolo al numero XIX, e feguenti.

2. Si prendano le differenze nella formola (19.), e fcopriraffi $2cdy:bdz$ cof. $L:2c = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c})\sqrt{(\text{cof. } L:c)}}{2}$ $-$ fen. $z:c$ (21.). Facciafi $dy:dz = 0$, e le radici dell' equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{(\text{cof. } L:c)} - 2$ fen. $z:c = 0$ determineranno i valori delle affiffe z, alle quali corrifpondono le maffime ordinate y nelle curve analoghe a quella nella figura (3) delineata. Secondo che quefte curve tagliano l' affe AB in 2, 4, 6, 8 punti ecc., i numeri delle predette radici faranno 1, 3, 5, 7 ecc. Una delle radici della noftra equazione fi è $z = 0$, e perciò nelle curve, di cui parliamo, afcende al maffimo l' ordinata Cc corrifpondente al punto medio C del cilindro AB.

3. Fatte $y = 0$, fi troveranno i punti 2, 4, 6, 8 ecc., nei quali l' affe AB vien tagliato dalle curve comprefe nell'equazione (19.). Avremo pertanto $\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c} + \frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}} = 0$. Mentre il cilindro ofcilla, quefti punti reftano immobili, e quindi fotto ponendo ai punti per efempio E, F (*fig.* 3.) due appoggi, non fono da effi fraftornate le vibrazioni del cilindro. La mentovata figura efprime il modo principale, onde fi vibra il cilindro, rendendo il fuono fra tutti il più grave. I punti ftabili E, F diftano dalle eftremità A, B del cilindro per le linee EA, FB, che come vedremo al numero XXX. poco calano dalla quarta parte della lunghezza AB. Negli ftrumenti formati di cilindri i punti E, F ripofano fu due fcannelli, effendo riufcito alla pratica col mezzo di replicati tentativi di accorgerfi d' una proprietà, fenza della quale non potrebbe la Mufica valerfi dei noftri corpi fonori.

4. Differenzio nuovamente la formola (21.), e fcopro

$4c^2 ddy{:}bdz^2 . \text{cof.}\, L{:}2c = (\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{(\text{cof.}\, L{:}c)} - 2\, \text{cof.}$ $z{:}c$ (22.). Abbiamo veduto al numero XI, che quando $ddy{:}dx^2 = ddy{:}dz^2 = 0$, è parimente nulla in quel tal sito la curvatura del cilindro, il momento della sua elasticità, ed altresì la somma dei momenti delle forze applicate al cilindro stesso o da un canto, o dall' altro. Si è pure fatta la riflessione, che ciò interviene nei punti estremi a, b del cilindro. Pongo nell'equazione (22) $ddy{:}dz^2 = 0$, e mi si affaccia $\pm e^{z:c} \pm ^{-z:c} - \frac{2\, \text{cof.}\, z{:}c}{\sqrt{\text{cof.}\, L{:}c}} = 0$. Rispettivamente ai punti estremi a, b è $z = \pm L{:}2$, e queste debbono essere due radici della nostra equazione. In fatti sostituendo in cambio di z i detti valori, e fatta la riflessione essere $\text{cof.} - L{:}2c = \text{cof.}\, L{:}2c$, troveremo in tutti e due i casi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp 2\, \text{cof.}\, L{:}2c}{\sqrt{\text{cof.}\, L{:}c}}$, equazione, che ho dimostrato esser vera al numero XIV nell' annotazione (*a.*)

Il numero delle radici dell' equazione, di cui trattiamo, s'eguaglia a quello de' punti 2, 4, 6, 8 ecc., ne' quali le curve tagliano l' asse AB. Detratte le due radici $z = \pm L{:}2$ le rimanenti 0, 2, 4, 6 ecc. servono a determinare nelle curve altrettanti flessi contrarj, ed in tali siti parimente s'eguaglia a nulla la curvatura del cilindro, e la somma dei momenti delle forze applicate a destra, o a sinistra.

Le due metà per esempio cEa, cFb (*fig.* 3.) delle nostre curve sono uguali, simili, e collocate in maniera, che segnate due assisse uguali CP, CQ, una positiva, e l' altra negativa, s' eguagliano le corrispondenti ordinate PM, QN, e sono amendue o positive, o negative. In prova di ciò faccia chi legge la riflessione, ch' essendo $\text{cof.}\, z{:}c = \text{cof.} - z{:}c$, nulla s' altera la formola (19.), mentre si cangia il segno all' incognita z; e quindi ad assisse uguali una positiva, e l' altra negativa ſi riferiſcono ordinate uguali, e ſimilmente ſituate.

Se dee pareggiare il nulla la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto eſtremo b delle forze applicate al cilindro $aEcFb$, egli è neceſſario, che le forze, ovvero le ordinate dalla noſtra curva ad eſſe proporzionali ſieno parte poſitive, e parte negative. Il perchè paſſando fra i due rami cEa, cFb la ſomiglianza teſtè deſcritta, ſi richiede indiſpenſabilmente, che ciaſcuno tagli l'aſſe AB almeno in un punto, come nella figura (3.) ſuccede.

La ſomma dei momenti in riguardo al punto M delle forze applicate alla porzione di cilindro aM è proporzionale a $ddy:dz^2 = ddy:dz^2$, o ſia alla quantità $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L:c$) — 2 coſ. $z:c$. Taglio $CQ = CP$, e ſcopro l'aggregato dei momenti riſpettivamente al punto N delle forze applicate alla parte $aEcN$ del cilindro come $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L:c$) — 2 coſ. — $z:c$. L'eguaglianza delle ritrovate grandezze moſtra, che ſono eguali le ſomme dei nominati momenti: ma l'aggregato dei momenti riſpettivamente al punto N delle forze applicate al cilindro $aEcN$ pareggia quello in relazione al punto M delle forze applicate al cilindro $bFcM$; dunque s'eguagliano le ſomme dei momenti a deſtra, e a ſiniſtra del punto M preſo ad arbitrio, i quali perciò fanno equilibrio e coll'elaſticità del cilindro nel ſito M, e tra loro, dimodochè non può ſeguire verun moto di rotazione.

5. Preſe le differenze nella formola (22.) avremo $4c^3 d^3y:bdz^3$. coſ. $L:2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L:c$) + 2 ſen. $z:c$ (23.). Dal numero X. raccoglieſi eſſere $ELf:M. d^3y:dx^3 = c^4 d^3y:dx^3 = \int ydx$. Nel numero XII. ho notato, che la ſomma delle ſorze applicate al cilindro aM è proporzionale all'aja $aMPA = \int ydx = \int -ydz$ S'inferiſca, che queſta ſomma ſerba la ragione di $c^4 d^3y:dx^3 = c^4 d^3y:-dz^3$, o ſia per l'equazione (23.) della quantità $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L:c$) — 2 ſen $z:c$. Qualora

s'abbia $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}(\text{cof.}\,L:c) - 2\,\text{fen.}\,z:c = 0$, s'eguaglierà a nulla l'aggregato delle forze applicate al cilindro aM. L'ultima formola ha fempre le tre radici $z = 0$, $z = L:2$, $z = - L:2$. Pofta $z = 0$, chiaramente fi fcopre effere $e^{0:c} \mp e^{-0:c} = \pm 1 \mp 1 = 0$, $2\,\text{fen.}\,0:c = 0$. Quefta radice mi addita eguagliarfi a nulla l'aggregato delle forze applicate alla metà aEc del cilindro, e che per confeguenza l'aja pofitiva aEA pareggia la negativa CEc. L'altre due radici $z = L:2$, $z = - L:2$ mi danno quella $(\pm e^{L:2c} \mp e^{-L:2c})\sqrt{}(\text{cof.}\,L:c) - 2\,\text{fen.}\,L:2c = 0$, quefta $(\pm e^{-L:2c} \mp e^{L:2c})\sqrt{}(\text{cof.}\,L:c) - 2\,\text{fen.} - L:c = 0$; e giacchè $- 2\,\text{fen.} - L:2c = 2\,\text{fen.}\,L:2c$, trovo in tutti e due i cafi $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \dfrac{\pm 2\,\text{fen.}\,L:2c}{\sqrt{}\,\text{cof.}\,L:c}$, equazione, che al numero XV. ho dimoftrato verificarfi. Dalla radice $z = L:2 = CA$ fi ricava, che una fomma di forze uguali a nulla s'applica alla porzione aM del cilindro, quando effa pareggia il nulla. Finalmente, e quefto è quel che più importa, la radice $z = - L:2 = CB$ ci manifefta effer nullo l'aggregato delle forze applicate a tutto il cilindro AB, cioè a dire che le forze negative s'eguagliano alle pofitive. In sì fatta guifa non potendo il cilindro girarfi intorno qualfivoglia punto M, ed effendo egualmente tirato per le direzioni oppofte Cc, cC, viene trattenuto immobile nella pofitura $aEcFb$ dalle forze MH uguali, e contrarie a quelle, che tentano di farlo reciprocare, e rimoffe effe forze MH, non concepifce altro moto, che di fola vibrazione.

XVII. Incontreremo nel corollario 5. dedotto dalla formola (20) l' equazione $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \dfrac{\mp\,\text{cof.}\,L:2c}{\sqrt{}\,\text{cof.}\,L:c}$, la di cui verità prefentemente dimoftro. L' equazione

(22) ci somministra rispettivamente alla formola (20)

$$e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\text{cos. } L:c}{1 + \text{sen. } L:c}\right)}$$

$$= \frac{1 + \text{sen. } L:c + \text{cos. } L:c}{\sqrt{(\text{cos. } L:c . (1 + \text{sen. } L:c))}}$$. Egli è d' uopo adunque provare adempiersi l' equazione $\frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1 + \text{sen. } L:c)}}$ $= \mp 2 \text{ cos. } L:2c$.

Moltiplico, e divido per $1 + \text{sen. } L:c$ il primo membro dell' equazione $- 2 \text{ sen. } L:c = - 4 \text{ cos. } L:2c$, onde s' abbia $\frac{-2\text{sen. } L:c - 2(\text{sen. } L:c)^2}{1 + \text{sen. } L:c} = - 4 \text{ cos. } L:2c . \text{ sen. } L:2c$. Il luogo d' uno de' due quadrati $-(\text{sen. } L:c)^2$ colloco il suo valore $- 1 + (\text{cos. } L:c)^2$, e trovo $\frac{-1-2\text{sen. } L:c-(\text{sen. } L:c)^2+(\text{cos. } L:c)^2}{1 + \text{sen. } L:c} = - 4 \text{ cos. } L:2c . \text{ sen. } L:2c$: ma per l' annotazione $(b) \pm 2 \text{ sen. } L:2c =$ $\frac{-1-\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. } L:c)}}$; dunque surrogando un tal valore, e dividendo poscia per lo stesso, scopriremo $\frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1 + \text{sen. } L:c)}} = \mp 2 \text{ cos. } L:2c$, e conseguentemente sarà $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(\text{cos. } L:c.(1+\text{sen. } L:c))}}$

$$= \frac{\mp 2 \text{ cos. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}.$$

Corollarj, che si deducono dalla formola (20).

XVIII. Dalla formola (20) ne nascono i corollarj seguenti.

1. La mentovata formola comprende tutte le curve analoghe

analoghe alla figura (4), che tagliano l' asse AB nel punto medio C. In fatti posta $z = CP = 0$, si trova $y = 0$. Le nostre curve hanno la comune proprietà, che a due assisse uguali CP, CQ, una positiva, e l' altra negativa corrispondono due ordinate uguali una positiva, e l' altra negativa, o a rovescio PM, QN. Se nell' equazione (20) $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cos}. L:c)}}{2 \text{ sen}. L:2c}$

$+ \frac{\text{sen}. z:c}{\text{sen}. L:2c}$ cangeremo il segno all' incognita z, scopriremo

$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) . \sqrt{(\text{cos}. L:c)}}{2 \text{ sen}. L:2c} + \frac{\text{sen}. - z:c}{\text{sen}. L:2c}$. Il paragone delle due espressioni dimostra, ch' essendo sen. $- z:c$ $= -$ sen. $z:c$, a pari assisse CP, CQ quella positiva, e questa negativa si riferiscono ordinate uguali PM, QN, ma affette da segni contrarj. Quindi le due metà di curva $CgEa$, $CkFb$ sono eguali, e simili, ma inversamente collocate e in riguardo all' assisse, e in riguardo all' ordinate. Lo stesso dicasi delle due porzioni di curva $aEgCkN$, $bFkCgM$. Si osservi, che a punti analoghi per esempio g, k di queste porzioni ci vanno applicate forze uguali e contrarie, e che per conseguenza la somma dei momenti rispettivamente ai punti N, M delle forze applicate ad esse porzioni sono fra loro eguali, ma una positiva, e l' altra negativa.

2. Col mettere $y = 0$, si determinano i punti 3, 5, 7, 9 ecc., nei quali le curve contenute nell' equazione (20) tagliano l' asse AB. Una tal ipotesi mi somministra la formola $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cos}. L:c)} + 2$ sen. $z:c = 0$, che va sempre fornita della radice $z = 0$, Mentre adunque il cilindro riposa equilibrato sopra un sostegno sottoposto al punto medio C, può ripiegarsi in tutte le curve espresse dall' equazione (20), e rendere i suoni ad esse curve confacenti, fra' quali il più gra-

ve ſi è quello, che produce il cilindro, quando ſi conforma alla curva della figura (4). Se gli appoggi cadono ſotto gli altri punti immobili E, F, ſi ſente lo ſteſſo ſuono. Chi vuol udire un ſuono chiaro e ſorte, avverta di non battere il cilindro ne' punti ſtabili E, C, F. I ſiti più rimoti dai punti fiſſi ſono i più opportuni per batterlo, e ſpecialmente i due G, K, ai quali corriſpondono le maſſime ordinate Gg, Kk. Non rieſce molto utile il percuotere il cilindro in vicinanza dei punti eſtremi A, B; perchè parte della forza s' impiega a far girare il cilindro intorno al più vicino ſoſtegno.

3. Differenzio la formola (20), onde s' abbia $4cdy:-bdz.\,\text{ſen.}\,L{:}2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ.}\,L:c)} - 2\,\text{coſ.}\,z{:}c$ (24). Le radici dell' equazione $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ.}\,L{:}c)} - 2\,\text{coſ.}\,z{:}c = 0$ determinano i punti per eſempio G, K, ai quali corriſpondono le maſſime ordinate Gg, Kk. I numeri di tali ordinate ſaranno 2, 4, 6, 8 ecc., ſecondo che le curve taglieranno l' aſſe AB in punti 3, 5, 7, 9 ecc.

4. Prendo di bel nuovo le differenze nell' equazione (24), e trovo $4c^2ddy:bdz^2.\,\text{ſen.}\,L:2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ.}\,L{:}c)} - 2\,\text{ſen.}\,z{:}c$ (25). Eſſendo la ſomma dei momenti in relazione al punto M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro proporzionale a $ddy{:}dz^2$, ſerberà altresì la ragione della grandezza $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ.}\,L{:}c)} - 2\,\text{ſen.}\,z{:}c$. In que' ſiti, dove la predetta ſomma s' eguaglia a nulla, egli è d' uopo che s' adempia l' equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ.}\,L{:}c)} - 2\,\text{ſen.}\,z{:}c = 0$. Ha ſempre queſta le tre radici $z = \pm L{:}2$, $z = 0$. Poſta $z = \pm L{:}2$, ſi trova $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \dfrac{\pm 2\,\text{ſen.}\,L{:}2c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L{:}c}}$, ſecondo a ciò che ho dimoſtrato nell' annotazione (*b*). La prima radice determina il punto A, e m' inſegna, che quando la parte aM del cilindro

pareggia il nulla, ed il punto *M* coincide col punto *a*, è parimente nulla la somma dei momenti rispettivamente al punto *M*, ovvero *a* delle forze ad essa parte applicate. Dalla seconda radice, che ci dà il punto *B*, si raccoglie uguagliarsi a nulla l'aggregato dei momenti in riguardo al punto *b* delle forze applicate a tutto il cilindro *agCkb*. La terza radice segna il punto *C*, e fa palese, che al nulla equivale la somma dei momenti per rapporto al punto *C* delle forze applicate alla metà del cilindro *aEgC*. Noto, che nel sito *C* interviene un flesso contrario, e che il numero di tali flessi s' eguaglia a quello dei punti, nei quali le curve tagliano l' asse *AB*, detratto il binario.

Essendo le forze applicate a' punti analoghi delle due metà *aEgC*, *bFkC* del cilindro sempre uguali e contrarie, egli è manifesto, che tali pure sono le somme dei momenti delle forze applicate ed esse metà rispettivamente al punto medio *C*. Le dette somme frattanto debbono essere amendue o positive, o negative; perchè hanno da stare in equilibrio e tra loro, e colla forza elastica del cilindro nel sito *C*. Le due condizioni, che sembrano assolutamente ripugnanti, si conciliano insieme, quando le mentovate somme s' eguagliano a nulla, come effettivamente succede.

E quindi cade in acconcio la riflessione, essere necessario che le nostre curve taglino l' asse almeno in tre punti. Se le forze applicate alla metà *aEgC* del cilindro hanno da formar equilibrio rispettivamente al punto *C*, fa di mestieri che siano parte positive e parte negative, e questa circostanza indispensabilmente richiede, che la curva *aEgC* sia parte al disotto, e parte al disopra dell' asse *AB*, e che per conseguenza l' intersechi almeno in un punto *E*. Lo stesso dicasi della curva *bFkC*, la quale dee tagliare l' asse *AB* almeno in un punto *F*. S' aggiunga il punto *C*, e si troveranno tre per lo meno i punti d' intersezione.

Segno $CQ = CP$, e cangiato il ſegno all' incognita z nella formola (25) $4c^2ddy : bdz^2$ ſen. $L : 2c =$ $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L : c$) $-$ 2 ſen. $z : c$, trovo $4c^2ddy : bdz^2$. ſen. $L : 2c = (\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L : c$) $-$ 2 ſen. $z{:}c$, o ſia ponendo in cambio di $-$ 2 ſen. $z{:}c$ la quantità eguale 2 ſen. $z{:}c$ $4c^2ddy : bdz^2$, ſen. $L : 2c =$ $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L : c$) $+$ 2 ſen. $z : c$. Paragonati inſieme gli omogenei di comparazione della formola (25), e dell' ultima, ſi ſcoprono eguali, ma uno negativo in riguardo all' altro. Eſprime il primo la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto qualunque M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro, e dal ſecondo vien dinotata la ſomma dei momenti in riguardo al punto N delle forze applicate alla parte di cilindro $aEgCkN$. I predetti aggregati adunque ſono eguali, e contrarj: ma altresì eguali e contrarj, come ho notato nel Corollario 1, ſono gli aggregati di momenti riſpettivamente ai punti N, M delle forze applicate alle porzioni di cilindro $aEgCkN$, $bFkCgM$; dunque paſſa una perfetta uguaglianza fra le ſomme dei momenti riferiti al punto M delle forze applicate alle parti di cilindro da eſſo punto M diviſe; ed eſſendo le nominate ſomme amendue coſpiranti, s' equilibrano mutuamente, dimodo che il cilindro non può far moto alcuno di giramento intorno qualſivoglia punto M ſcelto ad arbitrio.

5. Si differenzj la formola (25), onde s' abbia $4c^3d^3y : -bdz^3$. ſen. $L{:}2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L{:}c$)$+$2 coſ. $z{:}c$ (26). La ſomma delle forze applicate alla porzione di cilindro aM, che ha da eſſere proporzionale a $d^3y : -dz^3$, dee ſerbare altresì la ragione della quantità $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c})$. $\sqrt{}$ (coſ. $L{:}c$) $+$ 2 coſ. $z{:}c$. S' eguaglierà a nulla la detta ſomma, quando ſi verifichi l' equazione $e^{z:c} + e^{-z:c} = \dfrac{\mp 2 \text{ coſ. } z{:}c}{\sqrt{\text{coſ. } L{:}c}}$, a cui apparten-

gono le due radici $z = \pm L:2$. In fatti fostituito in luogo di z prima l' uno, indi l' altro valore, trovo in tutti e due i casi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp 2 \text{ cof. } L:2c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$, formola, che al numero XVII. ho provato effer vera. La radice $z = L:2$ m' iftruifce, che quando la porzione aM del cilindro eguaglia il nulla, s' applica ad effa un aggregato nullo di forze. Dalla radice $z = -L:2$ ci viene additato, equivalere al nulla la fomma delle forze applicate all' intero cilindro AB, il che interviene, qualora le forze negative pareggiano le pofitive.

Si cavi l' importantiffima confeguenza, che ancora quando il cilindro AB s' adatta alle curve del fecondo genere, dalle quali l' affe AB viene tagliato in un numero impari di punti, fi adempiono le due proprietà, ch' effo non poffa rivolgerfi intorno qualfivoglia punto M, e che fia del pari tirato da due fomme di forze uguali, e contrarie. Quindi le forze MH eguali ed oppofte a quelle, che tentano di farlo reciprocare, lo tengono immobile nel fito $aEgCkFb$, e tolte di mezzo effe forze, altro movimento, falvochè quello di vibrazione, non gli è permeffo di poter acquiftare.

Ridurre a computo la grandezza, o fia l' angolo $L:c$.

XIX. Prendo nuovamente per mano la formola (12) $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{fen. } L:c}{\text{cof. } L:c}$, e fatta la rifleffione, che tanto $e^{L:c}$, quanto $1 \mp \text{fen. } L:c$ fono fempre quantità pofitive, ne inferifco, che fotto tal claffe dee parimente riporfi cof. $L:c$. Fatto centro in C, col raggio $CA = 1$ (*fig.* 9) defcrivafi il circolo $ABab$, il quale dalle linee Aa, Bb venga partito in quattro quadranti. Se il cofeno CG dell' angolo ACF, o pure il cofeno Cg dell' angolo *ACf* hanno da eſſere poſitivi, il che ſuccede, quando la loro direzione è da *C* verſo *A*, ſi rende neceſſario che i lati *CF*, *Cf* cadano dentro i quadranti *ACB*, *ACb*. Per la qual coſa l' angolo *L:c* potrà ricevere infiniti valori, i quali ſtaranno o fra l' angolo nulla e l' angolo retto, o fra i tre e i quattro retti, o fra i quattro e i cinque, o fra i ſette e gli otto, o fra gli otto e i nove, o fra gli undici e i dodici, o fra i dodici e i tredici ecc. S' eſprima colla lettera q l' angolo retto, o ſia il quadrante di circolo, il cui raggio $= 1$, e chiamato ϕ quell' angolo minor del retto, per cui l' angolo *L:c* differiſce da un determinato numero di retti, ci ſi preſenteranno le ſeguenti equazioni

1. $L{:}c = q - \phi$
2. $L{:}c = 3q + \phi$
3. $L{:}c - 5q - \phi$
4. $L{:}c = 7q + \phi$
5. $L{:}c = 9q - \phi$
6. $L{:}c = 11q + \phi$
7. $L{:}c = 13q - \phi$

ecc.

Le formole, cui ſtanno a lato i numeri impari, aſſegnano all' angolo $L{:}c = ACF$ valori tali, che il lato *CF* cade ſempre dentro il quadrante *ACB*. Al contrario le formole ſegnate coi numeri pari attribuiſcono all' angolo $L{:}c = ACf$ quelle grandezze, mercè le quali il lato *Cf* è coſtantemente compreſo dentro il quadrante *ACb*.

Al punto *A* del circolo *ABab* conduco la tangente indefinita *HAh*, e diviſi per metà ne' punti *I*, *i* i due angoli *ACF*, *bCf*, ciaſcun de' quali vien dinotato dalla ſpecie ϕ, delineo le ſecanti *CIH*, *Cih*. Deſcritte le linee *FG*, *fg* parallele a *Bb*, *FN*, *fn* parallele ad *Aa*, ſi tirino le rette *FB*, *Fb*, *fb*, *fB*.

Inſiſtendo ſopra lo ſteſſo arco *FB* i due angoli *FbB* alla circonferenza, FCB al centro, si corrispondono nella ragione $1:2$; ma per la costruzione l' angolo FCB è doppio dell' HCB; dunque passa eguaglianza fra gli angoli FbA, HCB. Si osservi eguagliarsi gli angoli alterni HCB, CHA, e si deduca l' egualità degli angoli FbM, CHA nei triangoli rettangoli FbM, CHA, i quali perciò sono simili, e ci somministrano l'analogia $bM:MF::HA:AC$. Giacchè $FG=MC$ è il seno dell' angolo $ACF=L{:}c$, scopriremo $bM=1+\text{sen.}\,L{:}c$. Abbiamo inoltre $MF=\text{cos.}\,L{:}c$, ed altresì $HA=\text{cos.}\,\frac{1}{2}\phi$, cioè a dire la linea HA eguale alla cotangente dell' angolo BCI metà del $BCF=\phi$. Ecco adunque l' espressione analitica della sovrapposta analogia $1+\text{sen.}\,L{:}c:\text{cos.}\,L{:}c::\text{cos.}\,\frac{1}{2}\phi:1$, da cui deriva l' equazione

$$\frac{1+\text{sen.}\,L{:}c}{\text{cos.}\,L{:}c}=\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\phi.$$ Abbiamo superiormente notato, che la formola $e^{L:c}=\frac{1+\text{sen.}\,L:c}{\text{cos.}\,L:c}$ ci guida all'equazione (20) propria delle curve del secondo genere, che tagliano l' asse AB (*fig.* 4) in un numero impari di punti. S' inferisca pertanto, che a tali curve servono gli angoli ACF (*fig.* 9), il cui lato CF cade dentro il quadrante ACB, e che s' eguagliano ad angoli retti 1, 5, 9, 13 ecc. meno l' angolo ϕ.

Collo stesso progresso dimostrerò verificarsi l'analogia $Bm:mf::hA:AC$. Noto ch' essendo negativo il seno $gf=Cm$ dell'angolo $ACf=L{:}c$, la linea Bm s' eguaglia ad $1-\text{sen.}\,L{:}c$; e quindi la premessa analogia s' esprimerà così

$1-\text{sen.}\,L{:}c:\text{cos.}\,L{:}c::\text{cot.}\,\frac{1}{2}\phi:1$, e ne risulterà l' equazione $\frac{1-\text{sen.}\,L:c}{\text{cos.}\,L:c}=\text{cot.}\,\frac{1}{2}\phi$. Fatta l' avvertenza, che dall' equazione $e^{L:c}=\frac{1-\text{sen.}\,L:c}{\text{cos.}\,L:c}$ deriva la formola (19) ſpettante alle curve del primo genere, che interſecano l'aſſe *AB* (*fig.* 3.) in un numero pari di punti; ſi deduca ſervire a sì fatte curve gli angoli *ACf* (*fig.* 9), il cui lato *Cf* ſta dentro il quadrante *ACb*, e che pareggiano angoli retti 3, 7, 11 ecc. più l'angolo ϕ.

Le coſe dette ci moſtrano a dito adempierſi l'equazione $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} = \text{cot.}\, \frac{1}{2}\phi$, la quale comprende le curve del primo, e del ſecondo genere. Facendo tranſito dai numeri ai logaritmi, e richiamando a memoria eſſere log. $e = 1$, troveremo $L:c = \text{log. cot.}\, \frac{1}{2}\phi$.

XX. Prima di paſſar oltre, egli è d'uopo provare, che il valore $L:c = q - \phi$ non può convenire a veruna curva del ſecondo genere, alla quale ad un cilindro, che oſcilla, ſia conceſſo adattarſi. Eſſendo l'angolo $L:c = q - \phi$ minore del retto, ſcopreſi poſitivo il ſeno dell'angolo $L:2c$. Qualmente ho avvertito al numero XIV. i ſegni inferiori della formola (20.) ſuppongono ſen. $L:2c$ grandezza poſitiva. Nel caſo adunque, che preſentemente ſi eſamina, avremo $\frac{2y}{b} = \frac{(e^{z:c} - e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L:c)}}{2\, \text{ſen.}\, L:2c} + \frac{\text{ſen.}\, z:c}{\text{ſen.}\, L:2c}$. Poſto $L:c = q - \phi$, non può l'ordinata y pareggiare il nulla, ſalvochè nella circoſtanza, che ſia $z = 0$. Quindi non s'adempirebbe quello, che nel Corollario 4. del numero XVIII. ho dimoſtrato dover ſuccedere, che la curva (*fig.* 4.) *aEgCkFb* interſechi l'aſſe *AB* almeno in tre punti. Sia primieramente z maggiore del nulla; e giacchè il maſſimo valore, che poſſa attribuirſi a z, ſi è $L:2$, ci accorgeremo eſſere ſempre poſitivo ſen. $z:c$, ed altresì il termine $\frac{\text{ſen.}\, z:c}{\text{ſen.}\, L:2c}$. Conciosſiachè $e = 2,7182818$, ſcopriremo le due quantità $e^{z:c}$, $e^{-z:c}$ l'una maggiore, e l'altra minore dell'unità, ed

ed inferiremo, che il termine $\frac{(e^{z:c}-e^{-z:c}).\sqrt{\text{cof. } L:c}}{2 \text{ fen. } L:2c}$
fi mantiene pofitivo coftantemente. Conchiudafi, che all' affiffa z pofitiva corrifponderebbe l'ordinata y affermativa; effendo $2y:b$ uguale alla fomma di due termini fempre pofitivi, e che contro la natura della noftra equazione la curva $CgEa$ caderebbe tutta al difotto del femiaffe CA, nè lo taglierebbe in alcun punto medio fra C ed A.

In fimil guifa dimoftrerò, che fupponendo z minore del nulla, vale a dire negativa, farebbe fempre negativa l'ordinata y, e ftando tutta la curva $CkFb$ al difopra del femiaffe CB, non l' interfecherebbe in verun punto medio fra C e B.

XXI. Efclufo il valore $L:c = q - \phi = \text{log. cof. } \frac{1}{2}\phi$, regiftro nella feguente tavola quelli, che fono confacenti all'equazioni (19) e (20), o fia alle curve del primo, e del fecondo genere.

1. $L:c = 3q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
2. $L:c = 5q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
3. $L:c = 7q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
4. $L:c = 9q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
5. $L:c = 11q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
6. $L:c = 13q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$

ecc.

Si trova il logaritmo iperbolico della cotangente d'un qualunque angolo, prendendo il lagaritmo delle tavole, fottraendo il logaritmo del feno tutto, e moltiplicando il refiduo per 2, 3025851 (*f*). Per alleg-

Ppp

(*f*) I logaritmi dei feni, e delle tangenti, e quelli dei numeri appartengono alla fteffa logiftica, e differifcono folo nel protonumero, a cui fi affegna il logaritgerire una tal fatica, torna in acconcio il nuovamente ricorrere ai logaritmi. Sia u il logaritmo iperbolico della cotangente dell' angolo $\frac{1}{2}\phi$. Prendaſi dalle tavole il logaritmo d' eſſa cotangente, e fatta la detrazione

---

mo nulla. I primi logaritmi hanno per protonumero $\frac{1}{100000}$, cioè a dire l' unità diviſa pel ſeno tutto: e quindi all' unità tocca il logaritmo 5, 0000000. I ſecondi logaritmi accettano ſiccome protonumero l' unità. Si cavi la conſeguenza, che ſi fa tranſito da quei logaritmi a queſti, ſcemando per 5, 0000000 i logaritmi delle tavole dei ſeni.

Si chiamino T, t le cotangenti, l' una preſa dalle tavole, e l' altra relativa ad un circolo di raggio $= 1$, ambe corriſpondenti allo ſteſſo angolo $\frac{1}{2}\phi$, le quali debbono ſtare come i raggi 100000, 1. Avremo pertanto $\frac{T}{100000} = t$, e giacchè $1 : \frac{1}{100000} :: T : t$, ſarà paſſando ai logaritmi $\log. \frac{1}{100000} + \log. T - \log. 1 = \log t$: ma nelle tavole dei ſeni $\log. \frac{1}{100000} = 0$, $\log. 1 = 5,0000000$; dunque $\log. T - 5,0000000 = \log. t$. Ho fatta l' oſſervazione, che ſi fa paſſaggio dai logaritmi delle tavole de' ſeni a quelli dei numeri, minorando i primi per 5, 0000000. Il perchè ſe log. T ſi ſeguiti a prendere nelle tavole dei ſeni, e log. t ſi prenda nelle tavole dei numeri, avremo $\log. T - 10,0000000 = \log. 1$.

Tramuteremo i logaritmi comuni in iperbolici premeſſa la rifleſſione, che riconoſcendo entrambi per protonumero l' unità, i logaritmi d' un qualunque numero ſerbano la proporzione dei logaritmi d' un numero da-del logaritmo del ſeno tutto, quello che avanza ſi chiami v. Eſſendo adunque $u = 2, 3025851 . v$, avremo prendendo nelle tavole i logaritmi dei numeri, $\log. u = \log. v + 0, 36221571$, e giacchè $u = nq \pm \phi$, ſarà altresì $\log. u = \log. (uq \pm \phi)$. Per determinare queſt' ultimo logaritmo, l' angolo ϕ deve eſprimerſi in parti del raggio nella ſteſſa guiſa, che parimente in parti del raggio ſi dinota l' angolo retto $q = 1, 5707963$. Otterremo l'intento, ſe ridurremo l'angolo ϕ in minuti ſecondi, e dal logaritmo di cotal numero ſottrerremo coſtantemente $5, 3144251$ (g). Così ne riſulterà $\log. \phi$, il quale facendo ritorno ai numeri, ci ſomminiſtrerà il valore dell' angolo ϕ, da cui dipende quello dell' angolo $L{:}c = u = nq \pm \phi$. Ho detto, che dal logaritmo del numero dei ſecondi componenti l' angolo ϕ

---

to. Ora i logaritmi comune, ed iperbolico del numero 10 ſono $1 ; 2, 3025851$; dunque facendo
$1 : 2, 3025851 :: \log. T - 10, 0000000 :$
$(\log. T - 10, 0000000) . 2, 3025851$, il quarto termine eſprimerà il logaritmo iperbolico cercato conforme alla regola da me data.

(g) Abbiamo notato eſſere l' angolo retto
$q = 1, 5707963$ parti del raggio $= 1$. Lo ſteſſo angolo s' eguaglia a ſecondi 324000. Sia N il numero dei minuti ſecondi, ond' è compoſto l' angolo ϕ, e dall' analogia $324000 : 1, 5707963 :: N : \phi$ ricaveremo il valore dell' angolo ϕ eſpreſſo in parti del raggio, cioè a dire

$$\frac{N . 1, 5707963}{324000} = \phi,$$ o facendo tranſito ai logaritmi

$\log. N + \log. 1, 5707963 - \log. 324000 = \log. \phi$: ma $\log. 324000 = 5, 5105450$, $\log. 1, 5707963 = 0, 1961199$, e $5, 5105450 - 0, 1961199 = 5, 3144251$; dunque $\log N - 5, 3144251 = \log \phi$, come dovea dimoſtrarſi.

dee ſottrarſi 5, 3144251. Concioſſiachè nei computi, che ſono per fare, troveremo ſempre il primo logaritmo minore del ſecondo, s' accreſca la caratteriſtica di quello per 10, e fatta poſcia la ſottrazione, ne proverrà un logaritmo, la cui caratteriſtica ſupererà la vera per 10. Queſt' aumentazione ci addita, che in cambio di ſcrivere il numero corriſpondente al noſtro logaritmo nella ſede, che richiede la caratteriſtica riſultante dalla ſottrazione, lo dobbiamo traſportare dieci ſedi all' indietro.

XXII. Fatte queſte neceſſarie avvertenze per agevolare, e dedurre i calcoli rettamente, non ſarà difficile l' aſſegnare col mezzo delle approſſimazioni il valore dell' angolo ϕ riſpettivamente a qualſivoglia ſpecie di oſcillazioni. Imperciocchè attribuendo a ϕ alquanti valori ad arbitrio, e determinando col computo $nq \pm \phi$, e log. coſ. $\frac{1}{2}\phi$, ſi ſcopriranno i limiti, dentro de' quali ſta il vero valore dell' angolo ϕ; e ſe tali limiti ſono troppo rimoti, ſe ne troveranno de' più vicini, e da queſti finalmente ſi dedurrà il giuſto valore dell' angolo mentovato. Pongo ſotto gli occhi di chi legge i calcoli ſino al numero 6, e noto eſſer inutile il continuarli più avanti; atteſochè l' angolo ϕ diviene così menomiſſimo, che ſi può fiſicamente ſupporre $L:c = nq$.

Computo pel numero I. $L:c = 3q + \phi = \log.\cot.\frac{1}{2}\phi$.

$\phi =$	1°, 0, 40″	$\phi =$	1°, 0, 41″
in min. fec. $=$	3 640	in min. fec. $=$	3 641
log. $=$	3, 5611014	log. $=$	3, 5612207
fottra	5, 3144251	fottra	5, 3144251
log. $\phi =$	8, 2466763	log. $\phi =$	8, 2467956
$\phi =$	0, 0176472	$\phi =$	0, 0176521
$3q =$	4, 7123890	$3q =$	4, 7123890
$L:c = 3q + \phi =$	4, 7300262	$L:c = 3q + \phi =$	4, 7300411

$\frac{1}{2}\phi =$	30′, 20″	$\frac{1}{2}\phi =$	30′, 20″$\frac{1}{2}$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi =$	12, 0543425	log. cot. $\frac{1}{2}\phi =$	12, 0542232
$v =$	2, 0543425	$v =$	2, 0542232
log. $v =$	0, 3126728	log. $v =$	0, 3126476
aggiungi	0, 3622157	aggiungi	0, 3622157
log. $u =$	0, 6748885	log. $u =$	0, 6748633
$L:c = u =$	4, 7302984	$L:c = u =$	4, 7300240
errore $=$	+ 2622	errore $=$	− 171
altro errore $=$	− 171		
differenza $=$	2793.		

Differenza $=$ 1″ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciafi $2793 : 2622 :: 1'' : \frac{2622''}{.2793}$ $= 0, 9388''$, ed il quarto termine s'eguaglierà a quella quantità, che aggiunta a 1°, 0, 40″ mi dà il vero valore dell' angolo

$\phi =$	1°,0′,40, 9388″
in min. fec. $=$	3640, 9388″
log. $=$	3, 5612132
fottra	5, 3144251
log. $\phi =$	8, 2467881
$\phi =$	0, 0176518
$3q =$	4, 7123890
$L:c = 3q + \phi =$	4, 7300408

grandezza adequatamente giufta dell' angolo $L:c$ efpreffo in parti del raggio $= 1$.

Computo pel numero 2. $L{:}c = 5q - \phi \log. \cot. \frac{1}{2}\phi$.

$\phi =$	$0,\ 2',\ 40''$	$\phi =$	$0,\ 2',\ 41''$
in min. sec. $=$	$1\ \ 60$	in min. sec. $=$	$1\ \ 61$
log. $=$	$2,2041200$	log. $=$	$2,2068259$
sottra	$5,3144251$	sottra	$5,3144251$
$\log.\phi =$	$6,8896949$	$\log.\phi =$	$6,8924008$
$\phi =$	$0,0007757$	$\phi =$	$0,0007806$
$5q =$	$7,8539816$	$5q =$	$7,8539816$
$L{:}c = 5q - \phi =$	$7,8532059$	$L{:}c = 5q - \phi =$	$7,8532010$

$\frac{1}{2}\phi =$	$0,\ 1',\ 20''$	$\frac{1}{2}\phi =$	$0,\ 1',\ 20''\frac{1}{2}$
$\log.\cot.\frac{1}{2}\phi =$	$13,4113351$	$\log.\cot.\frac{1}{2}\phi =$	$13,4086292$
$v =$	$3,4113351$	$v =$	$3,4086292$
$\log. v =$	$0,5329244$	$\log. v =$	$0,5325798$
aggiungi	$0,3622157$	aggiungi	$0,3622157$
$\log. u =$	$0,8951401$	$\log. u =$	$0,8947955$
$L{:}c = u =$	$7,8548897$	$L{:}c = u =$	$7,8486600$
errore $=$	$+\ \ 16838$	errore $=$	$-\ \ 45410$
altro errore $=$	$-\ \ 45410$		
differenza $=$	62248		

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciasi $62248 : 16838 :: 1'' : \frac{16838''}{62248} = 0,\ 27050''$ quantità da aggiugnersi a $0,\ 2',\ 40''$ onde s' abbia il giusto valore dell' angolo

$\phi =$	$0,2',40,27050''$
in min. sec. $=$	$160,27050$
log. $=$	$2,2048536$
sottra	$5,3144251$
$\log.\phi =$	$6,8904285$
$\phi =$	$0,0007770$
$5q =$	$7,8539816$
$L{:}c = 5q - \phi =$	$7,8532046$

misura sisicamente esatta dell' angolo $L{:}c$ espresso in parti del raggio.

Computo pel numero 3.	$L:c = 7q + \phi = \log.\cot.\frac{1}{2}\phi$
$\phi = 0,\ 0,\ 6''$	$\phi = 0,\ 0,\ 7''$
$\log. = 0,7781512$	$\log. = 0,8450980$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
$\log.\phi = 5,4637261$	$\log.\phi = 5,5306729$
$\phi = 0,0000291$	$\phi = 0,0000339$
$7q = 10,9955743$	$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956034$	$L:c = 7q + \phi = 10,9956082$

$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 0,\ 3''$	$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 0,\ 3\frac{1}{2}''$
$\log.\cot.\frac{1}{2}\phi = 14,8373039$	$\log.\cot.\frac{1}{2}\phi = 14,7703571$
$v = 4,8373039$	$v = 4,7703571$
$\log.v = 0,6846034$	$\log.v = 0,6785509$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $= 0,3622157$
$\log.u = 1,0468191$	$\log.u = 1,0407666$
$L:c = u = 11,1383051$	$L:c = u = 10,9841553$
errore $= +\ 1427017$	errore $= -\ 113529$
altro errore $= -\ 113529$	
differenza $= 1540546$	

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciaſi $1540546 : 1427017 :: 1'' : \frac{1427017''}{1540546} = 0,\ 9263060''$ porzione di ſecondo, che aggiunta a $0,\ 0,\ 6''$, mi ſomminiſtra la miſura quanto baſta dell' angolo

$$\phi = 0, 0', 6, 9263060''$$

$\log. = 0,8405017$
ſottra $5,3144251$
$\log.\phi = 5,5260766$
$\phi = 0,0000336$
$7q = 10,9955743$

$L:c = 7q + \phi = 10,9956079$ grandezza fiſicamente eſatta dell' angolo $L:c$ eſpreſſo in parti del raggio. Si troverebbe con maggior preciſione il valore dell' angolo

$\phi = 6,9202852''$, ſupponendo $L:c = u = 10,99560795$ ed indi retrocedendo con metodo contrario a quello da me tenuto, ſino a tanto che ci ſi preſenta il valore di $\frac{1}{2}\phi$ eſpreſſo in ſecondi. Nei numeri ſeguenti a cagione della ſomma picciolezza dell' angolo ϕ, mi ſervirò di un tale artificio.

Computo pel numero 4.	$L:c = 9q - \phi = \text{log. cot.}\ \frac{1}{2}\phi$.
$\phi = 0, 0, \frac{2}{7}''$	$\phi = 0, 0, \frac{1}{3}''$
log. $= -0,5440680$	log. $= -0,4771212$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
$-5,8584931$	$-5,7915463$
aggiungi $10,0000000$	$10,0000000$
log. $\phi = 4,1415069$	log. $\phi = 4,2084537$
$\phi = 0,000001385$	$\phi = 0,000001616$
$9q = 14,137166941$	$9q = 14,137166941$
$L:c = 9q - \phi = 14,137165556$	$L:c = 9q - \phi = 14,137165325$

$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, \frac{1}{2}''$	$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, \frac{1}{6}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 16,1595232$	log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 16,0925764$
$v = 6,1595232$	$v = 6,0925764$
log. $v = 0,7895471$	log. $v = 0,7848010$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $0,3622157$
log. $u = 1,1517628$	log. $u = 1,1470167$
$L:c = u = 14,182828217$	$L:c = u = 14,028676138$
errore $= + 45662661$	errore $= - 108489187$
altro errore $= - 108489187$	
differenza $= 154151848$	

Differenza $= 231$ fra i due valori del angolo ϕ eſpreſſo in parti del raggio. Facciaſi $154151848 : 45662661 :: 231 : 68$ quantità che aggiunta a 1385 mi dà l' aggiuſtato valore dell' angolo

$\phi = 0,000001453$

$\phi = 0,000001453$ Sottraendo questo da $9q$, resta
$L{:}c = 9q - \phi = 14,137165488$. Pongasi adunque

$L{:}c = u = 14,137165488$
$\log. u = 1,1503623$
sottra $\quad 0,3622157$
$\log. v = 0,7881466$
$v = 6,1396921$
$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 16,1396921$
$\frac{1}{2}\phi = 0,1495316''$
$\phi = 0,2990633''$ grandezza esattissima dell' angolo ϕ espresso in secondi.

Computo pel numero 5. $\quad L{:}c = 11q + \phi = \log. \cot. \frac{1}{2}\phi$.

Riducendo a calcolo nel presente, e nel seguente numero il valore dell' angolo $L{:}c$, trascuro siccome rispettivamente minimo l' angolo ϕ.

$L{:}c = u = 17,2787596$
$\log. u = 1,2375125$
sottra $\quad 0,3622157$
$\log. v = 0,8752968$
$v = 7,5046691$
$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 17,5046691$
$\frac{1}{2}\phi - 0,006461837''$
$\phi = 0,012923673''$ misura adequatamente giusta dell' angolo picciolissimo ϕ espresso in secondi.

Computo pel numero 6. $\quad L{:}c = 13q - \phi = \log. \cot. \frac{1}{2}\phi$.

$L{:}c = u = 20,4203522$
$\log. u = 1,3100632$
sottra $\quad 0,3622157$
$\log. v = 0,9478475$
$v = 8,8684449$
$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 18,8684449$
$\frac{1}{2}\phi = 0,000279242''$
$\phi = 0,000558483''$ valore fisicamente esatto dell' angolo ϕ espresso in parti di minuto secondo.

Dispongo ordinatamente nella tavola, che segue, le sei determinate grandezze dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio.

Valori dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio $= 1$.

(1) $L:c = 3q + \phi =$	4,7300408	log. = 0, 6748648
(2) $L:c = 5q - \phi =$	7,8532046	log. = 0, 8950469
(3) $L:c = 7q + \phi =$	10,9956079	log. = 1, 0412192
(4) $L:c = 9q - \phi =$	14,1371655	log. = 1, 1503623
(5) $L:c = 11q + \phi =$	17,2787596	log. = 1, 2375125
(6) $L:c = 13q - \phi =$	20,4203522	log. = 1, 3100632
ecc.		ecc.

Determinare il numero di vibrazioni fatte da un Cilindro nel tempo d'un minuto secondo rispettivamente a ciascun modo, in cui può oscillare.

XXIII. Si chiami m il numero, a cui s'eguaglia l' angolo $L:c$, onde s' abbia $L:c = m$, e conseguentemente $L = mc$. E conciossiachè al numero XIII. s'è posto $c^4 = ELf:M$, si scoprirà $L^4 = m^4 ELf:M$, e perciò $f = ML^3 : m^4 E$. Abbiamo stabilito al fine del numero III. $E = KrM^2 : g^2 L^2$. Fatta la surrogazione d'un tal valore, troveremo $f = L^5 g^2 : Km^4 Mr$. Dalla prima equazione esprimente la lunghezza f del pendolo semplice isocrono impareremo serbar essa lunghezza la proporzione composta, diretta delle masse, e del cubo delle lunghezze dei cilindri, ed inversa del quadrato — quadrato del numero m, e della forza E, il cui valore si determina col mezzo degli esperimenti, qualmente ho insegnato nei numeri V. VI. e VII. La seconda espressione ci addita, che la lunghezza f del pendolo semplice isocrono sta in ragione composta, diretta della quinta potestà delle lunghezze L dei cilindri, e del quadrato della loro gravità specifica g, ed inversa del quadrato — quadrato del numero m, della massa M, e della rigidità r della materia, onde sono formati. Non ho fatta menzione del coefficiente K, perchè ho già notato al numero III. mantenersi sempre costante in tutti i cilindri.

Essendo la gravità specifica eguale alla massa divisa pel volume, ed essendo la base d'un cilindro proporzionale al quadrato del suo diametro, avremo g come $M:LD^2$, e per conseguenza M come gLD^2. Sostituiti nella nostra seconda espressione della lunghezza f del pendolo semplice isocrono prima in cambio di g, poscia in cambio di M, i valori proporzionali, troveremo f come $L^3M:m^4D^4r$, f come $L^4g:m^4D^2r$.

Dalle quattro espressioni generali si dedurranno agevolmente le particolari. Se per esempio due cilindri sieno composti della stessa materia, e si vibrino similmente, ripiegandosi in curve, che taglino l'asse in numero eguale di punti; saranno costanti i valori delle specie g, r, m, e si scoprirà f come $L^4:D^2$, cioè a dire le lunghezze dei pendoli semplici isocroni in ragione composta, diretta quadruplicata delle lunghezze dei cilindri, ed inversa duplicata dei loro diametri.

XXIV. Sia h la lunghezza del pendolo semplice, che nel fare una vibrazione c'impiega un minuto secondo, dimodochè sia $h=3, 16625$ piedi del Reno, o pure $h=$ piedi 3 linee 8, 57 del piede Reale di Parigi: e giacchè le durate delle oscillazioni serbano la ragione sudduplicata delle lunghezze dei pendoli, il tempo d'una vibrazione d'un cilindro s'eguaglierà a secondi

$\sqrt{f}:\sqrt{h}=\frac{1}{m^2}\sqrt{(ML^3:hE)}=\frac{1}{m^2}\sqrt{(L^5g^2:KhMr)}$. Conseguentemente avremo il numero delle vibrazioni fatte dal cilindro in un minuto secondo, o sia il suono d'esso cilindro, ch'io chiamo $S=m^2\sqrt{(hE:ML^3)}=m^2\sqrt{(KhrM:L^5g^2)}$.

Se nell'espressione seconda in vece di g, o di M soſtituiremo i valori proporzionali $M{:}LD^2$, gLD^2, ci ſi preſenterà S come $m^2\sqrt{(rD^4{:}ML^3)}$, come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r{:}g)}$.

La formola $S = m^2\sqrt{(hE{:}ML^3)}$ ſerve per iſcoprire il preciſo numero di vibrazioni, che fa un cilindro nel tempo d'un minuto ſecondo, potendoſi determinare il valore della forza E col mezzo degli eſperimenti, la grandezza della maſſa M col mezzo del peſo, la lunghezza L con diligente miſura, ed eſſendo cogniti la lunghezza h del pendolo a ſecondi, ed il numero m, qualmente che il cilindro ſi vibra piuttoſto in un modo, che nell'altro.

L'ultima maniera, colla quale ſi dinotano i ſuoni dei cilindri, cioè S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$, ci mette ſotto degli occhi nel ſuo più ſemplice aſpetto la legge, che dà regola ai ſuoni ſteſſi, i quali ſtanno in proporzione compoſta, diretta duplicata del numero m, ſemplice de' diametri D dei cilindri, dimezzata della rigidità r della materia che li compone, e reciproca duplicata delle loro lunghezze L, e dimezzata delle loro gravità ſpecifiche g.

Corollarj, che ſi deducono dalla formola S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r{:}g)}$.

XXV. Dal predetto ultimo modo d'eſprimere i ſuoni dei cilindri s'inferiſcono parecchi corollarj.

1. Cavo ſubito quella conſeguenza, che ha l'aria di paradoſſo, e che da qualcuno non ſi crederebbe, ſe non veniſſe confermata dall'eſperienza, ed è ch' eſſendo il reſto pari, i cilindri ſono tanto più acuti, quanto il diametro loro è maggiore. Si dileguerà per altro l'apparente ripugnanza qualora ſi rifletta, che la forza elaſtica E creſce all'aumentarſi del diametro D, avendola dimoſtrata proporzionale a D^4r nel numero III. e creſce a proporzione più di quello s'ingrandiſca la maſſa M, laonde nell'ipoteſi, che preſentemente ſi conſidera, abbiamo $S = m^2\sqrt{(hE{:}ML^3)}$ proporzionale a D.

2. Postochè due cilindri oscillino similmente adattandosi a curve, che intersecano l'asse in numero eguale di punti, sarà costante la specie m, e ne risulterà S come $\frac{D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

3. Nella stessa supposizione troveremo la rigidità r come $S^2L^4g:D^2$. Col mezzo dei suoni adunque si può scoprire la proporzione fra le rigidità di varie materie, le quali rigidità, quando i cilindri sieno egualmente lunghi e grossi, accetteranno la ragione S^2g, che si compone della duplicata dei suoni, e della semplice delle gravità specifiche. Queste mie determinazioni si accordano con ciò, che ha dimostrato il Co: *Jacopo Riccati* mio Padre nella sua Dissertazione intorno le leggi delle forze elastiche inserita nel *Tomo I. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna*, e ristampata nel Tomo III. delle sue Opere.

4. Se due cilindri, che si vibrano similmente, saranno formati della stessa materia, onde sieno egualmente rigidi, ed egualmente gravi in ispezie, o pure se in essi le rigidità staranno come le gravità specifiche, scopriraffi S come $D:L^2$, cioè a dire i suoni in ragione composta, diretta dei diametri dei cilindri, ed inversa duplicata delle loro lunghezze.

5. Se inoltre i due cilindri saranno simili, avremo S come $1:L$, o pure S come $1:D$, vale a dire i suoni dei cilindri simili si riguarderanno nella ragione reciproca dei lati omologhi. Questa legge abbraccia tutti i corpi simili della stessa materia formati, non eccettuate le corde, per l'esatta similitudine delle quali non basta, che i diametri sieno proporzionali alle lunghezze, ma bisogna altresì che le loro particole sieno ugualmente rigide, il che interviene, quando le corde si stendono con forze in ragione delle loro basi. Cosa maravigliosa si è, che si dia un caso, nel quale s'unifcano in un solo i canoni cotanto diversi, donde prendono regola i suoni di varj corpi differenti nella strut-

tura, e nelle circoſtanze, che nelle loro vibrazioni influiſcono.

6. I ſuoni dello ſteſſo cilindro ſi riferiſcono nella proporzione dei quadrati m^2. Eſſendo $m = nq \pm \phi$, ſe gli angoli ϕ foſſero talmente piccioli, che ſi poteſſero totalmente traſcurare, abbraccierebbero i ſuoni il rapporto dei quadrati n^2: e giacchè n s'eguaglia in ſerie ai numeri impari 3, 5, 7, 9, 11, 13 ecc., i predetti ſuoni ſarebbero come i quadrati di tali numeri, cioè a dire come 9, 25, 49, 81, 121, 169 ecc. Meſſi a computo gli angoli ϕ, e principalmente il più grande, che corriſponde al numero (1.), ſi trovano alterate per poco più di mezzo comma $\frac{81}{80}$, il cui log. $= 53950$, le proporzioni $9:25, 9:49, 9:81$ ecc., nelle quali il ſuono grave 9 paragonaſi cogli acuti. Le altre proporzioni rieſcono preſſochè giuſte; imperciocchè il maggior divario, che modifica la ragione $25:49$, s'eguaglia in logaritmi a 885 parte 61.^{ma} del comma.

Regiſtro nella ſeguente tavola i ſei ſuoni, che rende un cilindro, mentre oſcillando s'adatta a quelle curve, che tagliano l'aſſe in 2, 3, 4, 5, 6, 7 punti. Paragono i ſuoni acuti col grave, noto le alterazioni dei rapporti $9:25, 9:49, 9:81$ ecc., ed oſſervo a quali ſemplici proporzioni ſi accoſtino i mentovati rapporti modificati.

Paragone del suono più grave d' un cilindro coi suoni acuti.

Quantità proporzionale ai suoni.	Loro logaritmi.	
(1) $m^2 = (3q + \phi)^2$	log.1, 3497296	
(2) $m^2 = (5q - \phi)^2$	log.1, 7900938	$=$ log. $\frac{25}{9}$ $-$ 33333, suono, che cala dalla Quarta maggiore sopra l' Ottava $\frac{25}{9}$ per qualche cosa più di mezzo Comma, il cui log. $=$ 53950.
(3) $m^2 = (7q + \phi)^2$	log.2, 0824384	$=$ log. $\frac{49}{9}$ $-$ 32448. Questo intervallo supera la Quarta sopra la doppia Ottava per 57100 quantità poco più grande del Comma.
(4) $m^2 = (9q - \phi)^2$	log.2, 3007246	$=$ log. $\frac{81}{9}$ $=$ log.9 $-$ 32475, Seconda maggiore sopra l' Ottava triplicata.
(5) $m^2 = (11q + \phi)^2$	log.2, 4750250	$=$ log. $\frac{121}{9}$ $-$ 32475, Sesta maggiore pressochè giusta sopra la tripla Ottava, crescendo solamente per 3566, parte decimaquinta del Comma.
(6) $m^2 = (13q - \phi)^2$	log.2, 6201264	$=$ log. $\frac{169}{9}$ $-$ 32475, Seconda superflua sopra la quadrupla Ottava, calante per 6700 ottava parte del Comma dalla ragione $\frac{7}{6} . 16 = \frac{56}{3}$ propria d' esso intervallo.

XXVI. In grazia dell' esperimento, che a suo luogo riferirò, metto sotto gli occhi di chi legge la seguente Tavola, in cui, posto che il suono più grave d'un cilindro sia unisono ad una corda, la cui lunghezza 60, dispongo ordinatamente le lunghezze delle porzioni della corda stessa unisone agli altri suoni d' esso cilindro.

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti d'un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera.

	Lunghezze delle corde
(1)	60
(2)	21, 75 +
(3)	11, 10 +
(4)	6, 717 −
(5)	4, 496 +
(6)	3, 219 +
ecc.	ecc.

XXVII. Stabilisce rettamente il celebratissimo Signor *Leonardo Eulero*, che rispettivamente alle lamine elastiche sia $S = m^2 \sqrt{(hE:ML^3)}$. Ma asserendo egli alla pag. 269. che la forza elastica E sta in ragione composta della rigidità r della materia componente le lamine della loro larghezza D, e del quadrato G^2 della loro grossezza, viene ad abbracciare la proporzione S come $\frac{m^2}{L^2} \sqrt{(Gr:g)}$, la quale non si accorda colla verità, ed è riprovata dall' esperienza. Le lamine della stessa materia simili, e similmente vibrantisi, non s'uniformerebbero alla legge comune a tutti i corpi simili, i cui suoni serbano la ragione reciproca dei lati omologhi. Oltre a ciò i suoni delle lamine, che differiscono solo nella grossezza, dovrebbero riferirsi nella proporzione dimezzata delle grossezze, e gli esperimenti c' insegnano, che i suoni si corrispondono nella ragione ne delle groſſezze. Col metodo da me praticato in riguardo ai cilindri ſi dimoſtra, che nelle lamine la forza elaſtica E ſta come rDG^3. Fatto uſo di un tal canone, troveremo S come $\frac{m^2G}{L^2} \sqrt{(r:g)}$, rapporto, che ha il fondamento d' una rigoroſa dimoſtrazione, e coll' eſperienza s' accorda mirabilmente.

Aggiungo l' importante avvertenza, che nella determinazione dei ſuoni delle lamine elaſtiche non ha veruna parte la loro larghezza; dimodochè due lamine, la cui differenza conſiſta ſolo nella larghezza, rendono lo ſteſſo ſuono.

Determinare riſpettivamente a ciaſcun modo, in cui può oſcillare un cilindro, i nodi, o punti ſtabili intorno ai quali ſi vibra.

XXVIII. Dalle coſe ſopra ſpiegate raccoglieſi, che il numero de' punti immobili s' eguaglia a 2, 3, 4, 5, 6, 7 ecc. ſecondo che un cilindro ſi vibra o giuſto la prima, o giuſto la ſeconda, o giuſto la terza ecc. ſpecie delle oſcillazioni, che può concepire. Se il numero dei nodi è impari, un nodo cade alla metà del cilindro, e la ſua poſizione è determinata. Reſterebbe adunque da ſtabilirſi il ſito di due nodi nelle ſpecie di vibrazioni prima e ſeconda, di quattro nodi nelle ſpecie terza e quarta, di ſei nodi nelle ſpecie quinta e ſeſta; ſenonchè ſendo collocati eſſi nodi a coppia a coppia a pari diſtanze dalla metà del cilindro, l' uno a deſtra, e l' altro a ſiniſtra, baſta a determinare un nodo nella prima e nella ſeconda ſpecie, due nodi nella terza e nella quarta ſpecie, tre nodi nella quinta e nella ſeſta ſpecie di oſcillazioni, e così di ſeguito.

Nel ſito del punto immobile è l' ordinata $y = 0$, ed in tal ipoteſi abbiamo per i corollari terzo del numero XVI. e ſecondo del numero XVIII. le due equazioni

$e^{z:c} + e^{-z:c} = \pm \frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$, $e^{z:c} - e^{-z:c} = \pm \frac{2 \text{ fen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$. Il fegno negativo negli omogenei di comparazione è adattato a que' cafi, ne' quali fono negative le quantità cof. $z:c$, fen. $z:c$. Se i predetti cofeni, e feni fi confidereranno fempre pofitivi, qualunque fia la lor direzione, valerà il fegno pofitivo, del quale farò ufo coftantemente. Servono le due equazioni, la prima pel genere di vibrazioni indicato coi numeri impari, la feconda pel genere di vibrazioni dai numeri pari contraffegnato.

Si ftabilifce la pofitura d'un nodo, affegnando all'angolo $z:c$ quella precifa mifura, onde fecondo i varj generi di vibrazioni fi verifichi o l'una, o l'altra delle premeffe equazioni. Troveremo poi la grandezza fificamente efatta dell'angolo mentovato, ponendo in opera il metodo dei limiti ufato al numero XXII. per ifcoprire il valore dell'angolo ϕ. Offerverà il Lettore nei feguenti computi, ch' io riftringo la mifura dell'angolo $z:c$ fra due confini, che differifcono per un folo minuto fecondo, e che dagli errori, nei quali s' incorre abbracciando l'uno, o l'altro limite, ne deduco il valore adequatamente giufto dell'angolo $z:c$.

XXIX. S'efprima in minuti fecondi l'angolo $z:c$, e col metodo infegnato al numero XXI. e praticato al numero XXII. in riguardo all'angolo ϕ fi trovi il logaritmo dell'angolo $z:c$ efpreffo in parti del raggio $= 1$. Il logaritmo del numero $e = 2, 7182818$ s'eguaglia a 0, 4342945, ed il logaritmo di queft' ultimo numero pareggia $-$ 0, 3622157, e quindi il logaritmo del logaritmo del numero e, o fia

log. log. $e = -0, 3622157$. Sottraendo adunque dal logaritmo dell'angolo $z:c$ efpreffo in parti del raggio il numero 0, 3622157, ne rifulterà una quantità $=$ log. $z:c$ $+$ log. log. e. Si faccia tranfito coll'ajuto delle tavole dai logaritmi ai numeri, e ci fi prefenterà il valore della grandezza $z:c$ log. e, e nuovamente paffando dai logaritmi ai numeri, scopriremo il valore di $e^{z:c}$. Dato questo, riesce facile il ritrovare il valore di $e^{-z:c}=\frac{1}{e^{z:c}}$, e conseguentemente quello di $e^{z:c}\pm e^{-z:c}$.

I valori dell'uno, e dell'altro omogeneo di comparazione $\frac{2\,\text{cos}.\,z:c}{\sqrt{\text{cos}.\,L:c}}$, $\frac{2\,\text{sen}.\,z:c}{\sqrt{\text{cos}.\,L:c}}$ si determinano col mezzo del seguente artificio. Prendasi dalle tavole il logaritmo del cos. $z:c$, e del sen. $z:c$, ed indi sottratto $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$, dal residuo nuovamente si levi 4, 6989700, e quello che resta s' eguaglierà a log. $\left(\frac{2\,\text{cos}.\,z:c}{\sqrt{\text{cos}.\,L:c}}\right)$, o pure a log. $\left(\frac{2\,\text{sen}.\,z:c}{\sqrt{\text{cos}.\,L:c}}\right)$ (*b*). I predetti coseni, e seni

---

(*b*) Chiamo U, V i logaritmi presi dalle tavole dei seni delle quantità cos. $z:c$, cos. $L:c$, e per le cose dimostrate nell' annotazione segnata (f), ed inserita nel numero XXI. saranno $U-10,0000000$, $V-10,0000000$ i logaritmi tolti dalle tavole dei numeri, proprj dei coseni relativi al raggio$=1$ degli stessi angoli $z:c$, $L:c$; dimodochè si avrà log. cos. $z:c=U-10,0000000$, log. cos. $L:c=V-10,0000000$: ma in riguardo ai logaritmi comuni, il cui protonumero$=1$ log. $\left(\frac{2\,\text{cos}.\,z:c}{\sqrt{\text{cos}.\,L:c}}\right)$ $=$ log. cos. $z:c+$ log. $2-\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$; dunque surrogati nell' omogeneo di comparazione in cambio di log. cos. $L:c$, di log. 2 i loro valori $U-10,0000000$; $V-10,0000000$; 0, 3010300, e ridotti i computi, troveremo log. $\left(\frac{2\,\text{cos}.\,z:c}{\sqrt{\text{cos}.\,L:c}}\right)=U-\frac{1}{2}V-4,6989700$;

faranno relativi al raggio $=1$, ficcome al principio del numero XIII. è ftato da me prefcritto. Fatto pofcia il paffaggio dai logaritmi ai numeri, ci fi affaccieranno i valori dei due omogenei di comparazione $\frac{2\ \text{cof.}\ z:c}{\sqrt{\text{cof.}\ L:c}}$, $\frac{2\ \text{fen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cof.}\ L:c}}$.

Determinato col metodo dei limiti il valore fificamente efatto dell' angolo $z:c$ efpreffo in minuti fecondi, e trovato poi il logaritmo del medefimo angolo efpreffo in parti del raggio $=1$, fi fottri log. $L:c$, ed il refiduo s' eguaglierà a log. $z:L$. I diverfi valori, che può avere log. $L:c$ rifpettivamente alle varie fpecie di ofcillazioni, gli ho regiftrati al fine del numero XXII. Aggiungafi log. $2 = 0,3010300$, e ne rifulterà il valore di log. $z:\frac{1}{2}L$, col mezzo del quale le tavole ci fuggeriranno quello di $z:\frac{1}{2}L$, quantità, che determina la cercata proporzione fra la linea nota $\frac{1}{2}L = CA$ (*fig.* 3, 4, 5, 6, 7, 8 ecc.) e la lunghezza di z uguale per efempio a CE, all' eftremità della quale il punto immobile E corrifponde.

XXX. Dopo che ho fpiegata la maniera d' iftituire i computi paffo ad effettuare i computi fteffi, che m' hanno coftata una lunga fatica, e ch' io continuo fino alla fpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

---

il che ecc. La fteffa dimoftrazione vale per comprovare il valore affegnato a log. $\left(\frac{2.\ \text{fen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cof.}\ L:c}}\right)$.

Computo per la specie I. delle vibrazioni dei cilindri.

$z{:}c=$	$74, 45', 23''$	$z{:}c=$	$74, 45, 24''$
in min. sec.=	$269123''$	in min. sec.=	$269124''$
log.=	5,4299508	log.=	5,4299524
sottra	5,3144251	sottra	5,3144251
log. $z{:}c=$	0,1155257	log. $z{:}c=$	0,1155273
sottra	0,3622157	sottra	0,3622157
log.$z{:}c$+log.log.$e=$	9,7533100	log.$z{:}c$+log.log. $e=$	9,7553116
$z{:}c$ log. $e=$	0,5666436	$z{:}c$ log. $e=$	0,5666457
$e^{z:c}=$	3,6867496	$e^{z:c}=$	3,6867674
$e^{-z:c}=$	0,2712417	$e^{-z:c}=$	0,2712403
$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	3,9579913	$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	3.9580077
log. cos. $z{:}c=$	9,4198295	log. cos. $z{:}c=$	9,4198218
sottr.$\frac{1}{2}$log.cos.$L{:}c=$	4,1233764	sottr.$\frac{1}{2}$log.cos. $L{:}c=$	4,1233764
	5,2964531		5,2964454
sottra	4,6989700	sottra	4,6989700
log. $\left(\frac{2\ \text{cos.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}\right)=$	0,5974831	log. $\left(\frac{2\ \text{cos.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}\right)=$	0,5974754
$\frac{2\ \text{cos.}\ L:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}=$	3,9580665	$\frac{2\ \text{cos.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}=$	3,9579964
errore=+	752	errore=—	113
altro errore=—	113		
differenza=	865		

Facciasi $865 : 752 :: 1'' :$ $\frac{752''}{865} = 0,\ 8694''$ porzione di secondo, per cui va accresciuto il minor valore dell' angolo $z{:}c$, onde sia

$z{:}c=$	$269123{,}8694''$
log.=	5,4299522
sottra	5,3144251
log. $z{:}c=$	0,1155271
sottra log. $L{:}c=$	0,6748648
log. $z{:}L=$	9,4406623

aggiun. log.2 $=$ 0,3010300

log.$z:\frac{1}{2}L =$ 9,7416923

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA =$ 0,5516864 (*fig.* 3.)

Computo per la specie II. delle vibrazioni dei cilindri

$z:c =$	$165^\circ,32',5''$	$z:c =$	$165^\circ,32',6''$
in min. sec. $=$	595925	in min. sec. $=$	595926
log. $=$	5,7751916	log. $=$	5,7751924
sottra	5,3144251	sottra	5,3144251
log. $z:c =$	0,4607665	log. $z:c =$	0,4607673
sottra	0,3622157	sottra	0,3622157
log.$z:c$ ÷ log.log.$e =$	0,0985508	log.$z:c$ ÷ log.log.$e =$	0,0985516
$z:c$ log. $e =$	1,2547317	$z:c$ log. $e =$	1,2547340
$e^{z:c} =$	17,9775993	$e^{z:c} =$	17,9776945
$e^{-z:c} =$	0,0556248	$e^{-z:c} =$	0,0556245
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	17,9219745	$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	17,9220700
log. sen. $z:c =$	9,3975807	log. sen. $z:c =$	9,3975725
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$	3,4452230	sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$	3,4452230
	5,9523577		5,9523495
sottra	4,6989700	sottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}\right) =$	1,2533877	$\log.\left(\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}\right) =$	1,2533795
$\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}} =$	17,9220512	$\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}} =$	17,9217128
errore $= +$	767	errore $= -$	3572
altro errore $= -$	3572		
differenza $=$	4339		

Facciasi $4339 : 767 :: 1'' : \frac{767''}{4339} = 0,1768''$ parte di secondo, che deve aggiungersi al più piccolo valore dell'angolo $z:c$, onde s'abbia

$z:c =$ 595925,1768''

log. $=$ 5,7751918

sottra 5,3144251

log. $z:c =$ 0,4607667

ſottra log. $L:c = 0,8950469$

log. $z:L = 9,5657198$

aggiungi log. $2 = 0,3010300$

log. $z:\frac{1}{2}L = 9,8667498$

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0,7357831$ (*fig.* 4)

Computo per la ſpecie III. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 89°,10',41''$	$z:c = 89°,10',42''$
in min. ſec. $= 321041''$	in min. ſec. $= 321042''$
log. $= 5,5065605$	log. $= 5,5065618$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,1921354$	log. $z:c = 0,1921367$
ſottra $0,3622157$	ſottra $0,3622157$
log.$z:c$+log.log.$e = 9,8299197$	log.$z:c$+log.log.$e = 9,8299210$
$z:c$ log. $e = 0,6759580$	$z:c$ log. $e = 0,6759600$
$e^{z:c} = 4,7419617$	$e^{z:c} = 4,7419836$
$e^{-z:c} = 0,2008832$	$e^{-z:c} = 0,2108822$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 4,9528449$	$e^{z:c} + e^{-z:c} = 4,9528658$
log. coſ. $z:c = 8,1566857$	log. coſ. $z:c = 8,1565394$
ſottr. $\frac{1}{2}$log.coſ. $L:c = 2,7628494$	ſottr. $\frac{1}{2}$log.coſ. $L:c = 2,7628494$
$5,3938363$	$5,3936900$
ſottra $4,6989700$	ſottra $4,6989700$
log. $\left(\frac{2\text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right) = 0,6948663$	log. $\left(\frac{2\text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right) = 0,6947200$
$\frac{2\text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 4,9529772$	$\frac{2\text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 4,9513090$
errore $= + 1323$	errore $= - 15568$
altro errore $= - 15568$	
differenza $= 16891$	

Facciaſi $16891 : 1323 :: 1'' : \frac{1323''}{16891} = 0,0783''$ porzione di ſecondo da aggiungerſi al minor valore dell'angolo $z:c$, onde s' abbia

$z:c = 321041,0783''$

$\log. = 5,5065606$

fottra $5,3144251$

$\log.\ z:c = 0,1921355$

fottra $\log. L:c = 1,0412192$

$\log.\ z:L = 9,1509163$

aggiungi $\log. 2 = 0,3010300$

$\log.\ z:\tfrac{1}{2}L = 9,4519463$

$z:\tfrac{1}{2}L = CE:CA = 0,2831042$ (*fig.* 5)

Segue il computo per la fpecie III. delle virbazioni dei cilindri.

$z:c = 255^\circ,30',6''$	$z:c = 255^\circ,30',7''$
in min. fec. $= 919806''$	in min. fec $= 919807''$
$\log. = 5,9636963$	$\log. = 5,9636967$
fottra $5,3144251$	fottra $5,3144251$
$\log.\ z:c = 0,6492712$	$\log.\ z:c = 0,6492716$
fottra $0,3622157$	fottra $0,3622157$
$\log. z:c + \log.\log. e = 0,2870555$	$\log. z:c + \log.\log. e = 0,2870559$
$z:c \log. e = 1,9366695$	$z:c \log. e = 1,9366713$
$e^{z:c} = 86,4309940$	$e^{z:c} = 86,4313519$
$e^{-z:c} = 0,0115700$	$e^{-z:c} = 0,0115699$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 86,4425640$	$e^{z:c} + e^{-z:c} = 86,4429218$
$\log.\ \text{cof.}\ z:c = 9,3985507$	$\log.\ \text{cof.}\ z:c = 9,3985426$
fottr. $\tfrac{1}{2}\log.\text{cof.} L:c = 2,7628494$	fottr. $\tfrac{1}{2}\log.\text{cof.} L:c = 2,7628494$
$6,6357013$	$6,6356932$
fottra $4,6989700$	fottra $4,6989700$
$\log. \left(\dfrac{2\ \text{cof.}\ z:c}{\sqrt{\text{cof.}\ L:c}}\right) = 1,9367313$	$\log. \left(\dfrac{2\ \text{cof.}\ z:c}{\sqrt{\text{cof.}\ L:c}}\right) = 1,9367232$
$\dfrac{2\ \text{cof.}\ z:c}{\sqrt{\text{cof.}\ L:c}} = 86,4432869$	$\dfrac{2\ \text{cof.}\ z:c}{\sqrt{\text{cof.}\ L:c}} = 86,4416733$
errore $= +\ 7229$	errore $= -\ 12485$
altro errore $= -\ 12485$	
differenza $= 19714$	Facciafi $19714 : 7229 :: 1'' ::$

$\frac{7229''}{19714} = 0,3667''$ parte di secondo, che dee aggiungersi al valore più picciolo dell' angolo $z{:}c$, onde sia

$z{:}c =$	$919806,3667''$
$\log. =$	$5,9636964$
sottra	$5,3144251$
$\log.\, z{:}c =$	$0,6492713$
sottra $\log. L{:}c =$	$1,0412192$
$\log.\, z{:}L =$	$9,6080521$
aggiungi $\log. 2 =$	$0,3010300$
$\log.\, z{:}\frac{1}{2}L =$	$9,9090821$
$z{:}\frac{1}{2}L = C2E{:}CA =$	$0,8111144$ (*fig.* 5.)

Computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z{:}c =$	$179^\circ,12',50''$	$z{:}c =$	$179^\circ,12',51''$
in min. sec. $=$	$645170''$	in min. sec. $=$	$645171''$
$\log. =$	$5,8096742$	$\log. =$	$5,8096749$
sottra	$5,3144251$	sottra	$5,3144251$
$\log.\, z{:}c =$	$0,4952491$	$\log.\, z{:}c =$	$0,4952498$
sottra	$0,3622157$	sottra	$0,3622157$
$\log. z{:}c + \log.\log.\, e =$	$0,1330334$	$\log. z{:}c + \log.\log.\, e =$	$0,1330341$
$z{:}c \log.\, e =$	$1,3584179$	$z{:}c \log.\, e =$	$1,3584201$
$e^{z:c} =$	$22,8253757$	$e^{z:c} =$	$22,8254913$
sottra $e^{-z:c} =$	$0,0438107$	sottra $e^{-z:c} =$	$0,0439107$
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	$22,7815650$	$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	$22,7816806$
$\log.\, \text{sen.}\, z{:}c =$	$8,1373342$	$\log.\, \text{sen.}\, z{:}c =$	$8,1371818$
sottra $\frac{1}{2}\log.\text{cos}.L{:}c =$	$2,0806276$	sottra $\frac{1}{2}\log.\text{cos}.L{:}c =$	$2,0806276$
	$6,0567066$		$6,0565542$
sottra	$4,6989700$	sottra	$4,6989700$
$\log.\left(\frac{2\,\text{sen.}\, z{:}c}{\sqrt{\text{cos.}\, L{:}c}}\right) =$	$1,3577366$	$\log.\left(\frac{2\,\text{sen.}\, z{:}c}{\sqrt{\text{cos.}\, L{:}c}}\right) =$	$1,3575842$

$$\frac{2\ \text{sen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{cos.}\ L{:}c}} = 22,7890714 \qquad \frac{2\ \text{sen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{cos.}\ L{:}c}} = 22,7816002$$

errore = + 75064 errore = − 804

altro errore = − 804

differenza = + 75868 Facciasi 75868 : 75064 :: 1″ : $\frac{75064''}{75868} = 0,\ 9894''$ porzione di secondo, che va aggiunta al minor valore dell'angolo $z{:}c$, onde ci si presenti

$z{:}c = 645170,9894''$
log. = 5,8096748
sottra 5,3144251

log. $z{:}c$ = 0,4952497
sottra log. $L{:}c$ = 1,1503623

log. $z{:}L$ = 9,3448874
aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $z{:}\frac{1}{2}L$ = 9,6459174
$z{:}\frac{1}{2}L = CE{:}CA$ = 0,4425042 (*fig.* 6)

Segue il computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z{:}c = 345°,30',15''$	$z{:}c = 345°,30',16''$
in min. sec. = 1243815″	in min. sec. = 1243816″
log. = 6,0947558	log. = 6,0947561
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log, $z{:}c$ = 0,7803307	log. $z{:}c$ = 0,7803310
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
log.$z{:}c$+log.log.e = 0,4181150	log.$z{:}c$+log.log.e = 0,4181153
$z{:}c$ log. e = 2,6188764	$z{:}c$ log. e = 2,6188782
$e^{z:c}$ = 415,7922488	$e^{z:c}$ = 415,7939713
sottra $e^{-z:c}$ = 0,0024050	sottra $e^{-z:c}$ = 0,0024050
$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 415,7898438	$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 415,7915663
log. sen. $z{:}c$ = 9,3984774	log. sen. $z{:}c$ = 9,3984693
sottr.$\frac{1}{2}$log.cos.$L{:}c$ = 2,0806276	sottr.$\frac{1}{2}$log.cos.$L{:}c$ = 2,0806276
7,3178498	7,3178417

ſottra $4,6989700$	ſottra $4,6989700$
$\log.\left(\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right) = 2,6188798$	$\log.\left(\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right) = 2,6188717$
$\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 415,7955024$	$\frac{2\ \text{ſen.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 415,7877512$
errore $= +\ 56586$	errore $= -\ 38151$
altro errore $= -\ 38151$	
differenza $= 94737$	

Facciaſi $94737 : 56586 :: 1'' : \frac{56586''}{94737} = 0,5973''$ parte di ſecondo, che aggiunta al minor valore dell'angolo $z:c$ ci dà

$z:c = 1243815,5973''$
$\log. = 6,0947560$
ſottra $5,3144251$
$\log. z:c = 0,7803309$
ſottra $\log. L:c = 1,1503623$
$\log. z:L = 9,6299686$
aggiungi $\log. 2 = 0,3010300$
$\log. z:\frac{1}{2}L = 9,9309986$
$z:\frac{1}{2}L = C2E:CA = 0,8530974$ (*fig.* 6)

Computo per la ſpecie V. delle vibrazioni de' cilindri.

$z:c = 89°,57',50''$	$z:c = 89°,57',51''$
in min. ſec. $= 323870''$	in min. ſec. $= 323871''$
$\log. = 5,5193707$	$\log. = 5,5103720$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
$\log. z:c = 0,1959456$	$\log. z:c = 0,1959469$
ſottra $0,3622157$	ſottra $0,3622157$
$\log. z:c + \log.\log. e = 9,8337299$	$\log. z:c + \log.\log. e = 9,8337312$
$z:c\ \log. e = 0,6819144$	$z:c\ \log. e = 0,6819165$
$e^{z:c} = 4,8074458$	$e^{z:c} = 4,8074690$
$e^{-z:c} = 0,2080107$	$e^{-z:c} = 0,2080097$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 5,0154565$	$e^{z:c} + e^{-z:c} = 5,0154787$

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ \text{cos}.\ z{:}c = & 6{,}7995181 \\
\text{sottr}\ \tfrac{1}{2}\log.\text{cos}.\ L{:}c = & 1{,}3984804 \\
\hline
& 5{,}4010377 \\
\text{sottra} & 4{,}6989700 \\
\hline
\log.\left(\dfrac{2\ \text{cos}.\ z{:}c}{\sqrt{\text{cos}.\ L{:}c}}\right) = & 0{,}7020677 \\
\dfrac{2\ \text{cos}.\ z{:}c}{\sqrt{\text{cos}.\ L{:}c}} = & 5{,}0357912 \\
\hline
\text{errore} = & +\ 203347 \\
\text{altro errore} = & -\ 184235 \\
\hline
\text{differenza} = & 387582
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ \text{cos}.\ z{:}c = & 6{,}7961645 \\
\text{sottr}.\ \tfrac{1}{2}\log.\text{cos}.L{:}c = & 1{,}3984804 \\
\hline
& 5{,}3976841 \\
\text{sottra} & 4{,}6989700 \\
\hline
\log.\left(\dfrac{2\ \text{cos}.\ z{:}c}{\sqrt{\text{cos}.\ L{:}c}}\right) = & 0{,}6987141 \\
\dfrac{2\ \text{cos}.\ z{:}c}{\sqrt{\text{cos}.\ L{:}c}} = & 4{,}9970552 \\
\hline
\text{errore} = & -\ 184235
\end{array}
$$

Facciasi $387582 : 203347 :: 1'' : \dfrac{203347''}{387582} = 0,\ 5247''$ parte di secondo da aggiungersi al valore più picciolo dell' angolo $z{:}c$, onde sia

$$
\begin{array}{rl}
z{:}c = & 323870{,}5247'' \\
\log. = & 5{,}5103714 \\
\text{sottra} & 5{,}3144251 \\
\hline
\log.\ z{:}c = & 0{,}1959463 \\
\text{sottra}\ \log.\ L{:}c = & 1{,}2375125 \\
\hline
\log.\ z{:}L = & 8{,}9584338 \\
\text{aggiungi}\ \log.\ 2 = & 0{,}3010300 \\
\hline
\log.\ z{:}\tfrac{1}{2}L = & 9{,}2594638 \\
z{:}\tfrac{1}{2}L = CE{:}CA = & 0{,}1817456
\end{array}
$$

(*fig.* 7)

Segue il computo per la specie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$$
\begin{array}{rl}
z{:}c = & 269^\circ{,}12'{,}45'' \\
\text{in min. sec.} = & 969165'' \\
\log. = & 5{,}9863977 \\
\text{sottra} & 5{,}3144251 \\
\hline
\log.\ z{:}c = & 0{,}6719726 \\
\text{sottra} & 0{,}3622157 \\
\hline
\log.z{:}c+\log.\log.\ e = & 0{,}3097569 \\
z{:}c\ \log.\ e = & 2{,}0405954
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
z{:}c = & 269^\circ{,}12'{,}46'' \\
\text{in min. sec.} = & 969166'' \\
\log. = & 5{,}9863982 \\
\text{sottra} & 5{,}3144251 \\
\hline
\log.\ z{:}c = & 0{,}6719731 \\
\text{sottra} & 0{,}3622157 \\
\hline
\log.z{:}c+\log.\log.e = & 0{,}3097574 \\
z{:}c\ \log.\ e = & 2{,}0405977
\end{array}
$$

$$e^{z:c} = 109,7982563 \qquad e^{z:c} = 109,7988375$$
$$e^{-z:c} = 0,0091076 \qquad e^{-z:c} = 0,0091076$$
$$e^{z:c} + e^{-z:c} = 109,8073639 \qquad e^{z:c} + e^{-z:c} = 109,8079451$$

log. cof. $z:c =$ 8,1380961 log. cof. $z:c =$ 8,1379437

fottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c =$ 1,3984804 fottr. $\frac{1}{2}$log.cof. $L:c =$ 1,3984804

6,7396157 6,7394633

fottra 4,6989700 fottra 4,6989700

$$\log.\left(\frac{2\,\text{cof.}\,z:c}{\sqrt{\text{cof.}\,L:c}}\right) = 2,0406457 \qquad \log.\left(\frac{2\,\text{cof.}\,z:c}{\sqrt{\text{cof.}\,L:c}}\right) = 2,0404933$$

$$\frac{2\,\text{cof.}z:c}{\sqrt{\text{cof.}L:c}} = 109,8109762 \qquad \frac{2\,\text{cof.}\,z:c}{\sqrt{\text{cof.}L:c}} = 109,7724539$$

errore $= +$ 36123 errore $= -$ 354912

altro errore $= -$ 354912

differenza $=$ 391035 Facciafi $391035 : 36123 :: 1'' :$
$\frac{36123''}{391035} = 0,\ 0924''$ parte di fecondo, per cui dee accrefcerfi il minor valore dell' angolo $z:c$, onde s' abbia

$$z:c = 969165,0924''$$
$$\log. = 5,9863978$$
fottra 5,3144251

$$\log. z:c = 0,6719727$$
fottra log. $L:c =$ 1,2375125

$$\log. z:L = 9,4344602$$
aggiungi log. $2 =$ 0,3010300

$$\log. z:\tfrac{1}{2}L = 9,7354902$$
$$z:\tfrac{1}{2}L = C2E:CA = 0,5438638 \quad (\textit{fig. } 7)$$

Segue il computo per la fpecie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 435°,30',11''$ $z:c = 435°,30',12''$

in min. fec. $=$ 1567811'' in min. fec. $=$ 1567812''

log. $=$ 6,1952936 log. $=$ 6,1952939

ſottra	5,3144251	ſottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,8808685	log. $z:c=$	0,8808688
ſottra	0,3622157	ſottra	0,3622157
log.$z:c$+log.log.$e=$	0,5186528	log.$z:c$+log.log.$e=$	0,5186531
$z:c$ log. $e=$	3,3010555	$z:c$ log. $e=$	3,3010578
$e^{z:c}=$	2000,1174574	$e^{z:c}=$	2000,1280516
$e^{-z:c}=$	0,0005000	$e^{-z:c}=$	0,0005000
$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	2000,1179574	$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	2000,1285516
log. coſ. $z:c=$	9,3985100	log. coſ. $z:c=$	9,3985019
ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ. $L:c=$	1,3984804	ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ. $L:c=$	1,3984804
	8,0000296		8,0000215
ſottra	4,6989700	ſottra	4,6989700
log. $\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)=$	3,3010596	log. $\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)=$	3,3010515
$\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}=$	2000,1363427	$\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}=$	2000,0990327
errore $=+$	183853	errore $=-$	295189
altro errore $=-$	295189		
differenza $=$	479042		

Facciaſi 479042 : 183853 :: $1'' : \frac{183853''}{479042} = 0,3838''$ porzione di ſecondo, che unita al minor valore dell' angolo $z:c$ ci dà

$z:c=$	1567811,3838″
log.$=$	6,1952938
ſottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,8808687
ſottra log. $L:c=$	1,2375125
log. $z:L=$	9,6433562
aggiun. log. $2=$	0,3010300
log.$z:\frac{1}{2}L=$	9,9443862
$z:\frac{1}{2}L=C3E:CA=$	0,8798045

(*fig.* 7.)

Computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c=$	$179°,57',56''$	$z:c=$	$179°,57',57''$
in min. ſec.=	$647876''$	in min. ſec.=	$647877''$
log.=	5,8114919	log.=	5,8114926
ſottra	5,3144251	ſottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,4970668	log. $z:c=$	0,4970675
ſottra	0,3622157	ſottra	0,3622157
log.$z:c$+log.log.$e=$	0,1348511	log.$z:c$+log.log.$e=$	0,1348518
$z:c$ log. $e=$	1,3641153	$z:c$ log. $e=$	1,3641175
$e^{z:c}=$	23,1267891	$e^{z:c}=$	23,1269063
$e^{-z:c}=$	0,0432399	$e^{-z:c}=$	0,0432397
$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	23,0835492	$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	23,0836666
log. ſen. $z:c=$	6,7789965	log. ſen. $z:c=$	6,7706810
ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ.$L:c=$	0,7162924	ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ.$L:c=$	0,7162924
	6,0627041		6,0543886
ſottra	4,6989700	ſottra	4,6989700
log. $\left(\frac{2\text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right)=$	1,3637341	log. $\left(\frac{2\text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right)=$	1,3554186
$\frac{2\text{ ſen.} z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}=$	23,1064981	$\frac{2\text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}=$	22,6682829
errore=+	229489	errore=—	4153837
altro errore =—	4153837		
differenza=	4383326		

Facciaſi 4383326 : 229489 :: $1'' : \frac{229489''}{4383326} = 0,0524''$ parte di ſecondo da aggiungerſi al minor valore di $z:c$, onde ne riſulti

$z:c=$	$647876,0524''$
log.=	5,8114919
ſottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,4970668
ſottra log.$L:c=$	1,3100632
log. $z:L=$	9,1870036

aggiungi log. $2 = 0,3010300$

log. $z:\frac{1}{2}L = 9,4880336$

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0,3076335$ (*fig.* 8)

Segue il computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 359^\circ,12',45''$	$z:c = 359^\circ,12',46''$
in min. ſec. $= 1293165''$	in min. ſec $= 1293166''$
log. $= 6,1116539$	log. $= 6,1116542$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,7972288$	log. $z:c = 0,7972291$
ſottra $0,3622157$	ſottra $0,3622157$
log. $z:c$ + log. log. $e = 0,4350131$	log. $z:c$ + log. log. $e = 0,4350134$
$z:c$ log. $e = 2,7227837$	$z:c$ log. $e = 2,7227856$
$e^{z:c} = 528,1821168$	$e^{z:c} = 528,1825349$
$e^{-z:c} = 0,0018933$	$e^{-z:c} = 0,0018933$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 528,1802235$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 528,1825349$
log. coſ. $z:c = 8,1380961$	log. coſ. $z:c = 8,1379437$
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c = 0,7162924$	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c = 0,7162924$
$4,4218037$	$7,4216513$
ſottra $4,6989700$	ſottra $4,6989700$
log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right) = 2,7228337$	log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right) = 2,7226813$
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 528,2429440$	$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 528,0575942$
errore $= + 627205$	errore $= - 1249407$
altro errore $= - 1249407$	
differenza $= 1876612$	Facciaſi $1876612 : 627205 ::$

$1'' : \frac{627205''}{1876612} = 0,3342''$ porzione di ſecondo, per cui dee aumentarſi il minor valore di $z:c$, onde ſia

$z:c =$

$z:c = 1293165{,}3342''$
$\log. = 6{,}1116540$
sottra $5{,}3144251$
$\log.\ z:c = 0{,}7972989$
sottra log. $L:c = 1{,}3100632$
$\log.\ z:L = 9{,}4871657$
aggiun. log. $2 = 0{,}3010300$
$\log. z:\tfrac{1}{2}L = 9{,}7881957$
$z:\tfrac{1}{2}L = C2E:CA = 0{,}6140386$ (*fig.* 8.)

Segue il computo per la specie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 525^\circ,30',11''$	$z:c = 525^\circ,30',12''$
in min. sec. $= 1891811''$	in min. sec. $= 1891812''$
$\log. = 6{,}2768777$	$\log. = 6{,}2768779$
sottra $5{,}3144251$	sottra $5{,}3144251$
$\log.\ z:c = 0{,}9624526$	$\log.\ z:c = 0{,}9624528$
sottra $0{,}3622157$	sottra $0{,}3622157$
$\log.z:c + \log.\log.e = 0{,}6002369$	$\log.z:c + \log.\log.e = 0{,}6002371$
$z:c\ \log.\ e = 3{,}9832440$	$z:c\ \log.\ e = 3{,}9832459$
$e^{z:c} = 9621{,}5265487$	$e^{z:c} = 9621{,}5685841$
sottra $e^{-z:c} = 0{,}0001039$	$e^{-z:c} = 0{,}0001039$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 9621{,}5264448$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 9621{,}5684902$
$\log.\ \text{sen.}\ z:c = 9{,}3985100$	$\log.\ \text{sen.}\ z:c = 9{,}3985019$
sottr. $\tfrac{1}{2}\log.\text{cos}.L:c = 0{,}7162924$	sottr. $\tfrac{1}{2}\log.\text{cos}.\ L:c = 0{,}7162924$
$8{,}6822176$	$8{,}6822095$
sottra $4{,}6989700$	sottra $4{,}6989700$
$\log.\left(\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}\right) = 3{,}9832476$	$\log.\left(\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}}\right) = 3{,}9832395$
$\frac{2\ \text{sen.}z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}} = 9621{,}6061947$	$\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}} = 9621{,}4269912$
errore $= +\ 797499$	errore $= -\ 1414890$
altro errore $= -\ 1414890$	
differenza $= 2212389$	Facciasi $2212389 : 797499 ::$

$1'' : \dfrac{797499''}{2212389} = 0,\ 3605''$ quantità da aggiugnersi al più picciolo valore dell' angolo $z{:}c$, onde ci si presenti

$$
\begin{array}{rl}
z{:}c = & 1891811{,}3605'' \\
\log. = & 6{,}2768778 \\
\text{sottra} & 5{,}3144251 \\
\hline
\log.\ z{:}c = & 0{,}9624527 \\
\text{sottra}\ \log.\ L{:}c = & 1{,}3100632 \\
\hline
\log.\ z{:}L = & 9{,}6523895 \\
\text{aggiungi}\ \log.2 = & 0{,}3010300 \\
\hline
\log.\ z{:}\tfrac{1}{2}L = & 9{,}9534195 \\
z{:}\tfrac{1}{2}L = C3E{:}CA = & 0{,}8982961
\end{array}
$$

(*fig.* 8)

Confermare coll' esperienza la scoperta legge dei suoni dei cilindri.

XXXI. Egli è d' uopo confermare coll' esperienza le verità insegnate dalla teorica. Do principio dal paragonare insieme i suoni principali, cioè a dire i più gravi di varj cilindri. Feci lavorare tre cilindri d' acciajo *A*, *B*, *C*, ed ordinai, che i due primi fossero egualmente grossi, e diversamente lunghi in ragione di $\sqrt{2} : 1$. Il primo ed il terzo doveano avere uguali le lunghezze, ed ineguali i diametri in proporzione di 4 : 5. L' Artefice non eseguì esattissimamente la mia intenzione, e le misure dei cilindri furono le seguenti, che da me s' esprimono in linee del piede Real di Parigi.

Misura del cilindro *A*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 86.
Misure del cilindro *B*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 61.
Misure del cilindro *C*. $D =$ lin. $11\frac{1}{2}$, $L =$ lin. 87.

Differendo i due cilindri *A*, *B* solamente nella lunghezza, i loro suoni debbono corrispondersi in ragione inversa duplicata delle lunghezze, cioè a dire come $(61)^2{:}(86)^2$, o sia come 3721 : 7396. Questo rapporto s' accosta molto al semplice 1 : 2 proprio dell' Ottava, ed il divario conſiſte nella proporzione 7396 : 7442, o ſia nella fiſicamente uguale 161 : 162, metà preſſochè giuſta del Comma 80 : 81. In fatti percoſſi i cilindri *A*, *B*, trovai che i loro ſuoni in Ottava un poco calante ſi riferivano.

Giuſta il canone da me ſtabilito i ſuoni dei cilindri *A*, *C* debbono ſtare in ragione compoſta, diretta ſemplice dei diametri, ed inverſa duplicata delle lunghezze, vale a dire come $\frac{9}{(86)^2} : \frac{11\frac{1}{2}}{(87)^2}$. Queſta proporzione riduceſi alla ſeguente 68121 : 85054, la quale diſcorda pochiſſimo dalla ſemplice 4 : 5 conveniente alla Terza maggiore. La differenza s'eguaglia al rapporto 8505400 : 8515125, cioè proſſimamente a 875 : 876, undecima parte all'incirca del Comma 80 : 81, minuzia così picciola, che non viene dall'orecchio anche più perito notata. Poſti al confronto i ſuoni dei cilindri *A*, *C*, ſi conformarono alla teorica, ed il cilindro più groſſo *C* reſe un ſuono una Terza maggiore più acuto di quello del cilindro più ſottile *A*.

XXXII. M'inoltro all'eſame dei ſuoni, che giuſta le varie ſpecie di oſcillazioni un cilindro produce. Feci primieramente tirare con diligenza a martello, e lima un cilindro *E* d'acciajo, ed indi ne feci gittare un altro *F* di bronzo, il quale fu poſcia ripulito ſul tornio, e ridotto alla maggior eſattezza, che fu poſſibile. Miſure del cilindro *E* d'acciajo. $D =$ lin. 6, $L =$ lin. 259. Miſure del cilindro *F* di bronzo. $D =$ lin. 6, $L =$ lin. 257. $\frac{1}{2}$. Gli volli aſſai ſottili riſpettivamente alle loro lunghezze, e tollerai, che il ſuono loro più grave riuſciſſe muto, perchè ſi rendeſſero ſenſibili i ſuoni acuti, il che non interviene, quando la groſſezza alla lunghezza ha quella proporzione, che ſi ricerca, acciocchè il ſuono principale, e più grave acquiſti corpo, e ſi faccia udire grato al ſenſorio.

Segnai accuratamente i nodi, o punti ſtabili in riguardo alle diverſe ſpecie di vibrazioni, e ſottopoſti a sì fatti punti i sostegni, si sentirono chiari e distinti i sei primi suoni in ambo i cilindri. Avendo dentro questi limiti ristretto i miei calcoli, non mi sono più oltre dilatato nè pur colle osservazioni. Avverto, che gli scannelli debbono essere rivestiti d'una materia cedente, per esempio di panno. Io mi servj di due funicelle, le quali erano forse un po' troppo dure, e credo che sarebbero meglio riusciti due grossi spaghi. Anche rispettivamente alle corde, mentre si vogliono far suonare divise in parti aliquote, bisogna adoperare degli ostacoli leggeri, e appoggiarli ad uno di que' punti, che separano una parte aliquota dall' altra. Veggasi ciò, che ho scritto in tale proposito ai numeri XX. e XXI. dello Schediasma IV, che tratta *delle vibrazioni delle corde sonore* nella mia Opera *Delle Corde*, *ovvero Fibre elastiche*.

Accordai all' unisono col suono principale del cilindro *E* d'acciajo una corda divisa in parti 60, ed un'altra corda egualmente lunga, e similmente partita la ridussi all' Ottava alta del suono principale del cilindro *F* di bronzo. Rendeva questo un suono talmente grave, che mettendo con esso all' unisono la predetta corda, avrebbe della sonorità fatto perdita. Per separare dal rimanente quelle porzioni di corda, che sono unisone ai suoni secondo, terzo, quarto ecc. dell' uno, e dell' altro cilindro, ho posto in opera uno scannello, la cui base s'eguaglia ad una porzione sessantesima della corda, ed è distribuita in parti dieci. Con questo artificio s'ottiene la divisione della corda in parti 600.

Nel numero XXVI. ho posto in serie le porzioni della corda 60, che secondo la teorica debbono star all' unisono coi suoni acuti d'un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera. Questa progressione serve pel cilindro *E* d'acciajo, ed in riguardo al cilindro *F* di bronzo, il cui suono principale è unisono alla corda 120, si hanno da prendere porzioni il doppio lunghe delle mentovate.

Le ſeguenti due Tavole ſono formate da tre colonne. I numeri della prima eſprimono le ſpecie delle vibrazioni. La ſeconda contiene le porzioni della corda 60, che giuſto la teorica deggiono corriſpondere all' uniſono coi ſuoni acuti dei cilindri. Nella terza ſi comprendono le parti della ſteſſa corda, che meſſa in opera la maggior attenzione, ſi ſono trovate uniſone ai ſuoni nominati, preſtandomi diligente aſſiſtenza il Sig. *Domenico Bianchi* valente organiſta, ed accuratiſſimo accordatore di gravicembali.

Porzioni della corda 60 *uniſone ai ſuoni acuti del cilindro E d' acciajo nella ſuppoſizione, che il ſuono più grave ſia uniſono alla corda* 60.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giuſto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giuſto l' eſperienza.
I.	60	60
II.	21, 75	21, 75
III.	11, 1	11, 15
IV.	6, 717	6, 9
V.	4, 496	4, 7
VI.	3, 219	2, 9

Porzioni della corda 60. *uniſone ai ſuoni acuti del cilindro F di bronzo nella ſuppoſizione, che il ſuono più grave ſia uniſono alla corda* 120.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giuſto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giuſto l' eſperienza.
I.	120	120
II.	43, 5	43, 5

III.	22, 2	22, 3
IV.	13, 434	13, 6
V.	8, 992	9, 1
VI.	6, 438	6, 7

Per vero dire il cilindro *F* di bronzo era di figura più esatta di quello d'acciajo, ed oltre a ciò di materia più uniforme, ed omogenea, siccome formato per via di fusione. E quindi le sue voci acute con più aggiustatezza di quelle del cilindro *E* d'acciajo s'accomodavano ai tuoni dalla teorica determinati. La maggior differenza in ambo i cilindri s'udiva nel sesto suono, il quale nel cilindro d'acciajo cresceva sopra il corrispondente stabilito dal computo per la ragione 2900 : 3219, o sia prossimamente per qualche cosa meno di 9 : 10, ch'è quanto a dire per un Tuono un poco calante. Al contrario nel cilindro di bronzo il predetto suono calava dall'analogo fissato dal calcolo pel rapporto 6700 : 6438, cioè per una proporzione media fra le due 25 : 24, 26 : 25 esprimente un Semituono minore scarso. I notati opposti divarj danno a conoscere, che se ci fosse un cilindro di perfettissima figura, e composto di materia squisitamente omogenea, renderebbe i suoni esattamente unisoni a quelli, che mi è riuscito di scoprire nella presente Dissertazione.

Determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, dei quali erano composti i cilindri usati nel riferito esperimento.

XXXIII. Non tralascio di determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, ond'erano formati i nostri cilindri. Ho notato nel corollario terzo contenuto nel numero XXV. che mentre due cilindri oscillano similmente, le loro rigidità r stanno come $S^2L^4g:D^2$. Essendo il diametro D costante in amendue i cilindri E, F, le maſſe M ſtanno come Lg, e le rigidità r come S^2L^3M. Il cilindro di bronzo era uniſono a parti $91\frac{1}{2}$ della corda 60 uniſona al cilindro d'acciajo; e quindi i ſuoni S dei due cilindri d'acciajo, e di bronzo ſi riguardavano nella ragione $91\frac{1}{2} : 60$, o ſia $61:40$. Ho già detto nel precedente numero XXXI. che le lunghezze L ſerbavano il rapporto $259 : 257\frac{1}{2}$, cioè in numeri interi $518 : 515$. Peſò il cilindro E once 25, il cilindro F once 27, e per conſeguenza le maſſe M ſi riferivano nella ragione $25 : 27$. Soſtituiti in cambio delle ſpecie analatiche i convenienti valori, troveremo le rigidità dell'acciajo e del bronzo componenti i noſtri cilindri come $(61)^2.(518)^3.\ 25 : (40)^2.(515)^3.\ 27$, o ſia ridotti i computi, come $64648575859 : 29698029000$, proporzione che ſta di mezzo fra le due $24 : 11$, $13 : 6$, avvicinandoſi per altro più alla prima, che alla ſeconda.

Determinare la proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; acciocchè rendano ſuoni del pari forti, e aggradevoli.

XXXIV. Chiudo la mia fatica collo ſtabilire la ragione fra le lunghezze ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; affinchè rendano ſuoni ugualmente forti, e aggradevoli. I cilindri di metallo, o di creta, i quali compongono uno ſtrumento, ſi percuotono con eguali forze vive, e per conſeguenza oſcillando di pari forze vive fanno l'acquiſto. Collo ſteſſo metodo uſato in riguardo alle corde nello Schediaſma VI. della mia Opera ſopraccitata potrei dimoſtrare, che tali cilindri rendono ſuoni ugualmente forti. Queſti ſuoni in oltre debbono riuſcire del pari aggradevoli, il che dipende dalla proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei varj cilindri, la quale mi accingo ad indagare preſentemente. Qualche ſtrumento da me veduto non s'eſtend[illegible] ſalvo che per due Ottave, ed era formato di cilindri, che differivano ſolo nella lunghezza. Per verità i cilindri eſtremi cadevano in difetti oppoſti; imperciocchè i più gravi erano troppo pieghevoli, e producevano ſuoni per dir così ſenza corpo: ed al contrario i più acuti erano troppo groſſi, e poco fleſſibili, dimodochè i loro ſuoni ſi ſperimentavano ottuſi.

Le maſſe M, m di due cilindri della ſteſſa materia ſtanno come $LD^2 : ld^2$, e giacchè ſono pari le forze vive MV^2, mv^2, ſi verifica l'analogia $V : v :: \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}D} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}d}$.

S'aſſegni alle velocità la legge perſettamente media fra i limiti ſtabiliti ne' numeri X. e XI. del citato Schediaſma VI. onde s'abbia $V : v :: \frac{1}{T^{\frac{3}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$, e ſcopriremo eſſere $L^{\frac{1}{2}}D : l^{\frac{1}{2}}d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$, e conſeguentemente $L^{\frac{2}{3}} D^{\frac{3}{4}} : l^{\frac{2}{3}} d^{\frac{3}{4}} :: T : t$. C'inſegna il corollario 4. contenuto nel numero XXV. che ſe due cilindri formati della ſteſſa materia ſi vibrano ſimilmente, ſtanno i loro ſuoni come $\frac{D}{L^2} : \frac{d}{l^2}$; ma i tempi delle vibrazioni accettano la ragione inverſa dei ſuoni; dunque $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ e perciò $L^{2:3}D^{4:3} : l^{2:3}d^{4:3} :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ analogia, da cui derivano le due ſeguenti
$L : l :: D^{7:4} : d^{7:4}$, $D : d :: L^{4:7} : l^{4:7}$. Nel canone de' tempi delle vibrazioni $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ ſi ſoſtituiſcano prima in cambio di L, l, indi in cambio di D, d i valori

lori proporzionali, e scopriremo, effettuati i necessarj calcoli,

$D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$, $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$. Regolate a norma di queste leggi le dimensioni dei cilindri, riusciranno i loro suoni egualmente grati all'orecchio.

Stimo bene l' illustrare la teorica con un esempio. Due cilindri si corrispondano in quintupla Ottava, onde sia $T : t :: 32 : 1 :: 2^5 : 1$. Fatto uso di tali valori in luogo dei tempi T, t, ci si presenterà $D : d :: 4 : 1$, $L : l :: \sqrt{128} : 1$, o prossimamente $11, 3137 : 1$.

Assai prossima alla prescelta sarebbe la legge $V : v :: \frac{1}{T^{1:3}} : \frac{1}{t^{2:3}}$, da cui si dedurrebbe $D^2 : d^2 :: L : l$, $D : d :. T^{1:3} : t^{1:3}$, $L : l :: T^{2:3} : t^{2:3}$. La sua maggiore semplicità renderebbe le misure dei cilindri più facili da conteggiare.

XXXV. Conciossiachè gli strumenti composti di cilindri sieno di poco uso, e se ne lavorino in picciola quantità, non han potuto gl' industriosi Pratici colle replicate sperienze condurli a quella perfezione, di cui sono capaci. Giudico adunque opportuna cosa il distendere una tavola, che per lo spazio di due Ottave contenga le lunghezze, ed i diametri dei cilindri secondo la più perfetta legge $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$, $D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$. La nominata tavola è formata da sei colonne. La prima comprende le lettere naturali, e le modificate dal Diesis, e dal B molle disposte giusto la scala degli usuali strumenti da tasto, presa per base la lettera C. Nella seconda colonna stanno disposti i logaritmi dei suoni convenienti a ciascuna lettera, e temperati secondo il metodo da me spiegato nel *Saggio sopra le leggi del Contrappunto* pag. 116. Contiene la terza colonna i logaritmi delle lunghezze dei cilindri componenti la detta scala, i quali battuti con forze vive uguali, hanno da produr suoni, che riescano egualmente grati all' udito.

Si veggono collocate ordinatamente nella quarta colonna le lunghezze d'essi cilindri. Seguono finalmente le colonne quinta, e sesta, e sono registrati in quella i logaritmi dei diametri dei nostri cilindri, in questa le misure dei diametri stessi. Le colonne principali rispettivamente alle presenti ricerche sono la quarta, e la sesta, in grazia della determinazion delle quali ho posto le colonne seconda, terza, e quinta.

Ecco il metodo da me tenuto per determinare le colonne quarta, e sesta. Sia l la lunghezza d' un cilindro, d il diametro, t il tempo d'una vibrazione, n il numero delle vibrazioni fatte in tempo dato, o sia il suono d'esso cilindro. Ho provato nel precedente numero XXXIV. dover esser l come $t^{7:10}$: ma t come $= 1:n$; dunque l come $\frac{1}{n^{7:10}}$, e passando dall'analogia all'equazione, $l = \frac{L}{n^{7:10}}$. L è una costante da determinarsi in progresso. Dai numeri faccio transito ai logaritmi, e mi si presenta la formola log. $l =$ log. $L - \frac{7}{10}$ log. n. Serve questa per istabilire il valore della costante L. Il logaritmo del suono n prodotto dal cilindro C base dello strumento s'eguaglia a nulla; dunque in tal caso log. l. $=$ log. L, e per conseguenza $l = L$, cioè a dire la costante L uguale alla lunghezza l del cilindro C base dello strumento, la quale si suppone nella mia tavola divisa in parti 10000. Si troverà pertanto il logaritmo della lunghezza l d'un cilindro detraendo dal log. L, o sia dal logaritmo del numero 10000 le sette decime parti del logaritmo del suono, che il detto cilindro deve produrre. Determinato così log. l, le tavole dei logaritmi mi additano il valore della lunghezza cercata l.

In riguardo ai diametri dei cilindri ho dimostrato essere d come $t^{2:5}$, come $\frac{1}{n^{2:5}}$. Quindi ne nascono le formole $d = \frac{D}{n^{2:5}}$, log. $d = \log. D - \frac{2}{5}$ log. n. D è il diametro del cilindro C base dello strumento, che suppongo diviso in parti 1000. Sottratte dal log. 1000 le due quinte parti del logaritmo del suono n, che dee rendere il cilindro, ne risulterà il logaritmo del diametro d, la di cui misura relativa a quella del diametro D competente al cilindro C verrà resa nota dalle tavole logaritmiche.

Sarà facile l'ampliare la seguente tavola alle tre, alle quattro, alle cinque Ottave, valendosi della regola del tre. Quella stessa proporzione, che ha C, la cui lunghezza 10000, a C^d, la cui lunghezza 9640, la serba parimente C, la cui lunghezza 3789, a C^d, che posta in uso la nominata regola, si troverà lungo 3653. Con pari metodo si scoprirà il diametro del detto C^d 562, e si passerà poscia a stabilire le dimensioni di D, di E^b, di E ecc.

Sebbene poteva bastare il dilatar la tavola ad una sola Ottava. Determinato il secondo C, che in relazione al primo è lungo 6156, grosso 758, si prendano per date le mentovate misure, e dividendo la lunghezza in parti 10000, il diametro in parti 1000, chiaramente si scoprirà, che la distribuzione della prima Ottava serve altresì per la seconda, e per tutte l'altre, che seguono.

Per valersi utilmente della nostra tavola, fra varj cilindri pari di diametro, e diversi di lunghezza bisogna scegliere quello, che rende un suono vigoroso e chiaro, esclusi gli altri, che o per essere troppo lunghi rispettivamente alla grossezza producono un suono snervato, e senza corpo, o per essere troppo corti tramandano un suono muto, ed ottuso. Se il cilindro prescelto si trova unisono col C base d'uno strumento corista, s'intenda divisa la sua lunghezza in parti 10000, il suono diametro in parti 1000, ed in relazione a tali divisioni si ſtabiliſcano le miſure dei cilindri più acuti a norma della mia tavola. Che ſe lo ſteſſo cilindro foſſe uniſono ad un altro ſuono per eſempio *A* della prima Ottava; dovendo eſſere giuſto la tavola la lunghezza d'un tal cilindro 6965, ed il diametro 813; ſi concepiſcano diſtribuiti la lunghezza, ed il diametro nei detti numeri di parti 6965, 813, ed in riguardo a sì fatti compartimenti ſi determinino coll'ajuto della mia tavola le dimenſioni dei cilindri più gravi, e più acuti del dato cilindro *A*.

Se la lunghezza, ed il diametro del cilindro preſcelto foſſero dati eſempigrazia in linee, ſi potranno trovare le miſure degli altri cilindri eſpreſſe parimente in linee col mezzo della regola del tre. Sieno cogniti in linee la lunghezza, ed il diametro del cilindro *A* appartenente alla prima Ottava, e ſi voglia ſapere di quante linee debbono eſſer compoſti la lunghezza, ed il diametro del cilindro *C* baſe dello ſtrumento. Si faccia come la lunghezza del cilindro *A* a quella del cilindro *C* notate nella mia tavola, cioè come 6965 a 10000, così il numero di linee, che formano la lunghezza del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale, il quale s'eguaglierà al numero delle linee, che hanno da formare la lunghezza del cilindro *C*. Non altrimenti ſe faremo come 813 a 1000 diametri, che la mia tavolá aſſegna ai cilindri *A*, *C*, così il numero delle linee, onde conſta il diametro del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale; pareggerà queſto il numero delle linee componenti il diametro cercato del cilindro *C*.

In uno ſtrumento lavorato ſecondo il mio metodo gli ſcannelli ſu i quali s' appoggiano i cilindri, e che debbono ſtare ſotto i loro circoli d'ammortimento, hanno ad eſſere di figura curva, la quale facilmente ſi deſcrive, eſſendo nota dei mentovati circoli la poſizione.

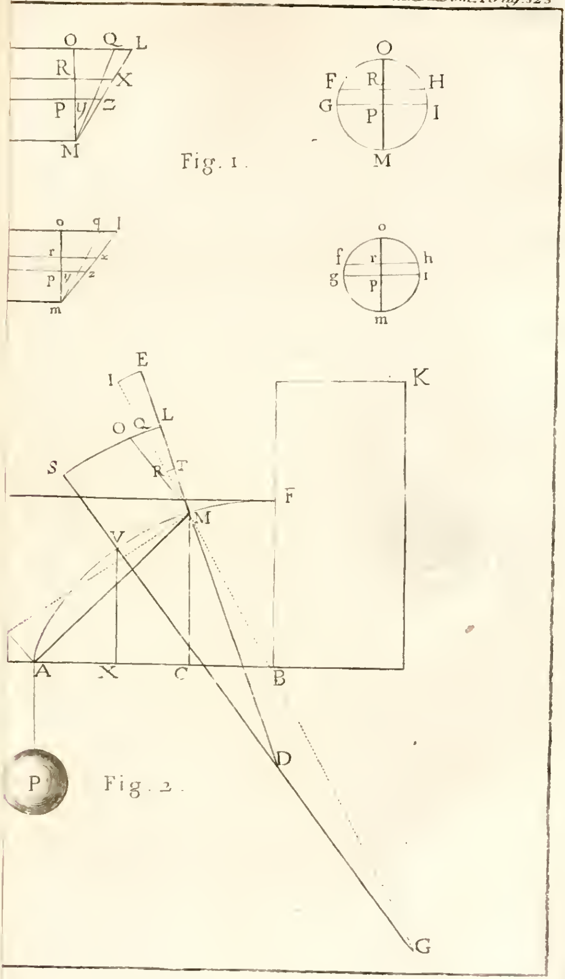

O
Q
L
R
X
P
y
z
M
O
F
R
H
G
P
I
M
o
q
l
r
x
p
y
z
m
o
f
r
h
g
p
i
m
E
I
L
O
Q
S
R
T
F
K
M
V
A
X
C
B
D
P
G
Fig. 1.

Fig. 2.

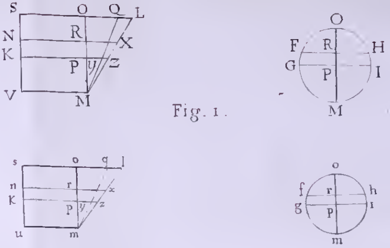

S
O
Q
L
N
R
X
K
P
y
Z
V
M
O
F
R
H
G
P
I
M
s
o
q
l
n
r
x
K
p
y
z
u
m
o
f
r
h
g
p
i
m

Fig. 1.

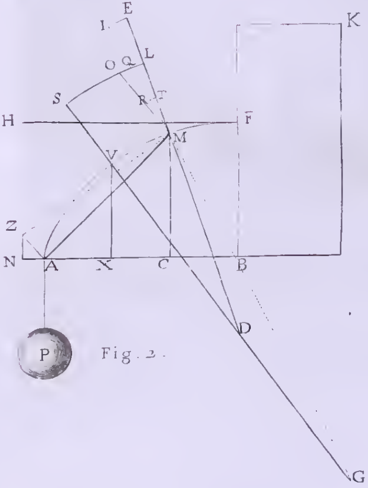

E
I
K
L
O
Q
S
R
T
H
F
M
V
Z
N
A
X
C
B
D
P
G

Fig. 2.

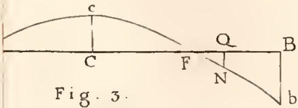


Fig. 3.

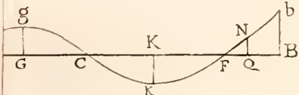


Fig. 4.

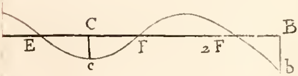


Fig. 5.

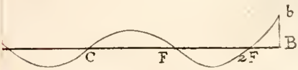


Fig. 6.

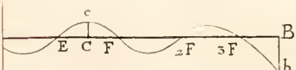


Fig. 7

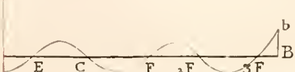


Fig. 8.

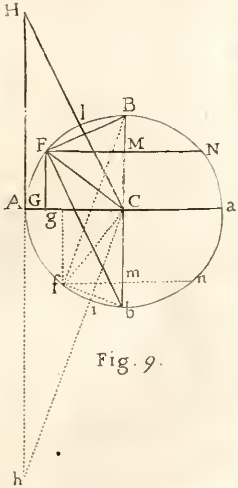


Fig. 9.

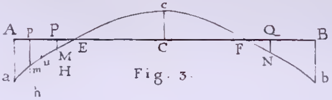


Fig. 3.

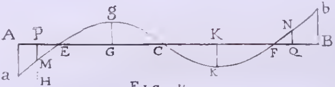


Fig. 4.

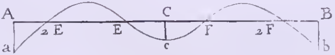


Fig. 5.

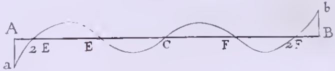


Fig. 6.

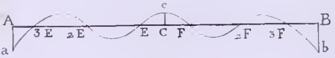


Fig. 7

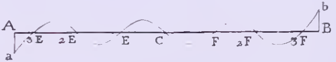


Fig 8.

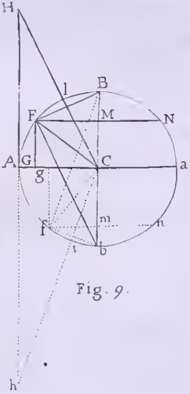


Fig. 9.

Lunghezze, e diametri dei cilindri per l' estensione di due Ottave temperate giusta il mio metodo.

	Logaritmi dei suoni.	Log. delle lunghezze dei cilindri	Lunghezze dei cilindri.	Log. dei diametri dei cilin.	Diametri dei cilindri.
C	0,0000000	4,0000000	10000	3,0000000	1000
C^d	0,0227556	3,9840711	9640 —	2,9908978	979 +
D	0,0492448	3,9655261	9237 —	2,9803006	956 —
E^b	0,0757412	3,9469812	8851 —	2,9697035	933 —
E	0,0984968	3,9310522	8532 +	2,9606013	913 +
F	0,1258908	3,9118764	8163 $\frac{1}{2}$	2,9496437	891 —
F^d	0,1481958	3,8962629	7875 +	2,9407217	872 +
G	0,1751392	3,8774026	7540 $\frac{1}{2}$	2,9299443	851 +
G^d	0,1983454	3,8611582	7264 —	2,9206618	833 +
A	0,2243876	3,8429287	6965 +	2,9102450	813 +
B^b	0,2513310	3,8240683	6669 +	2,8994676	793 +
B	0,2736360	3,8084548	6434 —	2,8905456	777 +
C	0,3010300	3,7892790	6156 —	2,8795880	758 —
C^d	0,3237856	3,7733501	5934 +	2,8705650	742 +
D	0,3502784	3,7548051	5686 —	2,8598886	724 +
E^b	0,3767712	3,7362602	5448 +	2,8492915	707 —
E	0,3995268	3,7203312	5252 +	2,8401893	692 +
F	0,4269208	3,7011554	5025 +	2,8292317	675 —
F^d	0,4492258	3,6855419	4848 —	2,8203097	661 +
G	0,4761692	3,6666816	4642 —	2,8095323	645 —
G^d	0,4993754	3,6504372	4471 +	2,8002498	631 +
A	0,5254176	3,6322077	4288 —	2,7898330	616 +
B^b	0,5523610	3,6133473	4105 +	2,7790556	601 +
B	0,5746660	3,5977338	3961 —	2,7701336	589 +
C	0,6020600	3,5785580	3789 +	2,7591760	574 +

OSSERVAZIONI

ED ESPERIMENTI

Sopra la Scompoſizione del Sale ammoniaco per mezzo della Calce terrea.

Del Sig. CONTE DI SALUZZO.

1. SOno a tutti note le ſingolari alterazioni, che arreca la calce al ſale ammoniaco, cioè la coſtante forma fluida, in cui s' ottiene l' alcali volatile; la riguardevole ſua cauſticità; la ſua ineffervefcibilità cogli acidi; ed un abbondantiſſimo ſviluppamento di vapori, che accompagnano queſta ſcompoſizione, dotati di tanta elaſticità, che ſe non ſi uſino le maggiori cautele, ne ſegue lo ſcoppio de' vaſi, ne' quali ſi fa l' operazione.

2. Varie ſin qui ſono ſtate le opinioni intorno alla cauſa de' riferiti fenomeni; ma quella dell' inſigne Sig. *Duhamel* era fra tutte la più diſtinta, perchè appoggiata ad una diligente ſerie di ben inteſi eſperimenti. Avea queſto valoroſo Accademico riuniti a ſuo favore i ſuffragi de' più illuminati coltivatori della naturale Filoſofia, ed erano attribuiti queſti effetti alla ſofferta modificazione della parte infiammabile di queſta ſoſtanza ſalina dall' azione cauſtica della calce, e dalla diſſoluzione dell' alcali volatile nell' acqua contenuta in queſta combinazione.

3. Prevale però al dì d' oggi una nuova dottrina, ch' è dipendente da quella che fa il fondamento della

teoria della caufticità ingegnofamente prodotta dal celebre Sig. *Black*.

4. Mio affunto è pertanto l' efaminare di nuovo la vera caufa delle fopraccennate alterazioni, e dovrà l'efperienza decidere una così importante ed intricata quiftione.

5. Il valente Chimico Sig. *Bucquet* entrato anch' effo in fofpetto contro l' azione efclufivamente in quefto fiftema afcritta alla privazione totale d' aria fiffa nella calce viva per produrre i narrati effetti ful fale ammoniaco, ha fatto varj ingegnofi efperimenti. Mi fono fingolarmente con effo incontrato in quello, con cui direttamente ha efplorata l' influenza da affegnarfi alla prefenza dell' aria fiffa fuddetta, al dì d' oggi conofciuta e comprefa fagaciffimamente nella claffe dei gaz (*a*) dal celebre Autore del Dizionario di Chimica Sig. *Macquer*; ma non pertanto può fondatamente dirfi appieno efaufto l' argomento, mentre fenza verun efperimento diretto paffa a conchiudere a favore d' una caufa mifta, cioè dell' azione combinata del principio acquofo coll' aria fiffa o gaz cretaceo (*gàs crayeux*) o mofetico.

6. Era quefta parte d'un mio lavoro molto più eftefo fu quefto foggetto rimodernato già compiuta da molto tempo, allorchè mi venne alle mani il IX. Vol. *delle Mem. prefentate all' Accademia di Parigi*, nel quale trovafi la belliffima differtazione del Sig. *Bucquet*; ma quantunque vi abbia incontrato una piacevole conformità d' idee fu varj punti, ho avuta la foddisfazione di vedere, ch' era io avanzato affai più oltre proccurando di fviluppare l' ofcura caufa delle effervefcenze, e di altri punti molto intereffanti.

7. Sono le effervefcenze generalmente attribuite allo

(*a*) Quefto valorofiffimo chimico ha ordinato fotto il vocabolo generale di gaz tutti i fluidi aeriformi finqui conofciuti per meglio diftinguerli, e contraffegnarne i caratteri fpecifici.

sprigionamento d' un fluido elaſtico ; ma ſi riconoſcerà evidentemente che l' eſpulſione dei gaz non è che un effetto, il quale rende manifeſta la cauſa di quanto ſuccede in quelle circoſtanze ; cioè allor quando da una forza eſterna alla ſoſtanza paſſiva ſi giunge a ſuperare la forza di contatto, che trovaſi tra le parti della medeſima ſoſtanza, e ſe ne proccura la diviſione, e l' uniforme diſtribuzione colle parti del fluido , che eſercita la ſua attività: ſe dunque trovanſi de' principj volatili nelle ſoſtanze di cui ſi proccura la combinazione, dovranno eſſi neceſſariamente venire eſpulſi in ragione dell' attività, colla quale opera il menſtruo, e della reazione delle forze particolari, di cui ſono dotate le parti della ſoſtanza; e queſta eſpulſione non ſarà che un effetto neceſſario, e concomitante delle alterazioni prodotte reciprocamente nelle parti delle materie combinate.

8. Non mi eſtenderò anticipatamente in teoriche riflesſioni ; e per iſchivare una faſtidioſa ripetizione degli apparecchj onde ſoglio far uſo da più di venticinque anni in tutte le operazioni, nelle quali ſi ſviluppano vapori di grande elaſticità, ne deſcriverò (*Tav. I. fig. I*) qui uno de' principali; quello di cui mi ſono ſempre ſervito per la ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce, il quale non molto differiſce dall' apparecchio che ſoglio impiegare per l' acido nitroſo fumante (*fig. II*) e per lo ſpirito di ſale, e che avuti i debiti riguardi ſerve ottimamente in tutte le ſperienze della produzione de' fluidi aeriformi, oſſia gaz . Debbo però confeſſare, che non m' è mai venuto in mente che la combinazione, che ſi trova negli apparecchj di queſta ſpecie, poteſſe far epoca nella ſtoria de' progreſſi delle umane cognizioni , e che doveſſe un dì fiſſare l' attenzione de' Filoſofi , parendomi che da qualunque Fiſico avvezzo ad oſſervare e ſperimentare , ſe ne poteſſe facilmente immaginare, e promovere l' uſo; dalla deſcrizione

zione de' miei si potrà raccogliere, considerandoli con imparzialità, se debbo anch'io attribuirne l'idea al Sig. *Woulfe*, come fa il Sig. *Priestley*, e qualche altro.

9. Le storte *AA*, che io soglio adoperare per queste sperienze, hanno l' estremità del loro collo *BB* fatto a forma di cono, perchè possano facilmente insinuarsi, ed essere lutate nei tubi di comunicazione *CC*, che per la stessa ragione dalla parte per cui vengono insinuati nei tubetti *H* dei palloni *X* hanno una figura conica.

10. Questi miei palloni *XX* hanno ciascuno diversi di questi tubetti *HH* in differenti ed opposte direzioni; poichè in alcuno di essi v' è adattato con luto un tubo di comunicazione *RR*; in alcun altro evvi solidamente fissato con tenace mastice un cannello a chiave di ottone *Y*, il di cui foro interno è coperto da un tubo di vetro, che difende il sottoposto ottone dall'azione dissolvente dei vapori acidi od alcalini che per esso si traducono. La chiave *K* di un tal cannello è di avorio o di corno, e meglio anche di un metallico serve un cannello tutto di cristallo.

11. Dall'estremità di questo cannello *Y* parte un tubo di cristallo *MM*, il di cui braccio più lungo discende e penetra pel coperchio nel vase cilindrico *SS* fino quasi a toccare il fondo del medesimo, affinchè i fluidi aeriformi che passano per il tubo *MM* abbiano ad attraversare un altro strato di liquore contenuto nel vase *SS*, il quale a questo oggetto deve essere molto alto.

12. Oltre a ciò, questo vase ha un coperchio traforato da più fori, in ciascuno de' quali è insinuato a tenuta d' aria un tubo ricurvo di vetro *OO*, che penetra nel rispettivo vase cilindrico *TT*. Ognuno dei vasi cilindrici, le di cui capacità sono relative alla qualità dei liquori, di cui sono ripieni, ha un coperchio a tenuta d'aria, il quale oltre al foro, per cui s'introduce il tubo *OO*, ha un cannello a chiave, al di cui collo è legata una vescica *P*.

13. Il liquore, di cui faccio uſo per queſto apparato, e di cui riempio i vaſi *TT*, *SS*, è principalmente l' acqua diſtillata, onde riempio il recipiente più grande *SS*, ch' io chiamo il recipiente principale, poichè queſto fluido è il più innocente feltro pe' vapori aeriformi. Negli altri vaſi *TT* ecc. ſoglio verſare dell' acido nitroſo concentrato, dell' olio di vitriolo, dell' acido marino, dell' acido acetoſo concentrato, dell' olio di tartaro, del liquor cauſtico ecc.

Ne' liquori acidi ho avuto ſempre l' avvertenza di porre una foglia d'oro, perchè m'è nato lo ſcrupolo, che nell' atto della ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce ſi eſali dell' acido marino ſotto forma vaporoſa per la poca aderenza, ch' egli ha colle terre calcaree, e per la grandiſſima ſua affinità coll' acqua ſpecialmente, perchè la ſcompoſizione ſuddetta è ſempre accompagnata da notabile calore, e dall' elaſtica eſpulſione dell' alcali volatile.

Al tubetto ſuperiore *H* del pallone *X* è fiſſato il tubo di comunicazione *RR*, che ſi uniſce al cannello *G* fiſſato nella ſommità della campana *LL*, la quale ripiena d'acqua è immerſa in un vaſe *II* parimenti ripieno d'acqua (*b*).

(*b*) Siccome in tutte le operazioni, che diremo Chimico-fiſiche, ſempre ſi fa un vuoto più o meno notabile nelle capacità principali, cioè in quelle nelle quali debbono ſeguire le ſcompoſizioni o combinazioni, qualunque ſia il modo o per via umida o ſecca, o finalmente per una via miſta, e ſia o nò impiegato il ſuſſidio del fuoco; così due condizioni hanno da riempiere gli apparecchj, quella cioè di ammettere l'aria, e gli altri fluidi eſpulſi; e quella di reſtituire alle capacità vuote l' aria ſtatane ſcacciata. Ma dovendo determinare ſe il fluido raccolto ecceda l'aria eſpulſa, e giudicare con ſicurezza, ſe ſiaſi fatta produzione di fluido aeriforme coſtante, ſarà il mezzo più ſicuro, e più pronto quello di far paſſare dai recipienti colle dovute cautele il riſpettivo gaz entro ad una campana piena d'acqua, la quale abbaſſandoſi ſino al livello ſia ſufficiente a contenerlo tutto; e quindi da queſta ſia ſtabilita una comunicazione col pallone al tubo di comunicazione *RR* ſuperiore o altrimenti; ſicchè finita l'elaſtica eſpulſione, ed aperta queſta comunicazione ſi riaſſorba dalle capacità vuote il fluido contenuto nel-

L'apparato rappresentato nella fig. II. non è molto diverso da quello della fig. I., ed è pure simile a quello della fig. I. Tav. II., poichè non sono che leggere differenze le modificazioni, che vi si scorgono, talchè stimo inutile il farne minuta descrizione, bastando una semplice osservazione delle tavole, onde comprendere la moltiplicità ed estensione degli usi.

14. Tutte le cose descritte potranno comparire a prima vista minute e soverchie; ma non sarà questo giudizio chi è solito a far frequenti operazioni di tal natura. Premesse pertanto siffatte materiali notizie passerò a dare contezza del seguito esame, rimettendo sotto gli occhi de' rispettabili Accademici, che la privazione d'aria fissa supposta nella calce viene assegnata per unica cagione della sua causticità (poichè si prende dimostrata questa privazione dal non ottenersi effervescenza almeno notabile, nel combinarsi la calce viva cogli acidi, qualvolta sia ella buona e ben cotta); nè altrimenti si spiega la causticità della pietra caustica, dell'alcali fisso caustico in forma fluida, dello spirito volatile caustico ecc.

15. Si potrebbe speditamente troncare la difficoltà per provare l'insussistenza del raziocinio riguardo allo spirito volatile caustico, dicendo, che la calce che deve impiegarsi per ottenerlo non è viva, e perciò in circostanze del tubo diverse dalle supposte: tanto più che effervescente quanto mai è la calce estinta; ma non farò per prevalermene, e comincerò dall' esame di ciò, che avviene colle accennate sostanze nello stato di massima causticità.

la Campana; e dal riempiersi o nò di nuovo d'acqua la Campana suddetta si abbia sicuro riscontro dell' avvenuto: non essendovi altra differenza fra questi apparecchi, salvo che questo è veramente più dimostrativo: riesce però un po' più fastidioso, ma serve più acconciamente per quelle operazioni nelle quali il gaz è filtrato da' recipienti comunicati insieme, come nelle operazioni degli acidi nitroso e marino. *Tav. II. Fig. I.*

16. Prendasi adunque della miglior calce uscita appena dal fuoco; si lasci raffreddare, ed in un mortajo alcun poco riscaldato la si faccia in pezzi, de' quali fatta scelta de' più grossi s' immergano questi nell' acqua forte; poco o nulla si vedrà uscire di bollicine dalla medesima; e mentre si fa questa osservazione si pestino prestamente alcuni altri pezzi, e se ne getti la polvere a poco a poco nell' acido suddetto. Si vedrà tanto maggiore l' effervescenza quanto più minutamente stritolata e polverizzata è la calce (*c*).

17. Ciò che succede con la calce viva più manifestamente avviene con la pietra caustica, e col vetro siliceo; mentre l' acqua forte stessa, la qual non dà il menomo segno d' azione sopra queste materie, quando sono in grossi pezzi, per poco che sia concentrata, coll' aggiunta a poco a poco d' alcune gocce d' acqua, manifesta una sensibile effervescenza, la quale diventa notabilissima tosto che le materie sopraddette sieno ridotte in fina polvere.

18. Non ostante l' opinione generale dell' ineffervescenza di queste materie cogli acidi, mi pare che sarebbe stato almeno prudente di diffidarne, ponendo mente che (*d*) in altre circostanze si è dimostrato con esperimenti ingegnosissimi, che i gaz risultano dalla scomposizione degli acidi; così la privazione di gaz in quelle sostanze dovrebbe a mio giudizio essere cagione d' una effervescenza più viva, perchè la tendenza e avidità, per così dire, delle sostanze a ripigliare i principj, onde sono state spogliate, deve essere in ragione dell' affinità,

---

(*c*) Soglio preferire l' acqua forte all' acido più concentrato, e specialmente all' acido vitriolico, perchè sono più sensibili questi effetti.

(*d*) Ecco come si esprime il valoroso Sig. *Lavoisier* in una sua Memoria sopra l' esistenza dell' aria nell' acido nitroso (Mem. dell' Accad. per l' anno 1776. p. 672.) *Non è dal metallo, che provengono queste differenti specie d' aria, come avrò molte occasioni di farlo vedere; esse sono dovute alla scomposizione dell' acido stesso ecc.*

che questi medesimi principj avevano colle altre parti del misto, e della maggior espulsione, che se n'è fatta.

19. Da queste sperienze semplicissime mi pare dimostrato che le effervescenze non dipendono dalla preesistenza dei gaz o dell'aria nelle materie, che affettano questo movimento cogli acidi; ma un nuovo fatto sarà riprova della verità di questo principio. Si prenda del vetro siliceo, il quale non contiene alcun gaz; si pesti sottilmente in un mortajo riscaldato, e vi si versi sopra dell'alcali volatile caustico non effervescente: si farà nel momento del contatto un'effervescenza uguale a quella, che può fare il miglior acido coll'alcali fisso. Nelle stesse circostanze ha luogo lo stesso fenomeno fra quest'alcali volatile, e la pietra caustica; e medesimamente la calce viva; tutta la differenza consiste nel grado di attività, quella col vetro siliceo essendo la più violenta, e quella con la pietra caustica superando quella della maggior calce.

20. Quantunque io ammetta l'esistenza d'un acido nello spirito volatile caustico, come avrò occasione di dimostrarlo in progresso, sarà però sempre vero, che lo spirito volatile ben fatto è reputato ineffervescente cogli acidi; e che da tutti si crede che la sua ineffervescibilità sia dovuta alla mancanza di gaz; che il vetro siliceo in grossi pezzi non è effervescente, e che dal celebre Sig. *Bergmann* si dice spoglio di gaz; che la pietra caustica finalmente e la calce viva sono riconosciute per sostanze ineffervescenti cogli acidi. Forz'è dunque conchiudere, che non è allo sviluppamento dell'aria nè di un gaz pneumatico, che si debbono attribuire le effervescenze. Ma ecco ancora nuovi fatti che avvalorano questa verità.

21. Se si combini della calce viva (la quale in grossi pezzi non è effervescente) con uguale quantità di spirito volatile parimenti ineffervescente entro una storta di vetro, e se ne faccia la distillazione, impiegando un

tubo di barometro col mercurio per accertarsi, che non si fa alcun assorbimento dell'aria contenuta nelle capacità, o qualche altro mezzo per assicurarsene; come pure perchè non resti sospetto sul perfetto suggellamento dell'apparecchio; dopo che saranno passati i vapori elastici nel recipiente, l'aria sarà riassorta, e quando la calce comparirà quasi sfogliata e bianchissima, e non passerà più cosa alcuna, lasciato cadere il fuoco, e raffreddata a vasi chiusi, se la si cimenti cogli acidi, manifesterà ella l'eminente proprietà, ch'avrà acquistato di far effervescenza eziandio collo spirito d'aceto; se invece d'impiegare della calce si coobi lo spirito volatile ineffervescente sopra la pietra caustica o sopra il vetro siliceo pestato, in un simile apparecchio, sarà lo spirito volatile, che sarà divenuto incomparabilmente più potente e più volatile, e fatto sommamente effervescente. Ecco qui altre sostanze reputate prive di gaz perchè non fanno effervescenza cogli acidi, le quali dopo di essere combinate tra di sè sono grandemente effervescenti.

22. Parmi conveniente di osservare, che non ostante che non si faccia altro in queste operazioni, che una concentrazione di liquori, la volatilità de' vapori e l'elasticità loro produce un vuoto nella storta; e non mancherebbe di farsi un assorbimento se s'impiegassero apparecchj a feltro *(e)*. Ma in questo caso basterebbe separare la parte dell'apparecchio, la quale è unita al pallone, e adattare al cannello a chiave successivamente le vesciche che sono state riempiute di gaz. Comunque ciò segua, è questo gaz soggetto alle stesse affezioni di tutti gli altri fluidi aeriformi nitroso, marino, e degli altri riferiti dal Sig. *Macquer*; cioè essendo essi ridotti

(e) Per apparecchio a feltro intendo qualunque apparecchio, col quale si proccuri il dilavamento dei gaz entro qualche liquore.

al minimo dell' acqua neceſſaria alla loro eſſenza ſalina, e conſeguentemente nel maſſimo grado di concentrazione, acquiſtano l' apparenza aeriforme. Non mi tratterrò per ora ſull' importante ſingolarità delle effervefcenze delle riferite ſoſtanze fra loro, baſtandomi di richiamarle dopo di aver reſo conto d' alcuni altri fenomeni, che non ſono ancora ſtati oſſervati, e da' quali ſi ricava la prova della verità di queſti riſultati, ſomminiſtrandoci lo ſcioglimento di molte importantiſſime verità.

23. Ho già oſſervato nel §. 5. che i Fiſici ſull' autorità del dotto Sig. *Black* aſſegnano per cauſa della cauſticità di alcune ſoſtanze la ſola privazione totale dell' aria fiſſa o del gaz mefitico; ed ha per verità queſto valente Ingleſe ſagacemente appoggiata la ſua teorica alle ſperienze, che ha fatto ſulla calce terrea. Il Sig. *Macquer* col Sig. *Lavoiſier* e molti altri Filoſofi del primo ordine hanno abbracciata queſta ſteſſa dottrina; ma raccogliendo e combinando i ſentimenti ſparſi ne' varj articoli del Dizionario di Chimica, ſembra che l' illuminato Autore colla ſolita ſua avvedutezza riguardi l' eſpulſione di queſti fluidi elaſtici, oſſia gaz, come un fenomeno inſeparabile dall' azione, che produce la cauſticità. In fatti egli è fuori di dubbio, che queſta circoſtanza non può non aver luogo nella maniera d' eſſere in cui ſi riduce un corpo, per poter quindi eſercitare quella forza reciproca, da cui prende anima la natura, e che è eſpreſſa in una maniera energica da' varj effetti, che ella ad ogni paſſo ci offeriſce; forza già da gran tempo riferita da' Geometri alla gravitazione univerſale, e che conſiſte nella maggiore o minore omogeneità, che ſi procura tra le parti della materia.

24. Queſto effetto dunque non mi pare che una circoſtanza concomitante da cui può derivare una diſpoſizione più favorevole alla materia per manifeſtare gli ef-

fetti della caufticità (*f*), fempre che le altre circoftanze vi concorrano; ma la ferie delle fperienze, che comincerò a dare in quefto Saggio, mi fembrano baftanti per convincerci dell'efiftenza d'un principio pofitivo ridotto ad uno ftato di perfetta inerzia, fin che non è eccitato dalla reftituzione del principio acquofo del quale egli è ftato intieramente fpogliato in certa fpecie di foftanze cauftiche. (*g*)

25. Sono tanto più difpofto a feguire quefta mia opinione, da me già annunciata nella prima parte d' una Memoria fopra il *fal nitro* (*h*), quanto che effa non mi allontana dalle idee luminofe del Sig. *Macquer*, e da quelle del detto Sig. *Lavoifier*. Il primo parlando della fufibilità, che le terre calcaree (*i*) proccurano alle fabbie, e alle argille, fi fpiega in quefti termini: *quefto fenomeno, del quale la caufa è molto ofcura e difficile a rinvenirfi, pare che dipenda da una difpofizione paticolare del principio infiammabile, e forfe da un' ultima porzione del principio acquofo;* e la fua opinione intorno ai gaz aeriformi è, *che le foftanze faline* (*l*) *acide o alcaline in quefto ultimo grado di concentrazione hanno una*

(*f*) Dall'efpulfione di molti principj eterogenei delle materie fottopofte a violente operazioni nafce per neceffaria confeguenza una più o meno perfetta omogeneità fra le parti, che rimangono, e fi fa tra effe un maggior adattamento. Da quefta più grande femplicità rifulta manifeftamente un'affezione paffiva, che procura alle foftanze una maggior forza per attrarre e combinarfi co' principj, co' quali fi mettono in contatto. Laonde può effere attiva la tendenza alla combinazione in certe foftanze, ed affatto paffiva in altre, come appunto nella calce viva, ed altre fimili, nelle quali tuttavia farei per fofpettare non fenza fondamento, che rimaneffero ancora alcuni principj eterogenei, ma ridotti per l'eftrema concentrazione ad uno ftato di totale inerzia.

(*g*) Non credo di potermi difpenfare dal diftinguere i cauftici in attivi, e paffivi.

(*h*) Quefta Memoria non ha potuto effere ammeffa al concorfo per effere giunta troppo tardi; ma è ftata però ritenuta.

(*I*) V. queft' articolo alla p. 71. *Tom.* 4.

(*l*) V. l'artic: gaz alcali volatile alla p. 30.

una tendenza estrema a combinarsi in generale con un gran numero di altre sostanze, e particolarmente coll'acqua: questi punti di vista, convien dirlo, sono grandi, luminosi, e degni della reputazione del loro Autore.

26. Non debbo ommettere di rendere anche la giustizia dovuta alla superiorità de' talenti, ed alle cognizioni del dotto Sig. *Lavoisier*, il cui ingegno si manifesta in tutte le sue opere. Parlando questo Autore dell' aria o del gaz nitroso, dice ch' egli è *l' acido spoglio d' aria e d' acqua*; ch' è quanto dire un acido reso inerte per la massima sua concentrazione *(m)*. Egli è vero che un dotto Accademico non pare soddisfatto di questa definizione, e che non ostante la sua arrendevolezza nell' ammettere la possibilità di concentrare quest' acido sino a ridurlo ad uno stato concreto, pensa tuttavia per analogia col zolfo (nel quale il celebre *Stahl* ha dimostrato l' esistenza dell' acqua) che quest' acido così concreto non sarebbe privo d' aria nè d' acqua; ma siccome non reca alcuna esperienza per prova dell' inesattezza di quella opinione, ed io avrò in seguito occasione di riferire de' fatti, che sembrano stabilirne la solidità, non mi estenderò più oltre in queste osservazioni.

27. Intanto per non abbandonarmi alla seduzione, che può eccitare l' amor proprio, e la prevenzione, mi sono determinato a cominciare da una breve analisi delle opinioni de' Fisici, e particolarmente del sistema del Sig. *Black* intorno alla causticità, sperando così di non essere sospettato di abbandonarmi alla ripugnante disposizione di censurare gli altrui sentimenti.

28. Quale è dunque la causa della causticità? Ella è l' intiera espulsione del gaz dalla terra calcarea, risponde il Sig. *Black* e con esso lui un grandissimo numero d' eccellenti Fisici.

(*m*) Mem. dell' Accad. p. 680.

29. Egli è un acido d'una natura particolare associato alle parti del fuoco, il quale non è che una fissazione e concentrazione delle parti della luce, risponde il Sig. *Meyer* seguitato da alcuni rispettabili dotti (*n*).

Ristringendomi per ora al sistema del Sig. *Black* per il rapporto immediato, che egli ha coi gaz, debbo osservare prima d' ogni cosa, ch'egli non è dotato del carattere di generalità, che pur mi pare indispensabile allo stabilimento d' una verità primaria e fondamentale, la cui estensione ed importanza influisce nello sviluppamento di molte verità particolari. In fatti essendo egli limitato a rendere ragione della causticità delle calci terree, e di alcuni prodotti, che vi hanno rapporto, bisogna poi ricorrere ad altra causa, sovente anche contraddittoria, per ispiegare la causticità di molte altre sostanze: come sarebbe per gli acidi, per gli alcali, pe' sali metallici (*o*), pe' fosfori, e pirofori ecc. Ma basti per ora di averne fatto parola.

31. La calce viva è dunque caustica perchè è riputata del tutto priva di gaz, e si è pensato così a cagione di sua creduta ineffervescenza cogli acidi: ma dopo le sperienze già riferite, non credo che si possa ragionevolmente continuare in questa opinione, perchè abbiamo dimostrato, che l' ineffervescenza della calce viva e di molte altre sostanze caustiche dipende unicamente dal contatto più perfetto fra la parti in cui sono ridotte, alle quali poi proccurando una divisione anche pu-

---

(*n*) E' stata l' opinione del Sig. *Meyer* diversamente modificata da altri dotti, ed egli stesso non ha fatto che risuscitare le opinioni degli antichi; ma come oggi è riguardato quest' Autore per capo di questa dottrina, e si possono far entrare in quell' opinione tutte le modificazioni fattevi da altri, credo di potermi dispensare dal farne ulteriore menzione, perchè non è ancora tempo di discuterne la solidità.

(*o*) Penso che si debba far distinzione tra le sostanze saline metalliche, e le calci fatte col fuoco pel carattere di causticità, del quale sono dotate le prime, mentre la stessa proprietà non si manifesta almeno sensibilmente nelle seconde.

ramente meccanica, di modo che preſentino una maggior quantità di ſuperficie all' azione dell' acido, ſi ottengono le effervefcenze: fenomeno che parmi ſtabilire ſenza reſtrizione la ſolidità della teoria della tendenza della materia a combinarſi, teoria ſpiegata con tanta eleganza dal Sig. *Macquer* (*p*).

32. Il ſentimento però de' Fiſici par che riceva una forte conferma dal paſſaggio o traſporto che ſi pretende di proccurare al gaz delle ſoſtanze, che lo contengono in quelle, che ne ſono ſprovviſte; e fra i varj eſempj che ſe ne recano, quello della ſcompoſizione del ſale ammoniaco (*q*) colla calce viva ſembra ſomminiſtrare una dimoſtrazione aſſai ſolida a favore di queſta teoria. Di fatto, diceſi, togliendoſi dalla calce viva il gaz al ſale ammoniaco, non è ſtraordinaria coſa il vedere che l'alcali volatile, che ne riſulta, ſia totalmente ineſſerveſcente cogli acidi, e ſia dotato della più potente cauſticità (*r*): ma nell' atto di cedere alla forza di queſti argomenti, altri fatti ſi preſentano, i quali baſtano per indurre la maggior diffidenza.

33. Senza entrare per ora nella nojoſa diſcuſſione di molti fatti implicanti contraddizione evidente coll' aſſunto principio, e impegnarci in una proliſſa enumerazione di fenomeni ripugnanti, li quali non avrebbero un rapporto diretto colla ſcompoſizione del ſale ammoniaco in alcali volatile cauſtico, di cui è attualmente quiſtione, mi baſta di qui richiamare la ſcompoſizione di queſto ſteſſo ſale, che ſi ottiene per mezzo delle calci metalliche. L' alcali volatile che ſe ne ricava è di ſom-

(*p*) Anch' io ho fatto uſo di queſta forza di contatto nelle Mem., che ho ſcritto ſul fluido elaſtico della polvere V. Miſc. Taur. *T.* I. an. 1759.

(*q*) Quello dell' alcali cauſtico, dal quale ſi ricava la pietra cauſtica, è pure un eſempio di queſto traſporto.

(*r*) V. gli Art. del Dizionario di Chimica (*Alcali volatile ammoniaco*) (*ſale*) (*cauſticità*) (*calci* ecc.)

ma caufticità, ed in forma fluida, colla differenza poi, ch'egli è effervefcente cogli acidi (*s*). Ma le calci metalliche fi vogliono pur cariche di gaz. Ognun vede pertanto ciò che ne confegue legittimamente.

34. Ora prima di paffare più oltre debbo offervare, che le alterazioni, che foffre l'alcali volatile nella fcompofizione del fale ammoniaco colla calce, le quali nel fiftema del Sig. *Black* fono affegnate all'azione dell'aria fiffa, come fi esprime il Sig. *Bucquet*, fono, come ho già detto fin da principio, 1°. che l'alcali volatile che fe ne ottiene è fempre fotto forma fluida; 2.° ch'egli è potentemente cauftico; 3.° ch'egli è ineffervefcente cogli acidi; 4.° che quefta fcompofizione è accompagnata da uno fviluppamento tumultuofo di vapori, riguardato da molti Fifici per una vera produzione d'aria o di gaz, la quale non manca di cagionare la rottura de' vafi fe non fe gli dà fcampo libero opportunamente. Siffatte alterazioni effendo confiderate come proprietà, che diftinguono queft' alcali volatile da quello che rifulta dalla fcompofizione del fale ammoniaco colla creta, e coll'alcali fiffo, ho creduto di doverne fare l'oggetto di un efame tanto più metodico quanto mi è fembrato egli più proprio a conciliare gradi di fede alla nuova teoria della caufticità.

35. Le fperienze delle quali ho refo conto per riguardo all'effervefcibilità della calce mi pajono per verità

(*s*) Il Sig. *Bucquet* rifpettabiliffimo Chimico avea intraprefo l'efame di quefto oggetto, e lo pubblicò prima, che foffi determinato di dare alla luce le mie ricerche fu quefta fteffa materia, dovendo elle far parte d'un'opera molto più confiderabile. Mi fo pertanto un dovere di rendere qui un giufto tributo di ftima alla fua Memoria rimettendo al giudizio de' dotti le cofe noftre. E ritornando al mio oggetto mi prevalerò de' termini di quefto illuftre Fifico Francefe nel fuo eccellente Scritto fu quefto fale inferito nel IX. vol. des *Sau etrang.* p. 572., *nel fiftema del dottore Black fi attribuifcono* (dice queft' Autore) *all' azione dell' aria fiffa le alterazioni che foffre l' alcali volatile nella fcompofizione del fale ammoniaco colla calce* ecc.

baſtanti a diſtruggere la ſuppoſizione, alla quale s' appoggiano i Fiſici, cioè ch' ella dimoſtri l' eſiſtenza d' un gaz ; ma dovendoſi ragionevolmente diſtinguere queſti fluidi aeriformi in una maniera più ſpecifica, onde formarne idea meno confuſa , ſtimo bene di dividerli , e conſiderarli generalmente in *gaz pneumatici*, ed in *gaz vaporoſi* ; giudicando conveniente di dichiarare la mia opinione ſu queſto movimento, ottimamente eſpreſſo dal dotto Autore del Dizionario di Chimica, e parendomi altresì indiſpenſabile di diſtinguere la cauſa d' un effetto dalle circoſtanze , che poſſono accompagnarla . E' dunque la mancanza totale del principio acquoſo, a mio parere, e così d' ogni qualunque gaz , una circoſtanza di fatto, oſſia una conſeguenza neceſſaria del tormento ſofferto dalla ſoſtanza terrea. Queſta diſunione promoſſa con una cauſa così violenta non fa che rimettere la materia in uno ſtato di omogeneità , da cui dipende l' accennata forza della tendenza alla combinazione; forza dipendente dal contatto più o meno eſatto delle parti, il quale riduce le ſoſtanze in uno ſtato di eſtrema aridità, e le rende avide di nuove aſſociazioni, che più o meno perfette , più o meno pronte riuſciranno , in ragione del contatto loro con altre ſoſtanze , e delle proprietà di queſte . Così prontiſſimo ſarà il riaſſorbimento dell' acqua dalla calce, perchè è diffuſo più uniformemente (per la ſua ſemplicità e per la ſua fluidità) e più permeante queſto principio di natura: e ſeco reſtituirà una parte dell' aria, perchè ne contien ſempre in iſtato , dirò col Sig. *Roux*, di diſſoluzione; come in ſimile ſtato contiene i principj d' acidità negli acidi, e d' alcalinità negli alcali.

Ma appunto dal conflitto che naſce nel combinarſi di queſte materie pel rapimento che fanno le une del principio acquoſo alle altre, e per cui ſegue neceſſariamente la loro ſcompoſizione, naſce il movimento che conoſciamo ſotto il nome di effervеſcenza, nel quale lo ſprigionamento di qualunque principio volatile è allora unicamente dovuto, come ottimamente penſa il Sig. *Lavoiſier*, alla ſcompoſizione dell' altra ſoſtanza qualunque, il che ha luogo anche più generalmente, non eſſendo riſtretto il caſo al ſolo acido, del quale parla queſto valoroſo Accademico.

36. Molti inſigni Scrittori, fra' quali il Sig. *Bergmann*, dubitano che ſi poſſa confondere queſto movimento delle effervefcenze con quello che è proſſimamente conforme al moto prodotto dall' ebullizione; ma baſta eſaminare le circoſtanze degli effetti, che ne naſcono, onde non temere di prendere abbaglio: mentre non riſulta dal moto di ebullizione altro effetto, che quello d' un' accelerata diſſipazione del principio evaporabile ſenza che venga prodotta mutazione eſſenziale nelle ſoſtanze, ſalvo che nella diſtribuzione de' principj meno volatili. All' oppoſto le effervefcenze ſono ſempre un ſicuro riſcontro di alterazione nelle medeſime. E' vero che nell' uno e nell' altro caſo vi può eſſere, e vi ſarà eſpulſione più o meno compiuta delle parti volatili, e più diſpoſte alla ſvaporazione; ma ſarà queſto nel caſo dell' ebullizione il maſſimo effetto, che ſi può aſpettare; e nelle effervefcenze ſarà ſoltanto una circoſtanza neceſſariamente concomitante. La fermentazione *animata* potrebbe più giuſtamente dar a temere di equivoco, perchè riuniſce le circoſtanze de' due movimenti ſuddetti; ma per la ſua preſſo che uniforme equabilità anch' eſſa va a confonderſi finalmente in quello di putrefazione: moto generato dal concorſo generale delle forze della natura, che reſtituiſce l' equilibrio tra gli elementi nello ſtemperamento delle già logorate combinazioni, per reſtituirle ai puri rudimenti di materia informe; ed è queſto il riſultato di tutti, nè vi s' incontra la debolezza o la violenza ne' mezzi, nè il tumulto negli effetti, onde ſi deve meritamente riguardare come un perfetto temperamento riſerbato alla natu-

ra per produrre, ad onta nostra, quelle trasformazioni continue, colle quali conserva un' assai equilibrata uniformità nelle cose sue; ciò che non senza fondamento ha dato motivo a' nostri antecessori di farne un sistema di dottrina compreso nel volgare adagio *corruptio unius est generatio alterius*. Ma troppo mi sono scostato dal mio assunto, perlochè troncata ogni ulteriore digressione ripiglio l' argomento.

37. Egli è dunque abbastanza manifesto, che seguendo l'opinione che l'effervescenze provino l'esistenza dei gaz, avendo noi dimostrato, come è facile a ciascheduno di convincersene, che le sostanze, le quali si pretendevano ineffervescenti, presentano per altro questo movimento, ogni volta che si distrugge, anche meccanicamente, la forza di tendenza, colla quale i principj stavano uniti fra loro; tutta la teoria della causticità dipendente dalla privazione del gaz viene legittimamente confinata fra gli enti di sottile speculazione; e perciò intieramente distrutta. Ma per non dipendere più la causticità delle mentovate sostanze da così comodo principio, non siamo dispensati dal mettere in opera ogni sforzo, onde indagarne la vera cagione.

Per accingermi dunque il primo a questo assunto, e per non iscostarmi dall' oggetto in quistione, comincerò dall' esaminare da che dipenda, che questo alcali è sempre sotto forma fluida; perchè questo liquore è caustico; se è vero ch'egli sia e debba essere ineffervescente cogli acidi; e finalmente se i vapori, che si manifestano nell'atto della scomposizione, sieno un gaz pneumatico, che si sviluppi, o se debbano soltanto attribuirsi ad una espulsione contemporanea dell'aria contenuta nelle capacità coi vapori alcali volatili, la cui elasticità iniziale è strepitosa e tumultuante.

38. Quantunque la calce viva non fosse effervescente cogli acidi, in qualunque modo ella s' impiegasse in frammenti più o meno minuti, saremmo tuttavia auto-

rizzati a ſoſpettare dell' eſattezza della ſuppoſizione nella circoſtanza particolare di queſto proceſſo; mentre gli ſperimenti irreprenſibili e ſtati ſin qui riſpettati del valoroſiſſimo Sigr. *Duhamel* ci mettono in diritto di dubitare, ſe ſia lecito ſupporre, che la calce la quale dee ſervire alla ſcompoſizione del ſale ammoniaco ſia ſcevra affatto di gaz, avendo queſto celebre Accademico provato deciſivamente, che non ſegue alcuna ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce veramente viva, e che è di tutta neceſſità d' impiegarla eſtinta (*t*): non è poi da dubitare che la calce eſtinta, comunque ſe ne faccia l' eſtinzione, non ſi trovi più nelle circoſtanze in cui era; e dalle ſperienze da me fatte, la ſemplicità delle quali mi diſpenſa da ogni dettaglio, riſulta eſſer certiſſima coſa che la calce eſtinta all' aria o nell' acqua riuniſce ogni condizione, per cui manifeſta cogli acidi un movimento più o meno impetuoſo, e che ſi conoſce ſotto il nome d' effervefcenza, non di ebullizione.

39. Se otteneſſi dunque di provare la falſità dell' aſſerzione, che la calce, la quale produce la ſcompoſizione del ſale ammoniaco, non è altramente nelle circoſtanze della calce viva, e che non potrebbe ella nè meno effettuarla finchè foſſe nelle circoſtanze di queſta, crederei ſoddisfatto il mio aſſunto; ma l' eſattezza dell' analiſi non mi permette d' attenermi alla ſola confutazione del fatto, e mi ſtimo in dovere d' aggiugnere tutto ciò

(*t*) Il Sig. *Fourcroy* nelle ſue Lezioni dice per verità alla p. 282., che la calce eſtinta all' aria ſcompone queſto ſale ugualmente, che la calce viva. Queſta oſſervazione m' è giunta inaſpettata, eſſendo diametralmente oppoſta ai lavori del Sig. *Duhamel*, al ſentimento generale de' Chimici, ed alle mie ſperienze ſteſſe. Ad onta del mio riſpetto per gli uomini grandi, non mi credo diſpenſato dal ripetere le ſperienze loro, e dall' aſſicurarmi io ſteſſo de' riſultati, come ho fatto ſon già più di vent' anni ſu queſto ſoggetto. Ma ſi vedrà in appreſſo ciò che ho riconoſciuto dalle ſperienze, che queſta nuova opinione mi ha ſuggerite.

to ciò che può essere necessario per dimostrare, che non è nè meno per parte del gaz che ha luogo questa scomposizione,

40. *Sempre*, dice il Sig. *Duhamel*, *che si ottiene l' urinoso ammoniaco sotto forma di spirito, si è perchè è passato nella distillazione coll' acqua contenuta nelle materie, e che invece d' essere unito ad una sostanza solida, la quale gli dia corpo, lo è ad un liquido che lo discioglie.*

41. Questo passo così preciso d' un Fisico tanto rispettabile quanto il Sig. *Duhamel* non m' è sfuggito dalla mente, e già ne ho fatto uso nel lavoro presentato all' Accademia nostra di Torino in principio dell' anno 1760. in seguito di varie sperienze fatte da me sull' istesso argomento, le quali non sono forse conosciute, ed alle quali rimando i Lettori, che ne potessero esser curiosi (*u*) per non appoggiarmi sopra la mia autorità dopo quella del dotto Autore, che ho citato.

42. Quella all' incontro del celebre Autore del Dizionario di Chimica è di troppo gran peso per ommettere di riferirla: *Egli è sensibile che la fluidità dell' alcali volatile dipende dall' acqua contenuta in gran quantità nella calce estinta, in cui l' alcali volatile è disciolto.*

43. Il Sig. *Bucquet* nella sua eccellente Memoria già citata ha cercato d' assicurarsi intorno ai dubbj, ch' egli aveva sull' azione comunemente attribuita alla privazione del gaz nella calce riguardo a questo sale, ed essendosi accertato, che nonostante il soggiorno di questa sostanza nel gaz mofetico non succedeva alcuna differenza in questa scomposizione, ha conchiuso che non si doveva assegnare alla privazione del gaz; e quantunque

(*u*) Trovasi altresì questo opuscolo nel Tom. XIII. dell' eccellente deposito delle scienze fisiche, la Collez. Accademica.

non ſia andato più innanzi nella ricerca del principio, dal quale poſſono dipendere tutti queſti fenomeni, egli ha tuttavia ſtimato di conchiudere, che ſi devono al concorſo del principio acquoſo carico di gaz; concluſione a mio giudizio un poco troppo precipitata, mentre non ha fatto paſſo all' eſame dell' azione del principio acquoſo privo di gaz, prima di permetterſi queſta concluſione, come lo avrebbe richieſto il rigore dell' analiſi, ed i ſuoi riſultati continuando poi ad eſſere negativi; coſa che non gli ſarebbe avvenuta certamente, come ſi vedrà dalla ſerie delle mie ſperienze. Avrebbe per ultimo potuto ſottomettere all' eſame l' azione riunita del gaz e dell' acqua per conchiudere, come ha fatto, ſenza alcuna taccia.

44. Queſto è appunto il piano, che ho ſeguito affine di dare la maggior generalità alle mie ricerche; ma l' infedeltà de' dati avendomi ſempre reſo più diffidente ho creduto di dovermi aſſicurare anche delle più triviali e minute circoſtanze di queſto proceſſo.

45. Ho adunque cominciato dalla ricognizione dell' efferveſcibilità della calce eſtinta, ed ho oſſervato, che quella ch' è perfettamente eſtinta all' aria è più efferveſcente di quella che lo è coll' acqua, e che l' eſtinzione fatta dall' acqua induce grandiſſime differenze, eſſendo ſenſibilmente più efferveſcente, quando è fatta lentamente e con cautela; ciò che conferma, che dipendono le efferveſcenze della calce cogli acidi dallo ſtato di aridità delle parti della medeſima, e dalla diviſione, che ſi proccura tra le medeſime per mezzo dell' acqua; di modo che per il conflitto che inſorge nell' atto di queſte combinazioni dal rapimento del principio acquoſo, riſulta per neceſſità la ſcompoſizione delle ſoſtanze, da cui ſi ſtrappa. In qualunque maniera però ſia ſtata eſtinta la calce, che s' impiega, non ſuccede alcuna differenza nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco, ſe non ſe quella che deve neceſſariamente procedere dal-

fa maggiore o minore quantità d' acqua, della quale è pregna la calce; ma ne risultano di assai ragguardevoli nello sviluppamento de' vapori, i quali sono sempre più elastici e tumultuosi a misura che la calce impiegata è meno divisa.

46. La considerazione della poca aderenza dell' acido marino alle terre calcari, dalla quale hanno tratto argomento di spiegare i Maestri dell' arte il fatto avanzato da alcuni Chimici di avere spogliato il sale marino del suo acido colla sola azione del fuoco, avendomi fatto nascere, come dissi, il sospetto che in questa scomposizione, attesa specialmente la grande affinità di quest' acido coi principj volatili, e perciò col principio acquoso, coll' infiammabile, e coll' alcalino volatile, ne potesse sfuggire qualche parte sotto forma gazosa, ho disposto il mio apparecchio in guisa che dopo essersi feltrato attraverso un considerabile strato d' acqua distillata, il fluido sviluppato dovesse quindi attraversarne un altro d' acido nitroso allungato, affinchè si regalizzasse, e sciogliesse la foglia d' oro, che vi era. Siccome da alcuni Chimici poi si è preteso d' aver ottenuta la dissoluzione dell' oro in liquori acidi, diversi dall' acqua regia, mi è perciò venuto in mente di proccurare la feltrazione d' una parte del gaz che diremo *ammoniacale* attraverso l' acido vitriolico, l' acido marino, e l' acido vegetale, ne' quali tutti eravi una foglia d' oro, e per ischivare ogni sospetto di scambievole comunicazione tra i vapori nitrosi e marini, avendo acceso nello stesso recipiente dell' acqua, ho fatto comunicare questi due liquori rispettivamente con due altri recipienti, ne' quali vi era pure dell' acqua distillata; e siccome le comunicazioni erano stabilite per mezzo de' tubi di vetro, che si stendevano fin verso il fondo de' recipienti, così non mi restava a temere la reciproca alterazione di questi due acidi: erano inoltre i recipienti tutti di grandissima altezza in proporzione del-

la loro vaſtità, come ho notato al §. 12., ed ho creduto anche utile bene ſpeſſo il proccurare la feltrazione del gaz per l' olio di tartaro, e pel liſſivio cauſtico.

47. Nella moltiplicità delle operazioni fatte ſu queſto oggetto ho ſtimato bene di ripetere tutti i proceſſi indicati da' diverſi Autori riguardo alla proporzione tra il ſale ammoniaco, e la calce viva; e così anche di aſſicurarmi delle varietà che poſſono dipendere dallo ſtato delle calci, e dalla maniera di fare le combinazioni delle materie; e mi è riſultato che ſia preferibile la combinazione ſollecita de' fiori di ſal ammoniaco ben puri con tre volte il loro peſo di calce ben viva e appena raffreddata, coll' aſperſione contemporanea e pronta dell' acqua (nella quantità preſcritta dal Sig. *Baumè*) entro la ſteſſa ſtorta per mezzo d' un tubo di latta ricurvo, la cui eſtremità ſia fatta a forma d' innaffiatojo. Richiede queſto metodo, la cui combinazione riſulta dai metodi e dalle oſſervazioni de' celebri Signori *Rouelle* e *Baumè*, una diligente ed anticipata preparazione di tutte le parti dell' apparecchio; perchè non è appena diffuſa l' acqua entro la miſtura, che naſce una veemente fermentazione in eſſa accompagnata da gagliardiſſimo calore, che la fa bollire, ed accelera rapidiſſimamente la ſcompoſizione, dalla quale ſorge preſſo che iſtantanea, e violentiſſima l' eſpulſione de' vapori, i quali eſſendo di ſorprendente elaſticità non potrebbero più trattenerſi ſe rimaneſſe altro lutamento da fare, oltre quello della ſtorta col tubo di comunicazione: avvenendo anzi frequentemente, che per la prontezza della calce nell' imbeverſi d' acqua ſi ha appena il tempo d' infonderla tutta, prima che cominci la ſcompoſizione colla copioſa, ed incomoda emiſſione di vapori ſoffocanti; ma poco ſe ne perde, ſe ſia in pronto l' apparecchio qui avanti deſcritto ai §. §. 10. 11. 12. e 13, e ſe ſieno praticate tutte le ſuggerite cautele.

48. Queſta operazione così eſeguita baſta per aſſuefare l' occhio d' un diligente oſſervatore a riconoſcere la differenza che paſſa tra i movimenti, che ſi diſtinguono dai Fiſici, cioè di ebullizione, di fermentazione, e di effervescenza, mentre le circoſtanze loro ſono abbaſtanza diſtinte da non poterſi confondere: l' ebullizione altro non eſſendo, come diſſi, che un' accelerata evaporazione; la fermentazione ſi ſa da tutti eſſere un moto inteſtino più o meno ſenſibile, da cui riſulta la diſunione delle parti della materia, e conſeguentemente la diſtruzione progreſſiva della forza di coeſione; l' effervescenza abbiamo veduto dipendere da un rapimento o ſcambievole o unico di qualche principio nell' atto della compenetrazione delle materie, nel quale ſempre vi è azione e reazione, e perciò ſcompoſizione, e nuova combinazione con diſpendio violento di principj volatili.

49. Ne' primi momenti dello ſconvolgimento dei principj delle ſoſtanze meſſe in eſperienza ſi ottiene un liquore di maſſima volatilità e cauſticità ſenza miniſtero di fuoco; ma ſiccome coi vapori viene rapidamente eſpulſa l' aria dalle capacità ne' primi iſtanti, così per metterſi a coperto da un egualmente rapido aſſorbimento del liquore contenuto nel magazzino o gran recipiente, che comunica col pallone, è coſa opportuna il cominciar a metter del fuoco ſotto il bagno a miſura che ſi vede ſcemare l' elaſticità de' vapori dimoſtrata dal rallentamento delle bolle, che attraverſano l' anzidetto liquore.

50. Egli è vero che ſi potrebbe ſupplire chiudendo la ſola comunicazione tra il pallone ed il magazzino; e per non eſporſi alla frattura della ſtorta pel peſo dell' aria eſterna (coſa più volte accadutami in varie ſperienze, nelle quali erano preſſo che vuote le ſtorte) ſi potrebbe aprire la comunicazione dal tubo ſuperiore *RR* del pallone *X* alla campana *LL*. Ma dovendoſi poi di

nuovo chiudere pel nuovo ſviluppamento del gaz che ſi fa dall' azione del fuoco, ſarà più ſpedito di anticipare l' applicazione del fuoco ſotto il bagno.

51. Non eſſendovi confronto da fare tra il liquore de' primi momenti e quello che ſi ottiene in ſeguito dell' operazione, allorchè voglio procacciarmi liquori concentratiſſimi, ho per coſtume di chiudere il tubetto inferiore, e di mutare il recipiente, toſto che ſono di molto rallentati i vapori del primo periodo, vale a dire di quelli, che ſono eſpulſi ſenza fuoco; e ſurrogato un nuovo recipiente *E* raccolgo un liquore, che ſi produce in tutto il tempo che per l' azione del fuoco ſi fa ſviluppamento di gaz ſino all' iſtante, in cui comincia a manifeſtarſi un' oſcillazione nel tubo comunicante col magazzino, la quale nel ſuo refluſſo ſupera l' altezza dell' acqua dentro al magazzino medeſimo: ſegno infallibile del termine del ſecondo periodo, e di un imminente aſſorbimento. Mutato per l' ultima volta il recipiente *E* ſi dà corſo all' operazione ſino al ſuo fine coll' apertura della campana *LL* immerſa nell' acqua, la quale reſtituiſce l' aria, ch' è ſtata ſcacciata dalle capacità.

52. I riſultati ſono 1.° che il liquore ricavato ſenza fuoco è in uno ſtato di tale concentrazione, che laſciandovi cadere goccia a goccia dell' acido nitroſo ſi fa un ſibilo così veemente, che emula quello d'un acido vitriolico concentratiſſimo nell' acqua, o di un ferro rovente a bianco. Con poche goccie di queſt' acido ottenni 47. gradi di calore nel Termometro a mercurio di *Reaumur*; è ſorprendente la ſua volatilità, e la ſua cauſticità.

53. 2.° quello che ſi raccoglie col fuoco nel tempo dell' eſpulſione è altresì ſommamente effervescente, ma non produce un calore così gagliardo; è per altro conſiderabile del pari la ſua volatilità, e cauſticità.

54. 3.° L' ultimo liquore raccolto parimenti col fuo-

co nel tempo che si fa l' assorbimento non è per verun conto effervescente, ed è assai meno volatile e caustico: che se si mescolino insieme questi tre prodotti, non si ottiene più effervescenza, e si ha il liquore alcali volatile caustico solito a raccogliersi nell'operazione dai Chimici.

55. L'acqua dei magazzini è pregna, come può comprendersi da ognuno, di gaz alcali volatile purissimo; ed è la sua forza ed attività in ragione della quantità de' vapori, e di quella dell' acqua (*v*).

Quanto poi a' liquori che hanno servito alla feltrazione del gaz, e ne' quali trovasi l'oro, evvi un precipitato bianco, talora grigio, e talora finalmente oscuro nell'acido vitriolico; e qualche volta vi si trova un poco annerito l'oro. Nello spirito d'aceto si scorgevano alcune volte de' fiocchi bianchi sopranatanti, ed altre volte un poco di simile precipitato, ma sempre senza offesa dell'oro; nell'acido nitroso era sensibile la dissoluzione di questo metallo dal calore, ch'egli acquistava passando dal bianco limpido al giallo più o meno carico; nell'acido marino poi vivissima è la sua azione sull'oro, essendone la dissoluzione più compiuta e più pronta che negli altri (*x*). Quanto poi all'olio di tartaro, sensibile è il precipitato che vi si scorge come pure nel lissivio caustico.

(*v*) Spesso si scorge nel magazzino principale un tenue precipitato più o meno bianco, il quale mi è sembrato essere una finissima terra di natura calcarea stata probabilmente asportata dal gaz nel tumulto de' primi vapori.

(*x*) Non sempre succede la dissoluzione dell'oro in questi acidi nel tempo dell'operazione, almeno in una maniera distinta, eccetto che nel caso che la quantità delle materie impiegate sia molta, dipendendo dalla durata, e dalla quantità de' vapori espulsi, come pure dalla quantità dell'oro per rispetto a quella degli acidi impiegati in qualità di feltro, e dalla maggiore o minore concentrazione. Ma quand' anche non riuscisse contemporanea la dissoluzione, si avrà motivo di riconoscerla col soggiorno dell'oro negli stessi acidi carichi di gaz.

56. Non credo di potermi dispensare dal riferire un fenomeno del tutto straordinario, che mi è più volte riuscito di vedere, cioè la perdita dell'effervescibilità di un liquore alcali fisso da me talvolta impiegato; era questo una dissoluzione carica a tutto potere d'un tartaro che si suole impiegare da varj Artisti nelle tinture, il quale non essendo persettamente calcinato nè tampoco purificato dalle dissoluzioni, feltrazioni, ed essiccazioni successive e ripetute, può riguardarsi come un alcali impuro, nel quale, oltre a molta materia terrea, vi sono unite molte parti flogistiche, e forse qualcuna ancora delle acide; ad ogni modo però sempre che ho fatto feltrare il gaz alcalino, o vogliam dire *ammoniacale* entro a questo lissivio, passato però per la carta, perdeva intieramente la proprietà di fare effervescenza con qualunque acido, quando era ben carico di vapori alcali volatili caustici: di bianco limpido diventava giallo, e quindi rossigno il liquore; sviluppava una tinta arsiccia nella carta azzurra, divenuta secca dopo di esservi stata immersa; ed infondendovi sopra il sale di tartaro ben purgato e ben secco, pareva eccitarvi uno sviluppamento di bollicine con schiuma alle pareti de' vetri da orologio, de' quali soglio servirmi per siffatte esplorazioni. Succedeva finalmente a questo liquore quello che alle volte accade coll'olio di tartaro per deliquio carico di colore, vale a dire che oltrepassando apparentemente il punto di saturazione si condensa lo spirito volatile in un liquore più chiaro, sopranuota al liquore alcali fisso, galleggiando, come fa l'olio grasso sull'acqua. Ma è degna d'osservazione la corteccia, che distingue la separazione di questi due liquori, mentre s'assomiglia ad una pellicola sottilissima ed arricciata partecipante del colore particolare d'ognuno de' due liquori.

57. Parmi d'aver tutto il fondamento, onde ascrivere la singolarità di questi fenomeni al rapimento dell' acqua dell'olio di tartaro dal gaz ammoniacale, e dalla

necessaria

neceſſaria diverſità che ſi produce nella diſtribuzione, aderenza, e tenuità del flogiſto cagionata dalla tendenza del medeſimo a combinarſi collo ſpirito volatile, mentre viene dalla forza di coeſione ritenuto dall'alcali fiſſo. In fatti chiariſſimo ſuol eſſere lo ſpirito alcali volatile cauſtico; chiaro del pari potrà eſſere il liſſivio alcalino; ad ogni modo colorita più o meno riſulterà la combinazione de' medeſimi, lo ſteſſo ſpirito ſopranuotante comparirà tinto in giallo più o meno carico, mentre più roſſiccio ancora rimarrà l'alcali ſiſſo. Non è equivoca l'azione dell'alcali volatile cauſtico ſulla parte infiammabile de' liquori, e baſta un ſemplice ſperimento per convincerſene. Si combini un acido concentrato tanto che baſti per mordere l'olio che vi s'infonde; vi ſi getti ſopra dello ſpirito volatile cauſtico concentrato: immediatamente ſi vedrà rapito l'olio all'acido, e ridotto in forma ſaponacea *(y)*, baſtando altresì a dimoſtrare queſta attività il colore giallo roſſigno, che acquiſta lo ſpirito volatile più limpido, quando, otturata una boccia con turacciolo di ſughero, s'immerga queſto nel liquore.

Per altro ſarò nel caſo di far conoſcere un'altra volta che la ſteſſa proprietà, che hanno varie ſoſtanze di poterſi infiammare, dipende non tanto dalla quantità che dalla tenuità, e diſtribuzione del principio infiammabile in eſſe contenuto.

58. Egli è però evidente, che gli errori che poſſono eſſerſi introdotti non ſono che una conſeguenza neceſſaria delle ineſattezze occorſe nello ſtabilire i dati, mentre ſinora non s'era da alcuno de' Fiſici ſoſpetta-

Aaaa

(y) Sarebbe forſe troppo ardito il penſare, che l'apparenza ſaponacea foſſe da riguardarſi come un ſegno di antagoniſmo di forze riſultanti dalla cauſticità, che confondendoſi ſoltanto reciprocamente ſenza combinarſi reſtano in ſoſpeſo.

to. 1.° che l' ineffervefcenza dello fpirito volatile cauftico dipendeffe dal mero difetto di concentrazione. 2.° Che nella fcompofizione del fale ammoniaco con la calce fi affociaffe una parte dell' acido marino coi vapori alcalini; anzi a dire il vero concederò, che vi foffe fondamento per non formare quefto fofpetto, giudicandone da ciò che fuole avvenire nel combinarfi quefte foftanze, poichè ne rifulta la produzione dello fteffo fale ammoniaco: non potendofi fare argomento in contrario, fuorchè conofcendo appieno ciò che fuccede in sì fatte fcompofizioni, cioè che ceffano le forze mutue di tendenza alla combinazione per il difetto del veicolo neceffario, vale a dire del principio acquofo, effendo ridotto ognuno d' effi ad un fingolare grado di concentrazione; laonde non può afcriverfi a riprenfibile errore di mente l' aver affegnata la caufa della caufticità alla privazione dell' aria fiffa, effendo quefta una circoftanza di fatto, la quale però non è che una confeguenza neceffaria e concomitante la vera caufa, cioè quella della divifione più o meno violenta delle parti, con fimultanea efpulfione di alcuni principj e l' inzeppamento forfe in alcune di un acido ridotto alla fua maffima concentrazione, e del flogifto anche in altre (Y). La dimoftrazione di quefti effetti in tutte le materie dotate del carattere di caufticità farebbe troppo eftefa per comprenderla in quefto Saggio, e mi bafti di averli dimoftrati nel cafo concreto dello fpirito volatile contro uno di que' punti fiffi, e fondamentali, fu' quali fi è appoggiata l' ingegnofa dottrina del Sig. *Black*; rifervandomi a darne lo fviluppamento generale in altra occafione per non difcoftarmi dai riguardi, che

---

(Y) Avvertafi che qui s' intende di efprimere quel grado di concentrazione, cui non può attignere un acido fenza ceffare di effer tale; gli ulteriori gradi convertendolo probabilmente per ultima metamorfofi, prima dell' intera rifoluzione, in alcali volatile.

prefcrive il rigore analitico d' un accademico ragionamento. Mi reftringerò pertanto ad offervare che dal non efferfi pofto mente al vuoto, che neceffariamente deve fuccedere ne' vafi chiufi, perchè fegua una qualfivoglia operazione capace d'aver effetto in tali circoftanze, poffono facilmente efferfi moltiplicate chimeriche produzioni di nuove arie, grande diverfità paffando tra ciò che deve intenderfi per aria, e il gaz o fluido aeriforme.

59. Quantunque non intenda di entrare per ora in una più eftefa dimoftrazione della concentrazione ed inzeppamento di varj principj, e dell'acido fingolarmente non meno che della relazione ftrettiffima, ch'egli ha col flogiftico; per poter affermare che l'acido ridotto allo ftato di maffima concentrazione, o di privazione eftrema del principio acquofo, fi manifefta quindi o colle proprietà cauftiche, o coi fintomi di flogifto, e forfe (fiami permeffo d'andar più innanzi ancora) con quelli d'alcali volatili, fecondo che la materia, nella quale trovanfi inzeppati quefti rudimenti, viene modificata dalle nuove affociazioni, che fe le fanno incontrare, onde per mezzo di eftemporanee affociazioni o concordemente o foltanto in parte concorrono alla formazione di nuovi prodotti; mi bafti l'accennare alcuni fatti comprovanti quefta manifeftazione del flogifto nelle foftanze coll'acquiftata caufticità.

60. Il Sig. *Gellert* afficura alla p. 170. del fecondo volume della fua Chimica metallica effer non folo poffibile di ridurre la luna cornea per mezzo dell'alcali fiffo (offervazione altresì fatta dal fagaciffimo Sig. Cav. *Landriani* di concerto col dotto Sig. Profeffore *Mofcati*), ma che fi può eziandio rivivificare la calce di piombo, e quella d'antimonio per mezzo della creta. Ancorchè da quefto Autore fi fparga poi qualche dubbietà fulla neceffità del flogifto nella riduzione delle calci metalliche per la poca quantità, che quefte materie ne con-

tengono, ravvicinando un altro ſperimento riferito dal celebre Sig. *Baumè* nella ſua Chimica ragionata alla p. 33. del Tom. 2°, il quale conſiſte nella precipitazione del ferro d' una diſſoluzione di vitriuolo verde in una ſpecie d' azzurro di Berlino col liſſivio cauſtico, mi pare che più fondato ſia il penſiere del Sig. Cav. *Landriani*, cioè che per mezzo della cauſticità ſegua la flogiſticazione dell' alcali fiſſo, vale a dire, ſecondo l' interpretazione che debbo permettermi, che per queſta operazione diventi manifeſta la preſenza della materia infiammabile, diſtribuita prima e diffuſa in troppo gran numero di parti, riducendoſi così allo ſtato di vero flogiſto; cioè a dire d' un ravvicinamento de' principj infiammabili per mezzo della concentrazione loro, dipendente dalla diſſipazione ſegnatamente del principio acquoſo: non ſolo ho riconoſciuta la verità del fatto accennato dal Sig. *Baumè*, ma l' ho anche moltiplicato combinando colla diſſoluzione del vitriolo marziale lo ſpirito volatile di ſale ammoniaco cauſtico; una diſſoluzione del fegato di zolfo calcareo alcalino nell' aceto; l' alcali volatile ottenuto per mezzo del liſſivio cauſtico del liquore ſiliceo; lo ſteſſo liquore ſiliceo benchè men prontamente, e meno intenſo ſia ſtato il precipitato, e con queſti anche l' alcali volatile concreto ricavato per mezzo dell' alcali fiſſo, oſſervandoſi una ſingolare diverſità dall' eſſere o no ridotte queſte ſoſtanze allo ſtato di cauſticità nella ſegnata precipitazione.

61. Senza ſtendermi più a lungo ſu queſto punto mi ſia ſolamente permeſſo di oſſervare, che proccurandoſi la precipitazione del ferro per mezzo di ſoſtanze volatili, tutto che cauſtiche; non è durevole la tinta azzurra, ſe ſi laſcia libero l' adito all' aria; ſuccedendo il contrario ſe ſe ne interrompa la comunicazione; e tanto è più inſtabile queſta tinta, quanto ſi fa la combinazione in vaſi di maggior apertura; dal che mi naſce il ſoſpetto, che una delle condizioni più eſſenziali alla ſolidità del-

la tinta turchina ſia la totale eſpulſione o la fiſſazione de' principj volatili (z); condizione che appunto parmi compiutamente ottenerſi per mezzo della calcinazione, poichè in virtù della eſpulſione del principio acquoſo ſi giugne al termine della neceſſaria concentrazione del flogiſto, in cui diventa inerte la naturale ſua volatilità, ed eſercita quindi la nuova qualità acquiſtata di cauſtico ſul ferro medeſimo; potendoſi a mio giudizio riguardare queſta proprietà della cauſticità come un attributo generale della materia diſſeminato con diverſa relazione tra le ſoſtanze, ed eſprimente una maſſima forza d'affinità per la tendenza invariabile d'una diſtribuzione equilibrata fra le parti componenti le ſoſtanze combinate; equilibrio che richiede neceſſariamente lo ſtato di fluidità delle medeſime; e mi farò lecito per ultimo di fare una rifleſſione, cioè che ſi conſerva ſempre l'analogia tra il flogisto ed il principio acquoſo, ſicchè è queſto alle ſoſtanze metalliche, ciò che è l'acqua eſſenziale alla natura de' ſali, mentre un'altra parte ſovrabbondante e meno ardente, che giuſtamente può denominarſi materia infiammabile, corriſponde a quella quantità d'acqua che ſi riguarda come meramente aggregativa, e da cui dipendono le riſpettive forme delle criſtallizzazioni.

62. Un punto importantiſſimo al quale debbo ora rivolgermi ſi è quello della diſſoluzione dell' oro nell' acido marino. Si ſa che il dotto Sig. *Scheele* ha annunciato ai Fiſici la poſſibilità di conferire queſta proprietà a queſt' acido diſtillandolo ſopra la calce del man-

(z) Volgare è l'oſſervazione della volatilità delle diſſoluzioni del ferro, e però ſembra aſſai plauſibile il penſare, che dall' adunamento, e ravvicinamento de' principj infiammabili non ſolo perda il flogiſto gran parte della ſua volatilità, ma che adattandoſi più eſattamente alle parti del ferro ſcemi altresì la volatilità di queſto.

ganeſe ; e deduce col Sig. *Bergman* eſſere la medeſima dipendente dalla flogiſticazione, che ſi fa di queſt' acido per tal mezzo , e che lo ſteſſo ſucceda nella combinazione dell' acido nitroſo col marino conoſciuta ſotto il nome di acqua regia.

63. Volentieri conſento coi medeſimi ſu queſto punto di teoria riguardo all' acido marino, perchè contro il comune ſentimento credo che l' acido nitroſo ſia intieramente ſprovviſto di flogiſtico, ed appunto per queſto ſia più d' ogni altro acido avido di rapirlo alle ſoſtanze che ne contengono. Oſerò dire anche di più, che non ſia la ſua natura compatibile colla combinazione della materia infiammabile, e che ſia dovuta al ſommo grado di concentrazione de' due principj la debole aſſociazione del flogiſto nello ſpirito fumante; ma che ſia aſſai probabile che non poſſa a meno di ſeguire la reciproca loro ſcompoſizione, quando naſca quel rapporto tra i loro principj conſtituenti da poterſi combinare in una maniera più ſtretta ed aderente; di modo che non oſtante l'attività ſua per iſtrapparlo dalle materie, non gli conferiſca però la facoltà di ſeco contrarre un' unione veramente intima ed eſplorabile. Quantunque la mia ſcoperta confermi in parte il penſiero de' ſuddetti Fiſici, la conſiderazione però dell' aſſociamento de' vapori di queſt' acido con gli alcalini nella ſegnata ſcompoſizione del ſale ammoniaco per la calce mi ha laſciata qualche dubbiezza intorno alla modificazione, che ſi vorrebbe recata eſcluſivamente ſul flogiſto. Laonde per procedere più cautamente mi ſono propoſto di moltiplicare gli ſperimenti relativi a queſt' acido. Ho pertanto combinato 4. onc. di ſale ammoniaco purgato con 12. onc. d' olio di tartaro , nel quale ho diſciolto 3. onc. di ſale di tartaro ſecco in un mattraccio *A* (*fig. III. tav. II*) alto onc. 22. di Piemonte compreſa la boccia del diametro d'un po' più di 3. onc., il di cui orifizio *B* fatto in forma conica combaciava eſattamente

con quello d'un capitello tubulato *E* a cono rovescio, e col becco ripiegato ad angolo, perchè potesse distendersi con l' estremità sin verso il fondo d' un recipiente del diametro di circa 1. onc., e 5. in circa d' altezza, nel quale contenevasi dell' acido marino allungato con acqua distillata, e dell' oro; stendevasi poi di là un tubetto a forma d' imbuto, onde portare l' olio di tartaro nel mattraccio senza pericolo di spandersi nel capitello. Furono diligentemente otturate tutte le aperture, e fu adattata la vescica al tubo a chiave, di cui era guernito il recipiente; e si pose il fuoco sotto la boccia del mattraccio non essendo insorta cosa alcuna prima dell' applicazione del medesimo.

64. In un simile apparecchio fu combinato il sale ammoniaco al peso di 4. onc. con 12. di liscivio caustico; ed in un altro quantità pari di sale ammoniaco con 12. onc. di liquore siliceo. Nè questo pure produsse alcun fenomeno prima dell' applicazione del fuoco; ma all' opposto divenne spumante la mistura del sale col liscivio caustico *(aa)*, e s' ebbe appena il tempo di chiudere, che cominciò lo sviluppamento del gaz.

65. I risultati della scomposizione coll' olio di tartaro furono il solito sviluppamento del gaz, e la formazione del sale concreto nel primo tempo; ma divenne presso che floscia la vescica, e seguì l' assorbimento del liquore, nel quale era immerso il becco del capitello.

66. Questo periodo è un segno infallibile che non sarà per accrescersi la quantità del sale volatile concreto; ma che dalla espulsione del medesimo dipende la maggior energia de' vapori, mentre diventa indispensabile un continuo accrescimento di calore a misura che

---

(aa) Era fatto questo liscivio secondo il metodo del fu Sig. *Bucquet* descritto dal Sig *Fourcroy* nelle sue Lezioni alla p. 264. Tom. I.

egli si aduna alle pareti del vetro, per cui si riduce l' acqua in vapori, e si discioglie nuovamente il sale. Questa dissoluzione è altresì degna d' osservazione, perchè ricade il liquore in istriscie spirali con un' apparenza oliosa; dalla continuata coobazione però si riduce la materia allo stato di siccità, con un colore oscuro e fosco, esalando pochissimo odore d' alcali volatile dall' apparecchio aperto, come pure dal recipiente, in cui si contiene il liquore, nel quale si fa un precipitato purpureo sporco, che tuttavia dimostra la dissoluzione dell' oro, ch' è singolare, perchè precipitato in oro di Cassio senza il concorso dello stagno; ma per verità non mi è riuscito di fondatamente assicurarmene, ancorchè abbia ottenuto per mezzo di una dissoluzione di stagno nell' acqua regia combinata con questo liquore una tintura turchina leggermente violacea (*bb*).

67. La scomposizione poi col liscivio caustico sviluppa, come dissi, dai primi istanti e senza fuoco quantità di gaz, diventando spumante la materia, la quale prende una tinta gialla, e feltrandosi i vapori pel liquore, tosto si vede piena di fumi bianchi la parte vuota del recipiente, cominciando a manifestarsi prima dell' applicazione del fuoco gonfia poi moltissimo la materia riscaldandosi col fuoco applicato, e rapido diventa lo sviluppamento del gaz: ciò che ne rende assai fastidiosa l' amministrazione. Il liquore del recipiente *HH* è carico di vapori alcalini, mentre non ostante l' esistenza dello spirito di sale probabilmente neutralizzato da una parte di questi vapori, ne usciva tuttavia fortissima esalazione, ed avendo voluto saturare d' acqua forte

---

(*bb*) Più manifesta comparisce col tempo la dissoluzione dell' oro nell' acido del recipiente.

forte questo liquore, fu grande la quantità, che se ne richiese. Non ebbi indizio alcuno di dissoluzione dell' oro; non so però se dovesse ciò attribuirsi alla debolezza grande dell' acido marino contenuto nel recipiente *HH*.

68. La scomposizione ottenuta dal liquore siliceo manifestò un po' di schiuma alle pareti del vetro prima dell' applicazione del fuoco; ma appena seguita la medesima, fu assai impetuoso lo sviluppamento del gaz, e si disciolse gran parte dell' oro nel tempo dell' operazione; quindi avvenuto il solito assorbimento, per cui ho dovuto accrescere il fuoco, i vapori che passavano nel recipiente vi cagionavano una notabile effervescenza; ciò che servirebbe di forte indizio, che coi primi vi fosse l' acido marino, e solo alcalini fossero quelli succeduti all' assorbimento; cosa che concorderebbe assai bene colle notizie correnti della somma elasticità de' vapori acido marini, e che mi parrebbe dimostrata dalla poca forza del liquore suddetto, tramandando appena qualche sentore di vapori alcali-volatili.

69. Sempre più manifesta parendomi l' azione dell' acido marino, ho creduto giovevole di assicurarmene direttamente per mezzo della scomposizione del sale marino stesso alla maniera di *Glaubero*, ed ho perciò eseguita la scomposizione di 2. onc. di questo sale ben puro, e decrepitato con 5. onc. e $\frac{1}{2}$ circa d' olio di vitriolo nell' apparecchio poc' anzi descritto, e colla sola avvertenza di far cadere il sale marino ben pesto poco per volta nell' olio di vitriolo per mezzo d' un turacciolo bucato obbliquamente, nel quale ho incastrato un fiaschetto di vetro col sale, il di cui orifizio era alquanto ristretto, e per tal modo rimaneva esattamente chiuso ogni adito tra il mattraccio e l' aria esterna

(*cc*). Veemente ſu la produzione de' vapori ogni volta che percuotendo il fiaſco cadeva del ſale nell' acido: e non oſtante ogni diligenza uſata per l' aſſicurazione delle lutature, con tutto ciò or qua or là uſcivano fumi bianchi, i quali venivano però prontamente ritenuti applicandovi della cera carica di trementina; ceſſato finalmente il tumulto de' vapori, e la rapida produzione gazoſa, fu continuata l' operazione col ſoccorſo del fuoco, e condotta ſintanto che fu piena carica di fumi bianchi la parte vuota del recipiente, nel quale vi era l' oro coll' acido marino deboliſſimo.

70. In queſta operazione ſegnatamente hanno luogo rapidiſſimi e ripetuti aſſorbimenti, perchè ſi replica il vuoto ſempre che cade del ſale nell' acido, ed è queſto vuoto tanto più eſatto, quanto più lo ſcoppio de' vapori è forte e rapido; laonde non vi ſi può rimediare fuorchè traforando con un ago il buco, che ſi ſarà laſciato nel turacciolo a queſto fine, o aprendo la comunicazione, che per mezzo del medeſimo ſi ſarà ſtabilita da principio col tubo a chiave applicato alla parte ſuperiore d' una campana immerſa nell' acqua.

71. Preſe l' acido del recipiente una tinta gialla vie più carica fino a pareggiare quella d' un belliſſimo colore d' oro; e ſcemò notabilmente la quantità dell' oro; ma non fu già così precipitoſa nè compiuta la diſſolu-

(*cc*) E' opportuno il far oſſervare, che per le ſperienze di queſta natura l' imbuto roveſcio, che ſta anneſſo al capitello, dee eſſere di grande altezza, e coll' orifizio eſterno coſiderabile, affinchè ſi poſſa dare una conveniente obbliquità al fiaſco, nel quale ſi mette una delle materie, ſpecialmente ſe è in forma concreta; il mio ſiſtema di tubi è per queſto effetto alto 2. in 3. oncie, e circa di un' oncia e mezza d' orifizio eſterno: ancorchè ſembri più comodo di mettere il ſale nella boccia del matraccio, e l' olio di vitriolo nel fiaſco, preferiſco ciò non oſtante di fare il contrario per non eſpormi alla quaſi infallibile rottura della boccia, facendo cadere queſto acido particolarmente concentrato ſopra una materia concreta; accidente però che non m' è mai avvenuto cogli altri acidi.

zione, come mi è avvenuto nella fcompofizione del fale ammoniaco colla calce, e col vetro filiceo nella maniera, e colle avvertenze indicate; dalla qual differenza parmi di poter conchiudere, che quanto la calce ed il vetro cauftico fono materie totalmente aride e più femplici, fono altrettanto avide del principio acquofo flogifticato, e più radicalmente ne impoverifcono l' acido marino, di cui s' accrefce l' efficacia. Per lo contrario l' acido vitriolico ha maggior affinità colla parte infiammabile quando è più concentrata che non è nelle foftanze fuddette; dunque non tanto dalla flogifticazione, quanto dal rapimento fimultaneo del principio acquofo deefi ripetere quefta proprietà.

72. Un fenomeno coftante, il quale ferve a dichiarare l' efiftenza dell' acido marino, e perciò degno d' attenzione, fi è l' efflorefcenza fumofa di cui fono principalmente ricoperte le pareti efterne delle bocce che racchiudono un qualche liquore, nel quale egli fi trovi o fotto forma gazofa, o ritenuto foltanto dalla femplice forza d' aggregazione; fi vede pur anche la medefima efflorefcenza intorno alle pareti interne della parte vota de' recipienti; ed è tanto più bianca, e tanto più aderente, quanto è più fcarfa l' umidità; ella è acida e falfa al gufto. Ma ciò che vi è di più fingolare fi è, che non folo fono manifeftamente diftinte quefte due fenfazioni al palato, ma diftinto è l' ardore ch' ella eccita fulle parti nervofe della lingua, e fingolarmente dello ftomaco: fegno caratteriftico della forte fua caufticità; e ficcome fi fente il gufto acido e cauftico prima del falino, convien dire, che fia quefta efflorefcenza il rifultato d' una foftanza falina con efuberanza d' acido; e fono tanto più difpofto a perfuadermene, che nelle bocce in cui fi conferva la fpirito di fale, fe qualche poco di quefti fumi può trapelare, fi forma al margine efterno del collo una efflorefcenza concreta, diftintamente fali-forme, comechè opaca, la quale è gen-

tiliſſimamente figurata a forma di piccoli ceſpugli fraſcati regolarmente.

73. Ho facilmente riconoſciuta la diſſolubilità dell' oro dalla ſola combinazione dello ſpirito volatile cauſtico coll' acido marino, purchè s' impieghino l' uno e l' altro, e principalmente il primo, in iſtato di maſſima concentrazione, benchè però ognuno di queſti liquori ſeparatamente non manifeſti la menoma azione ſopra queſto metallo; ciò che darebbe a divedere, che l' accennata proprietà è il riſultato d' una combinazione dell' acido marino con altri principj, i quali devono incontrarſi nello ſpirito volatile cauſtico.

74. Conſiderando però la natura di queſto fluido, nel quale ſi trovano oltre ai principj alcalini volatili quelli ancora dell' acido marino ſpogliato notabilmente di umidità, e inzeppato per contrario di parti flogiſtiche; avuto riguardo al coſtante fenomeno della riferita effloreſcenza, ſempre che vi abbia evaporazione, ed allo ſviluppamento de' fumi bianchi ogni qualvolta ſi promove la ſeparazione delle parti più volatili dell' acido marino da quelle che ſono più fiſſe; parmi ragionevole l' attribuire queſta proprietà di diſciogliere l' oro alle alterazioni provenienti dal difetto di principio acquoſo nell' acido marino, dal quale, oltre all' accreſcimento di concentrazione, viene indotta probabilmente una maggiore attenuazione, ed una differente diſtribuzione delle parti infiammabili, piuttoſto che di riconoſcerla unicamente dall' impoverimento delle ſteſſe parti infiammabili, come ſi vorrebbe dai riſpettabili Accademici di *Upſal*.

75. Queſta effloreſcenza ſembrami identica co' fumi bianchi, che ſpande l' acido marino al ſuo contatto coll' aria libera, e ſe male non m' appongo riſulta la medeſima dalla ſvaporazione che ſi promove in queſta circoſtanza d' una parte del flogiſto, non altrimenti che nel gaz nitroſo, e come ſuccede all' acido ſulfureo; laon-

de sono questi vapori per rispetto all'acido marino quello che sono i vapori rossi dell'acido nitroso conosciuti sotto il nome di gaz nitroso per rispetto a questo acido, colla differenza che basta l'umidità, contenuta nell' aria atmosferica, al gaz nitroso per condensarsi e presentarsi sotto forma d'acido, ed all'incontro richiedesi maggior quantità d'umido per la condensazione del gaz marino; il che sembrerebbe dimostrare, che questo è in uno stato di maggior concentrazione, ch' egli è meno aderente al principio acquoso, e che in virtù di questa minore affinità egli ne può contrarre un'assai maggiore in queste circostanze col principio infiammabile; di modo che sembrami molto meno da attribuirsi alla sflogisticazione, che alla maggior concentrazione dell' acido marino, la proprietà ch' egli acquista in queste operazioni di disciogliere l'oro *(cc)*.

76. Queste sperienze dimostrano finalmente colla più desiderabile evidenza, che lo stato di fluidità, nel quale si ottiene l' alcali volatile caustico per mezzo della calce, non dipende unicamente dalla quantità dell'acqua impiegata nel processo; mentre se questa fosse di ciò la

(cc) Dalla aderenza del principio acquoso dell'acido del nitro, maggiore che non è nel marino, nel vitriolico, e nel vegetale medesimo, parmi che si possa ripetere quella che si manifesta nel colore de' fumi, che esalano, sembrandomi la tinta rossa de' vapori nitrosi un segno manifesto dello stato di concentrazione della materia infiammabile, la quale tende a dileguarsi colla volatilizzazione, afferrando con avidità l' umido sparso nell' atmosfera. Le calci metalliche altresì non acquistano il colore rosso, se non dopo una grandissima dissipazione del principio acquoso, dalla quale dipende quella d'una proporzionata quantità di flogisto; vale a dire di quella che non ha avuto tempo di combinarsi colle parti metalliche fisse, e di trasformarsi col carattere di causticità. Per altro il gaz marino prodotto dalla combinazione di quest' acido col vitriolico, il quale è sommamente elastico, non conferisce almeno sensibilmente la proprietà dissolvente dell' oro all' acido marino, entro il quale si fa feltrare per mezzo de' sopradescritti apparecchi; laonde sempre meno probabile diventa l' opinione che ascrive la dissolubilità alla sola sflogisticazione.

cagione esclusiva, non avrei dovuto ottenere che pochissima quantità d'alcali volatile concreto dalle testè riferite scomposizioni del sale ammoniaco coll' olio di tartaro, col liscivio caustico, e col liquore siliceo; mentre il rapporto dell' umidità, che si trovava in questi processi, colle parti concrete era di gran lunga superiore all' acqua, che soglio impiegare nella combinazione di questo sale colla calce viva; onde parmi attribuibile in gran parte alla differenza dell' azione del principio caustico contenuto nella calce da quella, che ha luogo nell' alcali fisso sul flogisto disseminato nel sale; di modo che la calce viva alterando con maggior energia questo principio, e ritenendone una più notabile quantità l' avanzo che passa associato coi vapori dell' acido, ripiglia lo stato, e il carattere di materia infiammabile, cioè si carica di nuovo delle parti acquose state espulse, e col mezzo delle acide passando ad uno stato saponaceo, resta agevolata la loro dissoluzione nell' acqua.

77. Questa teoria concilia ottimamente l' effetto, che si ottiene dalle sostanze metalliche, o dalle loro calci combinate collo stesso sale ammoniaco, senza che s' incontri la ripugnante contraddizione, che presenta quella del Sig. *Black*, nella quale si vedrebbe la privazione, e l' abbondanza d' uno stesso principio (cioè del gaz mefitico) produrre un medesimo effetto; poichè le parti metalliche, e specialmente le calci nell' impadronirsi d'una grandissima parte della materia infiammabile contenuta nel sale ammoniaco favoriscono le espulsioni dell'acqua di cristallizzazione del sale medesimo, non avendo alcuna disposizione a seco combinarsi; e mentre proccurano la dissoluzione dell'alcali volatile si fa altresì l'unione delle parti acide sommamente concentrate colle parti metalliche; di fatto si ottiene il piombo corneo, se siasi impiegata la calce di piombo; un zafferano marziale, se sia stata usata la limatura di ferro, della quale si volatilizza però una parte; e si osserva che la scom-

pofizione riefce fempre molto imperfetta colle foftanze fotto forma metallica, e per contrario molto più compiuta colle calci; e che per ultimo lo fpirito volatile cauftico che fi raccoglie è fommamente penetrante, ed effervefcente ad un tempo con quello che fi ottiene colla calce viva nel modo da me divifato.

78. Non debbo abbandonare quefto foggetto fenza riferire ciò, che ho offervato intorno ad un metodo, che trovafi defcritto alla p. 282. del tom. 1.° delle Lezioni di Chimica del Sig. *Fourcroy* fotto l' autorità del dotto Accademico Sig. *Bucquet*. Con la fcorta di numerofe fperienze s' era egli afficurato, che la miglior proporzione da feguire per il proceffo dello fpirito volatile cauftico era quella di una parte e mezza di calce contro una di fale ammoniaco; foggiugnendo, che la calce eftinta all' aria fcompone quefto fale non altrimenti che la calce viva *(dd)* : afferzioni affatto contrarie al fentimento unanime de' Fifici, e fegnatamente contraddittorie alle fperienze ingegnofiffime del Sig. *Duhamel*, e fe m' è permeffo farne menzione, anche alle mie ftampate nel tom. 2.° degli Atti dell' Accademia di Torino. Tuttavia non dovendofi rigettare fatti pofitivi fenza ficuro fondamento, ho creduto di doverne fare fperimento.

79. Ho pertanto mefchiato accuratamente 18. onc. di calce ben viva e groffamente pefta con 12. onc. di fale ammoniaco peftato minutamente, e fu quefta miftura introdotta con preftezza nella ftorta *A* di vetro (*fig. I. II. tav. I. II.*), il cui orifizio introdotto nel tubo di comunicazione *CC* è ftato diligentemente lutato. Pochiffime furono le bolle, che attraverfarono l' acqua del

(*dd*) Il Sig. *Bucquet* fi è inoltre afficurato con molte efperienze, che non vi vuole ordinariamente, che una parte e mezza di calce, invece di tre che folevano impiegarfi, per ifcomporre una parte di fal ammoniaco. La calce eftinta all' aria fcompone quefto fale ugualmente che la calce viva.

recipiente, che comunicava col pallone X, ed erano lontane le une dalle altre. Non vedendo comparire addensamento di vapori fu messo il fuoco sotto il bagno di sabbia, il quale essendo assai riscaldato diede luogo alla distillazione debolissima di qualche goccia di liquore, che di tanto in tanto si vedeva cadere dall'orifizio del tubo CC nel pallone X. Quando ad un tratto, cresciuta l'intensità del calore, ho veduto succedersi sempre più prossimamente le gocce di liquore; e siccome era il pallone tubulato inferiormente per comunicare con una boccia di vetro E, nella quale precipitava questo liquore, cominciò a formarsi al margine del tubulamento una concrezione saliforme, la quale andò crescendo perpendicolarmente in grossezza di circa 2. linee di diametro in forma di stalattite, e si vedeva il fondo del recipiente pieno di minuti pezzi di questa sostanza concreta.

80. Fu l'operazione molto più lunga delle conosciute finora, e non ebbi gran difficoltà a riconoscere, che erasi fusa la storta, come aveva sospettato dall'osservata accelerazione dello sviluppamento de' vapori; indotto a formare questo sospetto dall'essermi accaduto altra volta di ottenere del sale ammoniaco fluido invece di fiori, distillando questo sale entro a cucurbite di creta guernite di capitello di vetro, o anche in cucurbite di vetro, nelle quali erasi fatta qualche accidentale fessura nel tempo dell'operazione; essendomi occorso altresì di veder fuse le storte prima dell'intiera operazione, allorchè per moltiplicare la superficie della materia, ed impedirne l'eccessivo addensamento ho mescolato dell'arena colla calce, ed il sale ammoniaco. Laonde cessa ogni singolarità ne' fenomeni di questo processo, da che si riscontra stabilita la comunicazione tra la calce, il sale, l'arena del bagno, e conseguentemente coll'aria esterna.

81. Il seguente sperimento somministra finalmente una prova convincente dell'esclusione del principio generalmente

mente adottato per ispiegare i fenomeni di questa scomposizione; quantunque ella sia assai uniforme a quella del Sig. *Bucquet*, credo tuttavia di dover dare la preferenza a ciò, che fu da me fatto, perchè forma in 1.° luogo un anello nella catena delle mie prove, ed in 2.° luogo perchè ho usata ogni più scrupolosa diligenza per escludere l' influenza dell' acqua nell' apparecchio, acciò che non rimanesse equivoca l' azione che risulterebbe del gaz sopra la calce viva. Ho dunque messo della calce viva polverizzata sopra un setaccio, e l' ho sospeso in mezzo ad una gran campana di cristallo agglutinata con cera molle ad un piattellino, che si adattava per mezzo d' un tubo a chiave alla macchina pneumatica, ond' estraervi l' aria, e quindi riempierla d' aria fissa prodotta dalla combinazione del sale di tartaro coll' acido vitriolico, e feltrata entro ad un tubo pieno di sale di tartaro ben secco prima di passare nelle vesciche, in cui veniva raccolta pel fine suddetto.

82. Un tubo ricurvo con entro argento vivo serviva d' indice a questo apparecchio, ed ogni volta che scorgevasi diminuita l' elasticità del gaz mefitico, se ne somministrava una nuova quantità. Benchè non possa esattamente dire quanto tempo sia rimasta esposta questa calce all' atmosfera gazosa, posso però assicurare, che vi fu dimenticata lungo tempo al di là di quello che ne ritenne in circostanze somiglianti il Sig. *Bucquet*. Non ho però trovato gran variazione di peso nella medesima; ma la superficie mi parve meno arida, ed il gaz avea fatta una notabile impressione sul piattellino a segno che stimerei prudente, dovendo ripetere sì fatte sperienze, di rivestire il medesimo di qualche inverniciatura, quale è quella che si usa dagl' Incisori in rame.

83. Questa calce combinata con un terzo del suo peso di sale ammoniaco, e di acqua in quantità sufficiente somministrò gli stessi prodotti, che ho ottenuto da

altrettanta calce pesta della stessa qualità, che aveva custodito in un recipiente chiuso, perchè non avesse comunicazione coll' aria; erano perciò ineffervescenti i liquori, e non mi fu possibile di riconoscere il più piccolo segnale, che questa calce avesse operata la scomposizione del sale ammoniaco in qualche maniera analoga a quella delle terre calcaree. Il Sig. *Bucquet* ha altresì osservato questa perfetta uniformità, non altrimenti che colla crosta saliforme dell' acqua di calce, e colla calce estinta da circa sei anni, e finalmente colla calce lavata: di modo che sembrami fuori d' ogni sospetto la prova, che ne deduco, della niuna influenza del gaz mefitico in queste scomposizioni.

84. I risultati della coobazione dello spirito volatile caustico sopra la calce viva riferiti al §. 21., ed avvalorati da quelli dello stesso liquore sulla pietra caustica, sopra il vetro siliceo, sembrerebbero dimostrare, che le effervescenze non altrimenti che le alterazioni recate dalla calce al sale ammoniaco, delle quali s' è fatta menzione al §. 34., fossero dovute al solo impoverimento del principio acquoso di queste sostanze; ma essendomi assicurato, che dall' aggiunta che si fa dell' acqua distillata a queste materie non risulta il menomo movimento, il quale possa veramente indicare un principio di vera effervescenza, parmi di essere sempre più fondato nel conchiudere, che non debbono attribuirsi al solo difetto di questo principio i mentovati fenomeni, ma che dipendono veramente dall' azione, e reazione de' principj constituenti le sostanze, le quali scomposte reciprocamente somministrano nuovi prodotti; e quanto maggiore sarà la forza originale di contatto tra i principj, che compongono ciascheduna sostanza, tanto più cospicui risulteranno gli effetti nello sforzo energico, che mutuamente si farà per una distribuzione equilibrata entro la massa totale; dove che sminuita notabilmente l' aderenza de' principj più volatili, se ne fa-

rà una diſſipazione proporzionata all' antagoniſmo delle forze ſuddette. Le diviſate ſoſtanze cauſtiche ancorchè peſtate non producono finalmente il menomo moto di effervescenza collo ſpirito di vino nè coll' olio di tartaro. Siccome però il principio acquoſo è il veicolo, che favoriſce la diſtribuzione, e l' equilibrio tra i principj conſtituenti; così più evidente appariſce non ſolo la neceſſità della reſtituzione del medeſimo; ma dalla eſpulſione ſi può eziandio fondatamente ripetere l' origine de' ſin qui riferiti effetti.

85. Ravvicinando pertanto le già fatte oſſervazioni, ſembrami di avere tutto il fondamento di conchiudere, che il gaz ammoniacale non è altro che un inzeppamento dell' aria comune eſpulſa dalle parti acide flogiſtiche alcali volatili, e di qualche piccola porzione della terra calcarea più tenue, diſſeminate tra le parti acquoſe ridotte in vapori dal calore; ciò che ſempre più convince dell' inſuſſiſtenza della teoria dipendente dalla privazione d' un principio pneumatico per dedurre l' ineffervescenza delle materie cauſtiche cogli acidi, e della coſtante fluidità, e cauſticità dello ſpirito volatile cauſtico.

86. Non ſarà forſe eſtraneo al mio oggetto di notare alcune differenze importanti, che ſi trovano tra l' alcali volatile concreto, e l' alcali volatile cauſtico, o per meglio dire ſpirito volatile prodotto dalla calce: nè ſarà inutile l' oſſervare prima d' ogni coſa, che l' alcali fiſſo e la creta non eſſendo materie così ſemplici e ridotte ad uno ſtato di eſtrema aridità, quanto lo è la calce, da queſto difetto appunto totale di principj di diverſa natura ſi dee ripetere la perfetta inazione di queſta ſopra le ſoſtanze compoſte, quando non ſia prima caricata d' altro principio ſemplice, fra' quali domina ſempre l' acquoſo. In queſte circoſtanze diventa poi l' azione ſua d' una energia ſuperiore a quella d' altre ſoſtanze meno ſemplici; e quanto ſi dimoſtra iner-

te, ed incapace alla ſcompoſizione del ſale ammoniaco, allor quando è nello ſtato di maſſima parità, altrettanto efficacemente diſcioglie e ſcompone queſto ſale, ogni volta che carico di principio acquoſo dà anſa alla calce, ond' eſercitare la ſua cauſticità ſopra la materia infiammabile nel medeſimo contenuta; e da queſta originale operazione ſuccedendo il rapido indebolimento della forza di contatto tra l' acido, e l' alcali volatile, ſi riduce in gran parte l' acido ſimultaneamente ſotto forma gazoſa per la ſua combinazione eſtemporanea colle parti flogiſtiche, alle quali imprime un carattere ſaponaceo, ed eſtricandoſi in vapori coll' alcali volatile ſi ſcioglie entro una parte notabile dell' acqua impiegata, e la invola e rapiſce con sè.

87. Laonde non è ſtrano, che ſia in queſta ſcompoſizione neceſſaria l' acqua, ſenza che ſe ne richieda per quella che ſi fa coll' alcali fiſſo, e colla creta; e parmi altresì di poter dedurre in 1.° luogo, che la reciprocità dell' azione di varie ſoſtanze ſarà in ragione della moltitudine de' principj conſtituenti, di natura tra di loro differente; e però in 2.° luogo quanto più s' accoſteranno allo ſtato di perfetta omogeneità, altrettanto maggiore ſarà la difficoltà che ſi avrà a ſuperare per alterarle, e verrà riſtretta a principj, e parimenti ſemplici, la facoltà di agire ſopra le medeſime; e potrà perciò in 3.° luogo riguardarſi queſta reſiſtenza alla ſcompoſizione come una miſura del grado di ſemplicità di ciaſcuna ſoſtanza, e ſervirà a rilevare la forza di contatto tra le ſue parti conſtituenti.

88. L' alcali volatile concreto acquiſta un accreſcimento di peſo maggiore di quello che fa lo ſpirito volatile, ed è altrettanto diſpoſto, anzi debbo dire aſſai più, a caricarſi del ſuo intermezzo, di quello che ſia lo ſpirito volatile; di fatto ripetendo la coobazione d' una data quantità d' alcali volatile ſopra nuovo alcali

fisso, cresce di peso il prodotto (*ee*); ed al contrario va sempre scemando quello dello spirito volatile sopra nuova calce ben viva.

89. Non è così penetrante nè caustico l' alcali volatile concreto, come lo è lo spirito volatile tratto dalla calce, e continua ad essere effervescente cogli acidi quantunque sciolto nell' acqua; e per contrario molto più stimolante è lo spirito volatile, e diventa ineffervescente quando si trova diffuso in conveniente quantità d' acqua.

90. L' alcali volatile concreto non è infiammabile quantunque ridotto in vapori anche coll' azione del fuoco, ed infiammabile si riscontra lo spirito volatile caustico, come già è stato riferito dal celebre Sig. *Cigna* mio Amico, e Collega nell' eccellente suo Opuscolo: *de causa extinctionis flammæ, & animalium in aere interclusorum*, stampato nel 2.° vol. degli *Atti dell' Accademia di Torino* per gli anni 1760. 1761. p. 194. §. 40. succedendo però in questo una singolare anomalia, mentre dipende l' infiammabilità da un certo rapporto tra i principj dello spirito volatile, e la quantità dell' acqua, nella quale si trovano distribuiti; avendo più volte osservato, che lo spirito volatile sommamente concentrato non è suscettibile d' infiammazione, almeno in quelle stesse capacità chiuse, nelle quali diventa infiammabile, diluendolo solamente con una data quantità di

(*ee*) Ho ripetuta quattro volte questa coobazione, e sempre l' alcali volatile ricavato si è accresciuto di peso: se avessi avuto ozio avrei proccurato di assicurarmi del limite, cui può estendersi quest' aumento; ma intanto mi sia permesso di osservare che succede lo stesso come del sublimato corrosivo col mercurio, il quale va caricandosi di questa sostanza metallica, com' è a tutti noto; e però sembra dovuto alla presenza dell' acido marino contenuto in queste materie il successivo rapimento di queste sostanze.

acqua diſtillata (*ff*). Egli è però altresì vero che lo ſteſſo ſpirito volatile riconoſciuto infiammabile entro grandi capacità o non s' infiamma, o a ſtento può infiammarſi entro capacità meno alte e meno ſpazioſe; non dovendo neppure ommettere di riferire che in una campana, nella quale i vapori d' uno ſpirito volatile cauſtico concentrato non poſſono eſſere infiammati dall' introduzione d' un cerino acceſo pel buco praticato nel piattellino, ſul quale ella s' appoggia, ſe ſi apre la comunicazione ſuperiore della medeſima, e vi ſi preſenti un altro cerino parimenti acceſo, s' infiamma la corrente de' vapori; e finalmente ſuccede non di rado, che i rimanenti nella campana ſteſſa prendano fuoco dalla fiamma inferiore. Dal che parmi poterſi raccogliere, che il troppo ravvicinamento delle parti infiammabili ſia nocevole alla ſteſſa infiammabilità, e perciò dipenda la proprietà dell' infiammazione piuttoſto dalla maniera d' eſſere, che dalla quantità della materia infiammabile, come già ho oſſervato. Siccome però in queſte circoſtanze ſpegneſi la fiamma del cerino nell' atto della ſua introduzione, anche dopo alcuni momenti della libera comunicazione de' vapori alcali volatili coll' aria comune, ſembra dimoſtrare queſto effetto, che l' eccesſiva condenſazione del flogiſto riduca queſti vapori allo ſtato mofetico.

91. Queſta oſſervazione accoſtata a quelle che ſono riportate dal Sig. *Prieſtley* nella copioſa ſua raccolta di ſperimenti ſulle diverſe ſpecie d' aria, e ſegnatamente nella terza Sezione della prima Parte, e nella quinta della ſeconda Parte del primo Volume, eccita un ſon-

(*ff*) Coſtante oſſervazione (della quale mi verrà forſe in acconcio di far uſo in progreſſo) ſi è, che tra il grado d' infiammabilità e quelli delle oppoſte metificità, ſingolarmente in quella parte, ove ha luogo una ſomma concentrazione, la fiamma riceve uno ſtraordinario allungamento, e s' ingroſſa notabilmente nell' altra.

dato sospetto, che il gaz infiammabile possa risolversi unicamente in gaz mefitico tanto per un eccesso di concentrazione delle parti flogistiche, quanto per una soverchia loro associazione col principio acquoso; onde sembrerebbe possibile che un gaz mefitico per difetto d' umidità potesse passare all' infiammabilità, e quindi di nuovo al mefitismo mediante una proccurata combinazione di parti acquose, e viceversa.

92. Dall' asseveranza poi di questo instancabile Scrittore, che il gaz infiammabile prima di passare allo stato mefitico si riduca al caso di servire alla conservazione della fiamma, sembra naturale il dedurre la confermazione di quanto ho esposto intorno alla natura di questi fluidi aeriformi; di modo che il rapporto di quantità che trovasi tra' principj volatili, de' quali s' imbevono le parti dell' aria contemporaneamente espulse, costituisce le varietà d' una medesima specie; e l' esclusione o la sostituzione di alcuni principj di diversa natura ed indole costituisce la differenza ne' generi di questi fluidi aeriformi; così dall' associazione del flogisto strappato alle materie infiammabili si raccoglie un gaz infiammabile, perchè appunto nelle sostanze metalliche sono le parti infiammabili in uno stato di massima concentrazione, e di vero flogisto, il quale, come ho osservato, è alterabile da due cause affatto opposte; e forse per ragione appunto della eccessiva concentrazione e volatilità, e della poca aderenza non si può ottenere infiammabile il gaz prodotto dall' acido nitroso; mefitico per contrario si ottiene il gaz dalle terre, e dalle sostanze saline, probabilmente in virtù della seconda circostanza rilevata, cioè perchè la materia infiammabile involta ne' sali e nelle terre trovasi sempre più carica di principj acquosi, e non mai in istato di flogisto; laonde nel caso de' metalli i vapori acquosi che s' inalzano dalla scomposizione degli acidi proccurano l' infiammabilità alle parti del flogisto, che in questo stato non sarebbero capaci d' infiammazio-

ne; e nel caſo delle ſoſtanze ſaline, o terree i vapori che ſi elevano ſono in una proporzione troppo grande, perchè poſſa aver luogo queſta proprietà nelle parti infiammabili già ſaziate di principio acquoſo.

93. Nè è fuori di probabilità il congliietturare, che in queſti gaz non ſegua ſcompoſizione degli acidi, o non ſia almeno così intima, come avviene colle ſoſtanze metalliche, e ad ogni modo affatto contrarj ſono gli effetti di queſte combinazioni. Di fatto ſe nel tempo che ſi fa del gaz infiammabile coll' acido vitriolico ſul ferro, ſi proccuri l' aſſociamento d' un alcali fiſſo, come dell' olio di tartaro, non ſolo ceſſa la produzione del gaz infiammabile, ma ſi fa un repentino, e coſpicuo aſſorbimento, e molto più ſenſibilmente ſi manifeſta la parte che ha il principio acquoſo in queſte produzioni gazoſe; laonde il difetto e l' ecceſſo del principio acquoſo toglieranno l' infiammabilità, e ſarà affatto oppoſto il mezzo da tentarſi, onde rendere infiammabili i gaz mefitici, dovendo proccurarſi la concentrazione di quelli che abbondano di principio acquoſo, e per contrario diluirſi quelli ne' quali vi è ecceſſo di concentrazione delle parti infiammabili. Uno de' ſegni caratteriſtici di queſti è l' inſtantanea, e totale eſtinzione della fiamma al ſolo accoſtarla al gaz; mentre è meno pronta, e men compiuta ne' gaz mefitici vaporoſi.

94. Quantunque ſia vero, che ſeguono alterazioni negli acidi dietro alla loro combinazione con altre materie, ſulle quali eſercitano le loro proprietà, non potrei però concedere che generalmente ne riſultaſſe un acido aſſolutamente identico; ancorchè ſu le prime anch' io aveſſi formato lo ſteſſo concetto. Il ſentimento del celebre Sig. *Bergman*, e l' ingegnoſo lavoro del dottiſſimo Sig. Cav. *Landriani* ſono per verità di troppo gran peſo, perchè poſſa diſſimularmi il merito de' loro ingegnoſi argomenti; ma appunto perchè l' apparenza e certi caratteri generali ſembrano ſavorire queſta opinione, ho

ho creduto di doverne fare l'oggetto d'una ſcrupoloſa ricerca, e mi è riſultato che ciaſcuno di queſti fluidi non ſolo conſerva veſtigj deciſivi, e caratteriſtici dell' acido, che ha ſervito al loro ſviluppamento, ma dimoſtrano alterazioni diverſe e dipendenti dalle ſoſtanze paſſive che vi hanno dato luogo.

95. Troppo vaſta ſarebbe la materia, e troppo forſe mi ſono già fatto lecito di dilungarmi, sì che non mi ſtenderò più oltre per ora ſu queſto punto, baſtandomi d'indicare il mezzo, che mi è riuſcito più acconciamente per queſte eſplorazioni, il quale conſiſte nell'acidulare quanto più ſi può dell'acqua diſtillata colla filtrazione de' gaz, e quindi valerſene ſpezialmente ſopra de' ſali metallici *(gg)*.

96. Mi reſta per ultimo da oſſervare che molte ineſattezze, nelle quali poſſono aver inciampato alcuni Fiſici, dipendono dalla inſufficienza de' mezzi creduti coercenti, e che generalmente s'impiegano per ritenere queſti fluidi elaſtici: avviſo da me dato, riguardo all'acqua ſpecialmente, per determinare l'aſſorbimento ſino dall' anno 1759. ſulle premure fattemene dal medeſimo celebre Sig. *Hales*, e che trovaſi nel 2.° vol. degli Atti dell' Accademia di Torino per gli anni 1760. e 1761. alla p. 133, e ſeguenti, e che ho creduto di dover confidenzialmente rinnovare a qualche valente Fiſico, col quale ebbi a trattare di queſti fluidi; ragion dunque vuole che ſi cominci dall' oſſervare, che non può farſi operazione alcuna in vaſi chiuſi ſenza che ſegua una dilatazione più o meno riguardevole dell'aria contenuta nelle capacità, e conſeguentemente un traſporto del-

---

(gg) Tra' ſali metallici credo di dover annoverare le calci metalliche fatte cogli acidi, e queſte principalmente ſono atte a dimoſtrare le accennate differenze.

la medesima nelle parti più distanti dalla causa di queste rarefazioni, di modo che non proccurandosi una circolazione d' aria per restituire liberamente la quantità che ne' è espulsa, e che non può retrocedere per causa de' mezzi coercenti, che si sono impiegati, non può a meno di succedere che riesca minore la quantità d'aria di quello che era nelle capacità principali, nelle quali si fanno le operazioni: ora l'aria espulsa può giugnere fino ad un certo grado di condensazione, e farsi luogo per mezzo della compressione dell' acqua; ma ogni qualvolta segua questa composizione di forze, cioè del peso dell' aria con quello d' una quantità d' acqua, per istabilire l' equilibrio tra l' aria esterna, e l' atmosfera contenuta dalle capacità, sempre succede un' espulsione progressiva dell' aria o del fluido elastico alla superficie dell' acqua che supera il livello in ragione della superficie medesima, e probabilmente del maggiore inalzamento dell' acqua, fintanto che ripigli la medesima il suo livello; così anderà scarcerandosi l' aria contenuta nell' acqua entro la campana, mentre dalla superficie esterna ne succhierà dall' atmosfera se l' acqua entro la campana si trovi inalzata sopra il livello; e per contrario si svilupperà dalla superficie esterna per passare nell' atmosfera libera, allorchè per la condensazione del fluido contenuto sarà nella campana l' acqua sotto il livello, e anderà assorbendo quest' acqua altrettanto fluido, quanta è la dissipazione che si fa dall' esterna superficie.

97. Non ho fin qui considerato che la rarefazione dell' aria in una parte dell' apparecchio, ed il suo addensamento nell' altra; ma se si rifletta alla complicazione di cause che debbono rendere difettosi questi apparecchj, si vedrà colla maggior evidenza l' impossibilità di rimediarvi per la moltitudine delle incognite, ond' è intrecciato il problema; ed un abbozzo alla sfuggita basterà, come spero, a convincere di questa verità. Risulta egli dall' esame de' medesimi, e dalle operazioni

che vi ſi fanno per lo ſviluppamento de' diverſi gaz, i quali ſono ſempre prodotti o dalle effervefcenze ſenza ſuſſidio di fuoco, o dalle ſcompoſizioni riſultanti dall' azione del medeſimo, o finalmente dal concorſo di entrambi queſti mezzi. Oltre il di già oſſervato sbilanciamento di equilibrio nelle parti dell' aria contenuta nelle capacità, dee per neceſſità riſultare dalle accennate operazioni uno ſviluppamento o di eſalazioni in iſtato di ſiccità, o di vapori più o meno pregni d' umido. Se ſaranno in uno ſtato di perfetta privazione di principio acquoſo, è naturale che involeranno l' umidità, che accompagna la parte dell' aria contenuta nelle ſteſſe capacità, ed a quel punto l' aria ſteſſa ſpogliata dell' umidità ſua eſſenziale per eſſere reſpirabile, dee di neceſſità ſoffrire alterazioni più o meno eſſenziali nelle ſue proprietà; e perciò ſi può fondatamente far quiſtione, ſe non ſieno alterate le leggi ordinarie e cognite, e per lo meno, ſe non ſia notabilmente variata la ſua elaſticità; e ſe continui ad eſſere atta alla conſervazione della fiamma.

98. Se al contrario ſono le eſalazioni accompagnate da vapori umidi, quale ſarà la quantità di cui potranno caricarſi le parti dell' aria in queſto ſtato di dilatazione? quali modificazioni riceveranno da queſto accoppiamento tanto nell' eſſenza loro, quanto nelle loro proprietà? Saranno le une e le altre della ſteſſa natura ed indole, tanto le umide quanto le aride? In ſomma chi potrà luſingarſi di giugnere a determinare individuatamente il rapporto, che vi può eſſere tra la forza di tanti principj differenti più ſoſpettati che noti, onde fiſſare con qualche eſattezza il grado di forza del riſpettivo loro contatto?

99. Se poi ſi rifletta alle differenze, ed alle indiſpenſabili alterazioni, che debbono eſſere prodotte dal ſolo combaciamento di queſti fluidi colla ſuperficie dell' acqua, o dalla feltrazione loro più o meno coſpicua en-

tro la medeſima, diffondendoviſi per mezzo d' una più o meno violenta agitazione, neſſuno potrà diſſimularſi le molte dubbietà, in cui dovrà involgerſi, non potendo aſſicurarſi nè della qualità, nè della quantità de' principj che ſaranno ſtati ritenuti per mezzo della diſſoluzione, o di nuove combinazioni; e niente meno ſoſpette potranno riuſcire le induzioni, che ſi ſarebbero coll' uſo dell' argento vivo medeſimo, poichè in molte circoſtanze può dimoſtrarſi inſufficiente al propoſto oggetto di ſervire di mezzo veramente coercitivo, venendo viſibilmente alterato non ſolo nella ſuperficie comunicante colle capacità, ma eziandio lungo le colonne rinchiuſe ne' tubi barometrici; ed in alcune altre eſſendo evidente l' alterazione prodotta eſcluſivamente ſulla parte comunicante coll' atmosfera.

100. La natura di queſte diſcuſſioni richiederebbe una ſerie di rigoroſi ſperimenti per ricevere quel grado di evidenza, che merita l' importanza del ſoggetto, e che volentieri avrei preſentato come un giuſto tributo alla nuova *Società Italiana*, ſe un giuſto ſentimento di riverente ſtima per tanti riſpettabili Accademici non mi tratteneſſe dall' eccedere i confini di un Opuſcolo, come già ho detto, forſe anche troppo diffuſo.

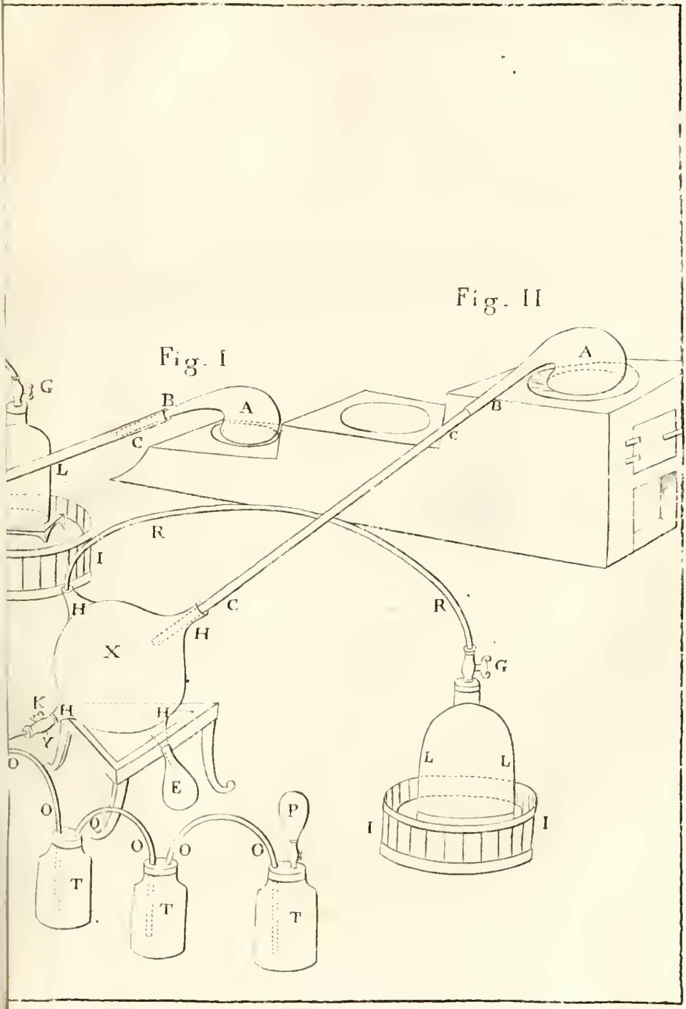


Fig. I
Fig. II
A
B
C
G
L
I
R
H
X
K
Y
E
O
T
P

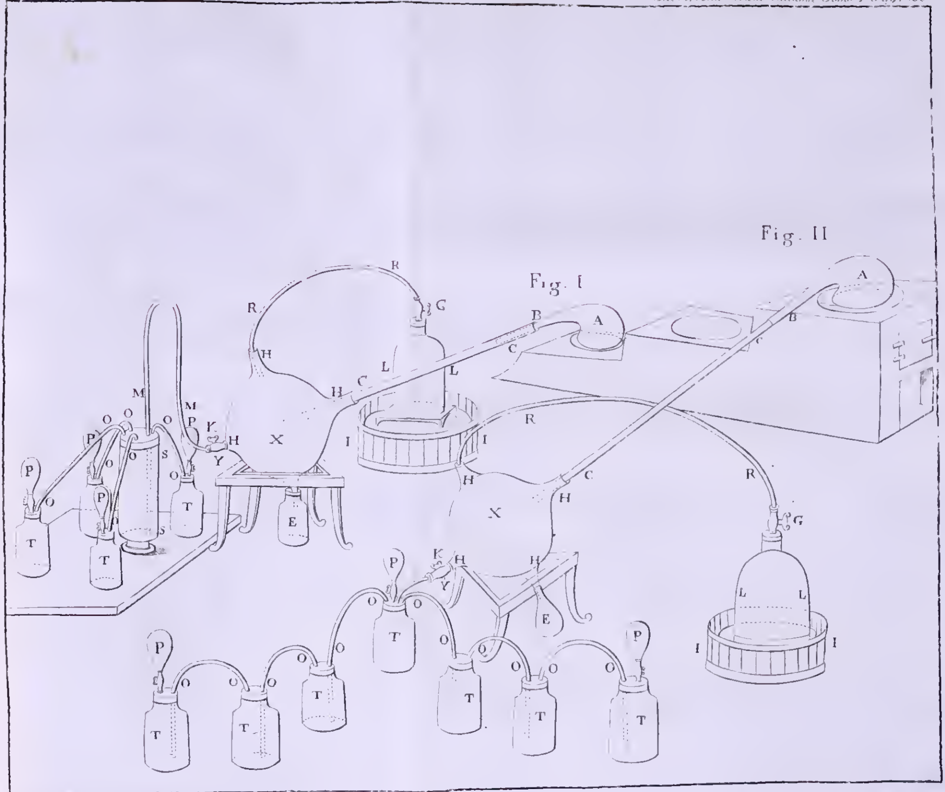
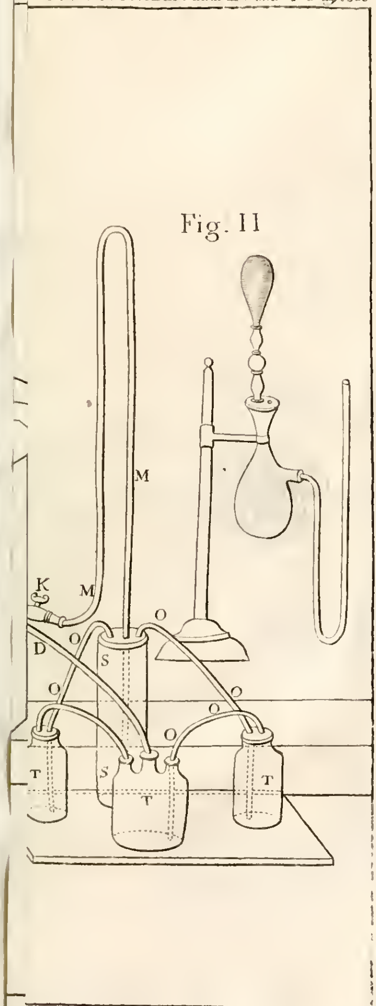


Fig. I
Fig. II
A
B
C
R
G
H
L
M
O
P
K
Y
X
I
S
T
E

Mem. della Società Italiana Tomo I Pag. 580



T I

E

nache

Regio
ſità di

che.

miranda
rà gio-
rigene-
la vec-
prima
izione
ie ter-
lo che
a uno

Tavo-
ie per
eſimo..

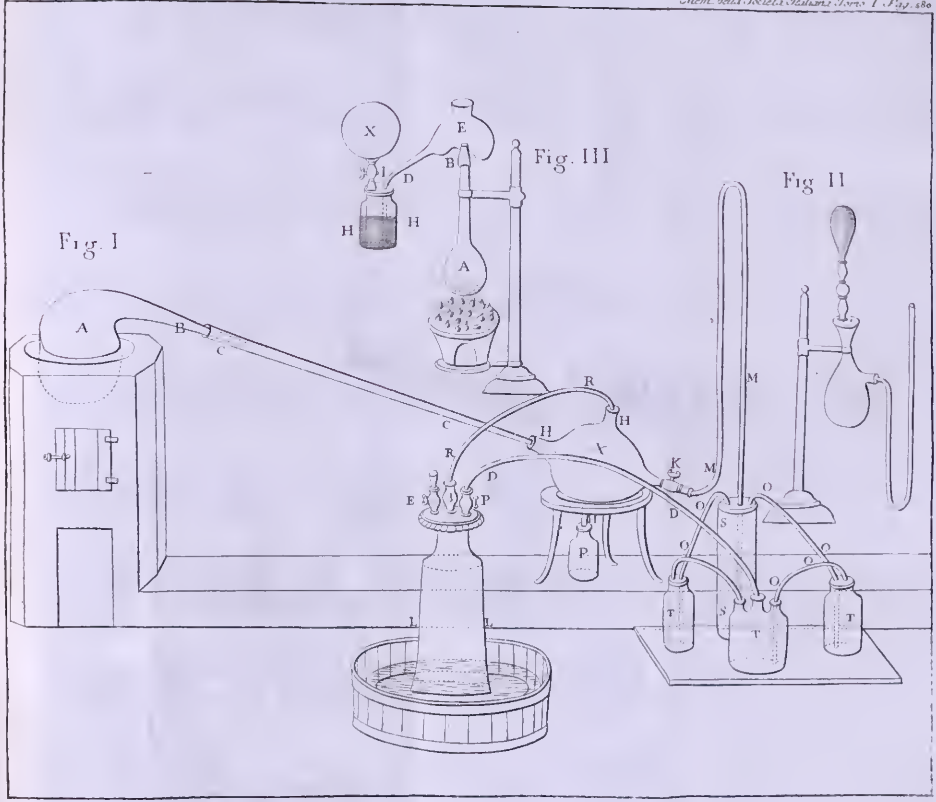


Fig. III
Fig II
Fig. I

RISULTATI

DI ESPERIENZE

Sopra la Riproduzione della Testa nelle Lumache terrestri (*a*)

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore di Storia naturale nell' Università di Pavia.

ARTICOLO I.

Descrizione anatomica della testa delle Lumache.

A Persuadere più facilmente di questa ammiranda riproduzione il dotto e curioso Lettore sarà giovevolissimo il far vedere che la novella testa rigenerata non differisce punto ne' suoi componenti dalla vecchia recisa. Ma ciò conseguir non possiamo se prima col lume dell'anatomia non venghiamo in cognizione delle parti onde è formata la testa delle lumache terrestri, la quale trovasi assai più composta di quello che a prima giunta si sarebbe creduto. Ogni qualvolta uno

(*a*) La presente Memoria è tratta dal mio Libro sopra le *Riproduzioni Animali*, che a quest' ora sarebbe già pubblicato, se non restassero da ultimarsi alcune Tavole di Figure troppo necessarie per la piena intelligenza del medesimo.

di quefti rettili (*b*) è quanto lo può effere fuori del gufcio nativo, mette in vifta tutta la lunghezza del collo, e del capo, dal quale ultimo fpuntano nella parte d' avanti le quattro corna, cioè a dire le due maggiori per di fopra, e le due minori per di fotto; le quali quattro corna, allungate pienamente che fieno, finifcono in un globettino portante nelle due maggiori un punto nero che comunemente fi crede effer l' occhio. Al di fotto immediatamente delle due corna minori apparifcono i labbri, che quando fi aprono, e che mangia l' animale, manifeftano i piccioli denti. Cotefte parti, comprefo anche il collo, fono tutte quante feminate di picciole glandolofe granella fomiglianti in certo modo a quelle d' una fragola, o fatte, come diremmo noi, a *fagrino*. Solamente quefto fagrino alle corna, e alle labbra è più fino che fu la tefta, e ful collo. Per l' oppofito la parte inferiore della lumaca non è niente granellofa, ma affatto lifcia, e sfuggevole, quella cioè che da alcuni Naturalifti non impropriamente chiamafi *piede*, per appoggiarfi ad effa l' animale quando fi ftrafcica. E quefto è ciò che può efpiare la vifta fenza il foccorfo del coltello anatomico, al quale però fiamo aftretti di ricorrere, volendo noi penetrare l' interno della tefta, che è l' oggetto delle noftre ricerche. Ma noi non poffiamo notomizzare la lumaca viva. Al folo lievemente toccarla, di allungata che era, fi contrae tutta, fi ritira precipitofamente nella fua cafetta, e vi fi nafconde. Che fe rompafi effa cafetta per efaminarla, il capo, e le corna trovanfi allo-

(*b*) Chieggo perdono ai Signori Linneani fe non mi fento difpofto di annoverar le lumache tra i *Vermi*, ficcome vuole il loro venerato Maeftro. Non è di quefto luoil moftrare quanto fiffatto penfamento poco fi accorda con la Natura. Piuttofto cadrà il deftro di farlo in un mio fcritto omai compiuto, nel quale tra l' altre cofe fi ventilerà fe alla Storia Naturale fieno ftati più fvantaggiofi che utili i moderni Siftematici, e Nomenclatori.

ra rannicchiate dentro del corpo in maniera, che riesce difficilissimo l' esplorarle come conviene. Il mezzo più acconcio a conseguire l' intento si è quello che suggerito viene dal grande *Swammerdamio* nell' eccellente suo Trattatello su le lumache, voglio dire di farle morire lentamente dentro dell' acqua. Allora dunque si trovano quasi sempre col collo, e col capo fuori interamente del guscio, e spuntano altresì più o meno le corna. Tagliata longitudinalmente per di sopra in tal vantaggiosa situazione con sottili affilate forficette la pelle del capo, si presenta subito all' occhio il cervello della lumaca diviso in due lobi, i quali nella parte inferiore danno origine alla midolla allungata, e nella superiore a dieci nervi, quattro de' quali s' impiantano dentro alle quattro corna, ed estendonsi fino alla loro sommità, e gli altri sei vanno a mettere, e a diramarsi in varie parti del capo, come ai muscoli della pelle, alla bocca, alla gola, al palato.

Lo *Swammerdamio* è stato il primo, per quanto io mi sappia, ad osservare che il cervello della lumaca è mobile; e la sua mobilità nasce in grazia di alcuni muscoli, cui resta attaccato, mercè i quali ora si accosta alle parti anteriori della testa, ora da esse allontanasi, secondo i diversi movimenti del corpo. Quando poi la lumaca è sporta assai bene del nicchio, poggia il cervello ordinariamente sopra l' esofago.

Dicea più sopra che quel punto nero, che trapela alla cima delle corna maggiori, viene comunemente creduto esser l' occhio della lumaca; e tal credenza a me sembra ragionevolissima. Di fatto l' inarrivabile sagacità del più volte nominato Naturalista Ollandese, secondata dal vantaggioso mezzo di buone lenti, ha saputo trovare in questo punto le parti più principali che lo caratterizzano per l' organo della visione, cioè a dire l' uvea, i tre umori, e l' aracnoide involgente il cristallino. A me pure è riuscito di scoprire con sufficiente chiarezza queste parti, a riserva dell' umore acqueo, e del vitreo, che non potetti fcernere nettamente; quantunque poi la non apparenza di quefti due umori io la rifonda più prefto nella mia poca perizia nel difcoprire tai minutezze, che nella non efiftenza delle medefime. Dei quattro nervi, che dal cervello vanno a piantarfi dentro alle corna, due, che chiameremo gli *ottici*, fi attaccano agli occhi, allargandofi fotto di effi in una fpecie di bulbo fatto a zucchetta offia a pera. Ma quefti quattro nervi fono accompagnati dai loro mufcoli, dall' azione de' quali a beneplacito dell' animale fi arrovefciano le corna sì grandi, che picciole, e fi occultano dentro del corpo: ed in grazia di quefto arrovefciamento e fucceffivo occultamento vengono gli occhi a guarentirfi, e a metterfi in falvo dalle eftrinfeche ingiurie.

Levato il cervello, apparifce l'efofago membranofo, lavorato a fottili crefpe longitudinali, di un livido cenerino, e di pareti gracilifsime, il quale fi va reftrignendo a proporzione che fi accofta alla bocca. Queft' apertura, con cui la lumaca prende l' alimento, è corredata del fuo palato nella parte fuperiore, e di una callofa mafcella, a cui è tenacemente attacato un dente di foftanza quafi cornea, di colore caftagno, foggiato a mezza luna, e terminato da più punte taglienti, ed acute, formanti in certa guifa altrettanti picciolifsimi denti, quantunque propriamente non ne fia che uno; e quefto è anzi quel folo dente che ha la lumaca. Nel piano inferiore della bocca è fituata la lingua fornita alla fua eftremità di un corpiccino come corneo, e radicata con la bafe in una incavata cartilagine femicircolare. E quefte fono le parti più precipue del capo, prefcindendo da una quantità di mufcoli movitori di effe, la defcrizione de' quali non fembrandomi neceffaria, ho creduto, fenza commettere un peccato d' ommiffione, di poterla lafciare.

Articolo

Articolo II.

Riproduzione delle Corna o Antenne.

Quando io scopersi il primo che le lumache rigenerano le corna, e la testa recisa, più d' un Curioso mi ricercò da quai motivi o ragioni io era stato indotto a pensare che queste parti potessero per ventura riprodursi, ogni qualvolta venivano esse a mancare. E non è difficile che ad alcuno de' miei dotti Lettori venga in mente la medesima inchiesta, ai quali farò io brevemente quella risposta, che fu da me fatta altra volta. Prima di dar opera alla riproduzione delle lumache essendo io occupato in quella de' lombrichi terrestri, di cui ritrovasi un Capo nel mio *Prodromo sopra le Riproduzioni Animali*, più fiate ebbi occasion di osservare quanto alla riproduzione di questi vermi contribuisca l' essere i medesimi difesi dagli urti dell'aria sfogata, e libera, col restare appiattati dentro alla morbida terra, oppure al concime. Questa facile osservazione mi richiamò alla memoria lo stato delle lumache mutilate in qualche parte del corpo, le quali io aveva veduto rinserrarsi per molti giorni nella propria portatile casetta, e chiuderne la porta con quel loro coperchio formato dal vischioso sugo che geme dal corpo, in grazia del qual coperchio difficilmente concedesi l' ingresso all' aria. Riflettei allora che una lumaca mutilata nelle corna o nel capo, e chiusa col coperchio dentro al suo nicchio, si trovava in circostanze simili a quelle d' un lombrico riposto dentro alla terra bagnata, o al concime, al quale sia stata tagliata la testa. A quel modo adunque che un lombrico ripara questa parte perduta, volli vedere se succedeva lo stesso nelle lumache, cominciando le mie sperienze dalla recision delle corna, essendo esse, come ognun sa, un' appartenenza del capo.

Affinchè riefca bene il taglio delle corna, egli è d'uopo che fieno interamente ufcite del capo, il che fuccede ogni qualvolta la lumaca è confiderabilmente fuori del gufcio. Allora tutte quattro effendo pienamente fviluppate, fi poffono fino alle radici comodamente recidere. Tagliatene due, per efempio le maggiori, la lumaca ritira di prefente dentro al capo le minori, ed anche fi nafconde in parte nel gufcio, ma d'ordinario poco appreffo ritorna fuori, facendo ricomparire effe corna minori; quindi è che l'une dopo l'altre fi poffono bene fpeffo recider tutte quattro, fe così aggrada all'Efperimentatore. E ciò non oftante la lumaca così mutilata non lafcia fovente di ritornare col collo, e con la tefta fuori del gufcio, come facea quando era intatta.

In quel che la forbice tronca le corna, efce dalle parti troncate una gocciolina, e talvolta fchizza un zampilletto di liquor trafparente che tira al ceruleo, che non è che quello che albergava ne' corpi glandolofi delle corna, rotti allora dal tagliente metallo. Facendo offervazione alle tefte private allora delle corna, fi veggono i quattro tronconi all' eftremità fuperiore appuntati, e la punta ci accorgiam che deriva dalla corrugazione, e dal riftringimento della radice delle corna, feguíto nel luogo dove fi è fatto il taglio. Se pofcia rivolgeremo lo fguardo alle corna feparate dal capo, e che tante volte rimangono aderenti al piano delle forbici, fi offervano le feguenti cofe. Effe corna immediatamente dopo l'effere ftate ftaccate dalla lumaca, s'ingroffano, a motivo di farfi confiderabilmente più corte; la pelle nel fito, ove è feguita la recifione, o fi corruga a fegno che quafi non apparifce più il piano del taglio, oppure fi allarga in maniera che ne lafcia ufcir fuora il nervo ottico, e i mufcoli movitori del corno. Se il corno recifo è dei maggiori, feguita a manifeftare alla fua fommità l'occhio nereggiante; qualche volta però queft'occhio fi perde, non già perchè fi abbia a temere che reſtato non ſia nel corno reciſo, ma per eſſerſi internato, e ſepolto nel medeſimo, ſiccome lo fa vedere il coltello anatomico.

Sappiamo che alcune parti di diverſi animali ſeguitano a vivere, e a muoverſi per un dato tempo dopo l'eſſere ſtate ſeparate dal loro tutto. Così fanno le ſcolopendre, e i lombrichi terreſtri, ed acquatici reciſi a brani, ma ſopra tutto le code delle lucertole, e dei ramarri, le quali, malgrado l'eſſer rotte in più pezzi, ſeguono per qualche tempo a muoverſi, a divincolarſi, e a ſaltellare. Ma ci è noto altresì che in un numero immenſo di altri animali ſuccede tutto il contrario, talmente che le loro membra, ſeparate che ſieno dal corpo, perdono quaſi ſubito ogni apparenza di vita, e di moto. Le noſtre lumache partecipano di queſti ultimi viventi. Appena che le corna ſono ſtaccate dal capo; ſi rendono immobili, o tutt'alpiù leggeriſſimamente ſi contorcono per alcuni ſecondi, indi non danno più verun ſegno di vita o di moto, eziandio con punta irritate.

Se le lumache così mutilate ſi viſitino dopo 20. oppur 25. giorni, non è rado il trovare un principio di riproduzion nelle corna. Ma tal riproduzione è aſſai diverſa da quella che ſi oſſerva in altri animali; e queſto ſi è uno di que' molti utiliſſimi caſi che c'inſegnano a diffidare degli argomenti analogici. L'illuſtre *Reaumur* è ſtato il primo a far vedere, che comincia a manifeſtarſi il principio della riproduzione delle gambe nei granchi d'acqua dolce, coll'apparire al centro del troncone un picciol cono, la cui baſe è ſenza paragone più picciola di quella del troncone, e che ſolo in proceder di tempo ſi fa grande al pari di lui. Un ſomigliante fenomeno è ſtato oſſervato dal celebre *Bonnet* ne'lombrichi terreſtri, e ne' ſuoi vermi d'acqua dolce. Le medeſime apparenze ſono ſtate a me pure manifeſtate dai girini delle rane, e dalle ſalamandre acquajuole nel rifabbricare la coda, e le gambe (*a*). I raggi delle ſtelle di mare, ſe o caſualmente o dal morſo di qualche animale, oppure dagli uomini vengano in parte tronchi, e ſeparati dal corpo, mettono eſſi pure ſul mezzo del troncone un tenue cono o linguetta, che non è che il germe ſviluppanteſi della mancante porzione: ed io nel mio Viaggio ſul Mediterraneo nella State del 1781. ho veduto più ſtelle, da' cui raggi reciſi pullularono coteſti coni più o meno creſciuti, in quella ſpecie ſegnatamente detta dal Linneo *aſterias rubens*; alcune delle quali conſervo in queſto grandioſo Muſeo d'Iſtoria Naturale della Regia Univerſità di Pavia. Ma ſu le corna troncate delle lumache la faccenda non va così. Il troncone ſteſſo rotondaſi in un bottoncino di colore alquanto sbiadato. Il bottoncino in ſeguito ſi fa più grande, il colore più carico, e in cima al bottoncino, ſe ſi parli delle corna maggiori, ſalta fuori un punto nero, che non è che l'occhio della lumaca. Intanto la parte riprodotta ſi allunga, e dopo un tempo diſcreto il corno novello pareggia l' altro compagno non mutilato. La riproduzione accade in ſimil guiſa nelle corna minori.

Che ſe invece di levar via le interne corna, ſiccome fin qui è ſtato per me ſuppoſto, ſe ne levi una metà, un terzo, un quarto ecc. ſe ne ottiene per egual modo la riproduzione con l'accompagnamento ſteſſo di circoſtanze di ſopra indicato. E queſto è l' andamento che il più tiene la natura nella riproduzion delle corna. Talvolta però interviene che in vece di ritondarſi il troncone, ſi appunta, e ſi allunga. La punta però in progreſſo di tempo ſi allarga, e ſi conforma in globetto, e il reſtante ſi eſeguiſce poſcia nella maniera teſtè accennata.

La lumaca fa quell'uſo ſteſſo delle corna nuove, che

(*a*) Prodr. cit.

facea delle vecchie, o ſi riguardi lo ſpingerle fuori del capo, e l'allungarle, o il ritirarle dentro di eſſo, e il naſconderle, o il manifeſtare in loro quel ſenſo vividiſſimo e pronto, per cui ad ogni picciol tocco le arroveſcia ſubitamente, e le mette in ſalvo.

Tutti queſti fatti ſembravano aſſicurarmi che il numero dei componenti la porzione tagliata ſi trovaſſe nè più nè meno nella porzione riprodotta. Volli tuttavia accertarmene maggiormente co' più minuti anatomici eſami. Si ſono adunque da me aperte per lo lungo con ſottile ferruzzo tagliente più corna riprodotteſi, ma non ho ſaputo trovare in che il nuovo rigenerato poteſſe differire dal vecchio reciſo. La medeſima pelle fatta eſteriormente a ſagrino, e internamente ripiena di ghiandoline, i medeſimi muſcoli moventi le corna, i medeſimi nervi andanti alle loro eſtremità, e quivi allargantiſi in un bulbo ovale, le medeſime parti in fine onde riſulta l' occhio ſteſſo; talmente che ſarebbe ſtato impoſſibile il diſtinguere le corna nuove dalle vecchie, ſe quelle vedute non ſi foſſero naſcere e creſcere, e ſe dove avevano cominciato a pullulare reſtato non foſſe talvolta ſu la pelle un leggiere affoſſamento, e tal' altra un picciolo ſporto o rilevato, per cui ſi conoſceva il ſito preciſo, dove aveva avuto principio il corno novello.

Ad ottenere queſta riproduzione vi ſi richiede un ſufficiente calore. Il temperato non baſta, ma vi vuol per lo meno il grado decimo terzo nel Termometro del *Reaumur*. Quindi è che nella Lombardia, e in diverſe altre parti dell' Italia ſi devono cominciar le eſperienze a primavera ſpiegata, e quel ch' io dico del calore in riguardo al rifacimento delle corna, lo dico in riguardo a quello della teſta, di cui or ora a ragionare intraprendo. Venendo poi la ſtate, le corna ſi rifanno più prontamente. E ſe mi foſſe chieſto il tempo preſſo a poco neceſſario per queſta completa riproduzione, direi ch' eſſa d' ordinario addimanda quaſi due meſi, poca o molta che ſia la parte delle corna, che dee ripararſi. Dirò in oltre che quantunque tal riparazione frequentemente non manchi, pure evvi ſtata qualche rara volta che non mi è riuſcito di ottenerla, malgrado lo aver conſervate per anni intieri le lumache così mutilate.

ARTICOLO III.

Riproduzione della teſta dimezzata.

Una pelle fatta a ſagrino, due labbra, e due mandibole con un dente lunare attaccato alla ſuperiore, la lingua impiantata in una cartilagine ſemilunare, una porzione di eſofago, il cervello diviſo in due lobi, e pullulante in dieci nervetti, oltre a quattro corna di grandezza diverſa, veduto abbiamo eſſere queſti i componenti precipui della teſta delle lumache. Queſte pratiche notizie però non baſtano per andar ſicuri che le noſtre eſperienze intorno alla decapitazione di queſti rettili ſieno ſtate rettamente inſtituite. Se coteſte parti veniſſero a formare una teſta ſimile a quella dei più degl' inſetti, voglio dire fatta a globo, o conformata in un corpo facilmente diſtinguibile dall' altre parti dell' animale; ſi vedrebbe ſubito dov' ella comincia, e dove finiſce, e conſeguentemente ſapremmo ſenza equivoco dove preciſamente la forbice, o il coltello, per la reciſione di eſſa paſſar doveſſe. Ma la teſta nelle lumache non è foggiata così: allorchè queſte ſono fuori del guſcio, il loro corpo (ſe ſi preſcinda dalle corna) imita rozzamente un cono, che è di minor diametro nella parte anteriore, e di maggiore nella deretana, che confina con l' apertura del guſcio. E' coſa certa che la teſta riſiede nell' anterior parte del cono, ma la difficoltà conſiſte nel ſapere quanto eſſa preciſamente ne occupa, per ſapere quanto ſe ne poſſa con ſicurezza tagliare. A dir vero non ſi può dar regola certa per lo continuo allungarſi e reſtrignerſi, ingroſſarſi e impicciolirſi dello ſteſſo cono quando la lumaca è in moto. Pure allorchè la medeſima è quanto lo può eſſere fuori del guſcio, ho trovato che ordinariamente ſi eſtende dalla punta ottuſa del cono fino al di là della radice delle corna maggiori per il breve intervallo di una linea all' incirca; e fin lì è conceduto il taglio, con ſicurezza di avere per lo più reciſa ſoltanto la teſta. Ma ſe ſi oltrepaſſano queſti limiti, ſiccome allora in un con la teſta vengono a reciderſi altre parti del corpo, così ſiamo preſſochè certi della morte dell' animale. Le lumache da me con felice ſucceſſo ſperimentate ſono ſtate di tre ſpecie, l'*helix pomatia*, *nemoralis*, *lucorum*, per valermi de' vocaboli del Nomenclatore Linneo. Più individui di una di queſte ſpecie ſono al naturale eſpreſſi nella Tavola anneſſa.

La figura I. rappreſenta queſta lumaca chiuſa ancora nel guſcio, diſponenteſi però ad uſcirne.

La II. quando comincia a mettere in viſta il capo, e le corna.

La III. allorchè ha allungate le corna di più, ma poſta in ſituazione contraria.

La IV. quando è quaſi fuori del guſcio quanto lo può eſſere.

La V. fa vedere la porzione di cono comprendente unicamente la teſta, la qual porzione, per dare ad intendere meglio la coſa, ſi rappreſenta già ſpiccata dal collo.

La figura VI. moſtra la lumaca, cui è ſtata levata queſta porzione, apparendo ſul tronco ne' quattro punti che denotano il luogo delle quattro corna.

Dopo l' aver ottenuto nelle lumache la riproduzion delle corna, mi nacque in penſiero di vedere coſa foſſe per accadere recidendo loro la teſta. Ma dubitando che dal levarla tutta, anzi che rifarla, periſſero, cominciai i miei tentativi col troncarne una porzione ſoltanto, quella cioè che ſi eſtende eſcluſivamente ſino alle corna maggiori, e che comprende le labbra, le mandibole col dente, la lingua, e le due corna minori oltre gl' invogli muſculoſi, o integumenti, che vogliam nominarli, la qual porzione per ſervire alla brevità chiamerò quindinnanzi *teſta dimezzata*. Viene eſſa rappreſentata nella figura IV. per le lettere *a*, *c*. Per reciderla a dovere facea che la lumaca l' aveſſe ſpinta in fuori quanto più può, e allora procurava di levarla di netto con la forbice, facendo la ſezione perpendicolare all' aſſe del cono. Ma l' operazione non veniva ſempre a bene, ſiccome avrei deſiderato. La teſta della lumaca, ſiccome abbiam detto, è mobiliſſima, e appena che ſe la ſente toccare l' accorcia di ſubito, e la ritira: di più allorchè l' allunga, la piega ſovente in diverſi ſenſi, a deſtra, a ſiniſtra, in alto, al baſſo. Quindi è che il taglio riuſcendo male talvolta, cioè a dire fatto obliquamente, la teſta dimezzata non recidevaſi preciſamente. Ma perchè io riputava dell' ultima importanza per l' eſattezza dell' eſperienze il ſapere quali parti unicamente venivan reciſe, per vedere ſe in ſeguito ſi riproducevano tutte (in evento che tal riproduzione aveſſe avuto luogo in natura); però in queſti tentativi io dovetti pigliarmi una fatica, che pigliata non m' era nelle riproduzioni di più altri animali, e queſta fu di anatomicamente eſaminare ogni teſta dimezzata, ſubito che era ſtata reciſa, e di riporre in altrettanti piccioli vaſi le lumache decapitate, facendone toccar una a ciaſcheduno col ſuo numero affiſſo, che trovandoſi il medeſimo nel mio Giornale, veniva quivi accompagnato da una breve anatomica deſcrizione dei componenti ciaſcuna teſta levata. Così tolto reſtava qualunque ſoſpetto di prendere equivoci nelle mie eſperienze; e d' altronde io poteva venire in cognizione, ſe le parti ri-

fabbricate

fabbricate corrispondevano precisamente nel numero, nella forma, e nella grandezza alle parti recise. Dietro a queste notizie che ho creduto bene il far conte, perchè nota sia la maniera da me praticata nelle sperienze, passo alla narrazione dei risultati.

Seguíta l'amputazione, la lumaca immediatamente appresso si ritira con somma rapidità, e nascondesi dentro del guscio, e soventemente nell'atto del ritirarsi mette un sottil fischio, proveniente dalla difficoltà che trova l'aria nel venir fuora del canale della respirazione per esserle allora in parte conteso il varco dalla subita contrazione del corpo. Malgrado questo enorme taglio egli accade talvolta che la lumaca ritorna poco dopo fuora del guscio, e comincia a strascinarsi da luogo a luogo, siccome facea quando era intatta. La figura VII. ci fa vedere una lumaca, alla quale è stata tagliata la testa a metà, e che dopo il taglio è uscita volontariamente del guscio. I due punti *R*, *S* denotano il sito dov'erano le corna minori. Le maggiori sono più picciole del solito, per non averle questo rettile spinte fuori abbastanza. Ma il più delle volte succede il contrario. Vi è però un mezzo assai facile per obbligar la lumaca ad uscire, ad oggetto di poter vedere, ed esaminare il taglio prodotto, e questo mezzo consiste nel rompere a leggerissimi colpi d'una chiave, o della costola d'un coltello una picciola parte del guscio di dietro; giacchè allora la lumaca da quella viva impressione irritata si determina a spuntar per d'avanti, poca o molta che sia stata la recisione del capo. E qui noterò in passando per evitar le inutili ripetizioni, che di un tal espediente mi sono valuto ogni qualvolta le lumache ricusavano di comparire, e che a me premeva di osservare o la recisione fatta di fresco, ovvero i principj, e i progressi della testa riproducentesi. Esaminato adunque il troncone, dopo l'aver recisa la testa dimezzata, si scorge uscire da esso una porzione di quel liquore, che nella lumaca tien luogo di ſangue; il qual liquore però ceſſa ben preſto, a motivo del troncone che non indugia a corrugarſi, e ad impicciolirſi, anzi qualche volta ſino in apparenza a perderſi, entrando in ſuo luogo un picciolo incavo o affoſſamento, dove non appariſce indizio del taglio. Intanto le lumache così decapitate ſi attaccano per lo più ai vaſi dentro cui ſono ripoſte, ſi naſcondono nella loro caſetta, otturandone la bocca con quel ſottile e bianco coperchio prodotto dal tegnente umore che ſtilla dal corpo, e quivi entro immobilmente quetano per più ſettimane e talvolta per meſi intieri.

Facendole uſcire dopo 30 ovvero 40 giorni, alcune moſtrano il nudo troncone ſenza apparenza di riproducimento; ma altre, ſe la ſtagione ſia piuttoſto calda, cominciano a far vedere verſo il mezzo del troncone un globettino in apparenza carnoſo, aſſai tenero, e di un bianco cenerognolo, che eſaminato però sì eſternamente, che al di dentro, non laſcia ſcorgere all'occhio niente di organizzato. L'organizzazione però dopo altri 8 oppur 10 giorni principia a manifeſtarſi in eſſo globettino già di molto accreſciuto, apparendo i rudimenti delle labbra, delle corna minori, della bocca, e della lingua, con di più un corpicello membranoſo di colore oſcuro, che per eſſere attaccato alla mandibola ſuperiore, e fraſtagliato ai lombi, induce l'Oſſervatore nella facile credenza che ſia il dente rigeneranteſi della lumaca. Trattanto ne' giorni conſecutivi queſte parti ſi vanno ſvolgendo, e manifeſtando di più, occupando ſucceſſivamente ſpazio maggiore nel troncone; e dopo due o tre meſi al più la teſta dimezzata ſi è riſatta in guiſa, che a riſerva del colore alquanto più tenero non ſi diſtingue punto dalla vecchia. Oltre l'iſpezione eſterna, ce lo perſuade, e fa chiaro la notomia. Concioſſiachè aperta, ed eſplorata per di dentro la teſta novella, ſi ravviſano in lei quelle parti, corriſpondenti appuntino nel numero, nella forma, nella grandezza, che preeſiſtevano nella vecchia teſta, e che erano ſtate da me ſcrupoloſamente ſu' miei Giornali notate in ciaſcuna decollazione. Io non ſaprei porgere a' miei Lettori un' idea più ſenſibile di queſta riproduzione, che con l'eſempio d'un fiore per ancor non aperto. Conſiderato ne' ſuoi principj egli è un bocciuolo, o picciol globo riſultante da membrane sì avviluppate fra loro, e sì aggrovigliate, che non arriviamo punto a diſtinguere la forma delle foglie o come diciamo dei petali. Queſti petali ſoltanto in progreſſo ſi diſaſcondono, dapprima con qualche oſcurità, e confuſione, poi diſtintamente, e con tale chiarezza, che chicheſſia lo riconoſce per un bottone d'un fiore: in quella guiſa perappunto che il compleſſo delle parti ſviluppantiſi nelle lumache arriviamo finalmente a ravviſarlo per una verace teſta rigenerata.

Queſta rigenerazione però così compiuta e tutta d'un pezzo è ben lungi dall'ottenerſi in tutte le lumache; ma in diverſe ſpuntano dal troncone due piccioliſſimi globi, che in taluna ſono i principj delle due corna minori, in tal altra l'uno di eſſi abbraccia di più i rudimenti delle labbra, della bocca, del dente, della lingua, i quali due piccioliſſimi globi in progreſſo di tempo però ſi uniſcono inſieme, e ſi conformano in un ſolo, che ſvoltoſi in ſeguito di vantaggio viene compiutamente a formare la teſta dimezzata. Non è raro che l'uno delle due corna riprodotte non aggiunga alla naturale lunghezza, o che ſia biſtorto, ovveramente che un labbro ſia dell'altro più picciolo, od anco che la teſta riſabbricata pieghi tutta da un lato, o che abbia tra il nuovo e il vecchio un incavo o foſſetta, od in fine che la teſta non ſiaſi punto riſatta, e ciò dopo ſei meſi, ed anche un anno, apparendo tuttavia il troncone nudo, allorchè la lumaca eſce del guſcio. Ho oſſervato quaſi coſtantemente, che quando il taglio è ſtato fatto perpendicolarmente all'aſſe del cono, la riproduzion della testa succede perfettamente: e che quelle mostruosità, e quelle anomalie hanno frequentemente luogo, allorchè la recisione è accaduta obliquamente, ovver che le forbici, per non esser talora troppo taglienti, non hanno recisa in un colpo la testa dimezzata.

Le lumache in più tempi decapitate a metà sono ascese al numero di 322. La testa si è ottimamente rifatta in 126. Si è fatta vedere più o meno mostruosa o deforme in 31 lumache; 14 non hanno punto riprodotto, e il restante è perito *(a)*. E però mi sono accorto che la recisione della testa, benchè dimezzata, a più lumache è fatale. Tutte quelle che hanno riprodotto si sono servite della testa novella come facean della vecchia, tanto nei moltiplici, e bizzarri movimenti, che proprj sono di questa parte, quanto nel prendere quegli alimenti che loro somministrava, come pane, insalata, e simili, mercè cui di magrissime che eran venute pria del rifacimento del capo, acquistata avevano la primiera carnosa pienezza.

ARTICOLO IV.

Riproduzione della Testa intiera.

Nel terzo Articolo si è veduto che i componenti l'intiera testa delle lumache giungono fino al di là della radice delle corna maggiori pel tenue spazio di una linea all'incirca. Il perchè determinato avendo io in questo corso novel di esperienze di sradicar per intiero la testa, nel mentovato sito precisamente si è cercato di fare il taglio, e si è procurato sempre che fosse perpendicolare all'asse del cono carnoso formato dalla testa, e dal collo. Ma le difficoltà incontrate nell'amputazione

---

(*a*) La scoperta della riproduzione delle corna, e della testa così dimezzata, che intiera nelle lumache è stata da me fatta nella primavera, e nella state del 1766.

della testa dimezzata trovate si sono le stesse nell' amputazione della testa intiera; e quindi il taglio per l'agitarsi delle lumache non si è sempre potuto fare nel sito prefisso, ma talvolta ha mancato o per difetto, col levar meno dell'intiera testa, o per eccesso, col levarne di più. Quindi ad osservare la dovuta esattezza nelle esperienze, e ad esser sicuro delle conseguenze delle medesime, mi è convenuto ad ogni decapitazione l'intraprendere quegli esami anatomici, che intrapreso avea nelle teste dimezzate, custodendo medesimamente in vasi appartati singole le lumache, e tenendo un esatto conto di ciò che elleno nell' amputazione perduto aveano. Le mutilate a testa intiera sono state 423, ed eccone i risultati.

Quelle lumache, a cui oltre la testa era stata recisa una porzione di collo, tutte quante sono perite. Nè è punto a stupirsene, mentre che allora venivano in parte tagliati gli organi della generazione, che appunto sappiamo avere la loro origine interiormente in un lato del collo, di dove per un forame escon fuora, allorchè questi rettili vogliano dar opera alla propagazion della specie. Le mutilate poi per l' intiera testa precisamente, o che lo erano state alcun poco di meno, morivano bensì in qualche numero, ma le più sopravvivevano a quel taglio enorme, anzi assai di queste rifacevano compiutamente la testa. Tal rifacimento per venire in molti individui accompagnato da circostanze diverse, e tutte degnissime da sapersi, merita d' essere alcun poco particolarizzato. Se ad una salamandra acquajuola si recida una gamba, o ad un lombrico terrestre la testa, e la coda, la riproduzione che ne nasce è un *tutto organico* intero, o vogliam dire una gamba in miniatura, una testa, una coda, similissima alla recisa, a cui null' altro manca che uno sviluppamento ulteriore. Pel contrario sul troncone delle lumache nel modo esposto decapitate non salta già fuori un tutto organico intero, comprendente quelle parti tutte, che componevano la testa tagliata; ma queste parti a principio sono spesse fiate fra lor separate, anzi talvolta pullulano le une qualche tempo appresso che hanno pullulato le altre, e solamente dopo uno spazio più o men lungo si attaccano tutte insieme, si consolidano, e vengono a formare un tutto organico, poco o niente dissimile dall' antica testa. Da alcuni esempii che recherò in mezzo s' intenderà più agevolmente la cosa.

Talora dunque la nascente riproduzione è una carnosa pallottolina aderente in pochi punti al mezzo del troncone, e come spiccata da esso, la qual contiene i rudimenti delle due labbra e delle corna minori unitamente alla bocca, alla lingua, e al dente già rifattosi della lumaca. Le altre parti, come le corna maggiori, e il restante del capo mancano interamente. Il troncone d' altra lumaca mostra un corno maggiore già fornito del suo occhio, e al di sotto in rimota parte e isolata spuntano i primi lineamenti delle labbra. La riproduzione in altre è un gruppo di tre corna, due già arrivate alla naturale lunghezza, e grossezza, il terzo giacente ancora a fior di pelle. Chi non riproduce da principio che un bottoncino, che attentamente spiato, si scorge esser le labbra in sestesse ravviluppate e ristrette. Chi è già fornita dell' intiera testa, a riserva d' uno o più corna mancanti. Chi finalmente lascia apparir sul troncone le due sole corna maggiori, oppur le minori, ovveramente un maggiore, e un minore.

Tutti questi parziali riproducimenti però, congiunti ad altri che appariscono in seguito, coll' andar del tempo concorrono insieme, siccome io diceva, ed unisconsi, e formano una sola riproduzione, cioè a dire una testa novella, in molte lumache in nulla dissomigliante dalla vecchia, a riserva del colore men carico, in grazia del qual colore anche i meno veggenti fanno riconoſcere la porzion riprodotta, ſiccome più d' una volta ho praticamente veduto. La figura VIII moſtra una di queſte lumache, che hanno rifatta compiutamente la teſta, non però ancora adombrata del naturale colore. E lo ſteſſo ſi è della figura IX, ſuor ſolamente il non aver rifatte queſta lumaca le due corna maggiori, ſiccome qualche volta ſuccede. Per altro a tempo più inoltrato anche la teſta novella prende la tinta medeſima della vecchia, e la prima ſoltanto ſeguita a diſtinguerſi dalla ſeconda per una linea cenerognola perpendicolare all' aſſe del collo, la quale fedelmente indica il ſito dove paſsò la forbice nel mutilar le lumache. Sebbene l' indizio di un tal ſito non è coſtantemente una ſemplice linea. Egli è talora un incavo profondo, di colore però ſempre bianchiccio, perpendicolare all' aſſe del collo, ſe perpendicolare ne ſia ſtato il taglio, ed obliquo, ſe con obliquità ſiaſi reciſa la teſta. Anzi in queſt' ultimo caſo qualche volta accade che dalla parte dove è ſtata tagliata più teſta, l' incavo ſia maggiore: ed in qualche lumaca vedeſi un enorme ſquarcio da un lato, niente non apparendo nell' altro, o ſolamente l' accennato indizio della linea di color cenericcio. E quantunque la diuturnità del tempo cancelli gl' incavi, pure il ſegno del taglio, cioè la nominata linea, ſi appaleſa ſul collo di alcune lumache eziandio dopo due anni. Dirò di più. Dopo sì lungo intervallo la riproduzione della teſta in qualche lumaca non è completiſſima, o perchè mancante di uno o più corna, o perchè le corna giunte non ſono, almen tutte, al neceſſario ingrandimento, ovveramente perchè ſono bernoccolute, e moſtruoſe. E di queſte apparenti moſtroſità ne ho riſcontrato non rade volte, le quali ſoſpetterei volentieri che traeſſer l' origine dalla condizione del taglio più o meno obliquo, più o meno avanzato.

Il cibarſi che facevano le teſte riprodotte ſembrava un argomento ſicuro della rigenerazione veriſſima delle parti, onde è compoſta la teſta; pure ho voluto vie maggiormente accertarmene con l'infallibile ſcorta dell' anatomia, la quale mi ha inſegnato che le teſte nuove (almen quelle che all' eſterno ſembravano riprodotte interiſſimamente) erano corredate di tutti que' componenti che trovati avea nelle teſte vecchie, e che in ciaſcheduna decapitazione erano ſtati da me marcati, per non ſoggiacere ad equivoci, o errori in queſti fiſici eſami. Aggiugnerò che ciaſcuna parte nuova ſi univa, e ſi combaciava sì eſattamente ne' più ſottili ſuoi ſtami colla vecchia, che le lumache che avean riprodotto non avremmo mai giudicato che foſſero ſtate mutilate, ſe indicato non lo aveſſe la linea cenericcia, che loro correva attraverſo del collo.

Qui non debbo però laſciar di avvertire, che a quel modo che alcune lumache, cui levato avea la teſta dimezzata, non hanno riprodotto mai nulla, eziandio dopo un tempo lunghiſſimo, lo ſteſſo è avvenuto a diverſe di quelle, cui era ſtata reciſa l'intiera teſta. Di fatto delle 423 mutilate a teſta intera, ne ho contato 32, che dopo un anno non manifeſtavano il più picciol principio di riproduzione; 93 non potevano aver riprodotto meglio. La teſta di 145 ſi era rigenerata con moſtroſità, e le reſtanti lumache erano morte. La teſta intiera per riprodurſi eſige preſſo a poco quel tempo che la teſta dimezzata.

Che ſe chieſto mi foſſe, donde ſia che in diverſe lumache la riproduzione è nulla, tanto del capo, che delle corna; confeſſerei ingenuamente di non avere intorno a ciò che ſemplici conghietture. Eſſendo così le riproducenti lumache, come le non riproducenti della medeſima ſpecie, dir non poſſiamo che altre abbiano il dono di riprodurre, ed altre no. Opinerei piuttoſto che la virtù riproduttrice non poteſſe ſortire in alcune il ſuo effetto per lo ſtato ſoverchiamente morboſo di que-
ſte

ſte lumache, avendo quaſi ſempre oſſervato, che oltre al notabiliſſimo dimagramento di eſſe, l' eſteriore del corpo prende una sfumatura giallognola, che ſembra inſeparabil compagna delle lumache affette da malattia, e bene ſpeſſo ſoggette a perire.

Avutaſi la riproduzione della teſta, era troppo naturale il penſare che le lumache riprodurrebbono altre parti meno di quella eſſenziali. Tali ſono quell' eminente collare che cinge e adorna la ſchiena delle lumache, quando ſono fuora del guſcio, e quel piano, e largo piede, ſu cui appoggiaſi il lor corpo, quando ſi muovono. Queſte due parti reciſe ſi reſtaurano ottimamente, rifabbricando la natura molto o quel poco, che dalla ſorbice era ſtato levato.

Riunendo in un ſol punto di viſta quanto ſinora abbiam detto intorno alla riproduzione delle lumache, chiaro appariſce che eſſe ſanno primamente riparare le corna, o queſte in parte ſoltanto, o per intiero vengan reciſe. Secondo che riſanno la teſta quando è ſtata loro reciſa a metà. Terzo che la riſanno egualmente, ove tutta quanta ſtata ſia loro troncata. Quarto che riproducono il collare, ed il piede, poco o molto che lor venga tolto. Dal che ſi fa chiaro che queſti rettili ricuperano quelle parti preciſamente, che avean perdute, la qual coſa non è però sì propria di eſſi, che non s'eſtenda eziandio ad altri animali riproducenti. Se ad una ſalamandra venga a mancare un terzo, oppure un quarto di coda, non ne riſa che un terzo, od un quarto. E lo ſteſſo vuol dirſi della metà, anzi di tutta quanta la coda. Un fenomeno ſomigliantiſſimo ha pur luogo così nelle gambe anteriori, che nelle poſteriori di queſto amfibio. (*a*). E cotal tenore di rigenerare le parti ſol-

Gggg

(*a*) Prodr. cit.

tanto mancanti si estende invariabilmente ai lombrichi terrestri, ed aquatici, come altresì alle rane aventi ancora la maschera di verme o girino (*b*). Anzi consultando gli Autori che parlato hanno della riproduzion delle membra in altri animali, trovo aver luogo la medesima inalterabil legge: di maniera che stabilir possiamo qual canone generalissimo (se prescinder vogliasi da alcune accidentali anomalie) che negli animali forniti della prerogativa di riprodurre la natura non rimette mai se non se quelle parti, o quegli organi, che per qualunque cagione o accidente erano stati lor tolti.

ARTICOLO V.

Cose relative alla riproduzione della testa nelle Lumache.

Diam compimento alla presente Memoria col riferire alcune nuove esperienze, accompagnate da varie riflessioncelle, le quali per risguardar davvicino, e per mettere in maggior luce questo interessante soggetto, non riusciranno forse discare, siccome spero, ai lettori.

Si è veduto tre essere state le specie di lumache da me cimentate, *pomatia*, *nemoralis*, *lucorum*. Ma sono elleno queste tre specie sole, che godono della riproduttrice virtù? Per le sperienze fatte da alcuni Naturalisti d'oltremonti veggo esservene altre partecipi di tal privilegio. Dirò io però con amica ingenuità di averne sperimentate altre specie, ma pressochè con inutilità di successo, conciossiachè o non hanno punto rifatto la testa, nè le corna, o hanno soltanto manifestato un primo principio di riproduzione, che in seguito è andato a finire con la morte dell'animale.

(*b*) L. c.

Ma donde è mai che alcune qualità di lumache hanno il potere di riprodurre, ed altre no? Se fatto mi fosse simil quesito, candidamente confesserei di non aver tanto in mano, onde sciorlo. Se le riproducenti avessero struttura organica assai diversa dalle non riproducenti, assegnar potrebbesi qualche ragione, o a parlare più filosoficamente qualche disparità tra le une e le altre; ma tale diversità, nelle parti almeno constitutive del capo, non ho certamente saputo trovarla nelle varie specie di lumache con esito così buono, che cattivo da me cimentate.

Questa quasi medesimezza di organismo in lumache specificamente diverse, la quale ciò non pertanto ci guida a risultati affatto contrarj, quali sono il riprodurre, e il non riprodurre, ci ammonisce utilmente che qui non possiamo punto valerci dell'analogia, coll'argomentare da specie a specie, ma che per aver dati sicuri siamo astretti d'intraprendere tanti esperimenti, quanti sono gli animali specificamente diversi. E la forza di questa per noi umiliante verità si rende anche più palese, e più chiara, volendo noi gittare una fuggitiva occhiata sopra diversi di quegli animali, che in varj tempi si è scoperto da' Naturalisti esser dotati di riproduttrice virtù. Quando per la prima volta svelati furono al filosofico mondo dall'immortale *Trembley* i prodigj del polipo, si pensò che la semplicissima struttura sua concorsa fosse massimamente a crearli. Di fatto l'essere cotal verme privo di cuore, di vene, di arterie, e per conseguenza di vera circolazione di umori, il non trovarsi in lui nè cervello, nè spinale midollo, nè nervi, nè verun altro accompagnamento di quelle parti, che si riscontrano in una infinità d'altri animali, ma l'apparir tutto formato d'una sostanza gelatinosa, e omogenea, seminata per ogni dove non d'altro che d'una quantità di granellini, tutto ciò dava a pensare, che la semplicità della struttura concorresse a far sì che ogni particella tagliata dal polipo si conformasse in un polipo intiero; a quel modo che prima della scoperta del citato Ginevrino Filosofo si era pensato, che stante la semplicissima loro struttura succedessero nelle piante que' maravigliosi fenomeni, che si sono in seguito osservati ne' polipi. E il riparamento delle parti perdute in altri esseri animati di struttura assai semplici, quali sono le ortiche, e le stelle di mare, e diciam anche i gamberi di fiume, avvalorava cotal pensamento. Ma l'essersi trovato dappoi che certi vermi d'acqua dolce malgrado l'essere di molto più composti dei polipi, tagliandoli a pezzi, rigermogliano in altrettanti vermi completi (*a*), ha dato a vedere, che la semplicità dell'organizzazione non è una condizion necessaria al riparamento delle parti perdute. E ciò si è anche verificato in modo più luminoso ne' lombrichi terrestri, dappoichè il *Reaumaur* ha trovato che recisi a brani moltiplicano come le piante, verità fisiologica negata da alcuni Naturalisti, e che verrà da me posta fuor d'ogni dubbio, e considerabilmente ampliata nelle mie *Riproduzioni Animali*. E quando io nomino il lombrico terrestre intendo parlar di un vivente a mille doppj più composto del polipo nell'organismo, per trovarsi in lui circolazione di sangue, e in conseguenza vasi arteriosi, e venosi, e canale degli alimenti, e spinal midolla, e nervi, e unione dei due sessi, per essere ermafrodito (*a*). Della qual complicata struttura va pur fornito il mio lombrico d'acqua dolce *a batello*, non ostante che non ceda punto al lombrico terrestre, e ai vermi d'acqua dolce per la facoltà del riprodurre (*b*).

Sebbene dei surriferiti vermi quanto sono situati più alto nella scala dell'animalità per l'organica loro strut-

(*a*) Bonnet *Traitè d'Insectologie*.
(*a*) Prodr. cit.
(*b*) L. c.

tura e la lumaca terrestre, e la salamandra acquajuola? Lasciando a parte la prima, per averne già parlato abbastanza, fermiamci per un momento a contemplar la seconda. Quantunque la salamandra acquajuola meritamente si annoveri dai Naturalisti tra gli amfibj, per questo però non lascia d'essere un vero quadrupede, avendo in piccolo moltissime di quelle parti che hanno i quadrupedi in grande. Assaissimi di questi si trovano avere corredara la coda di vertebre ossee, incastrate le une dentro alle altre, e successivamente più picciole in ragione dell'assottigliarsi della coda. E di vertebre medesimamente ossee, e in simil guisa conformate va provveduta la coda delle salamandre, oltre le parti solide molli, cioè a dire il midollo allungato che fora ciascuna vertebra, e arriva fino alla più sottile, i nervi, i muscoli, le vene, le arterie, il cuore, e una numerosa famiglia di glandole, da cui scappa quel liquore lattato, ed acre, che si sparge su la pelle, quando la salamandra viene irritata. Similmente le gambe così anteriori, che posteriori hanno presso a poco quella ricchezza di parti solide molli, e di parti solide dure, ossia di ossa, che si osserva ne' grandi quadrupedi, e presso a poco anche in noi. Finalmente come questi le mandibole del nostro amfibio vanno armate d'un osso rozzamente circolare, che le circonda, e le termina, da cui risalta una selvetta regolare di acutissimi denti. Trovato questo apparato di tante parti, e tanto fra loro diverse, chi creduto avrebbe che tal quadrupede abbia il dono di ripararle tutte, ogni qualvolta tutte vengan recise? Eppure non evvi niente più vero di questo, siccome ho scoperto io il primo assaissime volte. Il perder le quattro gambe ad un colpo è per la salamandra quasi un nulla, giacchè sa ripararle tutte quattro, e ripararle perfettamente. Sonomi preso la pena di numerar tutte le ossa, che entrano in esse quattro gambe; ed ho veduto che ascendono a 99: e 99 si sono pure da me trovate nelle quattro gambe riprodotte, allora quando tutte quattro erano ſtate diſarticolate dal tronco. Che più? Levate per intiero le quattro gambe, e inſiememente tutta la coda, e le due mandibole, la ſalamandra oltre al reſtauramento delle gambe, rifa nel tempo ſteſſo e mandibole, e coda. Queſta verità, che ha tutta l' aria di paradoſſo, e che anzi a prima giunta ci ſembra più favoloſa della famoſa idra di Lerna, l'ho io replicatamente veduta, e fatta vedere a più miei Amici, non ſenza ſorprendimento di tutti. E tanto più la ſalamandra acquajuola è oggetto di maraviglia, quantochè non defrauda mai delle moltiplici ſue riproduzioni l'avido Sperimentatore, la qual coſa ſi è veduto non ſucceder ſempre nelle lumache, alcune delle quali ricuſano di riprodurre.

Ecco adunque come cominciando dal polipo, indi paſſando a più vermi, poi alle lumache, e da ultimo alle ſalamandre, che è quanto dire progredendo da animali ſempliciſſimi ad altri men ſemplici, e da queſti ad altri eziandio più compoſti, chiaro appariſce aver luogo la riproduzione, ſenza che l' organiſmo più o meno ſemplice, e più o meno compoſto produca verun divario eſſenziale.

Queſti fatti provan del pari che la tenerezza della fibra, o delicatezza che vogliam nominarla, non è altrimenti una condizion neceſſaria per le riproduzioni animali. Qual divario nella mollezza tra il corpo d'un polipo, e la coda, o le gambe d'una Salamandra? Eppure sì l'uno che l'altra non riproducon del pari? Senza che quanti animaletti teneriſſimi quanto il polipo, ed anche di più, ed eſſi pure acquatici come lui, invece di riprodurre, ſe vengan tagliati, vanno a perire, ſiccome ho io ſteſſo potuto accertarmene per replicati tentativi ſopra loro intrapreſi?

Conviemmi però l'avvertire che quegli animali, che atti eſſendo per lor natura al riprodurre, dotati ſono nel tempo ſteſſo di fibra più tenera, hanno ſopra gli altri più d'una notabile prerogativa. Primieramente le loro mancanti membra cominciano a ripararſi più prontamente. Un polipo tagliato per lo traverſo in molte parti, principia a moltiplicarſi in altrettanti polipi in poche ore. Un verme, ſia di terra, ſia d'acqua, eſige più giorni per la ſua iniziale riparazione. Una lumaca all' oppoſito, e una ſalamandra addimandano più ſettimane. Secondamente il completo riproducimento nei primi ſi ottiene in un tempo conſiderabilmente men lungo, che nei ſecondi. Pochi giorni pel conſeguimento di queſto ſi richieggon dal polipo: i ſuddetti vermi eſigono il corſo d' intiere ſettimane; più meſi vuole la lumaca per rifare la teſta, e un anno intero non baſta alle ſalamandre perchè le gambe novelle acquiſtino la naturale grandezza delle vecchie. In terzo luogo lo ſteſſo animale dotato della qualità riproduttiva, quanto più è giovane, e in conſeguenza di fibra più cedente, più tenera, tanto più preſto rimette perfettamente le parti perdute. Oltre l' averlo io toccato con mano nelle ſalamandre, ho avuto l' agio di vederlo nelle lumache, le quali decollate rimettono il capo in meno d'un meſe e mezzo, e lo rimettono molto prima, ſe mutilate ſieno più giovani ancora. Da ultimo la fibra in qualche animale ſe venga a ſminuire la nativa mollezza, la riproduzione vien meno. Ne abbiamo un parlante eſempio ne' ranocchj. Quando ſono ancora girini, ma che cominciano però a metter le gambe, ſe loro vengan reciſe coteſte gambe, certa coſa è per le oſſervazioni mie ſteſſe, che le rifanno interiſſimamente. Ma la coſa non va così ogni qualvolta le medeſime vengano tronche, acquiſtato che abbia il girino le ſembianze di rana. Allora dunque non è mai o quaſi mai che il troncone rimetta una gamba novella. Ma donde un fatto tanto diverſo nelle medeſime membra di queſto amſibio? Diremo noi che quella virtù, quella potenza di riprodurre, che avea l'animale essendo girino, l'abbia egli perduta, facendosi rana? Siccome ad onta di tal metamorfosi seguita egli ad essere lo stesso animale (*a*), questa idea sembrami poco filosofica. Trovo più confacente al vero il pensare, che nella rana continui ad aversi la potenza riproduttrice; ma che laddove tal potenza nel girino veniva all'atto, a motivo della tenerezza grande della fibra, le sia in seguito ciò conteso per l'induramento di questa. Tentiamo di schiarire di più tal pensiero. La rana sotto forma di girino non esce mai fuori dell'acqua: che anzi uscendone perirebbe. Solamente a quando a quando dal fondo si lancia alla superficie, e per un momento mette fuora il muso per espellere dai polmoni l'aria vecchia, e per assorbirne della nuova. Il troncone adunque delle gambe recise rimane in quel tempo in uno stato di somma mollezza, per trovarsi sempre immerso nell'acqua, e da essa in ogni punto bagnato. La gambina adunque sotto forma di germe potrà forare, diciam così, il troncone, ed uscirne, e svolgersi liberamente. Non così le accaderà, ove la rana acquistato abbia le proprie, e permanenti fattezze; giacchè allora restando il più fuori dell'acqua, e per poco d'ora attuffandovisi solamente alle presenza di qualche insidia, o pericolo, il troncone dovrà soggiacere alle vive impressioni dell'aria, e quindi si cicatrizzerà, e in grazia della cicatrice contratta non permetterà al germe riproduttore di rompere, e svilupparsi.

La mutilazione delle lumache, di cui ho fin qui ragionato, è stata per lo più da me fatta a primavera alquanto inoltrata, veduto avendo che per ottenersi in esse la riproduzione non vi vuol meno del grado decimo

(*a*) Dissertaz. di Fisic. Animal. e vegetab. T. II.

mo terzo del termometro del Reaumur, il qual grado nelle contrade di Lombardia non suole aversi prima di detta stagione. E fatta allora la decapitazione si è sicuro che prima del verno le lumache, almen molte, risanno perfettamente la testa. Ma che accaderà egli adunque fatto il taglio verso la metà di Settembre o in quel torno, quando cioè il mentovato grado di calore non suole estendersi presso di noi al di là d'un mese, per le sopravvegnenti pioggie autunnali? Ho instituito più esperimenti per lo svolgimento di questa curiosa questione, e ne ho ottenuto i seguenti risultati. Se le lumache già mutilate io le faceva stare nel tepor d'una stufa, eguale o superiore al grado suddetto, era sicuro di una perfetta riproduzione assai prima del finir dell' inverno. Se le custodiva in una stanza, il cui freddo per alcuni giorni giunto fosse al grado della congelazione, la più parte andava a perire. Se poi il freddo era minore, ristavano per tutta quanta l' avversa stagione di riprodurre, e ricomparita la primavera, il capo o le corna, già cominciate sopra inverno a svilupparsi, seguitavano a farlo fino all' intiero loro compimento. Che se da ultimo la decollazione seguiva nel principio del verno, e d' altronde si aveva l'avvertenza che non perisser di freddo, senza però tenerle dentro a una stufa, in tal circostanza sul piano del troncone non appariva mai durante l'inverno verun principio riproduttore, e solamente questo cominciava a farsi palese in Maggio, e proseguía poi a svilupparsi, e ad ingrandirsi ne' mesi estivi.

E questo tenor di procedere, che pratica la natura nelle riproduzioni delle lumache, lo pratica in quelle del pari delle salamandre, e de' lombrichi terrestri, ed acquatici, con tal differenza però che questo genere di vermi riproduce anche, sebben lentamente, nel grado del temperato: questo poi derivi o per la mollezza grande della fibra, onde sono composti, o a cagione della singolare loro natura.

Quando era occupato su la riproduzione dei lombrichi, mi prese voglia di sapere, se la forza riproduttrice veniva ad esaurirsi nella prima riproduzione: e trovai il contrario. Anzi alla seconda riproduzione tagliata ne succedeva una terza, levata questa ne sottentrava una quarta, indi una quinta ecc. Nè solamente si ottenevano tali successive riproduzioni levata via unicamente la porzione di mano in mano riprodotta, ma fatto il taglio la seconda volta entro la riproduzione prima, la terza entro la riproduzione seconda, la quarta entro la riproduzione terza, ecc. Quindi io veniva ad avere come una scala di riproduzioni unite al vecchio troncone, sempre più giovani, più sottili, e di colore a mano a mano più aperto.

Queste riproduzioni di riproduzioni si ottenevano egualmente nella coda de' girini, e ciò che è più sorprendente in quella delle salamandre, e nelle loro gambe, malgrado l'andar fornite queste due qualità di membra di parti tanto fra loro dissomiglianti. Se adunque la coda, e le quattro gambe riprodotte si ritagliavano ad una salamandra, rigermogliavano per la seconda volta altre quattro gambe, ed un' altra coda, e un tal giuoco si poteva tirare avanti per molto tempo. Di fatto nelle salamandre giovani, in cui la riproduzione è prontissima, nei mesi di Giugno, Luglio, ed Agosto furono da me ottenute sei successive riproduzioni delle quattro gambe, oltre sei riproduzioni della coda. E in una di queste salamandre tra le ossa della coda riprodotte, e quelle delle gambe, nei tre mesi accennati giunsi a contare 687 ossa rifatte.

In virtù adunque di queste riproduzioni di riproduzioni ne' lombrichi terrestri, ne' girini, e nelle salamandre, fui voglioso di sapere, se altrettanto si otteneva dalle lumache. Il perchè avendone io mutilate diverse, parte con la recision delle corna, parte con quella del capo, quando levato a metà, quando tolto per intiero, subito che queste parti si erano rinnovate, io le recideva in quel sito precisamente, dove erano state troncate le vecchie. Questa seconda riproduzione non lasciò di aversi, e nella maniera stessa con cui si era avuta la prima, e lo stesso fu di una terza riproduzione, ma la morte sopraggiunta alle lumache mi vietò spinger più oltre questo curioso genere di tentativi.

Per altro lo scioglimento di questa questione me ne fece nascere un' altra, e questa fu, se l' esaurimento nelle riproduzioni veniva in fine ad aversi, oppure se esso non succedeva giammai, di modo che gli animali seguissero a riprodurre finchè seguivano a vivere. E questo saggio di esperienze poteva instituirsi per preferenza nelle salamandre, sceltene delle più giovani, per essere questo genere di amfibj e più facile a mutilarsi delle lumache, e di vita più dura, e di più agevole riproduzione. Ma mi è mancato l' ozio per questi ultimi tentativi, i quali, se venissero da qualche sperto Naturalista intrapresi, non sarebbero sicuramente vuoti di utili conseguenze, e potrebbero forse valere un novel Capitolo di Fisiologia.

In tutto il decorso di questa Memoria ho riferito i risultati delle mie sperienze, sopprimendone quasi sempre i dettagli. Se avessi voluto esporli partitamente, e come si trovano su' miei Giornali, nato sarebbe un volume, non che una Memoria. Ma premeva a me troppo di cercar d' istruire il lettore, senza punto annojarlo per lunghi dettagliati racconti. Spero tuttavia di essermi procacciato tanta confidenza presso del Pubblico, per esser creduto. D' altronde pressochè tutti questi risultati ho la compiacenza di vederli confermati da diversi insigni Naturalisti, come apparirà da una seconda Memoria su la Riproduzione della testa delle lumache, nella quale si darà un compendio degli scritti pubblicati a favore della mia scoperta, e nel tempo ſteſſo un altro di tutti quelli, per cui ſi è cercato d'impugnarla. I confermatori, a mia notizia, ſono i Signori *Turgot*, *Lavoiſier*, *Tenon*, *Heriſſant*, *Bonnet*, *Senebier*, *Schaeffer*, *Roos*, *Muller*, *Scarella*, *Troilo*, oltre a tre altri Italiani pubblici rinnomati Profeſſori di Notomia, i quali recentemente ripetute hanno queſte mie ſperienze, e trovate avendole veraciſſime, ſi affrettano di comunicarmene grazioſamente le loro Memorie. Gl' Impugnatori ſono i Signori *Murray*, *Wartel*, *Cotte*, *Bomare*, *Adanſon*, *Schroeter*, *Argenville*, *Preſciani*. In queſto ſecondo mio Scritto eſaminerò con filoſofica imparzialità quale ſia il valore di queſte impugnazioni, ſenza laſciar di peſare quale ſia il merito degl' Impugnatori. Io ſono ben lungi dal penſare che queſto mio ſcoprimento ſia per far epoca nella naturale Filoſofia. Piuttoſto potrebbe far epoca nella Storia dello ſpirito umano il vedere come in una eſperienza sì comoda, sì facile, quale ſi è quella di conſeguire la riproduzione del capo nelle lumache, fallita l' abbiano tanti Fiſici, e ciò che più ſorprende in un Secolo sì illuminato, sì cauto, e che ſembra eſſer quello delle Oſſervazioni, e delle Eſperienze, ſe d' altra parte non foſſe notiſſimo, che lo ſperimentare comunque è meſtiere di tutti, lo ſperimentare a dovere è ſempre ſtato, e ſarà ſempre di pochi.

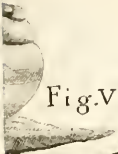


Fig.VIII

Fig.II

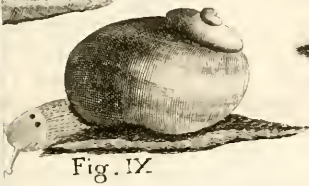


Fig. IX

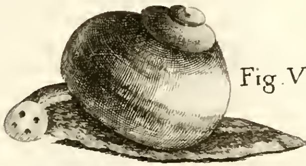


Fig.VI

Fig.IV

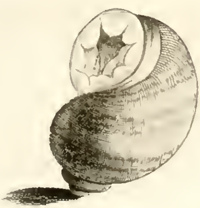


Fig.I

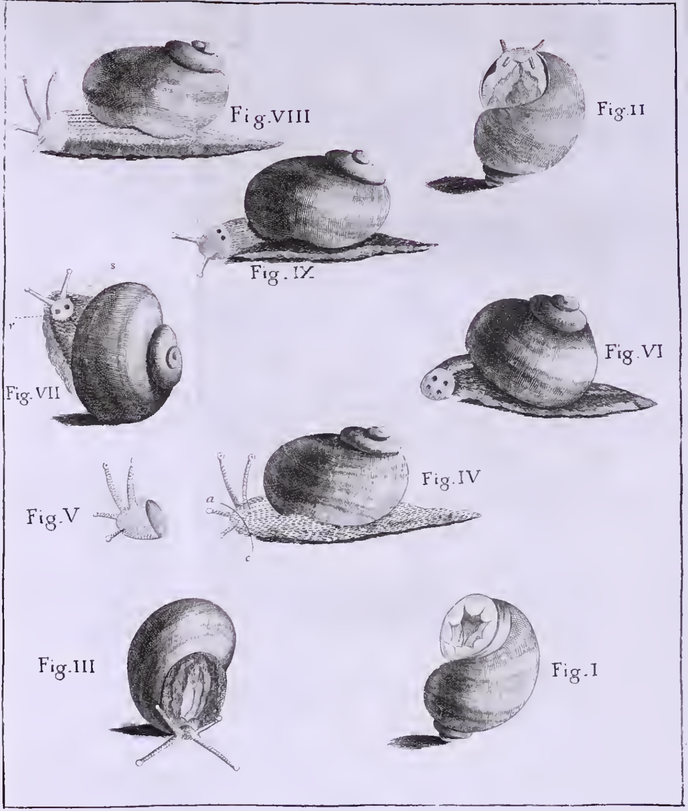


Fig.VIII
Fig.II
Fig. IX
s
r
Fig. VII
Fig. VI
Fig.V
Fig.IV
a
c
Fig.III
Fig.I

MEMORIA

INTORNO ALLA MAGGIOR PERFEZIONE

DELL' ARGANO

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico
di S. A. R. il Granduca di Toscana.

NOn vi è macchina più comune, e più ovvia dell' argano, del quale si fa uso quotidiano nell' Architettura civile, nella Militare, e nella Nautica. Qualunque peso considerabile, che debba elevarsi per decorare con ornato pietrame le fabbriche civili, qualunque resistenza, che debba superarsi per trasportare le macchine militari ancora per l' erto delle montagne, qualunque pesantissima áncora, che un vascello da guerra debba ritirare dal fondo del mare, in una parola qualunque operazione si faccia, che sia di qualche rilievo, per tutto chiamasi in ajuto l'energia dell' argano. L' importanza però di tale ordigno non corrisponde alla sua perfezione. Pareva ben naturale, che già da gran tempo si fosse studiato da' Meccanici per condurlo alla ultima sua perfezione. Ma egli è accaduto tutto al contrario, che le persone di talento rivolte tutte alle più sublimi teorie, hanno abbandonata sì importante macchina alle più basse maestranze, le quali col natural talento l' hanno condotta a quello stato, in cui essa si trova, non essendo esse capaci di conoscere, se siano grandi, o piccole le sue resistenze, se vi sia argomento di scemarle, e quali sieno le maniere per un oggetto così rilevante.

Quando l'anno 1739. la *Reale Accademia delle Scienze di Parigi*, per lo zelo che essa fomenta non solo per le Scienze più sublimi, ma ancora per le arti le più comunali, propose il premio in favore di chi *ritrovasse un Argano, il quale avesse il vantaggio dell' antico senza averne i difetti*. Ma non avendo trovato nelle Memorie, che le furono inviate, quelle condizioni, che essa esiggeva, sospese per allora il suo giudizio, e ripropose il premio doppio per l' anno 1741 per il medesimo Problema. Fra le nuove Memorie, che in detto anno furono all' Accademia trasmesse, niuna in realtà potè soddisfare alle dotte mire della medesima. Ma ritrovandosi in esse delle nuove teorie, ed insieme de' notabili miglioramenti nella macchina proposta, fu ripartito il premio a quattro Memorie, e le altre tre furono pubblicate sotto il titolo di *accessit*. Tanto è vero, che ancora negli ordigni più semplici, e più dozzinali s' incontrano gravissime difficoltà per emendarli, e migliorarli, e che non servono gli studj più indefessi di Meccanici accreditati.

La ragione, per cui questa macchina ha ricevuto un assai mediocre miglioramento, consiste secondo il mio parere nel piccol progresso, che ha fatto dalla fine del passato secolo fino agli anni correnti l'altra non meno importante ricerca intorno alle resistenze degli attriti, alle quali sono soggetti tutti i nostri solidi. In qualunque modo si modifichi un argano, sempre però dee con esso superarsi non solo la resistenza del grave peso, che dee salire contro la direzione de' gravi, ma ancora quella degli attriti, che l' argano dee risentire nell' elevare il detto peso. Questa estranea resistenza si è sempre valutata di $\frac{1}{3}$ del peso da elevarsi. E qualche volta le circostanze son tali, che essa giugne ancora alla metà. Sicchè la forza motrice era destinata a superare la metà di più della resistenza della pura gravità. Anzi quando ancora la resistenza semplice si supponesse di $\frac{1}{3}$ secondo il sentimento del Sig. d' *Amontons* (*a*), resterà però da aumentare la potenza non solo del terzo, ma di una serie di frazioni, che si esporranno a suo luogo, per le quali poi alla fine la vera misura della potenza esser doveva la metà di più, che non esigesse il peso del grave senza le resistenze. Poichè per superare quell' $\frac{1}{3}$ vi voleva una nuova forza, che è di $\frac{1}{9}$, e per superare questo $\frac{1}{9}$ ve ne voleva un' altra, che è di $\frac{1}{27}$, e così discorrendo all' infinito; indi è, che i cambiamenti immaginati in favore dell' argano, incontrando tutti così sensibili resistenze, sempre restava la potenza motrice soggetta ad esser troppo aggravata. Che se poi si volesse diminuire la detta resistenza con aumentare assai la proporzione tra 'l vette dell' argano, ed il raggio del suo cilindro, allora potrebbe certamente alleggerirsi indefinitamente la potenza motrice; ma tale alleggerimento cagiona un nuovo inconveniente, che consiste nel gran consumo del tempo, che allora sarebbe necessario, giacchè sempre tra' tempi e le potenze vi deve essere una determinata proporzione, dimostrandosi nella Meccanica, che il viaggio del peso resistente al viaggio della potenza motrice stia come il valore di questa al valore del peso, cioè che stia il tempo al tempo, come il viaggio al viaggio, cioè come il valore al valore. Per il dispendio delle operazioni meccaniche è la stessa cosa, che un lavorante impieghi due ore di tempo per alzare un dato peso, o per vincere una qualunque resistenza, ovvero che due lavoranti ve ne consumino un' ora sola. E perciò l' aumentare la ragione del vette al semidiametro del cilindro non porta quel vantaggio, che alle prime apparenze si crederebbe.

Conveniva adunque alla ricerca dell' argano perfetto premetterne un' altra sulle *minime resistenze degli attriti*,

---

(*a*) *Memorie dell' Accademia Reale di Parigi* anno 1699.

ſenza di cui poco vantaggioſi ſempre ſaranno i concetti, e compenſi de' più valenti Meccanici.

Eſſendomi io applicato da tre anni in qua a fare gran numero di eſperienze appunto ſulla reſiſtenza degli attriti, ed avendo già ritrovato, che in alcune combinazioni di ſolido con ſolido, di ſuperficie con ſuperficie, di peſo con peſo, tali reſiſtenze potevano aſſaiſſimo diminuirſi, ſino a ridurle dalle centeſime 33 per cento alle ſole 3 centeſime, ed ancora aſſai meno (come ſi trova dimoſtrato in un mio Trattato ſu queſta materia); indi è che mi ſi è aperto così un campo per poter perfezionare aſſai più, che non è ſtato fatto fin' ora, la macchina dell' argano. Queſto è ciò, che io dimoſtrerò nella preſente Memoria. E per venirne a capo la dividerò in quattro parti.

La prima racchiuderà la deſcrizione dell' argano ordinario, ed il ſuo ſolito maneggio, cogl' inconvenienti che eſſo racchiude.

La ſeconda eſporrà la teoria di detto argano tanto ſenza la reſiſtenza degli attriti, quanto con la conſiderazione de' medeſimi.

Nella terza deſcriverò, come, ed in qual modo poſſa perfezionarſi l' argano in ciaſcuna ſua parte.

E nell' ultima dimoſtrerò, in qual modo nell' argano ridotto ſi tolgano gl' inconvenienti dell' ordinario, e quanto in eſſo ſi diminuiſcano le reſiſtenze degli attriti.

Parte I.

Deſcrizione dell' argano ordinario, ſuo maneggio, ed inconvenienti che s' incontrano.

L' argano ordinario, ſe voglia riferirſi alle macchine ſemplici della Meccanica, può ridurſi alla macchina *del Vette*, ovvero all' altra chiamata *Axis in Peritrochio*. Eſſo conſiſte

consiste in tre parti, delle quali è composto, cioè della sua cassa, o castello *M*, *M*, *M*, (*fig. I*) il quale è fatto per reggere, e sostenere le altre parti del suo *fuso*, detto altrimenti *Albero AB*, e finalmente delle sue *Manivelle GE*, *HF*.

Il fuso si fa girare sul suo pernio inferiore *Pp*, che ricavasi dal medesimo fuso, assottigliandolo alquanto. Tal pernio è ricevuto da un concavo simile ricavato dalla panchetta inferiore *Hb*, e sopra di essa riposa quel risalto, che lascia il pernio. La parte intermedia col fuso racchiusa tra le due panchette si fa di figura cilindrica *Bb*; alla medesima si avvolge per due, o tre volte il canapo, che colla sua estremità *D* va ad elevare il peso proposto, e nell' altra estremità *C* è ritenuto a stretta col fuso, per mezzo di uno, o due lavoranti *Ll*. Essi devono fare una tal forza, che il canapo resti sempre obbligato al fuso dell' argano colla vicendevole scabrosità del legno, e del canapo, giacchè se detto canapo girasse da sè attorno al fuso, non sarebbe possibile l' elevazione del dato peso. Il collo dell' argano *Nn* ancor esso è cilindrico, ma di minor diametro del subbio, o del fuso, giacchè deve esso girare sul concavo formato nella panchetta superiore *Oo*, colla quale esercita i suoi attriti insieme col pernio inferiore. Indi è, che tra 'l pernio ed il collo dell'argano formasi la resistenza relativa a' sopraddetti attriti. Vi è finalmente la testa dell' argano *Aa*, la quale si fa di forma quadrata, ed in essa si scavano due trafori pure quadrati per inserirvi le manivelle *GB*, *HF* della stessa figura, ma scantonata nelle quattro estremità per meglio adattarsi alle mani de' lavoranti.

La detta testata dee sostener la forza di quattro, e più lavoranti, che operano col potente momento del lungo vette. Indi è, che essa va fasciata tanto nell'estremità superiore, che inferiore di due cerchj di ferro di proporzionata grossezza, affinchè essi sostengano le forze de' lavoranti, i quali ſenza un tal ſoccorſo ſquarcerebbero ben preſto la teſtata dell'argano, che è indebolita per mezzo de' due nominati trafori.

Il legname tanto del caſtello, quanto del fuſo, e manivelle ſi adopera del più forte, che ſi trovi, come di noce, di quercia, di leccio, o altro ſomigliante.

Il maneggio dell'argano conſiſte nelle rivoluzioni delle manivelle, e del fuſo, giacchè rivolgendoſi le prime *G*, *H*, *E*, *F* obbligano il ſubbio a girare attorno al ſuo aſſe, ed eſſendo a queſto ſubbio riſtretto il canapo, eſſo pure dee rivolgerſi attorno al fuſo, e perciò accoſtandoſi ſempre il punto *D* all' argano quando ſia preponderante la forza motrice, dee tirare il peſo, o la reſiſtenza che dee ſuperarſi.

Un tal ſemplice maneggio ci preſenta gl'inconvenienti, che ſi ſoffrono in tal macchina. Poichè primieramente il canapo nell' atto, che gira, ſarà obbligato o a ſcendere verſo la panchetta inferiore, o a ſalire verſo la ſuperiore, ed in tal diſceſa, o ſalita, eſſo ben preſto ſi troverà a ſtretta con dette panchine, e così l'operazione reſterà tutta ſoſpeſa. Per continuarla adunque convien legare, o allacciare il canapo con funicelle addoſſo alle taglie o ſemplici, o doppie, e tale operazione diceſi in termine d'arte *ammagliare*. Così l'argano reſterà libero, e ſgravato, e perciò il canapo ſi fa o ſalire, o ſcendere ſecondo il biſogno, per ricominciare da capo l'operazione interrotta. Un tale interrompimento accaderà più, e più volte nelle lunghe operazioni, e perciò eſſe ſaranno ſempre aſſai ritardate non ſenza ſcapito dell'Erario o pubblico, o privato; giacchè mentre il pontajo va ad ammagliare, e ſoſpendere la forza dell'argano, gli altri operanti, che ſpeſſo ſono in buon numero, ſtanno aſpettando inutilmente.

Un tale inconveniente rendeſi ancora più ſenſibile nella Nautica, e ſpecialmente nell'operazione importantiſſima di ſalpar le ancore in un vaſcello da guerra. Poichè a tal fine principalmente fopra il primo ponte fi coftruifce un argano fortiffimo, che fi tiene nel fecondo ponte per le operazioni meno rilevanti. Devefi perciò fofpendere nell' argano doppio l' operazione di falpare un'ancora per elevare, o abbaffare il canapo fulla fuperficie cilindrica del fubbio, per poi ricominciare l'operazione.

Ma effendo le gomene de' vafcelli così groffe, così rigide, e poco maneggevoli, che non è poffibile il piegarle ful fufo dell'argano, fi ufa il compenfo di un canapo fecondario (*a*) che fia pieghevole per avvolgerlo al fubbio. Un tal canapo fi lega alla gomena fuor del vafcello, e le fue cime fi portano all'argano per avvolgerle al medefimo. Così rivolgendofi l' argano, la gomena per mezzo del canapo fi trae verfo il vafcello. Quando effa però è già pervenuta colla fua legatura al bordo del medefimo, allora è neceffario fciogliere il canapo, e volgere l'argano all'indietro, ed andare a far la feconda legatura in un punto inferiore per continuare l'operazione. Indi è, che dopo più e più interrompimenti tanto per regolare il canapo ful fubbio, quanto per ifciogliere, e rilegare il canapo a' punti inferiori della gomena, fi perde un tempo preziofo, che qualche volta mette in pericolo il baftimento.

Al primo inconveniente fi aggiunge il fecondo già accennato, che è quello delle eftranee refiftenze degli attriti, le quali per le particolari circoftanze fono affai confiderabili. Si mettono a contrafto le fibre longitudinali del legno colle trafverfali, come appunto fuccede tanto ful pernio, che nel collo dell'argano, e tal circoftanza molto accrefce le refiftenze. Inoltre il cilindro dell' argano nella fua bafe fi fa ftrifciare attorno alla

(*a*) Il qual dicefi nella marina Francefe *Tournevire*.

panchetta inferiore *Ff*, ſulla quale ripoſa, e queſti contatti ſono ſparſi per una notabil ſuperficie, che conſiſte in una faſcia circolare ben larga tra la panchetta ed il piede del ſubbio.

Il collo dell' argano *Ss* ancora eſſo ha una notabil ſuperficie, che viene a contatto contraſtando col concavo cilindrico eſcavato nel tavolone ſuperiore *Ss*

Ordinariamente i lavoranti collocati all' eſtremità delle leve *G*, *H*, *E*, *F* talmente ſi aggravano ſulle medeſime nell' atto, che girano, che producono una nuova reſiſtenza ſul pernio inferiore dell' argano, e ſu quella faſcia circolare.

Conſiderando tutte inſieme le eſtranee reſiſtenze degli attriti, eſſe ordinariamente oltrepaſſano la metà del peſo reſiſtente, ed aſſai ſpeſſo giungono a $\frac{3}{4}$ del medeſimo. Indi è, che eſſendo propoſto ad elevare coll' argano comune un peſo di libbre 4 mila, in realtà per le imperfezioni di eſſo, e del ſuo maneggio vi vuole una forza motrice equivalente a 6, ed a 7 mila libbre. Indi è, che la ſpeſa dell' operazione viene a ricreſcere nella ſteſſa proporzione del 4 al 7, e non di rado del 4 all' 8.

Quantunque ſi poſſano dire eſtranei all' argano i bozzelli, e le taglie ſemplici, o doppie, pur nondimeno eſſe ſempre accompagnano il maneggio del medeſimo. Poichè la direzione del canapo dalla direzione orizzontale *DD* deve rivolgerſi alla ruſticale πP, deve poi paſſare per le taglie, dalle quali va a legarſi al dato peſo per elevarlo. Ora i bozzelli, e le taglie regolate ſecondo il ſolito, riſentono ancor eſſe una notabile reſiſtenza per i loro particolari attriti. E tal reſiſtenza unita a quella dell' argano comune aſſai ſpeſſo eſigge una potenza motrice più che doppia di quella, che occorrerebbe ſenza la giunta delle reſiſtenze. Sicchè in queſta parte la meccanica dell' Architettura rieſce aſſai difettoſa.

PARTE II.

Teoria dell' argano ordinario, tanto senza le resistenze, che con includervi le medesime.

Quanto è stato fin' ora esposto generalmente, convien dimostrarlo colla teoria. Or questa senza l' ipotesi delle resistenze è assai semplice. Poichè facciasi, come il braccio della leva al semidiametro del subbio, così il peso da elevarsi al quarto termine: questo, come si sa, ci rappresenterà il valore della potenza per mettersi in equilibrio col peso resistente. Onde aggiungendo alla potenza qualche valore di più, essa sarà in grado di elevare il peso contro la direzione de' gravi. (a)

Per passare alla stessa teoria nell' ipotesi delle resistenze degli attriti, si contentano alcuni di aggiungere alla potenza una sua terza parte, supponendo col Sig. *Amontons*, che tal parte sia quella, che compete a questo genere di resistenza.

Così se il dato peso da elevarsi fosse di libbre 4000, ed il braccio del vette al semidiametro del cilindro fosse come il 20 : 1, facendo, come il 20 : 1 = 4000 al quarto termine, questo sarebbe di libbre 200, e tale esser dovrebbe la potenza motrice senza l' uso delle resistenze. Se adunque queste equivalgono alla terza parte del peso, vi vorrà per esse la terza parte di più della potenza motrice, cioè altre libbre *66. 66* centesime. Onde la potenza accresciuta per supplire alle resistenze degli attriti esser dovrebbe di libbre 266. *66* centesime.

Una tal teoria è erronea per due maniere. Primiera-

(a) Avvertasi, che al semidiametro del subbio intendesi aggiunto quello del canapo.

mente, perchè accresciuta che sia la resistenza di quel terzo, esso genera la sua particolar resistenza, e questa ne genera una terza, e poi la quarta, la quinta, all'infinito, come già è stato accennato.

Tutte queste resistenze formano una serie, la quale bisogna sommare, e tal somma è quella, che dee aggiugnersi alla potenza motrice. Sia il peso da elevarsi $= P$, sia la resistenza $= a$. Onde sarà $\frac{P}{a}$ il primo termine della resistenza. A questo devono aggiungersi tutti gli altri $\frac{P}{a^2}$, $\frac{P}{a^3}$, $\frac{P}{a^4}$ ecc. Intorno a tal serie nel mio Trattato sulle resistenze degli attriti dimostrasi, che $\frac{P}{a-1}$ è uguale alla somma di tutti i termini decrescenti all'infinito. Indi è, che facendo $a = 3$, sarà $a - 1 = 2$. Onde la resistenza degli attriti sarà $= \frac{P}{2}$ cioè sarà uguale alla metà del peso da elevarsi.

Onde nell'ideato esempio il valore della potenza sarà non già di $266 \frac{2}{3}$, ma bensì di 300 parti, o libbre.

Il secondo equivoco di quella teoria consiste in ciò, che la proporzione del vette al raggio del cilindro non è la stessa, che quella del medesimo vette al semidiametro del pernio, giacchè questo si fa sempre minore di quello del fuso, o del cilindro. E dall'altra parte la resistenza degli attriti si valuta sul pernio, e sul collo dell'argano, e non già sul cilindro. Indi è, che dovendo diminuirsi la resistenza, essa dee scemare nella ragione del vette al raggio del pernio, e non già a quella del cilindro. Sia adunque questa seconda ragione come il 25:1 e facciasi come il 25 : 1 = libbre 1333 al quarto termine, questo sarà di libbre 55, che aggiunte alla potenza fanno libbre 255, e non 266. E' stato adoperato il terzo termine dell' analogia di libbre 1333 supponendo la terza parte di libbre 4000.

Ma per correggere il primo errore deve adoprarsi $\frac{1}{2}$ P, cioè libbre 2000. Onde l' analogia somministrerà per parte degli attriti l' aumento della potenza

di libbre 80.	80
e per il momento del peso restano libbre	200
Onde la potenza colle resistenze sarà equivalente a libbre	280.

Non è stata però ancora inclusa in questo calcolo la particolar circostanza delle fibre del legno, che contrastano scambievolmente. Non è stata considerata la superficie di tanti contatti tanto nel piede, che nel collo dell' argano, per cui io credo che la resistenza debba valutarsi non già di $\frac{1}{3}$ ma di $\frac{1}{2}$, e qualche cosa di più. Ora in tale ipotesi la serie $\frac{P}{a-1}$ sarà uguale a $\frac{P}{2-1}$ $= \frac{P}{1}$, cioè la resistenza riferita al pernio dell' argano sarà uguale al peso da elevarsi, cioè alle libbre 4000. E diminuendole nella ragione del 25 : 1, si dedurrà la resistenza riportata alla potenza di libbre 150, che unite al valore della potenza semplice di libbre 200, forma la potenza totale colle resistenze di libbre 350.

L' operazione dell' argano è affatto indivisibile da quella di più pulegge, le quali per mezzo di un canapo rivolgono le direzioni del peso traente. E quantunque le resistenze di tali pulegge sieno estranee a quelle dell' argano, pure esse ne sono inseparabili. Nella fig. I. osservisi, che il canapo dal subbio dell' argano dee portarsi alla puleggia π, e per mezzo di essa dee salire alla seconda puleggia P, per la quale passando, dee discendere per attaccarsi al dato peso PP'. Indi è, che la potenza motrice per superare il peso PP', elevandolo al punto destinato di una fabbrica, dee trasmettere la sua azione prima per l' argano, e poi per le due pulegge π,P. Ma nell' operazione delle due pulegge incontrasi la sua resistenza, che sarà bene rintracciarla per complemento della presente materia.

Convien dunque osservare, che non solamente il peso PP' è aggravato sul pernio della puleggia P, ma la forza, colla quale il canapo opera dalla parte opposta, eguaglia almeno lo stesso peso. Indi è, che se il peso PP' facciasi di libbre 4000, il pernio almeno sosterrà il doppio di detto peso. Ho detto *almeno*, perchè detto canapo non solo deve equilibrare il peso PP', ma dee ancora superare la resistenza. Ma sia per ora il carico del pernio di libbre 8000; e sia secondo il consueto la resistenza di $\frac{1}{3}$ del peso. Ma per le ragioni dianzi addotte invece di $\dfrac{P}{3}$ deve adoperarsi l'altra frazione $\dfrac{P}{2}$. Onde sarà $\dfrac{8000}{2} = 4000$.

Dovendo adunque riportare una tal resistenza dal pernio della puleggia alla sua circonferenza, essa va diminuita, come ognun sa, nella proporzione del di lei diametro al diametro del suo pernio. Secondo le comuni pulegge una tal proporzione rilevasi, come il 5 : 1. Ma per favorire piuttosto il caso delle resistenze, ci gioverà di adoperare la proporzione del 6 : 1. Ed in tale ipotesi essa sul giro della puleggia si troverà ridotta a libbre $666\frac{2}{3}$. Indi è, che il canapo $P\pi$, non solamente sarà aggravato, e forzato colle date libbre 4000,
ma eziandio dalle altre libbre . . . . . . $666\frac{2}{3}$

Sicchè il totale sarà equivalente a libbre 4666.66 cent. E con tal forza esso va a passare nella seconda puleggia π, avvolgendosi in essa, non già per la sua semiperiferia, come nella prima, ma bensì per un arco di quadrante.

Pertanto

Pertanto dovremo prima raddoppiare la predetta pressione, e poi diminuirla nella ragione del diametro del cerchio alla corda del quadrante.

Raddoppiandola pertanto, essa sarà di libbre 9333.33

Essendo prossimamente la proporzione del diametro alla corda del quadrante come il 1000 : 707 prossimamente, avremo la seguente analogia:

Come 1000 : 707 = 9333 . 33 al quarto termine. Questo tornerà di libbre . . . . 6598 . 66
che prossimamente può farsi senza error sensibile di libbre . . . . 6598 . 00

La cui metà sarà di libbre . . . . 3299 . 00

Or supponendo di bel nuovo, che la proporzione della seconda puleggia a quella del pernio sia come il 6 : 1, dividendo il sopraddetto numero per il 6, avremo per la resistenza della seconda puleggia libbre 549 . 5

Sicchè sommando le resistenze degli attriti col dato peso da elevarsi sarà

Resistenza per la prima puleggia P lib.	666 . 66	cent.
Resistenza per la seconda puleggia .	549 . 50	
Valore del peso da elevarsi	4000 . 00	
Totale per la forza del canapo, che portasi all' argano libbre	5216 . 16	cent.

Dal che deducesi, che la potenza motrice applicata all' argano deve superare libbre 1216 di più, che non sarebbe per superare il peso PP', che si propone ad elevarsi.

Resta ora a calcolare il valore della potenza motrice per superare le due resistenze del peso, e degli attriti.

Ritornerà la serie già descritta $\frac{P}{a-1}$, la quale nel caso presente è uguale a $\frac{P}{2}$

Onde pigliando la metà della descritta somma, ed aggiungendola al totale, si formerà il valore del peso, e degli attriti, che debbono vincersi dalla potenza motrice.

Sarà dunque l' antecedente pressione di libbre 5216, come più prossima togliendo la frazione.

Sua metà	2608
Somma delle due partite	7824

Avvertasi però, che non essendo uguale il pernio dell' argano al diametro del cilindro, per riportare le due resistenze all'estremità della leva, converrà adoperare due diverse proporzioni. La prima delle quali esser dee quella dianzi adoperata come il 20 : 1. Onde facciasi

Come il $20:1 = 5216$ al quarto termine, il quale ci tornerà di libbre 260.80

Per la seconda proporzione dee valere l' altra analogia come il $25:1 = 2608$ al quarto termine	104.32
Onde il vero valore della potenza sarà di libbre	365.12 cent.

Quando senza le calcolate resistenze essa era di libbre 200.00

Sicchè per le resistenze si aumentano libbre	165.12

Per accostarci meglio alla solita proporzione degli argani, invece della parte ventesima, più si adatterebbe la parte decima, ed invece della parte venticinquesima, la sua metà cioè il $12\frac{1}{2}$ sarebbe molto più al caso. In tal nuova ipotesi basterà raddoppiar le partite.

E perciò il valore della potenza senza alcuna resistenza esser dovrebbe di libbre 400.00

Ed includendovi le due resistenze delle pulegge, e quella dell' argano, la predetta potenza deve ascendere al valore di libbre	730.24 cent.

Dal che comprendesi, quanto di più la potenza deve aggravarsi per superare le tre resistenze degli attriti, cioè di due semplici pulegge, e del fuso dell' argano, le quali importano libbre . . . . . 330 . 24 cent.

Troppo di più importerebbono, se invece delle semplici pulegge si adoperassero le taglie doppie, come assai spesso succede.

Calcolo delle resistenze dell' argano senza l' annesso delle pulegge.

Quantunque sia inseparabile l' uso dell' argano da quello delle pulegge, pure per qualche rarissimo caso gioverà il calcolo delle resistenze del solo argano. Il che si farà nelle stesse ipotesi già maneggiate.

Essendo adunque il peso P di libbre 4000, ed essendo nel caso presente $\frac{P}{a-1} = \frac{1}{2}P$, è manifesto, che la prima proporzione sarà

Come $10 : 1 = 4000$ al quarto termine, che importerà libbre . . . . 400 . Ed essendo la seconda proporzione, come $12\frac{1}{2}$: $1 = 200$ al quarto, questo ci tornerà di libbre . . . . 160 . Onde il valore della potenza esser dovrebbe lib. 560.

Nelle altre ipotesi maneggiate sul principio di questo articolo la potenza è stata calcolata di lib. $266\frac{2}{7}$

Di libbre 255

E finalmente di lib. . . . . . 280, come potrà vedersi. Ma essendo doppie le proporzioni del vette al semidiametro del fuso, ed a quelle del pernio, se in esse si sostituisce la prima come 10:1, e la seconda come $12\frac{1}{2}$: 1, allora il valore della potenza ne' tre casi esaminati sarebbe doppio, e così

Nella prima ipotesi sarebbe di libbre . . $533\frac{1}{5}$
Nella seconda 510
E nella terza di libbre . . . . 560, che coincide coll' ultimo calcolo. Questo è il più giusto, correggendo la teorica. Onde sempre sarà notabilissima la resistenza, che soffre l' argano, benchè si tralascino le resistenze delle pulegge, che sempre, o quasi sempre accompagnano le operazioni meccaniche.

PARTE III.

In qual modo possa ridursi, e perfezionarsi l' argano in ciascuna sua parte per diminuirne le resistenze.

Supponendo le resistenze valutate di $\frac{1}{3}$ de' pesi aggravati secondo la regola comune, la Meccanica non ha compensi per diminuire le resistenze, se non che cambiando le proporzioni, che corrono tra 'l braccio della leva ed il semidiametro del cilindro, tra la stessa leva ed il semidiametro del pernio, tra 'l diametro delle pulegge e quello de' loro pernj. La prima proporzione, come è stato avvertito, non può aumentarsi per il consumo del tempo maggiore. Lo stesso dicesi della seconda a motivo, che facendosi il pernio dello stesso legname del cilindro, con un minor diametro, se questo si diminuisca non resisterà alla violenza dell' argano, al quale assai spesso si applicano otto lavoranti. Suppongasi il braccio della leva di pollici 60, cioè piedi 5 parigini; la sua parte venticinquesima non sarà più di pollici $2\frac{2}{5}$. Onde il diametro sarà di pollici $4\frac{4}{5}$, che certamente non può farsi minore senza il pericolo di stroncarsi nel più forte maneggio degli argani.

Per aumentare una tal proporzione, altro non resterebbe, se non che formare il detto pernio di ferro, e farlo girare al di sotto nel suo rallino di metallo, che così potrebbe farsi il diametro di pollici 2, ed il semidiametro di 1. Indi è che la resistenza sarebbe diminuita assai più di prima, cioè nella ragione del 60 : 1, e non già del 60 : 2 $\frac{2}{5}$. Convien però riflettere, che non così può farsi al collo dell' argano, il quale dee restare nello stesso fuso di legname, e non può diminuirsi più del consueto. E siccome in detto collo si appoggia ora la metà, ed ora quasi tutto il peso, come succede quando il canapo è salito alla sua estremità; indi è, che il vantaggio sarebbe tenue, e la resistenza sarebbe varia nel salire, che fa il canapo dall' infimo al supremo punto del fusto cilindrico. Quando tal canapo si trovasse nell' infima sua rivoluzione, la resistenza sarebbe la minima, perchè il tutto quasi si aggraverebbe al pernio di ferro; ma quando la rivoluzione salisse all' altezza maggiore, la resistenza sarebbe la massima, perchè ivi tutta la forza si appoggia al collo dell' argano, che resterebbe come prima.

Potrebbono ancora aumentarsi le proporzioni delle pulegge, le quali potrebbono farsi come il 10 : 1 invece del 5 : 1. Ma convien considerare, che le pulegge devono esser maneggevoli, e di peso mediocre, affinchè i pontaj possano trasportarle da un luogo all' altro, e maneggiarle con facilità. Se adunque una puleggia invece del diametro di pollici 5 lo avesse di 10, molto si accrescerebbe il suo peso unito a quello della sua cassa, che ancor essa deve aumentarsi.

Indi è che considerato il tutto, e consideratolo secondo la pratica, poco profitto può sperarsi dal modificare le accennate proporzioni, e troppo vi vuole per diminuire notabilmente il valore delle resistenze calcolato nelle libbre 263.

Sul riflesso di tali ragioni io ho conchiuso, che tutta l' industria meccanica debba impiegarsi nella diminuzione delle assolute resistenze, le quali invece di essere del 33 per cento, si riducano al 10, all' 8, al 5 per cento. Per tale oggetto io ho intrapresa una fatica di anni tre, ne' quali ho tanto variate le combinazioni de' noſtri ſolidi, che finalmente con qualche combinazione più felice mi è riuſcito di ridurre le reſiſtenze alle ſole tre centeſime, ed ancora meno, come ho accennato nell' introduzione.

Il riſultato delle mie lunghe eſperienze ſarà pubblicato in un Opuſcolo a parte ſu queſta materia. La più felice combinazione de' noſtri ſolidi ſi è quella, nella quale ſi metta a contraſto la ſuperficie del ferro pulito colla ſuperficie dell' olivo ſalvatico perfettamente ſtagionato, ma coll' untuoſità del ſego, o di ſimil altra materia. Indi è che la reſiſtenza, che io adopererò, non ſarà di $33\frac{1}{3}$ centeſime del peſo aggravato che ſia di libbre 100, ma bensì di ſole libbre 3

Da tal nuova proporzione naſce, che dato un qualunque peſo da elevarſi, o qualunque reſiſtenza da ſuperarſi, la reſiſtenza aſſoluta ſarà $=\frac{P}{33\frac{1}{3}}$. E ſiccome nella formola per ſupplire alla ſerie delle reſiſtenze deve toglierſi l' unità per eſſer la ſomma $=\frac{P}{a-1}$, indi è che facendoſi $a=33\frac{1}{3}$ ſarà $\frac{P}{a-1}=\frac{P}{32\frac{1}{3}}$, e per abbondare in cautela ſi farà la ſerie $=\frac{P}{32}$. Da queſto primo aſpetto argomentaſi il vantaggio rilevante delle ſperimentate reſiſtenze, giacchè invece della formola $\frac{P}{2}$ ſi adopera ora l' altra formola $\frac{P}{32}$, cioè le reſiſtenze ſi riducono alla parte ſediceſima delle antiche, e comuni, in parità di circoſtanze.

Serve di aver premeſſo queſti nuovi Elementi delle resistenze per poter comprendere le ragioni delle variazioni da me introdotte nell'argano. Gli effetti di tali mutazioni saranno poi dimostrati nell' ultima Parte.

Incominciando adunque a descrivere qual sia la miglior forma dell' argano, quali i compensi meccanici per renderlo più perfetto, esso vien rappresentato dalla fig. II, nella quale potrà osservarsi in primo luogo, che il telajo inferiore *M*, *M*, *M*, *M*, il qual forma la pianta, e la base di questa macchina, è stato da me tenuto di grossezza, e stabilità maggiore del consueto. In secondo luogo, che ho raddoppiato le cosce dell' argano *Ee*, *Ee*, *Ee*, *Ee*, le quali non solamente sostengono l' argano dalla parte destra, ma eziandio dalla sinistra, ricevendo nel centro, e non già da una parte, come è consueto, il fuso dell' argano *AB*. Tal cambiamento ho introdotto, per avere osservato, che nell' argano ordinario, quando il canapo si trova ne' punti superiori del cilindro, come nel punto *K* (*fig. I*), allora la resistenza del peso da elevarsi, e degli attriti da superarsi viene a rovesciar l' argano, il quale, come si sa, verso la parte opposta al peso dee raccomandarsi, e fissarsi a certi paletti piantati in terra, affinchè resti perfettamente immobile nell' operazione architettonica. Or tal' accidente non può mai succedere nel nuovo argano della fig. II, giacchè essendo esso fiancheggiato tanto dalla parte anteriore *MM*, quanto dalla parte posteriore *M'M'*, ne viene in conseguenza, che esso non può restar mai ribaltato, e rovesciato da qualunque forza de' pesi da elevarsi. Vi è ancora l' altro comodo, che esso può rivoltarsi, come si vuole, mettendolo in azione o dall' una, o dall' altra parte.

La panchetta superiore *CD* va formata di tutta stabilità, e di noce durissima, per tener fermi gl' incastri delle cosce *EE*.

Dovendo fare il fuso dell' argano o di noce, o di quercia, o di altro legname forte, ho creduto necessario di diminuire la gran resistenza, che fa il legname, quando contrasta con altro legname, fasciando con un liscio cerchio di ferro la concavità della panchetta *CD*, sulla quale deve aggirarsi il collo dell' argano in *aa*, avendo dalle mie nuove sperienze rilevato, che il ferro liscio combinato con legname forte, e con unto di materie grasse, specialmente di sego, soffre piccolissima resistenza. La minima di tutte si è quella del legname di ulivo salvatico, del quale potrebbe formarsi il suso dell' argano.

La medesima cautela e diligenza va osservata nel pernio inferiore dell' argano *Uu*, il quale deve farsi posare al di sotto su di una lamiera di ferro, correggendo in questo gli argani comuni, ne' quali vien traforata totalmente la panchetta inferiore *Oo*, facendo contrastare sulla superficie della medesima il labbro inferiore dell' argano *bb*. Oltre al pernio inferiore deve necessariamente la sua superficie laterale venire a contatto colla concavità cilindrica della panchetta; e perciò una tal concavità dee similmente fasciarsi con cerchio ben limato di ferro, la cui altezza non oltrepassi la misura di un pollice. Con tal costruzione l' orlo inferiore del fuso contrassegnato *bb* non può mai venire a contatto colla superficie superiore della panchetta *Oo*, ma il pernio *Uu* o deve posare sul piano inferiore della lamiera, o deve appoggiarsi sul descritto cerchietto di ferro.

Allo stesso modo la testata dell'argano per la parte sua inferiore *mm* dee restar sollevata sopra il piano *CD* della panchetta superiore; e così il collo dell' argano *aa* non dovrà risentire altro soffregamento fuori di quello, che proviene dalla superficie del cilindro appoggiata alla superficie del cerchietto di ferro.

Per ovviare al gravissimo inconveniente degli argani ordinarj, ne' quali, come è stato avvertito, il canapo deve ora scendere, ora salire sul fuso del medesimo, obbligando così a sospendere il lavoro per rimettere il canapo

napo ne' punti opportuni, mi è sovvenuto il compenso meccanico di fasciare il detto cilindro con una fascia curvilinea di legname *Ff*, sulla quale avvolgendosi il detto canapo, esso scende, o sale per una piccola altezza; sulla quale poi non potendosi sostenere a motivo della curvità, che lo porta sui pianetti molto inclinati, esso da sè medesimo o sale, o scende per rimettersi ne' punti intermedj delle curve, e perciò senza mai sospendere l' operazione meccanica, il canapo rimettesi da sè medesimo ne' medesimi punti. Qualche volta, secondo le circostanze, gioverà d' ajutare lo stesso canapo con un piccolo martello di legno, affinchè discenda più presto, che sia possibile.

La detta fascia concava si rappresenta nella figura II in maggior proporzione col titolo *curve del fuso*. Di tali curve se ne formano otto, o dieci secondo il bisogno, e con esse si fascia il fuso cilindrico inchiodandole al medesimo con chiodi acciecati nel legname, affinchè non facciano alcuna resistenza, e non consumino il canapo.

Sulla testata dell' argano segnata *A* si formano i due trafori quadrati, per i quali devono passare le due manivelle *Pp*, *Hh*, le quali devono essere di lunghezza tale, che i lavoranti girando attorno all' asse dell' argano possano facilmente scansare il suo telajo *MM*, *MM*.

E quantunque la loro lunghezza possa giovare per sollevare la potenza motrice, diminuendo così la spesa di più lavoranti, contuttociò non dovremo eccedere in tal lunghezza, essendo cosa evidente, che quanto più essa si estende, tanto è maggiore il tempo, che esigge il giro maggiore de' lavoranti, i quali si avanzano sempre con passo uniforme. Considerando tutte le circostanze di questa macchina, e di questo lavoro, io ho rinvenuto coll' esperienza, che la proporzione, che corre tra la lunghezza della leva ed il semidiametro del fuso, sul quale il canapo si avvolge, può tenersi fra i due limiti della parte decima, o al più della quindicesima, cioè il semidiametro del fuso facciasi di pollici 4, la lunghezza della leva *AH* potrà farsi di pollici 40, e potrà ancora farsi giugnere a pollici 60, che fanno piedi 5 parigini. Nel primo limite la potenza motrice ridurrassi alla parte decima del peso da elevarsi, colle sue resistenze, e nel secondo, e più alto limite detta potenza motrice sarà di una parte quindicesima.

Vero è, che nell' atto del lavoro non può osservarsi una precisa proporzione, giacchè i lavoranti, quando son raddoppiati, operano con leve maggiori, o minori, secondo i diversi punti delle manivelle, a' quali essi vanno applicando le loro mani, e non possono tutte riunirsi in un punto solo. Indi è, che per mettersi al sicuro dell' impresa, dovrà sempre l' architetto formare il suo calcolo sul vette minore, per non trovarsi deluso nell' atto dell' operazione.

Lascerò di descrivere minutamente alcune altre minori avvertenze, le quali saranno ben note agli architetti, e solamente risolverò il dubbio, che potrebbe nascere sulla fascia concava già descritta *Ff*.

Domandasi adunque in qual punto del cilindro debba essa collocarsi, cioè, se torni bene di collocarla nel punto intermedio fra la panchetta inferiore e superiore, ovvero in altro punto inferiore verso *B*. Il punto intermedio gioverebbe per distribuire ugualmente le due resistenze, la prima delle quali consiste nel pernio inferiore dell' argano, e la seconda nel collo superiore *aa*. Poichè è notissimo per la Meccanica, che le due pressioni restano in ragion reciproca delle distanze de' due punti del contatto dal punto della potenza. Così, se il canapo, ovvero la fascia *Ff* si facesse salire sull' estremità superiore del cilindro addosso alla panchetta *CD*, allora la massima resistenza la soffrirebbe il collo dell' argano *aa*, mentre la minima si porterebbe al pernio inferiore *bb*. E per converso, se si facesse scendere la faſcia concava verſo il punto B, allora la maſſima reſiſtenza tornerebbe ſulla punta inferiore dell'argano, e la minima ſul collo ſuperiore.

In ordine al valore delle due reſiſtenze poco, o punto vi corre, ſe la faſcia ſi collocaſſe nel mezzo, ovvero ſe ſi portaſſe ne' due eſtremi punti, o ſuperiore, o inferiore. La giuſta ſoluzione di tal problema dipende dalla ſerie delle reſiſtenze reſpettive, delle quali ora non occorre ragionare: e perciò per riſolvere il preſente dubbio ſoggiugnerò ſolamente, che in pratica torna aſſai comodo, che detta faſcia ſia collocata piuttoſto verſo la parte inferiore B, e ciò a motivo, che i lavoranti nelle loro rivoluzioni attorno all' aſſe dell' argano poſſano più facilmente cavalcare il canapo FQ ſenza il minimo perdimento di tempo. Si ſa, che il canapo da una parte va verſo il primo calceſe, o puleggia π (*fig. I*). Onde queſta parte di canapo DD deve ſaltarſi da' lavoranti, che vanno attorno dell' argano. L' altra eſtremità oppoſta alla prima è ſoſtenuta da una potenza Ll, la quale tiene a ſtretta detto canapo, affinchè non giri liberamente ſul ſubbio, e perciò i lavoranti ſono obbligati a cavalcare ancora ſulla ſeconda eſtremità del canapo. Quando adunque queſto canapo ſi collocaſſe ad un' altezza notabile, i ſucceſſi, e continui ſalti de' lavoranti, tanto da una parte, che dall' altra verrebbero a ritardare il lavoro. Ma non così ſuccede, quando il canapo quaſi rade il terreno.

Ora rifletta ſi, che nell' argano ordinario, ſalendo il canapo dal punto inferiore al ſuperiore, dovrà ſempre ſuccedere l' inconveniente del ritardamento, o almeno nelle maggiori altezze del canapo, e tale inconveniente pure ſi toglie nel nuovo argano, tenendo più baſſa la faſcia curvilinea.

Non laſcerò ancora di avvertire, che alcune volte il fuſo dell' argano rieſce di tal diametro, che in eſſo può eſcavarſi quella faſcia curvilinea, ſenza i riſalti de' regoli incurvati, i quali portano nella coſtruzione un lavoro più lungo.

Mi ſi domanderà finalmente di qual qualità, e natura eſſer poſſano quelle curve, dal cui rivolgimento vien generata la ſopraddetta faſcia. Riſponderò, che ſenza entrare in un eſame lungo, ed inutile potremo formare dette curve di archi circolari alquanto minori di un mezzo cerchio, come ſarebbe di gradi 140, o poco più, giacchè in tal graduazione s' incontrano ſempre tali inclinazioni, che baſtano per far ſalire, o diſcendere i canapi, che è l' unico oggetto di ſomigliante coſtruzione. Nel caſo preſente la ruvidezza della ſuperficie maggiore, o minore fa sì, che il canapo ſalga ora ad altezza maggiore, ed ora minore; ſempre però le ordinarie reſiſtenze ſon tali che quando il canapo dal vertice della curva è ſalito per gradi 50, ovvero 60, ricade da sè medeſimo, ritornando allo ſteſſo punto del vertice, e perciò eſſo non ſale giammai verſo i gradi 70.

Premeſſa adunque la nuova coſtruzione dell' argano, reſtano evidenti i ſuoi vantaggi ſopra l' argano comune, cioè

Primieramente, che le ſue reſiſtenze riduconſi alla parte ſediceſima, e ancor meno, delle reſiſtenze comuni.

Secondariamente, che non mai s' interrompe il lavoro per abbaſſare i canapi, ammagliando le taglie, come ſuccede nel metodo ordinario.

In terzo luogo, che eſſendo il fuſo dell' argano ſoſtenuto a deſtra, e ſiniſtra, ſi ſugge il pericolo che ſia roveſciato.

In quarto luogo, che reſtando il canapo aſſai baſſo preſſo il terreno, vien rimoſſo l' inconveniente de' ſalti de' lavoranti per cavalcarlo.

In quinto luogo, che eſſendo ſoſtenuto il pernio dell' argano ſul ſondo della panchetta con laſtra di ferro ſi sfuggono così i gran contatti, che ſoffre l' argano comune, arrotandosi, e strisciando sulla superficie della panchetta inferiore.

L' altro inconveniente, che è tutto proprio dell' architettura navale per le grosse gomene, che in essa si adoperano nella maggior parte delle operazioni nautiche, e specialmente nel salpar le ancore, non pare che possa totalmente sfuggirsi, o rimediarsi, giacchè non essendo possibile, che la gomena per la sua grossezza, e ruvidezza si avvolga al fuso dell' argano doppio, riuscirà sempre indispensabile, che alla detta gomena ora si attacchi, ed ora si sciolga quel canapo secondario, chiamato nella marina francese *Tournevire*, che nel nostro volgare direbbesi *gira e tira*. Indi è, che per tale inconveniente altro compenso non potrebbe rinvenirsi, se non quello di facilitare, ed abbreviare l' operazione, che si fa di legare, e poi sciogliere dalla gomena il canapo secondario. Ripensando adunque a tal meccanismo, mi parrebbe, che potesse molto diminuirsi il tempo per via di due mezzi cilindri imperniati con opportune cerniere, e scavati al di dentro secondo le spire della gomena, i quali mezzi cilindri potessero facilmente aprirsi, o serrarsi per mezzo di due viti di ferro. Se adunque si fissasse il canapo secondario a' detti due mezzi cilindri, essi potrebbono trasportarsi da' punti superiori a' punti inferiori della gomena con aprire solamente, o con serrare due viti di ferro. Il che certamente si ottiene in pochi secondi di tempo. Ma non così succede nel metodo presente, nel quale il canapo secondario deve prima legarsi alla gomena con funicelle dette comunemente *garzette*; e quando queste colla gran forza si sono fortemente annodate, convien poi disciogllierle per rimetterle ne' punti inferiori della gomena, e continuare così l' operazione di salpar l' ancora.

Affinchè il mio meccanismo più chiaramente s' intenda, sia nella fig. III la gomena AA', intendendo, che l'eſtremità *A* corriſponda al baſtimento, che ſalpa l'ancora, mentre l'altra eſtremità *A'* corriſponde all'ancora, che ſi giace ſul fondo del mare. Secondo il preſente metodo il canapo ſecondario legaſi alla gomena coll' uſo delle garzette, per eſempio, nel punto *m m'*, e ciò per fiſſare al detto punto il canapo ſecondario *m n*, *m' n'*, il quale colle due eſtremità *nn'* portaſi all'argano doppio del baſtimento. Or quando coll' operazione del medeſimo i punti *mm'* ſon già arrivati al bordo della nave, allora conviene ſciogliere la legatura, e poi riportarla di bel nuovo verſo la parte dell' ancora per far la ſeconda legatura, e la ſeconda operazione. Pertanto faccianſi due mezzi cilindri di forte legname *Cc*, *Bb*, nel mezzo de' quali, laſciandovi una ſufficiente groſſezza di legno, ſi eſcavino le ſpire concave *Pp*, *Pp* ecc. in modo tale, che la parte conveſſa della gomena poſſa combagiare colle ſpirali concave de' cilindri. Si adattino a' medeſimi in quattro ſtaffe di ferro non ſolamente le due cerniere *Hh*, ma eziandio i quattro braccioli *Dd*, *Ee*, in forma tale, che ne' due primi reſti eſcavata la madrevite, e ne' due ſecondi i maſchj della medeſima *Gg*, i quali abbiano la loro gruccia, o manico per ſerrargli con forza addoſſo a' due braccioli *Dd*. Se ora ſi concepiſca, che tal macchinetta ſi adatti alla gomena, faſciandola per mezzo delle cerniere *Hh*, e poi ſerrandola addoſſo colle due viti *Gg*, eſſa reſterà fortemente fiſſata addoſſo alla gomena ſenza poter traſcorrere a motivo delle ſpire, che reſtano ſerrate l'una coll' altra, cioè le parti concave colle reſpettive conveſſe. Attaccando pertanto a tal macchinetta il canapo *tournevire*, inſiem con eſſo potrebbe facilmente traſportarſi, e fermarſi nella gomena con un ſemplice giro della vite, che può allentarſi, e riſerrarſi in poche battute di polſo. Perciò detta macchinetta potrebbe acconciamente chiamarſi il *conduttor nautico*, non già conduttore di materie elettriche, o fulminee, come la moderna Fiſica va ſpeculando, ma bensì conduttor materiale della gomena, che con eſſo è traſportata dal fondo del mare nella nave. Queſto è uno de' compenſi per abbreviare notabilmente il tempo ben lungo, che nel metodo ordinario rendeſi neceſſario per ſalpare un' ancora. Forſe da tal meccaniſmo altri ne naſceranno più brevi, e più ſemplici; ma il preſente conduttore non mi pare nè molto lungo, nè molto compoſto. Sono ſempre neceſſarj de' tentativi, affinchè da eſſi riſulti il miglior meccaniſmo adattato al biſogno.

PARTE IV.

Che l' argano nuovamente ridotto tolga gl' inconvenienti dell' antico, e che in eſſo le reſiſtenze rieſcano tenuiſſime.

Da quanto è ſtato eſpoſto nella terza parte apparirà, che co' compenſi preſi vengano a toglierſi, o almeno diminuirſi notabilmente gl' inconvenienti, che incontra l' argano comune. L' eſpoſizione medeſima de' vantaggi dell' argano ridotto baſta per convincer tutti di tal verità. Onde per non dilungarmi di vantaggio ſolamente dimoſtrerò col calcolo quanto ſiano tenui le reſiſtenze, che reſterebbono nell' argano ridotto. E' ſtato accennato, che le reſiſtenze antiche a quelle del nuovo argano ſiano nella ragione del 16 : 1, cioè, che queſte ſiano ſedici volte minori. Il che naſce dalla formola $\frac{P}{a-1}$, la quale nell' argano comune è di $\frac{1}{2}$, e nell' argano ridotto è di $\frac{1}{32}$. Ma non così ſuccede in tutte le operazioni dell' argano, eſſendo diverſa tal proporzione, quando ſi aggiungono le taglie, o pulegge, che ſempre, o quaſi ſempre ſi adoperano. La teoria è la medeſima, che dianzi è ſtata maneggiata nella parte *II*, e ſolamente varia il valore della reſiſtenza. Onde ſarà

Calcolo delle resistenze dell' argano ridotto secondo le nuove sperienze includendovi le due pulegge.

Sia, come dianzi, il peso *PP'* di libbre 4000. E' manifesto per le ragioni addotte, che il pernio della puleggia *P* resterà aggravato da una doppia pressione, equivalente a libbre 8000. Per le nuove sperienze esse dovranno dividersi per 32, e perciò la resistenza degli attriti del pernio di detta prima puleggia sarà di libbre 250.

Ora riducendo questa resistenza alla circonferenza della puleggia, facciasi, come il 6:1 = 250 al quarto termine, che sarà di libbre . . . . 41.33 centesime.

Passando pertanto l' energia del peso unita a quella della resistenza alla seconda puleggia π essa sarà di libbre . . . . 4041.33 centesime, e tal forza dee raddoppiarsi per avere la vera pressione della seconda puleggia, la quale sarà di libbre 8082.66 centesime. Ancor questa pressione, per dedurre la resistenza, dee dividersi per il solito divisore 32, e così resteranno libbre 252.60.

Ma perchè nella seconda puleggia π il canapo passa soltanto per un arco di quadrante, e non già per la mezza circonferenza, come già è stato avvertito; perciò il detto valore dovrà diminuirsi per le dimostrazioni del mio Trattato sulle resistenze nella ragione del 1000:707 prossimamente, e con tal diminuzione resteranno libbre . . . . 178. 58 centesime.

Queste debbono di bel nuovo diminuirsi nella ragione del 6:1 per riportare la resistenza dal pernio alla circonferenza della puleggia, e perciò resterà finalmente la resistenza di libbre . . . . 29.76 centesime.

Ora aggiungendo tal resistenza al valore di libbre . . . . : . . . . 4041. 33.

avremo la forza del canapo *DD* di libb. 4071. 09 cent.

Questa

Questa è la totale resistenza, che l'argano, o la potenza al medesimo applicata deve superare.

Essa nel caso presente non va raddoppiata, come nelle pulegge, giacchè intendesi il canapo come fisso nello stesso cilindro. Ma dee soltanto dividersi per il consueto divisore 32, e ne risulteranno libbre 127.18 centesime.

Una tal resistenza considerata finora al pernio, o collo dell'argano, deve riportarsi alla potenza motrice per il momento della leva, di cui essa è fornita, e perciò ritenendo la proporzione dell'ultimo esempio, nel quale il braccio della leva si è fatto al semidiametro del pernio, come il $12\frac{1}{2}:1$, essa ci tornerà di lib. 10.17 cent.

Ma essendo stata calcolata la resistenza da superarsi dell' argano colla sua potenza di libbre . . . 4071.09 cent.
dividendo tal numero per il 10. secondo la proporzione adoprata tra la lunghezza della leva ed il semidiametro del fuso, ci torneranno libbre . . . . 407.10 cent.

Alle quali aggiungendo le dette libbre 10.18

otterremo tutto il valore della potenza motrice per elevare il peso, e superare le tre resistenze di libbre . . . . 417.28 cent.

Dal che ne viene in conseguenza, che nell'argano ridotto secondo le mie sperienze la potenza motrice non è aggravata, se non che di libbre 17. 28 centesime di più di quello, che sarebbe, distruggendo affatto tutte le resistenze.

Volendo ora paragonare le resistenze del vecchio argano a quelle dell'argano ridotto, basterà ripigliare il numero della seconda parte, che è di libbre 730. 92 centesime, delle quali le libbre 400 appartengono alla potenza nell'ipotesi, che manchino le resistenze, e le altre libbre 330. 92 centesime ci esprimono le pure resistenze. Indi è che nella presente combinazione dell'argano con due semplici pulegge, la prima resistenza dell' argano antico ſta alla ſeconda dell' argano ridotto, come il numero 330. 92 centeſime al numero 17. 28, cioè come il numero 191 al 10, vale a dire, che le nuove reſiſtenze dell' argano ridotto ſiano circa una parte decima nona delle antiche reſiſtenze riſpetto alla combinazione conſiderata nel preſente calcolo.

Calcolo della potenza motrice eſcludendo l' uſo delle due pulegge.

Volendo conſiderare le reſiſtenze dell' argano ridotto ſenza l' operazione delle due pulegge, allora il peſo di libbre 400 deve immediatamente dividerſi per $a-1$, che nel preſente caſo è di parti 32. Onde avremo per la detta diviſione libbre . . . . 125 . 00

che diviſe per $12\frac{1}{2}$ ci ſomminiſtrano lib. 10 . 00
alle quali aggiungendo le ſolite libbre . . 400 . 00

verremo in chiaro del valore della potenza, che ſarà di libbre 410. 00

cioè libbre 10 di più, che non accaderebbe diſtruggendo qualunque ſorte di attrito.

Nella medeſima ipoteſi la reſiſtenza degli argani ordinarj è ſtata calcolata nella ſeconda parte di libbre 160; e perciò la reſiſtenza dell' argano ſarebbe nel preſente caſo una parte ſediceſima dell' argano comune, come eſſere deve a motivo del diviſore $a-1$, che come è ſtato detto è 16 volte maggiore nell' argano comune riſpetto all' argano ridotto.

Per maggior facilità aggiungerò il ſeguente riſtretto, affinchè in un' occhiata ſi veggano le differenze delle diverſe ipoteſi, e de' due argani inſieme paragonati.

Riſtretto delle diverſe potenze motrici di un argano, col quale debba elevarſi un peſo di libbre 4000. *in diverſe ipoteſi.*

Prima ipoteſi, che non vi ſia alcuna reſiſtenza, e che il braccio della leva ſia al ſemidiametro del fuſo dell' argano nella ragione del 10: 1; potenza motrice libbre 400.00

Seconda ipoteſi dell' argano comune con due pulegge, ſecondo le diverſe proporzioni del calcolo colle antiche reſiſtenze 730.31

Terza ipoteſi delle nuove reſiſtenze con due pulegge, e ſecondo le ſteſſe proporzioni; potenza motrice 417.28

Quarta ipoteſi coll' argano ſenza pulegge, ſecondo le antiche reſiſtenze 560.00

Quinta ipoteſi dell' argano ſenza pulegge, ſecondo le nuove reſiſtenze; potenza motrice . . 410.00

Formola analitica per lo ſteſſo calcolo.

Reſta ora, che con qualche formola analitica ſi poſſa abbreviare la teſſitura del calcolo, giacchè eſſa rappreſentando tutte le ipoteſi ci ſomminiſtra una maggior facilità, perchè allora altro non occorrerà, ſe non che applicare le altre ipoteſi, che ſi voleſſero, ſoſtituendo i nuovi numeri alle eſpreſſioni delle lettere.

Calcolo analitico delle reſiſtenze.

Il peſo, che deve elevarſi dicaſi $= P$, la frazione ſarà $= \frac{P}{a}$, che rappreſenta la reſiſtenza aſſoluta. Onde la ſerie delle reſiſtenze ne' caſi, in cui conviene, ſarà $= \frac{P}{a-1}$

La prima puleggia avrà la reſiſtenza $= \frac{2P}{a-1}$. Convien raddoppiare il valore di P, perchè il pernio è aggravato dal canapo dall' una parte, e dall' altra. Sia il diametro della puleggia a quello del pernio come $D : d$.

Onde la resistenza riportata alla prima puleggia sarà $= \frac{2\,d\,P}{D(a-1)}$

Passando alla seconda puleggia, essa sarà aggravata da $2\,P + \frac{4\,d\,P}{D(a-1)}$. Giacchè ancor essa risente il carico dall' una parte, e dall' altra. Per avere la sua resistenza convien prima moltiplicarla per la stessa frazione $\frac{1}{a-1}$, e sarà $\frac{2\,P}{a-1} + \frac{4\,P\,d}{D(a-1)^2}$

Ma perchè nel caso della seconda puleggia il canapo resta solamente a contatto col semplice quadrante della rotella, convien di bel nuovo diminuirla nella proporzione del diametro al quadrante. Dicasi tal proporzione come $\Delta : \delta$. Onde sarà $= \frac{2\,P\,d\,\delta}{\Delta D(a-1)} + \frac{4\,P\,d^2\,\delta}{\Delta D^2(a-1)^2}$

Passando dunque il canapo dalle due pulegge all' argano, sarà aggravato del peso P, più la resistenza delle due pulegge la quale si trasfonde insieme col detto peso. Onde l' argano sarà aggravato dal valore

$$P + \frac{2\,P\,d\,\delta}{\Delta D(a-1)} + \frac{4\,P\,d^2\,\delta}{\Delta D^2(a-1)^2} + \frac{2\,d\,P}{D(a-1)}.$$

Per maggior brevità l' espressa formola facciasi $= F$

E sia la ragion del vette al semidiametro del subbio come $b : 1$

Sia pure la ragione dello stesso vette al semidiametro del pernio dell' argano, e del suo collo, come $g : 1$

Onde volendo dedurre la potenza motrice, che dicasi uguale a y, avremo la seguente equazione

$$\frac{F}{b} + \frac{F}{g(a-1)} = Y.$$

Per applicare la presente formola a' casi particolari, ſuppongaſi prima ſecondo le mie ſperienze $a-1=32$, e ſi laſcino le altre proporzioni, come ne' paſſati calcoli. Riducendo adunque in numeri la formola, ſarà

$$F=4000+\frac{8000}{6\times32}+\frac{8000\times707}{1000\times6\times32}+\frac{16000\times707}{1000\times36\times1024}.$$

Fatte le opportune diviſioni ſarà

Il primo termine . . . $=4000$
Secondo termine . . . $=\ \ 41.66$
Terzo termine . . . . $=\ \ 29.32$
Quarto termine . . . . $=\ \ \ \ 0.11$

Somma ſarà di libbre 4071.09 centeſime $=F$

Onde ſarà $\frac{F}{h}=\frac{4071.09}{10}=407.109$ milleſime

Avremo $\frac{F}{g(a-1)}=\frac{4071.09}{400}$,

che ſarà uguale a libbre . . . . . 10.177. milleſime

Onde finalmente avremo $Y=417.286$. Un tal valore rieſce maggiore del calcolo antecedente, che era libbre . . 417.28. centeſime

La piccola differenza di ſei parti milleſime naſce dalla maggior preciſione della formola, la quale racchiude più frazioni, che non è ſtato fatto nel primo calcolo.

Applicazione della ſteſſa formola nell' ipoteſi delle antiche reſiſtenze.

Con ugual facilità potrà applicarſi la medeſima formola alle antiche reſiſtenze, purchè ſolo ſi cambj il valore di $a-1$, che in queſto caſo ſarà $=2$. E perciò avremo

$$F=4000+\frac{8000}{6\times2}+\frac{8000\times707}{1000\times6\times2}+\frac{16000\times707}{1000\times36\times4}.$$

Onde ſarà $F=$ a' ſeguenti termini, cioè

Termine I. = ... 4000
Termine II. = ... 666.66
Termine III. = ... 471.33
Termine IV. = ... 78.55

Valore di F = ... 5216.54 centesime

Perciò sarà $\frac{F}{h}$ = ... 521.654 millesime

Sarà $\frac{F}{g(a-1)} = \frac{5216.54}{12.5 \times 2}$ = ... 208.660

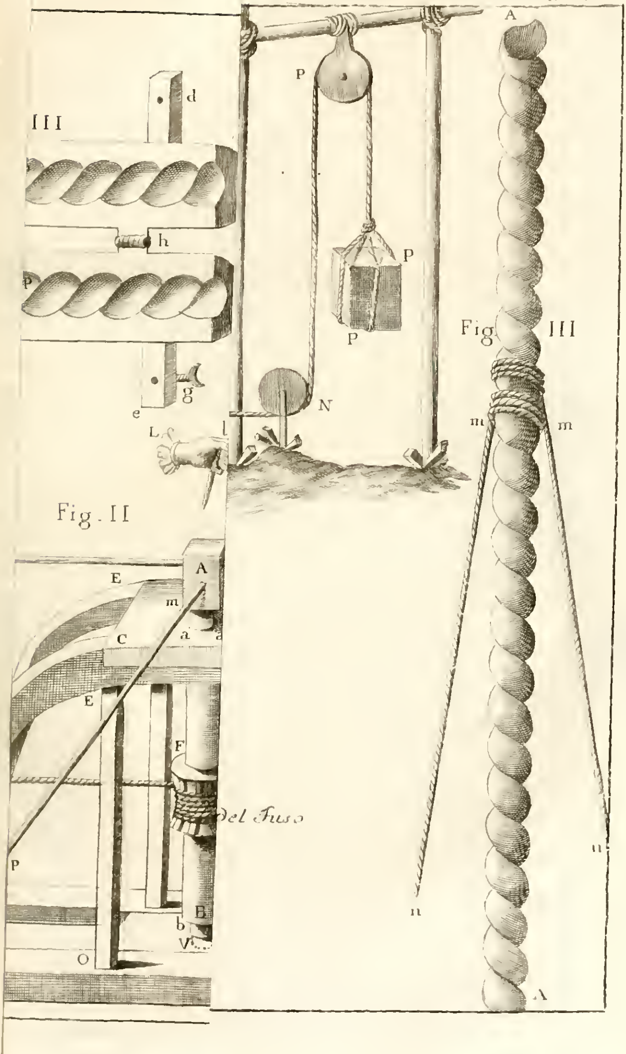
Unendo l' antecedente termine . . . 521.654

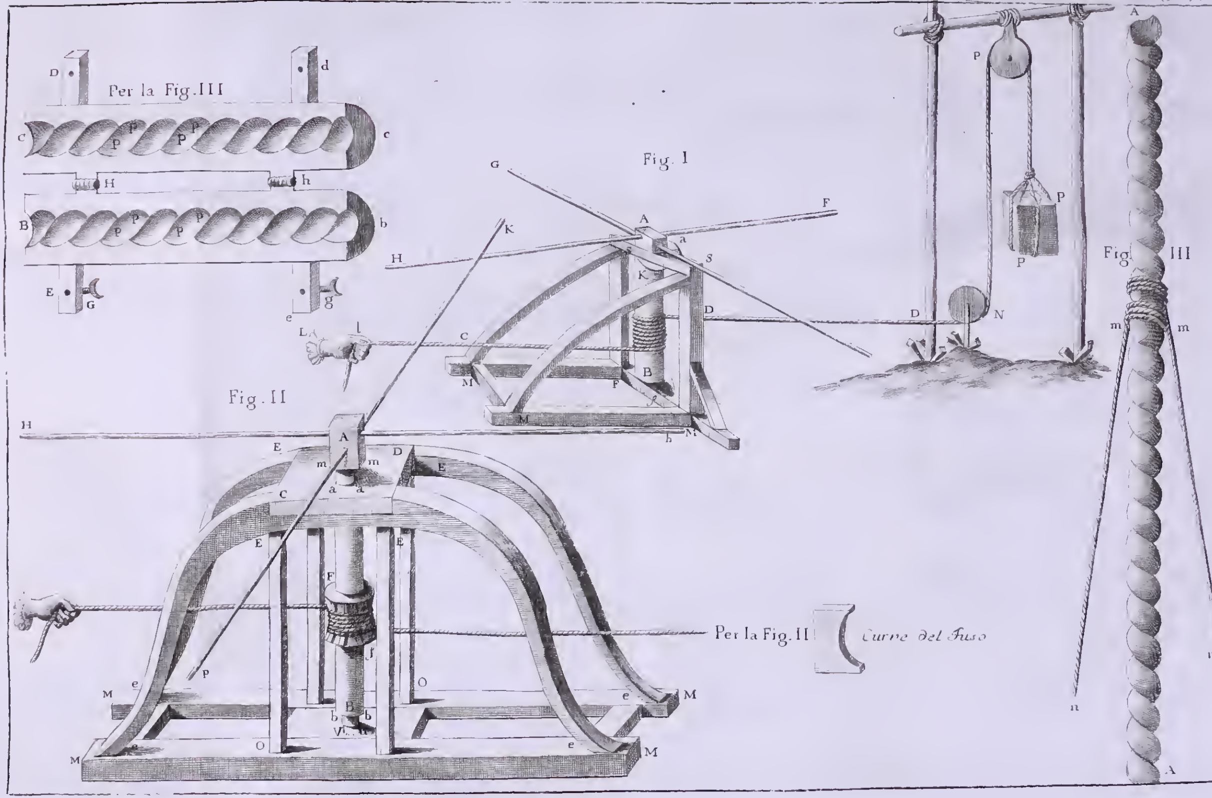
Sarà Y = ... 730.314 millesime

Confrontando il presente resultato con quello dell' antecedente calcolo alla Parte seconda, che è di libbre 730.24 . . . . 730. 24, si troverà la piccola differenza di 7 parti centesime, la qual nasce come dianzi, per essere state trascurate in detto primo calcolo alcune frazioni.

Per la qual cosa essendo stati dimostrati i vantaggi del nuovo argano, e particolarmente quello di aver ridotte le resistenze degli attriti ad una quantità pressochè insensibile, come quella che non giugne a libbre 18 in paragone delle libbre 330. prossimamente delle antiche resistenze, ora altro non resta all'intelligente Architetto, se non che di fare eseguire la costruzione di detto argano secondo i nuovi principj, adoperando per diminuire le resistenze quelle combinazioni di materie, che sono state da me esaminate, e proposte.

E quando egli abbia così costituiti i suoi argani, le sue pulegge, le sue taglie, ed altri ordigni di questo genere, allora il dispendio delle sue fabbriche in ordine alle operazioni, e numero de' manuali scemerà nella stessa ragione, in cui diminuiscono le resistenze, computandovi i pesi aggravati, cioè la spesa co' soliti argani al-


A
P
d
III
h
p
P
P
Fig. III
g
e
N
L
l
m
m
Fig. II
A
E
m
C
a
E
F
del Fuso
P
n
n
B
b
V
O
A


Per la Fig. III
Fig. I
Fig. II
Fig. III
Per la Fig. II
Curve del Fuso

la ſpeſa cogli argani ridotti ſarà come il numero 730 al 417 proſſimamente. E ſe ſi voleſſe aggiungere, che il contraſto di due legni rozzi, come ſono negli argani comunì, cagioni un attrito aſſai maggiore del terzo, ſi conchiuderà, che il diſpendio delle comuni reſiſtenze giunga quaſi al doppio di quello delle reſiſtenze trovate colle mie ſperienze.

Vero è, che non eſſendo ſtate ancora da me pubblicate le nuove ſperienze, le quali diminuiſcono le reſiſtenze degli attriti alle tre parti centeſime de' peſi aggravati, vi ſaranno delle perſone, che difficilmente ſi capaciteranno di così inſigne vantaggio in favore della Meccanica. Ma io ſpero che le mie lunghe, e reiterate ſperienze, le quali ſaranno ampiamente deſcritte nel mio Opuſcolo, rimuoveranno ogni qualunque dubbio ſu queſto importante ritrovato.

Io ſo, che tutti i Meccanici, che finora hanno ſcritto, altro non hanno fatto, che muovere de' dubbj ſulle diverſe teſſiture de' noſtri ſolidi, e ſulle diverſiſſime reſiſtenze, che indi debbono produrſi. Ma ſe con queſta incertezza di ſuperficie, e di ſcabroſità ſi ritrovano de' ſolidi, i quali combinati inſieme con alcune cautele, e diligenze ſomminiſtrano coſtantemente, ed in tutte le circoſtanze una tenuiſſima, e quaſi inſenſibile reſiſtenza, con queſto ſolo la Meccanica farà quell' acquiſto, che ſi deſidera, cioè che le reſiſtenze degli attriti rendanſi almeno ſedici volte minori, che non ſono a tenore delle ſperienze del Sig. *Amontons*, e di altri inſigni Scrittori.

In queſta Memoria io ho applicata la dottrina delle nuove reſiſtenze all' argano, ed alle pulegge, che lo accompagnano; ma ſarà facile di applicarla a tutte le altre macchine o ſemplici, o compoſte, che ſi mettono in opera nell' Architettura Civile, Militare, e Navale.

LETTERA

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Real Museo di Fisica, e di Storia Naturale di Firenze

Al Sig. ADOLFO MURRAY Professore d' Anatomia a Upsal

Scritta il dì 20. di Ottobre 1781.

IN questi giorni mi è capitato tra mano il secondo Tomo degli Opuscoli Chimici del Cavalier *Bergman*. Gli ho letti con quel trasporto, con il quale aveva letti gli altri Opuscoli del medesimo Autore, che sono nel primo Tomo; e mi son comparsi anche questi degni della grande riputazione, che si è meritamente acquistata quel valentissimo Chimico. Quasi tutto è originale quello, che sorte dalla penna di quel grand' uomo; e vanno del pari la scelta delle esperienze, la sagacità nel farle, e l'esattezza nelle conseguenze. Credo che si possa dir di lui, per rapporto delle cose chimiche, quel che diceva *Cicerone* della latinità di *Cesare*. *Ineptis gratum fortasse fecit ... Sanos quidem homines a scribendo deterruit*, tanto pareva inimitabile nel tempo che era originale ed eccellente.

Ma fra le molte bellissime verità, che c' insegna quell' uomo illustre, trovo tre punti che principalmente anderebbero esaminati nel più gran dettaglio. L'uno risguarda la teoria del calore, e della formazione dell' aria deflogisticata, con cui spiega egli le revivificazioni delle calci metalliche; la seconda la deflogisticazione del sangue sopra le arie respirabili; la terza l' aria fissa dell' atmosfera, o dell' aria comune. Sono più anni, che travaglio sopra le medesime materie; ma il tempo, e le le mie occupazioni mi hanno fin qui impedito di pubblicare le mie esperienze, che sono numerosissime, nè per ora sono ancora in istato di farlo, almeno così subito.

Permettetemi però di staccare dalla mia opera quello, che ho osservato sopra i tre articoli accennati colla lusinga, che volendo voi comunicare le mie esperienze all' illustre Chimico Svezzese, e vostro amico, come io rilevo da questo stesso volume, dove parla del vostro merito, e sapere, il facciate pure liberamente; e vi assicuro, che non ho altro in vista, che di essere illuminato, se sono nell' errore, e di vedere stabilite le nuove teorie sopra ragioni solide, ed inconcusse. Questo è quello, che io devo aspettare da un Filosofo ingenuo, ed illuminato, come il Cavalier *Bergman*. Che se le mie esperienze possono aver qualche forza sul suo animo, nessuno è più in istato di lui per darci una teoria più vera, e de' principj più certi non senza vantaggio della Chimica, e della Fisica, che deve essere il solo scopo di chi ama la verità.

Le nuove opinioni del valente Chimico Svezzese sono in origine le medesime del famoso *Scheel*, che si può chiamar lo scopritor degli acidi moderni, ma sono più sistematizzate nel primo, più estese e corredate da nuove ragioni ed esperienze. Elleno meritano un esame particolare, si tratta dell' uso più importante del polmone, si tratta dell' aria principio sì necessario alla vita, si tratta in fine delle funzioni più grandi dell' economia animale.

L' altra parte ha per oggetto le operazioni più delicate della Chimica moderna, cioè la natura, e la formazione delle arie non assorbibili dell' acqua, e la revivificazione delle calci metalliche, che tiene a tutta la Chimica.

Il nuovo sistema rovescia tutte le idee fin qui ricevute, ed è sottilmente legato insieme coi fatti, e coll' esperienze le più seducenti, talchè non mi maraviglio punto, che sia stato immaginato e sostenuto nelle loro opere da quei valenti Chimici, e che faccia de' proseliti anche appresso gli esteri.

Il Sig. *Bergman* prova con diverse esperienze e ragioni, che la flogisticazione dell'aria comune non ha luogo nel polmone, ma che anzi il polmone assorbe, e spoglia del suo flogisto le arie, che s' introducono in quel viscere col mezzo della respirazione; l'aria poi che rimane dopo quella funzione è aria spogliata del flogisto secondo lui, al contrario di tutti gli altri Filosofi moderni, che la credon ricca di quel principio.

Egli prova questa sua teoria colle seguenti ragioni, che meritano un esame tutto particolare. Ha trovato per esperienza che l'aria respirata dagli animali in vasi chiusi non è punto diminuita. La mancanza poi di $\frac{1}{500}$ d'aria, in cui lasciò morire un sorcio, conviene attribuirsi (dice egli) al calore dell' animale, che deve averla fatta sortire dal vaso dove era situato sul mercurio quando vi fu introdotto. E' già noto che il flogisto diminuisce le arie respirabili; onde è falso, conchiude egli, che dal polmone esca il flogisto per unirsi all' aria comune.

Il Sig. *Bergman*, dopo di aver così sostenuto che nella respirazione non si produce dal polmone flogisto alcuno, cerca di provar per l'opposto, che l'aria, in cui si è lasciato spegnere un lume, non è sensibilmente alterata nella sua bontà, benchè si trovi molto diminuita dal flogisto escito del lume, che mescolato coll'aria, e fatto calore sorte attraverso i pori del vetro, talchè l' aria pura sorte allora dal vaso unita al flogisto sotto forma di calore, e da questo e non da altro si trova l' aria del vaso diminuita. In quest' aria un animale ci vive quasi così bene che nell' aria comune di prima.

Ma una prova ancora più forte, perchè più diretta, egli la deduce da una sua esperienza particolare, e bella, che merita tutta la considerazione del Filosofo. Quel valente uomo scosse del sangue dentro di un vaso sul mercurio, in cui vi era aria comune, e trovò che l'aria non fu punto diminuita, benchè una candela non potesse più ardere in quell' aria. Non esce adunque, dice egli, il flogisto dal sangue, ma piuttosto il sangue ne assorbe, e per questo l'aria si trova peggiorata, cioè privata di flogisto.

Finalmente egli portava una esperienza di *Scheel* sull'aria infiammabile, che egli ha voluto ripetere, ed è che l' aria infiammabile si respira impunemente dall' uomo per 20, e più volte dentro una vescica, e dopo si trova incapace di più infiammarsi, o di lasciarvi arder un lume. Il che dimostra, dicono que' due valenti Chimici, che il polmone l' ha spogliata del suo natural flogisto, tanto è contrario che quel viscere ne abbia dato a quell' aria.

Al primo argomento io posso opporre 37 esperienze, o risultati fatti su i sorci, 452 su i piccoli uccelli, e 179 su i minimi porchetti d' India, e minimi cunigli. Il risultato delle esperienze fatte sopra de' sorci è che tutti hanno diminuito l'aria comune sul mercurio dentro vasi, dove sono morti, e che l' aria era diminuita da $\frac{1}{30}$ fino ad $\frac{1}{23}$ del totale. L'aria comune di cui mi servivo era dodici pollici. Sette uccelli hanno un poco accresciuta l' aria, due altri non l'hanno nè cresciuta, nè diminuita sensibilmente; tutti gli altri poi l' hanno diminuita da $\frac{1}{30}$ fino ad $\frac{1}{21}$ in circa. Cinque porchi d'India hanno un poco aumentata l'aria, e così ancora han fatto tre cunigli, tutti gli altri l' han diminuita da $\frac{1}{27}$ fino ad $\frac{1}{9}$ incirca. In generale poi ho osservato, che le arie ſono tanto più diminuite, quanto più lungamente ſono ſtate reſpirate dagli animali. Nell'aria deflogiſticata le diminuzioni ſono moltiſſimo maggiori, e poſſono arrivare fino ad un quarto dell' aria primitiva, e più ancora. Non parlo dell' aria fiſſa, che ſi è formata in quelle eſperienze, ch'è molto più delle quantità diminuite, e ſpecialmente nell' aria deflogiſticata.

Nè deve parere ſtrano ſe qualche volta ſi trova in qualche caſo particolare l'aria piuttoſto accreſciuta, che diminuita, perchè quando l'animale viene chiuſo ne' vaſi ha dell' aria ne' ſuoi polmoni, e può eſſer coperto dai vaſi nel momento dell' inſpirazione, onde averne anche di più. Queſta aria polmonare può nelle diverſe circoſtanze dell' animale ſortir più e men dal polmone dopo morto l'animale, e meſcolarſi nell'aria del vaſo, e ſupplire alla diminuzione dell' aria ſeguita dal flogiſto polmonare, e fino parer d' eſſer creſciuta. Va conſiderata ancora l' aria che ſi attacca ai peli degli animali, ed alle piume degli uccelli, che non ſempre rieſce di ſtaccar tutta perſettamente, nè anco allora, che s' introducono ne' vaſi facendoli paſſare attraverſo il mercurio, che è il metodo da me oſſervato; e queſta mancanza d' attenzione può aver beniſſimo indotto in errore i Filoſofi Svezzeſi che non hanno fatto uſo di queſto metodo, almeno per quel che pare da' loro ſcritti. Per altro ſe ſi fanno le eſperienze ſull'acqua, e non ſul mercurio, le diminuzioni appariſcono anche maggiori a motivo dell' aria fiſſa, che viene aſſorbita allora dall' acqua. Non par dunque che ſi poſſa dubitare, dopo le numeroſe eſperienze da me fatte ſopra le arie reſpirabili, in cui ſi laſcian morire gli animali, che ſegue una vera diminuzione, e che in conſeguenza eſce dal polmone del flogiſto. E queſto ſerva per riſpondere alla prima difficoltà.

Trovo fra' miei fogli un gran numero d' eſperienze relative all' aria comune, in cui ſi è laſciato ſpegnere un lume; e fra le molte esperienze basterà che ne accenni una, che mi par decisiva, attese le cautele da me usate, e quest' una contiene il risultato medio di tutte le altre consimili, che non differiscono fra loro.

Queste mie esperienze serviranno di risposta alla seconda difficoltà.

Feci fare un piccolo foro alla estremità chiusa di un cilindro di cristallo lungo otto poll. largo due, e legai fortemente nell' alto, dove era il foro, una vescica in modo che soffiando per la bocca opposta, ed aperta del cilindro potevano entrare nella viscica otto in dieci pollici di aria. Galleggiava ritta una candelina minima di cera sopra una gran vasca di mercurio. La candelina non era fatta che di cinque fili molto sottili, uno de' quali era tenuto un poco distante dagli altri, perchè la fiamma fosse appena sensibile nel principio, e non si comunicasse nell' istante agli altri fili. Accendevo quel filo con un altro filo sì sottile, che appena dava una fiamma sensibile, e lo faceva in un istante. Nel medesimo momento copriva il candelino col cilindro, e l' immergeva di qualche pollice nella vasca, ed allora la vescica si distendeva, e gonfiava, che prima era vuota, e compresa sul foro del cilindro. Il candelino finiva di accendersi tutto, e non sortiva punto di aria dal cilindro per tutto il tempo, che durava a bruciare. Lasciata raffreddare ogni cosa misurava l' aria del cilindro, e la trovai diminuita di $\frac{1}{30}$ o poco meno. Portata l' aria sull' acqua, e scossa diminuì di nuovo di $\frac{1}{40}$. Provata allora coll' aria nitrosa dava 135, quando la comune dava 110. Misi un calenzuolo in otto pollici cubici di quest' aria, e ci visse minuti $5\frac{1}{2}$. Ne misi un altro in altrettanta aria comune di paragone, e visse minuti sette.

Quando si volesse supporre, che qualche poco di aria deve essersi perduta nell' atto di coprire il candelino acceso per l' azione del fuoco, converrebbe diminuire un poco il $\frac{1}{30}$, e forse ridurlo ad $\frac{1}{40}$ o poco meno, che io non credo. Ma in tutte le ipotesi, che si vorran fare, sarà sempre vero, che la diminuzione è piccolissima, onde non è poi maraviglia, che l' aria sia peggiorata di sì poco, e che si possa ancor respirare dagli animali in tale stato. La pochissima aria fissa, che si è formata, è un nuovo argomento per assicurarci anche di più che si è schiuso poco flogisto dal candelino, e che in conseguenza di poco deve anche esser peggiorata l' aria rinchiusa. Io trovo qui come per tutto altrove, che l' aria resta alterata in proporzione di quel ch' è diminuita.

E' vero che un lume vi si spegne, e che un animale seguita a vivere; ma questo non prova altro, se io non erro, se non che l'aria, che lascia vivere un animale, non può lasciar ardere un lume, e che un'aria infetta è più nociva alla fiamma, che alla vita animale, talchè non altro se ne può dedurre a parer mio, se non che la vita dell'animale non è una fiamma, non è un lume acceso, e che la vita è più tenace della fiamma.

E' molto probabile, che i celebri Chimici Svezzesi non si sieno serviti del metodo della vescica da me praticato, nè di qualche altro analogo ad esso, ma che abbiano coperto il candelino probabilmente molto maggiore del mio, e già acceso molto prima col recipiente. In questi casi la diminuzione è assai più grande a motivo del calore, che rarefa l'aria avanti di coprirla col recipiente, ed esce anche più dagli orli di esso, quando si fa uso di piccoli recipienti, in cui si trova diminuita fino di $\frac{1}{4}$.

Non posso temere d' alcuno errore nella mia sperienza atteſo la maniera di farla, ed eſſendo tale che con eſſa ſi sfuggono tutte le difficoltà, e circoſtanze, che poſſono renderla equivoca; e poi queſta eſperienza è affatto conforme a moltiſſime altre da me fatte nelle medeſime circoſtanze.

Per riſpondere alla terza difficoltà, cioè del ſangue, che non diminuiſce le arie ſane, io accennerò qui in poche righe i riſultati di quattro eſperienze, che par che non ammettano alcuna riſpoſta. Introduſſi quattro pollici cubici di aria deflogiſticata dentro di un vaſo di vetro pieno di mercurio attraverſo del mercurio medeſimo, che era in una vaſca col vaſe roveſciato. Il mercurio era ſtato riſcaldato di prima fino al calor del ſangue umano, come ancora il vaſo. Riempii di ſangue ancor caldo una boccia calda capace di una libbra di acqua, il quale eſciva a torrenti dalle carotidi di un caſtrato; e riempiuta in modo, e coperto il collo con un dito, che non ſi vedeſſe bolla alcuna di aria nella boccia, e nel ſangue, lo introduſſi ſubito attraverſo il mercurio nel vaſo, dove era l'aria deflogiſticata. Scoſſi allora il vaſo ſul mercurio per tre minuti, e portato ſull'acqua ne feci ſortire tutta l'aria del vaſo, che era in bollicine minime, e difficili ad unirſi inſieme. Sparite le bollicine miſurai l'aria, e trovai che era diminuita di $\frac{1}{4}$ giuſto. Eſaminato la ſua bontà col mio Evaerometro ſecondo il mio metodo, trovai che dava coll'aria nitroſa cavata dal mercurio poco prima 70. 32. 66. 166. quando prima di ſcuoterla col ſangue dava 70. 33. 23. 123. Era adunque peggiorata ſenſibilmente, e nel tempo ſteſſo diminuita.

Ripetei queſta eſperienza nelle medeſime circoſtanze di ſopra, ma ſenza ſcuotere punto il vaſo, e laſciai il ſangue così a contatto dell'aria per tre minuti. Cavata allora l'aria come ſopra, trovai che non era ſenſibilmente diminuita, e colla nitroſa diede 70. 32. 40. 120. Era adunque un poco peggiorata in bontà, benchè non diminuita sensibilmente, o pochissimo assai, ma era molto migliore, che nella prima esperienza, dove fu scossa col sangue.

Volli fare due altri sperimenti nelle stesse circostanze di sopra, ma coll'aria comune. Nella prima di queste due ultime esperienze scossi l'aria comune col sangue per tre minuti, e ritrovai che l'aria era diminuita di $\frac{1}{7}$. Trattata coll'aria nitrosa diede 126. quando l'aria comune prima di scuoterla col sangue dava 111. Questa aria era adunque diminuita, e fatta peggiore nel tempo stesso.

Nella seconda esperienza lasciai a contatto dell'aria il sangue per tre minuti, ma senza scuoterlo punto. Cavata l'aria, che non trovai scemata, ma piuttosto accresciuta un poco, forse di una bollicina, o due, coll'aria nitrosa diede 111. Questa aria non era adunque nè diminuita, nè peggiorata.

Queste quattro esperienze, se io non erro, dimostrano chiaramente, che il sangue può benissimo diminuir le arie respirabili, e renderle peggiori. E' vero che il sangue della quarta esperienza nè ha diminuita l'aria, nè l'ha peggiorata punto; ma convien riflettere, che l'aria non istette a contatto del sangue, che tre soli minuti; e che non furono scossi i due fluidi insieme, onde non si toccavano fra loro, che con due soli strati sottilissimi. Ed in fatti quando si scossero que' fluidi fra loro nella terza esperienza, vi fu diminuzione di aria, e deterioramento di bontà, che forma una dimostrazione completa. Che se nella seconda esperienza ci fu peggioramento di bontà senza diminuzione sensibile dell'aria deflogisticata, non deve parere strano, perchè la scala della bontà dell'aria nel mio strumento, e col mio metodo è molto più sensibile di quel che fosse il metodo praticato da me nel misurare la diminuzione dell'aria prodotta dal flogisto. Dove poi fu scossa l'aria deflogisticata unitamente col sangue, seguì maggior diminuzione

nuzione, e maggior deterioramento di bontà, che combina perfettamente con tutti gli effetti del flogisto colle arie respirabili, e coll'aria purissima. Io non so concepire esperimento, che si accosti più allo stato naturale del sangue, che passa per il polmone dell'animale vivente, di quelli da me riportati sopra. Il passaggio del sangue dai vasi nel mercurio era fatto dentro due secondi o poco più. Il sangue conservava il suo calor naturale per tutti i tre minuti. Quando era scosso, moltiplicava i suoi contatti sull'aria, come succede appunto nel polmone, e nel breve tempo di tre minuti non si può credere che il sangue perdesse nulla delle sue qualità primitive.

Si obbietterà forse che l'aria in una respirazione non sta a contatto delle vescichette polmonari, che quattro in cinque secondi, non già 20. o 30 volte di più, come nelle esperienze fatte da me, e riportate sopra; onde non esser maraviglia, se l'aria è poi diminuita notabilmente, e peggiorata. Ma si deve riflettere che una porzione dell'aria, che sorte dal polmone nella espirazione, è aria in parte delle inspirazioni fatte avanti. In secondo luogo, e questa io credo la principal ragione, il sangue nel polmone è diviso, suddiviso in infiniti vasi sempre minori, onde presenta una immensa superficie all'aria inspirata, la quale è parimente moltissimo divisa, e distesa nelle innumerabili vescichette polmonari: laonde i contatti fra il sangue e l'aria nel polmone sono incomparabilmente di più, che i contatti del sangue, e dell'aria scossi insieme dentro d'un vaso sul mercurio. Si aggiunga a tutto questo la gran velocità, con cui scorse il sangue nel polmone; e si troverà che anche per questa cagione gli effetti del sangue polmonare sull'aria inspirata devono esser grandissimi, talchè non deve parerci punto strano, che si trovi l'aria espirata sensibilmente diminuita, e peggiorata.

Una ricerca molto interessante rimane a farsi anche dopo le quattro esperienze sul sangue e sull' aria riportate di sopra, ricerca che può avere la più grande influenza nell' economia animale, e che può mostrare i veri usi del polmone, viscere tanto necessario alla vita. Consiste in sapersi se vi è alcuna nuova produzione di aria, ossia accrescimento di fluido elastico, quando l'aria è in contatto del sangue.

L'aria delle quattro esperienze di sopra si è misurata nell' acqua, e si è scossa in essa per liberarla dall' aria fissa se se ne fosse trovata in quelle circostanze; e perchè le mie esperienze procedessero con metodo io ho creduto di dover cominciare dal lasciar l'aria, ed il sangue tranquilli dentro i vasi, per osservar quello, che può il sangue sopra l'aria col solo suo contatto, e nel tempo stesso ho cercato di misurar l'aria sul mercurio, e non sull' acqua, come avevo fatto di prima. Mi son servito di aria deflogisticata, perchè i risultati fossero maggiori, e meno equivoci. Nel far queste esperienze si richiede molta destrezza e abitudine nell' osservatore. Il sangue si coagula poco dopo introdotto nel vaso anche sul mercurio caldo, onde riesce poi difficile di cavarne tutta l'aria, come conviene, per misurarla. Unitamente coll' aria tende ad escire il sangue coagulato, che bisogna in qualche parte rompere, perchè esca l'aria sola; esce in ogni modo coll' aria un poco di sangue, o di siero rosso ancora sciolto. Io soglio mettere una rete di ferro fitta nel fondo del vaso, dove è il sangue dopo i tre minuti dell' esperienza, per impedire che non escano le parti coagulate, e ricevo l'aria dentro d'un bicchiere pieno di mercurio, ed immerso nella vasca medesima, dove è il vaso, che contiene il sangue, e l'aria. Fatto questo immergo sotto il mercurio delle carte succianti, e sottili, e so in modo, che restino private di quel poco di aria, che potevano avere attaccata in minime bollicine sulla superficie. Il peso del mercurio, ed un leggier moto delle carte basta per far tutto queſto. Fo allora paſſare queſte carte nel bicchiere, e tutto il ſangue, o umido roſſo reſta aſſorbito nel momento. Levate dal bicchiere le carte colla mano, reſta l' aria aſciutta, ed in iſtato di miſurarſi.

Introduſſi in un vaſo pieno di mercurio ſei poll. cub. di aria deflogiſticata della ſeguente bontà 75. 45. 35. 125. Il mercurio ed il vaſo avevano il grado del calor del ſangue.

Riempii di ſangue colante dall' animale la ſolita boccia prima riſcaldata, e lo feci paſſare nell' iſtante attraverſo il mercurio nel vaſo dell' aria. Lo tenni in queſto ſtato per tre minuti, e lo cavai nel modo accennato di ſopra, e lo miſurai eſattamente. L' aria era creſciuta di più di $\frac{1}{5}$. La portai allora ſull' acqua, e la agitai un poco per iſpogliarla di aria fiſſa, e l' aria ſcemò non ſolo del quinto, di cui era creſciuta, ma ancora di un ſettimo della prima ſua quantità. La ſua bontà era 78. 55. 125. 255. cioè molto peggiorata.

Queſto eſperimento dimoſtra, che il ſangue non ſolo peggiora la bontà dell' aria col puro contatto, e la diſpone ad eſſer diminuita ſull' acqua, come ſi è veduto ancora nelle altre eſperienze riportate di ſopra, ma di più accreſce il volume dell' aria primitiva almeno di $\frac{1}{5}$ d' aria fiſſa eſtranea, oltre un altro ſettimo della quantità primitiva, che ſi trova eſſere anch' eſſa aria fiſſa.

Queſti nuovi ed inaſpettati riſultati hanno di che ſorprendere il Fiſico, è vero, ma ſono affatto conformi ai moltiſſimi altri da me ſcoperti ſull' aria fiſſa, che ſi produce dagli animali chiuſi dentro vaſi di aria deflogiſticata a contatto del mercurio. Queſte mie eſperienze furono fatte a Londra nel 1778, e 1779; e prima a Parigi, e furon quelle che mi fece dire al mio Amico, e valente Filoſofo Sig. *Ingen-houtz* che dal polmone ſortiva dell' aria fiſſa, la qual mia opinione, come molte altre, è ſtata attaccata con ragionamenti puri e non con eſperienze.

Benchè questo non sia il luogo di dare alcun dettaglio di esse esperienze sopra questa materia, essendo riservate per un mio Trattato particolare *sulla respirazione degli animali* ; ciò non ostante mi si permetterà qui di accennare un risultato generale , perchè si vegga sopra quali fondamenti io ho permesso che si avanzasse quella mia idea nell'Opera del mio Amico ,e quanto è uniforme ai risultati dell' esperienze di sopra fatte sul sangue. Questo resultato , che è cavato da più di 100 esperimenti, tende a dimostrare che una parte dell' aria fissa, che si trova nei recipienti, in cui si sono lasciati morir gli animali , si deve al polmone , e non già al solo flogisto polmonare , come si è creduto fin ora . Il Sig. Cavalier *Landriani* celebre Professor di Fisica sperimentale in Milano ha creduto di dovere impugnare la mia opinione dell' aria fissa, che sorte dai polmoni, e che si unisce all'aria inspirata dagli animali ; e l'ha fatto con alcune sue particolari ragioni, che noi esamineremo scorrendo, giacchè egli c' invita gentilmente a farlo. Mi si permetta che io porti le sue medesime parole per conservare in tutta la sua forza le difficoltà da lui proposte. Alla pag. 76. 77 della sua opera, che ha per titolo *Opuscoli Fisico-Chimici* . Milano 1781. scrive ,, Nelle mie ricerche Fisiche intorno alla salubrità dell' ,, aria ho fatto osservare, che l'aria dopo d'essere passata per li polmoni intorbida l'acqua di calce ,arrossa la tintura di turnesole... in somma presenta tutti ,, quanti i fenomeni conosciuti dell' aria fissa . E conchiusi quindi che quest' aria fissa era generata nella ,, respirazione dal flogisto, che perspirando dai polmoni si unisce all' aria atmosferica, e la cangia in aria ,, fissa nello stesso modo, con cui l'aria atmosferica negli ,, altri processi flogisticanti viene cangiata. Ma il Sig. ,, Ab. *Fontana*, siccome almeno viene annunziato dal ,, chiarissimo Sig. *Ingen-houtz*, è d' opinione che quest' ,, aria fissa , di cui trovasi caricata l' aria dopo essere

„ passata per i polmoni, non derivi dal flogisto, che „ si svolge da essi, e che unendosi all'aria atmosferica „ la cangia in aria fissa; ma pare che egli piuttosto „ inclini a credere che una gran quantità di aria fissa „ sia generata nel nostro corpo, e che questa esca pei „ polmoni nella respirazione. L' opinione d'un sì ec- „ cellente Fisiologo è per me tropo autorevole per „ non farmi dubitare della mia opinione riguardo all' „ origine di quest' aria fissa polmonare; ma prima di „ sottoscrivere alla sua opinione vorrei che si riflettes- „ se che nei fluidi animali, e segnatamente nel sangue „ non si trova una gran quantità di quest' acido mo- „ fetico, che si suppone esalare dai polmoni. Inoltre „ non si fa intendere, come mai quest' aria fissa possa „ essere dai polmoni depositata nell' aria atmosferica, „ perchè quando anche questa esistesse nel sangue, par- „ rebbe sempre strano che lo abbandonasse per unirsi „ all' aria atmosferica, colla quale ha pochissima affi- „ nità: altronde siccome ogni volta che l' aria atmo- „ sferica si flogistica, si genera sempre molta aria fissa, „ parrebbe che al flogisticamento della respirazione at- „ tribuire più che ad altro si dovesse quest' aria fissa „ polmonare; tanto più che dovrebbe il volume dell' „ aria respirata trovarsi cresciuto, e non diminuito, qua- „ le si trova per l' addizione dell' aria fissa, che si sup- „ pone continuamente emanare dai polmoni. Ma il Sig. „ Ab. *Fontana* avrà soddisfatto pienamente, e superior- „ mente a queste riflessioni, ed attenderò dal medesimo „ gli opportuni rischiaramenti circa questo importante „ articolo Fisiologico.

Il Sig. *Landriani* fonda le sue difficoltà sopra questo passo che egli cava dall' opera di M. *Ingen-houtz*. *Abbè Fontana found that an animal brething in either common or dephlogisticated air renders it unfit for respiration by communicating to it a considerable portion of fixed* *air wich generated in our body and thrown out the lungs as excrementious.*

Io era a Londra nel 1779. quando comunicai al mio rispettabile Amico M. *Ingen-houtz* il risultato di diverse mie esperienze sopra la respirazione degli animali, risultato che egli inserì nella sua bellissima opera intitolata *Experiments and observations upon vegetables.*

Il risultato delle mie esperienze si riduceva a provare, che non tutta l' aria fissa, che si trova nell' aria espirata dagli animali, era l' effetto del flogisto polmonare, ma che una parte dell' aria fissa veniva dal polmone medesimo.

Io non ho poi mai detto a M. *Ingen-houtz* in nessun luogo, nè in nessun tempo, che non si formi dell' aria fissa col mezzo del flogisto polmonare in quelle mie esperienze, che gli comunicai; ma bensì ho detto, che sorte anche immediatamente dal polmone, e che ne sorte in quantità, senza definire se sia il quarto, l' ottavo, o più o meno, nè il passo citato del mio Amico dice diversamente. Nè io so d' aver mai detto, o scritto che l' aria fissa, che sorte dai polmoni, sia generata dentro del corpo, potendo essa trovarsi benissimo nei cibi, e nel chilo.

Mi si obbietta inoltre dal Professor milanese, che non si trova nel sangue una gran quantità di aria fissa; ma quando ancora fosse dimostrato da sicure esperienze, il che fin ora non si è potuto fare per quanto a me pare, che si trovi pochissima aria fissa nel sangue, o per meglio dire nel polmone, la pochissima che si concede potrebbe bastare nel mio caso, giacchè nell' esperienze da me fatte l' animale non moriva ad un tratto, ma dopo un tempo considerabile; e si sa che il sangue, e gli altri umori scorrono nel polmone con gran velocità presentando all' aria delle vescichette una immensa superficie.

Si obbietta ancora dall' illustre Professore, che pare ſtrano che l' aria fiſſa abbandoni il ſangue per unirſi all' aria dell' atmosfera, colla quale ha pochiſſima affinità. In queſta difficoltà ſi ſuppone, ſe io non m' inganno, che l' aria fiſſa non poſſa ſortir dai corpi in virtù della ſua propria forza, e delle ſue proprie qualità, ma ſolo per una forza eſterna; nulla di queſto ſi vede provato dal noſtro Profeſſore, ma bensì ſuppoſto.

L' aria fiſſa ſorte dai fluidi in mille caſi, ſenza che vi ſia biſogno di affinità alcuna, come tutte le eſperienze dimoſtrano. Se i cibi, ſe il chilo introduceſſero nella maſſa degli umori una più gran quantità di aria fiſſa, ch' eſſi non poſſono ritenere, l' aria fiſſa ſortirà a diſpetto delle non neceſſarie affinità, quando quei fluidi ſcorrono per i polmoni. Si ſeguita ad obbiettare, che quando ſi uniſce il flogiſto all' aria comune ſi genera aria fiſſa; e di qui ſi vuole inferire, che ſi debba piuttoſto attribuire l' aria fiſſa al flogiſto polmonare, che ad altro. Queſta rifleſſione fatta a propoſito dal noſtro illuſtre Autore è molto ragionevole, ma non ſempre quello, che pare più ragionevole, è ancora il più vero. Le mie eſperienze annichilano affatto quella difficoltà di veriſimiglianza, la quale porterebbe di più in ſul falſo, quando ſi voleſſe qui far vedere, che io abbia ſoſtenuto che tutta l' aria fiſſa deriva dal polmone, e nulla dal flogiſto.

Si ſeguita ad obbiettare dal Profeſſore contro di me, che dovrebbe il volume di aria reſpirata dagli animali trovarſi creſciuta, e non diminuita per l' addizione dell' aria fiſſa, che ſi ſuppone continuamente ſortire dal polmone, quando ſi oſſerva che è diminuita.

Io ho ſempre creduto, che quando due cagioni o principj tendono l' uno a diminuire una quantità l' altro ad aumentarla, tre caſi molto differenti foſſero poſſibili, e non già un ſolo, come qui ſi ſuppone dall' illuſtre Profeſſor milaneſe. Se per eſempio una fonte riceve continuamente dell' acqua, e ne perde continuamente, può l' acqua della vasca crescer sempre, scemar sempre, e può nè crescere nè scemare.

Non so vedere adunque perchè possa continuamente emanare aria fissa dal polmone, e ciò non ostante trovarsi diminuita l'aria inspirata dal flogisto del polmone.

Finisco con rilevare, che l' ipotesi che si abbraccia qui dal celebre Sig. *Landriani* sulla precipitazione dell' aria fissa dall'aria comune, non è appoggiata che a dubbie esperienze, ed inconcludenti; e che l' altra ipotesi da lui abbracciata sul flogisto, che sorte dal polmone, non comincia ad esser sostenibile che dopo gli esperimenti riportati da me contro la teoria de' Signori *Scheel*, e di *Bergman*, esperimenti, che il Sig. *Landriani* non conosceva sicuramente quando egli adottò quelle due ipotesi, come due verità di fatto, e come se fossero state dimostrate.

Il dotto Professor milanese par che si applichi seriamente da qualche tempo in qua agli studj Fisiologici; e noi ci rallegriamo di cuore con lui, perchè molto deve sperare la Fisica dal suo talento, e dallo spirito di ricerca, e di analisi che dimostra in queste materie.

Io non avrei mai pensato a rispondere a' suoi obbietti, se egli medesimo non mi avesse, quasi direi, gentilmente invitato a farlo; e se io non vedessi che tratto tratto egli si compiace nelle Opere, che va pubblicando, di onorare delle sue difficoltà le mie particolari opinioni. Della qual cosa io devo sapergli grado moltissimo, perchè così mi darà occasione subito che avrò un poco d' ozio d' intraprendere un nuovo esame delle cose da me pubblicate, e da lui combattute, e di rigettarle, se false, o di confermarle, se vere con nuovi argomenti, e con nuove esperienze. In questa maniera la verità, e la scienza ne trarranno de' vantaggi reali, e il pubblico ci saprà grado delle nostre comuni ricerche, e differenze di pareri.

Ma ritorniamo all'azione del polmone sopra dell'aria ossia

ossia per parlare con più di esattezza, agli effetti del sangue sulle arie respirabili. Si è veduto a non poterne più dubitare, che il semplice contatto del sangue coll'aria deflogisticata è sufficiente per peggiorarla anche dopo pochi minuti, e che il sangue somministra una gran quantità di aria fissa all' aria deflogisticata. Si sa poi d' altronde che il flogisto in generale diminuisce tutte le arie respirabili, e le diminuisce tanto più quanto sono migliori, e quanto sono migliori tanto maggior quantità si trova di aria fissa dentro di esse.

Non dubito adunque nel caso nostro che il flogisto del sangue non abbia diminuito sensibilmente l' aria deflogisticata. Ma siccome resta ignota la quantità diminuita dal flogisto, non è possibile di poter dire con esattezza quanta aria fissa sia sortita dal sangue, e mescolata coll' aria in quelle mie esperienze. Noi abbiamo trovato che era cresciuta sul mercurio l' aria introdotta di $\frac{1}{7}$; onde si dovrà dire, che l'aria fissa sortita dal polmone in tre minuti era certamente di $\frac{1}{7}$ almeno.

Questi esperimenti sul sangue per quanto mi paressero sicuri non potevano però rendermi ancor tranquillo. Erano troppo pochi da una parte, e restava ancora da sapersi, se le altre arie erano aumentate, o no, sul mercurio non solo a sangue tranquillo, ma ancora a sangue agitato. Mi pareva ancora che dovessero essere importanti per la Fisica le alterazioni, che potevano subire col sangue le due arie flogisticate, ed infiammabili; mi risolvetti adunque di far le seguenti esperienze.

La mia prima esperienza fu sopra l' aria deflogisticata. Le dosi delle arie, e del sangue sono sempre state le medesime di sopra. L'aria deflogisticata, di cui mi servii, dava colla nitrosa 75. 45. 35. 135. Agitai per tre minuti i due fluidi sul mercurio, e trovai che l'aria era cresciuta sul mercurio da 14 parti a 15 $\frac{1}{2}$. Scosſa nell' acqua diminuì d' $\frac{1}{25}$ della prima quantità. Coll' aria nitroſa diede 80. 67. 175.

E' mirabile che queſt' aria a ſangue agitato ſia aumentata di meno, che a ſangue tranquillo; così merita attenzione il vedere che è diminuita di meno a ſcuoterla nell' acqua, che nelle antecedenti eſperienze, e nel tempo ſteſſo, che ſia ſtata di molto peggiorata.

Ma quello che pare innegabile è, che il ſangue accreſce la maſſa dell' aria deflogiſticata che gli ſta a contatto, o ſi ſcuota, o no, che queſto accreſcimento è aria fiſſa, e che vi è una vera diminuzione dell' aria primitiva, come ſi oſſerva dopo levata coll' acqua, e ſpogliata dell' aria fiſſa.

L' aria comune a ſolo contatto col ſangue crebbe ne' ſoliti tre minuti ſul mercurio da 14 parti a $\frac{1}{17}$. $\frac{1}{3}$. La ſcoſſi nell' acqua, ed il reſiduo era ancora $\frac{1}{14}$ di più della primitiva quantità. Colla nitroſa diede 116, quando quella di paragone dava 111.

Ripetei l' eſperienza ſcuotendo il ſangue coll' aria comune; ma una circoſtanza fece che non poteſſi oſſervare, ſe era creſciuta ſul mercurio. Scoſſa poi nell' acqua ſcemò quaſi di $\frac{1}{4}$. Colla nitroſa diede 135. Era adunque molto più peggiorata, che nell' eſperimento di ſopra. Ma nell' una, e nell' altra eſperienza ſi vede una produzione grande di aria fiſſa.

Paſſai all' aria infiammabile, che non era diminuibile dalla nitroſa, e la laſciai a contatto del ſangue per tre minuti. Crebbe ſul mercurio di quaſi $\frac{1}{14}$. Scoſſa nell' acqua ſi riduſſe a meno ſenſibilmente del primo volume di circa $\frac{1}{20}$ scarso. Al lume arse con esplosione. Coll'aria nitrosa diede 185.

Ripetei l'esperienza scuotendo il sangue, e crebbe da 14 a 18 $\frac{1}{2}$. Scossa poi nell' acqua si ridusse a 14 $\frac{1}{4}$. Col lume fece esplosione. Colla nitrosa diede 165.

Passai all' aria flogisticata, che lasciai al contatto del mercurio, e che non era diminuita dall' aria nitrosa. Sul mercurio crebbe da 14 a 15. Scossa nell' acqua si ridusse a poco meno del suo primo volume. Spense più volte un lume. Colla nitrosa diede 185.

Ripetei l'esperienza coll' agitare il sangue, ed appena crebbe l'aria quando fu sul mercurio. Scossa nell' acqua diminuì quasi di un sesto. Colla nitrosa diede 165.

Per rispondere alla quarta difficoltà dell' aria infiammabile, che si respira impunemente, e che perde la sua infiammabilità dopo respirata, io posso cominciare dall' assicurare appoggiato ad un immenso numero di esperienze, che l' aria infiammabile non è un veleno a respirarsi, come non lo è ancora l' aria flogisticata a differenza dell' aria fissa, che deve considerarsi come veleno, e come un fluido malfacente capace di alterar di per sè l'economia animale, anche allora ch' è unita a molta aria comune, e fino a gran quantità di aria deflogisticata la più pura, benchè il polmone possa scaricarsi di tutto il suo flogisto liberamente. Tutte queste nuove verità, e moltissime altre analoghe, sono appoggiate ad un immenso numero di esperienze fatte da me sopra la respirazione degli animali fin da quando era in Parigi, e che ho comunicato a' miei Amici di là, ed in Londra, e fra questi ai Signori *Cavallo*, ed *Ingen-houtz*, ed al Sig. *Kirwan*, senza parlare del Sig. *Giovanni Fabroni*, che gli ha veduti tutti coi proprj occhi, ed ha voluto assistervi. L'aria infiammabile adunque va considerata come non aria, per rapporto agli usi ordinarj del polmone. Laonde se nel polmone, dopo fatta l'espirazione, rimanessero soli 100 poll. cub. di aria comune, si potrà seguitare a respirarla rinserrata in una vescica, e servirà alle solite funzioni per qualche tempo, benchè un poco peggiorata. L'aria infiammabile di sua natura innocente non può nuocere all'aria animale, nè può impedire, che il polmone non eserciti le sue ordinarie funzioni qualunque esse sieno; che anzi può fino esser utile in qualche maniera all'animale medesimo, perchè può distribuire per tutti i bronchi, e per tutte le vescichette polmonari l' aria comune, che nella nostra ipotesi era 100 poll. cub., e di cui il polmone non si vuota mai affatto, e gonfiarne le vescichette come prima. Laddove la sola aria comune non avrebbe potuto fare che men bene con danno dell' economia animale, giacchè si sa che quando le vescichette polmonari sono flacide, e schiacciate, il sangue è arrestato almeno in parte, e la circolazione è nel più gran disordine.

Per altro è poi certo, che dopo una fortissima, e violenta espirazione non si respira l' aria infiammabile, che per poco tempo, come l' ho fatto vedere in una mia Memoria pubblicata nelle Transazioni Anglicane sopra di questa materia, alla quale mi riporto intieramente. Devo però avvertire che quando io feci in Londra quella mia esperienza, in cui non potei inspirare che tre sole volte l' aria infiammabile, io dovetti probabilmente impiegar molto tempo nel far quella violentissima espirazione che precedette l'esperienza, e forse ancora le tre inspirazioni furono fatte da me con lentezza, giacchè ho trovato nel ripeter quell'esperimento delle differenze sensibili, ed ho potuto respirar l' aria infiammabile fino sei in sette volte. Ma tutto questo sempre più mi persuade, che l'aria infiammabile non è nociva di sua natura, e che va considerata come non aria. L'istesse esperienze ho fatto respirando l'aria flogisticata, ed i risultati sono stati poco differenti. Talchè questi risultati, ed i moltissimi altri fatti sugli animali chiusi dentro vasi colle arie respirabili pure, e colle medesime mescolate in diverse quantità coll' aria infiammabile, flogisticata, e fissa dimostrano l'assurdità di molte ipotesi immaginate da' Fisici moderni sopra la morte degli animali nelle arie respirabili, e nelle arie non respirabili.

Conviene ancora riflettere che 20 respirazioni si fanno in meno assai di due minuti; onde non trovo punto straordinario, che si possa respirar l' aria infiammabile per 20 volte impunemente, giacchè si può tenere il respiro per quasi due minuti, volendo usar gran forza, anche dopo seguita l'espirazione naturale.

Ho fatto diversi esperimenti sopra la mia propria respirazione ne' differenti stati del polmone, ed ho potuto fissare i seguenti risultati, che fanno molto a proposito alla materia, che abbiamo fra le mani.

I.

Posso tener la respirazione per 60 secondi e più, dopo che il polmone ha fatto la sua inspirazione naturale.

II.

Posso tenerla per 48 secondi e più, dopo che il polmone ha fatto l' espirazione naturale.

III.

Posso tenerla per 37 secondi e più, dopo che ha fatto l' espirazione violenta.

IV.

Poſſo tenerla per 65 ſecondi e più, ſe il polmone è nell' inſpirazione violenta.

Si avverta che in un minuto ſi reſpira 16 in 18 volte. Si avverta che il più piccolo affanno può accelerar le reſpirazioni a ſegno di farne fino 25, e 30 per minuto, e per l'oppoſto in altri caſi le ritarda. Si avverta che i tempi indicati di ſopra variano ſecondo i differenti ſtati della noſtra macchina, e che le reſpirazioni ſi fanno molto lente verſo la fine.

Se nelle quattro eſperienze riportate di ſopra ſi fa paſſar l'aria, che ſi eſpira, dentro di una veſcica, e ſi continua a reſpirar quell' aria per mezzo di eſſa veſcica, cangiano ſenſibilmente i tempi ſiſſati di ſopra, e ſi reſpira per più tempo.

Nella prima eſperienza ſi arriva a reſpirar l'aria per 70 ſecondi e più.

Nella ſeconda, e terza eſperienza ſi dura parimente un tempo più lungo.

Nella quarta eſperienza ſi arriva a reſpirarla anche dopo 120 ſecondi.

Queſta diverſità di tempi par che dipenda dalla rinnovazione dell'aria, che ſi fa nel polmone ad ogni reſpirazione. Ad ogni inſpirazione ſi porta nelle veſcichette polmonari anche l' aria meno infetta della trachea, e de' bronchi, laddove ſenza veſcica, ed a polmone tranquillo l' iſteſſa aria più infetta, ch' era nella veſcichetta, peggiora ſempre di più, perchè non rinnovata. Vi ſi aggiunga il calore dell' aria, che è maggiore nel primo caſo, che nel ſecondo, e che porta dell' affanno al polmone, come ſi farà vedere altrove.

Nella quarta eſperienza ſi paſſa di poco i 65 ſecondi per motivo dello ſtato di violenza, e di diſtenſione indotta a tutto il polmone da una troppo eſorbitante moſſa di aria; ma è poi chiaro da sè che in quello ſtato ſi reſpirerà più lungamente, ſe ſi fa uſo della veſcica, sì perchè la quantità dell' aria è molto di più, che nelle altre eſperienze, sì perchè non ſi porta ai polmoni, che nella quantità ordinaria, ma ſempre rinnovata.

Rifletto ancora, che la traſpirazione inſenſibile non arriva a flogiſticar l' aria comune ſenſibilmente, come mi coſta da tutte le mie eſperienze, chechè altri ne abbiano ſcritto in contrario, forſe per aver fatto uſo di cattivi Evareometri, e per avere ignorato il metodo da me tenuto.

E' vero che nelle altre ſecrezioni più groſſe vi ſi trova del flogiſto; ma queſte ſortono dall' animale a grandi intervalli di tempo, ed in qualche caſo, ed in qualche animale ſi poſſono ſoſpendere per giorni e giorni ſenza incomodo almeno molto ſenſibile; talchè parrebbe che non rimaneſſe altra via all' animale, per iſcaricarſi della eccedente quantità di flogiſto, che ſi prende col cibo, e che va ad unirſi alla maſſa degli umori circolanti, che il polmone, e ſi ſa che la parte roſſa del ſangue è ricchiſſima di flogiſto.

All' altra parte della difficoltà, che l' aria infiammabile ceſſa d' infiammarſi dopo reſpirata, io non ſaprei, ſe non ſe opporre eſperienza ad eſperienza. Non mi è ancor riuſcito di privarla affatto della ſua infiammabilità quando la reſpiravo nelle veſcichette alla maniera dei Filoſofi Svezzeſi, e molto meno quando la reſpiravo ſull' acqua, dove anderebbe fatto queſto eſperimento, eſſendomi ſoſpette le veſciche per molte ragioni, che tralaſcio preſentemente di accennare. Ma non ſo veder genere d' eſperienza più deciſivo, che quello di far reſpirare agli animali ſul mercurio l' aria infiammabile meſcolata con altrettanta aria comune. Ho fatto uſo de' porchetti d' India, e ſon viſſuti in quell' aria ſette, otto, e ſino in nove minuti. La quantità di ciascuna aria da me adoperata era di 12 poll. cubici. In tutte le esperienze da me fatte ho trovato che l' aria s' infiammava, benchè respirata sì lungo tempo da quegli animali, e benchè fosse respirata fino a lasciarli morire. Non so veder nulla di più semplice, e meno soggetto ad equivoci.

Rifletto ancora, che potrebbe darsi benissimo il caso, che un lume si spegnesse nell' introdurlo dentro di un tubo d' aria comune, é di aria infiammabile respirata lungamente dal polmone. L' aria comune, se è specialmente in quantità fatta aria flogisticata e fissa nel polmone, impedirà che un lume vi arda, benchè vi sia nel tubo dell' aria infiammabile, e tanto più facilmente, quanto più il tubo sarà lungo, e stretto. Si sa che l' aria infiammabile non arde senza aria comune, e che l' aria flogisticata e l' aria fissa spengono i lumi.

Ma si conceda pure ai due celebri Fisici Svezzesi che l' aria infiammabile cessa di esser tale dopo respirata, e che perde il suo flogisto, e lo dà al polmone; non per questo ne seguirà necessariamente, che il polmone assorba il flogisto dell' aria comune dall' aria deflogisticata. L' aria infiammabile certamente pregna di flogisto si trova obbligata per lungo tempo a strisciare sopra un numero infinito di minimi vasi rossi polmonari. Ma non veggo poi punto impossibile, che nel mentre che l' aria comune riceve il flogisto da una sostanza, che ne ha più di lei, come è il sangue per rapporto all' aria comune, l' aria infiammabile ne dia per l' opposto al sangue, che può avere meno di essa. Può adunque l' aria comune caricarsi del flogisto polmonare, e l' aria infiammabile essere impoverita del suo flogisto dal polmone, senza che si debba credere, che il polmone assorba il flogisto dell' aria atmosferica, quando ancora l' assorbisse dall' aria infiammabile. Questo è quello, che ho creduto di poter dire in fatti sopra le belle esperienze dei

dei due famosi Chimici Svezzesi intorno alla flogisticazione dell' aria nel polmone.

Si potrebbe qui obbiettarmi una esperienza dell' illustre Sig. Cav. *Landriani*, colla quale ha egli trovato, che l' aria flogisticata arriva ad ammazzare gli animali col solo tenerla a contatto della loro pelle senza respirarla punto. Egli assicura di avere osservato, che chiudendo una gallina dentro di una vescica piena di aria flogisticata col capo fuori del collo della vescica, la gallina muore ben presto. Io avevo chiuso dentro di un recipiente col capo fuori diversi animali in arie anche più micidiali dell' aria flogisticata, come per esempio l' aria fissa ecc., ma non avevo mai osservato, che gli animali avessero mostrato di soffrire per questo; lo stesso osservai più volte nell' aria infiammabile. Potrebbe parere ancora singolare che vi fosse un fluido aeriforme, permanente sull' acqua, che potesse uccidere sì presto col solo contatto della pelle. Ma tutte queste difficoltà non sono di nessun peso contro di una esperienza diretta. Ero adunque curioso di vedere io stesso un esperimento così sorprendente, e sì nuovo; e mi determinai di farlo più volte, e lo feci osservando rigorosamente il metodo del Sig. *Landriani*, e le cautele da lui prescritte: ma per quante volte io lo replicassi, che furono moltissime, non solo non mi morì nessuna gallina, ma nessuna mostrò nè anco di avere il menomo incomodo. Estesi le mie esperienze sopra i conigli, i porchi d' India, ed i piccioni; ma nessuno morì, o mostrò di soffrir punto in quell' aria. La vescica durava più e meno gonfia di aria flogisticata per il tempo dell' esperienza, benchè scemasse continuamente, ma poco a poco, e per gradi minimi.

Pensai di ripetere l' istesse esperienze in una maniera ancora più decisiva: desideravo che la vescica fosse egualmente piena di aria flogisticata per tutto il tempo dell' esperienza. Per questo mi servii di un recipiente di criſtallo a gran pancia capace di più di 1000 poll. cub. di aria, che aveva un'apertura nell'alto di circa un poll., e nel baſſo di 6 poll. e più.

Legai il collo di una gran veſcica al foro ſuperiore del recipiente, e fatto un taglio nella parte oppoſta della veſcica, v' introduſſi l' animale in modo che reſtaſſe tutto il capo fuori della veſcica. Fatto queſto, facevo uſcire l' aria comune dalla veſcica tenendo il recipiente immerſo nell' acqua. Quando l' acqua era vicina a entrare nella veſcica, introducevo ſucceſſivamente più migliaja di pollici di aria flogiſticata nel recipiente, e laſciavo che ſortiſſe l' aria per gradi allargando un poco la veſcica intorno al collo dell'animale a proporzione, che entrava l' aria. Quando l' aria del recipiente doveva eſſer ridotta a pura aria flogiſticata, chiudevo in modo la veſcica con preſſioni eguali, e molleggianti, che l'aria non poteſſe ſortire più almeno ſenſibilmente da eſſa, ed immergevo il recipiente nell' acqua di più pollici, perchè la veſcica foſſe ſempre ripiena di aria flogiſticata. Ho fatto le mie eſperienze nelle galline, ne' piccioni, ne' conigli, ne' porchi d'India ecc. e neſſuno mi è morto, o ha moſtrato di ſoffrire punto. Il metodo da me tenuto è ſemplice, le mie eſperienze ſono molte, onde non poſſo temere d' eſſermi ingannato. Laſciavo gli animali nell'aria flogiſticata ſino due in tre ore.

Il Profeſſor milaneſe crede, che l' aria flogiſticata della veſcica uccida gli animali col ſolo contatto eſteriore, perchè s' impediſce, dice egli, con quell'aria la traſpirazione del flogiſto attraverſo la cute. Ma biſognerebbe prima di tutto che il valente Profeſſore provaſſe I. che ſi fa veramente queſta traſpirazione cutanea di flogiſto negli animali, II. che ſi fa in modo nelle galline da ucciderle in poco tempo, quando è impedita. La prima parte a noi par falſa almeno nell'applicazione, che ſe ne vuol far qui dal noſtro Autore per quanto abbiamo potuto rilevare dalle noſtre proprie eſperienze che daremo in altro tempo. La ſeconda è affatto inveriſimile, non appoggiata a fatto veruno, e contraddetta dalle mie eſperienze medeſime, che pubblicherò fra poco, ſopra la *reſpirazione degli animali*.

Non poſſo adunque convenire in neſſuno dei fatti riportati dall' illuſtre Profeſſor milaneſe ſugli effetti attribuiti da lui all'aria flogiſticata, e molto meno ſopra le eſperienze da lui fatte. Devo adunque pregarlo a voler ripetere le ſue eſperienze una ſeconda volta, perchè meritano la più gran conſiderazione; e tutti coloro, che amano le verità Fiſiche, e i fatti veri, gli ſapranno grado della pena, che ſi vorrà dare; e noi ſaremo i primi a convenire con lui che ci ſiamo ingannati, nè ci vergogneremo di confeſſarlo quando egli ci avrà dato quel dettaglio che è neceſſario perchè le eſperienze rieſcano anche agli altri. Chi ſperimenta può ingannarſi; ma tutto dobbiamo ſperare dalla conoſciuta ingenuità, ed amore per le verità utili del degno Profeſſore.

L'altra parte della nuova teoria ſtabilita dai due Fiſici Svezzeſi riſguarda la formazione del calore, la generazione dell'aria deflogiſticata, la reviviſicazione delle calci metalliche, e la diminuzione delle arie reſpirabili coi proceſſi flogiſtici, ed è forſe la più brillante, e dove ſpicca più il loro talento inventore. Credono adunque che la materia del calore ſia formata del flogiſto, e di aria puriſſima, e che in queſto ſtato paſſi liberamente attraverſo di tutti i corpi. Con queſti principj ſpiegano facilmente le reviviſicazioni delle calci de' metalli prezioſi, cioè col ſolo calore, e ſpiegano la formazione dell' aria pura chiamata da noi aria deflogiſticata. La materia del calore nel paſſare attraverſo i vaſi ſi decompone; il flogiſto attratto dalle calci metalliche le reviviſica in metallo; e l' aria pura abbandonata a sè ſteſſa, e fatta libera, ſorte dal collo del matraccio aria deflogiſticata.

Non so veder nulla di più semplice, e di più ingegnoso, e si spiegano, convien confessarlo, colla più gran facilità le diminuzioni delle arie pure coi processi flogistici, che sono sempre accompagnate dal calore.

Questa teoria si trova illustrata con sommo ingegno dal Cav: *Bergman*, ed applicata a quasi tutti i fenomeni della Chimica. Non poteva trovar campione più valoroso per sostenerla; ma da quel grand' uomo che egli è non l' avanza per una verità ancor dimostrata, ma per una teoria, o ipotesi, che spiega i fenomeni più difficili, ed esorta gli altri Fisici a travagliare sopra questa materia importante.

Io avrei però desiderato che fosse appoggiata a qualche esperienza diretta, o che si fosse immaginata tale esperienza, che dimostrasse all' osservatore imparziale, che le diminuzioni dell' aria pura provenissero da perdita di essa aria attraverso i vasi insieme col flogisto, quando diventa calore, non già da ristringimenti, e decomposizioni dell' aria medesima. In somma mi pareva che mancasse uno di quegli esperimenti, che il Gran Bacone da *Verulamio* chiamava *experimentum crucis*, e che egli desiderava, che si cercassero dal Fisico industre per istabilire, o per abbattere le teorie, e le ipotesi immaginate dai Filosofi. Non sempre però riesce di trovare di questi esperimenti, nè anco dai Filosofi più grandi, e più consumati, e suppongono un genio creatore nell' uomo; e a questa difficoltà sola si devono appunto le dispute interminabili sopra tanti punti importanti della Fisica, e della Chimica, che durano ancora, e che non finiranno sì subito.

Frattanto mi si permetta di riportar qui un esperimento, che a me pare fortissimo, e che rende alquanto sospetta quella nuova teoria. Ecco l' esperienza.

Si prende un' oncia di mercurio purissimo, e si mette in un matraccio di lungo collo, ed aperto al fuoco di sabbia. Se il collo è aperto, si calcina il mercurio per intiero dopo molti mesi, e si trova ch' è cresciuto di $\frac{1}{8}$ in circa del peso primitivo. Questo aumento di peso viene sicuramente dall' aria, perchè a vaso chiuso non se ne calcina sensibilmente, e quel poco che si calcina è in proporzione della quantità dell' aria, ch' è dentro del vaso, e l' aria si trova allora diminuita, e peggiorata in bontà. Si revivifichi ora col solo fuoco la calce del nostro matraccio, e si ricevano i prodotti in vasi adattati. Il mercurio ritornerà ad un' oncia come era prima di calcinarsi, e sortirà aria purissima dal collo, che pesata sarà precisamente un ottavo di oncia, cioè il peso, di cui era cresciuto il mercurio per l' aria certamente, che gli si era unita, o per meglio dire da materia cavata dall' aria. Qui non si fa vedere decomposizione alcuna di calore, perchè l' aria sortita è uguale in peso all' accrescimento della calce, e non maggiore. Se vi fosse stata la decomposizione del calore, e la produzione di nuova aria pura, che è uno de' suoi componenti, nell' ipotesi Svezzese, sarebbe sortita dal matraccio una più grande quantità di aria, e di un peso molto maggiore, perchè vi sarebbe stata tutta quella del matraccio, che era un ottavo di oncia, e l' altra del calore decomposto. Non so cosa si possa replicare a questa esperienza, dove vi è certamente la materia del calore, come nelle altre revivificazioni metalliche, senza che vi sia la decomposizione di esso, e la produzione di nuova aria deflogisticata.

Questo argomento può servire a spiegare molte altre revivificazioni metalliche, e produzioni di aria purissima senza bisogno di ricorrere alla decomposizione del calore, e senza suppor nota la composizione di quel principio sì poco conosciuta ancora dai Filosofi.

Se fosse permesso di azzardar qualche pensiero sopra questa materia sì oscura, potrei domandare se è poi un assurdo di pensare, che in quell' ottavo d' oncia di materia estranea accresciuta nel mercurio calcinato vi fosſe tanto di quel principio, che fa revivificare i metalli, che meſſo in moto dal fuoco foſſe attratto dal mercurio, che n'è ſpogliato, e ſitibondo, quando è in ſtato di calce, e ſi repriſtinaſſe così in metallo. In queſta ſuppoſizione la materia, che è nel mercurio, privata di flogiſto ſortirà aria deflogiſticata puriſſima. Ammeſſa queſta ipoteſi, ſi rende ragione di una infinità di fenomeni non prima inteſi.

Le calci metalliche non ſono affatto prive di flogiſto. Quelle calci, in cui ſi trova aria fiſſa, non ſono nè anco eſſe affatto prive di quel principio, sì perchè l'aria fiſſa non ne è priva nè anco eſſa, sì perchè alcune calci danno l'aria infiammabile coll' acido del fosforo, sì perchè altre calci unite all'acido vitriolico danno dell' aria vitriolica, cioè un'aria fatta elaſtica dal flogiſto, che a loro ſi è unito.

Conviene ancora riflettere che colla ſemplice unione degli acidi, e delle calci metalliche ſi cavano de' fluidi elaſtici, cioè de' fluidi fatti elaſtici dal flogiſto. La poca aria deflogiſticata, che ſi ottiene da certe calci coi puri acidi, non diſtrugge punto l'oſſervazione fatta ſopra, e il valente Chimico Svezzeſe il Sig. *Bergman* ſteſſo non crede poi prive affatto di flogiſto le calci metalliche, *interim tamen non penitus ſpoliata reperiuntur*, ſcrive egli e ne adduce delle forti prove. Vi è del ferro ſpatoſo, che non è punto tirato dalla calamita; ma appena vi ſi applica il fuoco, tramanda aria infiammabile, e fiſſa, ed allora è tirato per intiero dalla calamita. Se ſi voleſſe conſiderare il ferro nel primo caſo ſotto forma di calce, converrebbe credere, che vi foſſe unito un principio flogiſtico, che revivifica la calce in ferro, e forte ſotto forma di aria infiammabile.

Tutto queſto ci farebbe credere, che l' ottava parte di peſo accreſciuto al mercurio, che diventa calce col ſolo fuoco, non è tutto ſotto forma di aria pura inelaſtica, ma bensì di un compoſto della materia di quell' aria, e di flogisto, il quale messo in movimento dall'azione del fuoco vivo corre a revivificare il mercurio, con cui ha la più grande affinità; e l'altro componente fatto libero sorte sotto forma di aria purissima, cioè di aria privata di flogisto almeno in gran parte. Ma io non pretendo di stabilire una teoria sicura su de' principj certi, mancano le prove dirette, le esperienze decisive.

La bella esperienza riportata dal Sig. *Bergman* dell' aria, che si trova consumata nella palla, in cui egli lascia raffreddare la pasta de' tre metalli solubili all' acqua, non prova nulla in favore di quel sistema, perchè si suppone che la palla sia diminuita di peso, ma non si adduce nessuna esperienza, nessun fatto certo, che ci assicuri di questo.

L'istesso si deve dire delle ordinarie calci metalliche, che contengono dentro di sè una gran quantità della materia dell'aria, ed alla quale si deve il loro peso accresciuto, e che si cava da esse co' soliti mezzi.

Nè a me pare che provi molto in favore di quel sistema l' esperimento fatto dal Sig. *Bergman* col lume acceso, che consuma quasi affatto l' aria deflogisticata di un recipiente sul mercurio, perchè non apparisce da esso, che l' aria deflogisticata diventata calore se ne sia andata attraverso del vetro. Per l' opposto tutto concorre a far credere, che la materia dell' aria, perduta la sua naturale elasticità, si unisca al corpo, da cui è sortito il flogisto; ed in fatti si vede che allora quelle sostanze crescono di peso in proporzione appunto dell' aria diminuita, come si osserva del fosforo, del zolfo, del piroforo, che si fanno ardere nell' aria dentro vasi.

Ma poi non lasciano alcun dubbio le mie esperienze sul carbone. Queste esperienze furono da me fatte fino dai primi tempi, che ero a Parigi, e fra i molti che le videro mi basterà di nominare il Sig. *Duca di Chaulnes*, M. *Turgot* Ministro di stato, e il dotto traduttore di *Priestley* M. *Gibelin*. Si trovano dopo quel tempo citate da diversi testimoni. *Priestley* ne parla in più luoghi nella sua opera sulle *Arie* stampata a Londra fin dal 1778, e ristampata in francese nel 1782. dove alla pag. 77 si spiega così: *L' assorbition de toutes les especes d' air par le charbon est une grande decouverte de l' Abbè Fontana qui à bienvoulù me permettre d' en faire mention.*

Si faccia accendere il carbone, e quando è bene acceso, ed in pezzetti, si faccia spegnere dentro bocce ripiene di esso, e subito si chiudano. Raffreddate si pesino, e s' aprano poi nell' aria comune, o dentro vasi di note quantità di aria e galleggianti sul mercurio; le bocce dove è il carbone cresceranno di peso, e cresceranno in ragione dell' aria diminuita ne' vasi. Questo carbone poi messo nel vuoto, o immerso nell' acqua dà una gran quantità di aria, la maggior parte della quale è aria flogisticata, il restante è aria fissa con poca aria comune.

Se si spegne nel mercurio del carbone acceso, e si fa passare attraverso il mercurio senza toccar l' aria esterna in un recipiente, in cui vi sia dell' aria comune, si vede nell' istante diminuirsi quell' aria fino a non apparirne più un atomo. Se in questo stato si fa passare il carbone nell' acqua senza toccare all' aria esterna, sorte dal carbone in bolle circa $\frac{1}{5}$ dell' aria primitiva assorbita, la quale è perfettamente flogisticata. Sorte ancora dal carbone dell' aria fissa, che viene assorbita dall' acqua a proporzione, che se n' esce in bollicine. Il carbone arriva ad assorbire circa 6 volte il suo volume di aria in queste esperienze.

Si noti che il carbone assorbe in queste circostanze di sopra sei volte, ed anche più di aria deflogisticata; ma messo nell' acqua dà poche bollicine, e di un' aria molto migliore della comune, ma molto peggiore di prima.

Messo poi il carbone spento nel mercurio nelle arie infiammabili,

infiammabili, o nelle flogiſticate, appena aſſorbe il proprio volume di eſſe, ed immerſo come ſopra nell' acqua non dà ſenſibilmente aria veruna.

Mi ſi permetta di dare qui alcuni riſultati di eſperienze fatte col carbone ſpento nel mercurio, e poi introdotto attraverſo il mercurio in tubi alti 35 poll., larghi due, in cui ſi era meſſo una determinata quantità di aria comune. L' aria introdotta era circa 10 poll. ſcarſi. Mi ero accorto, che tenendo il tubo verticalmente ſortiva molta aria dal carbone, la quale veniva aſſorbita coll' inclinar il tubo all' orizzonte. Inclinai adunque il tubo a tal ſegno, che l' aria foſſe aſſorbita per intiero dal carbone. Allora ſituai il tubo a piombo; e laſciato così per qualche tempo, cavai dal tubo il carbone per mezzo di un filo ſottile di ferro attaccato ad una rete di ferro anche eſſa, e introdotta nella parte più alta del tubo, che ſtraſcinava ſeco il carbone. Cavato adunque il carbone miſurai ſul mercurio l' aria rimaſta nel tubo, e ſortita dal carbone per tolta preſſione eſterna, e trovai che era 6 poll. cub. per lo meno. La portai ſull' acqua, e la ſcoſſi, e ne fu aſſorbito mezzo pollice. Il reſiduo ſpenſe un lume, e diede colla nitroſa 185; onde vi erano nel carbone, che era circa due poll. cub., circa tre volte più di aria del ſuo proprio volume, e queſt' aria era per $\frac{1}{12}$ aria fiſſa, ed il reſtante aria quaſi affatto flogiſticata.

Ripetei l' eſperienza coll' aria deflogiſticata nelle circoſtanze di ſopra, il carbone era 4 poll. cubici, eſciron dal carbone ſul mercurio quattro poll. dell' aria. Il reſiduo ſcoſſo nell' acqua diminuì d' $\frac{1}{4}$. Coll' aria nitroſa diede 72. 42. 78. 178., quando prima dava 71. 38. 46. 90. 190. Era adunque ancora aria deflogiſticata, benchè reſa peggiore, e vi era con eſſa un poco di aria fiſſa.

Ripetei l' eſperienza coll' aria flogiſticata, ma il carbone, ch'era circa 5 poll. cubici, non ne afforbì, che il proprio volume. Scoffi il refiduo nell' acqua, e fu afforbito di $\frac{1}{6}$. Il reftante non fu diminuito punto dall' aria nitrofa.

Ripetei l' efperimento coll' aria infiammabile, e con fette poll. cubici di carbone, ne afforbì il proprio volume. Mifi il tubo orizzontale, fi trovò che vi era tutta la quantità primitiva di aria infiammabile, come me ne afficurai con mifure attuali. Scoffa nell' acqua diminuì fenfibilmente. Colla nitrofa non lo fu punto, ed il lume l' accefe come prima.

Io ho una lunghiffima ferie di efperienze fatte col carbone fpento nel mercurio e nel vuoto, che formano un nuovo ramo di Scienza fopra quefta materia, e principalmente ho de' rifultati inafpettati. Sopra le arie, che fi ottengono immergendo il carbone accefo ne' differenti fluidi, come negli acidi, negli olj, e nell' acqua medefima. E' mirabile che fi ottenga dell' aria infiammabile tuffando il carbone accefo nell' acqua anche diftillata, e potrebbe aver l' afpetto di paradoffo, fe fi domandaffe di cavar l' aria infiammabile da un corpo coll' acqua la più fredda. Ma mi rifervo di trattar quefta materia nel più gran dettaglio nella mia Opera fulle arie.

Quefte nuove efperienze ful carbone fomminiftrano de' gran lumi per la teoria delle arie medefime, e ci prefentano de' fenomeni nel tempo medefimo di difficile fpiegazione. Non s' intende per efempio come un pollice cubico di carbone poffa contenere tre volte il fuo volume di un' aria, che di comune è diventata aria flogifticata, cioè un' aria, ch' è difficile ad alterarfi fervendofi ancora de' mezzi più forti che la Chimica moderna fomminiftra, e che pare indeftruttibile, indecomponibile. Se effa conferva nel carbone la fua naturale elafticità, deve effer per lo meno tre volte più elaftica dell' aria comune, onde non s' intende come possa il carbone contenerla dentro di sè; se poi non è elastica dentro il carbone, come potrà escire quell' aria dal carbone subito che si diminuisce anche di poco la pressione del mercurio contro del carbone medesimo, avendo osservato che diminuita la pressione dell' aria esterna di un quarto, e di un quinto, ed anche meno assai, esce benissimo più e meno di quell' aria dal carbone? Siamo adunque sforzati di ammettere nel carbone una tal forza, che arrivi appena a vincere la forza sfiancante dell' aria, quando il carbone è premuto da tutto il peso dell' atmosfera; ma che appena si arriva a diminuire la pressione del mercurio contro del carbone, prevale la forza dell' elasticità dell' aria, e sorte colle qualità che abbiamo veduto.

Ma questa maniera di esaminare le forze secondo che i fenomeni lo richieggono, o di rappresentar gli effetti col suppor delle cause, che sieno in rapporto con essi, è piuttosto matematica, che fisica, e tende più a trovar le leggi di essi effetti, che le cagioni.

Io sono di parere che l' aria esca dal carbone, e si trovi in quella sostanza, come esce l' aria dall' acqua, e come l' aria si trova nell' acqua medesima. E quel che dico dell' aria per rapporto all' acqua, par che si debba dire di quel fluido elastico per rapporto a tutti i corpi, in cui si trova. Ho dimostrato negli anni addietro nella mia opera *Sur l' air nitreux & sur l' air deflogistiquè*, stampata a Parigi nel 1781., che l' aria comune non poteva trovarsi dentro dell' acqua in istato di elasticità. Considero l' aria nell' acqua in un vero stato di dissoluzione completa. Le molecole dell' aria in quello stato tendono in ogni istante a sortire dall' acqua per un principio, o forza che agisce instantemente contro di esse, ed escono in fatti subito che la pressione esterna sull' acqua è diminuita di tanto che prevalga la forza, che tende a farle sortire dall' acqua, così concepisco che l' aria si trovi nel carbone, cioè ridotta in molecole impercettibili non elaſtiche, ma tendenti a ſortire da quel corpo ſubito che la forza eſpanſiva, che le penetra, e che le ſtacca dal carbone, prevale. L'eſempio dell'acqua, che diventa vapore nel vuoto, e del mercurio medeſimo, che ſi riſolve in minimi corpiccioli nel vuoto più perfetto, dimoſtrano abbaſtanza, che regna queſta forza in tutti i corpi, e che la ſola preſſione eſterna dell'aria, o tolta, o diminuita, fa che ſi riducano in vapori i fluidi più inerti, e più peſanti. Io ſpero di poter dimoſtrare con tutta l'evidenza, di cui ſono capaci le verità ſiſiche, la realtà di queſto nuovo principio, ed il ſuo meccaniſmo.

Comunque ciò ſegua poco importa, purchè il fatto ſia vero, e ſi convenga, che tutti quegli effetti derivano dal principio flogiſtico, ch'è nel carbone. Non ſi può adunque più dubitare, che la diminuzione dell'aria, anzi la totale diſtribuzione di tutte le arie artificiali, e naturali non ſi facciano a ſcapito dell'aria medeſima, che ſi è introdotta nel carbone.

Merita ancora tutta la conſiderazione del Filoſofo penſatore il vedere, che ſi è trovato una materia, che aſſorbe tutte le arie per intiero, ſenza reſiduo alcuno, che fin'ora non ſi è ottenuto con neſſun altro proceſſo flogiſtico, e che deve render ſoſpette le teorie di quei Fiſici, che hanno formato l'atmosfera di $\frac{3}{4}$ di aria micidiale, e di $\frac{1}{4}$ di aria puriſſima col ſolo fondamento che non ſapevan diminuire l'aria comune, che di $\frac{1}{4}$, e che il reſiduo era mefitico, oſſia aria flogiſticata. Il carbone può diminuirla comunque, ed i reſidui ſono aria mal ſana, e può fino diſtruggerla affatto. In queſto caſo converrebbe dire, che l'aria atmosferica è fatta di ſola aria deflogiſticata, di ſola aria puriſſima, che è un aſſurdo, e ch'è contrario alla ipoteſi, che combattiamo. Il carbone è di tutte le ſoſtanze, o flogiſti, il ſolo conoſciuto fin qui che aſſorba tutte le arie naturali, ed artificiali sì ſalubri, che mefitiche, che ne aſſorba in sì gran quantità, che ne assorba con tanta rapidità, e che le assorba per intiero, cioè senza residuo alcuno di fluido elastico; ed in questo consiste principalmente, e non in altro la singolarità da me scoperta in quella sostanza. Nè si deve confondere il carbone con quelle sostanze, che assorbon l'aria naturale ad esse, e che hanno perduto per qualche accidente; ma la diminuzione dell'aria deve esser fatta dal solo flogisto, come è fatta dal carbone. Nè mi costa ancora da nessuna esperienza diretta, che nè anco le piante stesse in stato di vegetazione si possono paragonare col carbone per le distruzioni delle arie, e poi il principio che le produce non si prova il medesimo. Nè si creda che il carbone assorbe le arie solo a proporzione, che si raffredda, perchè fa il medesimo raffreddato comunque, e chiuso in vasi, e coperto di mercurio anche per anni.

Ma dopo ancora tutte le cose da noi rilevate contro la nuova Teoria del calore, non ero contento di me medesimo, nè tranquillo, e mi mancava una di quelle esperienze, che decidono delle controversie fisiche, e che non lasciano luogo a dubbj ulteriori.

Un nuovo esame sopra quella Teoria mi portò poco a poco a vedere, che era possibile di fare una esperienza diretta, e decisiva. Supposi adunque sciolto il problema in quistione alla maniera degli Analisti, e cercai quali erano le conseguenze immediate, che derivano, e se vi era mezzo alcuno di confermare coll'esperienza le conseguenze dedotte, e legate intieramente co' loro principj.

Supposta vera l'ipotesi che da noi si combatte, l'aria pura nell'unirsi al flogisto dentro de' vasi diventa calore. Il calore è dunque una sostanza fatta di due principj, che sono l'aria pura, e il flogisto. La materia del calore passa attraverso di tutti i corpi anche i più compatti, e si diffonde, e comunica ai corpi esterni. Si sa che l'aria è grave, e se ne conosce il peso. Noi non isbaglieremo gran fatto a supporre che un poll.cub. di aria comune è circa $\frac{1}{2}$ di grano, ma nel caso nostro non abbiamo punto bisogno di precisione, e prendendo ancora i dati più svantaggiosi vi è anche di troppo per l'applicazione, che ne facciamo. Il flogisto è corpo, e questo basta per crederlo pesante, benchè poi sia vero che se ne ignora il peso preciso, ma noi lo possiamo trascurare, e ci è affatto inutile. L'aria pura fatta calore col flogisto sorte dai vasi in cui si è formato il calore. La quantità della materia dovrà in quei casi diminuire dentro di essi vasi, e questa diminuzione sarà tanto più grande, quanto maggior quantità di aria è stata consumata per la formazione del calore.

Diversi metodi ho io immaginato per trovare con sicurezza, e facilità la materia perduta dentro de' recipienti; ma mi contenterò per ora di accennare un solo, che ho preferito agli altri. Avevo bisogno di gran bocce, o vasi, perchè il flogisto agisse sopra gran masse di aria, ma nel tempo medesimo cercavo di potere assicurarmi anche delle più piccole differenze di peso.

Per arrivare a soddisfare all'una, ed all'altra condizione ho fatto soffiare un gran numero di palloni di vetro sottili, e capaci dai 600 fino in 1000. poll. cub. di aria e più ancora. Queste palle finivano in un collo lungo quattro in cinque pollici, per il quale introducevo le diverse materie, di cui volevo servirmi, e chiudevo subito il collo ermeticamente. Allora pesavo ogni cosa colla più grande attenzione. I palloni anche dopo chiusi non arrivavano a pesar mai sei once, e la massima parte pesavano fra le tre once, e le cinque once, e si accostavano più alle prime, che alle seconde. La bilancia, di cui mi servivo, caricata dai palloni rompeva costantemente ad $\frac{1}{10}$ di grano.

Devo confessare con ingenuità, che nel fare queste esperienze sono stato più volte nel procinto d' ingannarmi, ed ho creduto per qualche tempo, che vi fosse una vera perdita di materia fatta dai nostri palloni. Diverse sono state le materie, che io ho creduto di dover provare, e queste erano tutte di natura combustibile, e capaci di schiudere il flogisto, e di eccitare il calore. Mi son servito della polvere d' archibuso, dell' esca comune, del zolfo, del piroforo, e finalmente del fosforo di orina. Accendevo nelle palle la polvere, e l' esca con una lente ustoria; la polvere era accesa a piccole masse, perchè il pallone non iscoppiasse, che in diverso modo succede. Applicavo ai palloni, dove si trovava il zolfo, un lume acceso, e ve lo lasciavo per 10 in 12 ore, finchè si fosse tutto sollevato in fiori di zolfo: ordinariamente mettevo una dramma di zolfo nei palloni e non più.

I palloni dove vi era il zolfo, ed il fosforo mi mostrarono per più, e più volte una costante diminuzione di peso, che arrivava fino a due grani, e più. Ma oltrechè la perdita in peso non corrispondeva punto alle diminuzioni dell' aria seguite nelle palle, era in contraddizione col peso trovato negli altri palloni, ne' quali spesso si osservava anzi una vera aumentazione.

A proporzione, che andavo moltiplicando le mie esperienze, e che usavo delle nuove cautele, ed attenzioni trovavo che l' esperienze si accordavano sempre più fra di loro, e che tendevano a provare, che non vi era nè diminuzione, nè aumentazione di peso. La temperatura esterna dell' aria, ed il calore rendevano i miei risultati ineguali; l' umidità, la polvere, il sudiciume delle mani vi concorrevano anche essi sensibilmente. Nell' esame rigoroso delle circostanze diverse, ed incostanti, che si mescolavano nelle mie esperienze, ho scoperto che il calore dei palloni medesimi poteva alterarne il peso sensibilmente, il che merita qualche riflessione.

Un giorno avevo messo circa 15 grani di esca in un pallone pieno di aria comune, e chiuso ermeticamente.

Il pallone per mezzo di un filo di seta era sospeso ad un braccio di bilancia, e pesava onc. 4 dan. 7 gr. 7 $\frac{1}{4}$: accesi l' esca nel pallone colla lente ustoria, ed osservai che il pallone perdeva sensibilmente del suo peso. Il pallone era caldo nel fondo, e freddo nell' alto. Ripetei l' esperimento sopra quattro altri palloni, e trovai nelle stesse circostanze di sopra, che il peso arrivava a scemare d' un grano, e più, ma che appena raffreddati i palloni ritornavano al peso di prima.

Questa diminuzione di peso nell' atto, che brucia l' aria nei palloni pare un fatto d' esperienza, e da non potersene dubitare nè anco; ma d' onde viene poi questa diminuzione? Una persona che si trovò presente ad alcune di queste esperienze mi fece riflettere, che si alzava dall' esca un vapore denso, torbido, il quale saliva con forza nelle parti più alte, e superiori del pallone. Credeva adunque che quei vapori o fumo diminuissero il peso nel pallone coi loro urti entro le pareti superiori, e per le vie, che si doveva aprire per l' aria. Non era molto difficile di rilevare l' insussistenza dell' una, e dell' altra ipotesi; ma volevo esaminare ogni cosa coll' esperienza alla mano, e volevo che i fatti medesimi servissero a trovar la vera causa di quella leggerezza.

Molte esperienze nuove io feci per questo fine, e trovai che a proporzione che il calore diminuiva dopo bruciata l' esca, la differenza in peso diventava minore, e che cresceva per l' opposto al crescer del calore. La qual cosa mi fece sospettare che il calore applicato anche esteriormente ai palloni ne diminuisse sensibilmente il peso.

Presi adunque un pallone di vetro del diametro di poll. 10. e pieno di aria comune lo chiusi ermeticamente. Era once 4 dan. 5 gr. 2 $\frac{1}{2}$. Tenendolo sospeso ad un filo lo riscaldai coll' accostarlo ad un braciere di carbone acceso. Il calore era appena soffribile nel fondo,

ma

ma non era ſenſibile nelle parti ſuperiori. Ripeſato lo trovai diminuito di due grani in punto. A proporzione che ſi raffreddava diventava più peſante per gradi, e ridotto alla temperatura di prima, e della ſtanza, ſi trovò che aveva acquiſtato il peſo di prima.

Queſto eſperimento fu da me ripetuto molte altre volte col medeſimo eſito. Volli anche oſſervare ſe ſeguiva l' iſteſſo riſcaldando i palloni nelle parti ſuperiori verſo il collo, e non nel fondo, e ſe il medeſimo ſeguiva riſcaldato il pallone egualmente per tutto. I riſultati di tutte le mie eſperienze mi portano a creder vere proſſimamente le ſeguenti propoſizioni.

I.

Un pallone del peſo di circa quattro once, chiuſo ermeticamente, e pieno di aria comune, ſe dopo peſato bene ſi riſcalda forte nella parte oppoſta al collo a ſegno di non poterla toccare colla mano, ſi trova diminuita ſenſibilmente di peſo. Se ha 10 in 12 poll. di diametro, la diminuzione arriva fino a due grani e più: ſi avverta che il calore non ſi laſcia ſalire fino al collo della palla, il fondo della quale ſi riſcalda bruſcamente ſulle brace bene acceſe, quando ſi vuol far l'eſperienza. Dopo pochi minuti diventata fredda come prima ſi trova che è creſciuta dei due grani, che aveva perduto.

II.

Se ſi riſcalda la ſola parte ſuperiore del pallone dov' è il collo, ſi trova un poco diminuita, ma molto meno che nel primo caſo, e ſubito raffreddata ritorna al peſo di prima.

Sfff

III.

Se ſi riſcalda egualmente per tutto il pallone ſopra, e ſopra ſi trova più diminuita, che al numero II, ma un poco meno che al numero I.

IV.

Le materie nell' atto di ardere dentro le palle chiuſe ermeticamente ſcemano di peſo, ma raffreddate ritornano al peſo di prima.

V.

Le diminuzioni di peſo nei palloni, in cui ſi è eccitato il calore, non deriva dai vapori, che ſi ſpargono nell' aria dai palloni.

VI.

I corpi riſcaldati dal calore poſſono apparir meno peſanti di prima.

VII.

Anderebbono ripetuti gli eſperimenti fatti dai Fiſici ſopra i corpi inſuocati a motivo d' aver negletto queſto elemento.

Finiſco coll' avvertire che avendo riſcaldato un pallone aperto nel collo, trovai che peſava 27 grani meno di prima. Era riſcaldato nel fondo, e non in alto. A proporzione che ſi raffreddava creſceva di peſo, e raffreddato del tutto ritornò a peſar come prima: ma qui la cauſa è troppo patente, perchè meriti che ſe ne parli.

Dopo di avere a poco a poco conosciuti, e corretti i piccoli errori, che io commettevo nei far le mie esperienze sul peso de' miei palloni, trovai che combinavano molto bene i risultati fra di loro, ma che non favorivano punto la nuova teoria Svezzese.

Credetti di dover continuare le mie esperienze, variandole ancora in modo che i risultati fosser più grandi e più pronti, onde ancora più sicuri. In alcuni palloni insinuai delle fettucce sottili di fosforo, e dopo chiusi ermeticamente accendevo col calore d'un carbone acceso il fosforo. Spesso si rompeva il pallone anche allora, che accendevo un solo pezzetto di fosforo per volta.

Ho trovato che l' esperienza riesciva con più di sicurezza, quando soffiavo del vento freddo contro quella parte del pallone, dove il fosforo bruciava. Il freddo ritarda, e diminuisce la fiamma del fosforo, e per questo le rotture sono meno frequenti. Qualche volta in meno di $\frac{1}{4}$ d' ora l' esperimento era finito, il pallone raffreddato e riposato. Due volte sole si è acceso ad un tratto il fosforo senza rompersi il pallone, ed ho osservato che le pareti interne di esso erano gremite di una materia bianca lanuginosa finissima regolare.

In nessuna delle moltissime esperienze da me fatte bruciando il fosforo nei palloni ho trovato diminuzione di peso, come non ho mai trovato aumentazione di peso. Io le ho ripetute in diversi tempi, e luoghi procurando che il peso dell' aria, ed il calore fossero sempre i medesimi.

Se mi sono ingannato, bisogna ben dire che tutto è concorso per ingannarmi; ma frattanto mi si conceda di fissare come un Canone fisico dei più sicuri, che i corpi nelle circostanze da me esaminati non aumentano di peso, come non diminuiscono di peso.

Ho trovato che l' aria in alcuni palloni era diminuita di quasi il quarto, e questo quarto poteva salire fino a 200 poll. cub., talchè avrei dovuto trovare più di 66 grani di diminuzione di peso, quando la bilancia non ne mostrava punto.

Un altro genere di esperienze ho voluto ancora intraprendere, le quali provano anche più direttamente la medesima verità. Consistono queste in mettere dentro i palloni una quantità di acido nitroso, ed una quantità di mercurio. I palloni erano fatti in modo, che verso la metà del collo vi era una gobba da una parte, o piccolo sacchetto di vetro chiuso esternamente, ed aperto internamente nel collo. Insinuavo prima di tutto l' acido nitroso per il collo senza che ne entrasse punto nel sacco, e subito dopo mettevo il mercurio nel sacco per mezzo di un tubo ricurvo facendolo entrare per il collo. L' acido nitroso era un poco fumante, ed in tal quantità da sciorre abbondantemente il mercurio. Chiuso il collo ermeticamente, lo pesavo alla bilancia, ed in tale situazione senza toccar più nulla facevo cadere il mercurio nel pallone. In pochi minuti era sciolto il mercurio e raffreddato il pallone, e allora alzavo la bilancia per vedere, se vi era variazione di peso. Questa esperienza riesce in meno di 6 minuti. Il pallone non è mai toccato esternamente, che quando s' inclina un poco per far cadere il mercurio sull' acido nitroso, il che si fa con un cencio fine. La bilancia resta nella situazione di prima, onde non vi è nessuna circostanza che possa far sospettare di errore. Tutte le esperienze da me fatte con quest' ultimo metodo sono state uniformi; e mi hanno assicurato, che non vi è diminuzione alcuna di peso nei palloni, come non vi è aumentazione, e che non sorte dai palloni l' aria pura sotto forma di calore, nè altra sostanza qualunque suscettibile di peso. Io credo di potere avanzare questa verità, che mi pare importante assai, e che mancava alla Fisica moderna, ed alla Scienza delle arie. E' vero che è in contraddizione colla teoria dei due valenti Chimici Svezzesi, ma è sempre un gran passo verso la verità di aver levato un ostacolo di mezzo, che poteva ritardare i progressi de' Fisici.

Sopra l' aria fissa esistente nell' atmosfera.

Avanti di esaminare con qualche dettaglio la presente quistione, io ho creduto, che convenisse prima di esaminare un' altra forse meno importante, ma che rende molto più facile la soluzione della prima. Questa seconda ha per oggetto di sapere, donde venga il residuo aeriforme, che si trova nell' aria fissa. I Fisici moderni, che hanno più lavorato intorno alle proprietà, ed alla teoria delle arie, trovano dopo il celebre D. *Priestley* che per quanta aria fissa si faccia assorbire dall' acqua, resta sempre un residuo di aria, che l' acqua non può assorbire, e che è affatto differente dall' aria fissa medesima, quando anche l' aria fissa, di cui si è fatto uso, sia della più pura, che si può ottenere coi metodi conosciuti fin ora. Si è creduto fin qui da tutti, che questo residuo di aria, che è aria comune, ma in parte alterata, e probabilmente dal flogisto, fosse naturalmente unita all' aria fissa, talchè non potesse trovarsi questa senza di quella. In quest' aria una candela può bensì arderci, ma per meno tempo, e men bene, che nell' aria comune: un animale ancora ci vive, ma per minor tempo, e non sì bene, che nell' aria comune, e l' aria nitrosa non la diminuisce che in parte, cioè meno dell' aria comune. Queste proprietà, come ognun vede, convengono coll'aria comune alterata in parte dal flogisto.

Ma d' onde venga questo residuo dell' aria fissa, e come si trovi egli unito a quell' aria, resta ancora da sapersi. Si crede comunemente che l' aria fissa non possa mai essere scompagnata da quell' aria comune, e che la prima aria non esista mai senza la seconda.

Supposta l'esistenza necessaria di una parte d'aria comune nell' aria fissa, si può domandare in qual maniera quell' aria è unita all' aria fissa, o in quale stato si trovi essa dentro l' aria fissa medesima. Una tale quistione è suscettibile di esperienze, e di esperienze dirette, talchè la soluzione pare che sia in mano del Fisico osservatore.

Si sa che l' aria nitrosa diminuisce l' aria comune, e tutte le arie respirabili. Se vi fosse dell' aria comune mescolata all' aria fissa, dovrebbe vedersi una diminuzione molto sensibile, quando si uniscono insieme aria nitrosa, ed aria fissa; e questa diminuzione sarebbe in ragione della quantità, e qualità dell' aria comune. Si sa che l' aria fissa la più pura lascia dopo scossa nell' acqua circa $\frac{1}{40}$ del suo volume; onde se sarà introdotta una quantità un poco grande d' aria fissa dentro d' un tubo assai alto, e pieno di mercurio, la diminuzione potrà essere assai sensibile. Io posso però assicurare, che tutte le volte che ho operato sopra aria fissa assai pura, non ho mai potuto accorgermi di diminuzione alcuna, almeno non mi è mai paruta sensibile, e certa; ma avevo l'avvertenza di non ricever l'aria sull' acqua, ma sul mercurio, e di non ne ricevere che dopo che ne era escita una gran parte. Questo esperimento è molto difficile, ed esige grande attenzione dalla parte dell' osservatore, e grandi cautele.

Esclusa così l' ipotesi di semplice mescuglio di aria comune nell' aria fissa, resta da vedere d' onde viene quel residuo di aria, e come si trovi nell' aria fissa dopo sbattuta nell' acqua, o ricevuta sull' acqua. Un gran numero di esperienze mi hanno fatto vedere, che quel residuo di aria comune non è una quantità costante, benchè l' aria fissa si sia cavata dai medesimi corpi, e coi medesimi mezzi; ho trovato ancora, che è più, e meno flogisticata secondo le varie circostanze e maniere di cavarla dai corpi. In generale mi è paruto di vedere che l' aria fiſſa, che reſta molti giorni a contatto dell' acqua, laſcia un reſiduo più grande di aria comune non buona. Tutte queſte oſſervazioni potrebbero già cominciare a farci ſoſpettare, che o tutto o parte di quel reſiduo d'aria ſi produceſſe nell' atto, che l' aria fiſſa viene aſſorbita dall' acqua, cioè che una parte d'aria fiſſa in que' caſi prendeſſe la qualità d' aria comune men buona leggiermente flogiſticata.

Tutte le mie eſperienze fatte fin qui mi hanno fatto vedere, che quando l' aria fiſſa è diminuita di qualche ſoſtanza, laſcia una quantità più o meno grande di aria più e meno flogiſticata, la quale diventa aria affatto ſimile al reſiduo ordinario dell' aria fiſſa, ſe ſi sbatte lungamente nell' acqua. Queſte ſoſtanze, che diminuiſcono, o aſſorbono l' aria fiſſa, ſono di quelle che abbondano naturalmente di flogiſto. La ſcintilla elettrica medeſima rende una parte dell' aria fiſſa inaſſorbibile alle acque, come l' ho provato più volte. Premeſſo tutto queſto io rifletto, che quando ſi ſcuote nell' acqua l' aria fiſſa, l' aria fiſſa è diminuita per gradi da quel fluido, ed aſſorbita dall' acqua. L' acqua non è affatto priva di flogiſto, e può flogiſticar l' aria comune sbattuta in eſſa lungamente, e render men buona fino l' aria deflogiſticata medeſima. Deve adunque l' acqua flogiſticare in parte l' aria fiſſa nell' atto di aſſorbirla; e ſiccome queſta aſſorbizione ſi fa da noi in poco tempo, e l' acqua non ha che poco flogiſto, non ſi flogiſticherà che una piccola parte di aria fiſſa, come in fatti ſi oſſerva; e per queſta iſteſſa ragione ſi troverà una più gran quantità di aria fiſſa flogiſticata quando ſi laſcia aſſorbire dall' acqua lentamente, o quando ſi uniſce ai proceſſi flogiſtici immediatamente.

Vi è un' eſperienza che par deciſiva affatto. Ho fatto aſſorbire all' acqua una gran quantità d' aria fiſſa; ho precipitato la calce in terra calcarea colla medeſima aria fiſſa. Nè l'acqua, nè la terra calcarea avevano certamente aſſorbito il reſiduo naturale inaſſorbibile dell'aria fiſſa. Ho cavato dalla calce precipitata, e dall'acqua l'aria fiſſa, ed ho trovato il ſolito reſiduo d'aria inaſſorbibile comune men buona. Ho cavato l'aria fiſſa dall'acqua collo ſcuoterla appena un poco, l'ho cavata dalla terra calcarea coll'olio di vitriolo. Quando ſi voleſſe ſoſpettare, che quell'aria era prima nell'acqua, ſoſpetto poco ragionevole atteſo il picciolo moto impreſſo nell'acqua nel cavarla, nulla ſi può opporre di queſto all'eſperienza della calce.

E' adunque un fatto d'eſperienza, che non eſiſte neceſſariamente una porzione d'aria comune men buona coll'aria fiſſa, e che quell'aria non comincia ad eſiſtere, che a proporzione che l'aria fiſſa è diminuita, e che le ſi uniſce del flogiſto.

Così riſoluta queſta quiſtione per quanto a noi pare, che a prima viſta poteva ſembrar più curioſa, che utile, ſi può ora dedurre da eſſa un corollario della più grande importanza: ſe quel reſiduo d'aria comune, che ſi ritrova nell'aria fiſſa, non eſiſteva prima in eſſa, ma ſi è formato in ſeguito col ſemplice ſcuoterla nell'acqua, ne ſegue che l'aria fiſſa può diventare in parte aria comune, o aria reſpirabile.

Benchè il mezzo uſato per operare queſto maraviglioſo cangiamento paja ſemplicemente meccanico, giacchè ſi può ottenere coll'acqua la più pura, o ſia coll'acqua diſtillata, io ſono però perſuaſo del contrario. Io credo che tutto queſto ſi faccia per un principio puramente chimico, e che il flogiſto ſolo operi tutti queſti cangiamenti. Certo è che l'acqua diſtillata medeſima può flogiſticare le arie reſpirabili, onde potrà ancora dar del flogiſto all'aria fiſſa medeſima. Si vedrà in altro luogo come il flogiſto poſſa render l'aria fiſſa inalterabile all'acqua, e come allora poſſa renderſi aria comune reſpirabile.

Illuſtrata

Illuſtrata in queſta maniera la ſeconda quiſtione da noi propoſta, poſſiamo ora paſſare all' eſame della prima, che è ſopra l'aria fiſſa eſiſtente nell'atmosfera.

Si crede dalla comune de' Fiſici d' oggidì, e dai più valenti Chimici, che nell'atmosfera eſiſta una gran quantità d' aria fiſſa, e credono di provarlo col farci oſſervare, che moltiſſimi corpi ſi decompongono continuamente ſulla ſuperficie della terra tanto foſſili, che animali, e vegetabili, i quali ſon pieni di quel fluido aeriforme. Un' altra prova ſi adduce da eſſi, ed è che coi proceſſi flogiſtici ſi trova una gran quantità d'aria fiſſa nell'aria comune, a cui ſi ſono uniti, onde ſpiegano la produzione di quell' aria per una precipitazione chimica. Ma una prova di maggior forza cavano eſſi in favore delle loro ipoteſi dall'eſpoſizione nell'atmosfera di ſali alcalini cauſtici, e dalla calce ſciolta nell' acqua; i primi criſtallizzano alla fine, la ſeconda cade in terra calcarea, e tanto i ſali, che la terra ſi trovano ricchiſſimi d'aria fiſſa. Io però ſon di parere, che le ragioni addotte di ſopra non baſtino per provare con tutta la ſicurezza l'eſiſtenza dell'aria fiſſa nell'atmosfera. E' vero per riſpondere alla prima difficoltà, o prova, che ogni giorno ſi ſchiude dai corpi una gran quantità di quell'aria, ma è altresì vero, che infiniti corpi l'aſſorbono ad ogni iſtante. L'acqua, che cuopre forſe i due terzi del globo, è uno di queſti grandi agenti deſtinati ad aſſorbirla. Non volendo contare i fiumi, le fonti, le acque, ed i vapori cadenti ſulla terra, le piante ſteſſe ne aſſorbono continuamente, ſe ne danno continuamente, talchè non ſi prova da neſſun fatto ſicuro, che i corpi che l'aſſorbono non ſieno molto più di quelli che ne tramandano, e che non vi ſieno più principj e molto più attivi per aſſorbirla, che per iſchiuderla dai corpi.

Rifletto ancora, che l'aria fiſſa eſſendo molto più peſante dell'aria comune non può alzarſi, che pochiſſimo dentro di essa , ma deve tenersi rasente il suolo . Una prova ne abbiamo nella grotta del Cane vicino a Napoli , dove l' aria fissa non si alza mai al di sopra di un piede, o poco più. L' istesso si osserva appresso a poco nei Tini dove fermenta la birra. L' aria a poca altezza e distanza dal Tino è pura, e sanissima , e si respira senza incomodo alcuno : l' istesso si osserva nella grotta del Cane , e benchè sorta dalla terra un fonte perenne di quell' aria mefitica, non per questo si respira men bene l' aria di quella grotta, segno che non si mescola l' aria fissa coll' aria comune, e che in ogni istante ne viene assorbita quanta ne è tramandata . Io ho voluto esaminare col mio Evaerometro la bontà dell'aria vicino al suolo, e più lontana dal suolo, e non vi ho mai potuto scorgere differenza alcuna. Ho scosso quelle arie nell' acqua pura , e nella dissoluzione di calce , e non mi sono accorto, che differissero in nulla, nè che l' una fosse più diminuita dell' altra.

Una mia curiosità mi portò ad osservare la seguente esperienza. In uno stanzino versai circa 20000. poll. cub. d' aria fissa. Le finestre, e gli usci erano chiusi . Diedi moto all' aria della stanza con un drappo teso per 10. minuti, e dopo 30. altri minuti presi due bocce d' aria l' una all' altezza del suolo a 5. piedi, l' altra di mezzo piede. Scossi quest' aria nell' acqua, e non fu punto diminuita.

Apparisce adunque , che anche allora che si mescola una quantità molto notabile di aria fissa in una quantità limitata d' aria comune, poco dopo non si osservano più gli effetti, o le proprietà dell' aria fissa , segno che viene assorbita prestissimo dai corpi esterni.

Vi è un altro argomento contro la pretesa aria fissa natante nell' atmosfera, che par senza replica. Si scuota lungamente un pollice, o più di tintura di turnesole dentro di un gran recipiente pieno di aria comune della capacità di sette in ottocento pollici; il turnesole non cangerà per questo di colore. Si cambj l'aria comune per quante volte si vuole, e si scuota di nuovo, non per questo si cangerà in rosso il turnesole, che pure la più piccola quantità di aria fissa cangia nell'istante. Questa esperienza può portarsi sì in là volendo, che arrivi a dimostrare, che non vi è nè anco un millionesimo di aria fissa nell'aria comune, quantità, che si può trascurare nella presente ricerca, e che non ha nessun rapporto coi fatti rapportati di sopra dai Fisici.

Ma si dirà che forse l'aria fissa è unita all'aria comune in un modo particolare, e che allora non dimostra più le sue prime qualità. Se la prima opinione è comune a tutti i Fisici moderni, questa seconda lo è alla maggior parte dei Chimici, e dei Filosofi, e basterà nominare *Bergman*, e *Scheel* tra i Chimici per tutti gli altri, e *Priestley* tra i Filosofi. Nell'ipotesi di questi Filosofi il flogisto, che ha più affinità coll'aria comune, o respirabile, la lascia staccarsi da lei, e precipitare. Ma questo argomento suppone due cose non dimostrate ancora, l'una che l'aria fissa sia tale per decomposizione, l'altra che sia impossibile, che si formi l'aria fissa in quelle circostanze. Ma tutto questo non par molto verisimile se si considera che se si mette un poll. d'aria comune a contatto del mercurio, si trova il pollice d'aria fissa dopo qualunque tempo con tutte le sue qualità di prima.

L'esperienza mi ha dimostrato che l'acqua distillata se è esposta all'aria s'impregna di aria deflogisticata e non mai di aria fissa, eppure si sa che l'aria fissa ha più affinità coll'acqua dell'aria deflogisticata medesima.

Ma vi è un argomento, che par dimostrare che l'aria fissa, che si trova nell'aria comune, si produce allora, che noi la troviamo in quell'aria.

Le arie artificiali, che non sono state mai aria fissa, che non sono mai state aria comune, sbattute nell'acqua, e rese respirabili di nuovo, mostrano coi processi flogiſtici l'aria fiſſa come prima; e ſe dopo di aver cavato l'aria fiſſa da eſſe ſi rendono reſpirabili di nuovo coll' acqua, danno della nuova aria fiſſa. L' iſteſſo ſi dica dell'aria comune ſpogliata la prima volta della ſua ſuppoſta aria fiſſa, ſe ſi renderà reſpirabile la ſeconda volta, darà nuova aria fiſſa, e così di ſeguito.

Qui ſi vede troppo chiaro che l'aria fiſſa non eſiſteva in quelle arie non mai compoſte di aria comune, e che nell' aria comune ſpogliata di eſſa la prima volta, ſi è formata di nuovo coi proceſſi flogiſtici. Qui non pare che ſi poſſa ricorrere a precipitazioni di arie fiſſe, giacchè ne' primi caſi non vi è mai ſtata tale compoſizione, e nell' ultimo caſo, ſe vi fu nel principio, fu poi levata in ſeguito.

Le coſe finora dette, ed oſſervate da noi ci ſomminiſtrano una riſpoſta contro la difficoltà de' ſali alcalini, che criſtallizzano all'aria aperta, ed alla calce, che ſi ſatura di aria fiſſa, che è l'argomento più forte che ſi poſſa addurre in favore di quella ipoteſi. Non trovo niente impoſſibile, che per il contatto continuato tanto de' ſali alcalini, quanto della calce coll' aria atmoſferica ſempre in moto, poſſa formarſi poco a poco dell' aria fiſſa, dove non ve n'era prima, e ſaturarſi quei corpi di eſſa. Si è veduto ſopra, quanto è facile il formar di quell' aria in mille circoſtanze. Non ſi prova poi che la calce ſia affatto priva di flogiſto, e il dotto Preſidente di Digione ha provato, che l'alcali cauſtico contiene beniſſimo di quel principio. L'iſteſſo ſi dica della terra ponderoſa, e della magneſia, che ſi ſaturano anche eſſe eſpoſte all'aria aperta. Non ſi ſaturano dell' aria fiſſa eſiſtente di prima nell'atmosfera, ma bensì dell' aria fiſſa, che ſi forma in quelle circoſtanze per il lungo contatto di quelle materie ſciolte nell'acqua non mai priva affatto di flogiſto.

Se io non credeſſi di abuſarmi anche di troppo della voſtra compiacenza, potrei parlarvi di mille coſe importanti, che ho trovate nel secondo Tomo del vostro Amico Illustre. Permettetemi almeno che io vi parli brevemente di alcune poche.

Il Sig. *Bergman* parlando dell' origine dell' aria fissa scrive: *modificationem acidi nitrosi credit Doct. Priestley, immo & nitrosam, & vitriolicam diversas tantum variationes esse urget, nec refragabor, sed fundamentum quo hae nituntur adsertiones mihi valde lubricum videtur.* Confutate poi le ragioni del Filosofo Inglese finisce con dire " *alioquin non diffiteor mihi haud improbabilem esse conjecturare de ortu acidi aerei & nitrosi, uti mox fusius explicabitur.* (a)

Se codesto valente uomo avesse conosciuto le mie esperienze sulla decomposizione totale dell' acido nitroso in aria fissa, in aria flogisticata, ed in aria comune, avrebbe subito veduto, che quello che era un'ipotesi appoggiata a fallaci principj in *Priestley*, ed una semplice congettura per lui medesimo, era una verità di fatto. Queste mie esperienze sull' acido nitroso furono da me fatte a Parigi, e comunicate là ai due illustri Chimici i Sigg. *Darcet* e *Ruelle* fin d' allora, e dopo furono da me ripetute in Londra alla presenza del mio Amico M. *Ingen-housz*. I risultati di esse si leggono stampati in Londra nel 1779. ed inseriti nell' opera del mio Amico, che l' anno dopo egli stesso tradusse in francese col titolo di *Experiences sur les vegetaux*, e pubblicò in Parigi. Se ne parla in questa opera alla pag. 115., ma nulla vi si dice del metodo da me adoperato, nè delle quantità assolute, e relative dei prodotti, e delle arie da me ottenuti.

Io non conosco nessuno altro acido minerale, che si possa ridurre per intiero in semplice aria, benchè io pos-

(a) Opusc. Chem. & Phys. T. II. pag. 360.

ſa cavar delle arie da tutti gli altri acidi abbondantemente, e che una parte di eſſi ſieno ſtati da me decomposti in arie. Gli acidi vegetabili, ed alcuni degli acidi animali, e foſſili analoghi ai vegetabili ſi decompongono anche eſſi in arie per intiero. Queſta importante verità ſomminiſtra un fortiſſimo argumento di induzione, che tutti gli acidi in ultima analiſi non ſieno che arie, o per meglio dire per fuggir qui qualunque diſputa e ipoteſi, dico che quegli acidi ſi preſentano ſotto forma di fluidi elaſtici aeriformi, o queſto ſegua per addizione, o per ſottrazione di qualunque ſoſtanza, non conoſcendo altra ſorta di trasformazioni ne' corpi. Tutto queſto io mi luſingo d' averlo provato in alcune Memorie ſtampate ſugli acidi vegetabili, ed animali nel Giornale dell' Ab. *Rozier*; ma è molto più ſorprendente, e nuovo affatto che ſi poſſa provare l' iſteſſo ſull' acido nitroſo, che è acido minerale.

Le mie eſperienze ſui vegetabili hanno fatto dire al celebre Traduttore di *Bergman* il Preſidente *Morveau*, che l' aria fiſſa è probabilmente l' acido univerſale tanto cercato dai Chimici antichi, e del paſſato ſecolo, e con sì poco ſucceſſo. Se egli aveſſe conoſciuto anche le altre mie eſperienze ſull'acido nitroſo, avrebbe potuto dare un grado molto maggiore di probabilità a quell' ipoteſi, la quale non ſarà mai portata a quel grado di evidenza, che ſi domanda nelle coſe Fiſiche, ſe non quando ſi ſarà provato, che tutti gli altri acidi ancora ſi decompongono per intiero in arie: diſſi per intiero, perchè la poca aria, che ſi cava de eſſi anche ora coi metodi già noti, non forma neſſuna prova, e rimane quell' opinione una ſemplice ipoteſi vaga e iſolata da qualſivoglia ragione. Le ſole mie eſperienze fatte ſopra tanti acidi creduti dai Chimici affatto diverſi fra di loro, ci ſomminiſtrano almeno una fortiſſima prova d' induzione, quando prima di eſſe non altro al più ſi poteva dire, ſe non che non era ancor dimoſtrato per impoſſibile che l'aria fissa non potesse essere l' acido primitivo, l'acido universale, verità sterile, equivalente al nulla, e da sbandirsi dalla Fisica moderna.

Il desiderio di trattenermi con voi, e di parlare delle scoperte del vostro Amico Illustre mi rende più lungo di quello, che vorrei esserlo, onde passerò rapidamente ad un altro punto, che occupa da qualche tempo molti Filosofi esperimentatori, nelle di cui mani si è formato un ramo di nuova scienza in questi ultimi anni, che promette moltissimo, e fino de' vantaggi reali alla salute pubblica. Il Sig. *Bergman* alla pag. 369. della sua opera da noi citata parlando de' vegetabili si spiega così: *novimus vegetabilia in tenebris languescere, & colore spoliari, ita autem vitiata radiis solaribus exposita cito restitui. Scilicet lux constat materia caloris cum excessu flogisti. Hic excessus primus absorbetur, & dein sensim licet difficilius etiam illud inflamabile secernitur, quod materiam constituit caloris, nulla enim sine calore vegetatio, & hoc ipsum alterum principium, aer bonus laxatur. Itaque pro inæquali caloris gradu, pro varia vegetabilium positione respectu lucis & eorum diversa lucem coloremque decomponendi virtute, non possunt non dissimiles oriri effectus. Immo aqua ipsa, quae purissima videtur, subtilissima non raro fovet corpora organica, visum fugentia, quae in luce solari constituta eamdem vegetando decomponunt & bonum provocant aerem.*

Io ho voluto portare per esteso tutto quel passo, perchè contiene una nuova spiegazione sopra le diverse arie, che si ottengono esponendo i vegetabili alla luce, ed all' ombra. Intorno ai fatti principali che si osservano nelle piante esposte al sole, e all'ombra, io mi riporto intieramente alle belle, ed originali esperienze dell' illustre mio Amico, e Filosofo M. *Ingen-housz*, per cui deve aver meritato giustamente la stima dei veri Fisici.

Ho voluto anche io ſperimentar le mie forze ſopra di queſta materia sì vaſta, e che ha fatto de' progreſſi sì rapidi in pochi anni; e credo di eſſere ben fondato dopo un' infinità d' eſperienze da me fatte, e variate in mille maniere ſopra più di 700 piante, a conſiderar queſta materia, come ancor nuova; e credo di potere aſſicurare che l' eſperienze riportate in generale fin qui dai diverſi Scrittori ſono ancora in troppo picciol numero, non abbaſtanza variate, e limitate a troppo poche piante, perchè non ſieno ſoſpette, o falſe le conſeguenze, che ſe ne ſono dedotte, e le teorie, che ſi è voluto immaginare per iſpiegarle.

I riſultati di alcune di queſte mie eſperienze ſono ſtati comunicati qui a diverſi miei Amici ſino da due anni fa, e molte di eſſe eſperienze ho io fatto vedere a più perſone, che mi onoravano in caſa della loro preſenza. Baſta che qui vi dica, che cangiata una ſola circoſtanza nelle eſperienze delle piante eſpoſte al ſole, circoſtanza, che le accoſta ancora di più al loro ſtato naturale, tutto ſi vede cangiato, e l'aria, che doveva eſſere deflogiſticata e ſana, ſi trova per contrario micidiale, e meſitica. Non vi dico di più perchè ſpero fra poco di pubblicar le mie Eſperienze in tutto il loro dettaglio. Da queſto voi vedete che quel che ſi è pubblicato finora ſopra queſta materia è falſo nella ſua generalità, o per meglio dire non è vero che in qualche caſo o accidente, o circoſtanza che ſi voglia dire, ed anche queſti fatti sì limitati non ſono i più naturali alle piante, che finiſce di rovinare ogni coſa. Per riguardo al dettaglio delle eſperienze fatte ſulle piante, ed eſpoſte al ſole ed all' ombra, ſi deve conſultare come diſſi l'eccellente Opera ſopra citata di M. *Ingen-houſz*.

Finiſco coll' aſſicurarvi che quei corpi organici, di cui parla il Sig. *Bergman*, e che ſi trovano nell' acqua dando dell' aria pura eſpoſti al ſole, ſono ſpeſſo ſemplici animali, e non piante, come ſi è creduto finora da tutti.

tutti. Questi animali sono di due specie diverse, l' una è formata di minimi animali rotondi quasi sempre in moto; l' altra è fatta di animali oviformi e quasi fatti a baccelli con poco moto, ma molto più grandi de' primi. Spesso si trovano le due specie insieme nella stessa acqua, e qualche volta si trova la prima specie sola. La specie globulare è la medesima, che si trova nelle acque stagnanti, per cui quelle acque appariscono nella superficie verdi, e aranciate. Gli osservatori microscopici le han credute piantine minime: ma sono più di dieci anni, che mi sono assicurato, che quel colore non dipende da sostanze vegetabili, ma da piccoli animali, e che i Bottanici, e gli osservatori si sono ingannati.

E' per altro vero, che si trova più spesso nelle acque esposte al sole, oltre quelle due specie di animali di cui si è parlato, qualche altra pianta minima microscopica, come per esempio la Tremella ecc. ma voi sapete, che la Tremella è un corpo organizzato dotato di vita, e di sentimento, come vi feci osservare fin da quando passaste per Firenze nel vostro viaggio d' Italia, e come l' avrete letto nelle mie opere.

Ma quando ancora non si volesse considerare la Tremella come un animale-pianta da chi non sa osservare da sè, non si può dubitare un momento della natura animale delle altre due qualità di corpi; ed ecco che ci siamo aperti la via ad un bellissimo fenomeno, e nuovo, ed inaspettato, ed è che vi sono degli animali, che esposti al sole nell' acqua danno aria deflogisticata, come la danno le piante le più atte a produrre quell' aria. Tutti gli animali fin qui conosciuti, e comunque esposti al sole, ed all' aria, non danno che aria micidiale, e mefitica.

Non è adunque il solo regno vegetabile destinato a purificar l' aria atmosferica, ma vi sono ancora degli animali, che fanno l' istesso, benchè poi sia vero come ſi vedrà dalle mie *eſperienze ſui vegetabili* , che va limitata anche la prima propoſizione contro tutto quello , che ſi è creduto finora dai Fiſici oſſervatori ; che anzi ſarebbe tutto l' oppoſto , e le piante in generale nel loro ſtato naturale , o almeno in uno ſtato più vicino al naturale di quello , che ſin qui ſi è praticato dagli altri , come io mi luſingo di aver fatto , danno aria meſitica , micidiale , benchè eſpoſti al ſole . Si devon bensì eccettuare le piante craſſe o ſucculenti , che danno aria deflogiſticata anche in quelle circoſtanze medeſime , in cui le altre la danno meſitica . Io credo di eſſermi ſpiegato abbaſtanza per far capire , che le mie eſperienze portano non ſolo a diſtruggere i fatti e le teorie immaginate ſin qui ſopra queſta importantiſſima materia , ma che vanno a formare un nuvo ramo di Scienza ignoto ancora ai Fiſici , e non da alcuno previſto ancora .

DELL' IRREDUCIBILITA'

DELLA FORMULA CARDANICA A FORMA FINITA, ALGEBRAICA, E LIBERA DA ASPETTO IMMAGINARIO.

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona.

INTRODUZIONE.

E' palefe oggimai in che confifta il nodo famofo dell' equazioni cubiche nell' Algebra Cartefiana. Le equazioni di terzo grado, ficcome è noto, fono reducibili tutte alla forma feguente

$$(A)\ldots x^3 - px - q = 0$$

in cui p e q fono quantità razionali. Si tratta di determinare i tre valori di x in p e q, quando tutti e tre effer debbono reali e difeguali, e neffun divifore efatto dell' ultimo termine q foddisfa' all' equazione; il che vuol dire, che tutti e tre que' valori debbono anche effere irrazionali. *Scipion Ferri* Italiano fu il primo che ci deffe la rifoluzione generale dell' equazione (A) fotto quefta forma

$$(B)\ldots x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

la quale poi affunta e divulgata da *Cardano* prefe il nome di formula Cardanica. Ma quando tutti e tre i valori di x debbono effere reali e difeguali, fi dimoftra che $p^3:27$ è maggiore di $q^2:4$. Dunque nel cafo delle tre radici reali e difeguali, la quantità fotto il fegno radicale quadratico $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ diventa neceffariamente negativa. E come, attese le nozioni convenute circa i segni affermativi e negativi dell' Algebra, è impossibile la radice d' indice pari di quantità negativa, che perciò vien detta quantità immaginaria; così nel caso delle tre radici reali e diseguali la formula Cardanica involge sotto ciascheduno de' radicali cubici una quantità immaginaria. Faremo vedere a suo luogo, che qualunque volta l' equazione (A) abbia radice razionale, caso in cui questa medesima radice è pur divisore esatto dell' ultimo termine q, anche la formula Cardanica (B) si spoglia non solamente dell' aspetto irrazionale, ma degl' immaginarj eziandio, che svaniscono per contrarietà di segni, e ci risulta il valore razionale, o la radice razionale dell' equazione. E così pure accade, se tutte tre le radici reali avessero da essere razionali, somministrandole tutte ad una ad una la formula (B). Di modo che non una sola, ma tutte tre le radici reali dell' equazione sono rappresentate puntualmente e comprese nella formula Cardanica, siccome il volle dimostrare il Sig. d' *Alembert* direttamente (*Opusc. Mat. T. V. Parte* 1. *pag.* 204), e può non difficilmente dimostrarsi. Ma allorchè non ha l' ultimo termine q alcun divisore esatto, che soddisfaccia all' equazione, non si è scoperto ancora alcun metodo, con cui si ricavino i tre valori, bensì irrazionali, come debbono essere, ma liberi da immaginarj. L' espressione di questi valori per serie, e con un' infinità di termini, come che continuamente decrescenti e reali, non fa al caso; come non lo fa neppure l' espressione per seni, e coseni di natura trascendente, per quello che si ricercano valori finiti, com' è l' espressione Cardanica, valori algebraici, e valori in questo solo da' Cardanici differenti, che sieno liberi da aspetto immaginario. Ancorchè si dimostri incontrastabilmente essere di valor reale l' intera espressione Cardanica, cioè essere reale la

quantità

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

che eſprime la radice dell' equazione, ad ogni modo il non eſſerſi giammai potuto eſprimere alcuna delle radici dell' equazione (A), nel caſo, che tutte e tre eſſer debbano reali, diſeguali, e non razionali, e p q ſieno razionali, ſotto altra forma ugualmente finita, ed algebraica, ma fuor d' aſpetto immaginario, ha fatto, che ſiaſi ſempre queſto caſo denominato irreducibile. Trattandoſi pertanto di rintracciare una dimoſtrazione aſſoluta di queſta irreducibilità, non baſta il dimoſtrare, che nel caſo propoſto non è poſſibile di riſolvere per alcun metodo cognito l'equazione (A), e di trovare una radice ſotto le condizioni enunciate, perchè non reſta mai eſcluſa la poſſibilità di farlo per metodi, che non ſono ancor noti: nè rigoroſamente baſta, per una ſimile ragione, il dimoſtrare, che maneggiando e ſvolgendo l' equazione (A) per qualunque metodo conoſciuto, l'ultimo riſultamento ſia ſempre o l' eſpreſſione Cardanica (B), o altra ſimile, contenente ſempre quantità immaginarie. Il modo incontraſtabile di provare l' aſſoluta irreducibilità del caſo in quiſtione è quello di dimoſtrare direttamente, ch' è aſſolutamente e per natura ſua impoſſibile il ridurre l'eſpreſſione Cardanica a forma finita algebraica, e libera da aſpetto immaginario. Siccome è fuor di dubbio, che quantunque ogni termine del Binomio ſia in sè quantità aſſolutamente immaginaria, ciò non oſtante la combinazione di tutti e due coſtituiſce una quantità aſſolutamente reale, ed eſprime ſicuramente la radice reale dell' equazione; così sì fatta dimoſtrazione dell' aſſoluta irreducibilità di quel caſo ſerve nel tempo ſteſſo ad eſcludere neceſſariamente la poſſibilità di riſolvere per alcun immaginabile cognito od incognito metodo l' equazione cubica nel caſo in quiſtione, e di aſſegnarvi la radice finita, algebraica, ed immune da immaginarj: altrimenti la radice Cardanica sarebbe reducibile a forma finita, algebraica, ed esente da immaginarj, contro la dimostrazione. Ed ecco come il tentare una dimostrazione dell'irreducibilità assoluta del Binomio Cardanico, dipendente dalla natura de' termini stessi del Binomio, tende direttamente, e necessariamente a troncare ogni ulteriore perquisizione su questo proposito. La strada, che ho battuto in questa breve Memoria per rinvenirla, può non senza fondamento giudicarsi più diretta dell'altra, che ho preso in uno scritto pubblicato nel 1776., che ha per titolo *de Casu irreductibili tertii gradus* ecc. *Exercitatio Analytica*. Giudicheranno i Geometri, se vi sia riuscito, e se sia imposto fine alla quistione.

DEFINIZIONI.

§. I. Irrazionale del grado n è quello, in cui nessuna quantità moltiplicata $n-1$ volte per sè stessa può produrre la quantità sotto il vincolo radicale. Le quantità pertanto $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q})}$, $\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q}+R)}$ ecc. saranno tutte irrazionali del grado n, tosto che non v'abbia alcuna quantità, la quale moltiplicata $n-1$ volte per se stessa, possa produrre le grandezze P, $P+\mathfrak{Q}$, $P+\mathfrak{Q}+R$ ecc. qualunque cosa sia P, $\mathfrak{Q}$, R ecc.

II.

Irrazionale semplice è quello, che non è unito a quantità razionale, come $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q})}$ ecc. qualunque cosa sieno, e in qual numero si vuole le quantità sotto il vincolo radicale. In conseguenza irrazionale misto sarà quello, ch'è accoppiato a quantità razionali, come $A+\sqrt[n]{P}$, $A+\sqrt[n]{(P+\mathfrak{Q})}$ ecc. A essendo qualunque quantità o complesso di quantità razionali.

III.

$\sqrt[n]{P} + \sqrt[m]{(P + Q)}$ ecc. è un irrazionale binomio ecc. tosto che li termini $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[m]{(P + Q)}$ ecc. sono irrazionali semplici, e però vi avrà irrazionale polinomio semplice, e misto, secondo che o non vi avrà, o vi avrà quantità razionale accoppiata al polinomio irrazionale.

IV.

Irrazionale immaginario è quello, in cui la quantità sotto il vincolo è negativa, e l' indice n dell' irrazionalità è pari.

V.

Immaginario semplice è quello, che non è unito a quantità reale, razionale, o irrazionale, ch' ella sia, come $\sqrt[2n]{-P}$, $\sqrt[2n]{(-P-Q)}$ ecc. come pure $\sqrt[n]{\sqrt{-P}}$, che si riduce a $\sqrt[2n]{-P}$; e immaginario misto quello, in cui l' immaginario semplice è unito a quantità reale, come $A + \sqrt[2n]{-P}$, essendo A razionale, o irrazionale reale.

VI.

Immaginario composto può dirsi quello, in cui un immaginario misto è sotto vincolo radicale. Negl' irrazionali reali ognuno de' $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P + Q)}$ ecc. è semplice in sè. Ma negl' immaginarj non può confonderſi $\sqrt[n]{(A+\sqrt{-P})}$ con $\sqrt[n]{\sqrt{-P}}$, eſſendo A reale. Per diſtinguere dunque $\sqrt[n]{(A+\sqrt{-P})}$ dagl' immaginarj ſemplici e da' miſti, il diremo compoſto.

COROLLARJ.

I.

§. II. Non ſarà pertanto $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}$ un irrazionale di ſecondo grado, poichè il binomio $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ moltiplicato una volta per sè produce la quantità ſotto il vincolo $5+2\sqrt{6}$ (*Def. I*), e così per qualunque altro grado.

II.

Se dunque la quantità compreſa ſotto il vincolo o ſegno dell' irrazionalità ſarà razionale, è manifeſto, che non vi avrà razionale dal di cui prodotto poſſa ella riſultare giammai.

III.

E ſimilmente ſe la grandezza ſotto il ſegno ſarà comunque compoſta di razionale, ed irrazionale dello ſteſſo, o d' altro grado, non vi avrà nè razionale, nè irrazionale, nè miſto di razionale ed irrazionale, che moltiplicato in sè $n-1$ volte poſſa produrla giammai.

IV.

La ſomma in conſeguenza, e la differenza di due o più irrazionali ſemplici, cioè un polinomio irrazionale ſemplice, ſarà ſempre quantità irrazionale.

V.

V.

E parimenti la ſomma, e la differenza di due o più irrazionali immaginarj ſemplici, ſarà ſempre un immaginario. Ma la ſomma, o la differenza di due, quattro ecc., o di tal numero pari d' irrazionali immaginarj compoſti che ſi vuole (§. I *Def. VI*) potrà eſſere quantità reale.

VI.

E non vi avrà mai altra quantità finita, che poſſa equivalere ad una quantità irrazionale ſemplice o miſta, reale o immaginaria, fuorchè ella ſteſſa, che è quanto dire una quantità a sè identicamente uguale. Tutte le infinite forme, che può ella prendere, non ſono in fondo, che grandezze indenticamente uguali all' irrazionale traſformato; il che conſegue neceſſariamente dalla natura medeſima dell' irrazionalità.

SCOLIO.

§. III. Con queſte nozioni elementari ſotto gli occhi è difficile il prender errore al caſo, ch' è frequente, di ſupporre ne' calcoli tale o tal altra quantità come irrazionale, e nel trar conſeguenze dal paragone di quantità irrazionali sì reali, che immaginarie tra di sè, o con altre razionali, od irrazionali. E ſiccome il caſo in quiſtione non è, che un caſo particolare delle equazioni del terzo grado legato intimamente colla loro generale riſoluzione; così, dovendo trattarſi di quello, non è poſſibile di ſtaccarlo talmente dal tutto, che non convenga abbracciare ad un tempo la teoria generale. Ho premeſſo pertanto queſte poche nozioni ſugl' irrazionali a ſcanſamento d' ogni quiſtione di nome, e per appianare nell' equazioni di terzo grado, risolubili tutte generalmente col metodo Cardanico, le difficoltà, che a' principianti singolarmente possono occorrere nel maneggio degl' irrazionali, e sviluppamento de' razionali apparenti sotto forme irrazionali.

PROPOSIZIONE I.

§. IV. *Se il Binomio* $A+\sqrt{B}$, *in cui* A, B *sono quantità razionali, e* $\sqrt{B}$ *è un irrazionale semplice quadratico, abbia radice cubica, ella dee almeno constare di due termini.*

Dimostrazione.

Imperciocchè, se può la radice cubica di $A+\sqrt{B}$ constare di un solo termine z, razionale od irrazionale semplice, dovrà essere, elevando al cubo, $z^3 = A + \sqrt{B}$. Se z^3 è razionale, dovrà essere $\sqrt{B} = z^3 - A$ quantità razionale, contro il supposto. E se z^3 è irrazionale semplice, dovrà essere $z^3 - \sqrt{B} = A$, quantità razionale che non può essere. Non potendo dunque la radice cubica di $A+\sqrt{B}$ constare di un solo termine nè razionale, nè irrazionale semplice, è manifesto, che ella dee essere composta almeno di due termini. Il che ecc.

PROPOSIZIONE II.

§. V. *Se* B *fosse razionale negativo, cioè* $\sqrt{B}$ *un immaginario semplice, la radice cubica dell' irrazionale misto* $A+\sqrt{B}$ *sarà anch' essa almeno binomia necessariamente.*

Dimostrazione.

Se ella potesse constare di un sol termine z, dovrebbe, come precedentemente, aver luogo l' equazione z^3

$= A + \sqrt{B}$. La quantità z^3 non può essere razionale, perchè $\sqrt{B}$, come irrazionale, non può mai essere identicamente uguale a quantità razionale, nè come immaginario uguagliare una quantità reale. Ma non può nè pure essere z^3 irrazionale semplice, nè reale, nè immaginario, mentre dovendo sussistere l' equazione $z^3 - \sqrt{B} = A$, dovrebbe nel primo caso essere la differenza di due irrazionali semplici uguale a quantità razionale (§. *II Coroll. IV*), e un immaginario a quantità reale; e nel secondo essere una quantità razionale e reale uguale alla differenza di due immaginarj semplici. Se dunque non può essere monomia la radice cubica di $A + \sqrt{B}$, ella dovrà almeno constare di due termini, posto che $A + \sqrt{B}$ sia un cubo perfetto. Il che ecc.

PROPOSIZIONE III.

§. VI. *Dovendo essere almeno binomia la radice cubica di* $A + \sqrt{\pm B}$, *se sia ella estraibile, li termini della radice o saranno entrambi irrazionali, o razionale l' uno, e l' altro irrazionale.*

La Proposizione è per sè evidente.

PROPOSIZIONE IV.

§. VII. *Se si abbia una quantità, considerata lineare, composta di due parti* A, B, *qualunque esse si sieno; e abbiavi un quadrato* C^2 *uguale alla somma del quadrato* A^2 *e del triplo quadrato* B^2; *ed un altro quadrato* D^2 *uguale alla somma del quadrato* B^2, *e del triplo quadrato* A^2; *il cubo di quella quantità* $A + B$ *è sempre uguale a due solidi, uno de' quali ha per base il quadrato* C^2, *e per altezza la parte* A, *e l' altro ha per base il quadrato* D^2, *e per altezza l' altra parte* B.

Ciò è manifesto dalla genesi istessa de' cubi, e non ha bisogno di dimostrazione.

COROLLARIO I.

§. VIII. Essendo pertanto $(A+B)^3 = AC^2 + BD^2$, si rende pure manifesto, che qualunque cosa sia A e B, essendo considerate grandezze lineari, il cubo di $A+B$ è sempre composto di due solidi d'ognuno de' quali è dimensione, o parte aliquota una delle due quantità A B.

II.

Se una delle due parti B sia un irrazionale quadratico semplice $\sqrt{K}$, qualunque cosa sia K sotto il vincolo radicale, purchè $\sqrt{K}$ sia irrazionale, essendo $(A + \sqrt{K})^3 = AC^2 + D^2\sqrt{K}$; e C^2 essendo la somma del quadrato A^2 e del triplo quadrato di $\sqrt{K}$, il solido AC^2 sarà libero dal vincolo radicale quadratico, qualunque cosa poi sia K, riferendosi l'irrazionalità del secondo termine a questo vincolo, per rispetto al quale $\sqrt{K}$ si considera lineare, e il solo solido $D^2\sqrt{K}$ ne resterà affetto necessariamente.

III.

E' impossibile in conseguenza, che il binomio $AC^2 + D^2\sqrt{K}$ abbia altra radice cubica fuorchè $A+\sqrt{K}$, essendo $C^2 = A^2 + 3K$, $D^2 = K + 3A^2$ (*Prop. IV*).

IV.

Ma è parimente impossibile, che $A+\sqrt{K}$ sia radice cubica d'altro binomio $M+\sqrt{N}$, che non sia reducibile a questa forma $AC^2 + D^2\sqrt{K}$, come è manifesto.

PROPOSIZIONE V.

§. IX. *Perchè il binomio* $M + \sqrt{N}$, *essendo* M N *quantità razionali, possa avere per radice cubica il binomio* $a + \sqrt{b}$, *essendo* a b *quantità reali*, $\sqrt{b}$ *un irrazionale quadratico semplice, bisogna che sia* a *divisore esatto di* M, *e* b *divisore esatto di* N.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè non può $a + \sqrt{b}$ essere radice cubica di binomio, che non sia reducibile alla forma $aC^2 + D^2\sqrt{b}$, essendo $C^2 = a^2 + 3b$, $D^2 = b + 3a^2$ (§. *VIII Coroll. IV*). Perchè dunque $a + \sqrt{b}$ sia radice cubica del binomio $M + \sqrt{N}$, bisogna ch' esso sia di quella forma, o a quella forma reducibile. Ma essendo M N quantità razionali, $\sqrt{N}$ un irrazionale quadratico semplice, se $M + \sqrt{N}$ non è attualmente di quella forma, non ammette per natura sua di esservi ridotto (§. *II Coroll. VI*). In conseguenza perchè questo binomio possa avere $a + \sqrt{b}$ per radice cubica, bisogna che sia attualmente $M = aC^2$ (§. *VIII Coroll. II*), $\sqrt{N} = D^2\sqrt{b}$. Ma a è una dimensione, o divisore esatto di aC^2, b lo è di bD^4. Bisogna dunque che a sia divisore esatto di M, b divisore esatto di N, come s' aveva da dimostrare.

SCOLIO.

§. X. Se sia $A + \sqrt{B}$ radice del grado n del binomio $M + \sqrt{N}$, suole comunemente assumersi $A - \sqrt{B}$, come radice del grado n di $M - \sqrt{N}$. Ma questa posizione non è giusta, se non se nel caso, che A, B, M, N abbiano una certa relazione tra di sè, fuori del quale la conclusione è falsa. Avendo pertanto da farne uso nel decorso di questa Memoria, non è fuor di proposito il prendere in esame accurato quest' articolo, mettendo in chiaro la connessione vera tra le radici de' Binomj $M + \sqrt{N}$, $M - \sqrt{N}$, e la condizione, senza di cui, se sia $A + \sqrt{B}$ la radice $n.^{ima}$ del primo, non può essere $A - \sqrt{B}$ radice $n.^{ima}$ del secondo. Mi sarebbe forse sembrato superfluo il farlo, se non trovassi nel XIII. Vol. *de' vecchj Comment. di S. Pietroburgo* alla pag. 17., enunciata la cosa in modo, che può indurre in errore agevolmente.

Sia $z + y$ la radice quadrata, per esempio, del binomio $A + \sqrt{B}$. E' certo che dee necessariamente aver luogo quest' equazione.

$$(P) \ldots\ A + \sqrt{B} = z^2 + 2zy + y^2$$

Sin che si sta in questa generalità, z ed y sono indeterminate, e possono essere quel che si vuole, purchè si soddisfaccia all' equazione (P). E se si aggiunga negativamente da una parte e dall' altra l' irrazionale semplice $2\sqrt{B}$, risulta l' equazione.

$$(Q) \ldots A - \sqrt{B} = z^2 + 2zy + y^2 - 2\sqrt{B}$$

equazione necessaria al par della prima, e che lascia le z, y nella stessa indeterminazione. Soddisfacendo all' equazione (P), qualunque cosa risulti per z ed y, nell' atto che si conseguisce la radice di $A + \sqrt{B}$, è data pure dall' equazione (Q) la radice di $A - \sqrt{B}$. Questa è la vera ed unica connessione necessaria tra le radici di questi due binomj, sì che essendo $\sqrt{(A + \sqrt{B})} = z + y$, non lascia pure di essere $\sqrt{(A - \sqrt{B})} = \sqrt{((z + y)^2 - 2\sqrt{B})}$. Ma se si traggano dall' equazione (P) diverse paja di equazioni (I), (II), (III) ecc.

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{B} &= 2zy + y^2 \\ A &= z^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (I)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= z^2 + 2zy \\ \sqrt{B} &= y^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (II)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= z^2 + y^2 \\ \sqrt{B} &= 2zy \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (III)$$

ecc.

combinando a piacere i termini dell'equazione, non ha dubbio, che a qualunque di queste combinazioni (I), (II) ecc. si soddisfaccia separatamente, si è ad un tempo soddisfatto all' equazione (*P*). Se dunque sia M il valor di z, N quel d' y della combinazione (I); M' il valor di z, N' quel d'y della combinazione (II) ecc.; poichè debbe sempre essere $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, sarà necessariamente $M+N=M'+N'=M''+N''$ ecc. Ora si finga essere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=z-y$. Sarà $A-\sqrt{B}=z^2-2zy+y^2$, ed essendo $A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$, se si sommino, e si sottraggano successivamente queste due equazioni, si ha

$$A=z^2+y^2$$
$$\sqrt{B}=2zy$$

che è appunto la combinazione (III). Questa è la combinazione, che determina i valori di z ed y, sicchè essendo $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, viene pure ad essere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=z-y$. Ma il supporre, che debba risultare lo stesso in qualunque delle rimanenti combinazioni, è lo stesso che supporre, che, come divisa una linea in due parti qualunque M N, poi in altre due M', N', e così successivamente, è sempre $M+N=M'+N'=M''+N''$ ecc., debba anche essere necessariamente $M-N=M'-N'=M''-N''$ ecc. che non può essere „ *Inter utramque formam* (così si esprime l' illustre Sig. *Eulero* nel luogo sopraccitato) *tam arctus intercedit nexus, ut inventa alterius formæ radice cujusvis gradus, ex ea simul radix alterius formæ facillime formari queat* „. In fatti essendo $\sqrt[n]{(A+B)}=M+N$, sarà $\sqrt[n]{(A-B)}=\sqrt[u]{((M+N)^n-2B)}$, come abbiamo indicato precedentemente, ma non per quello che vi si adduce in seguito „ *Si enim radix cujuscumque potestatis ex binomio* A+B *fuerit* x+y, *tum respondentis residui* A—B *radix ejusdem potestatis erit* x—y „.

Pigliamone un esempio facile

Sia $\sqrt{(A+B)} = z+y$; sarà $A+\sqrt{B} = z^2+2zy+y^2$, ed assunta a piacere una combinazione, pongo $A=2zy$, $\sqrt{B}=z^2+y^2$. Sostituendo nella seconda equazione il valore di z tratto dalla prima, si avrà l' equazione

$y^4 - y^2\sqrt{B} + \frac{A^2}{4} = 0$, la quale somministra

$y = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{(B-A^2)}}{2}\right)} = \mathfrak{Q}$, e però $z = \frac{A}{2\mathfrak{Q}}$, e $\sqrt{(A}$ $+\sqrt{B}) = \frac{A}{2\mathfrak{Q}} + \mathfrak{Q}$. Ma essendo $A+\sqrt{B} = (z+y)^2$, e però necessariamente $A-\sqrt{B} = (z+y)^2 - 2\sqrt{B}$, perchè possa essere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}$ uguale a $z-y$, dovrà essere $(z+y)^2 - 2\sqrt{B} = (z-y)^2$, cioè $2zy=\sqrt{B}$. Ma $\sqrt{B} = z^2+y^2$: bisognerebbe dunque che avesse luogo l'equazione $2zy = z^2+y^2$, cioè che fosse $A=\sqrt{B}$, $\sqrt{(A+\sqrt{B})} = \sqrt[4]{4B}$, e $\sqrt{(A-\sqrt{B})} = 0$

Non è dunque lecito di conchiudere, dall' essere $\sqrt[n]{(A+B)} = z+y$, che sia pure $\sqrt[n]{(A-B)} = z-y$, se non abbiano luogo le due equazioni

$$A = z^n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} z^{n-2} y^2 + \frac{n\ldots(n-3)}{1\,.\,2\ldots 4} z^{n-4} y^4 + \text{ecc.}$$

$$B = \frac{n}{1} z^{n-1} y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} z^{n-3} y^3 + \frac{n\ldots(n-4)}{1\,.\,2\ldots .\,5} z^{n-5} y^5 + \text{ecc.}$$

cioè se non si determinino da queste relazioni i valori di z ed y. Ed è poi manifesto che a questa condizione è sempre legittima l' assunzione, come s' è detto da principio.

PROPOSIZIONE VI.

§. XI. *Se l' equazione* (Δ)

$(\Delta) \ldots.\ 64z^9 - 48Az^6 + (27B - 15A^2)z^3 - A^3 = 0$

ammetta per z *un valore razionale, il binomio* $A \pm \sqrt{B}$, *essendo*

essendo A, B *razionali*, $\sqrt{B}$ *irrazionale semplice*, *avrà radice cubica binomia composta di razionale*, *ed irrazionale semplice di questa forma* $M \pm \sqrt{N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Suppongasi che sia $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}=z+\sqrt{y}$. Innalzando al cubo, dovrà essere $A+\sqrt{B}=z^3+3zy+(3z^2+y)\sqrt{y}$; e perchè risulti $\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})}=z-\sqrt{y}$, assumiamo la combinazione necessaria (§. *X.*)

$$A=z^3+3zy,\ \sqrt{B}=(3z^2+y)\sqrt{y}$$

Quadrando l' una e l' altra equazione, si otterrà

$$A^2=z^6+6z^4y+9z^2y^2$$
$$B=9z^4y+6z^2y^2+y^3$$

e sottraendo la seconda di queste equazioni dalla prima s' avrà $A^2-B=(z^2-y)^3=\frac{(4z^3-A)^3}{27z^3}$, sostituendovi il valore di y tratto dall' equazione $A=z^3+3zy$. Quest' equazione ridotta somministra l' equazione (Δ)

$$(\Delta)\ \ldots\ 64z^9-48Az^6+(27B-15A^2)z^3-A^3=0$$

Se dunque si abbia un valore razionale per z da quest' equazione $=M$, poichè $y=\frac{A-z^3}{3z}$, sarà pure dato razionalmente il valore di $y=\frac{A-M^3}{3M}=N$, e però sarà $\sqrt[3]{(A\pm\sqrt{B})}=M\pm\sqrt{N}$, come s' aveva da provare.

COROLLARIO I.

§. XII. Siccome l' equazione $A^2-B=\frac{(4z^3-A)^3}{27z^3}$ può essere messa sotto questa forma

$$(8z^3 - 2A)^3 = (27A^2 - 27B)\,8z^3$$

dalla quale estratta la radice cubica s' ottiene l' equazione

$$(\Delta') \ldots . (2z)^3 - 3(2z)\sqrt[3]{(A^2 - B)} - 2A = 0$$

è manifesto, che se v' abbia per z valore razionale M nell' equazione (Δ'), si avrà, come prima, $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M \pm \sqrt{N}$.

COROLLARIO II.

E se fosse il secondo termine del binomio un immaginario semplice; ponendo nell' equazioni di condizione (Δ) (Δ'), $-B$ in luogo di B, sempre che abbiavi per z valore razionale nell' una, o nell' altra di quelle equazioni, sarà $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{-B})} = M \pm \sqrt{-N}$, siccome è manifesto.

COROLLARIO III.

E facendo considerazione all' equazione (Δ') del §. *XII*, nella quale non può avervi per z valore razionale, se non sia $\sqrt[3]{(A^2 - B)}$ quantità razionale, se ne ricava un comodo e nuovo criterio, ond'essere certi immediatamente, che il binomio $A + \sqrt{\pm B}$ non ha per radice cubica un irrazionale misto, subito che $A^2 \mp B$, quantità razionale, non è un cubo perfetto, di che è facilissimo l' accertarsi; e vicendevolmente $A^2 \mp B$ sarà sempre un cubo, allorchè sia un cubo $A + \sqrt{\pm B}$.

PROPOSIZIONE VII.

§. XIII. *Se nell' una, o nell' altra delle equazioni* (Δ), (Δ') *abbiasi per z un valore razionale, essendo v quantità razionale arbitraria*

$(\Delta) \ldots\ 64z^9 v^3 - 48Az^6 v + (27B - 15A^2) z^3 v - A^3 = 0$

$(\Delta') \ldots\ (2z)^3 v - 3(2z \sqrt[3]{v(A^2 - B)} - 2A = 0$

il binomio $A \pm \sqrt{B}$ *avrà radice cubica binomia composta di due irrazionali semplici di questa forma.*

$$M \sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{v^2 N^3})$$

DIMOSTRAZIONE.

Supongasi $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = z\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 y^3)}$. Avremo, cubando, $A + \sqrt{B} = z^3 v + 3zvy + (3z^2 v + vy)\sqrt{y}$; e perchè sia $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = z\sqrt[3]{v} - \sqrt[6]{(v^2 y^3)}$, si assumano (§. X) le due equazioni.

$$A = z^3 v + 3zvy$$
$$\sqrt{B} = (3z^2 v + vy)\sqrt{y}$$

Quadrandole entrambe, e sottraendo il quadrato della seconda dal quadrato della prima si avrà

$$v(A^2 - B) = (z^2 v - vy)^3$$

e però $\sqrt[3]{v(A^2 - B)} = z^2 v - vy$. Ma $y = \frac{A - z^3 v}{3zv}$. Dunque sostituendo, riducendo, e moltiplicando per 2, si avrà l'equazione

$(\Delta') \ldots\ (2z)^3 v - 3(2z)\sqrt[3]{v(A^2 - B)} - 2A = 0$

la quale, cubando, diventa

$(\Delta) \ldots\ 64z^9 v^3 - 48Az^6 v^2 + (27B - 15A^2) z^3 v - A^3 = 0$

Se dunque si abbia per z valore razionale $= M$ nell'una o nell'altra di queste due equazioni, preso per v un razionale opportuno, sarà $y = \frac{A - M^3 v}{3Mv} = N$, e però $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(v^2 A^3)}$, come conveniva dimostrare.

COROLLARIO.

§. XIV. Se $\sqrt{B}$ fosse immaginario semplice, basta porre nell' equazioni di condizione $-B$ in luogo di B, sì che avendovi in tal caso per z radice razionale, e per v valore razionale convenevole, si avrà $\sqrt[3]{(A\pm\sqrt{-B})} = M\sqrt[3]{v}\pm\sqrt[6]{(-v^2 N^3)}$.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XV. *Se l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

ammetta per x *un valore razionale, essendo* p q *razionali, il binomio* $\frac{q}{2}\pm\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$ *avrà per radice cubica un irrazionale misto di questa forma* $M\pm\sqrt{N}$, *essendo* M N *razionali, e* $\sqrt{N}$ *un irrazionale quadratico semplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Si supponga essere $z+\sqrt{y}=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}$. Sarà cubando

$\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})} = z^3+3zy+(3z^2+y)\sqrt{y}$; e perchè sia $z-\sqrt{y}=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\right)}$, si assumano, come qui innanzi, le due equazioni

$$q = 2z(z^2+3y)$$

$$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})} = (3z^2+y)\sqrt{y}$$

Quadrando queste due equazioni, e sottraendo al solito il quadrato della seconda dal quadrato della prima, si perverrà a questa ridotta (§. §. XI. XII.) $A^2 - B = \frac{p^3}{27}$

$$= \frac{\left(4z^3 - \frac{q}{2}\right)^3}{27z^3},$$ da cui estratta la radice cubica, e posto x in luogo di $2z$, si otterrà l' equazione

$$(\Delta) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0.$$

Qualor dunque ammetta quest' equazione per x un valor razionale $= M$, sarà y razionale $= \frac{4q - M^3}{12M} = N$, e però $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = M \pm \sqrt{N}$, come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

§. XVI. Che se fosse $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, posta y negativa, si avrebbe trovato $\frac{M^3 - 4q}{12M}$ pel suo valore $= -N$, e la radice cubica del binomio sarebbe stata $M \pm \sqrt{-N}$, come deve essere.

PROPOSIZIONE IX.

§. XVII. *Se l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

non ammetta radice razionale, il binomio $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica un irrazionale misto della forma* $M \pm \sqrt{\pm N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, se può averla, sia ella $a \pm \sqrt{\pm b}$. Operando come nelle Proposizioni precedenti, si perverrà alla ridotta

$$(\mu) \ldots (2a)^3 - p(2a) - q = 0$$

Dovendo pertanto essere a razionale, l' equazione (μ) avrà radice razionale. Ma l' equazione (μ) è lo stesso che l' equazione (Δ), posta x in luogo di $2a$. Dunque l' equazione (Δ) ammetterebbe radice razionale, contro il supposto. Non ammettendo dunque l' equazione (Δ) radice razionale, non può essere la radice cubica del binomio proposto un irrazionale misto della forma $M \pm \sqrt{\pm N}$. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE X.

§. XVIII. *Se il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non abbia per radice cubica un irrazionale misto della forma* $M \pm \sqrt{\pm N}$, *ma l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

ammetta per x *un valore razionale, avrà il binomio per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$, *essendo* v *razionale arbitrario, e* $\sqrt{v}$ *irrazionale semplice*.

DIMOSTRAZIONE.

Si supponga essere $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = z\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 y^3)}$. Cubando, e operando, come nelle Prop.

precedenti, ſi perverrà facilmente alla ridotta

$$(\Delta)\ldots\ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

poſta x in luogo di $2z$. Se dunque poſſa trovarſi per v valore razionale, che non ſia un cubo perfetto, tale, che l'equazione (Δ) ammetta per x radice razionale $= 2M$, è manifeſto, che ſi avrà anche per $\pm y$ il valore razionale $\frac{\mp 4q \pm M^3 v}{12 Mv} = \pm N$, e però ſarà $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$, come dovea dimoſtrarſi.

ESEMPIO.

Sia il binomio $52 + \sqrt{(2700)}$. Sarà $q = 124$, $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 2700$. Dunque $p = 3\sqrt[3]{4}$. Se pertanto l'equazione

$$x^3 v - 3x\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{v} - 104 = 0$$

abbia radice razionale, ſarà $\frac{x}{2}\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 N^3)}$ la radice ricercata. Ma appunto poſto $v = 2$, l'equazione

$$x^3 - 3x - 52 = 0$$

ha per radice razionale il 4. Dunque la radice cubica del binomio ſarà $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{108}$.

PROPOSIZIONE XI.

§. XIX. *Se l'equazione* (Δ)

$$(\Delta)\ldots\ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

non ammetta radice razionale, essendo v *quantità razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale semplice, il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ *non ha per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$

DIMOSTRAZIONE.

Se può averla, sia ella $a\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 b^3)}$, b essendo positivo o negativo secondo che $\sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ è reale o immaginario. Operando come in tutte le Proposizioni precedenti si perverrà a questa ridotta

$$(\Delta') \ldots . (2a)^3 v - p(2a)\sqrt[3]{v} - q = 0$$

la quale deve ammettere radice razionale per a, affinchè $a\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 b^3)}$ sia la radice cubica del binomio proposto. Ma l' equazione (Δ') è lo stesso che l' equazione (Δ), che non la ammette per supposizione, sol che si ponga $2a$ in luogo di x. Dunque l' equazione in a dovrebbe ad un tempo ammettere, e non ammettere radice razionale; il che non può essere. Se dunque l' equazione (Δ) ecc., come dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XII.

§. XX. *L' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots . (2z)^3 v - 3(2z)\sqrt[3]{v}\sqrt[3]{(A^2 \pm B)} - 2A = 0$$

in cui v *esser dee razionale ad arbitrio,* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale,* A, *e* B *razionale; qualunque quantità si assuma per* v, *che non sia un cubo, non può ammettere mai radice razionale,*

razionale, se $\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$ *non sia irrazionale, e tale, che* $v(A^2 \pm B)$ *diventi un cubo perfetto.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, dovendo essere

$$\frac{(2z)^3 v - 2A}{6z} = \sqrt[3]{v}\,\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$$

e nello stesso tempo razionale il primo membro dell' equazione, bisogna che dal prodotto de' due irrazionali $\sqrt[3]{v}$, $\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$ risulti necessariamente una quantità razionale, cioè che $\sqrt[3]{v(A^2 \pm B)}$ sia una quantità razionale. Ma ciò non può mai essere, se $v(A^2 \pm B)$ essendo razionale, non sia ad un tempo un cubo perfetto. Dunque ecc. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

§. XXI. Se dunque $A^2 \mp B$ sia un cubo perfetto P^3, poichè non deve esserlo ad un tempo anche l' arbitraria v, altrimenti $\sqrt[3]{v}$ non sarebbe quantità irrazionale, come si richiede, non potrà mai $v(A^2 \mp B)$ essere un cubo razionale, dovendo risultare sempre $P\sqrt[3]{v}$, che non può esserlo. E però in tal caso non avrà l' equazione (Δ) della Prop. precedente radice razionale.

SCOLIO.

Accade ordinariamente ne' Problemi d' Algebra, che le soluzioni generali abbracciano più di quello, che immediatamente, e direttamente richiede la Quistione. A torto per altro se ne accusa la Scienza, quasi l' imperfezione fosse dell' Arte non mai dell' Artefice. Due, per esempio, sono i valori, che necessariamente debbono aver luogo in una data Quistione. L' Algebra ne framescola bene spesso un complesso d'altri, parte reali, parte ancora immaginarj. Convengo, che quest' è il caso d' una ricchezza incomoda e perchè ci bisogna separare le radici necessarie dalle straniere all' assunto, e perchè non possiamo farlo talvolta per alcun modo. Ma o ci manchi il metodo di risolvere le equazioni, che ne risultano, o sieno state introdotte dall' Algebrista relazioni straniere, o non abbia svolte le relazioni date con la necessaria circospezione, questa ricchezza non è mai un difetto della Scienza. Imperciocchè o il richiegga necessariamente l'estensione delle relazioni date, o il comporti un inosservato, e non sempre osservabile insinuarsi di nuove condizioni, che vi si fa nello svolgimento della quistione, il finale risultamento per parte della Scienza è sempre necessario, e determinato dalle circostanze. Il metodo, per esempio, che abbiamo tenuto precedentemente nel maneggiare le radici cubiche $z \pm \sqrt{\pm y}$ de' binomj irrazionali $A \pm \sqrt{\pm B}$ ci ha sempre portato a equazioni di terzo grado direttamente, siccome la quistione il dimanda. Eppure abbiamo un esempio memorabile nel V. Vol. degli Opusc. del celebre, ed illustre Geometra Sig. d' *Alembert* pag. 192, e seq., che in questo medesimo caso s' introducono nella soluzione sei radici straniere del tutto alla quistione, creando così una vera difficoltà da superare, come dottamente ha egli poi fatto nel decorso di quell' Opuscolo. Di fatto sia $A = \frac{q}{2}$, $B = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$, e posto $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = z + \sqrt{y}$, $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = z - \sqrt{y}$, si perviene alle due equazioni.

$$q = 2z(z^2 + 3y) \qquad (1)$$

$$\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}=(3z^2+y)\sqrt{y}\ (\text{II})$$

Togliendo l'asimetria, e maneggiando co' metodi comuni queste due equazioni onde ricavare il valore di z, si perviene ad una ridotta di nono grado. Parrebbe dunque (*così il Sig. d' Alembert*), che z dovesse avere nove valori possibili, ancorchè realmente non ne abbia che tre soddisfacenti all'equazione $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+\sqrt{y}$. Non sarebbe difficile il far conoscere, come abbiano potuto insinuarsi per questa via valori stranieri nella soluzione. All'opposto, si quadrino le due equazioni (I), (II), e si sottragga il quadrato della seconda dal quadrato della prima; ne risulta l'equazione $\frac{p^3}{27}=\frac{\left(4z^3-\frac{q}{2}\right)^2}{27z^3}$, che è un cubo perfetto. Estratta pertanto la radice cubica ne viene la ridotta semplicissima $(2z)^3-p(2z)-q=0$ di terzo grado, che dà tre soli valori per z, come conviene.

Si potrebbero recare infiniti esempj di somiglianti soluzioni, se non fossero fuori del nostro assunto. Ho addotto questo, perchè vi si attiene strettamente, e n'ho profittato volentieri per mostrare, quanto dissenta, e non senza fondamento dall'opinione di molti, anche dottissimi uomini, che di tratto in tratto declamano contro sì fatte imperfezioni, ch'essi dicono, dell'Algebra. Si dovrebbe piuttosto prendere da questo motivo di ammirarne la perfezione, siccome quella che all'interpolarsi in una quistione del più piccolo, per così dire, elemento straniero al soggetto o con elevazione a potenze, o con introduzione di qualche fattore, o per simile altra operazione, che non altera per verità l'eguaglianza de' membri, ma vale di fatto a moltiplicare le soluzioni, manifesta subito sintomi totalmente nuovi, e corrispondenti all'alterazione indottavi, inviluppando co' risultamenti proprj della quiſtione una moltiplicità d' altre ſoluzioni, che le ſono improprie. Non può quindi dirſi più perfetta l' Algebra nel darci un' equazione di terzo, che è propria della quiſtione, che una di nono corriſpondente alle nuove condizioni tacitamente introdotte nel maneggiare le relazioni fondamentali.

PROPOSIZIONE XIII.

§. XXII. *Tutte le equazioni di terzo grado ſi poſſono ridurre all' equazione (F)*

$$(F) \quad \ldots \quad x^3 - px - q = 0$$

PROPOSIZIONE XIV.

§. XXIII. *Riſoluta l'equazione (F) col metodo di Cardano, ne riſulta generalmente una delle radici ſotto queſta forma*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

PROPOSIZIONE XV.

§. XXIV. *Qualunque volta ſia* $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, *tutte e tre le radici dell' equazione (F) ſono reali, e diſeguali.*

Queſte tre Propoſizioni ſono ampiamente dimoſtrate nell' Algebra comune.

PROPOSIZIONE XVI.

§. XXV. *La formula Cardanica*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

essendo p q *grandezze reali, in qualunque caso è sempre radice dell' equazione (F)*

$$(F)\ \ldots\ldots\ x^3 - px - q = 0$$

e radice sempre reale.

D I M O S T R A Z I O N E.

Si faccia $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{23}\right)}\right)} = x$.

Sarà cubando

$$x^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} \times \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

$$\times \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} \times \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

$$\times \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^3}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} = q + 3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

$$\times \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} \times \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}}\Bigg) + 3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

$$\times \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} \times \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}.$$

Ma $\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right) = \frac{p^3}{27}$. Dunque sarà

$x^3 = q + p\left\{\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}\right\}$. Ed è poi

$$-px = -p\left\{\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}\right\}$$

$$-q = -q.$$

In conseguenza, facendo l'aggregato degli omogenei di comparazione, sarà $x^3 - px - q = 0$, che è l'equazione cubica (F). Dunque la formola Cardanica in qualunque caso è una radice di quest' equazione. Resta da provare, ch' ella sia sempre radice reale. Ma essendo $\frac{p^3}{27}$

minore di $\frac{q^2}{4}$, o eguale a $\frac{q^2}{4}$, la formola è ſempre reale; e nel caſo di $\frac{p^3}{27}$ maggiore di $\frac{q^2}{4}$, in cui appunto ella appariſce ſotto aſpetto immaginario, tutte tre le radici dell'equazione ſono reali (§. *XXIV.*); non può dunque la formola eſſere radice dell'equazione (F) ſenza eſſere neceſſariamente radice reale. Dunque la formola Cardanica in qualunque caſo è radice dell' equazione (F), e radice ſempre reale. Il che ecc.

DEFINIZIONE.

§. XXVI. Caſo irreducibile del terzo grado è quello, in cui le quantità p, q dell'equazione (F)

$$(F) \ldots\ldots\ x^3 - px - q = 0$$

eſſendo razionali, e $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, neſſun diviſore eſatto dell' ultimo termine q può ſoddisfare all'equazione (F); oppure, che è lo ſteſſo, Caſo irreducibile del terzo grado è quello, in cui le quantità p, q dell'equazione (F) eſſendo razionali, tutte e tre le radici dell' equazione debbono eſſere reali, diſeguali, e irrazionali.

SCOLIO.

§. XXVII. La condizione delle quantità p, q razionali, non atteſa quanto baſta, ha fatto equivocare più d'uno in queſto argomento. V'ha un'infinità di equazioni di terzo grado aventi tre radici reali, diſeguali, e irrazionali, le quali ciò non oſtante non entrano nella Claſſe delle irreducibili. Baſta tor via dall'equazione qualunque irrazionalità, perchè ella divenga toſto reducibile, ed abbiavi in conſeguenza diviſore dell'ultimo termine ſoddisfacente all'equazione. Ne ho fatto chiaro cenno al §. 88. nell' *Esercitazione Analitica* citata testè nell' Introduzione, di modo che quelle stesse equazioni del Sig. *Nicole* (*Mem.* 1738. 1740), e tutte le infinite simili, che possono trovarsi, le quali erano giudicate come casi rapiti all' irreducibilità (*Enciclop. Cas irred.*), non lo sono altramente, siccome può ognuno accertarsene agevolmente col ridurle alla forma (F) del §. precedente, con le quantità p, q razionali, al che non s'era posto mente.

PROPOSIZIONE XVII.

§ XXVIII. *Nel caso irreducibile il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica alcun irrazionale misto di questa forma* $M \pm \sqrt{-N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè non avendo in questo caso l'equazione (F) (§. XXVI.) alcun divisore esatto dell' ultimo termine, che soddisfaccia all'equazione, non ha ella per x radice razionale. Ma in tal caso non ha il binomio proposto radice cubica di quella forma (§. *XVII*). Dunque ecc.

PROPOSIZIONE XVIII.

§. XXIX. *Nel caso irreducibile il binomio* $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M \sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(-v^2 N^3)}$, *essendo* v *razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale semplice*.

DIMOSTRAZIONE.

Se può averla, ſia ella $z\sqrt[3]{v}+\sqrt[6]{(-v^2y^3)}$, eſſendo z ed y indeterminate. Operando come nella Prop. VII., ſi perverrà alla ridotta (I)

$$(I) \; . \; . \; . \; . \; . \; (2z)^3 v - p(2z)\sqrt[3]{v} - q = 0$$

Se dunque quella è la radice cubica del binomio propoſto, l' equazione (I) avrà per z radice razionale (§. *XIX.*). Ma eſſendo p quantità razionale, $\sqrt[3]{v}$ irrazionale, non può l' equazione (I) avere radice razionale, qualunque quantità razionale ſi aſſuma per v (§§. *XX. XXI.*). Non può dunque il propoſto binomio avere nel caſo irreducibile radice cubica di quella forma, come s' aveva da dimoſtrare.

PROPOSIZIONE XIX.

§. XXX. *In qualunqe equazione del terzo grado*

$$x^3 - px - q = 0$$

in cui tutte tre le radici dell' equazione ſono reali, e diſeguali, il quadrato di qualunque delle tre radici è ſempre minore di $\frac{4p}{3}$

DIMOSTRAZIONE.

Sieno a, $-a'$, $-a''$, oppure $-a$, a', a'' le radici dell' equazione. Mancando il ſecondo termine, ſarà per i principj dell' Algebra, $a = a' + a''$, e però l' equazione prende queſta forma.

$$x^3 - (a'^2 + a'a'' + a''^2)x \pm a'a''(a' + a'') = 0$$

Eſſendo

Essendo manifesto, che $\frac{4}{3}(a'^2 + a'a'' + a''^2)$ è maggiore del quadrato a'^2, oppure a''^2 di ciascuna delle radici, resta che si dimostri essere quello maggiore di $a^2 = (a' + a'')^2$. Ora essendo la somma de' quadrati di due quantità maggiore del doppio prodotto delle medesime quantità, sarà $a'^2 + a''^2 > 2a'a''$. Dunque $a'^2 + 4a'a'' + a''^2 > 6a'a''$, e però $4a'^2 + 4a'a'' + 4a''^2 > 3a'^2 + 6a'a'' + 3a''^2$. In conseguenza $\frac{4}{3}(a'^2 + a'a'' + a''^2) > a'^2 + 2a'a'' + a''^2 > (a' + a'')^2 > a^2$. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XX.

§. XXXI. *La formola Cardanica è reducibile a forma razionale in ogni caso di* $\frac{p^3}{27} \gtrless \frac{q^2}{4}$, *purchè l' ultimo termine* q *abbia divisore esatto, che soddisfaccia all'equazione (F)*

$$(F) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il binomio $\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)$ ha per radice cubica l'irrazionale misto $M + \sqrt{\pm N}$, tosto che l'equazione *(F)* ammette per x un valore razionale $= 2M$ *(§. §. XV. XVI.)*; cioè tosto che l'ultimo termine q ha divisore esatto, che soddisfà all' equazione, che è lo stesso. Ma in tal caso anche $\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ ha per radice cubica il binomio $M - \sqrt{\pm N}$. *(nello stesso luogo)*. Dunque la somma de' due radicali, cioè la formola Cardanica

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=2M=x$$

che è razionale. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XXI.

§. XXXII. *La formola Cardanica è reducibile alla forma irrazionale* x$\sqrt[3]{v}$ *in ogni caſo di* $\frac{p^3}{27} \gtrless \frac{q^4}{4}$, *purchè l'equazione* (F')

$$(F') \; \ldots\ldots \; x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

ammetta per x *radice razionale, eſſendo* v *un razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale ſemplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Toſto che l'equazione (F') ammette per x un valore razionale $2M$, il binomio $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$ ha per radice cubica il binomio irrazionale $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$ (§. *XVIII.*). Dunque la ſomma de' due radicali, cioè la formola Cardanica

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=2M\sqrt[3]{v}$$

$= x\sqrt[3]{v}$, come s'aveva da dimoſtrare

PROPOSIZIONE XXII.

La formola Cardanica nel caſo irreducibile non è reducibile nè a forma razionale x, *nè a forma irrazionale miſta* x $+ \sqrt{v}$ *eſſendo* $\sqrt{v}$ *irrazionale ſemplice reale,* *nè a forma irrazionale semplice* $x\sqrt[3]{v}$, *essendo* v *qualunque razionale ad arbitrio.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Parte. La prima parte della proposizione è per sè evidente subito che l' equazione Cubica nel caso irreducibile non ammette radici razionali.

II. Parte. Si supponga, se può esserlo,

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=x+\sqrt{v}$$

e si faccia $x+\sqrt{v}=r$, $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=T$. Poichè $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\frac{p}{3}$, e per conseguenza $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=p:\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, sarà $r=T+p:3T$, $T^2-rT+p:3=0$, e $T=\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}$ $=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, ove $\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}$ è un immaginario semplice (§. XXX.). Dovrà pertanto essere $\frac{r}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{v}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left((x+\sqrt{v})^2-\frac{4p}{3}\right)}$ la radice cubica del binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$. Ma questo binomio nel caso irreducibile non ha per radice cubica un irrazionale di questa forma (§. XXVIII.). Dunque ecc.

III. Parte. Supposto, come nell' art. preced.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=x\sqrt{v}=r,$$

e fatte le ſteſſe operazioni, ſi perverrà all' equazione $\frac{r}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(r^2 - \frac{4p}{3}\right)} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)}$, la quale dovrà eſſere la radice cubica del binomio $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$. Ma $\frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)^3}$; e il binomio $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ non ammette nel caſo irreducibile per radice cubica un irrazionale di queſta forma (§. *XXIX.*). Dunque ecc. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XXIII.

§. XXXIV. *La formula Cardanica nel caſo irreducibile non ammette altra forma algebraica finita, fuorchè la propria ſotto aſpetto immaginario.*

DIMOSTRAZIONE.

Se può ammetterla, comunque ella ſiaſi funzione di p ſolo, o di q ſolo, o di p e q inſieme, la ſi rappreſenti generalmente per ϕ. Sarà pertanto $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = \phi$. Ma eſſendo $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = \frac{p}{3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}} = \frac{p}{3T}$, poſto $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = T$; ſarà $\phi = T + \frac{p}{3T}$, e però $T^2 - \phi T + \frac{p}{3} = 0$. Dunque $T = \sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}}$

$+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p3}{27}\right)}\Big)=\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\phi^2-\frac{4p}{3}\right)}$; binomio in cui $\sqrt{\left(\phi^2-\frac{4p}{3}\right)}$ è un immaginario femplice, per effere il quadrato di qualunque delle tre radici ϕ fempre minore di $\frac{4p}{3}$ (§. XXX.). Perchè dunque la formula Cardanica poffa ammettere la forma ϕ, bifogna che il binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$ ammetta radice cubica, che fia funzione di ϕ di quefta forma $\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\phi^2-\frac{4p}{3}\right)}$. Ma perchè fia $\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\phi^2-\frac{4p}{3}\right)}$ la radice cubica del binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$, effendo p q quantità razionali, è neceffario, che ϕ fia divifore efatto di q (§. IX.). Dunque in primo luogo la formula Cardanica ammetterà quefta forma ϕ, fubito che ϕ poffa effere parte aliquota di q. Ma dalla fuppofizione di $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$ $+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\phi$, operando come nella XVI. Prop., rifulta l'equazione finale

$$(P)\ldots\ \phi^3-p\phi-q=0$$

E però la forma ϕ deve effere radice di queft'equazione. Di nuovo pertanto la formula Cardanica ammetterà la forma ϕ, fubito che ϕ fia e divifore efatto di q, e radice dell'equazione (P). Ma l'equazione (P) è precifamente l'equazione (F) del cafo irreducibile (§. XXVI.); e nel cafo irreducibile neffun divifore efatto dell'ultimo termine q può effere radice dell'equazione

(F) (*ibid.*). Non può dunque esser ϕ parte aliquota di q, e radice dell'equazione (P). E perciò la formola Cardanica non può ammettere nel caso irreducibile la forma ϕ. Ma ϕ rappresenta qualsivoglia immaginabile forma. Per conseguenza la formula Cardanica non ammette nel caso irreducibile altra forma algebraica finita, fuorchè la propria sotto aspetto immaginario. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XXIV.

§. XXXV. *Non è possibile di trovare per la radice* x *dell'equazione cubica* (F)

$$(F) \ldots\ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

nel caso irreducibile un valore algebraico, finito, e libero da apparenza immaginaria.

DIMOSTRAZIONE.

Se è possibile, sia ϕ questo valore. Essendo la formula Cardanica in ogni caso radice reale dell'equazione (F) (§. *XXV.*), sarà necessariamente

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\phi.$$

In conseguenza la formula Cardanica sarà reducibile a forma algebraica finita, libera da apparenza immaginaria. Ma ciò non può essere (§. *XXXIV.*). Dunque non è possibile ecc., come dovea dimostrarsi.

SCOLIO.

§. XXXVI. Non sarà inutile, che sieno qui per ultimo recapitolate, e poste in serie le conclusioni capitali attinenti a questo sottile e difficile argomento, che non possono più revocarsi in dubbio senza offesa della verità, e senza introdur cavillazioni, che facciano manifesto torto piuttosto all'analista, che all'analisi, alla quale non può ragionevolmente addossarsi il difetto di chi la maneggia. Possiamo pertanto tener per certo

I. Che la risoluzione Cardanica è legittima; sopra di che ragioneremo qui appresso.

II. Che la formula o il binomio Cardanico (D)

$$(D)\ldots\ldots\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

è sempre la vera radice dell' equazione cubica generale (F)

$$(F)\ \ldots\ldots\ x^2 - px - q = 0$$

e radice sempre reale (§. XXV.), cioè il vero valore di x in ogni caso, tanto se l'equazione (F) non abbia che una sola radice reale, quanto se le abbia tutte e tre reali, comunque poi esse si sieno razionali o irrazionali, esprimendole la medesima formola tutte e tre, come si dimostra non difficilmente.

III. Che nel caso poi denominato irreducibile, su cui non può nascere equivoco (§. *XXVI*), ognuno de' termini del binomio (D) è quantità assolutamente immaginaria, la quale nè per trasformazioni, nè per artificiose riduzioni potrà mai cangiar natura, e resterà sempre in fondo, se anche prendesse apparenza reale, quantità immaginaria. Ma presi que' due termini insieme la loro somma costituisce una quantità reale, ed esprime una vera e reale radice dell'equazione (F).

IV. Che è cosa ormai dimostrata a sazietà, che quel binomio (D) nel caso irreducibile non potrà mai conseguire altra forma ugualmente algebraica, finita, e reale, la quale non implichi e involga aspetto immaginario.

V. E che finalmente, dopo tutto questo, resta dimostrato, che non è possibile per alcun immaginabile metodo di trovare una radice dell'equazione (F), nel caso irreducibile, algebraica finita e reale, la quale sia nello stesso tempo libera da aspetto immaginario. In fatti ſe ciò è poſſibile, biſogna neceſſariamente, ch'ella coincida con la radice (D), e le ſia eguale, giacchè eſprimono entrambe una medeſima radice dell'equazione (F). Sarebbe dunque la radice (D) ridotta a forma algebraica finita e reale, nel caſo irreducibile, ſenza implicanza d'immaginarj; il che ſi è dimoſtrato impoſſibile.

E quanto alla legittimità del metodo Cardanico vo' dichiararla qui nel modo che potrò migliore; il che non ſarebbe neceſſario, ſe tutti poteſſero formarſi delle medeſime coſe le medeſime idee. Ma qualche volta certi articoli non riſchiarati ne' libri elementari danno luogo al germoglio di molti errori. Ed è ſtrano ſoprattutto, che la ſi metta in dubbio in grazia del ſolo caſo irreducibile. La formola eſprime, e dà le preciſe radici dell'equazione in tutti i caſi reducibili, ſenza ricorrere ad altri ſuſſidj, che a quello dell'eſtrazione della radice cubica da ognuno de' due termini della formula; e dee ella ceſſare di eſſere legittima nel ſolo caſo, che le radici dell'equazione (F) debbano eſſere tutte tre reali, diſeguali, e irrazionali? Il metodo è queſto.

Si faccia $x = z + y$. Soſtituendo queſto valore nell' equazione (F), prende ella queſta forma (G)

$$(G) \ldots\ldots z^3 + 3z^2y + 3zy^2 + y^3 - pz - py - q = 0$$

L' equazione (G) non è più determinata, come l'equazione (F), eſſendo due le indeterminate z y, delle quali biſogna definire il valore, onde conſeguire quello di x, a cui è poſto uguale l' aggregato $z + y$. Le due indeterminate z y non hanno certamente alcuna relazione neceſſaria tra di sè, fuorchè quella, che abbia da verificarſi l'equazione (G). Si traggano quante paja di equazioni ſi vuole dall' equazione (G), come ſarebbe

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2y = 0 \\ 3zy^2 + y^3 - pz - py - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (A)$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2y + 3zy^2 = 0 \\ y^3 - pz - py - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (B)$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3 - q = 0 \\ 3z^2y + 3yz^2 + y^3 - pz - py = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (C)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3z^2y + 3y^2z - py - pz = 0 \\ z^3 + y^3 - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (D)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3z^2y + 3y^2z - q = 0 \\ z^3 + y^3 - pz - py = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (E)$$

ecc.

Queſte combinazioni, e le altre che poſſono ſimilmente farſi, ſpezzando in due equazioni l' equazione (G), ſono tutte rigoroſamente legittime, perchè riſoluto qualſivoglia pajo di equazioni (A), (B) ecc. ſempre co' valori ritrovati di z ed y ſi ſoddisfa all' equazione (G), ch' è la ſola neceſſaria condizione da riempierſi, e verificarſi nella quiſtione.

La combinazione (D) pertanto non è men legittima di tutte le altre (A), (B), (C), (E) ecc. Ed è appunto dalla combinazione (D), ch' è tratto il valore di

$$z+y = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{2} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)},$$

che è la formola Cardanica. Che non poſſa eſſere $3zy(z+y) = p(z+y)$, e nello ſteſſo tempo $z^3 + y^3 = q$, ciò appunto è quello che fa riſultare così z come y quantità aſſolutamente immaginarie, come è ſtato dimoſtrato da molti valentuomini, e l' ho dimoſtrato io ſteſſo nell' *Eſercitazione* citata qui innanzi. Ma $z+y$ è ſempre e neceſſariamente il vero valore di x, cioè la vera radice dell' equazione (F). Ed è irragionevole il pretendere, che il metodo per eſſere legittimo debba ſomminiſtrare non già il ſolo compleſſo $z+y$ reale, ma le parti eziandio z, y reali; mentre non altro è di aſſoluta neceſſità per natura della quiſtione, che ſia reale, fuorchè il valore di $x = z+y$, qualunque poſſa mai eſſere la forma delle parti.

Sarebbe lo ſteſſo ſe dalla combinazione (A), o da qualunque delle altre (B), (C) ecc. ſi traeſſe, ſe è poſſibile, il valore di z, e di y. Sempre la ſomma $z+y$ ſarebbe uguale ad x, cioè alla vera radice dell' equazione. Non ſarebbe z', tratto per eſempio dalla combinazione (A), lo ſteſſo z che s' è tratto dalla combinazione (D), nè y' lo ſteſſo che y; ma $z'+y'$ ſarebbe ſempre l' identica ſomma e quantità $z+y$, cioè la ſteſſa radice x dell' equazione.

Quindi è manifeſto, che da qualunque di quelle combinazioni ſi arrivaſſe a ricavare il valore di z', e di y', ſempre la ſomma $z'+y'$ involgerà neceſſariamente degl' immaginarj; altrimenti, dovendo ella indentificarſi colla ſomma $z+y$ tratta dalla combinazione (D), cioè colla Cardanica, potrebbe queſta eſſere liberata dall' aſpetto immaginario, contro ciò che s' è ſolennemente dimoſtrato.

Ma queſto baſti a compiuta dilucidazione della materia.

ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO DEGLI UCCELLI.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino

Al Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, Professore primario della medesima, e di Notomia in quella Regia Università.

SIGNORE.

MOstrerei d' esser privo del bene dell' intelletto, se non mi avesse dolcemente commosso la generosità, che voi manifestaste nell' analizzare le mie osservazioni sull' *Encefalo Umano*, e nell' additare ai numerosi vostri uditori dalla Cattedra in cotesta famosa e dotta Università da voi così degnamente occupata gli articoli delle opere del sommo Notomista, e Fisiologo *Alberto Allero*, nei quali di quella mia debole fatica si fa cortese ed onorata menzione; e se dall' altra parte la cognizione, che ho già da parecchi anni della vastità dell' erudizione vostra, e della felicità delle profonde vostre ricerche nella Notomia, e nella Storia naturale, non mi avesse indotto a sperare, che voi non isdegnerete ch' io ricorra a voi per lume, e per consiglio intorno a quella parte dell' *Encefalotomia universale* da me abbozzata, che risguarda gli uccelli, dintorno alla quale s' impiegarono dopo di *Tommaso Willis* gli Accademici Parigini senza condurla però a plausibile chiarezza ed estensione insino a tanto che il lodato infaticabile *Allero* non ebbe creduto lo sviluppamento del cerebro nella menzionata classe d'animali occupazione degna di sè, e della attenzione dei veri Filosofi.

Vi è noto, eruditissimo Signore, che desideroso questi di rendere vie più manifesti al mondo i nodi, con i quali piacque all'*eterno* sempre *adorabile Artefice* di concatenare la porzione animata delle sostanze abitatrici del nostro globo, si lagnava di non aver ancora trovato adequatamente descritto * il cerebro degli uccelli, ed avea riunite in una dissertazione quelle verità, che l'esame anatomico più attento gli avea rivelate su viscera così essenziale in questa classe d'animali, acciocchè servissero di stimolo agli altri Anatomici per dilatare anche da questo canto i limiti delle nostre cognizioni.

Non v'ha dubbio, che molti fra questi vi abbiano fatto laudevoli progressi calcando le vestigia di *Allero*, dietro alle quali osai pure di muovere anch'io, di modo che l'anno MDCCLXXVI sembrandomi già d'avere incontrato assai buona ventura nello spigolare per questo campo, aveva pensato di trasmettere al promotore di tali ricerche i manipoli, che me n'erano toccati, riducendoli a foggia di comenti allo scritto *Alleriano*; ma non aveva condotto ancora il mio lavoro al termine prefisso, quando fui colpito dall'acerbissimo annunzio della perdita irreparabile, che per la morte di *Allero* la repubblica filosofica ha fatto.

Privo così degli utili avvisi, che da uomo sì grande per ogni titolo avrei ottenuti, esitai nel determina-

(*) *Avium cerebra nondum descripta hic recensere visum est, ut continuus ille transitus etiam hoc exemplo innotescat, qui est ex fabrica quadrupedum per aves in pisces, inve quadrupeda frigida, quae multa piscium habent similia.*
v. Opera Minora Alb. *Halleri* Vol. III. sect. XXXVI.

re a chi comunicare i menzionati comenti affine di ricavarne e correzione ed ammaeſtramento, ſin che non venni favorito da voi con quelle lettere, le quali m' incoraggiano a proſeguire nella carriera anatomica, e con il prezioſo dono dell' opera voſtra celebratiſſima intorno alle tavole poſtume del *Santorini*, la quale mi ſervirà d' eſemplare, e di guida, maſſime in quello, che concerne le voſtre utiliſſime ſcoperte.

Tanta benignità voſtra a favor mio non ſolo mi vi lega con vincoli indiſſolubili d' amicizia, e di gratitudine, ma sbandiſce dall' animo mio ogni irreſoluzione; e mi conferma nella ſicurezza, che queſte oſſervazioni ſull' *Encefalo degli Uccelli* non potrebbono eſſer indirizzate ad uomo, che con più bel nodo vanti in ſuo cuore unite dottrina ed urbanità, ſchiettezza e diſcrezione, erudizione e modeſtia, tutte prerogative altrettanto rare quanto deſiderate in chi dev' eſſer giudice e maeſtro in coſe di Fiſica, e di letteratura.

Eccovi pertanto in queſto ſcritto compendiato, oltre alle oſſervazioni Alleriane, tutto quello, che ſe ne legge nelle opere del *Willis* ſul cerebro e ſui nervi, le quali ſe per non ſo quale ſventura della Notomia non foſſero grate troppo ſuperficialmente lette, per non dire troppo vergognoſamente neglette, queſti organi ſarebbero aſſai meglio ſviluppati e conoſciuti.

Vi riuniſco altresì quello, che la lettura va ſomminiſtrandomi di relativo all' oggetto principale acciò che la mia ſpoſizione acquiſti maggior chiarezza, accennando i fonti dai quali è ricavato perchè odio appropriarmi le ricchezze altrui. Anzi vi ſcongiuro di non aſcondermi il nome, nè le opere di coloro, che avranno già deſcritte quelle parti, che v' accorgerete immaginarm' io d' avere prima di neſſun altro ſviluppato ed eſpoſto acciocchè loro non venga involato l' onore della ſcoperta; perciocchè non ſono abbaſtanza perſuaſo della ſolidità del pensiere di quel Letterato Franzese, che pretende tutto essere già stato detto.

La natura è un fondo inesauribile, nel quale quanto si cerca più profondamente, tanto maggior dovizia trovasi di cose novelle: nè vogliam essere così ingiusti verso i nostri coetanei, nè verso i posteri con suppor e gli uni, e gli altri incapaci di trovare nel fondo suddetto nuove ricchezze: onde eziandio che mi riconosca inabile a fare scoperte importanti, pur so che lo spirito dell'uomo ha fecondità pari alla insaziabilità del suo cuore, e che quando quello non può esser inventore, aggiunge e perfeziona valendosi dei lumi altrui e facendo nascere nuovi pensieri, nuovi metodi di osservare da quelli, che gli vengono altronde presentati.

Così vo tentando io, e se non mi riescirà d'esporre cose nuove, proccurerò almeno di riunire le già conosciute sotto que' differenti punti di vista, che potranno sembrare più naturali; perciò troverete divisa quest' operetta in cinque trattati, nel primo de' quali verranno comprese in due parti le notizie indispensabili sulle pareti tanto esterne, quanto interne del cranio, che hanno relazione con il cerebro, e con i nervi cerebrali degli uccelli; nel secondo si descriveranno le meningi; nel terzo il cervello; nel quarto il cervelletto, e la midolla allungata; nell' ultimo i nervi, che escono dalle pareti del cranio.

Comprenderovvi pur anco le osservazioni anatomiche fatte da me su gli organi dei sensi in questa classe d'animali, non ancora da altri pubblicate, o non arrivate a mia notizia, o esposte differentemente da quel modo nel quale io le ritrovai.

In questo caso le mie osservazioni serviranno almeno per confermare la verità di quelle degli autori a me sconosciuti, verità sempre accette a coloro, che coltivano la gloria naturale con il genio, col quale la coltivate voi, e agli ingegni elevati, depositarj delle cognizioni più preziose, e dei fondamenti più stabili del sapere umano. Sicchè nè a voi, nè agli altri Filosofi pari vostri disgradiranno, come alla stessa Maestà dei regnanti non disgradisce l'umile ma cordiale offerta di fiori odorosi e di saporite frutta in mezzo ai ricchi tributi delle più ubertose provincie.

Confessò il chiarissimo *Allero* di non avere notomizzati molti uccelli, * e le osservazioni principali che ci lasciò dintorno ai cerebri loro disse di averle tratte dall' esame di sei oche sole. * Su queste mi esercitai lungo tempo tenendo scrupolosamente dietro a sì gran Maestro, e quando ne ebbi notomizzate varie dozzine m' avvidi, che anche nelle oche s' incontrano moltissime parti essenziali non esposte nella dissertazione Alleriana, o differenti da quanto vi si legge; perciò mi sono invogliato di cercare se altre spezie di pennuti ne vadano provvedute, e se vi se ne potesse meglio scorgere la varietà.

Nè male mi apposi, perciocchè in quasi tutte le specie notai differenze essenziali nella direzione, nella figura, nel sito, e nel numero delle medesime; onde mi vidi obbligato di ripetere più e più volte le osservazioni su quanti individui di quella specie mi fu permesso; e degli individui stessi vi presento il catalogo adoperando la nomenclatura del celebre *Linneo*, giacchè le opere di sì diligente Naturalista facendo le delizie dei Professori, più facilmente si capirà quale uccello vi nomini; e caso che sbagliassi nel dargli il nome italiano, lo sbaglio mio verrà dalla cortesia vostra corretto.

(*) *Non numerosas aves incidi, vera erunt tamen quæ ex adversariis meis hic repeto V. Loc. citat.*

(*) *Anseris cerebrum ex sex animalibus V. L. citat.* per quello che ha risguardo al cerebro di questa specie d'uccelli.

Catalogo.

Degli individui delle diverſe ſpecie d' uccelli ſtati notomizzati da me per verificare le oſſervazioni Alleriane, ed eſporne l' encefalotomia.

		Numero degl'individui da me notomizzati.
	42. Falco	
Nibbio da noi Piemonteſi detto *la Pondrà*.	Milvus 12. *Falco cera flava, cauda forficata, corpore ferrugineo, capite albidiore*	2.
Falcon gentile.	Gentilis 13. *F. cera, pedibuſque flavis, corpore cinereo, maculis fuſcis, cauda faſciis quatuor nigricantibus.*	3.
Gheppio, o Smeriglio da noi Piemonteſi detto *la Crivella*.	Tinnunculus 16. *F. cera, pedibuſque flavis, dorſo rufo punctis nigris, pectore ſtriis fuſcis, cauda rotunda.*	8.
Sparviere.	Sparverius 20. *F. cera lutea, capite fuſco, vertice, abdomineque rubro, alis cæruleſcentibus.*	1.
	43. Strix	
Gufo.	Bubo 1. *Strix capite auriculato, corpore rufo.*	2.
Due ſpecie di Civette.	Otus 4. 5. *capite auriculato pennis ſenis.* Scops 5. 5. *capite auriculato penna ſolitaria*	4.
La Dama de' Piemonteſi.	Stridula 8. 5. *capite lævi, corpore ferrugineo, remige tertia longiore.*	2.
	45. Pſittacus	
Papagallo.	Æſtivus 32. *Pſittacus brachyurus viridis luteo ſubmaculatus, fronte cærulea, humeris ſanguineis, orbitis incarnatis.*	1.
	50. Corvus	
Corvo.	Corax 2. *Corvus ater, dorſo atro-cæruleſcente, cauda ſubrotunda,*	3.
Cornacchia.	Corone 3. *C. atro-cæruleſcens totus, cauda rotundata, rectricibus acutis.*	5.
	51. Coracias	
Io la credetti una ſpecie delle *Meropi* ſegnate 63. da *Linneo*.	Bengalenſis 5. *Coracias ſubfulva ſubtus cæruleſcens, collo ſubtus violaceo* (non ſtriato nec pallido) *cauda integra*	1.

57. Cuculus

37. Cuculus

2. Canorus 1. *Cuculus cauda rotundata nigricante, albo punctata.* Cucolo.

58. Yunx

2. Torquilla. Torcicollo.

59. Picus

3. Viridis 12. *Picus vertice coccineo.* Picchio.

64. Upupa

3. Epops 1. *Upupa cristata variegata.*

67. Anas

Anser 9. *Anas rostro semicilindrico, corpore supra cinereo, subtus pallidiore, collo striato.*

Più di cento. { Strepera 20. *A. speculo alarum rufo, nigro, albo.*
Clangula 23. *A. nigro, alboque varia, capite tumido, violaceo, sinu oris macula alba.*
Boschas 40. *A. rectricibus intermediis (maris) recurvatis, rostro recto.*
Domestica *B.* } Oche ed Anitre

72. Pelecanus

3. Piscator 6. *Pelecanus cauda cuneiformi, rostro serrato, corpore albo, remigibus omnibus, facieque nigris.* Domenicano in val di Bormia.

84. Ardea

2. Grus 4. *occipite nudo papilloso, pileo, remigibusque nigris, corpore cinereo, rectricibus intimis laceris* Gru.

1. Cinerea 11. *A. occipite nigro lævi, dorso cærulescente, subtus albida, pectore maculis oblongis nigris.*

2. Major. 12. *A. occipite crista nigra dependente, corpore cinereo, collo subtus linea, fasciaque pectorali nigris.* } Aghironi.

2. Alba 24. *A. capite lævi, corpore albo, rostro fulvo, pedibus nigris.*

86. Scolopax

6. Rusticola 6. *Scolopax rostro recto, basi rufescen-* Beccaccia.

te, pedibus cinereis, femoribus tectis, fascia capitis nigra.

Beccaccino. Gallinago 7. *S. rostro recto, tuberculato, pedibus fuscis, frontis lineis fuscis quaternis.* 8.

98. Pavo.

Pavone Cristatus 1. *Pavo capite crista compressa, calcaribus solitariis.* 1.

99. Meleagris.

Gallo d'India. Gallopavo 1. *Meleagris capite caruncula frontali, gularique, maris pectore barbato.* 20.

101. Phasianus.

Galli, Galline, e Fagiani. Gallus 1. *Phasianus caruncula compressa verticis, geminaque gulæ, auribus nudis, cauda compressa adscendente.* 50.

102. Numida

Gallina detta di Faraone. Meleagris. 1.

103. Tetrao

Pernice. Perdix 13. *Tetrao pedibus nudis calcaratis macula nuda coccinea sub oculis, cauda ferruginea, pectore brunneo.* 12.

Quaglia. Coturnix 20. *T. pedibus nudis, corpore griseo maculato, superciliis albis, rectricibus margine, lunulaque ferruginea.* 16.

104. Columba

Piccione. Domestica 1. 20.

Colombo Selvatico. Palumbus 19. *C. rectricibus postice atris, remigibus primoribus margine exteriore albidis, collo utrinque albo.* 4.

Tortorelle
- Turtur 32. *C. rectricibus apice albis, dorso griseo, pectore incarnato, macula laterali colli nigra lineolis albis.* 4.
- Risoria 33. *C. supra lutescens, lunula cervicali nigra.* 6.

105. Alauda

Allodola. Arvensis 1. *Alauda rectricibus extimis duabus extrorsum longitudinaliter albis, intermediis interiori latere ferrugineis.* 6.

106. Sturnus

8. Vulgaris 5. *Sturnus rostro flavescente, corpore nigro, punctis albis.* Storno.

107. Turdus

10. Viscivorus 1. *Turdus dorso fusco, collo maculis albis, rostro flavescente.* Tordo.

4. Merula 22. *T. ater rostro, palpebrisque fulvis.* Merlo.

109. Loxia

8. Coccothraustes 2. *Loxia linea alarum alba, remigibus mediis apice rhombeis, rectricibus latere tenuiore baseos nigris.* Frosone, da noi detto *Becco-duro*

3. Chloris 27. *L. flavicanti-virescens, remigibus primoribus antice luteis, rectricibus lateralibus quatuor basi luteis.* Se è il nostro Verdòne.

110. Emberiza.

18. Hortulana 4. *Emberiza remigibus nigris, primis tribus margine albidis, rectricibus nigris, lateralibus extrorsum nigris.* Ortolano.

2. Citrinella 5. *E. rectricibus nigricantibus, extimis duabus latere interiore macula alba acuta.* Zivolo.

112. Fringilla

1. Cœlebs 3. *Fring. artubus nigris, remigibus utrinq. albis, tribus primis immaculatis, rectricibus duabus oblique albis.*

3. Montifringilla 4. *alarum basi subtus flavissima.* Passera Solitaria.

1. Julensis 5. *F. fusca, pectore humerisque rufis, alis nigris, macula rufa.*

6. Carduelis 7. *F. remigibus antrorsum luteis extima immaculata, rectricibus duabus extimis medio, reliquisque apice albis.*

2. Serinus 17. *F. subvirescens, mandibula inferiore albida, dorso lateribus fusco maculatis, fascia alarum alba.* Cardellini.

6. Canaria 27. *F. rostro, corporeque albo-flavicante, rectricibus, remigibusque virescentibus, rostro albido.* Canarino

Pafferi da muro e da Salcio.	Domeftica 36. *F. remigibus, rectricibusque fufcis corpore grifeo nigroque, fafcia alarum alba folitaria.*	30.
	104. Motacilla	
Uffignuolo.	Lufcinia 1. *Motacilla rufo-cinerea armillis cinereis.*	2.
Cannavarola.	Curruca 6. *M. fupra fufca, fubtus albida, rectricibus fufcis, extimo margine tenuiore alba.*	2.
Beccafico.	Ficedula 10. *M. fubfufca, fubtus alba, pectore cinereo-maculato.*	6.
Cutretta da noi detta *Ballerina*.	Alba 11. *M. pectore nigro, rectricibus duabus lateralibus dimidiato oblique albis.*	8.
Capinero.	Atricapilla 18. *M. teftacea fubtus cinerea, pileo obfcuro*	2.
Reattino.	Trochilus 49. *M. cinereo-virens, alis fubtus rectricibus flavefcentibus, fuperciliis luteis.*	6.
	117. Hirundo	
Rondinella:	Ruftica 1. *Hirundo rectricibus, exceptis duabus intermediis, macula alba notatis.*	10.
Gul-bianco preffo i Piemontefi.	Urbica 3. *H. rectricibus immaculatis, dorfo nigro cœrulefcente, tota fubtus alba.*	3.
Rondone.	Apus 6. *H. nigricans, gula alba, digitis omnibus quatuor anticis.*	7.

La ferie delle mie offervazioni fulle tefte degli uccelli è dunque fondata full' efame di più di quattrocento individui. Felice me fe tutte quefte vittime facrificate alla ricerca della verità, e all' aumento delle cognizioni noftre intorno alla più importante tra le vifcere mi guideranno al confeguimento del fine principale, che mi fono propofto, il quale fi è di rendere me fteffo e i Lettori miei fempre più riconofcenti verfo l' *ineffabile Increata Sapienza*, la quale tutto che abbia voluto provvedere d'organi in apparenza analoghi il cranio di moltiffimi dei viventi, ha però in diverfiffima guifa coftrutti nelle diverfe fpecie gli organi medefimi a tenor dei loro bifogni, e fi compiacque di fiffare nel folo cerebro umano la fede principale di quella incomprensibile maravigliosa sostanza, che ci fa ragionevoli, e capaci di adorarne (per quanto alla umana debolezze è concesso) la Maestà, e di ammirarne gl' immensi a noi favorevoli attributi in qualsivoglia delle di Lei creature.

Con questi sentimenti do fine alla mia lettera di nuovo supplicando V. S. di non risparmiare quanto stimerà opportuno a rendere meno difettosa la mia operetta, la quale servirà di testimonianza al mondo della amicizia onde voi mi onorate, e della stima inalterabile, che so e sarò sempre dei vostri meriti, e del saper vostro.

TRATTATO I.

Delle ossa del Cranio degli uccelli in generale, e particolarmente delle Oche e delle Anitre.

Testo Alleriano *

„ Le presenti osservazioni sul cervello dell' Oca le
„ ho fatte sopra sei individui di questa specie d' uccel-
„ li, le ossa del cranio de' quali sono spesse, massime
„ all' occipite, e cellulose.

PARTE PRIMA.

Esposizione delle parti esterne della testa degli Uccelli.

CAPITOLO PRIMO.

Descrizion generale della testa degli uccelli.

L' Esatta cognizione delle parti contenute nella cavità del cranio di qualsivoglia animale soltanto allora si ottiene quando se ne conosce la disposizione e la struttura delle contenenti, mancando la quale tanto men giusta idea si avrà dell' entrare e dell' uscire dei vasi e dei nervi nella cavità medesima; perciò resta indispensabile, che si faccia precedere la serie delle notizie più opportune a determinare il numero delle regioni, e i limiti delle ossa, che le occupano.

---

* *Anseris cerebrum ex sex animalibus. Cranium crassum, maxime ad occiput, & cellulosum.*

ARTICOLO I.

Parti esteriori della testa, e prima il Cranio degli Uccelli.

1. La testa degli uccelli si divide in *cranio*, ed in *Becco* ossia *Rostro*.

2. Il *cranio*, che in quasi tutte le specie ne fa la porzione più essenziale, se in tutti non ne fa la più estesa, occupa la region superiore e posteriore della testa, e vi si distinguono il *vertice* coperto di piume, i *lati* dove sono prominenti gli *occhi*, ed incavate le *orecchie*, e si attaccano molti muscoli destinati al movimento degli organi attigui; la *base* corrispondente alle *radici* del *becco*, e alla sommità anteriore carnosa del lungo flessibilissimo collo; la *fronte*, cioè la parte anteriore stretta e piana della testa, che discende leggiermente fra le *orbite*; l'*occipite*, che ne è la parte posteriore larga e gibbosa.

ARTICOLO II.

Il Becco.

1. Il Becco o rostro è differente nelle diverse specie volatili tanto in figura e in consistenza, quanto in lunghezza, in larghezza, e in direzione, poichè se ne vedono dritti, inarcati, ritorti, sottili, compressi ai lati, appiattiti, conici, angolati, solcati, fatti a foggia di lesina, di coltello, a volta, uncinati, adunchi, cilindrici, brevi, mezzani, lunghissimi, e grossissimi ecc.

2. Dividesi il becco in porzioni superiore ed inferiore, alle quali nelle Oche e nelle Anitre potrebbe darsi il nome di mascelle.

3. Vi si considera prima di tutto la corona del bec-

co, ossia il ceppo comune a tutte e due le porzioni, che è appunto nel sito dove le piume sono come una specie di peluria detta dai Naturalisti il *capestro*, il quale consiste in una linea stretta riguardo ad alcune specie, riguardo ad altre in un largo collare; havvene pure, che hanno la peluria del *capestro* rivolta in alto e indietro a seconda della direzione delle altre penne del capo; alcune lo hanno scarmigliato, altre rovesciato in giù sul becco come i Corvi, le Gazze, le Strigi; altre poi hanno il ceppo del becco coperto di pelle morbida e sgombra di penne, la quale ha presso *Linneo* il nome di *cera*.

4. Vi si nota il *corpo*, che riguardo alla porzione o mascella superiore si divide in *dorso*, nel quale sono scolpite le *narici* esteriori guarnite di peli nominati *vibrisse*, e in ale, o margini destro e sinistro, riguardo alla inferiore in lati, e in base.

5. Vi si osserva finalmente l'estremità ossia punta in molti uccelli retta ed acuta, in altri ottusa, tuberculosa, adunca, ricurva.

6. Nelle Oche e nelle Anitre l'estremità del becco è larga, arcata, munita d'un'unghia, in queste bruna forbita, e più larga verso l'orlo delle mascelle, nelle Oche bianca, liscia più larga, più convessa, quasi ovale, sodissima, e assai più aderente.

Articolo III.

Dimension generale della testa delle Oche.

Spogliato degl'integumenti, e dei muscoli il cranio delle Oche, diviso da tutto quello, che s'appartiene al becco e al collo, trovasi comunemente lungo dalle 28 alle 30 linee parigine; e se fingasi una linea rasente la superficie esteriore convessa del cranio dalla apofisi nasale di mezzo alla occipitale, questa batterà fra le 46 linee, e i quattro pollici.

CAPITOLO

CAPITOLO II.

Divisione delle parti esteriori del cranio delle Oche.

Non discoprendosi facilmente nelle Oche adulte le divisioni naturali delle ossa del cranio, e non essendone contrassegnati i margini da sutura, nè da apparenti armonie; e per altra parte vedendovisi la figura in parecchi luoghi distinta, oltre che con le differenti porzioni delle ossa medesime vengono formate regioni pur differenti, mi sembra indispensabile, che per chiarezza maggiore vengano indicate le porzioni principali per dividerle all'uopo in altre subalterne.

ARTICOLO I.

Porzioni principali della convessità del cranio delle Oche.

1. Su questa convessità si osservano tre porzioni principali per lato, le nasali, le frontali, e le parietali.

2. Le *porzioni nasali* quadrilunghe ascendono fino ad un forame scolpito nel vertice distante linee 9 dalla apofisi *nasale di mezzo*, e trovasi proprio nel centro di quella linea, che trar si potrebbe in traverso dalla *apofisi orbitaria superior destra* alla *apofisi orbitaria superior sinistra*.

3. Quel *foro* è alcune volte doppio senza però, che il destro sia parallelo, nè costantemente simmetrico con il sinistro, e che tuttedue comunichino con il *seno longitudinale* della *dura madre*.

4. Fra l'accennato forame, e quell'*arco* rilevato che è tanto apparente sulla sommità posteriore del cranio v' è uno spazio lungo lin. 20 circa, delle quali venti linee le dieci anteriori servono per misurare l'estension delle *porzioni frontali*.

5. Queste finiscono in alto dirimpetto alla sommità delle *orbite*.

6. Da tale altezza all'*arco* già menzionato si stendono per lo spazio delle altre dieci linee le *porzioni parietali*.

7. Tanto le porzioni nasali quanto le frontali e le parietali sono divise in destra e sinistra mediante una *linea incavata*, che dalla apofisi *nasale di mezzo* ascende fino alla sommità dell'*arco*.

8. L'*arco* si curva sui lati della sommità e della faccia posteriore del cranio, la quale dicesi *porzione occipitale*, che in alto in avanti e ai lati è circoscritta dal medesimo arco.

9. In basso stendesi fino alla radice di due apofisi paragonabili per la situazione più che per la figura loro alle *apofisi mastoidee* umane, e fino al *gran foro occipitale*.

10. Dalla sommità dell'arco discende fino al *gran foro* suddetto una *spina piramidale*, ossia *cresta ossosa*, che con la sua base appoggia sull' orlo superiore di questo foro.

Articolo II.

Eminenze più considerabili alla base del cranio delle Oche.

I. Alla base del cranio delle Oche si vedono parecchie eminenze oltre a molte fosse ed incavature, a numerosi solchi e forami. Alcune delle eminenze sono ai lati, altre sull'asse maggiore della base istessa, onde cominceremo a descrivere le simmetriche o laterali prima di numerar quelle di mezzo.

2. Al davanti ve ne ha due brevi, e piatte, dal sito e dalle funzioni loro dette *apofisi nasali* destra e sinistra.

3. Dietro e sotto queste si allungano le due *orbitarie inferiori* una per lato alla parte anteriore delle orbite.

4. Ai lati della sommità delle *porzioni nasali* si veggono le poco elevate apofisi *orbitarie superiori* divise dalle predette mediante una mediocre *incavatura*.

5. Dico poco elevate parlando delle Oche e delle Anitre; ma nel Nibbio, nello Sparviere, nel Gheppio, e nello Smeriglio, che noi Piemontesi nominiamo *Crivella*, le apofisi orbitarie superiori sono prolungate per due lamine piatte e sottili, che si scostano alquanto dal margine dell' orbita, e per esempio nel Nibbio trascorrendo lo spazio d' un pollice lasciano un voto fra il margine loro interno, e la porzion nasale, occupato da una membrana ligamentosa forte ed elastica, la quale unitamente all' accennato prolungamento di queste apofisi forma la parte anterior principale degli *archi delle orbite*, che ne terminano esteriormente la *volta*.

6. Seguono alla parte posteriore delle *orbite* le lunghe, obblique, ed acute *apofisi orbitarie posteriori*.

7. Finalmente alla parte inferior posteriore dei lati del cranio si vedono le apofisi *mastoidee*, concave al davanti per dar ricetto ad uno dei capi del mobile *osso intermascellare*, e più ampiamente incavate all' indietro per dar luogo alla *lunata membrana del timpano*, per contenere alcuni degli organi appartenenti all' udito, e per dare uscita ad alcune grosse vene discendenti dall' encefalo.

8. Fra quelle, che occupano l' asse della base del cranio, v' è anteriormente la piatta e breve *apofisi nasale di mezzo*,

9. La *parete ossosa obbliqua*, che sostiene in alto e indietro il *tramezzo delle orbite*, e

10. La *cresta sottile dentata*, sostegno del *tramezzo delle narici*.

11. Alla estremità posteriore dell' accennato *parete* si vedono elevate su due specie di apofisi due *faccette articolari* destinate ad agevolare i movimenti della *mascella superiore*, apparentissime nelle Oche e nelle Anitre

perchè vi si appoggiano due simili *faccette ovali* coperte di liscia cartilagine, proprie delle *appendici dei fucili interni* della medesima *porzion superiore del becco*.

12. Dietro alle *faccette articolari* dopo un breve intervallo vi è l' angolo anteriore della *tuberosità basilare*, eminenza considerabilissima fatta a guisa di triangolo, gli angoli posteriori della quale sono tronchi.

13. Tale *tuberosità* è longitudinalmente divisa per una *cresta* assai disuguale e scabra destinata all' attacco di varj musculi, ed occupa un ampio sito fra le *faccette articolari*, le *apofisi mastoidee*, e la *occipitale*.

14. L' *apofisi occipitale* è liscia, pulita, quasi simile ad un *capezzolo ossoso*, coperta di cartilagine: sembra affissa al margine inferiore del *gran foro occipitale*, e alla base della *tuberosità occipitale* con la quale confina per mezzo d' una specie di *collo*.

15. Il *collo* della *apofisi occipitale* consiste in un *solco semilunare*, le corna del quale sono rivolte in su: vi si pianta un robusto *ligamento capsulare*, che unisce a tale apofisi la prima *vertebra*.

16. E' anche necessario, che vengano notate due piccole *spine ossose* sulla stessa linea delle *faccette articolari*, alquanto più verso la sommità della parte posteriore del *tramezzo*, fra questo e la faccia interna della radice delle *apofisi orbitarie posteriori*.

Articolo III.

Cavità esteriori della faccia superiore del cranio.

1. Tra le cavità della faccia superiore del cranio delle Anitre si contano due grandi e profonde *incavature nasali* scolpite nella faccia inferiore delle porzioni nasali fra le apofisi dello stesso nome, le orbitarie inferiori anteriori, le orbitarie superiori, e la parte obbliqua, che le separa.

2. Due *fosse nasali* sulla parte anterior superiore interna del tramezo delle narici sotto la porzion nasale.

3. Due grandi fosse dette le *orbite* ovali, profonde, separate mediante il proprio loro tramezzo.

4. Le *incavature semilunari* tra le apofisi orbitarie anteriori sull' orlo delle orbite medesime.

5. Seguono le *incavature traversali* fra le apofisi orbitarie posteriori, e le faccette articolari.

6. Le *incavature temporali* tra le apofisi orbitarie posteriori, e le mastoidee.

7. Le *articolari*, e

8. Le *auricolari*, *incavature* scolpite nella faccia concava delle apofisi mastoidee.

9. Le *incavature mastoidee* tra le apofisi di questo nome, e i lati dell' ampia tuberosità basilare.

10. Vi sono di più due strette e lunghe *scanalature* con l' orlo esteriore scabro, le quali cominciano tra le apofisi nasali dei lati, e la nasal di mezzo, e si stendono sulla volta delle fosse nasali sino tra le apofisi orbitarie superiori, e il margine vicino anterior superiore delle orbite.

ARTICOLO IV.

Cavità delle parti inferiori esterne del cranio.

1. Alla faccia inferiore del cranio dei suddetti uccelli si veggono le *fosse mastoidee*, cioè due depressioni larghe e profonde che al davanti finiscono in un angolo, lasciate da due *linee aspre* assai rilevate, le quali partendo da una *cresta longitudinale tuberosa*, regnante nel mezzo della tuberosità basilare, vengono ad unirsi con il lembo interno, ed anteriore delle apofisi mastoidee.

2. Queste fosse danno attacco a diversi musculi, e comunicano con la cavità del cranio mediante un *foro bipartito*, per la apertura anteriore del quale esce il ner-

vo del *par vago*, per la diretana un groſſo ramo delle *vene jugulari*.

3. Le *aperture* diſtinte di due canaletti orizzontali deſtinati a dar uſcita dal cranio cadono ad un ramo principale del nervo del nono paro: aperture, che sboccano all'angolo anteriore della *tuberoſità baſilare*, e che poſſono prendere il nome dal nervo, che vi paſſa.

4. I *condotti* delle *carotidi* fatti a guiſa di corna: principiano al fianco eſterno dei canaletti ora deſcritti, e ſi circonflettono indentro, e in alto verſo la *foſſa pituitaria*. Guidano un ramo conſiderabile di tali arterie, che paſſando ſui fianchi della *glandula pituitaria* ſcorre obbliquamente indietro, e in alto per diramarſi nella baſe del cervello dietro all' *unione* dei *nervi ottici*.

5. La faccia poſteriore del cranio dietro dell' *arco oſſoſo* preſenta all' occhio un *triangolo* quaſi rettilineo, i lati del quale ſono fatti da due creſte, che dalla *ſpina occipitale* vengono a terminare nel lembo poſteriore delle *apofiſi maſtoidee*.

6. Le parti poſteriori inferiori dei lati del triangolo radono il *foro occipitale*, il margine inferiore del quale è fatto dal *capezzolo occipitale* già mentovato.

7. Tra la *ſpina occipitale*, l' arco, e la radice delle *apofiſi maſtoidee* vi ſono due larghe impronte muſculari aſſai incavate.

CAPITOLO III.

Soſtanza delle oſſa del cranio.

In tutte le deſcritte porzioni delle oſſa del cranio delle Oche, delle Anitre e degli altri uccelli in generale ſi diſtinguono due *tavole* ſode, fragili, bianche, e tra le medeſime un abbondante *meditullio*, eccetto nel centro del *tramezzo delle orbite*.

Il *meditullio*, detto pur *Diploe* dagli Anatomici, è negli uccelli un teſſuto ſpugnoſo più abbondante, e più raro alla *tuberoſità baſilare*, alla radice di tutte la apofiſi, ſu per tutta la *colonna*, che ſoſtiene il *tramezzo* delle *orbite*, maſſime dietro la *porzion naſale*.

Notabile altresì ne è l' abbondanza all' *arco*, dove (oltre che dà maggior leggierezza al cranio) ſerve anche a dare maggior energia all' organo dell' *udito* ampliandone i *labirinti*, e multiplicandone le concavità.

F I N E

Della prima parte del I. Tratt. dell' eſpoſizione anatomica delle parti relative all' Enceſalo degli uccelli, la quale tratta delle parti eſteriori oſſoſe del cranio dei medeſimi.

ESAME CRITICO

Di un Problema di probabilità del Sig. Daniele Bernoulli, *e soluzione d' un altro Problema analogo al Bernulliano.*

Del Sig. Gio: Francesco Malfatti Professore di Matematica nell' Università di Ferrara.

1 DAppoichè i Matematici han conosciuto il diritto, che ha la lor facoltà di estendere i suoi calcoli fin su la sorte, e di presagirne in qualche maniera gli eventi, assegnando a ciascuno il corrispettivo grado di probabilità, e dando un certo e determinato valore alla speranza e al timore, che l' uom dee avere su d'essi, non è mancato tra loro chi si applichi con tutta l' attenzione a questa parte utilissima dell' umano sapere; e noi siam debitori ai *Moivre*, ai *Monmort*, agli *Hugenj*, ai *Bernoullj*, e ad altri eccellenti ingegni de' veri principj, sui quali essa è fondata, e delle regole, che costituiscono l' equità in que' contratti, ne' quali entra il risico e la dipendenza da ciò che si chiama caso fortuito, accidentalità, fortuna. Di questa specie sono i giuochi, massimamente d' azzardo, le assicurazioni, i vitalizj, le tontine, ed altre speculazioni di simil tempera, che gli uomini si son tratte dal capo per non lasciar via intentata di migliorar le loro circostanze, e render più comodo il loro stato.

2. Avvegnachè però e molti siano stati i problemi di tal fatta che hanno sciolto gli Autori, e parecchi sian già i canoni che abbiamo, dotati di qualche generalità, sotto cui tant' altri riduconsi che hanno affi-

nità

nità con quelli, de' quali è ſtata data la ſoluzione; sì è lontano che al dì d'oggi ſi poſſa dir la materia eſaurita, che non ſi ceſſa di conſiderar gli eventi della ſorte ſotto nuovi aſpetti, e s'immaginan nuovi contratti, e s'inventano nuovi giuochi, ſoventi volte pel ſol piacere d'indagar le leggi, con cui dovrebbero eſſere regolati in tale e tal caſo i depoſiti de' giocatori e i patti de' contraenti, affinchè ſi ſalvi interamente la giuſtizia e non intervenga alcuna leſione. Proporzionandoſi per sì fatto modo le corriſpoſte alle aſpettative degli eventi utili, ſi pareggiano di qua e di là le partite, e ſi coſtringe, dirò così, la fortuna ad eſſer giuſta nella diſtribuzione de' ſuoi favori.

3. Tra queſti inventori di nuovi problemi di probabilità ha voluto eſſere ancora annoverato il gran Geometra e Medico Sig. *Daniele Bernoulli*, ultimo de' tre illuſtri Fratelli, che hanno tanto arricchito le Matematiche colle ſublimi loro ſcoperte, del quale, tre meſi fa, l'Europa letteraria ha pianto la morte ſeguita dopo una lunga carriera di meriti, e dopo ch' egli avea già sì doviziosamente provveduto colle ſue opere alla immortalità del ſuo nome. Il Problema, ch' ei ſi propone nel Tomo XIV. de' Comentarj della nuova Accademia di *Pietroburgo*, è uno de' più compoſti, ſe ſi conſidera in tutta la ſua eſtenſione, ma divien ſemplice, ſe ci fermiamo alla prima ipoteſi. Sentiam lui medeſimo, il quale così ci parla.

4. *Sint duæ, tres, pluresve urnæ, in quibus ſingulis ſchedulæ certo & æquali numero repoſitæ putentur, ſchedulæ autem uniuſcujuſque urnæ ſuo peculiari colore a ſchedulis reliquarum urnarum ab initio diſtinctæ ſint; tum porrò ſchedulæ ſucceſſive, ſorte tamen permutentur hac lege, ut quavis vice ex ſingulis urnis ſchedula una extrahatur, & deinde in urnam ordine ſequentem translocetur, illa autem, quæ ex urna ultimo loco poſita extracta ſit, in in primam reponatur: his ita poſitis, datoque permutatio-*

Eeeee

num præfato modo factarum numero, quæritur numerus schedularum cujusvis coloris, quæ probabiliter in quavis urna continebuntur. Quoties autem extractio ex singulis urnis simul facta fuit, simulque eo, quo dixi, modo in urnam sequentem schedula quævis transposita, integram istam operationem permutationis nomine indico. . . .

5. *Quamvis obvius sit calculus pro duabus urnis, eum tamen ob nexum, quem habebit cum sequentibus, apponam. Sint igitur in prima urna schedulæ albæ* n, *totidemque nigræ in urna altera. Erit secundum notas combinationum, atque probabilitatum regulas post primam permutationem numerus schedularum albarum in prima urna residuarum* $= n - 1$; *post secundam permutationem* $= \frac{(n-1)\,(n-2)}{n} + 1$; *post tertiam permutationem habebitur* $\frac{(n-1)\,(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; *post quartam* $\frac{(n-1)\,(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1$; *post quintam* $\frac{(n-1)\,(n-2)^4}{n^4} + \frac{(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1$, *& sic porro: inde colligitur, si generaliter numerus factarum permutationum fuerit* r, *atque ponatur brevitatis gratia* $\frac{n-2}{n} = m$, *fore numerum schedularum albarum in prima urna reliquarum* $= \frac{1 - m^{r-1}}{1 - m} + (n-1)\, m^{r-1} = \frac{1}{2} n\,(1 + m^r)$. *Dehinc reliquarum schedularum distributio per se intelligitur*. Da questa prima ipotesi passa poi alle altre più composte, e trova per queste pure le formole corrispondenti, nelle quali scopre infine una legge di progresso che gli fa stabilire il canone generale

per determinare il numero delle schedule colorate che rimangon nelle urne dopo qualsisia numero di permutazioni.

6. Non dipartendomi dalla prima supposizione delle due urne, siccome l' Autore non accenna, per quale strada sia giunto a ritrovar le sue formole, confesso di essermivi fermato sopra alcun tempo, senza potere indovinare da qual raziocinio e da qual calcolo gli venissero somministrate. Finalmente e' mi venne in capo, che potesse avere qualche analogia col suo problema delle schedole e delle due urne un altro problema di due botti A, B eguali di capacità, la prima delle quali sia piena di vino e l'altra d'acqua. Levando dalla prima, e dalla seconda eguali misure, poi fatta la permutazione, è chiaro che, ove la misura si chiami 1, e n la quantità del fluido in ciascuna botte, riman nella botte A $n-1$ di vino e 1 d' acqua, accadendo precisamente il contrario nella botte B. Per la seconda permutazione poi riflettendo, che nella misura 1 di misto, che cavo dal vaso A, deve stare tutto il misto al vino in quella proporzione medesima, che osserva l'intero misto al vino nella botte, trovo, che $\frac{n-1}{n}$ esprime la quantità di vino tratto da A la seconda volta, onde il vin residuo in A alla metà dell' operazione diventa $n-1-\frac{(n-1)}{n}=\frac{(n-1)^2}{n}$. Passando poi al vaso B, siccome in esso il vino è 1, l'analogia $n:1::1:\frac{1}{n}$ ci fa conoscere, che $\frac{1}{n}$ è la quantità di vino tratto da B, il quale per terminare l' intera operazione va versato in A. Dunque, eseguita la seconda permutazione, avrò in A quantità di vino $\frac{(n-1)^2}{n}+\frac{1}{n}$, ovvero

$\frac{n^2+(n-2)^2}{2n}$, formola equivalente alla Bernulliana $\frac{(n-1)\,(n-2)}{n}+1$.

1. Replicando un ſimile raziocinio per la terza, quarta ecc. permutazione, ſi troverà per la terza il vino in $A=n^3+\frac{(n-2)^3}{2nn}$; per la $4^a=\frac{n^4+(-2)^4}{2n^3}$ ecc., onde pel num. indefinito r di permutazioni, ſarà il vino reſiduo in $A=\frac{n^r+(n-2)^r}{n2^{r-1}}$, cioè (ſoſtituito m in vece di $\frac{n-2}{n}$) $=\frac{n}{2}(1+m^r)$, che è appunto il canone del noſtro Ch. Autore.

8. Aſſicuratomi per tal modo della identicità delle mie formole con quelle del num. 5., ho ſoſpettato, che il Bernullio ſciogliendo prima il problema delle botti, e appreſſo rivolgendoſi all' altro delle ſchedole, abbia argomentato così. Diſtribuiſcanſi le ſchedole bianche e nere, che ſon nelle urne A, B dopo la prima permutazione, in tal maniera

A

bianche $n-1$: nere 1

B

nere $n-1$: bianche 1

E intraprendaſi la ſeconda. Poichè in A ſono le bianche $n-1$, e le nere 1, la parte probabile delle bianche che prendo è $\frac{n-1}{n}$, e la parte probabile delle nere è $\frac{1}{n}$, perchè queſte due parti unite inſieme fanno l'unica ſchedola che eſtraggo; e il quanto probabile delle bianche deve ſtare al quanto probabile delle nere, come il numero delle bianche al numero delle nere che ſon nell' urna, nella qual ragione ſtanno appunto le parti $\frac{n-1}{n}$, $\frac{1}{n}$. Il perchè, ſottratto $\frac{n-1}{n}$ dal numero $n-1$ di bianche che eran nell' urna dopo la metà della 2ª operazione, ſarà probabile che reſtino in A ſchedole bianche $n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Con ſimile raziocinio, per l'altra metà dell'operazione, egli trova, che probabilmente ſi cava dall' urna B la parte $\frac{1}{n}$ di bianche, la quale meſſa in A coſtituiſce il numero probabile di ſchedole bianche in A, eſeguita che ſia la 2ª permutazione, $=n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}=\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n}\right)+1$.

9. Proſeguendo poi alle permutazioni conſecutive, riſultano le altre ſormole e il canone del Bernullio, coſicchè altra differenza non vi ſarà tra il problema de' due fluidi e queſto delle ſchedole, che le ſormole nel primo rappreſentano le quantità certe e neceſſarie di vino che riman nella botte, laddove nel ſecondo colle medeſime formole ſi eſprime ſolo il quanto probabile delle ſchedole bianche che rimangon nell' urna.

10. Della giuſtezza di queſto o ſomigliante ragionamento, che poſſa aver fatto il Bernullio, fecemi dubitare un Corollario che ne diſcendeva, e ch' egli ſteſſo nota nel decorſo della ſua diſſertazione con queſte parole. *Quia* m *ſemper eſt unitate minor*, *evaneſcit terminus* m^r, *ſi* r *ſit numerus admodum magnus* (cioè infinito); *atque tum ſit numerus ſchedularum albarum in prima urna reſiduarum ſimpliciter* $=\frac{n}{2}$. *Status is eſt aſymptotos, ad quem, dum permutationes fiunt, magis magiſque pervenitur.....* . Dunque, diceva io, ſe le ſchedole bianche nella prim' urna ſaran tre, ed una la ne-

ra ; e nella feconda abbianvi tre nere ed una bianca , vi vorranno infinite permutazioni, perchè io poffa fperare di aver nella prim' urna due bianche, che fono precifamente la metà di tutte le bianche che abbiamo . Quefta confeguenza mi parea duro di dover ammettere nel tempo che attefa la facilità di trar' una delle tre bianche dalla prim' urna , e fimultaneamente una delle tre nere dalla feconda, non avrei dubitato di fcommettere, che mi farei ridotto alla metà dopo una fola permutazione.

11. S' accrebbe poi il mio dubbio , anzi terminai di convincermi della diverfa indole de' due problemi , e dell' errore in che era caduto il Bernullio con quefta femplice rifleffione. Il problema de' due fluidi efige, che feguitando a permutare , il vino della prima botte vada neceffariamente diminuendo; ed efeguita la prima permutazione , non fon mai poffibili i cafi , che colle fuffeguenti fi ritorni ad avere in effa quantità di vino $n-1$, e molto men tutto vino : al contrario nel problema delle fchedole è poffibile che nelle diverfe permutazioni ora crefca , ora cali il numero delle fchedole bianche , e dopo alcune operazioni potrebb' anche riufcir probabile, che rimaneffero nella prim' urna fchedole bianche $n-1$, o ad effa tutte le bianche veniffero reftituite. Ora tutti quefti cafi non potendo effere abbracciati, com' è evidente, dalla formola de' fluidi, perchè il problema li efclude, può mai darfi, che un' iftesfa formola regoli ambidue i quefiti, e mentr' effa efprime giuftamente i refidui di vino nella prima botte, posfa valere eziandio ad efprimere gli avanzi probabili delle fchedole bianche nella prim' urna?

12. L' ufo del generale e incontraftabil principio, che regola fiffatti problemi di probabilità farà anche veder più chiaramente l' inapplicabilità della fuddetta formola. Egli è certiffimo, per confenfo di tutti i Geometri, che a ftabilire il grado di probabilità competente a un

tale e determinato evento, voglionſi aver prima di tutto ſotto l'occhio tutti gli eventi poſſibili che appartengono al problema; ed aſſegnare poi a ciaſcun evento il numero delle combinazioni, che lo conducono. La proporzione, che paſſerà tra le combinazioni del dato evento, e la ſomma di quelle che appartengono agli altri, ſervirà a determinarne il grado di probabilità, coſicchè ſe eguali rieſcano queſti numeri di combinazioni, ſi potrà ſcommettere in pari e dir del tutto probabile quell'evento che s'è chiamato.

13. Ciò poſto, ſoſtituendo nel problema del Bernullio le palle alle ſchedole, che è il medeſimo, trattiamo il problema inverſo, e cerchiam quante combinazioni favorevoli, e quante contrarie ſi abbiano per laſciare nell'urna A un dato numero di palle bianche dopo aver compiuto qualſiſia dato numero di permutazioni; delle quali per me ſarà ſempre prima quella che ſi fa, quand'abbiam già nell'urna A palle bianche $n-1$ con una nera, e palle nere $n-1$ con una bianca nell'urna B.

14. Prima di tutto però premetto il ſeguente generaliſſimo

LEMMA.

Siano in A palle bianche $n-p$, palle nere p; e in B palle nere $n-p$, palle bianche p. Cavando una palla da A, un' altra da B e permutando una volta alla maniera Bernulliana, può avvenire, che ſi trovino in A palle bianche $n-p-1$, ovvero $n-p$, o finalmente $n-p+1$. Fuori di queſti tre caſi, neſſun altro è poſſibile, ſiccome è chiaro. Ora io dico, che per ottenere in A palle bianche $n-p-1$, avrò combinazioni favorevoli $(n-p)^2$; per palle bianche $n-p$, combinazioni favorevoli $2p(n-p)$; finalmente combinazioni favorevoli p^2 per palle bianche $n-p+1$. Si diſpongan così le palle delle urne.

A

palle bianche $n-p$ nere p

B

nere $n-p$ bianche p.

Se da A cavo una bianca, e da B una nera, alla fine della permutazione io ho in A palle bianche $n-p-1$. Ma ciò si può ottenere, ove qualunque delle bianche $n-p$ di A si combini con qualunque delle nere $n-p$ di B; e il numero di queste combinazioni favorevoli è $(n-p)^2$. Dunque ecc. Similmente perchè in A rimangano palle bianche $n-p$, anche fatta la permutazione, è necessario o ch' io levi una nera da A, e un' altra nera da B, o una bianca da A e un' altra bianca da B. Ma per ciò abbiamo tante maniere, quante nascono dal combinare il numero di bianche $n-p$ che sono in A col numero di bianche p che sono in B, e dal combinare le nere p di A colle nere $n-p$ di B. Dunque $p(n-p)$ $+p(n-p)$ cioè $2p(n-p)$ sarà il numero delle combinazioni utili per l' evento di bianche $n-p$ nell' urna A. Da ultimo ad aver palle bianche $n-p+1$, fa di mestieri che una delle nere p di A si associ con una delle bianche p di B; il che si può fare in numero p^2 di maniere. Dunque p^2 saranno i casi favorevoli a questo terzo avvenimento; e resta compiuta la dimostrazione.

15. Raccoglieremo dal presente Lemma, che chiamato un de' tre casi di palle bianche, che possono aver luogo nella permutazione, mi saranno contrarie tutte le combinazioni, che favoriscono gli altri due eventi. Avanti di permutare io chiamo, per esempio, in A palle bianche $n-p$, caso che ha di combinazioni utili $2p(n-p)$. Dunque le combinazioni, che mi sono contrarie, sono $(n-p)^2$, e p^2, le quali menano gli altri due casi $n-p-1$, $n-p+1$, e la probabilità, che ho d' indovinar l' evento nominato, alla opposta sta come $2p(n-p):(n-p)^2+p^2$; la qual proporzione troverem pure con quest' altro semplicissimo raziocinio. Poichè

Poichè n è l' intero numero delle palle bianche, e parimente n l' intero numero delle nere nelle due urne, sarà n^2 il numero di tutte le possibili combinazioni. Sottratte pertanto da n^2 le combinazioni favorevoli a un dato caso di bianche, si avran le contrarie. Onde le contrarie al caso di bianche $n-p$, che ne ha di utili $2p(n-p)$, sarà $n^2-2p(n-p)$, formola identica coll' anzidetta $(n-p)^2+p^2$. Sicchè dato il numero delle combinazioni favorevoli, si ha tosto il numero delle avverse; e così al contrario.

16. Quest' ultima maniera di trovare il numero delle combinazioni contrarie, dato quel delle favorevoli a un certo evento, per una sola permutazione, può estendersi ancora al caso di qualsivoglia numero di permutazioni, ragionando così. Sono n^2 tutte le combinazioni di palle che appartengono a ciascuna permutazione in particolare; e ciascuna delle combinazioni, che ammette la prima permutazione, può combinarsi con ciascuna combinazione ricevuta dalla seconda permutazione. Dunque il numero totale delle combinazioni, che risguardano due permutazioni, sarà $n^2 \times n^2 = n^4$. Andando innanzi col discorso, per tre permutazioni, troveremo essere il numero delle combinazioni $= n^2 \times n^2 \times n^2 = n^6$; per quattro, n^8, e generalmente n^{2m} per numero m di permutazioni. Quindi posto che sia N il numero $v.g.$ delle combinazioni contrarie all'evento ϕ in permutazioni m, sarà $n^{2m}-N$ il numero delle favorevoli; e se N sarà il numero delle favorevoli, $n^{2m}-N$ sarà quello delle contrarie.

17. Un altro vantaggio trarrem dal Lemma, e da' susseguenti §§, che consiste nella maniera di rintracciare i numeri delle combinazioni o favorevoli o contrarie a un evento per un dato numero di permutazioni $= m$. Siano gli eventi possibili α, β, $\gamma \ldots \phi$. Consideriamo in due diverse maniere il Problema delle due urne. O si scommette, che almeno in una delle permutazioni m

ſi avrà in A l' evento ϕ, o ſi chiama lo ſteſſo evento ϕ dopo aver eſeguite tutte le permutazioni. Nel primo caſo, le combinazioni di ciaſcun evento α, β, γ.... per tutte le poſſibili ſucceſſioni di uno all' altro dovran combinarſi con quelle dell' evento ϕ, poſto in tutti quei luoghi di prima, ſeconda, terza ecc. permutazione, ne' quali può entrare: e l' aggregato de' prodotti di queſte ſteſſe combinazioni darà il numero delle favorevoli a ϕ. Ecco un eſempio. Suppoſte in A palle bianche $n-1$, nere 1, e al contrario in B, domando due permutazioni per avere in A o alla prima o alla ſeconda palle bianche $n-2$, e cerco, quanto ſia probabile queſto avvenimento.

18. Fatto nel Lemma $p=1$, ſi vedrà a un tratto, che gli eventi della prima permutazione non poſſon eſſer che tre

palle bianche in A $\begin{matrix} 1.^\circ & n-2 \\ 2.^\circ & n-1 \\ 3.^\circ & n \end{matrix}$. Se nella ipoteſi del riſultato $n-2$, alla ſeconda permutazione ſi cava bianca, e ſi mette bianca, anche dopo la ſeconda permutazione ſi ha di bianche $n-2$. Devonſi pertanto accoppiare queſti due eventi e ſcrivere $\begin{matrix} n-2 \\ n-2 \end{matrix}$. Il primo appartiene alla prima permutazione e l' altro alla ſeconda. Mantenuta l' ipoteſi del primo evento $n-2$, può accadere, che nella ſeconda permutazione io levi nera, e metta bianca. In tal caſo le bianche dallo ſtato $n-2$ paſſano allo ſtato $n-1$, e dovran così ſcriverſi $\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \end{matrix}$; e con ciò l' ipoteſi del primo evento $n-2$ reſta eſaurita, perchè a $n-2$ non può ſuccedere nè n nè qualunque altro numero ſuperi o manchi di due unità, riſpetto allo ſteſſo numero $n-2$

19. Accettiam' ora l' altra ipoteſi del primo evento $n-1$. Per ciò che s'è detto, è chiaro, che può eſſe-

re ſuſſeguito e dall'evento $n-2$, e dall' evento n, e dal nuovo evento $n-1$. Queſti due ultimi caſi non ſan per noi, perchè, non trovandoſi nè nella prima, nè nella ſeconda permutazione, il numero $n-2$, ci ſono eſſi contrarj. Si dovrà quindi tener conto della ſola union degli eventi $n-1$, $n-2$, e ſcrivere $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$.

20. La terza ipoteſi ſuppone il primo evento n, cui non può mai tener dietro $n-2$ eſſendo neceſſariamente il ſecondo evento $n-1$. Dunque tre ſoli ſono gli accoppiamenti utili che riſultar poſſono dalle due permutazioni; $\begin{matrix} n-2 \\ n-2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$.

Reſta ora che troviamo i numeri delle combinazioni. Per far queſto, ci dobbiam ricordare, che lo ſtato primitivo delle palle bianche in A era $n-1$. Dunque volendoſi, che dopo la prima permutazione diventin le bianche $n-2$, in vigore del Lemma avrem combinazioni favorevoli $(n-1)^2$. Dallo ſtato $n-2$ paſſino le bianche nella ſeconda permutazione al novello ſtato $n-2$. Poichè il Lemma c' inſtruiſce che per averſi replicatamente in A palle bianche $n-p$ abbiam combinazioni propizie $2p\,(n-p)$, ſi fa chiaro, che $4(n-2)$ eſprimerà il numero delle maniere diverſe, con cui può ritornare lo ſtato $n-2$ nella ſeconda permutazione. Ai due ſucceſſivi eventi $n-2$ uniamo lateralmente in colonna i numeri delle combinazioni corriſpondenti

$$\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \end{matrix}$$

, e argomentiamo così. In numero di maniere $(n-1)^2$ ſi può far tranſito dallo ſtato primitivo di palle bianche $n-1$ allo ſtato $n-2$. Ma a ciaſcuna delle maniere $(n-1)^2$ corriſponde un numero di maniere $4(n-2)$, per paſſare dallo ſtato $n-2$ della prima permutazione al nuovo ſtato $n-2$ della ſeconda. Dunque, componendo, per paſſare dallo ſtato primitivo $n-1$ ai due ſtati ſucceſſivi $n-2$, $n-2$, avrem maniere o combinazioni utili, che ſi eſprimeranno col prodotto delle combinazioni riſpettive cioè con $4(n-1)^2(n-2)$. Un ſimile raziocinio ci farà conoſcere, che al ſecondo accoppiamento $\frac{n-2}{n-1}$ corriſpondono combinazioni utili $4(n-1)^2$; e al terzo $\frac{n-1}{n-2}$ combinazioni utili $2(n-1)^3$. Sarà quindi il numero totale delle combinazioni che menano l'evento $n-2$ o nella prima o nella ſeconda permutazione $= 4(n-1)^2(n-2) + 4(n-1)^2 + 2(n-1)^3$; e la probabilità del ſuddetto evento alla probabilità contraria ſarà come $4(n-1)^2(n-2) + 4(n-1)^2 + 2(n-1)^3 : n^4 - 4(n-1)^2(n-2) - 4(n-1)^2 - 2(n-1)^3$.

21. Ciò che s'è detto per due permutazioni può eſtenderſi a tre, quattro ecc. ſino al numero indefinito m. Si ſcriveranno pertanto in colonna tanti eventi ſucceſſivi quanti porta il numero m, e in altra lateral colonna ſi porran per ordine i riſpettivi numeri delle combinazioni, che conducono ciaſcuno de' ſuddetti eventi: ſi farà quindi il prodotto di queſti numeri, e ciò che ne riſulta, eſprimerà le combinazioni favorevoli ad averſi i dati eventi ſecondo l'ordine con cui ſon poſti per le ſucceſſive permutazioni. All'ordine d'eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$ corriſpondano le combinazioni $a, b, c \ldots p$; ſi formeran le colonne di queſti numeri così

$$\begin{array}{cc} \alpha & a \\ \beta & b \\ \gamma & c \\ \vdots & \vdots \\ \phi & p \end{array}$$

, e il prodotto $abc \ldots p$ darà il numero delle combinazioni, che menano la ſucceſſione degli eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$.

22. Ove poi ſi domandi di aver l'evento ϕ alla fine dell'intero numero m delle richieſte permutazioni; che è la ſeconda maniera di conſiderare il problema delle due urne da noi accennata nel §. 17. ed è quella ap-

punto del Bernullio, converrà avvertire, che ad adempire questa condizione più angusta, nella formazione delle colonne talmente debbonsi associare i ϕ o con sè stessi, o cogli altri eventi α, β, γ ...., che un ϕ rimanga sempre nell' ultima sede che corrisponde all' ultima permutazione. Disposti così gli eventi, le colonne laterali ci somministreranno i numeri delle combinazioni favorevoli all' evento ϕ nell' urna A dopo che si son terminate tutte le permutazioni. E se piace di aver le combinazioni contrarie, prima di aver trovate le favorevoli, il che qualche volta è più comodo, talmente si formeran le colonne degli eventi, che non si trovi mai all' ultima sede l' evento ϕ. Tutto ciò è chiarissimo, nè ha bisogno che vi ci fermiam sopra più lungamente.

23. Si domandi ora il numero delle combinazioni favorevoli ad aversi l' evento $n-2$ di bianche nell' urna A dopo che si sono eseguite due permutazioni. Scritte le colonne degli eventi successivi coll' avvertimento del §. precedente, e annessevi le laterali delle combinazioni, abbiamo

$n-2 \;\; (n-1)^3 \quad \Big| \quad n-1 \;\; 2.(n-1)$ La terza colonna

$n-2 \;\; 4(n-2) \quad \Big| \quad n-2 \;\; (n-1)^2$

$n-2 \;\; (n-1)^2$, che ci era utile quando il problema

$n-1 \quad 4$

era esposto nella prima maniera, qui ci è contraria, perchè non ci giova che sia riuscito $n-2$ nella prima permutazione, e ci fa danno il trovarsi l' evento $n-1$ alla fine della seconda. Dunque le combinazioni favorevoli all' evento $n-2$ dopo due permutazioni saranno $= 4(n-1)^2(n-2) + 2(n-1)^3$, e in conseguenza le contrarie $= n^4 - 4(n-1)^2(n-2) - 2(n-1)^3$ $= n^4 - 6n^3 + 22n^2 - 26n + 10$.

24. Vogliasi lo stesso evento $n-2$ dopo tre permutazioni. Per saper le combinazioni favorevoli che menano questo avvenimento, scriverem le colonne degli even-

ti a tre a tre con $n-2$ all' ultima ſede, e le corriſpondenti colonne laterali.

Queſte ſono $\left.\begin{array}{ll} n & 1 \\ n-1 & n^2 \\ n-2 & (n-1)^2 \end{array}\right| \begin{array}{ll} n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & 2(n-1) \\ n-2 & (n-1)^2 \end{array} \left| \begin{array}{ll} n-1 & 2(n-1) \\ n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \end{array} \right| \begin{array}{ll} n-2 & (n-1)^2 \\ n-1 & 4 \\ n-2 & (n-1)^2 \end{array}$

$\begin{array}{ll} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \\ n-2 & 4(n-2) \end{array} \left| \begin{array}{ll} n-2 & (n-1)^2 \\ n-3 & (n-2)^2 \\ n-2 & 9 \end{array} \right|$. Onde le combinazioni favorevoli ſono in tutto $n^2(n-1)^2 + 4(n-1)^4 + 8(n-1)^3 + 4(n-2) + 16(n-1)^2(n-2)^2 = 42n^4 + 9 - 224n^3 + 446n^2 - 388n + 124$; e le contrarie $= n^6 - 42n^4 + 224n^3 - 446n^2 + 388n - 124$.

25. Chi avrà la pazienza di rintracciare i numeri delle combinazioni contrarie all' evento $n-2$ dopo 4, 5 ecc. permutazioni, cominciando da $2n-1$, che denota le combinazioni contrarie per una ſola permutazione, troverà la ſeguente ſerie;

perm. 1; perm. 2 perm. 3

$2n-1$; $n^4-6n^3+22n^2-26n+10$; $n^6-42n^4+224n^3-446n^2+388n-124$;

perm. 4 perm. 5

$n^8-320n^5+2360n^4-6968n^3+10192n^2-7320n+2056$; $n^{10}-2715n^6+26410n^5-107591.n^4+232780.n^3-279700n^2+175664n-44848$; ecc.

26. Queſta ſerie diventa una ricorrente di ſecondo grado, ove pongaſi $n=2$; i ſuoi termini ſono 3, 14, 52, 216, 848 ecc. i moltiplicatori, che la producono, 8, 2; e il termine generale $\frac{2^{m-1}}{3}(5.2^m + (-1)^m)$, ſignificando m il numero de' termini, oſſia delle permutazioni. Sicchè il numero generale delle combinazioni favorevoli ad averſi in A palle bianche $n-2$, cioè neſſuna bianca, ſarà $2^{2m} - \frac{2^m - 1}{3}(5.2^m + (-1)^m)$. Per qualunque numero di permutazioni non può mai eſſer probabile il caſo, che non reſti in A alcuna palla bianca,

perchè ſarebbe d'uopo, che uguagliandoſi i numeri generali delle combinazioni ſavorevoli ed avverſe, poteſſe riſultare m reale e poſitivo. Con tale adeguamento ſiam guidati alla equazione $2^{m+1} + (-1)^m = 0$, che è impoſſibile ed aſſurda, nella ſuppoſizione che m ſia un numero poſitivo o intero o rotto, o finito o infinito. Dunque ecc.

27. In genere però la noſtra ſerie è una ricorrente di grado ſicuramente ſuperiore al quarto, atteſo l'eſperimento che ne ho fatto, e in conſeguenza di difficil maneggio. Nondimeno eſſa, anzi il ſuo primo termine ſolo può baſtare a far conoſcere l'error Bernulliano. Si faccia l'ipoteſi di $n = 4$, che dà $n - 2 = 2$. Poichè 2 è la metà delle palle bianche, che abbiamo, per la Teoria Bernulliana, partendoſi dallo ſtato primitivo delle 3 bianche e 1 nera nell' urna A, ſarà neceſſario permutare infinite volte, affinchè ſi renda probabile, che rimangano in A due bianche; ed ogni numero finito di permutazioni renderà improbabile queſto avvenimento. Ma la probabilità d'un evento induce l'eguaglianza tra il numero delle combinazioni, che menano quell' evento, e il numero delle contrarie; e l'improbabilità dello ſteſſo evento importa che il numero delle ſue combinazioni favorevoli ſia ſempre minore del numero delle avverſe. Dunque per qualunque finito numero di permutazioni, le combinazioni favorevoli ad averſi 2 bianche ſaranno meno delle contrarie. Veggaſi ora che riſulti dall'anzidetta ſerie. Fatto, come ſi è detto, $n = 4$, avremo per la prima permutazione combinazioni contrarie 7; per 2 permutazioni, 130; per 3 permutazioni, 1972 ecc. Ora eſſendo l'intero numero delle combinazioni di tutte le palle, per una permutazione $= 16$, per 2 permutazioni $= 256$, per 3 permutazioni $= 4096$ ecc., ſaranno le favorevoli per una permutazione $= 16 - 7 = 9$; per 2 permutazioni $= 256 - 130 = 126$; per 3 permutazioni $= 4096 - 1972$

$=2124$ ecc. Dunque tanto è lontano, che si esigano per la probabilità delle due bianche infinite permutazioni, che anzi, eseguita solo la prima, è più che probabile, che mi rimangano in *A* queste due bianche, avendo per me 9 combinazioni propizie contro 7 contrarie. Questo vantaggio di maggior probabilità, che mi manca in due permutazioni, perchè ho 126 combinazioni a favore, e 130 contro, mi ritorna nelle 3 permutazioni, e mi seguita per tutta la serie. Dunque ad indurre la probabilità per l'evento di due bianche, cioè a far nascere l'eguaglianza tra le combinazioni prospere e sinistre, vi vorrà un numero di permutazioni che sia medio o tra l' 1 e il 2, o tra il 2 e il 3, ma non già un numero infinito, come pretende il *Bernullio*.

28. Da tutto ciò parmi di poter concludere legittimamente, che il principio, di cui si serve il *Bernullio*, non è quello che dee presiedere alla soluzione del suo problema; che le altre sue formole eziandio, le quali dipendono dallo stesso principio, e corrispondono alle susseguenti ipotesi di più di due urne, debbono essere considerate come illegittime, e inducenti ad errore; in una parola, che il problema delle schedole è di una natura ben differente da quello de' fluidi, e va trattato in una maniera molto diversa dalla Bernulliana.

29. Ricusata come insussistente la risoluzione del Geometra di Basilea, potrebbe parere ad alcuno, che io non potessi dispensarmi dal sostituirvi la vera; ed io pur veggo, che ciò sarebbe assai conveniente; ma nè le mie occupazioni, nè il tempo prescritto dall' illustre Raccoglitore delle presenti Memorie alla edizione di questo primo Tomo mi han permesso di applicarmi col comodo necessario ad una indagine, che debb' essere d' un' estrema difficoltà. Potrebbesi però valutare come opera in qualche maniera satisfattoria dell' obbligo ch' m' impone la critica fatta al nostro celebre Autore, il presentarmi in questo Libro colla soluzione del problema accennato

accennato al §. 17, il quale con poca differenza dal Bernulliano è ſtato da me immaginato anche prima di leggere il Tomo XIV. de' *Comm. di Pietroburgo*; dimenticato poi ne' miei quaderni ſtava aſpettando la mia reminiſcenza e l' occaſione di veder la pubblica luce. Queſt' è quello che or m' accingo di fare, ſperando che il metodo, di cui mi ſervo, poſſa eſſer utile a chi prendeſſe per le mani o il problema del *Bernoulli*, od altri che gli ſian ſimili. Se queſto metodo non è sì ſemplice, come avrei deſiderato, varrà a ſcuſarmene la difficoltà d' un queſito, che è del numero di que' problemi di probabilità, che ſi chiamano di eventi dipendenti, ordinariamente aſſai più ſcabroſi e intralciati de' problemi di eventi indipendenti, i quali ſpeſſo ſomminiſtran formole elegantiſſime e non ſperabili in quelli dell'altra claſſe.

30. Siano dunque due urne A, B, ciaſcuna delle quali abbia palle n, la prima bianche, la ſeconda nere. Ridotto lo ſtato delle palle colla prima operazione ad eſſer queſto che chiamerem primitivo; bianche in $A = n - 1$; nere $= 1$, e al contrario in B, ſi cercano le combinazioni favorevoli e contrarie ad averſi nell' urna A un dato numero di palle bianche dentro un dato numero di permutazioni. Per procedere con ordine, comincio dal

PROBLEMA I.

31. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi in* A *con una ſola permutazione palle bianche* $n - 2$.

Poichè ſon tre ſoli i caſi di bianche in A, che poſſono aver luogo; primo che torni $n - 1$; ſecondo che ſi rimetta n; terzo che rimangano $n - 2$; i caſi contrarj ſaranno i due primi; $n - 1$, n. Ma pel Lemma, fatto in eſſo $p = 1$, all' evento $n - 1$ corriſpondono combinazioni $2(n - 1)$, e all' evento n combinazioni 1. Dunque il numero delle combinazioni contrarie all'evento $n-2$ in una sola permutazione sarà $2(n-1)+1$.

PROBLEMA II.

32. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad aversi in* A *palle bianche* n−2 *o nell' una o nell' altra di due consecutive permutazioni.*

Notiamo le colonne degli eventi contrarj e delle rispettive combinazioni, com'è stato avvertito al §. 23.

$$\begin{array}{ll|ll|ll|} n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \end{array}.$$

Fatti perciò i prodotti de' numeri delle combinazioni in ciascuna colonna, saprem subito, essere il numero totale delle combinazioni contrarie; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$.

PROBLEMA III.

33. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *palle bianche* n − 2 *nel caso di tre consecutive permutazioni.*

Tutto si riduce a notar le doppie colonne per gli eventi infausti, senza ommetterne alcuna. Pel nostro problema esse son le seguenti;

$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll|ll} n & 1 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\ n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n & 1 & n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) \end{array}.$$

Dunque il numero delle combinazioni contrarie è $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$.

PROBLEMA IV.

34. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *palle bianche* n − 2 *nel corso di quattro consecutive permutazioni.*

Fatte al ſolito le colonne per gli avvenimenti ſiniſtri, eſſe riſultano così.

n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2

$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$

dalle quali ſi rileva, eſſere il numero delle combinazioni contrarie; $n^4 + 4n^2(n-1) + 12n^2(n-1)^2 + 8(n-1)^3 + 16(n-1)^4$.

PROBLEMA V.

35. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* n — 2 *nel corſo di cinque conſecutive permutazioni.*

Ecco le 13 colonne inſiem colle laterali, che ci preſentano la ſoluzione di queſto Problema.

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1
n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1

$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1

$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$

I prodotti de' numeri delle laterali somministrano le combinazioni contrarie con questa formola; $n^4+6n^4(n-1)$ $+12n^2(n-1)^2+32n^2(n-1)^3+16(n-1)^4$ $+32(n-1)^5$.

36. Ponghiam per ordine le combinazioni contrarie dalla prima sino alla quinta permutazione, e ci nascerà questa serie; $1+2(n-1)$; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$; $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$; $n^4+4n^2(n-1)+12n^2(n-1)^2+8(n-1)^3+16(n-1)^4$; $n^4+6n^4(n-1)+12n^2(n-1)^2+32n^2(n-1)^3$ $+16(n-1)^4+32(n-1)^5$; ecc., la quale è una ricorrente di secondo grado; e i suoi moltiplicatori sono $2(n-1)$; n^2, cosicchè il primo $2(n-1)$ sia quello che moltiplica il termine antecedente al termine ricercato. Intendendo che la suddetta serie sia continuata anteriormente, supponiamo che siano u, t due termini innanzi al primo $1+2(n-1)$. Sarà dunque $n^2t+2(n-1)+4(n-1)^2=n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$, ovvero, eliminate le quantità che si distruggono; $n^2t=n^2$, cioè $t=1$. In oltre avremo $n^2u+2(n-1)=1+2(n-1)$, ovvero $u=\frac{1}{n^2}$. Onde i due termini innanzi al primo sono $\frac{1}{n^2}$; 1; e questi si denomineranno in appresso l' appendice della serie.

37. Divien facile in questa serie il passar dai moltiplicatori al termine generale. Poichè ella è di secondo grado, chiamato m il numero de' termini o delle permutazioni, il suo termine generale veste questa forma; ap^m+bq^m. Ora la teoria delle ricorrenti c' insegna, che vagliono queste due equazioni; $p+q=2(n-1)$; $-pq=n^2$, dalle quali si trae $p=n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}$; $q=n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}$. Sostituiti pertanto questi valori nel termine generale, si fa esso

$$a\left(n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m+b\left(n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m.$$

Per la determinazione poi delle ſpecie a, b, ſarem ſucceſſivamente le due ipoteſi di $m = 1$, e di $m = 2$. Colla prima dovrà eſſere $a\left(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right) + b\left(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right) = 1 + 2(n-1)$; e colla ſeconda; $a\left(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^2 + b\left(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^2 = n^2 + 2(n-1) + 4(n-1)^2$. Queſte due equazioni ci fanno conoſcere i valori delle due ſpecie a, b, e ſi trova

$$a = \frac{\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} + n}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}\ ;\ b = \frac{\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} - n}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}},$$

così che il numero indefinito delle combinazioni contrarie ad averſi in A palle bianche $n - 2$ almeno in una delle permutazioni m diverrà

$$= \frac{\left(\sqrt{((n-1)^2+n^2)}+n\right)\left(n-1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^m}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}$$
$$+ \frac{\left(\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} - n\right)\left(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^m}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}.$$

Se queſto per comodo ſi chiami P, ſi avrà a un tratto il numero indefinito delle combinazioni ſavorevoli, che ſarà $n^{2m} - \Upsilon$, onde inſtituita l' equazione $n^{2m} - \Upsilon = \Upsilon$, oſſia $n^{2m} = 2\Upsilon$, il valore di m eſatto o proſſimo eſprimerà il numero delle permutazioni che domandar ſi debbono, affinchè ſi poſſa ſcommettere eſattamente o proſſimamente in pari, che almeno in una di eſſe avrà luogo l' evento $n - 2$.

38. Ciò però ſi può ancora ottenere nelle diverſe ipoteſi numeriche de' valori di n collo ſcrivere una ſotto l' altra le ſerie delle combinazioni favorevoli e contrarie, ſenza ricorrere ai termini generali. Sia $n = 2$; in tale ipoteſi ſono i quattro primi termini delle combinazioni contrarie ; 3 , 10 , 32, 104 ecc. e i corriſpondenti delle favorevoli 1, 6, 32, 152 ecc. In queſte due ſerie i terzi termini ſono eguali. Dunque ſono eſattamente tre le permutazioni , che menano probabilmente una volta l' evento di bianche $n - 2$, oſſia di

bianche zero nell' urna A. Sia $n=3$. Le due ſerie per queſta ipoteſi ſono 5, 29, 161 ecc. Per una ſola per-
4, 52, 568 ecc.
mutazione ho 5 combinazioni contrarie e 4 favorevoli; per due ne ho 52 di favorevoli e 29 di contrarie; conſeguentemente giocando in pari, ho danno ſe domando una ſola permutazione, e vantaggio ſe ne domando due; il che vuol dire, che il numero di permutazioni atto a render probabile l' evento $n-2$ oſſia 1 di bianche è medio tra l' uno e il due.

PROBLEMA VI.

39. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi in* A *palle bianche* $n-3$ *in una ſola permutazione.*

Poichè lo ſtato primitivo dell' urna A è di racchiuder bianche $n-1$, ſi vede ſubito, che in una ſola permutazione non è poſſibile di paſſare allo ſtato di bianche $n-3$; e però tutte le combinazioni delle palle, che ſono n^2, ci diventan contrarie, e il numero delle favorevoli ſarà $=0$.

PROBLEMA VII.

40. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* $n-3$ *o nell' una o nell' altra di due permutazioni.*

Tutti gli accoppiamenti degli eventi contrarj all' evento $n-2$ di bianche in due permutazioni ſono anche contrarj all' evento $n-3$. In oltre tutti gli accoppiamenti favorevoli ad ottener bianche $n-2$ in due permutazioni, detratti quelli, ne' quali entra l' evento $n-3$, ſon pur contrarj a queſt' ultimo avvenimento. Ma in una ſola maniera può aſſociarſi $n-2$ con $n-3$, che è queſta: $n-2$, cui corriſponde di combinazioni
$n-3$

$(n-1)^2$. Dunque la somma delle combinazioni con-
$(n-2)^2$

trarie e favorevoli pel caso di bianche $n-2$ in due permutazioni, meno il prodotto $(n-1)^2(n-2)^2$ darà la somma delle contrarie all' avvenimento $n-3$. Ma la somma delle contrarie e favorevoli per bianche $n-2$ in due permutazioni è n^4. Dunque le contrarie pel caso di $n-3$ sono $n^4-(n-1)^2(n-2)^2$, ovvero $6n^3-13n^2+12n-4$.

P R O B L E M A VIII.

41. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *bianche* n — 3 *nel corso di tre permutazioni.*

Ragionando, come abbiam fatto pel precedente Problema, concluderemo, che il numero delle combinazioni contrarie da noi ricercato sarà eguale a n^6 meno i prodotti delle combinazioni, che corrispondono alle colonne degli eventi, ne' quali entra $n-3$; le quali unite alle laterali son le seguenti;

$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$.

Il perchè le combinazioni contrarie diventano in tutto
$$n^6-2(n-1)^3(n-2)^2-4(n-1)^2(n-2)^3-9(n-1)^2(n-2)^2$$
$$-6(n-1)^2(n-2)^2(n-3)-(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2,$$
ovvero $33n^4-126n^3+198n^2-144n+40$.

P R O B L E M A IX.

42. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *bianche* n — 3 *nel corso di quattro permutazioni.*

Sono 20 le colonne laterali a quelle degli eventi, in cui entra $n-3$, le quali ci somministrano i prodotti che si debbon sottrarre da n^8 per determinare le combinazioni contrarie richieste dal presente problema. Eccole per ordine:

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	4	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-1$	4
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-1)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$
$n-2$	9	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-3$	16
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-2)^2$								
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$								
$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$								
$n-4$	$8(n-4)$	$n-5$	$(n-4)^2$								

Si trarrà quindi, dopo la riduzione de' termini, il numero delle combinazioni contrarie $= 176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$.

43. Andando innanzi colla ricerca, ci verrà fatto di scoprire, che preso cominciamento dalla prima del Problema VI., le quattro formole ritrovate; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$; $33n^4 - 126n^3 + 198n^2 - 144n + 40$; $176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$; sono i 4 primi termini di una ricorrente di terzo grado, i cui moltiplicatori posti ordinatamente sono; $6n - 10$; $-3n^2 + 16n - 12$; $-4n^3 + 8n^2$. Questa serie pure avrà l'appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1 innanzi al primo così che la serie coll' appendice sarà $\frac{1}{n^2}$; 1; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$. ecc.

PROBLEMA

PROBLEMA X.

43. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 4 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Conſidero queſto Problema in tutta la ſua generalità, non potendoſi più ignorare dopo gli eſempj de' ſuperiori Problemi, come ſi debba procedere anche qui per inveſtigare le combinazioni contrarie che ſpettano alle ipoteſi di 1, 2, 3 ecc. permutazioni. Io le ho partitamente eſaminate ſino a quel ſegno che mi faceva conoſcere la legge della ſerie, della quale noto i primi 4 termini.

1; n^2

2; n^4

per permut. 3; $12n^5 - 58n^4 + 144n^3 - 193n^2 + 132n - 36$

4; $114n^6 - 888n^5 + 3159n^4 - 6216n^3 + 6952n^2 - 4128n + 1008$.

Queſta ſerie è una ricorrente di 4.° grado, i ſuoi moltiplicatori ſono;

$12n - 28$: $-30n^2 + 148n - 156$; $-4n^3 - 52n^2 + 216n - 144$; $15n^4 - 84n^3 + 108n^2$; ed ammette l' appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1, che vanno avanti al primo termine n^2.

PROBLEMA XI.

44. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 5 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Se ſi farà l' eſame di queſta ipoteſi colle regole ſopra indicate, ſi troverà una ſerie di combinazioni contrarie, che è una ricorrente di quinto grado, di cui queſti ſono per ordine i cinque moltiplicatori.

$20n - 60$; $-110n^2 + 660n - 908$; $140n^3 - 1460n^2 + 4376n - 3696$; $95n^4 - 340n^3 - 1124n^2 + 4608n - 2880$; $-56n^5 + 640n^4 - 2208n^3 + 2304n^2$: e i cinque primi termini ; n^2 ; n^4 ; n^6 ; $20n^7 - 170n^6 + 800n^5 - 2273n^4 + 3980n^3 - 4180n^2 + 2400n - 576$; $290n^8 - 3800n^7 + 23927n^6 - 89480n^5 + 211800n^4 - 320000n^3 + 298224n^2 - 155520n + 34560$ ecc. Qui pure ha luogo la ſolita appendice $\frac{1}{n^2}$, 1.

45. Riandando quel che s'è detto dal §.31. ſino ad ora ſi raccoglie primo, che tanto è il grado della ricorrente delle combinazioni contrarie, quanto, principiando da 2, è il numero delle bianche, che ſi vogliono eſtratte dalla prim' urna nel decorſo di qualſiſia numero di permutazioni; ſecondo, che avendo tutte queſte ſerie al principio alcuni termini che ſi ſuccedono in ſerie geometrica continua, ſe vi aggiungerem l'appendice, tanti ſaranno i termini geometricamente proporzionali, quanto è il grado della ſerie delle combinazioni contrarie, vale a dire quanti ſono i ſuoi moltiplicatori. Onde, conoſciuta che foſſe la legge generale de' moltiplicatori per la ipoteſi indeterminata di palle bianche reſidue $n - z - 1$, ſiccome il numero de' moltiplicatori ſpettanti alla ricorrente di queſto evento indefinito è appunto $z + 1$, e i termini della ſerie geometrica dal primo $\frac{1}{n^2}$ dell' appendice ſino all' ultimo n^{2z-2} ſon pur eſſi $z + 1$, non vi ſarebbe biſogno di formar colonna alcuna degli eventi (la qual coſa è moleſtiſſima ; e atteſo il numero grandiſſimo di queſte colonne, quando creſce il numero delle permutazioni, fa ſempre rimaner col dubbio di averle notate tutte), e baſterebbero i moltiplicatori inſiem coi termini della ſerie geometrica per inveſtigare i ſuſſeguenti termini delle noſtre ſerie. Laonde a queſto ſcopo dobbiam dirigere le noſtre

meditazioni; e il Problema che c'importa di scioglie-re è il seguente.

PROBLEMA XII.

46. *Dato il numero* n — z — 1 *di palle bianche, che si vogliono almeno una volta rimaste nell' urna* A *pel corso di qualsisia numero di permutazioni, trovar la serie generale delle combinazioni contrarie, ovvero determinare i suoi moltiplicatori, che sono* z + 1 *di numero, e unitamente alla parte geometrica* $\frac{1}{n^2}, 1, n^2, n^4 \ldots\ldots n^{2z-2}$ *della serie generale servono a far nascere tutti i suoi termini susseguenti.*

Per darne la soluzione, fa di mestieri mettersi sott'occhio i moltiplicatori che corrispondono alle ipotesi de' precedenti problemi, onde agevolarsi l' indagine della legge, con cui procedono. Eccoli qui disposti con ordine.

Per bianche residue $n-2$; 1.° moltip. $2n-2$; 2.° n^2

b. r. $n-3$; 1.° m. $6n-10$; 2.° $-3n^2+16n-12$; 3.° $-4n^3+8n^2$

b. r. $n-4$; 1.° m. $12n-28$; 2.° $-30n^2+148n-156$;
3.° $-4n^3-52n^2+216n-144$; 4.° $15n^4-84n^3+108n^2$

b. r. $n-5$; 1.° m. $20n-60$; 2.° $-110n^2+660n-908$;
3.° $140n^3-1460n^2+4376n-3696$;
4.° $95n^4-340n^3-1124n^2+4608n-2880$;
5.° $56n^5+640n4-2208n^3+2304n^2$.

47. Diamo a questi moltiplicatori un'altra forma equivalente, che risulta dal lasciare le formole de' prodotti nati dalle colonne laterali così come stanno, senza ridurle al netto; del che si vede un esempio ne' primi cinque problemi. La nuova forma è questa.

Per bianche residue $n-2$ 1° moltip. $2(n-1)$
2° n^2

b.r. $n-3$ 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)$
2.° $-8(n-1)(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-4n^2(n-2)$

b.r. n-4. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)$

2.° $-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)+9(n-2)^2-8(n-1)(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-6n^2(n-3)-24(n-1)^2(n-3)+48(n-1)(n-2)(n-3)-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$

4.° $24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

b.r. n-5. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)+8(n-4)$

2.° $-48(n-3)(n-4)-32(n-2)(n-4)-16(n-1)(n-4)+16(n-3)^2-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)--8(n-1)(n-2)+9(n-2)^2+4(n-1)^2+n^2$

3.° $192(n-2)(n-3)(n-4)+96(n-1)(n-3)(n-4)-72(n-2)^2(n-4)+64(n-1)(n-2)(n-4)--32(n-1)^2(n-4)-8n^2(n-4)-64(n-2)(n-3)^2-32(n-1)(n-3)^2+48(n-1)(n-2)(n-3)-24(n-1)^2(n-3)-6n^2(n-3)-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$.

4.° $48n^2(n-3)(n-4)+192(n-1)^2(n-3)(n-4)-384(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+144(n-1)(n-2)^2(n-4)+32n^2(n-2)(n-4)(n-4)+128(n-1)(n-2(n-3)^2-64(n-1)^2(n-3)^2-16n^2(n-3)^2+24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

5.° $-192n^2(n-2)(n-3)(n-4)+72n^2(n-2)^2(n-4)+64n^2(n-2)(n-3)^2$.

48. Le suddette formole col porre a maggior comodo $n-1=a$; $2(n-2)=b$; $3(n-3)=c$; $4(n-4)=d$, ecc.; $n^2=p^2$; $4(n-1)^2=q^2$; $9(n-2)^2=r^2$; $16(n-3)^2=t^2$, ecc. si trasformano in quest' altre.

Per bianche residue $n-2$; 1.° moltip. $2a$

2.° p^2

b. r. $n-3$; 1.° m. $2a+2b$

2.° $-2b(2a)+p^2+q^2$

3.° $-2bp^2$

b. r. $n-4$; 1.° m. $2a+2b+2c$

2.° $-2c(2a+2b)-4ab+p^2+q^2+r^2$

3.° $2c(4ab-p^2-q^2)-2bp^2-2ar^2$

4.° $2c(2bp^2)-p^2r^2$

b. r. $n-5$; 1.° m. $2a+2b+2c+2d$

2.° $-2d(2a+2b+2c)-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2+t^2$

3.° $2d(4bc+4ac+4ab-p^2-q^2-r^2)+8abc-2cp^2$ $-2cq^2-2bp^2-2ar^2-2at^2-2bt^2$

4.° $2d(-8abc+2cp^2+2cq^2+2bp^2+2ar^2)+4bcp^2$ $-p^2r^2-p^2t^2-q^2t^2+4abt^2$

5.° $2d(-4bcp^2+p^2r^2)+2bp^2t^2$.

49. La legge, con cui procedono i primi moltiplicatori, è per sè chiarissima, dovendo ciascun d'essi comprendere tanti termini della serie $2a$, $2b$, $2c$ ecc., ovver della serie $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)$ ecc.$)$, quanto è il grado della ricorrente che appartiene alla data ipotesi diminuito di un'unità. Volendosi pertanto il primo moltiplicatore per l'evento di b. r. $n-6$, ci verrà esso somministrato dalla formola $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5))$. Così per b. r. $n-7$ sarà $=2(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5)+6(n-6))$; e generalmente per l'ipotesi di b. r. $n-z-1$ avremo il primo moltiplicatore $=$ $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)\dots z(n-z))$.

50. Rispetto ai secondi moltiplicatori, di ciascun di essi ne faremo due parti: la prima verrà composta dall' aggregato di tutti que' termini, ne' quali entra l'ultimo termine del primo moltiplicatore corrispondente; la seconda parte formerassi da tutti i termini rimanenti. Vogliosi per esempio b. r. $n-3$? La prima parte del secondo moltiplicatore notato al §. 48. sarà $-2b(2a)$; l'altra p^2+q^2. Così per l'ipotesi di bianche $n-4$, questa prima parte sarà $-2c(2a+2b)$, e la seconda $-4ab+p^2+q^2+r^2$. Un leggiero esame poi di queste prime parti per le 4 ipotesi del §. 48. ci farà conoscere, che s'uguagliano esse al prodotto negativo dell'ultimo termine del primo moltiplicatore moltiplicato nel primo moltiplicatore dell'ipotesi immediatamente precedente. Onde, chiamato il primo general moltiplicatore $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)\dots z(n-z))$

$=\alpha$, e quello della proſſima antecedente ipoteſi, cioè $2(0+n-1+2(n-2)\ldots.(z-1)(n-z+1))=\alpha'$, ſi potrà eſprimere queſta prima parte in genere colla ſeguente formola; $-2z(n-z)(\alpha')$.

51. Per le ſeconde parti rifletteremo, che la ſerie de' quadrati p^2, q^2, r^2, t^2 ecc., ovvero n^2, $4(n-1)^2$, $9(n-2)^2$, $16(n-3)^2$, $25(n-4)^2$ ecc., ha per termine generale $z^2(n-z+1)^2$; in oltre, che ciaſcuna di queſte ſeconde parti è compoſta di tutto il ſecondo moltiplicatore, che conviene all'ipoteſi del proſſimo evento anteriore e del quadrato, che immediatamente ſuccede nella ſerie de' quadrati p^2+q^2 ecc., che entrano nella formazione dello ſteſſo precedente ſecondo moltiplicatore. Così al §. 48. per l' evento $n-3$, la noſtra ſeconda parte è p^2+q^2, cioè tutto il ſecondo moltiplicatore per l' evento $n-2$ con di più il quadrato q^2, che nella ſerie de' quadrati tien dietro immediatamente a p^2. Per l' evento $n-4$, la ſeconda parte è $-4ab+p^2+q^2+r^2$, i tre primi termini della quale ſono preciſamente il ſecondo moltiplicatore $-2b(2a)+p^2$ q^2 per l' ipoteſi $n-3$, e l' ultimo r^2 è il quadrato che ſeguita in ordine q^2; e lo ſteſſo dicaſi per gli altri eventi. Sicchè chiamando generalmente γ il ſecondo moltiplicatore, che compete all' evento $n-z-1$, e γ' il ſecondo moltiplicatore, che ſpetta al precedente evento $n-z$, ſarà queſta ſeconda parte $=\gamma'+z^2(n-z+1)^2$; e tutto il ſecondo moltiplicatore

$$\gamma=-2z(n-z)\alpha'+\gamma'+z^2(n-z+1)^2.$$

52. Vengo ai terzi moltiplicatori, pei quali ſtabiliſco la ſeguente regola cavata dall' eſame delle quattro ipoteſi ordinate nel §. 48, e da altre di più ſulle quali ho inſtituito i miei calcoli. Sia α il primo moltiplicatore generale, che corriſponde all' ipoteſi dell' evento $n-z-1$; β il ſecondo, e γ ſia il terzo che domandiamo. Oltracciò rappreſenti α' il primo moltiplicatore, che appartiene all' ipoteſi dell' evento immediatamen-

te precedente $n-z$, e α'' il primo moltiplicatore che risguarda l' evento antepenultimo $n-z+1$. Così esprima β' il secondo moltiplicatore spettante ai penultimo evento $n-z$; e per lo stesso evento $n-z$ sia γ' il terzo moltiplicatore. Dico che sarà $\gamma=-2z(n-z)\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2(\alpha'')$. Prendiamo in mano l' ipotesi del secondo evento $n-3$, che ha per terzo moltiplicatore $-2bp^2$. Poichè in tale supposizione il primo moltiplicatore è $2a+2b$; il secondo, $-4ab+p^2+q^2$, sarà $\alpha=2a+2b$; $\alpha'=2a$; $\alpha''=0$. Similmente $\beta= -4ab+p^2+q^2$; $\beta'=p^2$, e $\gamma'=0$, perchè appunto nell' ipotesi precedente $n-2$ non abbiam terzo moltiplicatore. Sostituendo pertanto nel superior canone questi valori, avrem $\gamma=-2(n-2).2p^2+0-4(n-1)^2(0)$, cioè, surrogando b invece di $2(n-2)$; $\gamma=-2bp^2$. Per l' evento $n-4$ diventa $\alpha=2a+2b+2c$; $\beta= -4ab-4ac-4bc+p^2+q^2+r^2$, onde $\alpha'=2a+2b$; $\alpha''=2a$; $\beta'=-4ab+p^2+q^2$, e $\gamma'=-2bp^2$, tale essendo appunto il terzo moltiplicatore per la precedente ipotesi dell' evento $n-3$. Quindi sarà $\gamma=-3(n-3)(-8ab+2p^2+2q^2)-2bp^2-9(n-2)^2(2a)$, ovvero (ponendo c in luogo di $3(n-3)$, e r^2 in luogo di $9(n-2)^2$) $\gamma=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$, come s'è ritrovato.

53. Questa corta ed elegante regola ha il vantaggio della massima generalità; ed ove α, β rappresentino i moltiplicatori che per ordine precedono γ, serve non solo per l' investigazione de' terzi, ma eziandio de' quarti, quinti ecc. moltiplicatori. Si voglia il quarto moltiplicatore γ, che corrisponde all' evento $n-4$. Dovendo essere α, β i due moltiplicatori antecedenti, sarà pel §. 48. $\alpha=-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2$; $\beta=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$; $\alpha'=-4ab+p^2+q^2$; $\alpha''=p^2$; $\beta'=-2bp^2$; $\gamma'=0$. Quindi $\gamma= -3(n-3)(-4bp^2)-9(n-2)^2p^2$, ossia $\gamma=4bcp^2-p^2r^2$. Si domandi il quinto moltiplicatore γ, che ap-

partiene all' evento $n-5$. In tal caſo ſarà $\alpha = 8bcd + 8acd + 8abd - 2dp^2 - 2dq^2 - 2dr^2 + 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2 - 2bt^2 - 2at^2$; $\beta = -16abcd + 4cdp^2 + 4cdq^2 + 4bdp^2 + 4adr^2 + 4bcp^2 - p^2r^2 - p^2t^2 - q^2t^2 + 4abt^2$; $\alpha' = 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2$; $\alpha'' = -2bp^2$; $\beta' = 4bcp^2 - p^2r^2$, e $\gamma' = 0$. Onde in virtù della regola $\gamma = -4(n-4)(8bcp^2 - 2p^2r^2) - 16(n-3)^2(-2bp^2)$, cioè $\gamma = -8bcdp^2 + 2dp^2r^2 + 2bp^2t^2$, come debbe eſſere.

54. Adattiamo la teoría ad un eſempio, e facciam vedere in pratica, come dato il numero totale delle palle bianche, e domandato un certo evento di bianche che deon rimanere nell' urna, ſi poſſano per mezzo della noſtra regola rintracciare con ſufficiente ſpeditezza i moltiplicatori della ricorrente delle combinazioni contrarie, e determinar quindi il numero delle permutazioni, che ſono neceſſarie per render probabile l' evento dato. Sia il numero delle palle bianche $n = 8$, e ſi cerchino i moltiplicatori della ricorrente, che compete all' evento nell' urna di bianche reſidue 4. In queſto caſo conviene eſaurire i tre eventi $n-2=6$, $n-3=5$, $n-4=4$. Cominciando dal primo $n-2$, e richiamando alla memoria, che $a = n-1$, $b = 2(n-2)$, $c = 3(n-3)$, cioè $a = 7$, $b = 12$, $c = 15$; e che $2a$ è il primo moltiplicatore per l' evento $n-2=6$; $2a + 2b$ pel ſecondo evento $n-3=5$; $2a + 2b + 2c$ pel terzo $n-4=4$, ſaprem toſto aſſegnare a ciaſcuno di queſti eventi il primo reſpettivo moltiplicatore, e tutti e tre per ordine ſaranno, come nell' anneſſa figura, 7.2, 19.2, 17.2^2.

b.r. 6. 1.° molt.	7.2	b.r. 5. 1.° m.	19.2	b.r. 4. 1.° m.	17.2^2
2.°	2^6	2.°	-19.2^2	2.°	-223.2^2
		3.°	-3.2^9	3.°	-237.2^4
				4.°	99.2^8

Ripigliati poi i canoni $\gamma = -2z(n-z).\alpha' + \gamma' + z^2(n-z+1)^2\gamma = -2z(n-z).\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2.\alpha''$, il il primo de' quali serve per ritrovare i secondi moltiplicatori, e il secondo per ritrovar gli altri, discorreremo così. Pel primo evento di b. r. 6 abbiam $z = 1$, $\alpha = 7.2$, $\alpha' = 0$, $\gamma' = 0$. Dunque il secondo moltiplicatore γ sarà ridotto alla formola $z^2(n - z + 1)^2$, ossia coi valori di $n = 8$, $z = 1$; $\gamma = 2^6$. Pel secondo evento di b. r. 5 diventa $z = 2$, $\alpha = 19.2$, $\alpha' = 7.2$, $\gamma' = 2^6$; e però il secondo moltiplicatore γ si fa $= - 4.6.7.2 + 2^6 + 4.49 = - 19.2^2$. Pel terzo evento poi di b. r. 4 divien $z = 3$, $\alpha = 17.2^2$; $\alpha' = 19.2$; $\gamma' = - 19.2^2$; onde il secondo moltiplicatore $\gamma = - 6.5.19.2 - 19.2^2 + 9.36 = - 223.2^2$. Si passi ora ai terzi moltiplicatori, e si dia principio dalla seconda ipotesi, giacchè la prima ne è priva. Poichè α, β deon essere i due moltiplicatori immediatamente precedenti al terzo che cerchiamo, sarà $\alpha = 19.2$, $\beta = - 19.2^2$; per conseguenza $\alpha' = 7.2$, e (non avendovi ipotesi superiore alla prima di b. r. 6) $\alpha'' = 0$. Di più $\beta' = 2^6$; $\gamma' = 0$. Laonde, introdotti questi valori nel secondo de' suddetti canoni, risulterà il terzo moltiplicatore $\gamma = - 4.6.2^6 = - 3.2^9$. Alla terza ipotesi di b. r. 4 corrispondono questi valori; $z = 3$, $\alpha = 17.2^2$; $\beta = - 223.2^2$; $\alpha' = 19.2$; $\alpha'' = 7.2$; $\beta' = - 19.2^2$; $\gamma' = - 3.2^9$, che fanno nascere il terzo moltiplicatore $\gamma = 6.5.19.2^2 - 3.2^9 - 9.36.7.2$, ovvero $\gamma = - 237.2^4$. Non restando presentemente altro che il quarto moltiplicatore della terza ipotesi, perchè esso manca nelle altre due, sarà, per quest'ultima indagine, $\alpha = - 223.2^2$; $\alpha' = - 19.2^2$; $\alpha'' = 2^6$; $\beta = 237.2^4$; $\beta' = - 3.2^9$; $\gamma' = 0$, e $z = 3$. Dunque il quarto moltiplicatore $\gamma = 6.5.3.2^9 - 9.36.2^6 = 99.2^8$.

55. Conosciuti i quattro moltiplicatori per l' evento di b. r. 4, rimane che si trovino i termini della serie contraria, di cui coll' ajuto dell' appendice ci son noti i quattro primi termini $\frac{1}{2^6}$, 1, 2^6, 2^{12}, che osservano

la proporzione geometrica. Ponghiam ſotto ad eſſi i quattro moltiplicatori, come nella preſente figura;

$$\frac{1}{2^6},\ 1,\ 2^6,\ 2^{12}\quad 54511.2^2, 684751.2^4, 38988839.2^4, 498813699.2^6$$

$$0,\ 0,\ 11025.2^2, 363825.2^4, 28120025.2^4, 574928125.2^6.$$

$$99.2^8, -237.2^4, -223.2^2, 17.2^2$$

E facciam poi giuſta la regola delle ricorrenti le ſolite moltiplicazioni. Eſſe ci daranno il quinto termine $= 54511.2^2$, il ſeſto $= 684751.2^4$, il ſettimo $= 38988839.2^4$, l'ottavo $= 498813699.2^6$ ecc. Per non andare innanzi ſenza propoſito, ſarà bene aver preſente ciò che abbiamo avvertito al §. 15. ſul numero totale delle combinazioni di tutte le palle nelle diverſe permutazioni per potere, ad ogni termine della ricorrente delle combinazioni contrarie, ſcriver ſotto di mano in mano l'analogo nella ſerie delle favorevoli. Così nel caſo noſtro ſi vedrà, che ai termini della ſerie contraria, principiando da 2^6 che è realmente il primo ſino al termine 498813699.2^6 corriſpondono nella favorevole i termini 0; 0; 11025.2^2; 363825.2^4; 28120025.2^4; 574928125.2^6. Ora ne' termini antecedenti al ſeſto le combinazioni avverſe ſon ſempre in numero maggiore delle propizie, ma queſte nel ſeſto eccedon le prime, e queſt' eceſſo, come ſe ne può far l'eſperienza, va ſempre più creſcendo ne' termini ſuſſeguenti. Dunque ſarebbe coſa inutile l'andar più oltre nelle ſerie, avendoſi già tanto che baſta per concludere, che il numero delle permutazioni neceſſarie a render probabile l'evento di ridurſi nella prim' urna alla metà di tutte le palle bianche, è un numero medio tra il 5 e il 6, non contando già, come abbiam fatto ſempre, la prima operazione, che di 8 bianche che erano ne fa rimaner ſette. Io mi accoſterò più al giuſto, ſe domando ſei permutazioni piuttoſto che cinque, perchè le combinazioni ſiniſtre, e le utili in cinque permutazioni ſtanno fra loro :: 38988839 : 28120025 , cioè :: 1.38 : 1 prossimamente ; laddove in sei permutazioni la proporzione delle sinistre alle utili è quella di 498813699 : 574928125, ovvero di 1 : 1.15 a un dipresso ; e s'accostan più all'eguaglianza i due numeri 1 , 1.15 di quel che faccian gli altri 1.38 , 1 .

56. Non posso dissimular l'incomodo, che reca al calcolatore il metodo che ho presentato per il ritrovamento de' moltiplicatori , perchè a determinar qualunque moltiplicatore relativamente ad una qualche ipotesi , è necessario che si sappia il moltiplicatore analogo dell'ipotesi precedente ; questo suppone noto l'analogo della ipotesi , che va avanti a quest'ultima , e così via via finchè con passo retrogrado si arrivi alla prima ipotesi dell'evento $n-2$. Onde se , per esempio, dati i due moltiplicatori pel primo evento , si vogliano determinare i sette moltiplicatori, che son richiesti dalla ipotesi dell'evento $n-7$, sarà d'uopo coll'ajuto de' due primi trovare i tre moltiplicatori per l'evento $n-3$, poi i quattro per l'evento $n-4$ ecc. sino ai sette moltiplicatori per l'ultimo che domandiamo. Quest' incomodo però resta di molto diminuito , ove diasi un valor numerico alla specie n , come si suol fare all' occasione che vengano in pratica simili quesiti ; e in tal caso, quando non siano assai grandi il numero di tutte le palle bianche , e quel delle bianche, che si voglion tolte dall'urna, con poche operazioni numeriche si fanno nascere i moltiplicatori di tutte le ipotesi che precedon quest'ultima , e si assegnano a questa stessa i competenti moltiplicatori. Anche l'uso de' logaritmi, massime nelle moltiplicazioni che far si debbono per trovare i termini delle serie delle combinazioni , potrà contribuire a facilitar vie più la faccenda ; e considerando insieme ogni cosa, si dovrà per avventura concludere , che in un problema di non mediocre difficoltà , come il nostro , l'esposto metodo sia effettivamente un de' più semplici e de' men laboriosi.

57. Per soddisfar nondimeno chi amasse una maggior generalità anche a costo della speditezza, e per la determinazione de' moltiplicatori che esige un evento dato non volesse aver bisogno di scorrere per le ipotesi di tutti gli eventi anteriori, ci riman da ultimo di trovar la maniera di generalizzare questi moltiplicatori medesimi, e di racchiudere in tante formole uniche i moltiplicatori che spettano a tutti i possibili eventi. Quest'è ciò che noi eseguiremo ne' susseguenti paragrafi; premessa però la soluzione del presente.

PROBLEMA XIII.

58. *Sia la formola generale (M)* $\phi = az^m + bz^{m-1} + cz^{m-2} + dz^{m-3} + ez^{m-4} + fz^{m-5} + gz^{m-6}$ ecc., *indi un' altra formola (N)* $\gamma = pz^{m+1} + qz^m + rz^{m-1} + sz^{m-2} + tz^{m-3} + uz^{m-4} + xz^{m-5}$ ecc. *Stabilito che* z *vada calando dell' unità positiva, onde, servendosi della maniera di scrivere le differenze finite, sia* $z - z' = \delta z = 1$; *e supposto che sia* $\gamma - \gamma' = \delta\gamma = \phi$, *si cerca* γ, *cioè si domandano i valori delle indeterminate* p, q, r, s ecc. *dati per* m, *e per le altre cognite* a, b, c, d ecc.

La soluzione di questo problema è facile, se faremo uso del teorema notissimo compreso in questa equazione;

$$\delta\gamma = d\gamma - \frac{d^2\gamma}{2} + \frac{d^3\gamma}{2.3} - \frac{d^4\gamma}{2.3.4} + \frac{d^5\gamma}{2.3.4.5} \text{ ecc.}$$

in cui i d rappresentano le differenziazioni ordinarie, ciascuna delle quali eseguita, conviene cangiare la differenza dz, che ha ciascun termine in δz, cioè in 1. Imperocchè, in virtù di questo teorema, avremo

$$d\gamma = (m+1).pz^m + mqz^{m-1} + (m-1)rz^{m-2} + (m-2)sz^{m-3} + (m-3)tz^{m-4} + (m-4)uz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^2\gamma = m(m+1)pz^{m-1} + (m-1)mqz^{m-2} + (m-2)(m-1)rz^{m-3} + (m-3)(m-2)sz^{m-4} + (m-4)(m-3)tz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^3\gamma = (m-1)(m)(m+1).pz^{m-2} + (m-2)(m-1)(m)qz^{m-3} + (m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-4} + (m-4)(m-3)(m-2)sz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^4 y = (m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-3} + (m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-4}$$
$$+ (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-5} \text{ ecc.}$$
$$d^5 y = (m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-4}$$
$$+ (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-5} \text{ ecc.}$$
$$d^6 y = (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-5} \text{ ecc.},$$

e quindi ecc.

$$(O)\ \delta y = (m+1)pz^m + \left(-\frac{m.(m+1)}{2}p + mq\right)z^{m-1}$$
$$+ \left(\frac{(m-1)(m)(m+1)}{2.3}p - \frac{(m-1)(m)}{2}q + (m-1)r\right)z^{m-2}$$
$$+ \left(-\frac{(m-2)(m-1)(m)(m+1)}{2.3.4}p + \frac{(m-2)(m-1)(m)q}{2.3}\right.$$
$$\left. - \frac{(m-2)(m-1)r}{2} + (m-2)s\right)z^{m-3} + \left(\frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5}\right.$$
$$- \frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4} + \frac{(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3}$$
$$\left. - \frac{(m-3)(m-2)s}{2} + (m-3)t\right)z^{m-4}$$
$$+ \left(-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5.6}\right.$$
$$+ \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4.5} - \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3.4}$$
$$\left. + \frac{(m-4)(m-3)(m-2)s}{2.3} - \frac{(m-4)(m-3)t}{2} + (m-4)u\right)z^{m-5}.\text{ecc.}$$

Altro pertanto non resta da fare che confrontare i termini di questa equazione colla equazione $\phi =$ ecc., e troveremo i valori delle suddette indeterminate p, q, ecc. Il confronto de' primi termini ci offre l'equazione $(m+1)p = a$, che dà $p = \dfrac{a}{m+1}$. Dal confronto de' secondi risulta $-\dfrac{(m)(m+1)}{2}p + mq = b$, o, sostituito il valore di p, e fatte le dovute operazioni, $q = \frac{b}{m} + \frac{a}{2}$. Coi confronti poi de' termini susseguenti ci verran date le altre indeterminate, le quali io dispongo per ordine, principiando dalla prima;

$$p = \frac{a}{m+1};\ q = \frac{b}{m} + \frac{a}{2};\ r = \frac{c}{m-1} + \frac{b}{2} + \frac{ma}{2.2.3};$$

$$s = \frac{d}{m-2} + \frac{c}{2} + \frac{(m-1)b}{2.2.3} + a.0;\ t = \frac{e}{m-2} + \frac{d}{2} +$$

$$\frac{(m-2)c}{2.2.3} + b.0 - \frac{(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.2.3.4.5};\ u = \frac{f}{m-4} +$$

$$\frac{e}{2} + \frac{(m-3)d}{2.2.3} + c.0 - \frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{2.3.2.3.4.5}.b + a.0;$$

$$x = \frac{g}{m-5} + \frac{f}{2} + \frac{(m-4)e}{2.2.3} + d.0 - \frac{(m-4)(m-3)(m-2)c}{2.3.2.3.4.5}$$

$$+ b.0 + \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.2.3.4.5.6.7.}\ \text{ecc.}$$

La legge de' due primi termini in tutti i valori di queste indeterminate è chiara. Cominciando poi la serie de' rimanenti dai terzi termini, veggiamo, che i termini nelle sedi pari son nulli, che quelli delle sedi dispari progrediscono coi segni alterni, e che il numero de' fattori, ne' quali entra la m pei termini delle sedi dispari seguita la legge de' numeri dispari 1, 3, 5, 7 ecc. Quanto alla legge de' coefficienti numerici, non bisogna lasciarsi ingannare da que' pochi valori delle specie p, q, r ecc. che abbiamo determinato, coi quali potrebbe parere, che i numeratori de' termini non avessero altro coefficiente numerico che l' unità. Se si va avanti fino al nono termine delle equazioni generali, cosicchè sia $\phi = az^m \ldots + bz^{m-7} + iz^{m-8}$ ecc., $\gamma = pz^{m+1} \ldots + yz^{m-6} + \pi z^{m-7}$, si trova $\pi = \frac{i}{m-7} + \frac{h}{2} + \frac{(m-6)g}{2.2.3}$

$$+f.o-\frac{(m-6)(m-3)(m-4).e}{2.3.2.3.4.5.}$$

$$+d.o+\frac{(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2).c}{2.3.2.3.4.5.6.7}+b.o$$

$$-\frac{3(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9};$$

ove si vede che apparisce il 3 nel numeratore dell' ultimo termine. La vera regola, colla quale si determinano questi coefficienti, è la seguente, come ciascuno può verificare. Si ponga per comodo $\frac{1}{2.2.3}=\omega$, e sarà $\frac{1}{2.3.2.3.4.5}=\frac{-3}{2.2.3.4.5}+\frac{\omega}{2.3}$. Quest' omogeneo di comparazione si faccia $=\omega'$, e risulta $\frac{1}{2.3.2.3.4.5.6.7}$ $=\frac{5}{2.2.3.4.5.6.7}-\frac{\omega}{2.3.4.5}+\frac{\omega'}{2.3}$, cui sia $=\omega''$; ed avremo $\frac{3}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9}=\frac{-7}{2.2.3.4.5.6.7.8.9}+\frac{\omega}{2.3.4.5.6.7}$ $-\frac{\omega'}{2.3.4.5}+\frac{\omega''}{2.3}$ ecc. colla legge, che è manifesta.

PROBLEMA XIV.

59. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il primo moltiplicatore generale della serie ricorrente contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Abbiam veduto al §. 49, che il primo moltiplicatore generale è eguale alla somma della serie $2(n-2)$ $+4(n-2)+6(n-3)+\ldots\ldots+2(z-1)(n-z+1)$ $+2z(n-z)$, che suppongo $=\gamma$. Or poichè questa serie diminuita dell' ultimo termine $2z(n-z)$ è quel che diventa y, se in esso in vece di z si pone $z-1$, sarà $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)\ldots 2(z-1)(n-z+1) = y'$, pel precedente Problema, e quindi $y-y'$, ossia $\delta y = 2z(n-z) = -2z^2+2nz$. S' instituisca il paragone di questa equazione col canone (O) del §.58, ed

avremo $m=2$; $(m+1)p=-2$, ovvero $p=-\frac{2}{3}$ col confronto de' primi termini. Quel de' secondi ci somministra l' equazione $-3p+2q=2n$, da cui colla sostituzione del valore di p si trae $q=n-1$. Perchè poi manca il termine costante nella nostra formola, sarà col paragone de' termini $p-q+r=0$, cioè $r= -p+q=n-1+\frac{2}{3}=\frac{3n-1}{3}$. Introducansi ora questi valori nella formola generale (N) del §. 58, e si avrà la somma della serie $y=\frac{-2z^3}{3}+(n-1)z^2 + \frac{(3n-1)z}{3}+s$. La specie s verrà determinata dalla condizione, che, quando $z=1$, sia la somma della nostra serie eguale al primo termine $2(n-1)$; onde nasce $-\frac{2}{3}+n-1+\frac{3n-1}{3}+s=2n-2$, ossia

$$-\frac{2+3n-3+3n-1}{3}+s=2n-2 \text{ cioè } \frac{6n-6}{3}+s$$

$=2n-2$, che dà $s=0$. Poichè $\delta y=\phi$, poteasi pure fare il confronto del nostro termine generale $-2z^2+2nz$ colla formola (M) del §. 58, e trarne quindi i valori de' simboli m, a, b, ecc. Ecco ciò che ne farebbe risultato; $m=2$, $a=-2$, $b=2n$, $c=0$. Dunque, per le generali determinazioni delle specie p, q ecc., $p=-\frac{2}{3}$, $q=n-1$, $r=\frac{3n-1}{3}$, come s'è già trovato.

trovato. Da ciò si deduce, che il primo moltiplicatore della ricorrente contraria pel generale evento di bianche $n-z-1$, sarà $=\frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3}$ $=(z+1)\left(zn-\frac{2z^2+z}{3}\right)$.

PROBLEMA XV.

60. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il secondo moltiplicatore della serie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Sia θ una funzione qualunque di z; θ' quel che diventa θ, se in esso si pone $z-1$ in vece di z; θ'' ciò che divien θ', se in θ si mette un'altra volta $z-1$ in luogo di z; ecc. La teoria delle differenze finite ci somministra altrettante serie quanti sono i θ', θ'' ecc., per mezzo delle quali vengon dati gl'istessi θ', θ'' ecc. pel primo simbolo θ; e si ha.

$$(P)\ \theta'=\theta-d\theta+\frac{d^2\theta}{2}-\frac{d^3\theta}{2.3}+\frac{d^4\theta}{2.3.4}-\frac{d^5\theta}{2.3.4.5}+\frac{d^6\theta}{2.3.4.5.6}\ \text{ecc.}$$

$$(Q)\ \theta''=\theta-2d\theta+\frac{2^2d^2\theta}{2}-\frac{2^3d^3\theta}{2.3}+\frac{2^4d^4\theta}{2.3.4}-\frac{2^5d^5\theta}{2.3.4.5}\ \text{ecc.}$$

ove i d significano le differenziazioni ordinarie. Delle due serie notate, la prima ci è utile per trovare il nostro secondo moltiplicatore; tutte e due per trovare i seguenti. Si richiami a tal fine la formola del §. 51. che è $\gamma=-2z(n-z)\alpha'+\gamma'+z^2(n-z+1)^2$, in cui γ rappresenta il secondo moltiplicatore, α il primo, e α' ciò che diventa α se in esso in vece di z si pone $z-1$. Sarà $\gamma-\gamma'=\delta\gamma=-2z(n-z)\alpha'+z^2(n-z+1)^2$. Or poichè $\alpha=\frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3}$, fatto θ $=\alpha$, e sostituito 1 in vece di dz, avrem pel canone (P)

$$\alpha' = \frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3} + \frac{6z^2-6nz+6z-3n+1}{3}$$

$$+ \frac{-6z+3n-3}{3} + \frac{2}{3}\text{; ovvero } \alpha' = \frac{-2z^3+(3n+3)z^2-(3n+1)z}{3};$$

$$\text{e perciò } \delta\gamma = 2z(n-z)\frac{(2z^3-(3n-3)z^2+(3n+1)z}{3} + z^2(n-z+1)^2 =$$

$$\frac{-4z^5+(10n+9)z^4-(6n^2-18n-)z^3+(9n^2+8n+3)z^2.}{3}$$

Paragonisi questa formola colla generale (M), e risulterà $m=5$, $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{10n+9}{3}$, $c=\frac{-6n^2-18n-8}{3}$, $d=\frac{9n^2+8n+3}{3}$, $e=o$, $f=o$, perchè manca il termine, in cui z sia alla prima dimensione, e il termine costante. Sostituendo poi questi valori di m, a, b ecc. nelle generali determinazioni de' simboli p, q ecc., si ha $p=-\frac{2}{3^2}$, $q=\frac{10n-1}{3.5}$, $r=\frac{-9n^2+3n+5}{2.3^2}$, $s=-n$, $t=\frac{18n^2-3n-1}{2.3^2}$, $u=\frac{15n^2+10n+2}{2.3.5}$;

onde

$$\gamma = \frac{-20z^6+\overline{60n-6}z^5-\overline{45n^2+15n+25}z^4-90nz^3+\overline{90n^2-15n-5}z^2+\overline{45n^2+30n+6}z.}{2.3.3.5}$$

Non aggiungo alcun termine costante, perchè essendo la differenza finita $\delta\gamma$ un aggregato di termini moltiplicato per z^2, e annullandosi essa quando $z=o$, nella stessa ipotesi anche l'integrale γ debb'esser zero. Sicchè sarà noto il secondo moltiplicatore generale, che compete alla nostra serie, e noi l'esprimeremo in quest'altra forma equivalente;

$$\frac{z(z+1)}{2}\left(-(z^2+z+1)n^2+\frac{(4z^3-3z^2-3z+2)}{3}n+\frac{-20z^4+14z^3+11z^2-11z+6}{3.3.5}\right).$$

PROBLEMA XVI.

61. *Dato il generale evento di bianche* $n - z - 1$, *determinare il terzo moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z + 1$, *che al dato evento conviene*.

Pel §. 51. abbiamo il terzo moltiplicatore $\gamma = -2z(n-z)\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2 . \alpha''$, i ſimboli α, β denotando il primo e il ſecondo moltiplicatore già ritrovati: e quindi $\gamma - \gamma' = \delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+)^2 \alpha''$. Dal valore di $\beta =$

$$\frac{-20z^6 + \overline{60n-6}.z^5 \overline{-45n^2+15n+25}.z^4 - 90nz^3 \overline{+90n^2-15n-5}.z^2 \overline{+45n^2+30n+6} \times z}{2.3.3.5}$$

ſi deduce col mezzo del canone (P)

$$\beta' = \frac{-20z^6 \overline{+60n+114}.z^5 \overline{-45n^2-285n-245}.z^4 \overline{+180n^2+450n+240}.z^3 \overline{-180n^2+255n-95}.z^2 \overline{+45n^2+30n+6}.z}{2.3.3.5};$$

e dal valore di $\alpha = \dfrac{-2z^3 + (3n-3)z^2 + (3n-1)z}{3}$ col ſecondo canone (E) ſi trae

$\alpha'' = \dfrac{-2z^3 + (3n+9)z^2 + (-9n-13)z + 6n + 6}{3}$. Colla introduzione poi di queſti valori nella ſuperior formola $\delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+1)^2\alpha''$ ſi otterrà dopo le neceſſarie riduzioni

$$\delta\gamma = \frac{1}{3.3.5}\Big(-20z^8 + (80n+144)z^7 + (-105n^2-504n-440)z^6 + (45n^3+585n^2+1250n+735)z^5$$
$$+ (-225n^3-1125n^2-1560n-710)z^4 + (315n^3+945n^2+1010n+381)z^3 + (-135n^3-300n^2-276n-90)z^2\Big)$$

Queſta formola dovrà eſſere confrontata col canone (M) per le determinazioni delle ſpecie m, a, b ecc., onde ſi rendano anche noti gli altri ſimboli p, q, r ecc. e ſi abbia finalmente il ſuo integrale che ſarà il terzo moltiplicatore ricercato. Ma ſe a motivo de' coefficienti delle podestà di z molto complessi si trovasse più comodo d' integrar per parti la suddetta formola differenziale, bisognerebbe in tal caso trasformarla in quest' altra equivalente

$$\delta\gamma = (z^5-5z^4+7z^3-3z^2)n^3 + \frac{(-7z^6+39z^5-75z^4+63z^3-20z^2)n^2}{3}$$
$$+\frac{(80z^7-504z^6+1250z^5-1560z^4+1010z^3-276z^2)n}{3\cdot3\cdot5\cdot}$$
$$+\frac{-20z^8+144z^7-440z^6+735z^5-710z^4+381z^3-90z^2}{3\cdot3\cdot5}, \text{ e}$$

considerare che ogni fattore delle podestà di n sia una formola di differenze finite. Integrato pertanto ciascuno di questi fattori coll' ajuto del canone (M), senza aggiunger costante, che non ha luogo, si troverà il terzo moltiplicatore domandato dal Problema $=$

$$\frac{(z-1)z(z+1)}{2\cdot3}\Big((z^3-3z^2-z+2)n^3+\frac{(-6z^4-18z^3-15z+6)n^2}{3}$$
$$+\frac{(60z^5-192z^4+78z^3+174z^2-102z+36)n}{3\cdot3\cdot5}$$
$$+\frac{-280z^6+1008z^5-808z^4-693z^3+1061z^2-126z+144}{3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7}\Big).$$

PROBLEMA XVII.

62. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il quarto moltiplicatore della serie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Rappresentando γ secondo il solito questo quarto moltiplicatore, sarà α il secondo moltiplicatore, e β il terzo, che son già noti. Si passi dunque col canone $(\mathfrak{Q})$ dal valore di α a quello di α'', e dal valore di β a quello di β', e si sostituiscano questi nuovi valori nella formola generale $\delta\gamma = -2z(n-z)\beta'-z^2(n-z+1)^2\alpha''$. Si avrà $\delta\gamma$ dato per z e per n; e l' integrazione di queſta formola o tutt' a un tratto, o per parti, eſeguita alla maniera de' precedenti Problemi ci farà conoſcere il quarto moltiplicatore, che domandiamo, e farà eſſo

$$= \frac{(z-2)(z-1)z(z+1)}{2.3.4} \Big\{ (-z^4 + 6z^3 - 5z^2 - 8z + 3)n^4$$

$$+ (8z^5 - 50z^4 + 64z^3 + 36z^2 - 70z + 12)\frac{n^3}{3} +$$

$$(-120z^6 + 804z^5 - 1437z^4 + 78z^3 + 1503z - 792z + 108)\frac{n^2}{3.3.5} +$$

$$(1120z^7 - 8232z^6 + 19108z^5 - 10212z^4 - 15476z^3 + 18228z^2 - 3816z + 864)\frac{n}{3.3.3.5.5.7} -$$

$$\frac{1}{3.3.3.3.5.5.7}(2800z^8 - 22960z^7 + 65836z^6 - 64288z^5 - 30305z^4 + 83310z^3 - 37251z^2 + 198z - 3240)\Big\}.$$

Si tenga lo ſteſſo metodo pel 5.°, 6.° ecc. moltiplicatori, e ciaſcun d' eſſi farà in noſtra mano, ſenza che per averli ſia d' uopo dalla ipoteſi dell' evento $n-z-1$ aſcendere a tutte le precedenti ſino all' ultima dell' evento $n-2$.

63. Faremo la rifleſſione, che il terzo moltiplicatore ha il fattore $z-1$, e divien zero, quando $z=1$; il che debb' eſſere neceſſariamente, perchè in tale ipoteſi la ſerie ricorrente delle combinazioni è appunto di ſecondo grado, e non ammette per conſeguenza che due ſoli moltiplicatori. Così il quarto moltiplicatore riceve il fattore $z-2$, e perciò ſi fa nullo nell' ipoteſi di $z=2$, perchè in tal caſo la ricorrente, che gli corriſponde, è ſolo di terzo grado, e dee realmente mancare queſto quarto moltiplicatore. Onde, adattato un ſimil diſcorſo ai moltiplicatori ſuſſeguenti, ſi raccoglierà, che chiamato m il numero de' moltiplicatori, l' ultimo denominato dal numero m avrà il fattore $z-m+2$. Oſſerviſi in oltre, che i fattori de' noſtri generali moltiplicatori coſtituiſcono una ſerie aritmetica, e che ſon tanti, quanto è l' eſponente maſſimo di n per ciaſcun

d' essi, ovvero quanto è l' esponente massimo di z nella formola, che moltiplica la podestà massima di n. Di più, che l' unico fattore del primo moltiplicatore è diviso per 1, i due del secondo per 1.2, i tre del terzo per $1.2.3$; i quattro del quarto per $1.2.3.4$; per conseguenza i fattori numero m del moltiplicatore denominato da m saranno divisi da $1.2.3.4....(m-1)m$: Finalmente che cresce successivamente di un' unità l' esponente massimo di z nelle formole moltiplicatrici delle podestà di n decrescenti successivamente d' un' unità in ciascun moltiplicatore; e medesimamente cresce di un' unità l' esponente massimo di z nelle formole che moltiplicano la podestà massima di n, ove si passi da un moltiplicatore al suo immediatamente susseguente.

64. Queste cose poste, per evitare di far tante divisioni ne' moltiplicatori trovati coll' anzidetto metodo, quanti sono i loro fattori, onde ridurli a forma più comoda, potrebbe cadere opportuna la soluzione del presente

PROBLEMA XVIII.

65. *Ritrovare per ciascun moltiplicatore le formole moltiplicatrici delle podestà di* n, *che unitamente costituiscono il quoziente dell' intero moltiplicatore diviso pe' suoi respettivi fattori.*

A questo fine stabilisco tre qualunque moltiplicatori generali, che si succedono l' un dopo l' altro. L' antepenultimo sia

$$A=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+4)}{1.2.3...(m-2)}\left(an^{m-2}+bn^{m-3}+cn^{m-4}+en^{m-5}+fn^{m-6}...\text{ecc.}\right).$$

Il penultimo

$$B=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-1)}\left(\alpha n^{m-1}+\beta n^{m-2}+\gamma n^{m-3}+\varepsilon n^{m-4}+\ddagger n^{m-5}..\text{ecc.}\right).$$

L' ultimo, che si cerca

$$C=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\left(sn^m+tn^{m-1}+un^{m-2}+xn^{m-3}+yn^{m-4}...\text{ecc.}\right).$$

Le specie a, b, c ecc., α, β, γ ecc., s, t, u ecc. sono funzioni di z. Siano in oltre A', B', C', a', b', c' ecc., α', β' ecc., s', t' ecc. ciò che diventano A, B, C, a ecc., se in queste si pone $z-1$ in vece di z; ed A'', B'', C'', a'' ecc. ciò che diventano A', B', C', a' ecc. se in esse si pone un' altra volta $z-1$ in vece di z. Sarà

$$A'=\frac{z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-2)}\left(a'n^{m-2}+b'n^{m-3}+c'n^{m-4}+e'n^{m-5}+fn^{m-6}..\text{ecc.}\right);$$

$$A''=\frac{(z-1)(z-2)..(z-m+2)}{1.2.3..(m-2)}\left(a''n^{m-2}+b''n^{m-3}+c''n^{m-4}+e''n^{m-5}+f''n^{m-6}..\text{ecc.}\right);$$

$$B'=\frac{z(z-1)..(-m+2)}{1.2.3..(m-1)}\left(\alpha'n^{m-1}+\beta'n^{m-2}+\gamma'n^{m-3}+\varepsilon'n^{m-4}+\phi'n^{m-5}..\text{ecc.}\right);$$

$$C'=\frac{z(z-)..(z-m+1)}{1.2.3...m}\left(s'n^m+t'n^{m-1}+u'n^{m-2}+x'n^{m-3}+y'n^{m-4}..\text{ecc.}\right).$$

Dunque $C-C'=\delta C=$

$$\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(\big((z+1)(s-s')+ms'\big)\times n^m+\big((z+1)(t-t')+mt'\big)\times$$
$$n^{m-1}+\big((z+1)(u-u')+mu'\big)\times n^{m-2}+\big((z+1)(x-x')+mx'\big)\times n^{m-3}$$
$$+\big((z+1)(y-y')+my'\big)\times n^{m-4}\text{ ecc.}\Big).$$

Ma, per la formola determinatrice de' nostri moltiplicatori abbiamo anche $\delta C=-2z(n-z)B'-z^2(n-z+1)^2 A''$, cioè, dopo la sostituzione de' valori di B', A'', e l' opportuna riduzione;

$$\delta C=\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(-\big(m(m-1)za''+2mz\alpha'\big)\times n^m$$
$$+\big(2m(m-1)(z-1)za''-m(m-1)zb''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'\big)\times n^{m-1}$$
$$-\big(m(m-1)(z-1)^2za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''+$$
$$2mz^2\beta'-2mz\gamma'\big)\times n^{m-2}$$
$$-\big(m(m-1)(z-1)^2zb''+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+$$
$$2mz^2\gamma'-2mz\varepsilon'\big)\times n^{m-3}\text{ ecc.}\Big)$$

con ordine pe' ſeguenti termini ſimile a quello, che comincia nel terzo termine. Poſto pertanto δs, δt, δu ecc. in vece di $s-s'$, $t-t'$, $u-u'$ ecc., e di più $s-\delta s$, $t-\delta t$, $u-\delta u$ in vece di s', t', u'; ed agguagliati i due valori di δC, col levare gli eguali fattori riſulta l' equazione;

$$\begin{aligned}
&\big((z-(m-1))\delta s+ms\big)\times n^{m}+\big((z-(m-1))\delta t+mt\big)\times n^{m-1}\\
&+\big((z-(m-1)(\times\delta u+mu\big)\times n^{m-2}+\big((z-(m-1))\times\delta x+mx\big)\times n^{m-3}\text{ecc.}\\
&=\big(-m(m-1)za''-2mz\alpha'\big)\times n^{m}\\
&+\big(2m(m-1)(z-1(za''-m)m-1)zb''+2mz^{2}\alpha'-2mz\beta'\big)\times n^{m-1}\\
&+\big(-m(m-1)(z-1)^{2}za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''\\
&+2mz^{2}\beta'-2mz\gamma'\big)\times n^{m-2}+\big(-m(m-1)(z-1)^{2}zb''\\
&+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+2mz^{2}\gamma'-2mz\varepsilon'\big)\times n^{m-3}\text{ ecc.}
\end{aligned}$$

ove le formole, che nel primo membro moltiplicano le podeſtà di n debbono eſſere identiche colle formole, che moltiplicano le podeſtà analoghe di n nell' omogeneo di comparazione. Ora, ſiccome m è quantità nota, e ſon pur note le ſpecie a, b, c ecc. α, β, γ ecc., perchè appartengono ai due cogniti moltiplicatori i quali immediatamente precedono il moltiplicatore C; e quindi, pei canoni (P) (Q) le altre, che ne derivano, a'', b'', c'' ecc. α', β', γ' ecc., non reſterà a far altro, che dar per queſte i ſimboli incogniti s, t, u ecc., onde eſibire il ricercato quoziente del moltiplicatore C, e in conſeguenza lo ſteſſo moltiplicatore.

66. Ad ottener ciò, ſtabiliſco in genere

$$S=Fz^{r}+Gz^{r-1}+Hz^{r-2}+Iz^{r-3}+Lz^{r-4}\text{ ecc.},$$

Sarà pel canone (O) del §. 58.

$$\delta S=rFz^{r-1}+\Big(\frac{-r(r-1)F}{2}+(r-1)G\Big)\times z^{r-2}$$

$$+\Big(\frac{r(r-1)(r-2)F}{2.3}-\frac{(r-1)(r-2)}{2}G+(r-2)H\Big)\times z^{r-3}\text{...ecc.},$$

da che ſi ricava, eſſere

$$(z-(m-1))\delta S+mS=\big((r+m-1)F+F\big)\times z^{r}$$

$$+\left(\frac{-r(r+2m-3)}{2}F+(r+m-2)G+G\right)z^{r-1}+$$

$$\left(\frac{r(r-1)(r+3m-5)}{2.3}F-\frac{(r-1)(r+2m-4)}{2}G+(r+m-3)H+H\right)z^{r-2}$$

$$+\left(\frac{-r(r-1)(r-2)(r+4m-7)}{2.3.4}F+\frac{(r-1)(r-2)(r+3m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(r-2)(r+2m-5)}{2}H+(r+m-4)I+I\right)z^{r-3} \text{ ecc.}$$

La legge di questa serie è di per sè manifesta, e quando uopo il voglia, si potrà produrla fino a quel numero di termini che esigerà la natura delle formole, e il numero de' termini, dai quali vengono costituite.

67. Domandisi ora pel moltiplicatore C denominato da m la formola che moltiplica n^m, sarà $r=m$, $S=s$, e però $s=Fz^m+Gz^{m-1}+Hz^{m-2}+Iz^{m-3}$ ecc., ed avrassi $(z-(m-1))\,\delta s+ms$, ovvero

$$\left((2m-1)F+F\right)\times z^m+\left(\frac{-m(3m-3)}{2}F+(2m-2)G+G\right)\times z^{m-1}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3.}F-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}G+(2m-3)H+H\right)\times z^{m-2}$$

$$+\left(\frac{-m(m-1)(m-2)(5m-7)}{2.3.4}F+\frac{(m-1)(m-2)(4m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(m-2)(3m-5)}{2}H+(2m-4)I+I\right)\times z^{m-3} \text{ ecc.}=$$

$-m(m-1)z\,a''-2mz\,\alpha'$. Essendo note in questo secondo membro le funzioni a'', α', che appartengono ai moltiplicatori precedenti, se si sostituiranno i loro valori dati per z, nascerà nell'omogeneo una formola, in cui sarà m il massimo esponente di z; e confrontando i termini che ne risultano cogli analoghi del primo membro, si determineranno i valori di F, G, H ecc. onde resterà nota la formola, che nel moltiplicatore C denominato da m moltiplica n^m.

68. Compiuta quest' operazione, si dee procedere a trovar la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}. Rammentiamci, aver noi detto al §. 63, che il massimo esponente di z in t diventa $m+1$, e vedremo che si dovrà por $r=m+1$. Fatto poi $S=t$, è necessario che si verifichi questa equazione: $(z-(m-1))\,\delta t+mt$, ossia $(2mF+F)\times z^{m+1}+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}F+(2m-1)G+G\right)\times z^{m}$

$$+\left(\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}F-\frac{m(3m-3)}{2}G+(2m-2)H+H\right)\times z^{m-1}$$

$$+\left(\frac{-(m+1)m(m-1)(5m-6)}{2.3.4}F+\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}H+(2m-3)I+I\right)z^{m-2}\text{ ecc.}$$

$$=2m(m-1)(z-1)z\,a''-m(m-1)z\,b''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'.$$

Qui pure essendo note le funzioni a'', b'', α', β', colla sostituzione de' loro valori in quest' ultimo membro, costituiremo una formola, in cui il massimo esponente di z arriva a $m+1$; e il confronto de' termini con quelli che lor corrispondono nella prima parte dell' equazione darà i valori di F, G, H ecc. e renderà nota la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}.

69. Al terzo termine del moltiplicatore C, in cui avvi n^{m-2}, corrisponde $r=m+2$; $S=u=Fz^{m+2}+Gz^{m+1}+Hz^{m}+Iz^{m-1}$ ecc., onde $(z-(m-1))\,du+mu$, ovvero

$$((2m+1)F+F)\times z^{m+2}+\left(\frac{-(m+2)(3m-1)}{2}F+2mG+G\right)\times z^{m+1}$$

$$+\frac{(m+2)(m+1)(4m-3)}{2.3}F+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}G+(2m-1)H+H\right)\times z^{m}$$

$$+\left(\frac{-(m+2)(m+1)m(5m-5)}{2.3.4}F+\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{m(3m-3)}{2}H+(2m-2)I+I\right)\times z^{m-1}\text{ ecc.}=$$

$-m(m-1)z(z-1)^2a''+2m(m-1)z(z-1)b$ $-m(m-1)zc''+2mz^2\beta'-2mz\gamma'$. La fostituzione de' valori cogniti delle funzioni a'', b'', c'', β', γ', e il confronto de' termini analoghi ne' due membri dell'equazione faran conofcere le indeterminate F, G, H ecc., e in confeguenza il terzo termine del moltiplicatore C.

70. Modificata poi la fuddetta ferie al valore che riceve r nel quarto termine di C, fi dee far l'eguaglianza tra effa, e $-m(m-1)z(z-1)^2b''+2m(m-1)z(z-1)c''$ $-m(m-1)ze''+2mz^2\gamma'-2mz\varepsilon'$; e la forma sì di quefto come dell'antecedente omogeneo di comparazione farà quella che mantengono tutti i fuffeguenti. Perilchè refta trovata la maniera d'efibire l'intero quoziente, e per confeguenza l'intero moltiplicatore C che fi cercava. Quefto metodo ferve per tutti quanti i moltiplicatori della ricorrente generale, detratto il primo; e folo fi dee notare, che quando fi cerca il fecondo moltiplicatore, diventa $a''=-1$, e gli altri fimboli b'', c'' ecc. fon zero.

71. Per la compiuta foluzione del Problema, che ci fiamo propofti nel §. 30, ci rimangono ancora da confiderare due eventi di palle bianche nell'urna A, i quali fan claffe a parte, ed hanno le lor ricorrenti delle combinazioni contrarie fuor della ferie generale, che s'è trovato appartenere all'evento di bianche $n-z-1$. Uno di quefti è $n-1$, l'altro n; cioè fi può domandare quante permutazioni mi fon neceffarie, perchè, ridotta l'urna A allo ftato di bianche $n-1$ che ho chiamato primitivo, riefca probabile, che in qualcuna d'effe avrò l'evento di bianche in A eguale a quello dello ftato primitivo; e quante ve ne vogliono, perchè fia probabile, che in alcuna d'effe io rimetta tutte le palle bianche nella prim'urna.

72. Ho detto, che quefti due cafi efcon fuori della regola generale degli altri eventi, e lo provo così. Se il generale evento di bianche $n-z-1$ abbracciaffe

eziandio questi due casi, potrebbero aver luogo le ipotesi di $z = 0$, e di $z = -1$, che dà $z + 1 = 0$. Colla prima la formola $n - z - 1$ diventerebbe appunto $n - 1$, e colla seconda si sarebbe $n - z - 1 = n$. Ma ciascuno de' moltiplicatori generali della serie contraria all' evento $n - z - 1$ avendo i due fattori z, $z + 1$, e l'una e l'altra delle due ipotesi li ridurrebbe tutti a zero; la qual cosa annullerebbe il numero delle combinazioni contrarie ai detti eventi per qualunque corso di permutazioni. Dunque, o siam sicuri nel permutare di aver sempre quegli eventi, perchè tutte le combinazioni ci son propizie, o essi si sottraggono alla legge degli altri. E' palese l'assurdo, che abbiansi costantemente i due suddetti eventi, anche pel sol riflesso, che essendo tra lor diversi, uno esclude l'altro necessariamente; e perciò resta a dirsi, che essi domandano altre formole regolatrici, e ci somministrano argomento per due novelli Problemi. Sia pertanto

PROBLEMA XIX.

73. *Partendosi dallo stato primitivo di bianche* $n - 1$ *nella prim' urna, si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta lo stesso stato* $n - 1$ *nel corso di qualsivoglia numero di permutazioni.*

Forminsi le colonne degli eventi contrarj e delle respettive combinazioni nella maniera praticata dal primo insino al nono Problema; e avremo

per 1 permutazione; $n \quad 1 \,|\, n-2 \quad (n-1)^2 \,|$: quindi le combinazioni contrarie; $1 + (n-1)^2$:

per 2 perm. $\begin{array}{ll|ll|} n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) & n-3 & (n-2)^2 \end{array}$: comb. contr. $(n-1)^2(n-2)(n+2)$:

per 3 perm. $\begin{array}{ll|ll|ll} n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) & n-2 & 4(n-2) & n-3 & (n-2)^2 \\ n-2 & 4(n-2) & n-3 & (n-2)^2 & n-2 & 9 \end{array}$

ecc.	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	comb. contr.
	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$.
	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$	ecc.

Colla pazienza di andare avanti nella ricerca de' termini della ricorrente, si trova, che essi van con quest' ordine; $(n-1)^2+1$; $(n-1)^2(n-2)(n+2)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^4+4n^3+8n^2-100)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^6+4n^5+8n^4-100n^2--760n+1736)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^8+4n^7+8n^6-100n^4-760n^3-4940n^2+32176n-39520)$ ecc., e l' esame di questa serie la farà conoscere una ricorrente di 4°. grado, che ha i moltiplicatori
1.° $(n-2)(-56n^4+528n^3-1152n^2)$; 2.° $79n^4-460n^3+156n^2+2208n-2304$; 3.° $-18n^3-21n^2+516n-796$; 4.° $n^2+18n-58$. Si avverta però, che il primo termine di questa serie non è già $(n-1)^2+1$, come porta il numero delle combinazioni, ma solamente $(n-1)^2$. Quell' unità di più deriva dalla possibilità dell' evento di bianche n in una sola permutazione, laddove esso non può mai aver luogo in nessuna delle susseguenti, perchè, ov' esso accada, l' altro $n-1$ gli tien dietro necessariamente: e qui si cercano i contrarj allo stesso evento $n-1$. Volendosi perciò stabilire il termine generale della nostra serie, che, giusta la nota regola delle ricorrenti deve aver questa forma; $ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$, ad aversi il vero numero delle combinazioni contrarie per l' ipotesi di $v=1$, ossia pel caso d' una sola permutazione, aggiungerem l' unità al risultato esibito dalla formola; o anche, per aver sempre presente la necessità di quest' aggiunta, scriveremo il termine generale della ricorrente così: $o^{v-1}+ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$. Per tal modo nella supposizione che sia il numero v delle permutazioni maggiore dell' unità, col primo termine o^{v-1} non si accrescerà niente al valore de' susseguenti, e sol nell' ipotesi di $v=1$ avrem $o^{v-1}=o^0=1$.

PROBLEMA ULTIMO.

74. *Partendosi dallo ſtato primitivo delle due urne, ſi cerca il numero delle combinazioni contrarie a rimettere almeno una volta in* A *tutte le bianche* n *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni*,

Erette le colonne competenti a ciaſcuna permutazione, ſi avrà

per 1. permutazione: $n-1 \;\; 2(n-1) \mid n-2 \;\; (n-1)^2 \mid$; onde le combinazioni contrarie; $(n-1)(n+1)$;

$$\text{per 2. perm.} \quad \begin{array}{ll|ll|ll|ll} n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 \\ n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-1 & 4 & n-2 & 4(n-2) \end{array}$$

$$\text{ecc.} \quad \begin{array}{ll} n-2 & (n-1)^2 \\ n-3 & (n-2)^2 \end{array} ;\ \text{comb. contr.}\ (n-1)^2(n^2+2n+2).\ \text{ecc.}$$

Non noto altre colonne, perchè nelle ſucceſſive permutazioni creſce di molto il lor numero; e già ſi ſa come ſi debba formarle. La ſerie contraria, che da eſſe dimana, è la ſeguente;

$(n-1)(n+1)$; $(n-1)^2(n^2+2n+2)$; $(n-1)^2(n^4+2n^3+2n^2-8)$; $(n-1)^2(n^6+2n^5+2n^4-8n^2-40n+56)$; $(n-1)^2(n^8+2n^7+2n^6-8n^4-40n^3-188n^2+752n-608)$ ecc., che pure è una ricorrente di 4.° grado generata dai moltiplicatori:

1.° $(n-1)(-6n^4+72n^3-144n^2)$; 2.° $31n^4-142n^3+78n^2+216n-144$; 3.° $-12n^3-3n^2+148n-156$; 4.° $n^2+12n-28$.

75. Orniamo queſt'ultimo Problema di qualche eſempio. Sia il numero di bianche $n=1$. In tale ipoteſi ſi annullano tutti i termini della ricorrente contraria; il che ci dà una certezza di avere almeno una volta bianche 1 qualunque ſia il numero delle permutazioni che domandiamo. In fatti, eſſendo lo ſtato primitivo delle urne, che in *A* ſia ſolo una nera, e in *B* una ſola bianca, colla prima permutazione è manifeſto, che in *A* ſi trasferiſce la bianca, paſſando la nera nella ſe-

conda urna. Ciò avvenendo infallibilmente nella prima permutazione, poi nella terza, indi nella quinta ecc., è chiaro, che qualunque numero di permutazioni sia chiesto, sempre in una d' esse avrem sicuro l' evento dell' unica bianca; e quindi ogni combinazione ci sarà favorevole, e non ne avremo alcuna contraria.

76. Facciam transito all' altra ipotesi di bianche $n=2$: e per le due serie, contraria, e favorevole ci nasceran questi termini; 3, 10, 32, 104 ecc.,

1, 6, 32, 152 ecc.

che sono i medesimi con quelli che abbiam trovato al §. 38. per la probabilità dell' evento di bianche $n-2$, cioè di nessuna bianca nella stessa supposizione di bianche $n=2$. Dunque, ove tutte le bianche sian due, egli è lo stesso il cercare, quante siano le combinazioni, che menan l' evento di tutte le nere, e quante sian quelle che favoriscono il ritorno di tutte le bianche nella prim' urna: la qual cosa non sembrerà punto strana a chi fa la riflessione, che nello stato primitivo trovandosi una nera e una bianca in ciascun' urna, debb' essere egualmente difficile levar bianca dall' una, nera dall' altra, e condurre l' evento del §. 38., che levar nera dalla prima, bianca dalla seconda, e rimetter nella prima tutte le palle bianche.

77. Ma come conciliare nelle due ipotesi l' identicità del numero delle combinazioni coll' indole delle due serie, essendo quella del §. 38. sol di secondo grado, ed arrivando al quarto quella del presente Problema? Ciò si fa agevolmente. Imperocchè a tutti è noto che, chiamati p, q, r, s i quattro moltiplicatori di una ricorrente di quarto grado, l' equazione $x^4-sx^3-rx^2-qx-p=0$ comprende le quattro radici che io denomino P, Q, R, S, le quali entrano nella formazione del termine generale $aP^v+bQ^v+cR^v+dS^v$, che conviene alla serie. Ponghiamo ora, che in una data ipotesi l' equazione suddetta di quarto grado sia divisi-

bile in due di ſecondo, onde naſca $(x^2+ex+f)\times(x^2+gx+h)=0$; e ſian P, Q le radici del primo trinomio, R, S quelle dell'altro. E' evidente, che tutte e quattro le radici di quadrato-quadratiche, che originalmente erano, diventan quadratiche; e che non hanno alcuna dipendenza dai valori de' coefficienti a, b, c, d, i quali vengono determinati dai confronti del termine generale modificato alle quattro ipoteſi di $v=1$, $v=2$, $v=3$, $v=4$, coi quattro primi termini della ſerie. Se perciò avverrà, che tali confronti facciano ſvanire i due primi coefficienti a, b; poſſiamo conſiderare la formola generale ridotta ai due termini cR^v+dS^v, che di per sè portano ſolo a una ricorrente di ſecondo grado; e poſſiam tener conto ancora de' due termini aP^v+bQ^v, i quali ſi diſtruggono non perchè P, Q ſian zero, ma perchè s' annullano a e b. Quindi appariſce, come debba eſſere indifferente per la formazione della ſerie il ſervirſi de' due moltiplicatori, che ſono ſtati determinati nel §. 38, o far uſo de' quattro, che ci dà il noſtro Problema, e perchè le due ſerie s' identificano tra loro perfettamente.

78. Poſto finalmente $n=3$, le due ſerie contraria e favorevole procedono in queſta maniera:

contr. 8, 68, 580, 4964, 42484, 363668, 3112996, 26647556, 228105364,
fav. 1, 13, 149, 1597, 16565, 167773, 1699973, 16399165, 159315125,
contr. 1952603060, 16714460740, 143077320356, 1224754999348 ecc.
fav. 1544181341, 14666598869, 139352216125, 1317110828981 ecc,

nelle quali ſi oſſerva, che ſino al termine duodecimo incluſivamente le combinazioni contrarie ſuperano le favorevoli, cominciando ſolo nel terzodecimo ad eſſer queſte in maggior numero delle prime. Dal che inferiſco, che, eſſendo due bianche e una nera in A, una bianca e due nere in B, per giocare proſſimamente in pari ſulla probabilità dell' evento di tutte le tre bianche nella prim' urna, debbo chiedere o 12, o 13 permutazioni.

NUOVO

NUOVO USO

DELLA CHINACHINA NEL VAJUOLO.

Del Sig. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI.

IN un mio Opuſcolo, preſentato ultimamente alla *Regia Accademia di Mantova*, e da eſſa approvato, trattaſi qual uſo debba fare il Medico della Chinachina ne' morbi Purulenti. Ho ivi dimoſtrato che gli effetti buoni o cattivi della Chinachina in queſto genere di malattie ſi debbono aſpettare, più che da altre ſue facoltà, dalla forza ſua ſtitica e corroborante. In queſto frattempo eſſendo qui in Verona inſorta una fiera epidemia di Vajuolo, ho avuto campo, dietro a' fondamenti da me in quell' Opuſcolo propoſti, di ſpiare gli effetti della Chinachina anche in queſto morbo. Ed avendoli trovati corriſpondere eſattamente alla mia aſpettazione, ho riſoluto di pubblicare in queſta Memoria le mie oſſervazioni e rifleſſioni ſu di tal propoſito; la quale quindi ſi dovrà conſiderare come un' appendice di quell' Opuſcolo; e come una prova del modo di filoſofare da me in eſſo tenuto. E quel che più importa ſervirà eſſa moltiſſimo ad eccitare i Medici noſtri ancor dubbioſi e reſtii a tentare la Chinachina anche nel Vajuolo, come in altri paeſi lodevolmente ſi coſtuma di fare.

Due caſi pratici, fra molti che ſe ne potrebbono addurre, ſerviranno di baſe e norma al noſtro ragionare. Un de' quali, in cui non fu uſata la Chinachina, fu mortale; l' altro del tutto a quel ſimile, uſata la Chinachina, ebbe buon fine. Paſſeremo indi a dare un

Catalogo di Scrittori che hanno lodata la Chinachina nel Vajuolo; ne esamineremo i motivi per i quali fu da essi prescritta; e faremo vedere che a tutt' altro fine l' hanno ordinata, da quello che noi proponiamo. Conchiuderemo con fissare il tempo più opportuno, e la maniera più adattata di servirsi di quest' ottimo medicamento: i di cui salutari effetti nel Vajuolo se fossero stati noti al *Trillero*, avrebbe avuto maggior ragione di esaggerare: *omnis in hoc solo cortice est salus, omneque præsidium & sacra quasi anchora: sed ad immensas hujusce febrifugi laudes merito decantandas profecto nec dies sufficit, nec mensis, nec annus, immo vix integrum seculum, sicuti ad describendas innumeras virtutes ipsius non paginæ, non libelli aut libri; sed spatiosa potius volumina omnino requiruntur.* (*a*)

ISTORIA PRIMA.

La Signora *Teresa P.....* maritata, d' anni 20. il dì 16. di Giugno dell' anno 1779. fu presa dalla febbre, con forti dolori del dorso, e con inclinazione al vomito. Il terzo dì si spiegarono nella faccia moltissime pustulette somiglianti ai morbilli, con vaniloquio. Il quarto dì le pustule si fecero vedere per tutto il restante del corpo; e segnarono un Vajuolo chiamato *confluente*. In questo giorno prese un purgante, e le fu tratto sangue. Nel quinto dì le pustule si alzavano, ma aspre e rosse fuor dell' usato: crebbe la febbre nella sera con notabile affanno di respiro di breve durata. Nel sesto stette il male sul medesimo piede. Nel settimo d' improvviso biancheggiarono nella faccia le pustule, una nell' altra entrando e confondendosi con poca materia. Nell' ottavo biancheggiarono con poca mate-

(*a*) Disp. Pharm. R. Veget. cap. 7.

ria le pustule del resto del corpo. Nel nono si abbassarono, e cominciarono a disseccarsi nella faccia e per tutto. Quindi nel decimo insorse una nuova febbre, che rialzò le pustule, e le riempiè di marcia, restandone alcune di sanguigne e livide. Nell'undecimo tornarono nella faccia a disseccarsi; scorrendo a piccoli laghetti la bianca sottil materia di sotto alla cute. Nella sera di questo dì sopravvenne un parossismo di febbre, per cui di questa vita passò. Usati in darno in tutto il decorso del male i più appropriati rimedj diluenti e rinfrescativi.

Istoria Seconda.

La Signora Contessa *Bianca G.....* vergine, di anni 21. il dì 4. di Settembre dell' anno 1779. fu presa da acuta febbre con forti dolori negli arti inferiori, per cui le fu tratto sangue; ed il giorno dopo fu purgata. Il terzo dì apparvero nella faccia alcuni segni, come di morbilli, i quali dimostrarono apertamente nel quarto un Vajuolo del genere de' *confluenti*. Sino all' ottavo stette il male sul medesimo piede: allora d'improvviso, una nell'altra entrando, biancheggiarono le numerosissime pustule: molte veggendosene di livide e sanguigne. Si apersero gli occhi da prima chiusi, e cominciava la pelle a corrugarsi ed appassirsi: restando viva la febbre e moleste le veglie. Nel nono giorno prescrissi una forte decozione di due once di scelta Chinachina, da prendersi in due giorni, più volte al giorno. Quantunque nella sera si aumentasse la febbre, dormì tranquillamente; e la mattina del decimo giorno era alquanto sollevata. Ma con mio stupore la trovai enormemente enfiata nella testa, e nel restante del corpo tutto, come se fosse idropica; con gli occhi nuovamente chiusi, con le pustule rialzate, e con laghetti di materia scorrente sotto la cute. Nell' undecimo seguitò a migliorare in tutto benchè durasse la febbre; e si mantenesse gonfia la pelle. In questo e ne' seguenti giorni prese solamente due dramme di polvere di Chinachina; nel qual tempo si andò a poco a poco condensando e disseccando la materia alla cute; caddero dal volto grossissime scaglie, e poco dopo tutto il restante del corpo si mondò con intollerabil fetore, e con un molesto prurito nel volto, dove furon trovati annidati sotto alle croste innumerevoli vermi. Non succedè diarrea, non comparvero tumori, nè urine corrotte nella convalescenza; tantochè nei primi di Ottobre potè sortire di casa. Usò anche questa nel decorso del male rimedj diluenti e rinfrescativi; e benchè questa e quella cadessero inferme in diversa stagione, era però nel tempo del loro male il caldo a un grado stesso poco maggiore del temperato.

Questi due casi, quanto può essere morbo a morbo simile, erano fra di loro del tutto somiglianti, benchè di esito felice l'uno, e l'altro fatale. Rappresentavano una specie stessa di Vajuolo maligno e *confluente*, in una stessa *Costituzion Epidemica*, in uno stesso grado di calore, in persone della stessa età, sesso e temperamento; e trattati furono amendue dal principio al progresso del male con metodo stesso *antiflogistico*, anzi con la specie stessa di governo e medicamenti. Nel fine in ciò solo fu differente la cura, che in uno fu usata la Chinachina, nell'altro non fu usata. Il malo esito del primo di questi due casi, succeduto nel tempo dell'infievolimento delle pustule, già compiuta la suppurazione, ha fatto me sollecito nel secondo del tutto simile, a cercare nella Chinachina un pronto soccorso in questo critico tempo pericoloso, per cui la materia alla cute generata, o tutta o in parte almeno, fosse impedita di rientrare a guastarne il sangue e ad offendere le viscere con la sua venefica putridità. Quantunque io sapessi che il gonfiamento del viso e delle mani nel tempo della suppurazione del Vajuolo è un ottimo segno secondo la pratica, e secondo l'avviso degli Scrittori; pure l'effetto della Chinachina immediatamente succeduto, di rigonfiare per la seconda volta il viso e le mani ed il corpo tutto enormemente, tennemi per alquanto tempo dubbioso e sospeso; finchè veggendo cessare con esso gli altri sintomi minacciosi del Vajuolo, senza che succedessero nuove febbri, o diarrea, o urine marciose, o tumori e ascessi nelle parti, fui assicurato che l'effetto della Chinachina da me tentato corrispose veramente alla mia aspettazione; e che la materia ritenuta sempre alla cute, e al di fuori addensata e *concreta*, fu per la forza stringente della Chinachina impedita di rientrare.

Benchè nella volgare pratica di Medicina non sia introdotto di usare la Chinachina nel Vajuolo; non è però che da molti Autori non sia approvato e raccomandato il suo uso.

Riccardo Morton fu il primo a parlare della Chinachina nel Vajuolo. Se nel tempo della declinazione del Vajuolo, dic'egli, la febbre recidiva si veste di malignità, e acquista periodi di esacerbazione e remissione, per niun'arte meglio si cura, quanto coll'uso della Chinachina. (*b*)

Il *Freind*, scrivendo sull'uso de' purgativi nella seconda febbre del Vajuolo, dice che alcuni Medici in quel tempo pretendevano di prevenir felicemente la stessa febbre con l'uso della Chinachina; di che egli però grandemente dubitava. (*c*)

Il *Frewin* riferisce di un Vajuoloso già mondato dalle croste, e ancor febbricitante, cui la Chinachina non sanò; ma guarì coi purgativi. (*d*)

(*b*) Op. tom. 3. cap. 10.
(*c*) De Purg. in sec. Var. febr. p. 102.
(*d*) In *Freind*, de febr. com. 7.

Il *Bate* dice di aver usata la Chinachina in una febbre secondaria del Vajuolo, ma inutilmente. (*e*)

Questi quattro Scrittori fiorirono sul finire del passato secolo, e nel cominciamento di questo che corre. Onde errò *Morando Morandi* allorchè scrisse, che il Sig. *Monrò* fu quello che estese *la virtù della Chinachina sopra il Vajuolo, e primo ne ha sperimentato il buon esito* (*f*): mentre questo Scrittore di questo parlò poco prima del 1740. ne' *Saggi d'Edimburgo*, come ora vedremo.

Alessandro Monrò fu il primo ad usare la Chinachina nel Vajuolo per altro fine, che per frenare la seconda febbre di esso. „ L'effetto della Chinachina, dic' egli, „ in procurare una dolce suppurazione, mi ha fatto pen„ sare di poterla usare ne' Vajuoli di cattivo caratte„ re, tanto allorchè la suppurazione delle pustule non „ dimostrava stabilirsi, com'è necessario; quanto allor„ chè compariscono con minaccie di cancrena. Ho avu„ ta la contentezza di vedere in molti malati di Va„ juolo l'effetto della Chinachina riuscire a seconda del „ mio proposito. Le pustule prima oppresse si sono riem„ piute di materia; la sania serosa si è convertita in „ una marcia spessa e bianca, e le macchie purpuree „ hanno mutato colore, sono divenute insensibilmente „ più pallide, e finalmente disparvero. Diedi da prin„ cipio la Chinachina in decozione, e poi in estratto: „ in seguito lasciai queste deboli preparazioni per appi„ gliarmi alla Chinachina polverizzata mescolata con „ qualche siroppo cordiale, e con acqua destillata aro„ matica, e in questa forma ne ordino dai dieci fino „ ai quaranta giorni, replicandola ogni quattro o cin„ que ore. Finora non ho data la Chinachina nel Va„ juolo se non dopo l'eruzione delle pustule, e ne ho

(*e*) In *Freind*, de Purg. ecc. p. 109.
(*f*) Della Cura del Vajuolo p. 21.

„ fatto continuare l'uſo ſino a tanto che furono intie-
„ ramente diſſeccate ; ma ſono perſuaſo per gli effetti
„ che l'ho veduta produrre per mitigare i ſintomi del-
„ la febbre ſecondaria, che ſe ſi daſſe nel tempo dell'e-
„ ruzione, potrebbe contribuire a rendere il Vajuolo
„ di una ſpecie più ſavorevole. *(g)*

Il Dott. *Flemyng*, in un ſuo progetto, in cui s'impegna di far eſaminare e diſcutere da alcuni altri, tutto quello che i Medici proporranno per l'avanzamento della Medicina, e che ſtimeranno poter eſſer utile, propone di eſaminare gli effètti della Chinachina nel Vajuolo, e ne raccomanda l'uſo, che con ſuo piacere ha veduto praticare dal Sig. *Monrò*. *(h)*

Il Dott. *Wall* è l'unico che abbia ſcritto particolarmente ſu queſta materia, in una Memoria inſerita nelle Tranſazioni Filoſofiche d'Inghilterra *(i)*. Come il ſuo Opuſculo è rariſſimo, e ſcritto in idioma a pochi noto, non ſarà diſutile il dar qui di eſſo una idea alquanto più eſteſa e circoſtanziata. Le aſſerzioni del *Monrò* e le ſue promeſſe moſſero il Dott. *Wall* a far uſo della Chinachina nel Vajuolo, ed in ogni tempo di eſſo, a fine di ottenere una buona e lodevole ſuppurazione. Ma egli è paſſato avanti : e conſiderando gli uſi della Chinachina in altri mali, dove la craſi del ſangue trovaſi rotta e ſcompoſta, ſingolarmente nelle febbri petecchiali e porporate, accompagnate da emoragie ed altri terribili ſintomi, ſperò che doveſſe eſſere molto utile nel Vajuolo, bene ſpeſſo da tali circoſtanze peſſime accompagnato. Veggiam ora a parte a parte i ſucceſſi delle ſue prove in alcuni caſi da eſſo narrati.

Caſo Primo. Un Gentiluomo di anni 24. ſi ammala dopo un violento ballo. Se gli cava ſangue infiammato;

(*g*) Saggi di Edimb. tom. 5. art. 10.
(*h*) Saggi d'Edimb. tom. 7. art. 1.
(*i*) The philoſophical Tranſactions abridged, vol. the tenth. p. 1035.

si purga con manna, e beve un decotto nitrato. Vien chiamato il terzo giorno il Dott. *Wall*. Le pustule erano numerosissime con porpora, scorreva il sangue dal secesso, sputava bene, ed il polso era frequente e debile: e gli dolevano i lombi. Prescrisse uno scrupolo di Chinachina ogni due o tre ore, e per bevanda ordinaria una tintura di rose acidulata. In quarantaotto ore disparve la porpora, cessò la emoragia; si sollevò il polso, e si se più raro, e le pustule si alzarono. Sino al nono dopo l'eruzione tutto andò bene, in qual tempo seguitò ad usare la Chinachina, e prendeva la sera lo sciloppo di Meconio. Dopo si se sonnacchioso, e morì nello stesso giorno.

„ Benchè, soggiunge l'Autore, in questo primo esem-
„ pio sia l'infermo miseramente perito, ciò non ostan-
„ te io son contento del buon effetto prodotto dalla
„ Chinachina.

Caso secondo. Vien chiamato il Dott. *Wall* da un Giovane di anni dodici, da sei giorni ammalato di Vajuolo. Questo era del genere de' *confluenti* con bolle sanguigne, con petecchie e porpora; e con un molesto prurito nel naso che minacciava emoragia. Per l'addietro avea delirato, e il suo polso era debile e tremolante. Gli ordinò ogni tre ore uno scrupolo di estratto di Chinachina, ed una bevanda con olio di vitriolo e sciloppo di sambuco. Dopo aver prese due dramme di Chinachina, disparvero le petecchie e la porpora; sicchè continuò dopo sino al fine della malattia l'uso della Chinachina. Crebbero le pustule in grandezza a tal segno che sembrava il Vajuolo del genere de' *discreti;* e la pelle molto si gonfiò per la quantità della marcia. Guarì felicemente l'infermo.

Caso Terzo. Ad un Giovane di anni 21. dopo il secondo dì comparve un Vajuolo con spessa porpora, con violenta uscita di sangue dal naso, e con atroce dolore di lombi. Fu medicato dal Dott. *Wall* con lo stesso so metodo, col quale medicò l'infermo in secondo luogo descritto; e guarì com'esso felicemente.

Caso Quarto. Un Giovane d'anni 24. dopo un violento esercizio su preso da' sintomi del Vajuolo: dolori di ventre e difficoltà di respiro. Il Dott. *Wall* chiamato nel terzo giorno, vide la sua pelle coperta di porpora, ed avea un polso piccolo e vibrante. Prescrisse un salasso dal braccio, ed ordinò l' estratto di Chinachina, con allume crudo, acqua di cannella, e sciloppo di cotogni. Il dì dopo migliorò, facendosi il polso pieno e regolato, e levandosi le pustule del Vajuolo, e scomparendo la porpora. Succedè la diarrea con urine rossiccie; onde lasciato l'allume, gli ordinò la terra Giaponica coll'estratto di Chinachina e sciloppo di Meconio la sera: continuando i quali rimedj guarì prestamente.

Caso Quinto. Un Giovane di anni 21, preso dal Vajuolo era ridotto nel sesto giorno ad un pessimo stato, avendo numerose petecchie, e una gamba intaccata di cangrena. In questo giorno fu chiamato il Dott. *Wall*, e gli ordinò mezz'oncia di estratto di Chinachina con due scrupoli di allume crudo. Il dì dopo scomparvero le petecchie: si fermò, e separò la cangrena; e continuando lo stesso metodo di cura con null'altro guarì perfettamente.

Caso Sesto. Una sorella di questo Giovine, di anni 19. fu attaccata dal Vajuolo *confluente* con petecchie e porpora, con emoragia uterina, dolor de' lombi, ed estrema debilità. Prese la Chinachina coll'allume in tutto il decorso del male, con lo stesso metodo; e senz'altro guarì.

„ Uno però dei più rimarcabili esempj, segue l'Au-
„ tore, di quanti mi occorsero, dimostrativi della effi-
„ cacia della Chinachina in questa terribile malattia,
„ ed in tutto il tempo della stessa, si è il seguente:

Caso settimo. Una Fantesca presa da' sintomi del Vajuolo, fu salassata. Due giorni dopo l'eruzione chiamato il Dott. *Wall*, trovò le pustule numerosissime, piccole e rognose; con porpora frammessa. Gli occhi eran lagrimosi, con un aspetto di viso triste ed affannato (sintomo non badato da' Medici, ma pur terribile e pauroso ne' morbi acuti). Avea mal di gola, delirio, diarrea, emoragia uterina, con un polso frequente e ristretto, cosicchè parea vicina a spirare. Le fece prendere Chinachina con allume, quanta più ne poteva inghiottire. Dopo dodeci ore inghiottiva più liberamente, e prese in un giorno mezz'oncia di estratto di Chinachina con due scrupoli di allume crudo. Continuò a prender la Chinachina senza allume per altri tre o quattro giorni: in quel tempo scomparvero la porpora e la emoragia, si alzarono le pustule e sputò assaissimo. Tutto andò bene sino al sedicesimo dopo l'eruzione. Allora sotto falsi pretesti ingannando la custode, annojata trascurò di più oltre medicarsi. Fu portentoso il danno seguito da questa trascuranza. Il suo polso si se frequente e debile, gli umori acquistarono un sommo grado di corruzione, d'onde ella morì tutta sfracellata nel vigesimo giorno del male.

„ Da questi pochi esempj, conchiude l'Autore, e da „ altri molti che io potrei addurre, si possono cono- „ scere i sorprendenti effetti della Chinachina nel Va- „ juolo. L'ho prescritta a molte persone nei primi „ giorni del male, quando prima del Vajuolo erano da- „ te fuori le petecchie; ed in altre nel tempo primo „ della suppurazione, quando la materia era ancor cru- „ da ed acquosa, e posso dire con verità, quasi sem- „ pre con buon successo. Ora io son solito a continu- „ are l'uso per tutto il tempo della malattia, finchè „ è ben netta dalle scaglie la pelle. In questo ultimo „ tempo occorrendo nettare le prime strade, frammez- „ zo ai purganti ordino io la Chinachina, finchè tro- „ vo che le fibre sono spossate, e gli umori tenui ed

„ acrimoniosi. Venendo io chiamato a visitare infermi „ con petecchie, porpora, miliare, emoragia, o che „ trovi in essi la crasi del sangue distemperata, o che „ siano in pericolo di vita, immediatamente loro pre- „ scrivo la Chinachina. Non bado che il polso sia pie- „ no, credendola necessaria tanto nel polso vigoroso, „ che nel debile; per essere cosa evidente che in questi „ casi le fibre sono rilassate, e gli umori tiranti ad una „ putrida acrimonia. In molti di quelli, a' quali io ho „ ordinata la Chinachina, ho trovato più pronta del „ solito la maturazione delle pustule, e tutto il corso „ del male di molto abbreviato; ch'è una particolari- „ tà molto osservabile. Io d'ordinario uso l'estratto del- „ la Chinachina (composto con la bollitura della stessa e „ qualche sale alcalino insieme) e questo lo stimo da „ preferirsi alla Chinachina in sostanza; perciocchè sen- „ za diminuire di forza si ha in esso il vantaggio di „ aggravar meno lo stomaco degl' infermi. Ne' bambi- „ ni, e nelle dilicate persone che si potrebbono offen- „ dere dal sapore di questo rimedio, si può loro por- „ gere dentro il cioccolatte; che se è composto con „ molto zucchero serve più d'ogni altra cosa a confon- „ dere l'amarezza della Chinachina.

Il Dott. *Huxham* loda la Chinachina come rimedio di preparazione nel primo ingresso del Vajuolo; ma solo dove debili sono le fibre, e dov'è tenue ed acquosa la costituzion degli umori. Più volentieri la prescrive nella declinazion del Vajuolo in certe specie di esso. „ Io uso, dic'egli, d'ordinario la tintura di Chinachi- „ na alessifarmaca, resa acida coll'elisire di vitriolo, e „ poi passo alla decozione di essa, ovvero al suo estrat- „ to. Siami però lecito di avvertire che per nessun mo- „ do si prescriva dove il respiro è affannato: e dove il „ il ventre è stitico ed ostrutto, finchè questi sintomi „ non siano levati. Credasi pure che la tintura di Chi- „ nachina alessifarmaca nel Vajuolo, specialmente lin-

„ fatico, è utilissima, purchè si dia dopo l' intiera com-
„ parsa delle pustule, a facilitare la maturazione di esse:
„ com' è pur certo che questo rimedio procura una lode-
„ vole suppurazione nelle ulcere di cattivo carattere. (*k*)

Il Dott. *Mead* loda la Chinachina in una certa specie di Vajuolo, da lui detto *sanguigno*, all' effetto d' ingrossare il sangue, affinchè non possa scappare da' minimi vasellini. Così la loda dove la terzana doppia o semplice al Vajuolo si aggiunge, ricordando che non nuoce essa alla maturazion delle pustule: a cui anzi giova frenando i movimenti febbrili, che la disturbano. (*l*)

Il *Roncalli* accorda che sul finir del Vajuolo la Chinachina possa adoperarsi, ma la crede dannosa nel principio: rimprovera però l' *Elvezio* perchè l' abbia al principio prescritta nella sua polvere febbrifuga. Ma l' *Elvezio* non è da numerare fra gli Autori che ricordano l' uso della Chinachina nel Vajuolo, mentre nella sua polvere febbrifuga non ha verun luogo questo medicamento, come crede il *Roncalli*. (*m*)

Morando Morandi ha stampato un libro con lo spezioso titolo: *Della Cura del Vajuolo con la Chinachina e col bagno tiepido*. Poche parole però in tutto il decorso del libro si leggono in proposito dell' uso della Chinachina nel Vajuolo. Dic' egli che in una epidemia dell' anno 1737, ed in una dopo del 1741, non stette egli guari tempo a consigliar tutti gli amici, e fino le più abbiette cenciose madri, che ai loro figliuoli facessero giornalmente ingojare uno scrupolo di Chinachina entro un po' d' acqua o di vino; ed a quei bambini che nol volevano s' ingegnassero di porre un giorno sì e l' altro no un cristeo fatto coll' infusione della Chinachina al peso di una dramma bollita nell' acqua pura, e ne

(*k*) Differt. de Variol.
(*l*) De Var. & Morb. cap. 3. & 4.
(*m*) Europ. Medic. p. 58.

continuassero giusta la bisogna il buon uso. Con che. soggiunge, e con la cavata anche più volte reiterata di sangue, e col bagno tiepido, e con esattissima dieta, e con bere soventi fiate del latte bollito con entro un po' di zucchero, nel decimo o undecimo giorno, e ben rade volte più tardi, gli venne sempre veduto cader riseccate senza smania d'alcun prurito le croste de' flemmoni, e nel decimo quarto dì senza butteri nel viso tutti pur anche gli ammalati perfettamente guarire. Passando poi il dotto Autore a render ragione de' vantaggi che si riportano dalla Chinachina nel Vajuolo così discorre. „Nel Vajuolo dal principio acre-stimolante „ infiammatorio non tentasi che d'accoppiar soluzioni, „ le quali diminuiscono il numero de' globetti pian-„ ovali sventandoli, e poscia vanno a depositarsi tutte „ per mezzo di flemmoni alla pelle. Comechè però „ l'essenza di tali depositi è in ragione della qualità, „ e della quantità de' globetti stessi, così egli è mestie-„ ri o mantenerli, o reclutarli. A ciò ottenere non „ avvi rimedio migliore della Chinachina, come ama-„ ricante-stiptico, perchè con questa, al dire del *Boe-„ rhaave* nel suo Trattato della forza de' Medicamen-„ ti, ridonasi la perduta elasticità ai vasi, s'accresco-„ no le velocità ai fluidi, e quindi quel natural calo-„ re, che da' globetti pian-ovali vuolsi tutto dipen-„ dere, e perchè secondo l'osservazione d'*Ecquet* nella „ sua Patologia, s'aggiunge momento agli stessi, e se „ ne aumenta il numero. (*n*)

Il *Lieutaud* dice che ove nel Vajuolo succede una febbre doppia terzana, o altra intermittente, bisogna ricorrere alla Chinachina; della cui virtù in simiglianti casi da replicati sperimenti siam fatti bastantemente sicuri. (*o*)

(*n*) Della Cura del Vajuolo p. 72.

(*o*) Prax. Med. part. 2. sect. 4.

Il *Vanſwieten* parla bensì della Chinachina nel Vajuolo; ma non adduce eſperienze proprie nè ragioni: e ſol riportaſi ad altri Autori. (*p*)

Nel Giornale Medico Franceſe vien lodata la Chinachina nel Vajuolo di una maligna natura. (*q*)

Boiſſer de Sauvages dice che ſe dopo l'eſſiccazion delle puſtule reſti una febbre remittente, ſi debba uſare la Chinachina. (*r*)

Il de *Haen* racconta di una Fanciulla, che avea un Vajuolo *confluente* e maligno, cui fu data la Chinachina nell' undecimo giorno, e morì. Poi parla di un' altra che avea una ſuppurazione al petto, diſſenteria, ſcarlatina, miliare e Vajuolo inſieme, alla quale ha data la Chinachina due giorni dopo la comparſa del Vajuolo, e morì nel quinto. Nel primo di queſti due caſi, ſoggiunge l'Autore, mitigò la Chinachina il male, ma non giunſe a conſervare la vita: forſe per eſſere ſtata troppo tardi preſcritta. Nel ſecondo caſo preſcritta più per tempo, prolungò per poco la vita, che ſtava per eſtinguerſi, moderò i ſintomi del male, e le reſtituì tranquillità e forze. Segue un terzo caſo di una Donna maritata aſſalita dalla febbre, contro cui fu preſcritta la Chinachina: ſotto l'uſo della quale diede fuori un Vajuolo, che fu benigno e *diſcreto* e finì in bene. Dal qual caſo, ad opinione dell' Autore, due coſe s' imparano: la prima, che la febbre contagioſa del Vajuolo può eſſere del genere delle intermittenti. La ſeconda, che la Chinachina preſa nel più feroce corſo contagioſo di Vajuolo con ottimo ſucceſſo produſſe un Vajuolo di benigniſſima indole. (*ſ*)

Il *Torraca* narra di un fantolino preſo da un Vajuo-

(*p*) In Boerh. aph. 1402.
(*q*) V. *Sauvages*. Noſol. tom. 1. p. 226.
(*r*) Noſol. tom. 1. p. 224.
(*ſ*) Rat. Med. part. 2. cap. 6.

lo *confluente*, degenerato in una universale cangrena, brevemente e felicemente con suo stupore da lui curato con la Chinachina. (*t*)

Lo *Storchio* varie maniere di medicamenti prescrive nel Vajuolo, ne' quali entra la Chinachina, non tanto per ovviare alla febbre, quanto per ravvivare le forze dell' ammalato, per fare ostacolo alla putrefazion degli umori, e alla loro dissoluzione: in que' casi principalmente dove le pustule si mantengono poco elevate, dove il colore di esse è rossoscuro, e fra esse la pelle è floscia o livida, dove se pur elevate sono hanno bassa e piana la sommità, o ben anche l' hanno livida o nera, dove pustule si frammischiano livide e nere, dove l' urina puzza oltre l' usato, o è torbida per misto sangue disciolto, e nerastra. (*u*)

Il *Tissotti* dice in un luogo d' aver provata inutile la Chinachina usata come rimedio preservativo nell' Innesto del Vajuolo, anzi dannosa. (*x*)

Ma altrove, nelle Lettere, così ne parla. „ Altri „ insinuano la Chinachina, quale non vorrei che nel „ Vajuolo fosse defraudata dalle sue lodi: ma confesso „ che nella secondaria più grave dopo esser anteceduto un vero morbo infiammatorio, non ancora l' ho „ usata, perchè giammai ho veduto potersi sicuramente propinare. E nell' urinare cruento vorrei che si u- „ sasse con cautela. Al certo sembra non corrisponde- „ re a tutte le indicazioni della febbre secondaria, e „ ad alcune è manifestamente contraria. Ma giova mol- „ to siccome nelle febbri maligne, così in quel maligno Vajuolo, il quale mostri le fibre lasse, un san- „ gue disciolto e putrido, ed una somma debolezza,

---

(*t*) Specim. Experim. art. 5.
(*u*) Medicinisch-practischer Unterricht, erster Theil, von den Pochen, oder Blattern. Seite 267.
(*x*) Dell' Innesto prat. del Vajuol. cap. 1.

„ e continuamente minaccia cangrena per il ſangue vap-
„ pido e putredinoſo. Allora in tutto il decorſo della
„ malattia preſa ogni giorno alla doſe di tre, quattro
„ o cinque dramme felicemente il morbo cura. In un
„ ragazzo di dodici anni dopo una crudeliſſima ma-
„ lattia, eſſendoſene caduta una parte della maſcella in-
„ feriore, egregiamente terminava la cura, propinata
„ a frequenti e minime doſi; e nel tempo medeſimo
„ in luogo di alimento prendendo il latte di vacca, ed
„ a cucchiajate. Giova eziandio contro quella febbre
„ lenta, la quale rimane alle volte dopo qualche Va-
„ juolo, o graviſſimo, o malamente curato, o mali-
„ gno; e così allontana la tabe. In fine ſi preſcrive
„ con grandiſſimo utile, ſe ſiccome ho veduto al Va-
„ juolo vi ſi aggiunge la febbre intermittente: in tutti
„ gli altri caſi, purchè ne apporti qualche poca, è
„ ſempre di minor utilità. *(y)*

L' *Anonimo* Franceſe nel Dizionario Compendioſo di Sanità ricorda: che quando i bottoni cominciano a biancheggiare, ſopraggiunge una ſpezie di febbretta, che ſi chiama ſecondaria. Si uſi allora una decozione di Chinachina. La Chinachina ſi è propriiſſima per promovere la ſuppurazione, e per conſeguenza per maturare le puſtule. (z)

Il *Sografi*, parlando del modo di operare della Chinachina in certe malattie paſſa a dire: „ Non poſſia-
„ mo dubitare, che la Chinachina nel ſiſtema de' lin-
„ fatici con particolare virtù non diffonda i ſuoi prin-
„ cipj ſalubri. E quindi ci ſembra dover intenderſi,
„ perchè nelle febbri peſtilenziali, e maligne, nel Va-
„ juolo, ſiccome porta la ſperienza del *Morton*, l'uſo
„ della

(*y*) Della Cura del Vajuolo. num. 67.
(*z*) Verb. *Vajuolo*.

„ della Chinachina ſia giovevole : eſſendo quelle ma-
„ lattie dipendenti dal diſordinato moto della linfa, e
„ dalla viziata qualità di eſſa, ed eſſendo quel rime-
„ dio con particolare qualità atto a diffondere per lo
„ ſteſſo ſiſtema de' vaſi le forze ſue. (*a*)

Queſti ſono i nomi degli Autori, i paſſi e i luoghi nelle lor opere, i quali mi è riuſcito di trovare e raccogliere nel propoſito della Chinachina nel Vajuolo. Vedeſi qui in un colpo d' occhio uſata la Chinachina prima d'inneſtare il Vajuolo, per farlo naſcere di una benigna indole. Vedeſi uſata a moderare le prime febbri, acciocchè queſte non impediſcano o ritardino la comparſa delle puſtule alla pelle. Vedeſi uſata, comparſe le puſtule, per ſollevarle ſe foſſero troppo baſſe e piccole. Vedeſi uſata per farle preſto paſſare ad una buona e lodevole ſuppurazione. Vedeſi uſata a fare che le croſte preſto cadano, e laſcino minori difformità nel viſo. Ad altri fini ancora ſi vede uſata nel tempo del Vajuolo: a togliere cioè e far ſcomparire le macchie di porpora o le petecchie che s' intrometteſſero alle puſtule; a riunire i globetti del ſangue rotti e ſtemperati dal fervore del morbo infiammatorio; a correggere non ſo quali diſordini nel moto e qualità delle linfe; a rinvigorire le fibre debili e laſſe, a dar corporatura agli umori rotti e diſciolti; a togliere ed impedire la cangrena delle puſtule e delle membra; a togliere in fine o moderare le ſuccedanee febbri o periodiche, o infiammatorie o lente. Vedeſi così adoperata nel principio, aumento, ſtato, e declinazione del Vajuolo; e ben anche nel tempo ad eſſo precedente, e ſuſſeguente: facendo fare ad un rimedio ſolo e ſempliciſſimo le varie e nobili figure di *profilattico*, d' *antiflogiſtico*, di *aleſſi-*

(*a*) Diſſert. ſopra il Queſito: *Se nel caſo* ecc. num. 27.

farmaco, d' *incraſſante*, di *cardiaco*, di *ſuppurativo*, d' *antiſettico*, di *correttivo*, d' *anticangrenoſo*, d' *antifebbrile*, di *coſmetico*; in un male ſolo e ſempliciſſimo, qual è il Vajuolo.

Io non ſon qui per fare encomio, o critica a veruno di queſti uſi; laſciando la coſa come ſta; e a chiunque libero l' appigliarſi a quella pratica de' nominati Scrittori, a cui più piace appigliarſi. Quel ch' io dico ſi è che io per niuna autorità di Scrittore, nè da perſuaſione di veruna loro opinione moſſo, ſon paſſato ad uſare la Chinachina nel Vajuolo; ma per un fine del tutto nuovo, da veruno di eſſi non preveduto: il quale, ho coraggio di aggiungere, ſi è inſieme il più deſiderabile e utile, ed il più naturale inſieme, e meno ricercato e dubbioſo.

Queſto è di oſtare con la forza ſtitica e coſtrettiva della Chinachina al riconcentramento della materia Vajuoloſa, compiuta la ſuppurazione.

Che una forza ſtitica e coſtrettiva nella Chinachina ſi trovi, non è da metterſi in dubbio; appaleſandoſi queſta al palato, ed all' occhio, nel reſtringere che fa e raſſodare le carni e pelli degli animali. Che con queſta ſua facoltà principalmente operi nel corpo noſtro i portentoſi effetti che ſi vede in varj morbi operare, lo affermano concordemente i Pratici più eſperimentati. Alle autorità dell' *Ettmullero*, del *Baldinger*, del *Carteuſer*, altrove addotte (*b*), baſterà qui aggiungere quella dell' *Offmanno*: *Eſt vero inter hujus corticis elementa primo loco connumerandum adſtrictivum* (*c*). *Notiſſimum autem, corticem Chinæ vel ipſo ſapore teſte plurimas cuſtodire terreas, fixas, cum ſubtili acido nuptas partes, unde ſaporis etiam & virtutis adſtringentis eſt* (*d*). Non

(*b*) Diſſert. noſtra ſopra il Queſito: *Se nel caſo* ecc. p. 8. e 12.
(*c*) Diſſert. Seleſt. decad. 2. Diſſert. 4.
(*d*) Obſ. Praſt. ſup. tom. 10. p. 238.

vale opporre, che se gli stupendi effetti che in certi morbi produce la Chinachina provenissero dalla sua facoltà costringente, gli stessi effetti e migliori vedremmo seguire all'uso di altri molti nostrali rimedj, specialmente nelle febbri periodiche e intermittenti; i quali senza dubbio sono più forti stitici e costrettivi di essa: quel che però in pratica non si osserva avvenire. Perciocchè, come si esprime il *Redi* (*e*), in Medicina non vale la regola del tre, perchè se quattro giova, otto può nuocere. Una moderata forza stitica può essere talvolta più giovevole che una eccedente; o perchè più tardi e dentro si spieghi nelle vene, o perchè non chiuda a sè stessa l'adito di penetrare. Quanto alle febbri poi, che gli stitici non giovino come la Chinachina a fermarle; questo è assolutamente falso, passando essi pure per febbrifugi, e valendo qualche volta a fermare una febbre, contro cui la Chinachina non valse. Sentiamo ancora l'*Offmanno*: *Confirmatur hæc sententia vel ex eo quod alia styptica adstringentia ex fixa terra & acido composita simili fere virtute cum cortice Chinæ in debellandis febribus, vel earum paroxismis suspendendis splendeant, sicuti id notum est de radice pentaphylli, plantaginis, cortice fraxini, visco quercino, radice & extracto tormentillæ, alumine, liquore martis styptico, tinctura martis Hassiaca, & hujus generis similia*. (*f*)

Quanto al Vajuolo poi, universalmente parlando si osserva che il tempo di esso il più pericoloso e fatale si è quando, compiuta la suppurazione, comincian le pustule a restringersi ed appassirsi: quel che avvien d'ordinario fra il sesto e l'ottavo giorno, da che sono alla cute comparse. Questo pericolo v'è dunque ragion

(*e*) Lett. tom. 4.
(*f*) Obs. Pract. sup. tom. 10. p. 238.

di credere che proceda dal riconcentramento della materia delle pustule : per cui si facciano mortali decubiti nelle viscere, o le cavità s' inondino, o si corrompano gli umori, o s' intacchino le parti ferme e l' ossa. Or in questo più pericoloso e fatal tempo del Vajuolo, qual sarà il più indicato e valevol rimedio, se non cercar d' impedire al possibile, ed il più presto che si possa, il concentramento della materia vajuolosa? E qual medicamento a ciò può essere più pronto e più efficace di uno stitico temperato, confacente ad ogni età e temperatura di uomo, tenace della propria indole; che possa quindi penetrar nelle vene, e chiudere gli osculi e i vasellini d' onde la pessima materia può ritrocedere dalla cute, e dentro intrudersi, o venir assorbita? Questo desiderato rimedio e celeste medicamento si è appunto la Chinachina.

Io so che qualche Autore ha avuto l' ardimento di negare assolutamente questa ritrocessione della materia del Vajuolo. *Quando circumferentia, sive margo pallescere incipit*, scrive il *Violante*, *malum portendit*, *materia enim quæ ad pustulas afferri debuerat, ob crassitiem inertiamque, minime in ipsas importatur (tunc variolas retrocedere aniculæ & indocti clamant, quasi materia a peripheria ad centrum recedat) eo magis si pustularum elevatio, quando margines jam pallescunt, parum deprimatur : Sed evolat ac continuo detrahitur aliquid a pustulis; quibus cum nihil impofterum addatur, depressæ apparent*. (*g*) Questa ritrocessione però, o per meglio dire questa intrusione della materia vajuolosa, (giacchè non è probabile che sian piene le pustule di sola materia ad esse dal sangue tramandata, come vuole il *Violante*, ma che più sian piene di materia ivi alla cute generata, di che dan segno l' infiammazion previa, e le

(*g*) De Variol. & Morb. num. 92.

susseguenti cavità che restan nella cute) non è frivola credenza e volgare pregiudicata opinione ; ma oltrechè è pienamente dimostrata possibile dall' ordinario riconcentramento e palese della materia di altri tumori alla cute suppurati , che spesso esce per urina , o altrove trasportasi , è ben anche creduta ed affermata da quasi tutti i Pratici più assennati e sperimentati . Che propriamente non trattasi qui di una materia delle pustule crassamentosa ed inerte , qual suppone il *Violante*, ma di essa resa sottile per la putredine, o della parte sottile e sierosa di essa; che quantunque tale può esser dotata di somma acrimonia e velenosità. Trattasi in corto dire di quella stessa materia che il *Violante* vuole che sfumi e svapori dalle pustule quando si appassiscono , e non vien loro altra materia dal sangue tramandata. Che se, per opinione di questo Autore, dalla cuticola trapela e sfuma essa materia, la qual cuticola dagli Anatomici è considerata , quasi come un callo della cute , ferma e dura; come non potrà penetrare all' interno in sito molle e poroso, e in canaletti per la suppurazione aperti e logori? Che se l' impeto degl' interni umori che girano s' oppone; l' aria esterna , e la naturale elasticità e contrattilità delle fibre favoriscono alla intromissione delle materie che sono alla pelle : altrimenti in istato di miglior sanità i fluidi si disperderebbono in pochi momenti sfumati e sgorgati dovunque dalla superficie del corpo.

Ma lasciamo da parte queste teorie per quanto evidenti sempre però in Medicina perigliose e sospette, e procedendo nel nostro intrapreso discorso , passiamo a contemplare , e cogli occhi proprj vedere gl' immediati e palesi effetti che son seguiti alla Chinachina da noi nel proposto caso adoperata. L' effetto suo più visibile e singolare fu quello di gonfiare la seconda volta le palpebre e chiudere gli occhi , di rigonfiare tutta la faccia e le mani, e l' altra superficie del corpo, con rialzare e riempiere di nuova materia le pustule che già cominciavano ad appassirsi. Questo effetto fu tanto rilevante e cospicuo che mi tenne sospeso e dubbioso del suo esito, benchè corrispondesse chiaramente alle mie intenzioni, e benchè sapessi di certo che il gonfiamento della pelle è da riporsi nel Vajuolo fra i segni di un ottimo fine, e benchè in fatti fin d' allora scorgessi un sensibile miglioramento nell' inferma in tutti gli altri sintomi e circostanze del male: viva solo rimanendo la febbre, per nulla ceduta al febbrifugo. A questo così osservabile gonfiamento non seguì tosto secondo il consueto un presto appassimento, ma sussistè per varj giorni, finchè a poco a poco scemò con rimanere tutta la materia dentro alle pustule raccolta e condensata, e la pelle tutta, massimamente del volto, bruttamente incrostata; senza rimanerne però contraffatta la faccia, ma sol difformata la pelle da un buttero spesso ed eguale. Fu quindi in brevissimo tempo salva l'inferma, senzachè una minima porzione di materia si mostrasse ritrocessa o dal sortire per urina, o per secesso, o per decubiti d'interni ascessi, o altri tumori.

Questo effetto di gonfiare la pelle è senza dubbio da attribuirsi alla Chinachina, perchè altro rimedio non fu in tal tempo usato, e perchè successe in un tempo in cui il natural corso del Vajuolo portava anzi al contrario a far appassire le pustule dopo il gonfiamento primiero. Questo stesso effetto osservato fu dal *Morton* (*h*), dal *Monrò* (*i*), e dal *Wall* (*k*), e per ventura da essi notato e scritto, benchè ad altro fine, ed uso dal nostro diverso, abbian essi la Chinachina nel Vajuolo prescritta. E credo io bene che altri pure l'avrebbon veduto e notato, se avessero a questo badato, e se in

(*h*) De Feb. infl. cap. 6. hist. 23.
(*i*) Saggi d'Edimb. tom. 5. art. 10.
(*k*) The philosophical Transactions Abridged, vol. The tenth. p. 1035.

tempo opportuno aveſſero la Chinachina praticata, e in doſi ſufficienti a queſto fine. Or per qual altro mezzo può la Chinachina quell'effetto operare, ſe non per quello ſteſſo da me cercato nell'uſarla; con fermare cioè e ſtringere le interne parti, perchè la materia nemica ſia coſtretta a reſtarſene alla cute, e venga impedita di riconcentrarſi? Le puſtule oltre l'uſato tempo ſempre piene e diſteſe, la denſità e ſpeſſezza delle croſte ſuſſeguite, con il preſto riaverſi dell'inferma in perfetta e ſtabil ſalute, ſenzachè deſſero le materie ſegno di eſſere in veruna porzione rientrate dalla loro comparſa per urine, per ſeceſſo, per decubiti o tumori, ſon tutte coſe che moſtrano evidentemente come nel caſo da noi narrato da principio e propoſto abbia veramente la Chinachina, con iſtringere le interne parti, impedito il riconcentramento della materia vajuoloſa, ſempre pieno di timore e pericolo, in ogni ſpecie e natura di Vajuolo: e con ciò fare abbia dato al male un eſito felice. Non ſi niega che uſata la Chinachina ſul finir del Vajuolo come rimedio antiſettico ed antifebbrile non poſſa buoni e lodevoli effetti produrre; ma nel caſo noſtro evidentemente appare che non per queſti effetti giovò: mentre anzi per l'una parte la materia per virtù della Chinachina alla cute ritenuta corrompendoſi tanto fetore menò, che accorſer le moſche a deporvi dentro i vermetti, o le uova d'onde queſti provennero; e per l'altra parte la febbre viva allor preſente non ſentì punto la forza della Chinachina, ma perſeverò coſtante per alquanti giorni dappoi.

A queſto noſtro nuovo metodo di uſare la Chinachina ſul declinare del Vajuolo come rimedio ſtitico e corroborante due oppoſizioni ſembrano contraſtare, le quali potrebbono ritirare i Pratici dall'abbracciarlo. L'una ſi è che molti antichi e moderni accreditati Scrittori lodano come utiliſſimo nel Vajuolo l'uſo del bagno, ch'è rimedio ammolliente e rilaſſativo, del tutto contrario ad una forza ſtitica e coſtrettiva che ſi eſalta. L' altra ſi è che appunto ſul finir del Vajuolo dove noi proponiamo un rimedio ſtitico, molti accreditati Scrittori dietro gl' inſegnamenti del *Freind* propongono al contrario i purgativi che un oppoſto effetto producono.

A queſte oppoſizioni in apparenza sì formidabili facilmente riſpondeſi con far oſſervare che queſte pratiche lodate dagli Autori in nulla ſi oppongono al noſtro metodo, che anzi lo ſecondano e confermano. L' intenzion noſtra è quella unicamente di fare che la materia del Vajuolo non entri a contaminare il ſangue. L' uſo del bagno a queſto ſteſſo fine direttamente conduce: la Chinachina con iſtringere le parti interne affinchè la materia non entri: il bagno con ammollire e dilatare la ſuperficie del corpo, affinchè reſti alla cute la materia e non ſi concentri. L' uſo de' purgativi è diretto a nettare il ſangue dalla materia riconcentrata: l' uſo della Chinachina a preſervare il ſangue da eſſa materia onde non ne reſti infettato. Tanto però è più pregevole e deſiderabile l' effetto della Chinachina ſopra quello de' purgativi, quanto è meglio chiuder la caſa affinchè il ladro non entri, che aſpettare a diſcacciarnelo, entrato che ſia.

Bensì opponeſi il noſtro metodo, e ſalutarmente ſi oppone alla temeraria pratica di alcuni Medicanti, che non temono di replicare il ſalaſſo anche ſul declinar del Vajuolo, perchè con eſſo ſi dà adito e luogo alla triſta materia alla cute generata di entrare nel ſangue, con grave pericolo che non tutta nè sì prontamente fuor n' eſca. Il *Diemerbroechio* fra gli altri ha oſſervate le peſſime conſeguenze di queſta pratica, e l' ha riprovata e condannata. (*l*)

Qualora

(*l*) De Variol. & Morb. cap. 8.

Qualora però siasi persuaso di usare la Chinachina per questo effetto d' impedire alla materia del Vajuolo di riconcentrarsi formata che sia, non è da prescriversi alla cieca in ogni tempo di Vajuolo: ma importa assaissimo incontrare il vero punto di usarla. Questo felice punto propizio non è fisso sempre ad un giorno: ma siccome il Vajuolo varia nel suo corso or più breve or più lungo; or più presto, or più tardi conviene metterla in pratica. Generalmente parlando nel Vajuolo benigno e regolare il settimo giorno dal suo cominciamento metton materia le pustule, ed all' undecimo cominciano ad appassire. Verso il nono però sta il colmo della suppurazione: e questo appunto è il tempo opportuno di usare la Chinachina. Nel Vajuolo confluente e maligno si trova della irregolarità nel suo corso; e quantunque in sè stesso sia più precipitoso e celere, pur le pustule comparse più tardano a metter materia. E questa messa che sia, celermente cresce e si matura. In questa specie però di Vajuolo sarà meglio badare alla prima maturazion delle pustule, specialmente del corpo, per non tardare più oltre a prescrivere la Chinachina: mentre le pustule del volto si trovano poco osservabili, egualmente distendendo la pelle, l' una in l' altra accoppiate e confuse.

Ma per errare il meno che sia possibile in cosa di tanta importanza, sarà sempre meglio nel computo de' giorni del Vajuolo dell' una e dell' altra specie cominciare a numerare dalla prima comparsa delle pustule, e non dal primo apparir della febbre, che ad esse precede. Stantechè or nel secondo, or nel terzo, or nel quarto, e più tardi ancora, e talvolta dopo qualche giorno d' intermissione, danno fuori le pustule. E perchè ancora abbracciando la nostra medicina anche il Vajuolo più benigno e sicuro, in questa specie massimamente il tempo antecedente alle pustule è così poco morboso ed osservabile, che sfugge al senso de' fantolini, ed alla vista degli astanti. Lasciando dunque da parte questo tempo previo alla comparsa delle pustule, come poco rimarcabile, e come troppo vario nella sua durabilità, computeremo al nostro uopo il solo tempo della presenza delle pustule; e diremo che circa il settimo giorno sta il tempo opportuno di cominciare a metter in pratica la Chinachina nel Vajuolo, all' effetto desiderabilissimo di chiuder la via alla sua materia di riconcentrarsi.

L' anticipar questo tempo è inutile per il fine che si desidera; perchè non è ancor generata la materia che si vuol ritenere alla cute. Anzi potrebbe esser dannoso, incontrandosi ancor viva la infiammazione; ch' è quanto dire il lavoro della materia purulenta. Nel qual tempo usata la Chinachina, potrebbe, con frenare i salutari moti della natura, impedire quest' opera, senza di cui non sa essa nè può liberarsi dal Vajuolo. Tutte quindi le Scuole de' Medici dietro gl' insegnamenti del *Sidenamio* (*m*) fuggono con grande attenzione l' uso dalla Chinachina nelle febbri ardenti ed infiammatorie: ed il *Boeravio* si guardava dall' usarla nelle febbri stesse periodiche, nelle quali peraltro è sicuro medicamento, qualora per accidente fosse ad esse congiunto qualche morbo d' infiammazione, o fossero ascese a qualche grado di essa. (*n*)

Io so che alcuni Medici della Germania in questi ultimi tempi non hanno dubitato di tentare la Chinachina ne' morbi infiammatorj febbrili: sopra di che si trovano dati alla luce alcuni libri con i superbi titoli: *De virtute antiphlogistica Corticis Peruviani* (*o*). *De tempestivo Corticis Peruviani usu in febribus inflam-*

(*m*) Epist. Resp. 1.
(*n*) Aphor. 767.
(*o*) *Weichert*.

matoriis (*p*). E noi pure altrove qualche caso abbiamo addotto che sembra favorire questa opinione (*q*). Eccone un altro ancor più rimarcabile e significativo pochi giorni sono da me osservato. Vengo io chiamato a visitare un Fornajo, che avea una febbre ardente, cagionatagli dall' essersi egli poco prima grandemente affaticato ed infiammato nello scaldare un forno nuovo non usato. Il suo polso era *stridulo* (quale io ho descritto nel mio libro *de' morbi purulenti*) ed avea gli occhi splendenti, le urine rosse e crude, sopore e sete. Due cavate di sangue, e copiose bibite nitrate e rinfrescative, non valsero a frenar l' impeto del morbo: il quale anzi verso il settimo vestiva caratteri minacciosi e sospetti. Mi son risoluto di tentare la Chinachina: sotto il cui uso è presto ceduta la febbre; e senz'altra ragione o crisi si trova in oggi salvo e libero l' infermo. Ma perchè pochi casi e mendicate ragioni non bastano a combattere una pratica ben fondata ed universale, resteremo noi, finchè più convincenti fatti e migliori ragioni si adducano, nella volgare credenza, che non sia da usarsi la Chinachina nelle infiammazioni: se non fosse una qualche volta in sul declinare delle medesime, come saggiamente coll' *Offmanno* (*r*) e col *Pringle* (*s*) concludono *Francesco Reyes* (*t*) e *Cristiano Augusto Held*. (*u*)

Che se tanti riguardi si devono avere circa l' uso della Chinachina ne' morbi ordinarj d' infiammazione, che portano ad una buona e lodevole suppurazione, acciocchè questa non venga frastornata; quanto maggiori non dovransene avere nel Vajuolo, la di cui materia ha per

(*p*) *Held*.
(*q*) Dissert. sopra il Quesito: *Se nel caso* ecc. p. 46.
(*r*) Med. Syst. tom. 4. sect. 2. cap. 2.
(*s*) Osserv. part. 3. cap. 4.
(*t*) De Inflammaciones internas, tratado 2. cap. 2.
(*u*) De tempestivo Cort. Peruv. usu in febr. infl. num. 12.

sè ſteſſa ſpeciali caratteri di malizia e velenoſità? Si opporrà che il *Wall*, l'*Huxham*, ed il *Morandi* in ogni tempo di Vajuolo l'hanno preſcritta e lodata. Ma l'*Huxham* ed il *Morandi* oſſervazioni particolari non danno che la comprovino; ed i pochi eſempj del *Wall* di ſopra allegati, o nulla provano, o ben anche provano il contrario. Perciocchè nel caſo primo, e nel ſettimo, dov' egli preſcriſſe la Chinachina nel principio e progreſſo del Vajuolo, morirono gl' infermi: quantunque l' Autore ſi compiaccia d' averla uſata. Nè le ragioni da queſti Autori addotte molto provano, perchè ſi erigono ſu fondamenti dubbioſi e fallaci. Suppongono eſſi che nel Vajuolo il ſangue ſia sfibrato e diſciolto per la povertà dei globetti roſſi che lo compongono. Ma tutto al contrario per le oſſervazioni del *Sidenamio* (*x*), del *Baglivio* (*y*), del *Boeravio* (*z*), dell' *Haen* (*a*), e di altri molti ch'è ſuperfluo nominare, il ſangue tratto dalle vene nel Vajuolo, anche ſul finire di eſſo ſi trova denſo e coperto di croſta gelatinoſa, quale trovar ſi ſuole nelle infiammazioni; toltine alcuni pochi caſi, dov'è degenerato il morbo in cangrena.

Il tardar troppo oltre lo ſtabilito tempo a mettere in uſo la Chinachina nel Vajuolo, fa che coi giorni ſia fuggita via l'occaſion di giovare, con aver dato adito e tempo alla materia di riconcentrarſi; la quale ſi dovea con quel rimedio alla cute fermare e ritenere. Entrata che ſia in buona parte queſta materia a contaminare il ſangue, come avvenir ſuole ceſſato l'impeto interno degli umori col ceſſare del fervore infiammatorio, quale utilità ſi dovrà in tal caſo dalla Chinachina aſpettare? Sia pur che in qualche modo a gio-

---

(*x*) Obſ. Med. ſect. 2. cap. 2.
(*y*) Prax. Med. lib. 1. cap. 9.
(*z*) Aph. 1384.
(*a*) Rat. Med. part. 2. cap. 6.

var venga come *antisettico*, non gioverà certo a cacciar dalle vene la trista materia: a che anzi, rallentando le separazioni, verrà ad essere d'ostacolo. Bensì sarà utile, cominciato che abbiasene l'uso in tempo opportuno, per più giorni seguitare ad usarla dappoi, finchè indurita e seccata la materia, non sia più a portata di entrare nel sangue. Anzi affinchè l'occasion di giovare, qui più che in altro morbo precipitosa e fugace, non iscappi, forti e replicate dosi di Chinachina ne' primi due giorni si richieggono al desiderato effetto, regolate a misura della pienezza e quantità delle pustule. Negli adulti che hanno un copioso Vajuolo due once almeno se ne richieggono per farne decozione, da prendersi partitamente ne' due primi dì. Dopo di ciò sarà sufficiente una dramma di Chinachina usata due volte al giorno fino al totale disseccamento delle pustule. Nei bambini, o dove le pustule non sono molto numerose e piene basteranno dosi minori; e si potrà in questi usar per crestiere, se ad ogni modo rifiutino di prenderla per bocca. Io amo meglio usare dapprincipio la Chinachina in decozione, perchè credo che con la cottura s'immedesimi maggiormente con l'acqua; e sia quindi più atta a penetrar con essa dentro le vene: quantunque io sappia che nelle febbri ed in altri morbi, dov'essa operar dee i suoi effetti principali nelle prime vie, sia più forte ed efficace usata in sostanza.

Quanti medicamenti efficacissimi riescono vani in pratica, o ben anche dannosi, perchè fuor di tempo adoperati! Di qui credo io, più che d'altronde, derivi l'infamia d'incertezza che essi, e con essi la Medicina tutta si sono acquistata. *Neque vero ipse ullum speciosum medicamentum agnosco, quin solo tempestivo usu tale fiat*, diceva il *Boeravio* nella Prefazione a' suoi Aforismi.

FINE del Tomo primo.

ERRORI — CORREZIONI

pag.	l.	Errori	Correzioni
1.	l. 4.	Naime	Nairne *e così dipoi*.
	l. 17.	da	ad
2.	l. 26.	coricarſi	caricarſi
12.	l. 15.	manca dopo il *che*	ſono la lunghezza della punta unita all' armatura, e fanno pollici dodici, linee nove, che
15.	l. 19.	piedi	più di
	l. 30.	fu	fa
16.	l. 2.	comparandole	componendole
19.	l. 18.	0 : 4	1 : 6
22.	l. 1.	prima	piena
24.	l. 4.	prima	piena
36.	l. 18.	dopo la parola *poſſano* ſi aggiunga	non deſcrivere nello ſteſſo tempo, che ſpazj eguali, e ſe ſono le maſſe ineguali, ſi fa, che intorno allo ſteſſo centro del moto deſcrivano, e non poſſano
44.	l. 15.	Teor. 10. 6. 4.	Teor. 10. *b. k*
51.	l. pen.	miſura	miſtura.
62.	l. 2.	$\frac{1}{2n}2$ farà=7,8534090	$\frac{1}{2n^2}$ farà = 9, 544530
183.	l. 12.	negativa	poſitiva
733.	l. 10.	$\sqrt{(\frac{q^3}{4}-\frac{p^3}{27})}$	$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$
574.	l. ultima nella not.	metificità	meficicità.
578.	l. 4.	ne' è	n' è
582.	nella nota* l. antepen.	luo-	luogo
608.	l. 24.	alle	alla