# MISCELLANEA

# PHILOSOPHICO-MATHEMATICA.

*Favete, adeste aequo animo, & rem cognoscite,*
*Ut pernoscatis, ecquid spei sit reliquum.*

Terent. Prolog. Andr.

# MISCELLANEA

## PHILOSOPHICO -- MATHEMATICA

## SOCIETATIS PRIVATAE

### TAURINENSIS

## TOMUS PRIMUS.

AUGUSTÆ TAURINORUM,

EX TYPOGRAPHIA REGIA.

*MDCCLIX.*

A SON ALTESSE ROYALE

MONSEIGNEUR LE DUC DE SAVOYE.

# MONSEIGNEUR

*L'Ouvrage que nous avons l'honneur de vous présenter est le prémier fruit des tra-*

*vaux que nous avons commencé ſous vos Auſpices, & la protection que V. A. R. veut bien lui accorder, d'autant plus flatteuſe pour nous qu'elle eſt éclairée, préviendra le Public en ſa faveur. La ſupériorité des connoiſſances qui vous diſtinguent dans le rang élevé où vous êtes placé, vous fait appercevoir ces liaiſons ſecrettes, & ces rapports qui échappent au commun des hommes, par leſquels les ſciences les plus abſtraites conduiſent ſouvent aux plus utiles découvertes pour la Societé; c'eſt de ce point de vuë que vous vous intéreſſés à l'avancement des ſciences, & qu'en daignant jetter un oeil favorable ſur ceux qui les cultivent, vous nous retracés les grandes qualités qui brillent dans NOTRE AUGUSTE SOUVERAIN.*

*Puisse, MONSEIGNEUR, ce prémier essai répondre à son objet, & être en quelque façon digne de vous : ou puisse du moins nôtre exemple inspirer à des talens supérieurs le désir, & le courage d'y satisfaire plus amplement. Pour nous, il nous sera toujours assés glorieux de pouvoir vous offrir nos respectueux hommages.*

*De V. A. R.*

MONSEIGNEUR

*Les très-humbles, & très-obéissans Serviteurs*
Saluce, De La Grange, Cigna.

*Imprimatur*. Provic. S. Officii Taurini.

V. Berta LL. AA. P.

*Se ne permette la Stampa*

NICCOLO' DI QUAREGNA per la Gran Cancellaría.

DE IIS, QUAE IN SOCIETATE
ACTA SUNT

# COMMENTARII

A JOH. FRAN. CIGNA

CONSCRIPTI.

# DE BELLINIANO PROBLEMATE,

## SEU

## DE OVORUM ELIXATORUM CICATRICULA.

CUM ova lampadis calore foveremus, parata machina ad imitationem illius, quae in Berolinensis Academiae monumentis describitur (*a*), praecipuos Auctores consulebamus, qui de ovo, aut formatione pulli commentati fuerant, ut eorumdem lectione studia nostra dirigi possent, & adjuvari. Inter hos Bellinum quoque adivimus, penes quem cum praeclara multa, & laude digna reperiremus, tum illud in primis admirabile nobis videbatur, quod nomine belliniani problematis solemne est: cicatriculam, dum ova elixantur, e superficie vitelli in centrum abire, idque



(*a*) An. 1749.

eo magis admirationem nostram excitabat, quod in incubatis ovis rem aliter se habere, & cicatriculam post elixationem remanere in superficie Bellinus ipse traderet: tenebamur itaque desiderio, ut rem miram nostris oculis intueremur, cui ut satisfieret, ab incubatis ovis exordium duximus. Horum unum elixatum cortice, & albumine nudavimus, & cicatriculam cum contento pullo ad vitelli superficiem revera invenimus paullo infra obtusum ovi verticem medio, ut solet, inter *calazas* loco, & tenuissimae albuminis parti subjectam esse observavimus, quae omnia diligentius a nobis adnotata sunt, ut eo facilius in posterum, si quando opus esset, cicatriculam reperiremus. Observata cicatricula vitellum per centrum secuimus, & in centro ipso praeter omnem expectationem corpus invenimus albidum, tenerum, quale nempe nomine cicatriculae ad centrum latae in ovis non incubatis, & elixatis Bellinus descripserat: & hujus quidem corporis cum belliniana cicatricula omnimodam similitudinem declaravit comparatio, quae cum cicatricula ad centrum recentis ovi elixati inventa instituta fuit: quae cum omnium, ut inquiebam, expectationem fefellissent, in caussa fuerunt, cur nostrum aliquis hujusmodi dubitationes proponeret. An non caussa, quae in ovis non incubatis, dum elixantur, cicatriculam ad centrum pellit, id multo magis in incubatis efficere deberet, in quibus incubationis calore cicatriculae nexus resolvuntur, atque laxantur? An non fieri potuit, ut in ovis non incubatis cicatricula ad vitelli superficiem posita ob parvitatem Bellini diligentiam effugerit, qui dum ubique eandem sollicite perquireret, in corpus album inciderit in centro vitelli positum, idque corpus similitudine aliqua deceptus pro cicatricula habuerit? Enim vero si vera esset cicatricula in incubatis ovis, quorum cicatricula in superficie remanet, ad centrum neutiquam reperiretur. Quamquam porro hisce conjectationibus aliquam veri spe-

ciem

ciem inesse omnes faterentur, ne tamen iisdem leviter adeo indulgeremus, Bellini fides, & auctoritas illustrium Scriptorum testimonio confirmata, & ingenuus veritatis amor prohibebant. Statuimus itaque in non incubatis, elixatisque ovis vitelli superficiem omni diligentia perlustrare, ut experiremur, num forte hac in re Bellino feliciores esse possemus, secus arduam inquisitionem dimitteremus potius, quam ut magni Viri diligentiae, aut candori temere quidpiam detraheremus. Suscepta igitur inquisitio est in primis ab Equite Salutio, qui non leve industriae, ac dexteritatis suae hac in re specimen exhibuit; ostendit enim in plerisque recentibus ovis, quae elixari, ac indurari omnino curaverat cicatriculam ad vitelli superficiem adhuc haerentem; quam cicatriculam esse, tum ex situ demonstrabat, qui medius erat inter *calazas* paullo sub obtuso ovi vertice, & tenuissimae albuminis parti respondebat, ut in incubatis ovis contigisse diximus, tum ex figura, quae annulis conflata erat, & cicatriculam recentium ovorum non elixatorum plane aemulabatur, tum demum ex aliquali ejusdem prominentia supra vitelli superficiem, quam respondens indurati albuminis foveola recipiebat; adeo ut integro adhuc albumine exteriora ovi perlustrans cicatriculae locum certissime indicaret. Ad centrum porro albidum Bellini corpus perpetuo inveniebat, dummodo nec nimis parum, nec diu nimis excocta ova fuissent, quibus in casibus vel nullum, vel obscurius id corpus conspiciebatur. Haec cum saepissime omnium oculis Vir diligentissimus exhibuisset paullo liberius de belliniani inventi veritate dubitare caepimus, Auctoresque perquirere, si qui forte experimenta haec iterassent, aut illustrassent, ut ex illorum observationibus nostrae confirmari, vel refelli possent. Occurrebat itaque Cl. Balbi dissertatio bononiensibus commentariis inserta (*b*), in qua cum Bel-

 lini

(*b*) Tom. 2. par. 2. pag. 369. & seq.

lini experimenta renovasset problematis solutionem ex mechanicis principiis deducere conatus est. In illis autem experimentis observavit, postquam ova sex horae minuta in ebulliente aqua detenta sunt, cicatriculam adhuc suo manere loco, quamquam altius eo tempore vitellus obduruerit. Inde vero novum dubitationi nostrae fundamentum accessit; neque enim ullo modo concipere poteramus, quo pacto cicatricula per obduratum vitelli stratum permeare potuisset in tanta teneritudine, & integra deinceps ad centrum pervenire. Postquam novem horae minuta ova in ebulliente aqua Balbi detinuisset, cicatriculam in centro vitelli se reperiisse refert evidentissimam; sub-albidum scilicet corpus a Bellino habitum pro cicatricula; eo autem in loco de vitelli superficie non meminit Cl. Auctor, ut videatur Bellini fidei innixus corpus illud albidum, quod in centro repererat, pro cicatricula habuisse, omnemque adeo cicatriculam in vitelli superficie inveniendi curam abjecisse, utpote quam inutilem fore praevideret. Nos contra, quibus Bellini observationes jam suspectae erant, in ovis iis, quae decem, & ultra minuta in ebulliente aqua elixata fuerant reperta cicatricula ad vitelli superficiem posita, hanc comparabamus cum illa, quam in ovis, quae quinque tantum minuta elixata fuerant, Balbi deprehenderat, cumque omnino similem esse cerneremus, jam nulla supererat dubitatio, cicatriculam post quodcumque ebullitionis tempus nunquam a vitelli superficie recedere. Ad albidum corpus quod spectat in centro vitelli positum, tum in ovis non incubatis, quod Balbi observaverat, tum in incubatis, quod nostrae observationes nos docuerunt, non reperiri, aut obscurius cerni certum est, quando vel diutius, quam par esset, vel per brevius tempus in ebulliente aqua ova detenta fuerunt.

Ne autem in tanta clarissimorum Virorum aliter sentientium auctoritate nostrae observationes sua veritate, & fide

desti-

destituerentur Cl. Bertrandi Regium Chirurgum, Regiumque Professorem, ac Parisiens. Chirurg. Acad. Socium earundem participem esse voluimus, qui postquam ipsas pluries omni diligentia renovasset, ambiguas neutiquam esse conclusit. Gavisi itaque non mediocriter fuimus qualiacumque haec tentamina omni difficultate physicos expedire.

## DE VARIA BAROMETRORUM DIVERSAE DIAMETRI ALTITUDINE.

I. CUM Bononiensis Academiae commentarios pervolverem, atque ex praeclaris inventis, quibus elegantissima volumina referta sunt, plurimum jucunditatis, utilitatisque perciperem, in eum locum incidi, ubi Clar. Balbi experimenta narrantur, quae ad variam barometrorum diversae diametri altitudinem spectant, eamque Claris. Auctoris sententiam esse intellexi, ut censeat capillarium tuborum exemplo, minorem angustiorum barometrorum altitudinem a majori tuborum, quibus construuntur vi repellente esse repetendam (*a*), ita tamen, ut repellens ea vis in superiori vacua barometrorum parte in primis sedem habeat (*b*), & (quemadmodum experiundo invenit) frigore ad eam partem admoto imminui possit, restituto calore iterum adaugeri (*c*). Cum vero haec semel, iterumque attente perlegissem, quemadmodum Claris. Viri industriam, & experiundi peritiam magnopere admirabar, ita de phaenomeni caussa penitus consentire non poteram.

2. Primo enim animadvertebam vim repulsivam tuborum capillarium, si quae sit, eam in vacua parte minime positam

(*a*) Com. t. 2. par. 1. a pag. 307. ad 311., & a pag. 353. ad 360.
(*b*) Ibid. p. 354. & seq.
(*c*) Ibid. p. 356.

ſitam eſſe, cum diametro tantummodo reſpondeat, nec varia vacuae partis longitudine mutetur (*d*), nec proinde barometrorum vim repellentem in vacua parte eſſe reponendam. Deinde vero ſi vel maxime in vacua barometrorum parte vis repellens locata eſſet, eam frigore augeri potius, quam minui debuiſſe, quandoquidem, ut ipſe Balbi advertit, frigoris vi tubi conſtriguntur (*e*), eoque magis, quod in tubis capillaribus nulla hujuſmodi proprietas nec a Balbi, nec ab aliis fuiſſet obſervata.

3. Conjecturam itaque feci mercurii depreſſionem in anguſtioribus barometris deberi potius preſſioni relicti in vacua parte aëris, qui vel majori copia in anguſtioribus tubis adeſſet, vel arctius ſpatium nactus, proindeque denſior ſubjectum mercurium vehementius comprimeret, admoto autem ad ſupremam barometri partem frigore ita conſtringeretur, ut minorem preſſionem exerceret. Enimvero dum perpendebam, quam difficile ſit omnem e barometris aërem penitus expellere, dum difficultatem in anguſtioribus tubis majorem eſſe cogitabam, dum Muſchembroekii diligentiam in omni expellendo aëre Balbi ſupervacaneam exiſtimaſſe legebam (*f*), non parum in mea ſuſpicione confirmabar.

4. Eo itaque adductus ſum, ut meam hanc qualemcumque ſuſpicionem cum Sociis communicarem, quos inter Ludovicus de la Grange eamdem non modo non improbavit, verum etiam experimentum indicavit, quo definiri facile poſſet: propoſuit nempe, ut accuratiſſima barometra conficerentur ex tubis diverſae diametri, qui in infima parte flexi ſurſum crus promitterent barometrico tubo aequale, &

(*d*) Inſtitut. Neuton. de M. Sigorgne §. 364. 375.
(*e*) L. c. p. 356.
(*f*) L. c. p. 357. cum ſimilia experimenta Florentini propoſuiſſent ex hac ipſa cauſſa pendere Muſchembroechius definivit cum in accuratiſſimis barometris calore, aut frigore ad ſupremam partem admoto mercurii altitudinem non mutari obſervaverit. Vide additamenta ejuſdem ad Acad. Flor. in Collection Académique partie étrang. Tom. 1. p. 26.

& parallelum, ut in ipſum mercurius infundi poſſet, ſicque aër, ſi quis eſſer, in vacua barometri parte in brevius ſpatium coërceri. Si enim, inquiebat, addito per vices mercurio, ipſius altitudo ſupra libellam minueretur, & decrementa altitudinis relicti poſt ſingulas additiones in ſuprema barometri parte vacui ſpatii inverſam rationem ſequerentur, inde confici poſſe depreſſionem barometri tribuendam eſſe fluido elaſtico in ſuperiori barometri parte contento, cujus elaſticitas in ratione inverſa voluminis adaugeretur, qualem aëris proprietatem eſſe ad certos uſque limites Phyſici noverunt (*g*).

5. Experimentum igitur caepimus, omnique diligentia ſaepe iteravimus, cum barometrorum alterum vix dimidiam lineam in diametro haberet, alterum paullo minus quam duas, & mercurius quidem in anguſtiori tubo quatuor circiter lineas inferius haeſit, quam in ampliore, infuſoque, ut propoſitum erat, in crus alterum mercurio altitudo barometri ſupra libellam imminuta eſt, ita ut decrementa altitudinis relicti in ſuprema parte vacui ſpatii inverſam rationem quam proxime ſervarent, quamquam in horizontali ſitu collocato barometro exigua tantum in ſuprema parte aëris bulla deprehenderetur, quae vix aciculae caput magnitudine aequaret. Verbo dicam, talem fuiſſe hujus experimenti exitum, ut Cl. Auctor jam exploratum narraſſe, potiuſquam novum propoſuiſſe videretur. Jam vero ſi a vacua barometri parte mercurius repelleretur imminuta vacuae partis longitudine ſimul & repulſio minui debuiſſet, ut Bononienſes Academici alicubi fatentur (*h*): at contra, ut dictum eſt, mercurii depreſſio major evadebat.

 6. Quam-

(*g*) Cogitavi deinceps experimentum faciliori opera abſolvi poſſe etiam barometris qualia a Phyſicis parari ſolent, dummodo magis, minuſve iiſdem inclinatis, & magis, minuſve ea ratione condenſato, ſi quis eſſet, in vacua parte aëre normalis mercurii altitudo ſupra libellam metiretur, & varia ipſius decrementa, aut incrementa notarentur.

(*h*) P. 355.

6. Quamquam porro eo in experimento expectationi eventus adamussim respondisset, nondum tamen eidem acquievi, quin imo veritus sum, ne minori diligentia nostra barometra constructa fuissent, atque adeo residui aëris pressio simul cum vi vitri repellente conjungeretur, cum in iis, quae accuratiora Balbi parasset, sola vis repellens omnem depressionem effecisset. Alio itaque experimento directe investigare constitui, quantum tuborum vis repellens, si quae esset, in deprimendo mercurio valeret.

Itaque animadvertebam vim repellentem ab aëre non oriri, nec ab aëris actione ullo modo mutari (*i*) oportere, adeo ut, si quae differentia esset vis repulsivae inter binos tubos barometricos, eadem etiam in iis apertis se proderet. Binos igitur tubos, quorum unus duas lineas patebat in diametro, alter vix unam, ita inferiori extremitate jungendos curavi, ut deinceps flexi sursum normaliter erigerentur, juncturae autem locus esset in media inferiori parte. Tuborum parietes eamdem propemodum crassitudinem habebant, eodem vitro conflati fuerant, altitudo erat eadem, quanta barometrorum esse solet, erat autem uterque apertus in superiori extremitate. Hos mercurio implevi ad eam altitudinem, ad quam mercurius in barometro suspenditur, ut differentia altitudinis mercurii in binis tubis differentiam vis repulsivae in barometris ejusdem diametri ostenderet: veruntamen mercurius ad libellam propemodum compositus est, ut vix tertia, quartave lineae parte in angustiori tubo depressior deprehenderetur. Dum vero hoc experimentum cum iis comparabam, quae Cl. Galeatius instituit, in quibus nempe inter barometra ejusdem diametri differentiam altitudinum trium linearum fuisse observavit (k), verosimillimum videbatur depressionem eam barometrorum a Balbi observatam vel plane totam,

(*i*) Sigorgne l. c. §. 329.
(*K*) P. 309. 310.

totam, vel ſaltem maxima ex parte alii cauſſae, quam vi tuborum repellenti eſſe adſcribendam.

7. Dum haec tentarentur, Eques Salutius novam indicavit experimenti ſpeciem, quae rem totam mirifice illuſtrare non tantum poſſet, verum etiam ſola quaeſtioni abſolvendae ſufficeret: propoſuit nempe, ut communicantes barometrici tubi, quibus in ſuperiori experimento uſus fueram (6) mercurio implerentur, tum in vas mercurium continens inverterentur; ſic enim bina barometra inaequalis diametri eſſe proditura, quae cum commune in ſuprema parte vacuum ſpatium haberent, aequalem etiam a reſiduo, ſi quis forte remaneret, in ea parte aëre preſſionem paterentur, atque adeo ſolum effectum vis repulſivae ſuarum altitudinum differentia certiſſime definirent.

Eos igitur tubos iterum replevimus, & candentium prunarum calori expoſuimus, ut mercurius ebulliret, ſicque prodeuntes ab ipſo aëreae bullae per immiſſum, blandeque commotum filum ferreum educerentur: his peractis, inverſiſque tubis eamdem fere ac in ſuperiori experimento altitudinum differentiam invenimus, quae ſcilicet tertiam, quartamve lineae partem aequaret.

8. Quidquid igitur de priori experimento ſentiendum ſit (6), poſtremo (7) difficultatem omnem tolli, & noſtram ſententiam luculentiſſime confirmari cenſemus. Erant enim bina barometra, quae in reliquis cum Academicorum Bononienſium barometris omnino convenirent, atque adeo vis repulſivae effectum non minus, quam illa oſtendere deberent: quapropter cum Bononienſes Academici multo majorem altitudinum differentiam obtinuerint, concludendum omnino eſt, copioſiori aëri in minori barometro relicto eamdem eſſe adſcribendam, quum commune in noſtris barometris vacuum ſpatium nullam hujuſmodi differentiam admitteret. Voluimus etiam experiri, num ex admota glacie ad ſupremam partem altitudo mercurii adaugeretur, &

 magis

magis quidem in angustiori barometro, num contra ex admoto calore minueretur, & magis quidem in minori, id enim ex Balbi theoria sequebatur, cum nostra contrarium suaderet; altitudinum namque incrementa, & decrementa in utroque tubo aequalia futura erant, siquidem ex condensatione, & rarefactione relicti in vacua parte communis aëris penderent, cum inaequalia esse deberent, si ab aucta, vel minuta tuborum vi repellente orirentur. Sed frustanea fuit in hanc rem adhibita opera; neque enim vel ex admotis calidis linteis, vel ex admota glacie mercurii altitudo in tubis mutata est; deinceps vero cum aëris aliquae bullae in eam vacuam partem consulto admissae fuissent, tunc equidem glaciei frigore mercurium elevari, ex linteorum calore iterum deprimi observavimus, ut tamen altitudinum incrementa, & decrementa in utroque tubo ad amussim aequarentur: ex quo fit manifestum mercurii altitudinem ex frigore, vel calore non mutari, siquidem superior barometri pars aëre accuratissime vacua sit, quod vero incrementum, vel decrementum ex calore, & frigore observatur, id relicto in ea parte aëri tribuendum esse, qui aequalia incrementa, & decrementa efficiat, si communis, & aeque densus in utroque barometro sit, quemadmodum in nostro experimento contingit, inaequalia vero, si inaequali copia, & impari densitate relinquatur, quemadmodum in Bononiensium barometris accidisse ex hactenus dictis colligi posse censemus.

9. Eosdem tubos iterum mercurio purissimo implevimus, & pari industria aëre expurgavimus, eamdemque altitudinum differentiam obtinuimus. Iterum pariter glacie per immissum nitri spiritum admodum refrigerata, & candentibus bracteis ferreis supremam partem refrigerare, & calefacere per vices curavimus; at non minus frustranea opera nostra fuit, cum aeque immobilis, ac in priori tentamine mercurius perstitisset.

10. Eos-

10. Eoſdem etiam tubos ex utraque parte apertos in vas mercurio plenum injecimus, ut depreſſionum differentiam reperiremus, eamque iterum tertiam, quartamve lineae partem non excedere obſervavimus, in qua conſtanti experimentorum conſenſione (6. 7. 9.) veritatis non leve argumentum ineſſe conſideranti patebit.

11. Aliqua quidem naſcebatur difficultas ex iis experimentis, quae in vacuo boyleano a Viris Cl. capta ſunt: in quibus nempe educto aëre, & mercurio in utroque barometro deſcendente, auctaque adeo vacuae partis capacitate, differentia tamen altitudinum eadem perſeverabat, id enim Cl. de la Grange experimento in primis adverſabatur. Etenim ſi in eo experimento imminuta vacuae partis capacitate differentia altitudinum augebatur, aucta in hoc experimento eadem capacitate differentia imminui ſimiliter debuiſſet. Legebamus quidem Plantadium obſervaſſe in montibus ultra centum hexapedas altis omnem differentiam ſublatam fuiſſe, quod cum Bononienſium experimentis opponeretur noſtrae theoriae, & experimentis apprime erat conſentaneum: quamquam enim ipſi proponant in Plantadii obſervatione vi frigoris in montibus eam differentiam ſublatam fuiſſe, cum tamen, ut demonſtravimus, frigus differentiam non minuat, niſi relicti aëris elaſticitatem minuendo minime dubium videtur, id etiam magna ex parte ex deſcenſu mercurii, & ejuſdem aëris rarefactione contigiſſe, ex qua non minus quam ex frigore ejuſdem elaſticitas minor evadit.

12. Ea igitur experimenta repetenda ſuſcepimus, ut ſi fieri poſſet, diverſitatis cauſſam aſſequeremur: & revera maximam in iiſdem varietatem invenimus. Quando enim barometris utebamur, quae ſupra candentes prunas aëre expurgata non fuerant, inter exanthlandum altius barometrum depreſſiori aequale evadebat, & ceſſante emboli motu priſtina differentia redibat, quemadmodum Bononienſes obſervarunt; alias, quando accuratiſſime ſupra candentes

prunas

prunas barometrorum mercurius aëre fuerat repurgatus, durante emboli motu amplius barometrum deprimebatur, & in eadem depressione etiam cessante emboli motu permanebat, quod cum Plantadii experimento in primis convenire videtur. Arbitrabamur itaque in priori casu, cessante emboli motu, novum aërem, & quidem copiosius in angustiori barometro ex parietibus labente mercurio detectis, vel ex mercurio ipso prodiisse, eumque aërem pristinam differentiam restituisse, quod in barometris aëre expurgatis similiter contingere non potuerit.

13. Revera hasce descensuum anomalias aëri in suprema barometrorum parte contento, vel deinceps a mercurio, aut vitro erumpenti tribuendas esse demonstrat experimentum barometris communicantibus in machina pneumatica institutum; ea quippe barometra, quae eandem propemodum, ut dictum est (7), altitudinem habebant, dum aër educeretur, aequali omnino celeritate descendebant, & eamdem altitudinis aequalitatem servabant etiam quiescente embolo, & similiter aëre in recipiens pneumaticum pedetentim admisso pari gradu ascendebant, ut aeque alta perpetuo remanerent.

14. Superest, ut moneam Muschembroeckium, Desagulierium, Sigornium, aliosque primae notae Physicos ostendisse, mercurium a vitro non solum non repelli, quin potius ab eodem attrahi; depressionem autem mercurii in capillaribus tubis fieri docuisse excessu vis attrahentis partium mercurii inter se supra vim attrahentem vitri (*l*); quapropter cum ea attractionis differentia locum non habeat,

(*l*) Mercurium absque vi repellente deprimi posse cognovi, dum ipsum inter aeneam bracteam ad acutissimum angulum flexam ita in curvam sinuari observavi, ut maxime depressus prope angulum esset, & eo elatior, quo magis bracteae crura divergerent, non secus ac inter vitreas laminas contingat. Mercurium autem ab aere repelli nemo dixerit, cum in eo ipso experimento aeneae laminae margo in mercurium immersus eodem imbutus, infectusque sit & mercurius a Chymicis cum aere in amalgama uniatur &c.

beat, si barometrum ex unico inflexo tubo construatur, absque eo quod in subjectum vas mercurio plenum immergatur, patet modus, quo in angustissimis etiam barometris mercurii depressio ab ea caussa orta declinari possit. Hoc autem artificium etiam in hypothesi vis repellentis ipsius effectus praecavebit; cum enim vis repellens perinde ac vis attrahens, si quae sit in tubis, eadem remaneat quaecumque sit ipsorum longitudo, & quantacumque ipsorum pars in attractum, aut repulsum fluidum immergatur (*m*), manifestum fit repulsionem mercurii in barometro haerentis a repulsione ejusdem in altero crure elidi, ac corrigi debere.

## DE CORRIGENDIS BAROMETRORUM ERRORIBUS EX CALORE, ET FRIGORE NATIS.

I. BArometrorum mutationes non solum ex variata atmospherae pressione ortum ducere, verum etiam ex vario caloris gradu, qui mercurii densitatem immutet a longo jam tempore Physicis innotuit, factumque propterea est, ut effectibus caloris a gravitatis effectibus distinguendis ab eo tempore incubuerint: veruntamen correctiones hujusmodi proposuerunt, quae pro unaquaque barometri observatione experimenta requirerent, aut computationes, quorum alterum difficile erat, alterum incommodum. Laudabile proinde visum est Ludolff consilium, qui in monumentis Acad. Sc. Berol. (*a*) talem correctionem proposuit, ut absque experimentis, & absque computis ex solius scalae barometricae observatione vera atmospherae pressio quocunque tempore cognosceretur. Id

duntaxat

(*m*) Quae de attractione Sigornius demonstrat §. 330. 375. ad vim repulsivam transferri facile possunt, cum eae vires non nisi ob contrariam directionem inter se differant.

(*a*) An. 1749.

duntaxat in ea correctione incommodi supererat, ut scalae constructio, quam Vir Cl. exhibuit non admodum facilis, & expedita videretur, & thermometri comparationem perpetuo postularet. Cum itaque de eo etiam incommodo tollendo cogitarem, Cl. de la Grange ea de re collocutus sum, qui unica observatione problema hoc ita absoluit, ut nihil in hac re desiderari amplius posse videatur. Inquiebat enim incrementum altitudinis mercurii ex dato caloris gradu natum esse, ut altitudinem columnae mercurii, quae ei calori exponeretur, ac proinde si barometra ex unico inflexo tubo conficerentur, ita ut in crure altero mercurii altitudo unius tantum, aut duorum pollicum esset, rarefactionem mercurii, & condensationem in eo crure tam exiguam altitudinis differentiam esse effecturam, ut negligi tuto posset; nil igitur aliud esse faciendum, nisi ut scala altitudinum breviori barometri cruri apponeretur; sic enim ascensus, ac descensus, ex mutata aëris gravitate natos aequae percipi, interea dum mutationes ex calore productae sensibilem errorem non parerent.

2. Cum porro quantum mercurius in uno crure adscendit, tantundem in altero descendat, & contra, variatio altitudinis mercurii supra libellam dupla est spatio a mercurio descendendo, vel adscendendo percurso: quapropter ut scala veram altitudinem supra libellam significet in hac loco pollicum semipollices, linearum loco semilineae ponendae sunt, & pro integris pollicibus, ac lineis integris deinceps assumendae; inde autem constat in hac barometri specie errores a rarefactione natos duplos esse ipsa rarefactione.

3. Quod si igitur quis paullo acuratior, & diligentior errorem quoque ex minoris cruris rarefactione natum (1) declinare cupiat, in promtu correctio est ab eodem fonte petita: si enim binae scalae construantur, quarum una barometro ipsi apponatur, altera breviori barometri cruri, ita

ita ut haec adſcendendo imminuatur, illa adaugeatur, quamdiu mercurius in eadem denſitate perſeverabit, utraque ſcala eundem gradum oſtendet, mutata vero denſitate, diverſi gradus prodibunt, quorum ſemidifferentia totius voluminis incrementum, vel decrementum ſignificabit. Poterit autem in ſcalis aptandis certa, & determinata mercurii denſitas aſſumi, quod nos in noſtris barometris parandis praeſtitimus: tubo enim cartaceo totum barometrum incluſimus, & comminuta glacie intervallum replevimus, ut in utroque crure congelationis frigore mercurius condenſaretur. Deinceps mercurii altitudinem in utroque crure filo notavimus, & differentia altitudinum inventa, ad utrumque crus opportunam ſcalam aptavimus, quae eam differentiam exprimeret (2).

4. Similibus peractis ſpatium a mercurio congelationis tempore occupatum, quod aequale eſt longitudini cilindri intra cognomines quoſcumque utriuſque ſcalae gradus intercepti, ſemel dimetiendum eſt; huic enim ſi addatur, tota mercurii rarefactio (3) habebitur, quocumque tempore volumen mercurii rarefacti.

5. Porro altitudo mercurii in minori crure eſt minor vera dupla quantitate rarefactionis (2) in eodem crure; rarefactio autem tota aequatur ſummae duplae rarefactionis in minori crure, & rarefactionis mercurii ſupra libellam exiſtentis: quare ſi altitudini minoris cruris addatur rarefactio tota, habebitur altitudo vera aucta rarefactione mercurii ſupra libellam exiſtentis, ſeu aucta ſua rarefactione.

6. Quare ſi fiat, ut volumen totius mercurii rarefacti ad volumen ejuſdem condenſati (4) ita altitudo mercurii rarefacti ſupra libellam (5) ad quartam proportionalem, haec dabit veram mercurii altitudinem (*b*).

 7. Haec

(*b*) Scalarum conſtructio ea eſt, ut gradus in inferiori deſcendant, dum in ſuperiori aſcendunt, quo fit, ut extremitates columnae mercurii fri-

7. Haec autem correctio tum accuratioribus, ut diximus, satisfacere potest, tum usui esse, quando mercurius descendit per insignem altitudinem, & propterea rarefactio minoris cruris insigniter augetur, quod in altissimorum montium altitudine barometri ope dimetienda fere contingit, quando correctionis usus in primis necessarius videtur ob frigus in montibus magis, magisque plerumque adauctum, prout loci altitudo adaugetur. Coeterum cum ascensus mercurii in minori crure, ex maxima atmospherae mutatione sit unius pollicis cum dimidio, si minima mercurii altitudo in eodem crure ponatur semipollicis, erit altitudo maxima duorum pollicum, atque adeo ejus rarefactio erit $\frac{1}{15}$ circiter rarefactionis in crure majore, & altitudo ab ipso crure notata pro vera assumi plerumque poterit absque sensibili errore.

8. Hoc

gore glaciali condensati semper ad gradus cognomines pertingant, qui gradus exprimunt altitudinem ejusdem mercurii condensati supra libellam; sit itaque in hoc mercurii statu numerus graduum, quem utraque scala quocumque dato tempore exhibet, $= r$, & immutato atmospherae pondere ponamus mercurium subito rarefieri evidens, est quantitates materiae in unaquaque columna easdem remanere debere, dum ejusdem volumina per spatia quaevis augebuntur. Exprimantur haec columnarum incrementa per $m$, & $n$, & quoniam mensurae graduum in scalis dimidiae tantum sunt verarum, prodibunt in scala superiori gradus $r + 2m$, & in inferiori $r - 2n$; hi sunt gradus, qui ex immediata observatione semper habentur. Sit itaque numerus graduum in scala superiori a mercurio notatus $= a$, & numerus graduum respondens in inferiori $= b$, & erit $r + 2m = a$; $r - 2n = b$ subtrahatur haec aequatio ab illa, & residuo per 2 diviso exurget $m + n = \frac{a-b}{2}$; quae adeo erit aequalis tarefactioni totali. Addantur nunc ambae aequationes, & summis per 2 divisis habebimus $\frac{a+b}{2} = r + m - n$, quae formula, ut videre est exhibet volumen primum mercurii supra libellam, cum sua rarefactione, quae aequatur differentiae rarefactionum ambarum columnarum. Si itaque $c$ sit longitudo totius cilindri mercurialis frigore condensati; sequentem analogiam poterimus instituere $c + \frac{a-b}{2} : c = \frac{a+b}{2} : \frac{ca+cb}{2c+a-b}$, quae quarta proportionalis exhibebit quocunque tempore altitudinem mercurii supra libellam ad eundem semper condensationis statum redacti.

8. Hoc porro barometrum quanquam duplo minus sensibile sit, quam reliqua, plures tamen utilitates complectitur, quod nec scalam mobilem postulet, nec obnoxium sit depressioni ex tuborum angustia natae, nec demum ob caloris, frigorisque vicissitudines, in errorem inducat.

## DE FALLACIA METHODI DIMETIENDI QUANTITATEM ATTRACTIONIS.

INquisiturus, num aliqua, & quanta mercurium inter, & vitrum adhaesio intercederet, utebar methodo a Tayloro, aliisque tradita, ex altero nempe bilancis brachio vitrum planum suspendebam in situ orizontali, & apposito in altero brachio aequipondio, suppositoque mercurio, vitri inferiorem superficiem mercurii superficiei aptabam, & ex pondere in altero bilancis brachio addendo ad vitrum e mercurio divellendum adhaesionis vim metiebar, cumque non exiguum pondus ad id requiri experirer, maximam mercurium inter, & vitrum adhaesionem ea methodo me invenisse, ac demonstrasse existimabam. Fallacem methodum esse amice monebat Ludovicus de la Grange, eamque adhaesionem externi aëris pressioni aut totam, aut ex parte esse adscribendam, cumque responsionis loco nihil suppeteret, quod afferrem, nisi Cl. Virorum auctoritatem, qui ea methodo eodem scopo saepe usi fuerant, ad experimentum provocabat inter corpora, inter quae nullam adhaesionem esse, apud Physicos in confesso esset. Itaque unanimes id ipsum experimentum vitro oleo madido, subjecta aqua tentavimus, sed magnum quoque pondus ad id vitrum ab aqua divellendum necessarium fuisse invenimus; observabamus duntaxat, majus, minusve pondus requiri, prout contactus magis, minusve esset accuratus, prout nempe plures, paucioresve aëris bullae vitrum inter, & aquam essent interpositae. Cum autem in eo experimento reri liceret, ne olei ſtratum minus craſſum eſſet, quam ut ſufficere poſſet vitri, & aquae adhaeſioni prohibendae aliud in hanc rem libuit inſtituere. Nempe vitrum operuimus ſebi ſtrato ultra ſemilineam craſſo, & nihilominus idem fuit experimenti exitus, ex quo conſtitit novem, & ultra unciarum pondus neceſſarium fuiſſe ad ſuperficies 10. circiter pollicum quadratorum divellendas. Sebum porro omnem aquae ad vitrum adhaeſionem impedire Phyſici conſentiunt, & demonſtrat experimentum, quo tubi capillares intus ſebo inuncti aquam ſupra libellam ſuſpenſam non retinent, obſervante Sigornio, ex quibus conficitur eam methodum a Phyſicis adhibitam, veram adhaeſionis menſuram non praebere.

## DE ASCENSU, ET DESCENSU THERMOMETRORUM VARIIS LIQUORIBUS MADENTIUM EX INFLATO VENTO.

Thermometra humida, ſi vento ejuſdem temperaturae perflentur, aut ſi ventus ipſe humidus ſit, inſigniter deprimi Muſſchenbroeckius ſcribit (*a*), quod porro phaenomenon cum ſingulare videretur, libuit variis liquoribus rem eamdem tentare. Talis autem fuit experimentorum exitus.

Aqua, vini ſpiritus, acetum, lac, cremor lactis thermometri deſcenſum praeſtabant; petroleum, eſſentia caryophillorum, oleum olivarum, oleum lini adſcenſum efficiebant, ac demum oleum Tartari per deliquium ad aëris temperaturam redactum nihil mutabat, adeout, inflato aëre, thermometrum immobile permaneret. Ut autem certiores fieri poſſemus, num revera ex vento thermometrum adſcenderet, aut deſcenderet, ſi de iis liquoribus quaeſtio erat, qui adſcenſum faciebant, iiſdem frigidioribus utebamur,

(*a*) Eſſai de Phyſique §. 962.

mur, quam eo tempore atmoſphaera eſſet; ſic enim inflato vento prius ad atmoſphaerae calorem aſſurgebat thermometrum, dein flatu continuato majorem altitudinem aſſequebatur, & poſtea in aëre relictum ad atmoſphaerae temperaturam redibat, ac demum ſi in eum liquorem immergeretur, iterum deſcendebat. Contra autem, quando de liquoribus agebatur, qui deſcenſum facerent, eoſdem calidiores parabamus, quam atmoſphaera eſſet, ut pariter venti effectum exploratum, certumque haberemus.

Recenſita porro experimenta nulli hactenus cognitae ignis, caloriſve proprietati accommodari poſſe videntur. Si enim dicas, vi ſalium in aëre contentorum, liquores, quibus thermometra madent, refrigerari, aut incaleſcere, qui vero fit, ut oleum tartari, quod maximam cum acidis per atmoſphaeram diffuſis efferveſcentiam efficere, maximum inde calorem producere deberet, nec minimum pariat caloris, aut frigoris gradum? Sin vero ad attritum confugias aërem inter, & liquores, quibus aſperſa thermometra ſunt, primo quis dixerit ex aquae, & aquoſorum humorum attritu frigus produci? deinde vero hactenus in ea theoria illud firmum, ratumque habitum eſt, quod calor non ſolum attritui reſpondeat, verum etiam liquorum indoli plus, minuſve pinguium, atque adeo magis, minuſve inflammabilium, a qua quidem lege noſtra experimenta longiſſime abſunt. Quid enim macrius oleo tartari? quid vini ſpiritu inflammabilius? quid pinguius lactis cremore? veruntamen oleo tartari nullum frigus gigni, ingens ex vini ſpiritu, & cremore lactis oriri, ipſa experimenta conſtantiſſime docuerunt.

Nobis igitur rem ipſam propoſuiſſe ſuffecerit; rei cauſſam diligentioribus inveſtigandam relinquemus, forte etiam nos ipſi aliquando proponemus; experimenta enim aliqua inchoavimus, quae ſi eumdem eventum conſtanter habeant, ad hanc, aliaſque caloris, frigoriſque cauſſas aſſequendas conducere poſſint.

DE

# DE CAUSSA EXTINCTIONIS FLAMMAE IN CLAUSO AERE.

1. CUM Eques Salutius definire ſtuderet, num elaſticum fluidum a pulvere pyrio erumpens alendae flammae aptum eſſet; quaeſtio exorta eſt cur clauſo in ſpatio flamma diu vivere nequeat, eaque occaſione variae Phyſicorum de hac re ſententiae in medium prolatae ſunt, ut ſi fieri poſſet, potiſſimam, ac veritati proximam aſſequeremur.

2. Inter caeteras celebris illa adducebatur, qua flammae extinctio vaporibus haeterogeneis tribuitur ab ipſa erumpentibus, quibus incluſus aër abſorbeatur, aut ejus elaſticitas deſtruatur, unde is, qui reſiduus eſt minorem elaſticitatem exerceat, quam ſuſtentanda flamma poſtularet (*a*). Hanc vero non levibus difficultatibus obnoxiam eſſe proponebam, cum vix ad aliquot pollices elevato mercurio clauſo in ſpatio flamma extinguatur (*b*), etſi in montibus, ubi longe rarior aër exiſtit, quam commode vivat; quod ſi a vaporibus, ac fuligine flamma extingueretur alcoholis flammam diutiſſime clauſo in ſpatio victuram eſſe colligebam, cum ab eadem fuligo nulla emanet, nec niſi aquei vapores aliqui erumpant (*c*): quoniam vero diverſus fuit experimenti exitus, & alcoholis flamma citius quam

ſebi,

(*a*) L' on ne doit pas attribuer à la perte de l' éſprit vital de l'air l'extinction de la flamme de la chandelle, & des méches ſous des récipiens, mais aux vapeurs fuligineuſes, & acides, dont l' air ſe charge, & qui détruiſant l' elaſticité de cet air, empêchent, & retardent l'action, & le mouvement elaſtique du reſte. Statiq. des vegetaux exp. 117. p. 223.

(*b*) Poſt abſorptam $\frac{1}{37}$ aëris flammam extingui Mayovv, poſt abſorptum $\frac{1}{27}$ Haleſius tradit l. c. exp. 106. p. 200. 201.: imo, ne uno quidem pollice elevato mercurio, flammam extinctam fuiſſe ipſe Haleſius tradit l. c. exp. 115. p. 223. 224.

(*c*) Boerrhauv. elem. chem. t. 1. p. 170. 171. edit. pariſ.

sebi, aut pinguis olei extincta est, mea exinde magis dubitatio augebatur (*d*).

3. Interea Ludovicus de la Grange experimento alio prioris opinionis infirmitatem evincebat. Accensam scilicet candelam ita vitreae campanae supposuit, ut campana ipsa spatium non clauderet, sed ejus inferior limbus a tabula, cui candela insistebat, aliquot transversos digitos distaret, at flammam non minus perire observavit; quanquam amplissimus externo aëri sub campanam aditus pateret, quare nobis etiam apertius persuadebatur ex defectu aëris, aut ejusdem ábsorptione clausam flammam non extingui.

4. Cum id Vir industrius observasset, explorare insuper coepimus, num intra recipiens in suprema parte amplo foramine pertusum flamma vivere posset, sed similiter extingui experti sumus: Jam igitur binos in suprema parte hiatus experiri libuit, quos similiter sustentandae flammae ineptos esse comperimus, tum vero observavimus foramina non majora flammam servare, si alterum in suprema recipientis parte, alterum in infima pateret, cumque varias apertionum positiones, variasque earundem combinationes Ludovicus de la Grange similiter tentandas proposuisset, ad id Eques Salutius lanternam ex albo ferro construendam curavit, quæ undique accurate clausa erat; sed duobus in suprema parte foraminibus hiabat, duobus in media, totidem in infima, quorum unumquodque pollicem circiter diametro patebat, & subere obturari pro lubitu poterat.

5. Hac usi, observavimus bina ostia superiora, aut media, aut infima sustentandae flammae non sufficere, sufficere au-

(*d*) Deinceps cum Boylei opera pervolverem haec jam olim ab eximio Physico animadversa fuisse comperi, qui cum alcoholis flammam clauso in spatio extinctam fuisse narasset, haec addit *post flammae extinctionem aër in recipiente alteratus visibiliter non fuit, & quantum ex judicandi modis, qui ad manum tunc erant percipere potui, aër, vel omnem suam elasticitatem, vel saltem longe maximam ejus partem retinebat*. Vid. ejus suspic. de latent. aeris qualit. tom. 2. p. 8. edit. Genev. 1680.

autem duo alia quaevis, si modo eorum unum supra flammam, alterum infra ipsam situm esset; quinimo unicum ad basim lanternae sufficere Eques Salutius demonstravit, si ita lanterna agitaretur, ut modo superiora, modo inferiora flamma teneret.

6. Ex quibus experimentis cum constare videretur per foramen alterum, & quidem per inferius ingressuro aëri, per alterum, & quidem per superius eidem egressuro aditum liberum esse opportere, ut flamma sustentaretur, eam tamen aëris per foramina directionem levibus corporibus admotis de la Grange tutius, certiusque definire cupiebat.

7. Id facilius appositis valvulis perfici posse animadverti, & quidem observavimus ex tali valvularum dispositione, ut per superius foramen aër egredi, per inferius ingredi posset, flammam vivam mansisse, ex opposita ipsarum directione interiisse, ita ut in primo casu valvulae a foraminum margine sponte recederent, in postremo contra eundem aptarentur.

8. Quum igitur id constitisset, per inferius foramen ingredi, per superius egredi aërem debere, ut flammam sustentare possit, experiri volui, num tubo curvo communicationem inter superius, inferiusque foramen perficiente flamma intra clausum spatium servari posset; sed nihilo secius extingui observavi, quam si nulla hujusmodi communicatio intercessisset.

9. Halesius porro crus alterum syphonis per apertum excipuli pneumatici verticem ita trajecit, ut ad lancis fere contactum perveniret, ejusque cruris orificium tribus laneis tegumentis munivit: candela sub eo recipiente posita intra pauca minuta extinguebatur, quanquam tunc temporis Halesius aërem exhantlando renovaret; nam per lanea syphonis tegumenta libere adeo externus aër in exantlati locum penetrabat, ut mercurii altitudo, ne uno quidem pollice augeretur (*e*).

(*e*) Statiq. des vegétaux exp. 115.

10. Experimentum hoc, cum de la Grange perpenderet, ideo flammam extinctam fuisse opinabatur, quod aër in inferiori tantum recipientis parte renovaretur, dum is, qui in superiori continebatur, immotus remaneret: victuram itaque flammam sperabat, si a superiori recipientis parte aër hauriretur, novusque aër in subducti locum per lancis foramen ingredi posset, sic enim talem aëris cursum produci, qualis a flamma libero in aëre excitari solet (7).

11. Aptabat itaque ad lancis foramen, quod in antliam patet tubum ejus longitudinis, ut ad superiorem recipientis partem perveniret, & flammam ita sub recipiens collocabat, ut foramen aliud lancis, per quod barometrum traduci solet, intra recipientis ejusdem ambitum comprehenderetur, & externo aëri in recipiens aditum praeberet: his ita paratis, etiamsi epistomium machinae pneumaticae apertum esset, & binis foraminibus, superiori altero, altero inferiori cum externo aëre recipiens communicaret, candela brevi extinguebatur.

12. Quod si aërem ex suprema parte per tubum hauriret, novusque interim aër per lancis foramen in inferiorem penetraret, flamma servabatur, & tamdiu quidem, quamdiu emboli motus perseverabat, ex quibus constitit foramina, quae servandae flammae inepta sint (11), servare utique posse, si cursus aëris ab inferiori ad superius foramen ex arte producatur.

13. Quandoquidem, ut dictum est, (8) tubus, qui communicationem inter superius, inferiusque foramen efficiebat, flammam non servaverat, conjecturam fecit de la Grange intra vas clausum aëris circulum sponte perfici non posse, qui si ex arte excitaretur, fortasse non aliter flammam, quam in praecedenti experimento sustentaret. Ut id experimento decerneret curvum vitreum tubum ex eo foramine, quo antlia pneumatica cum externo aëre commercium habet ad supremam apertam recipientis pneumatici

partem deduxit, accurateque glutinavit, & accenſam candelam ſub recipiente incluſit, cumque mox extinctioni proxima eſſet, embolum agitavit, epiſtomium ita verſando, ut educto embolo aërem per tubum ex ſuprema recipientis parte exugeret, eodemque reſtituto per lancis foramen in inferiorem urgeret: tum vero obſervavimus ſingulis emboli agitationibus refocillari flammam, ſenſimque haud minus vividam reddi, quam in aperto aëre futura fuiſſet; ac talem tandiu ſervari, quamdiu motus emboli perduraret, eodem ceſſante paullatim languere, iterumque extinctioni proximam eadem arte reſtauravi; haſque languoris, vigoriſque viciſſitudines induci pro lubitu poſſe; quod ſi emboli motus per aliquot ſecunda deficeret, extinguebatur. In hoc autem experimento tentando, prius embolum agitari oportebat, quam omnia accurate glutinata eſſent, ne praepropere flamma interiret, & barometrum aptare neglegimus, quod nos certiores redderet, num omnis externo aëri aditus intercluſus eſſet, ſed rei novitate, & elegantia delectati, ſtatim de commodiori experimenti ſpecie cogitavimus, quae vitae uſibus inſerviret.

14. Id autem obtineri poſſe animadvertimus, ſi recipiens undique accuratiſſime clauſum foramine uno in ſuprema parte, altero in infima pertunderetur, hiſque valvulae ea lege aptarentur, ut ſuperior erumpenti aëri cederet, irruenti reſiſteret, inferior viciſſim in recipiens aditum praeberet, regreſſum interciperet, quibus ita comparatis per curvum canalem ad recipiens feruminatum communicatio induceretur inter utrumque foramen, ipſoque demum pertuſo canali, ad aperturam follis tubus accommodaretur; ſic enim dilatato folle aërem ex ſuperiori recipientis parte tantum hauriri, eodem compreſſo in inferiorem ejuſdem partem urgeri, talemque aëris circulum produci, qualem clauſo in ſpatio flamma ſuſtentanda poſtulabat (13).

15. Lanterna itaque ex albo ferro expoſita arte conſtructa fuit, quae anteriori in parte plano vitro ad ferrum quam exacte ferruminato, ac glutinato claudebatur, ut ipſius cavitas conſpici poſſet. Lanternae porro fundus rotundo foramine pertuſus erat, quod in tubum aliquot pollices longum ſupra internam fundi faciem normaliter junctum aperiebatur. Tubus alius planae laminae normaliter inſiſtens priori congruebat, & accenſam candelam recipere poterat, ac ſuſtinere: ſuperior autem planae laminae facies molli cera obducebatur, ſic enim tubo hoc in priorem immiſſo, candela in lanternam inſinuabatur, & interea plana baſis ſuperiori facie, qua cera obducta fuerat, contra lanternae fundum compreſſa, eidem adhaerebat, & exterioris aëris ingreſſum prohibebat. Reliqua ſe habebant, ut §. praecedente propoſitum fuerat: duntaxat notandum follis, quo uſi fuimus, poſteriorem aperturam, ſuperpoſito corio, ac rite glutinato obturatam fuiſſe: his ita diſpoſitis experimentum aggreſſi fuimus, quod expectationi noſtrae reſpondit; candelam enim mediocrem, quae intra recipiens ſibi relicta minuto temporis extinguebatur, tamdiu vivam ſervabamus, quamdiu follem agitare lubebat, & intermiſſa paulliſper agitatione languidam cernebamus, quae mox, eadem renovata, reſtaurabatur.

16. Etſi vero lanternam accurate clauſam optaremus, talem nihilominus ab artifice non obtinuimus, ſed ſingulis follis agitationibus aëris irruentis, aut prodeuntis ſibilum percipiebamus, inprimiſque citra vitrum, tumque ex follis agitatione flamma vehementer commota extinguebatur, praeſertim ſi paullo celerius follis agitaretur: poſtquam vero pleraſque lanternae juncturas ſuperinducta cera, & maſtice glutinavimus, deſcriptum lanternae effectum demum obtinuimus; quapropter in noſtra opinione fuimus confirmati non ex renovatione, ſed ex circumductione aëris flammam



ſer-

ſervari, ſiquidem quo accuratius novus aër arcebatur, eo magis quieta, & incolumis apparebat.

17. Interim non inopportunum exiſtimamus ea afferre, quae Cl. P. Beccaria in ſuis phyſices lectionibus in hanc rem protulerat, ea autem hujuſmodi ſunt.

„ Primo flammam ex charta excita ſub flamma candelae: „ extinguitur; ea enim aërem disjiciens infra candelae flam- „ mam conſtitutum; facit, ne aëre undique ambiente flam- „ ma candelae libretur, contineatur.

„ 2. Candelam accenſam ſupponito vaſi undique clauſo: „ brevi extinguitur; ſupponito vaſi clauſo undique, quod „ tamen prope fundum communicet cum aëre ambiente: „ extinguitur.

„ 3. Supponito vaſi undique clauſo, praeter quam in „ vertice, ubi foramen hiet pollicare: extinguitur.

„ 4. Supponito vaſi, in quo foramen pollicare duplex, al- „ terum baſi flammae depreſſius, alterum altius: vivet „ flamma, atque non verticali emicabit directione, ſed „ obliqua, apice nimirum ſuo declinabit a loco foraminis „ depreſſioris in locum foraminis altioris patentis in latere „ oppoſito vaſis.

„ Quae omnia non ſolum probant aërem eſſe neceſ- „ ſarium, qui flammam reverberet undique ad flammam „ alendam, ſed plane etiam evincunt aëre opus eſſe, qui „ certa circumeat lege; flamma nimirum ſuo apice immi- „ nentem ſibi aërem perpetuo deturbat, illi aër ſuccedit, „ qui baſi flammae adjacet; novo ergo aëre continenter „ opus, qui adfluat ad baſim, dimotoque ex apice aëri „ ſuccurrat.

„ Ratio ipſa, qua ſervatur ignis in prunis accenſis, vel „ ratio potius, qua fit, ne ignis in prunis accenſis graſſans, „ ipſas velociter exolvat in cineres, eamdem confirmat, „ quam ſuperius conſtitui veritatem; nimirum cineribus „ obvolvuntur accenſae prunae, ea res facit ne recens con-

„ tinuo

„ tinuo aër reverberet ignis particulas, prunaſque adeo ſer-
„ var diutius. „ Hactenus Vir Clariſſimus. Quid vero de hiſce ſentiendum videatur ex ſequentibus apparebit.

18. Poſtquam quae tentavimus de flamma experimenta in eum qualemcumque ordinem redegiſſem, quo propoſita leguntur, Eques Salutius nova inſtituere aggreſſus eſt: inveſtigare nimirum voluit num aëris fluxus, qui ab inferiori ad ſupremam clauſi recipientis partem dirigeretur, flammam quoque ſuſtentaret, etſi hujuſmodi directio, directioni, quam aër circa flammam ſponte ſequitur, oppoſita eſſet.

Itaque ſiphones binos ex vitro ſelegit, quorum crus alterum intra clauſum recipiens inſinuavit, dum alterum extra ipſum emergebat: incluſa crura non eandem habebant altitudinem, ſed unum ſupra flammam eminebat, alterum infra ipſam deprimebatur: ex hoc aërem ore exhantlari, juſſit, atque ejuſmodi exhantlationibus flammam vivam ſervari obſervavit, quanquam aër ex infimo ſiphone eductus nonniſi ab aëre per ſupremum ſiphonem irruente reparari poſſet, ſicque a ſuperiori ad inferiorem ſiphonem aëris curſus dirigeretur. Ceſſante exſuctione flamma extinguebatur, quemadmodum juxta §. 11. contingere debebat: jam vero binos ſiphones adhibuit, quorum incluſa crura, vel utraque ſupra flammam eminebant, vel utraque eadem depreſſiora exiſtebant, & in utroque caſu, hauſto ex altero ſiphone aëre, flammam vixiſſe deprehendit.

19. Haec autem experimenta eo magis paradoxa nobis videbantur, quod poſtremum Haleſii experimento ſuperius deſcripto (9) oppoſitum eſſet; itaque tum caetera experimenta, tum inprimis hoc ipſum non ſemel, aut iterum, ſed ſaepius omni diligentia, ac ſollicitudine inſtituimus, cumque eventus idem conſtantiſſime ſe proderet, ſuſpicati ſumus Haleſium ampliori, altiorique recipiente uſum fuiſſe, adeo ut fluxus aëris ab uno ad alterum inferiorum foraminum abſolveretur, intereaque aër ſuperior, qui flammam

cir-

circumdaret, immotus remaneret, vel eundem Halesium sero nimis embolum agitasse, flamma jam languida facta, vel demum majori, minorive, quam par esset, celeritate embolum commovisse, eo vel maxime, quod ex postremis hisce caussis, flammam in nostris experimentis non semel extingui contigisset.

20. Neque solum alienis experimentis, verum etiam nostris, & praeconceptae theoriae mox proposita experimenta adversari videbantur: nam ex illis conficiebatur, vel qualencumque aëris motum, & agitationem flammae servandae aptam esse, vel flammae vitam non ab aëris motu, sed ab ejus renovatione repetendam esse. Itaque unum, eundemque inclusum aërem agitare primum coepimus, ut videremus, num agitatio aëris, quae ipsius renovationem nullam producat, flammae servandae sufficeret; si enim secus contingeret, concludendum erat motum aëris non per se ipsum flammam servare, sed quatenus per motum continua aëris mutatio perficeretur: cum vero aëris varia agitatione flamma sustentari non potuisset, tunc eo magis dubitavimus, etiam in proposita machina (15) flammam vixisse ob aëris renovationem potius, quam ob ipsius circuitum certa lege, certaque directione excitatum: dilatato enim folle, si aliquod vel minimum in machina foramen remaneret, tantum aëris per ipsum in machinae cavitatem penetrare oportebat, quantum aucta erat aperti follis capacitas, eodemque constricto, aequalis aëris quantitas per idem foramen iterum erat expellenda, eaque ratione aër renovari potuisset.

21. Experimentum quidem in machina pneumatica primum fuerat institutum, sed cum nullum barometrum fuisset appositum, quo certi essemus externum aërem prohibitum fuisse (13), ideo illud experimentum apposito siphone iterandum esse censuimus; cum vero ea methodus incommoda esset ob multiplices juncturas, quae promte pro quovis

expe-

experimento erant perficiendae, commodiorem apparatum Eques Salutius exhibuit: binos ſcilicet tubos vitreos binis machinae pneumaticae foraminibus, per quorum alterum aër hauriri, per alterum expelli ſolet, firmiter glutinavit, qui quidem tubi ab illis foraminibus diſcendentes, ita protendebantur, ut ad vas aquam continens pervenirent, ibi flexi normaliter erigebantur, ita ut alterum aliquot tranſverſos digitos ſupra aquae ſuperficiem aperiretur, alterum multo altius deſineret: tuborum aperturae conis cartaceis tegebantur, ut aëris introëuntis, aut prodeuntis impetus frangeretur, ex quo vicina flamma extingui potuiſſet: deinde inter binos tuborum ramos in eodem vaſe accenſa candela collocabatur, cujus flamma altero tubo depreſſior, altero elatior erat, & medium fere inter ipſorum altitudinem locum tenebat: poſtremo tubi aqua immerſi, & candela ſimul, campana vitrea tegebantur, cujus limbus aliquot tranſverſos digitos infra aquae ſuperficiem demergebatur, eoque pacto aqua omnem externo aëri in campanam aditum intercludebat. Agitato autem embolo, ut per altioris tubi oſtium aër exſugeretur, & mox per inferioris orificium iterum propelleretur, alterne aqua intra campanam aſcendebat, ac deſcendebat, qui quidem aquae alterni motus externum aërem excludi ſignificabant; at vero depraehendimus candelam ex tali aëris ab inferioribus ad ſuperiora circuitu, ſervari non potuiſſe, & ex contraria aëris directione non magis ſuſtentari; quin imo ejus vita ex hujuſmodi aëris circuitibus, non magis durare viſa eſt, quam ſi aërem immotum relinqueremus: quando autem aquae copia minor in vaſe erat, adeo ut educto embolo trans ipſam bullarum ſpecie externus aër in campanam inſinuari, & eodem reſtituto eadem via expelli poſſet, tunc utique flammam ſervari obſervavimus, ex quibus intelleximus in machina ſuperius deſcripta (15), non certa aëris directione, sed ejuſdem renovatione flammam ſuſtentatam fuiſſe

(e);

(*e*); ex aperturis citra vitrum aeque periisse (16), non quod externus aër admitteretur, sed quod directe nimis aëris unda in flammam irrueret.

22. Neque vero difficile est intelligere, cur per bina foramina, quae verticalia non sint, aut in apparatu §. 11., & 18., aut demum in nostra machina, aër sponte non renovaretur; nam aër ex flamma rarefactus, ac specifice levior a graviori aëre circumposito ad superiora impellitur, nec nisi ea directione e lanterna prodire potest; ut autem expellatur necesse est externum aërem, & quidem per inferius foramen, eidem succedere; nam si externo aëri per superiora tantum foramina aditus pateat, is suo nisu rarefactum aërem, qui contraria directione prodire conatur, intra lanternam coërcebit, nisi tanta fuerit superiorum foraminum amplitudo, ut ingressuro, & egressuro aëri eodem tempore transmittendo sufficiant, quo in casu per ea sola foramina aër renovari poterit, & flamma servari: & hanc quidem theoriam experimento alio de la Grange confirmat (4); nam lanternae ostio inferiori patente, ad ostium superius tubum curvum accommodat, qui si sursum vergit, flammam servat, si deorsum, eandem suffocat, quod scilicet sursum vergens, aëri rarefacto, & ad superiora tendenti aditum praebeat, deorsum directus, aëris rarefacti directioni opponatur, eundemque intra lanternam coërceat. Ex his etiam deducitur, in experimento Equitis Salutii, unico foramine flammam vixisse, non quod foramen superiora modo, modo inferiora teneret (5), sed quod ex agitatione per unicum etiam foramen aër renovaretur, qui, lanterna quiescente, renovari non potuisset.

23. Id igitur commodi habet proposita machina, ut aërem renovet, quando sponte non renovaretur, adeoque iis in locis flammae sustentandae inservire poterit, ubi ob loci figu-

(*e*) Jam aliqua talis machinae species apud Boyleum extabat (nov. exper. de relat. inter flammam, & aërem exp. 4. p. 21.), qui folli communi, & in posteriori parte aperto ad renovandum aërem utebatur.

figuram aër circa flammam sponte renovari non potest, quae ob eam caussam cito suffocatur. Quum vero ea renovatio per quaevis minima foramina eo pacto persici possit, per quae ignis scintillae transmitti nequeunt, machinam eandem utilem esse posse censemus, si quando nocturno tempore pulvis pyrius conficiendus, aut aliquo modo pertractandus sit, cum omni incendii periculo vacet: in ea autem machina valvulas supervacaneas fuisse posteriora experimenta (18, & seq.) demonstrarunt. Et priorem quidem theoriam (15, 16) minus accuratis experimentis (13) innixam missam fecissemus, nisi ejus fama evulgata fuisset. Nostrum igitur esse duximus magnorum virorum exemplo candide rem totam profiteri, eoque libentius id fecimus, ut ostenderemus Cl. Viris, quorum sententias alicubi minus probavimus, nos non contradicendi studio, sed veritatis amore in id adductos fuisse, cum eandem nos in emendandis opinionibus nostris severitatem, quam in aliorum sententiis perpendendis adhibuerimus.

24 Postquam solum aëris circuitum flammae servandae ineptum esse comperimus, tela lanea oleo tartari imbuta tuborum orificium Eques Salutius munivit, ut aër per illam trajectus a vaporibus expurgari posset; Halesii, ut ita dicam, conjectura excitatus (*f*), veruntamen flamma cito interibat. His non contentus superius aperti recipientis ostium ampullae ventre replevit, & commissuras glutinavit, venter autem ex contenta aqua frigidus servabatur, eoque artificio aërem a flamma sub recipiente posita rarefactum, & admixtos vapores refrigerare, ac condensare contendebat, ut flammae vita produceretur; siquidem ex nimia ambientis aëris rarefactione, aut admixtis vaporibus interiret: sed hoc tentamen non minus inutile fuit, quam praecedens, idemque fuit eventus, quando *refrigeratorium*,



(*f*) Exp. 117. p. 232. 233.

& filtrationem simul adhibuit, cum inde flammae duratio sensibiliter producta non fuerit.

25. Tum ego non per telam tantum liquore imbutam, sed per crassum diversorum liquorum stratum aërem flammae circumpositum crebro trajiciendum suasi, cum superioris experimenti (23, 24) apparatus opportunus esset, dummodo brevior alterius tubi ramus, per quem aër in recipiens restituitur, ad liquoris fere libellam frangeretur. Ita enim exhantlato aëre ex altiori ramo, sicque elevato liquore, brevioris rami aperturam liquore ipso tegi oportebat, & propterea aër per eam aperturam impulsus, in recipiens penetrare non potuisset, nisi per superpositum liquoris stratum bullarum specie permearet, qua trajectione non modo a vaporibus expurgari, sed & refrigerari, ac condensari debuisset: ad praeveniendam vero liquoris in breviorem immersum tubum, indeque in antliam pneumaticam irruptionem Eques Salutius ipsum non recta ex antlia in vas aquam continens deduci, sed in arcum flecti curaverat, qui continuus non erat, sed in suprema parte interposita phiala vitrea interruptus, ut in ipsam absorptus liquor proprio pondere deponeretur. His ita paratis aërem per aquam, per oleum, per nitri solutionem, per fortem solutionem salis tartari successive trajecimus, sed flammae recipienti inclusae vita haud sensibiliter inde protracta fuit.

26. Quoniam igitur constiterat non fumo, aut aquosis vaporibus (1, 24, 25), non absorpto aëri, aut destructae ejusdem elasticitati (3, 4), non ipsius rarefactioni, propter quam ad flammam circa elycnium coërcendam ineptus evadat (24, 25), flammae extinctionem clauso in spatio tribuendam esse, unica supererat hypothesis a Physicis proposita; quod scilicet flammae nutrimentum clauso in aëre contentum a flamma brevi absumatur (*g*), & id quidem nutrimen-

(*g*) Quae Boylei conjectura est in suspic. de latent. aër. qualit p. 8, & Musscenb. Essai de Physiq. §. 999., & Laghii Commen. Bonon. t. 4. pag. 88.

mentum a nitrofis falibus per aërem diffufis in primis ortum ducat: quae hypothefis aliquam veri fpeciem praefeferre videbatur, tum ex eo, quod caeteras reijciendas effe experimenta demonftraverant, tum quod pinguia corpora nitrata, ut pulvis pyrius, vel in vacuo boyleano flammam concipiant; fperabam igitur candelam diutius intra claufum fpatium victuram, fi nitro pulverato elycnium, & febum infpergerentur, fed aeque cito extincta eft. Eques vero Salutius rem eandem aliter tentavit. Nam campanae, qua flamma tegebatur, limbum, in nitri fpiritum fumantem immerfit, ut inde erumpentes nitrofi fpiritus per campanam difperfi flammam circumdarent, fed fimiliter flammam perire obfervavit, ac fi aqua, vel liquor alius loco nitrofi fpiritus campanae limbum obtegiffet. Hypothefim itaque confumti pabuli perinde ac caeteras experientia edocti deferendam effe intelleximus.

27. Id nihilominus certum permanere videbatur aërem claufo in fpatio ab inclufa flamma vitiari, cum eamdem diutius alere nequaquam poffet, etfi quale hujufmodi vitium effet, detegi nondum potuiffet: quapropter experiri volui, num aër, in quo flamma fponte extincta fuerat, alteram flammam injectam fuffocaret; proinde fub campanam vitream difpofitam ut §. 3. accenfam candelam per inferiorem aperturam infinuabam, & poftquam fponte extincta fuerat, accenfam aliam per eandem aperturam immittebam: temporis momento fuffocabatur, imo poft aliquot minuta accenfa candela immiffa fimiliter peribat, ex quo confirmatur per unicam etiam amplam campanae aperturam aërem fponte non renovari (23); idque in cauffa effe cur intra ipfum flamma diu vivere non poffit.

28. Cum itaque aërem flamma ita perverti obfervarem, ut poft aliquot minuta temporis eandem indolem retineret flammae exitialem, inquirere praeterea conftitui, an non longiori temporis intervallo, refrigerato aëre, & flam-

mae vaporibus ad latera excipuli ſubſidentibus, priſtinam ſalubremque naturam aër ille recuperaret: quoniam vero aër intra campanam relictus, quae inferiore parte patebat (§. praec.), leviori quacunque vicinorum corporum agitatione ſenſim ſenſimque renovari potuiſſet, idcirco malui ſupra lancem metallicam duobus rotundis foraminibus perviam campanam eandem glutinare. Per alterum foraminum in lance patentium ſipho vitreus mercurium continens traductus fuerat, & cera firmatus, per alterum accenſa candela in recipiens inſinuari poterat, & interim mollis cera, cui candela inſiſtebat, foramen illud obturabat. Extincta itaque candela vidimus mercurium in ſiphone contentum adſcendiſſe, ob condenſationem ſcilicet aëris, qui a flamma fuerat rarefactus, forte etiam ob ejuſdem abſorptionem, & mercurii ſupra libellam ſuſpenſio per tredecim, & ultra horas perduravit, quod nos certiores fecit toto eo tempore exteriori aëri in recipiens aditum denegatum fuiſſe, proinde aërem renovari non potuiſſe. Eo tranſacto tempore, imo & multo antea recipientis cavitas limpida facta fuerat, & ad latera vitri ros fuerat depoſitus ex fumis, vaporibuſque extinctae candelae in liquorem condenſatis. Tum igitur candelam prius extinctam, quae obturaculi inſtar erat, leniter eduxi, ne aër recipiente contentus commoveretur, & accenſam aliam per id foramen in recipiens inſinuavi. Vix flamma intra recipiens penetraverat, cum repente extinguebatur, perinde ac ſi in aquam immergeretur (*h*). Quod cum oſtenderet aërem flamma vitiatum diu id vitium retinere, confirmare videbatur ejuſmodi vitium, neque calori,

(*h*) Haleſius accenſam candelam ſub recipiente poſitam, in quo alia mox extincta fuerat, non ſtatim ſuffocari obſervavit, ſed $\frac{1}{9}$ temporis perdurare, quo prior candela vixerat (pag. 202.). Veruntamen id eveniſſe videtur, quod Auctor recipiens e loco movere, & ab aqua, in quam immerſum erat, eximere debuerit, ut accenſam candelam illi ſubſtitueret, quae mox fuerat extincta, illiſque commotionibus recipientis aërem ex parte ita renovaverit, ut flamma aliquamdiu vivere potuerit.

lori, qui jam dudum diſſipatus fuerat, neque vaporum mixtioni, qui condenſati ſubſederant, eſſe adſcribendum.

29. Poſtquam comperiſſem, aërem per flammam traductum, flammae alendae imparem effici, in lanterna, quam deſcripſi §. 4., duo tantum verticalia foramina aperta relinquebam, & accenſa candela intra ipſam incluſa, ſuperiori foramini flammam admovebam; extinguebatur. Aër ſcilicet ab inferiori foramine ad ſuperius movetur (7); propterea flamma ſuperiori foramini admota aërem recipit per flammam lanternae trajectum, qui prava ſua qualitate eandem ſuffocat ( §. praec. ).

30. Quod ſi inferiori foramini flammam admoverem, candela lanternae incluſa extinguebatur; quod nempe aër per inferius foramen in lanternam penetrans ( 7 ), per admotam flammam traiici cogeretur, a qua ita mutabatur, ut lanternae flammam ſervare non poſſet; extinguebatur autem ſive adpoſita candela ex ſebo eſſet, lanternae vero incluſa ex cera, ſive contra; ſive utraque ex ſebo eſſet, ſive utraque ex cera, ſive aequales, & aequali elycnio praeditae eſſent, ſive alterutra major, majorique elycnio praedita eſſet. Qua propter cum nec alimenti qualitas, nec elycnii magnitudo experimenti exitum immutaverit, videtur aërem per flammam unam trajectum alteri cuicumque alendae aeque ineptum evadere.

31. Quum autem animadverterem, non flammam ſolum, ſed & accenſos carbones (*i*) clauſo in ſpatio ſuffocari, utriuſque phaenomeni eandem cauſſam eſſe ratus, ad inferius lanternae foramen ardentem prunam ita admovebam, ut ab ipſo foramine non nihil diſtaret, & liberum aëri intra lanternam aditum relinqueret; flamma tamen lanternae incluſa ſuffocabatur; quod ſi prunam lanternae includerem, & ad ſuperius lanternae oſtium flammam admoverem, haec protinus extinguebatur.

32.

(*i*) Muſſchenb. Eſſai de Phyſiq. §. 994.

32. Hauksbejus porro fuerat expertus, aërem per candentia metalla trajectum, & intra recipiens collectum, flammae exitiale fuisse. Hac autem methodo praestantissimus Physicus usus est (*K*). Recipiens amplum selegit in superiori parte apertum, cujus apertura lamina cuprea, & interposito molli corio, accurate claudebatur; ex parvo foramine in lamina cuprea aperto tubus erigebatur auricalceus, clavi versatili munitus, ut communicatio inter recipiens, & tubum pro opportunitate induci, vel tolli posset: tubi extremitas opposita in cavitatem crassae mollis cupri insinuabatur, ita tamen, ut inter tubum, & illius massae cavitatem aër penetrare posset; recipiens aëre exhauriebatur: metallica massa interim prunis immersa candebat: clavis aperiebatur: aër in cavum recipiens penetrans per ardens metallum transire cogebatur, a quo ita vitiabatur, ut ablata lamina cuprea tegente flamma in ipsum immersa protinus extingueretur. Quod experimentum cum perpendissem, metalla candentia non aliter aërem vitiasse arbitrabar, quam a flamma, aut accenso carbone nostris in experimentis vitiatus fuisset. Igitur, & inferiori lanternae foramini candens ferrum admovi, ut aër per id foramen irruens ferrum in transitu lamberet. Observavi autem ex ipso ferro lanternae flammam similiter interiisse.

33. Jam vero, si ex vaporum e flamma exhalantium mixtione aër vitiaretur, profecto tot, ac tam diversae substantiae, quibus flamma ali potest, & quae tot diversos halitus emittunt, unum eundemque effectum non praestarent: at demonstravimus non flammas solum diversas, & vario pabulo altas, sed & carbones accensos, imo & candentia metalla proximum, & circumfluentem aërem ita mutare, ut alendae flammae impar evadat. Quapropter calore potius, qui idem est in omnibus hisce corporibus, nec nisi gradu

(*K*) Saggio delle transaz. filosof. del Sig. Dereham t. 3. p. 124.

gradu in ſingulis differre poteſt, quam exhalantibus effluviis, quae mirum in modum in ſingulis diſcrepant, aërem vitiari arbitrabar, eoque magis quod nec condenſatione, nec ſiltratione, nec ullo alio artificio (24, 25), id aëris vitium emendari, aut imminui potuerit.

34. Obſervaverat porro idem Cl. Auctor, aërem per tubos vitreos candentes trajectum non ſimiliter vitiari: quum vero mea experiundi methodo hujuſmodi tentamina facile perſicerentur, libuit & hoc ipſum explorare. Itaque vitri ſolidi maſſam in rudem quandam annuli formam effictam, & extremitati tubi vitrei annexam in ignem injeci, ibidemque retinui donec candeſceret: tum vix ab igne eductam proximae lanternae inferiori foramini admovi, ut aër per candentem annulum tranſire cogeretur: flamma nihilo minus, quam ex candente ferro extincta eſt. Dedimus porro operam in hiſce experimentis, ne candente metallo, aut carbone, aut vitro foramen inferius clauderemus, ſed ad latus foraminis ita aptabamus, ut influentis aëris tranſitum nullo pacto impedirent, adeo ut ſi frigida eodem ſitu aptarentur, nullum incluſae flammae detrimentum afferrent: imo obſervavimus, trajecto per ea candentia corpora aëre, citius, quam eodem intercepto, flammam ſuffocatam fuiſſe. Haec autem experimenta, cum facilia ſint, poterunt qui rebus hiſce delectantur ſuis ipſi oculis eorum veritatem confirmare: id tantummodo caveant velim, ne vitrum nimis tenue ſit, aut non ſatis candens, neve tardius admoveatur; vitrum enim cito calorem amittit, eoque citius, quo tenuius fuerit: unde aëri pervertendo ineptum evadit, quemadmodum experiundo deprehendimus.

35. Quoniam autem vitrum candens effluvia in aërem emittere, aut ex aëre nutrimentum haurire vix veroſimile videtur, ſi ejuſdem fixitatem, & immutabilitatem in igne attendamus, in ea opinione confirmabar, calore potius, quam abſorptis, aut emiſſis particulis aërem labefactaſſe.

36.

36. Sed quae tandem hujuſmodi mutatio eſt ab igne inducta, propter quam aër eidem diutius alendo ineptus ſiat? rarefactionem non eſſe, aut mutatam aliam ſenſibilem qualitatem, tum vitii conſtantia oſtendere videbatur (27), tum Hauksbei teſtimonium, qui in aëre per candentia metalla trajecto nullam ſenſibilium ejuſdem qualitatum mutatam, conſulto inſtitutis experimentis, ſe deprehendiſſe (*l*) teſtatur; tum demum Greenwoodii tentamina, qui aërem putei, in quem demerſa candela extinguebatur, in ſenſibilibus ſuis qualitatibus mutatum minime fuiſſe comperit (*m*). Nihilominus cupiebam aërem, qui per flammam, aut prunam, aut ardens vitrum trajiciebatur, prius per aquam frigidam trajectum refrigerari, antequam ad flammam alendam perveniret, ut rarefactionis ſuſpicio omnis tolleretur. Ad id Eques Salutius per foramen poculi ad fundum pertuſi tubum vitreum trajecit, & ita glutinavit, ut poculum infuſam aquam contineret, poſtea ſuperius tubi extremum in inferius lanternae foramen immiſſum ſimiliter glutinavit, ac demum ad inferiorem aperturam, flammam, prunam, candenſque vitrum identidem admovimus, & flammam lanternae incluſam non minus perire obſervavimus, ac quando haec ad lanternae foramen immediate admovebantur. Quamquam vero aërem trajectum per tubi portionem aquae immerſam refrigerari, ac condenſari omnino debuerat; ipſum tamen Hauksbei experimentum renovare conſtitui, ut de aëris condenſatione eo tutior eſſe poſſem; ſed tubi ardentes, ex impetu irruentis aëris conſtringebantur: ſi vero candens vitrum ad foramen admoveretur, per quod aër in recipiens vacuum penetrare debebat, cito adeo refrigerabatur, ut aër ſufficientem caloris gradum experiri non poſſet, ex eo vel maxime, quod tanta celeritate aër in vacuum recipiens irruat, & tanta proinde celeritate per can-

(*l*) Loc. cit.
(*m*) Lib. mox cit. tom. 5. p. 10. 11.

candens vitrum trajiciatur, ut sufficientem ex ipsius calore mutationem neutiquam pati videatur: idcirco eam methodum deseruimus, eoque libentius, quod simpliciorem, commodioremque Eques Salutius proposuisset, ut scilicet phiala vitrea, longo collo instructa, nudo igni immediate exponeretur. Collo vesicam flacidam circumligavimus, ut aër, qui vi ignis rarefactus e phiala erumpebat, eadem excipi posset; & postea frigore condensatus ex vesica in phialam iterum pelleretur pressione externi aëris, qui eo pacto ab ejusdem cavo arcebatur. Experimentum scilicet expectationi respondit. Nam phiala tamdiu in igne relicta, donec candesceret, vesica intumuit, postmodum, phiala ab igne remota, & refrigerata, pristinam flacescentiam vesica adepta est, fractoque demum inversae phialae collo, & immissa in ejus cavum ardente flamma, protinus extingui observavimus, perinde ac si aër alia flamma corruptus fuisset.

37. Cum vero id experimentum demonstrasset caloris vi talem in minimis particulis aërem componentibus mutationem induci, ut igni sustentando ineptus evaderet; sperare coepi, frigore, quod contrariam mutationem induceret, quaecunque demum ea mutatio esset, pristinam aëris constitutionem restitui posse: et experimentum quidem spem haud frustra conceptam fuisse comprobavit; cum enim candelam accensam per vitreae lagenae breve collum in ipsius cavitatem insinuassem, & accuratissime molli cera colli orificium obturavissem, flammam sponte extingui sinebam, ut aër lagena inclusus corrumperetur: deinde, circumposita glacie, lagenam refrigerari curabam, & per duodecim quidem horas in eodem frigoris gradu detineri; postea, lagena e glacie educta, expectabam, donec ad cubiculi temperaturam ejus calor restitutus esset; & inversa demum lagena, ac reserato collo, accensam candelam in lagenae ventrem intromittebam: flamma aliquandiu viva servabatur; idque experimentum aliquoties eodem eventu interavimus. Quando

 vero

vero per duas, tresve horas duntaxat intra glaciem lagena detenta fuerat, pristinam indolem flammae exitialem contentus aër retinebat: ex quibus intelleximus frigus, & quidem diuturnum requiri ad pravam aëris indolem corrigendam, quae ex ingenti calore orta sit.

38. Idem experimentum etiam in aëre ex ignis exteriori actione corrupto Eques Salutius tentavit: scilicet lagenam vesica obturatam, quemadmodum §. praec. descripsimus, & ab igne paullo ante eductam in comminutam glaciem immersit, ibique per plures horas detinuit, ac similem effectum assecutus est; ut scilicet immissa in inversae, & reseratae lagenae cavitatem flamma, viva servaretur. Quae quidem experimenta, quanquam haud facile in praxim traduci possint ad flammae vitam clauso in spatio protrahendam; novam tamen lucem in physicam quaestionem hactenus obscurissimam afferre videntur, eaque de caussa Physicis haud ingrata futura esse speramus.

39. Adhuc de postremo experimento (37) dubitatio aliqua mihi supererat (jamdiu enim vel nostro periculo didiceram, quanta in experimentis cautela adhibenda sit), quippe etsi cera, lagenae, quae in glaciem immersa fuerat, ostium, qua fieri potuerat accuratione obturassem, nullum argumentum suppetebat, quo certus essem obturaculum omnem externo aëri aditum prohibuisse, in primis quando glaciei frigore, condensato interno aëre, externus in recipiens irruere conabatur. Ut ergo mea haec dubitatio solveretur, vas vitreum propemodum cylindricum elegi, quod undique clausum erat, sed prope summitatem binos tubos continuos habebat, qui in ipsius cavitatem hiabant: tuborum alteri sipho vitreus mercurium continens conglutinatus est, per alterum accensa parva cerea candela in cylindri cavitatem immissa fuit, & interim molli cera, cui candela insistebat, tubum ipsum accurate obturavimus. Flamma per 25.″ aut 30.″ perduravit: post quam vero extincta est, mercurium in

ad-

adnexo ſiphonis crure uno circiter pollice ſupra libellam elevatum fuiſſe vidimus, ſive id ex aëris prius a flammae calore rarefacti condenſatione, ſive ex aliqua etiam ipſius aëris abſorptione oriretur: quando vero vas craſſo glaciei ſtrato undique fere circumdatum, & refrigeratum fuit (iis nimirum exceptis locis, ubi cera tubi obturati fuerant, quae ex glaciei, & aquae attactu a vitro ſecedere potuiſſet) mercurium adhuc tribus, quatuorve pollicibus ſupra libellam elevari vidimus, ex aucta ſcilicet interni aëris condenſatione: addita vero pro opportunitate glacie in ejus locum, quae ſolvebatur, & effluebat, vas in eo ſtatu retinuimus per 6. circiter horas, locus autem mercurii in ſiphone, tum ante admotam glaciem, tum poſt ipſam adhibitam filo notatus fuit: poſtremo e glacie vas eduximus, & in cubiculi temperatura diu reliquimus, ſenſimque ad priorem notam mercurium deprimi obſervavimus, non ultra deſcendere, multo minus ad libellam componi. Ex quo conſequebatur nec aëris elaſticitatem ex eo frigore fuiſſe mutatam (cubiculi enim eadem propemodum temperatura erat) nec exteriori aëri in recipiens aditum toto eo tempore patuiſſe. Tum igitur obturaculum, cui extincta candela inſiſtebat, leniter eduxi, & accenſam aliam immiſi, ipſamque vixiſſe obſervavi, & tamdiu vixiſſe, quam cum recenti aëre vas plenum erat, ut aër ille procul dubio, contractum a priori flamma vitium depoſuiſſet.

40. Boerhaavius porro experimenta plura protulit partim ſua, partim ex aliis Auctoribus ſelecta, quibus probavit, corpora ſulphurea incluſa vaſis, in quae aër non admittatur ex igne extrinſecus admoto, quantumvis vehementi nec inflammari, nec in partes reſolvi poſſe. Quae quidem experimenta, cum ad rem noſtram mirifice faciant, huc afferenda eſſe cenſui. Inquit itaque Vir Celeberimus (*n*).



(*n*) Ch. t. 1. pag. 220.

*Unus, idemque ignis, applicatus eidem corpori, ſed cum diverſis circumſtantiis, mirifice totam ſuam actionem variat, inprimis quidem pro vario admiſſu aëris ſimul in operatione ipſa. Sumſerat carbonem Hookius, incluſerat pyxidi ferreae carbonem, dein operculo, cochlea accurate facta adacta, vas accuratiſſime occluſerat. Sic commiſerat ingenti igni diu. Neque interim tam violenta actione ignis carbo exuſtus erat, ubi eximebatur poſtea. Vid. vitam ejus in poſthumis pag.* XXI. *unde collegerat ſubtilis Philoſophus, aëra eſſe menſtruum, quod agitatum igne, omnia diſſolveret corpora ſulphurea; quum ignis ſine aëre id praeſtare non poſſet: idem in deſtillationibus jam olim Helmontius in carbone ſuo fixo obſervaverat. Et Papinus Recueil des machines pag.* 25. 26.. *Et ſcobem ego lini guajaci ſubtilem, coram vobis, utſi adeo diuturno, adeo violento igne; oſtendi tamen nigerrimam foecem ſuperſtitem retinuiſſe oleum ſibi, nulla ignis potentia ex retorta expellendum. Simulac vero pulverem hunc carbonarium, patina larga exceptum, parva ſcintilla impoſita, examinabam, ſtatim omne nigrum oleum, cum fumo aromatico, cedrino, conſumebatur, & vertebatur ſcobs in cineres incluſos, candidos. Camphoram ſpectate, Auditores. Tota in aëre conſumitur incenſa ſemel, licet aquae innatet. Pone in vaſe vitreo puro, cum alembico impoſito, ſupra ignem, liqueſcit, aſcendit in alembicum, concreſcit in novam, eandemque iterum immutatam camphoram, idemque obſervabitur repetenti ſaepius. Nonne ſulphur vaſis clauſis coercitum, ſublimatur centies, ſemper manens ſulphur idem? Si vero inter ſublimandum rimam vas contraxerit, atque liquefactum ſulphur hac rima aëri contiguum evaſerit, flammam capit ſubito, atque ocyſſime in flammam caeruleam; & acidum fumum reſolvitur. Succinum certe in aëre aperto incenſum totum fere deflagrat, flammam, ignemque alit. Idem ſi ſummo egeris, ſed lento gradu aucto igne, ex retorta in excipulum, aquam, ſpiritum, ſalem volatilem acidum, oleum multiplex conficies, facieſque tandem igne maximo, ut tota ſubſtantia*

*per*

*per collum retortae transcendat, ut saepe quidem praestiti. Ignis igitur sine aëre, vel cum eodem immoto, suffocante, agens in materiem inflammabilem, penitus alia efficit.* Haec cum perpenderem, a summi Viri theoria non nihil recedebam; neque enim aëris immobilitas, aut defectus prohibere posse videbatur, quominus corpora in clauso spatio accenderentur, cum flamma ex iisdem orta, & vasis inclusa, ad tempus aliquod ardere pergat, eoque diutius, quo vasa ampliora fuerint, donec nempe omnis aër in vasis contentus flammae calore fuerit corruptus (27, 28): verosimilius propterea videbatur, exteriorem ignem, interea dum corpora calefacit vasis contenta, conclusum aërem ita pervertere, ut ipsorum inflammationi inservire non posset (26). Cum vero cogitarem specula caustica etiam, quae validissima sunt, calorem omnem in angustum spatium ita colligere, ut ad paucorum pollicum a foco distantiam calor mediocris omnino sit, (*o*) per ipsa corpora vasis inclusa calefieri vehementer posse conjiciebam, quin ambiens aër ex calore corrumperetur, atque adeo eo pacto, & inflammari, & ex inflammatione in partes resolvi debere; neque vanam conjecturam fuisse experimentum comprobavit: cum enim in amplam lagenam vitream recenti aëre plenam carbonem, sulphur, camphoram, successive immisissem, &, accurate obturato lagenae orificio, contenta corpora foco radiorum solarium per causticam lentem (*p*) collectorum exposuissem, ex unoquoque horum corporum fumum erumpentem observavi, & carbonis superficiem pluribus in locis in cinerem redegi, & ex camphora demum, ac sulphure veram flammam excitavi, quibus rite perpensis, extra controversiam positum esse videbatur, igne exterius adhi-

(*o*) Calor in distantia 5. pol. a foco speculi Vilettiani vix est 190. graduum ther. Faranehir. (Boerh. Ch. r. 1. p. 129.) quanto igitur minor erit in eadem distantia a foco speculorum, aut lentium multo debiliorum? quanto minor in majoribus ab iisdem focis distantiis?

(*p*) Lens, qua usus sum, focum habebat ad distantiam semipedis circiter, convexo-convexa, erat quinque transversos digitos latitudine aequabat.

adhibito corpora vaſis incluſa inflammari non poſſe, ex eo, quod interea dum corpora ipſa ſuſcepto paullatim calore ad inflammationem diſponuntur, ambiens aër ſimul calefactus vitietur, & alendae flammae impar efficiatur: Et aërem quidem calore corruptum ipſum eſſe, qui ſulphuris inflammationem in vaſis clauſis impediat, confirmat Equitis Salutii experimentum, qui cum ſulphur in phiala anguſti colli contentum, igni impoſitum non inflammari cerneret, mutato ope follis aëre, flammam emiſiſſe obſervavit. Poſtremo pulvis pyrius, qui in corrupto ex calore aëre flammam emittit, is exterius admoto igne etiam accenditur (*q*): in corrupto autem aëre pulverem pyrium flammam emiſiſſe obſervavi, dum in recipiens, in quo paullo ante flamma ſponte extincta fuerat, quemadmodum §. 28. pyrobolum ex eodem confectum, & accenſum immiſi; nam intra id recipiens tamdiu arſit, quamdiu omnis pulvis conſumtus fuiſſet.

41. At Nobilis Boyleus non ſolum corpora vaſis vitreis incluſa, radiis lentis ope collectis, combuſerat; verum etiam paſtillo uſus fuerat ejus naturae, ut ſemel accenſus in libero aëre totus conſumeretur, atque obſervaverat, ubi ſemel paſtillus hujuſmodi vaſi incluſus ope lentis accenſus fuiſſet, eo majorem ipſius quantitatem combuſtam fuiſſe, quo vas amplius eſſet, aut aër denſior (*); adeo ut paſtillus tum demum extinctus fuiſſe videatur, quando ipſius calore omnis aër in eodem vaſe concluſus vitiatus fuerat, & igni communi alendo ineptus evaſerat.

42. Aër porro factitius e corporibus eductus immiſſam flammam ſuffocat, ut Cl. Phyſici obſervarunt (*r*), cujus quidem phenomeni ratio ex noſtris principiis deduci facile poſſe videtur; cum enim calore aër pervertatur, ita ut flam-

(*q*) Inter corpora inflammabilia ea tantum, quae nitrata ſunt in clauſo vaſe flammam concipere poſſe Macherus monet Ch. pratiq. t. 2. cap. 1. proc. 5.
(*r*) Boyle exper. phyſico-mech. cont. 2. artic. 5. exp. 3.
(*) Exper. phyſico-mech. cont. 2. artic. 7. exp. 2. 3.

flammae infensus evadat, cumque aër factitius, vel actuali igne educatur, vel effervescentia, aut putrefactione, quos motus utrosque ingens caloris gradus comitatur, vel demum e corporibus eruatur, quae ignis, calorisque actionem passa fuerunt, (*f*) patet et ipsum alendae flammae imparem esse debere (36).

43. Quod si nostra experimenta cum aliorum experimentis conferre pergamus, videmus Halesium aërem respirando jam ineptum, sola per telam laneam oleo tartari imbutam filtratione, iterum respirationi aptum reddidisse (*t*), cum contra nos aërem sustentandae flammae imparem, ne trajectione quidem per crassum ejusdem liquoris stratum, ad pristinam indolem restituere poterimus (25), quod significare videtur, aliam caussam esse interitus animalium in clauso spatio, aliam extinctionis flammae; hanc ex mutatione ab igne inducta oriri, illum ex admixtis haeterogeneis vaporibus, animali exitialibus, qui a filtris retineri possint: quae quidem sententia Boylei experimento confirmari videtur, qui cum accensam flammam simul cum animali intra recipiens clausisset, flammam cito perire observavit, & interim animal nullum adhuc molestiae indicium praebuisse; adeo ut id vitium, quod aërem flammae sustentandae ineptum reddiderat, nullum animali incommodum afferret (*u*).

44. Equidem inversam propositionem experimento explorans, observavi aërem, intra quem animal perierat, sustentandae flammae ineptum fuisse; cum enim in recipiente eo modo disposito, quo §. 28. passerculus inclusus fuisset, & periisset ex impedito novi aëris accessu, iis symptomatibus, quae a Cl. Viris jamdudum adnotata sunt, obturaculum eduxi, quo lancis foramen obturabatur, &, immersa

(*f*) Vid. suite de recherches sur le fluid. élast. par le Cheval. Saluce.

(*t*) Statiq. des vegetaux. exp. 116.

(*u*) Nova experimenta intra aerem, & flammam vitalem animalium exp. 1., & 2. Et Cl. Lagh. Comment. de Acad. Bonon. tom. 4. p. 88. in opusc., qui tamen observat passerculi mortem ex flammae vaporibus 36. celeriorem fuisse. ibid. p. 81.

mersa accensa candela in recipientis cavitatem, protinus extingui observavi, quod demonstrat aërem animali alendo ineptum, etiam ineptum fieri alendae flammae; forte quod vitium duplex contrahat ex animalis mora, alterum ab admixtis vaporibus, ex quo animali exitiale fiat, alterum actione pulmonum animalium, quos toties subire cogitur, ex quo flammae perniciosus evadat: et duplex quidem id vitium inesse videtur in aëre a carbonibus ardentibus, aut candentibus metallis corrupto ($x$), qui non tantum flammae exitialis est, ut aër a flamma alia vitiatus, sed & ipsis animalibus infestus deprehenditur.

45. Illud vero quaeri posset, num respiratus aër flammae exitialis evadat ex eo tantum, quod pulmonum calorem passus sit; num quod intra pulmonem, aut animale corpus ex alia caussa id vitium contraxerit. Nam quod ignis, & calor aërem sustentandae flammae imparem reddat (36), id non prohibet, quominus et aliae caussae id ipsum facere possint. In Physicis enim ita comparatum est, ut si errores vitare velimus, vix ultra experimenta progredi liceat: veruntamen haud leviter novae caussae excogitandae, aut admittendae sunt, ubi jam certa suppetat, cum compendiosa natura, una caussa, innumeros, ac mire diversos effectus producere soleat. Sequenti igitur experimento quaestionem definiendam suscepi. Ranam poculo vitreo, supra lancem metallicam (28) glutinato, inclusam, suffocavi: vixit autem per tres ferme dies. Una a morte hora lancis foramen aperui, & per ipsum accensam candelam in poculi cavitatem immisi: protinus extincta est, non secus ac in superiori experimento (44) contigisset. Cum vero ranae calor vix ullus sit, tuto concludi posse censeo, perversionem aëris ex suffocatis animalibus ortam calori minime tribuendam esse, ac proinde non una, sed pluribus de caussis nativam

($x$) Boyle l. c. exp. 2. Hauksbé l. c.

tivam aëris compagem ita vitiari, ut flammae alendae impar evadat: quamobrem nec definire audemus, num simile artificialis aëris vitium soli calori sit adscribendum (42), licet diuturno frigore perinde fuerit emendatum, ac si ex calore productum fuisset (ζ).

46. Neque solum quando animal demum interiit (44, 45), sed etiam multo ante aërem flammae infestum deprehendi; adeo ut deinceps, non flammam solum, sed et ipsas immissas prunas statim suffocaret. Quoniam vero aër in quo flamma extincta est, prunis non aeque noxius observatur, concludendum videtur, prunas, & animalium vitam (43) a leviori vitio, ex brevi flammae calore inducto, minus affici, dum ex graviori ejusdem speciei vitio, quod aut animalium vita, aut calor diuturnus prunarum induxit, vehementer laedantur. In eam itaque opinionem adductus sum, ut putem, ab exhalantibus vaporibus utique animalia in clauso vase plurimum laedi, sed multo magis a vitio, & perversione ipsius aëris haud absimili illi, quam diuturnus calor inducere potuisset. Profecto, quando experimentum Halesii (43), quo filtrationis ope, aër respirationi diutius aptus servatur, ita ab ingenuo Auctore propositum video, ut nec ipse satis eidem fidere videatur (*a*), multo minus vaporibus tribuendum censeo, quam principio fueram opinatus (43). Huc accedit quod vitium, quo aër ex suffocato animali inficitur, similiter diuturnum esse comperio, ac illud, quod ex extincta flamma nascitur (28). Nam Boyleus aërem, in quo animal ante quatuor horas interierat immisso alteri animali, trium minutorum spatio, mortem attulisse scribit (*b*),



(ζ) Vid. suite des recherches sur le fluide élast. &c. par le Chev. Saluce.

(*a*) Mais je ne sçai, si cela ne doit pas être attribué a quelque passage insensible que l' air avoit pû se faire à travers les ligatures, je ne me souciai pas même de répéter l'experience, crainte de m' altérer la poitrine en respirant si souvent ces vapeurs nuisibles. Statiq. des veget. exp. 116.

(*b*) Exp. physico-mechan. cont. 2. artic. 3. exp. 11.

quo certe tempore, animalis prius extincti vapores, qui aquosae indolis esse censentur (c) condensari, ac colligi debuissent: aër quoque factitius, undecim diebus, postquam e quercu fuerat eductus, vim veneficam retinuerat, qua immissum animal cito suffocavit (d): ex quibus erui posse videtur, aërem factitium, aut ex suffocatis prunis, aut animalibus depravatum multo gravius labefactari, ideoque non flammae solum, sed & prunis, & animalibus perniciosum esse; contra, qui flamma vitiatus fuit, flammae quidem nocere; sed, cum levius id vitium sit, quanquam ejusdem speciei, animalia, aut prunas manifeste laedere neutiquam posse. Caeterum, dum mutatae aëris constitutioni animalium in ipso inclusorum mortem tribuendam esse conjicio, minime inficior, collectis quoque vaporibus, animalia ipsa laedi plurimum posse; cum tam perspicua, tam vehemens sit diversorum effluviorum actio in nervosum systema, ut nonnisi temere in dubium revocari possit. Hoc tantum suspicor, vapores ab animalibus emanantes, ipsorum vitae minus, quam mutatam aëris crasim infensos esse. Quid quod flammam, cujus extinctionem in clauso aëre mutatae aëris constitutioni adscribendam probavimus (36), a quibusdam tamen odoratis effluviis laedi Laghius testatur (e)?

47. Sed jam forte nimis conjecturis indulsimus: enim vero nobis visum est, propositam quaestionem non prius solvi posse, quam plura in eam rem experimenta tentata fuerint, quorum inspecto eventu, difficultas tandem omnis evanescat. Primo enim definire oporteret, quousque varii alitus ex odoriferis corporibus emanantes, & per interclusum aërem dispersi, flammae in ipsum immersae nocere possint: nocere enim Laghius innuit, quantum vero noceant mi-

(c) Haller prim. lin. Physiol. §. 438.
(d) Hales apud Desagulierium. Vid. sag. delle transaz. filosof. tom. 4. pag. 61. Vim vero veneficam aëris artificialis ab aliis corporibus educti demonstravit Boyle l. c. art. 5.
(e) L. c. pag. 85.

minime proponit; deinde opus eſſet Haleſii experimentum (43) commodiori methodo, qua ſuperius uſi fuimus, (25) iterum inſtituere, omniaque ipſius phaenomena, quae ad hanc rem facere poſſent diligenter adnotare: poſtea definire, an vitium, quod ex ſuffocato animali aër contrahit, quodque, non ſecus ac vitium ex flamma natum, diuturnum eſſe innuimus (46), glacie ita emendari poſſit, quemadmodum id, quod ex flamma provenit (37, 38, 39): experimento demum decernere opus eſſet, num aër, qui ignis exterius admoti calorem diu paſſus eſt, poſtea refrigeratus (36) immiſſis animalibus incommodum afferat: experimenta, verbo dicam, omnia in flamma capta, mutato congruenter apparatu, in animalibus inſtituenda eſſent. Quandoquidem vero hujuſmodi experimenta multum operae, & temporis requirerent, quod nobis in praeſentiarum deficit, cum noſter hic liber jam ſub praelo ſit; idcirco in tempus aliud differenda eſſe ſtatuimus.

# DISSERTATIONES,

E T

OPUSCULA VARIA.

# MÉMOIRE
## DU CHEVALIER SALUCE
### *Sur la nature du fluide Elaſtique qui ſe dévelope de la Poudre à Canon.*

LEs ſentimens de ceux qui ont traité de la Poudre à Canon ſont ſi partagés ; leurs raiſonnemens ſont ſi brillants, & paraiſſent ſi bien apuiés ſur le vrai, qu'il n'eſt pas poſſible au prémier coup d'œil de ſe décider ſur l'eſtime qu'on en doit faire. Le plan que je me propoſe de ſuivre dans une matiére auſſi épineuſe, & ſi peu éclaircie, eſt de procéder le plus méthodiquement qu'il me ſera poſſible à un nombre d'expériences déciſives, dont je donnerai une exacte déſcription, après avoir expoſé en racourci le ſentiment de pluſieurs grands Hommes : des reſultats des expériences, je tâcherai de déduire toutes les conſéquences qui dépendent de l'entiére connaiſſance de la nature du fluide, & de la ſoigneuſe obſervation des phénoménes ; c'eſt par la voie d'un enchainement naturel de faits, que je chercherai de ſatisfaire aux doutes qui partagent les Phyſiciens ; je n'entrerai dans aucune queſtion qui ait rapport à la pratique : pluſieurs célébres Auteurs excités par l'importance, & la difficulté du ſujet y ont éxercé leurs talents. On a pû calculer l'action de ce fluide ſans en connaître la nature, & on a tiré de cette Téorie tous les ſecours, dont la pratique avoit beſoin. C'eſt un bonheur pour les hommes qu'ils puiſſent avec la ſeule connaiſſance des effets naturels, en faire des applications heureuſes aux uſages les plus utiles à la Société avant d' être assurés des causes qui les produisent.

I. Les opinions sur la cause de la force, & des effets de la Poudre à Canon, se peuvent réduire à deux principales: Mr. le Chevalier Isaac Nevvton (*a*), qu'on peut considérer comme Auteur de la prémiére, pense que la subite & véhémente raréfaction de la matiére qui s'enflame, & s' échause très-vivement la convertit en vapeurs, dont l' action violente se manifeste par une explosion & une force prodigieuse; car dit-il le charbon & le souffre qui s' allument aisément, mettent en feu le salpêtre, dont l' ésprit converti en fumée détonne avec violence. Les vapeurs qui provienent du volatil du souffre ne contribuent pas peu à en acraitre la force. Mr. Wolff, & plusieurs autres Auteurs pensaient de même (*b*).

2. La seconde opinion est, que, lorsque la Poudre prend feu il se dévelope un fluide, dont l' élasticité était auparavant fixée, & qui gardait la forme d' un corps solide.

3. Quoique ce principe soit adopté par plusieurs illustres Auteurs, Mrs. Boyle (*c*), Papin (*d*), Jean Bernoulli (*e*), de la Hire (*f*), Belidor &c., tous ne con-

(*a*) Pulvis tormentarius, quum ignem concipit, abit in fumum flammantem. Carbo nimirum, & sulphur ignem concipiunt facillime nitrumque accendunt; nitrique spiritus inde in vaporem rarefactus, proruit cum explosione; similiter ac aquae vapor ex aeolipila. Sulphur quoque, ut est volatile, convertit se itidem in vaporem; id quod explosionem illam adauget . . . . . . . . . . Explosio itaque pulveris tormentarii oritur ex celeri ac violenta actione, qua tota permixtio subito, & vehementer calefacta, rarefit utique, vel convertit se in fumum sive vaporem: qui denique vapor actionis istius violentia eodem tempore candefactus, flammae nimirum speciem exhibet. Quaest. x. post. opt. pag 139. 140.

(*b*) Musch. Phys. tom. 1. pag. 432.

(*c*) Op. var. pag. 36.

(*d*) Trans. phil.

(*e*) Op. om. tom. 1. Diss. de efferv. & ferm. pag. 34.

(*f*) Diss. de l' an. 1702.

conviennent pas ſur la nature & ſur la maniére dont ce fluide agit. Quelques uns, comme Mr. Halles (*g*) ont conclus, par la reſſemblance de ce fluide avec celui qu'ils avaient tiré d'autres corps ſolides par la diſtillation, ou autres procédés, qu'il était du véritable air, ſans qu'ils ſe ſoient cependant attachés à en faire une analiſe particuliére, telle, que parait l'éxiger la délicateſſe & l'importance du Sujet.

4. Mr. Muſchembroek (*h*), dont l'habileté dans les expériences eſt univerſellement reconnue, révoque en doute que le fluide élaſtique des corps ſoit du véritable air, & fait pluſieurs objections au ſentiment de Mr. Halles: & il a tâché même par pluſieurs raiſons de démontrer que ce n'était point en effet du véritable air.

5. L'autorité des grands Hommes que je viens de citer, ne ſervant qu'à augmenter mon incertitude ſur la nature de ce fluide, j'ai eu recours, comme je me l'étais propoſé, aux expériences, unique reſſource pour démêler le vrai, & terminer les différens.

6. Je démontre par leur ſecours, en prémier lieu, l'inſufiſance de la prémiére opinion; je fais enſuite une ſcrupuleuſe analiſe du fluide, en obſervant à peu près la méthode qu'a tenu Mr. Halles (*i*) pour en éxaminer d'autres; je réponds en troiſiéme lieu aux objections de Mr. Muſchembroek, en aportant les raiſons que l'expérience m'a fournies.

7. Je me flatte par ce procédé de fournir des nouvelles lumiéres ſur la Téorie Phyſique de la Poudre, & d'avoir par un cours naturel & ſimple donné la ſolution d'autres queſtions, ſçavoir de la maniére, avec laquelle la Poudre prend feu dans le vuide, & des effets qui en réſultent;

En

(*g*) Stat. des veg. trad. par Mr. de Buffon pag. 164. & ſuiv., & 369.
(*h*) Coll. Acad. tom. 1. add. 38.
(*i*) Stat. des veg. pag. 166.

8. En prémier lieu personne n'ignore que les vapeurs aqueuses perdent leur élasticité, & se convertissent en eau en refroidissant. Je prouverai donc, dans la suite, que le fluide élastique de la Poudre ne perd que peu de son élasticité, (*) & que par conséquent il ne saurait être produit par des vapeurs aqueuses.

9. Mr. Halles informé des expériences de Mrs. Boyle, Papin, Bernoulli &c., & connaissant (*K*) d'ailleurs la grande quantitè d'air que contient le salpêtre, & eu égard aux raisons ci-devant citées ne balance point à croire que ce ne soit du véritable air. Cette conjécture cependant est combattue ainsi que je l'ai dit par les raisons suivantes de Mr. Muschembroek.

I. Que ce fluide n'est point propre à la respiration;

II. Qu'il n'entretient point le feu.

10. Mr. Halles (*l*) soupçonne, que ces effets soient produits par le mélange des exhalaisons sulfureuses, puisqu'il a démontré qu'elles absorbent l'air, & qu'elles nuisent à la respiration; en preuve de quoi, il compare (*m*) ses résultats avec ceux de Mr. Hauksbee: pour m'en convaincre, je n'ai pas hésité de tenter la séparation des exhalaisons sulfureuses, & faire ensuite la comparaison entre les propriétés du fluide qui en serait purgé, & celui qui les contiendrait encore; C'est pourquoi j'ai fait les expériences suivantes.

11. Prémiérement pour m'assurer que ce fluide nuit aux animaux.

EXPE-

(*) J'ai dit que le fluide élastique de la Poudre perd un peu de son élasticité, parceque vraiment dans l'expér. que j'en ai fait, il est arrivé quelque changement à la hauteur du mercure, j'aurois cependant lieu de douter que l'atmosphére ait pu y contribuer, c'est pourquoi je me reserve à la répliquer avec plus de diligence.

(*K*) Voïés stat. des veg. pag. 159.

(*l*) Ibid. pag. 163.

(*m*) Ibid. pag. 197.

## EXPERIENCE PREMIERE.

JE mis ſous un récipient [a] en forme de bouteille placé ſur la Pompe Pneumatique, une Caille: de l'embouchure [b] du récipient ſortait un tube de verre, à l'extrémité [c] du quel était un petit flacon où j'avois mis de la Poudre, je lutai fortement toutes les jointures, je pompai enſuite par deux éxantlations une partie de l'air, après leſquelles je fis placer un flambeau, dont la flamme répondait éxactement à l'endroit [d] où était la Poudre dans le flacon: je continuai aprés cela à pomper l'air juſqu'à ce que l'animal donna des marques aſſurées qu'il alloit toucher à ſa fin, terme précis où la Poudre devait s'enflammer, & que j'avais trouvé après pluſieurs repriſes, en effet elle prit feu, & le fluide paſſant dans le récipient étouffa l'animal; il eſt donc prouvé que le fluide élaſtique de la Poudre eſt pernicieux & mortel. Fig. 1. pl. pr.

12. Les phénoménes que j'ai obſervé dans cette occaſion ſont les ſuivans;

I. Qu'une flamme lente & bleuatre ſe manifeſte lorſque la poudre commence à entrer en fuſion;

II. Que lorſqu'elle s'embraſe totalement elle ne fait point de bruit, & ſe convertit en une nuée opaque.

Les difficultés que j'ai rencontré dans l'éxécution de cette expérience, m'ayant obligé de la repéter bien des fois, j'ai eu occaſion de remarquer les précautions qu'il y faut apporter, je ne parlerai que des principales, pour épargner de peine à ceux qui ſe donneront celle de la répliquer.

I. Le flacon doit être bien ſec, car ſans cela il ſe fend dans le tems que la poudre prend feu; pour remédier à cet inconvénient, j'ai coutume de l'expoſer petit à petit à un feu plus violent; & je l'y tiens pendant long tems, ayant ſoin pour prévenir la fuſion, de le changer de ſituation.

2. La

II. La Poudre doit être pilée finement, parceque la propagation du feu étant interrompue dans le vuide, les grains ainsi divisés en parties fort petites sont plus contigus, & le feu s'y met plus aisément tout à la fois, lorsqu'ils sont échauffés.

III. La plus grande facilité de s'enflammer que la Poudre pilée a dans l'air libre, & la perte de force qu'elle parait souffrir par cette opération, (à ce qu'on peut juger par le faible détonnement qu'elle fait) m'ont déterminé à en mettre une plus grande quantité dans le flacon; en effet l'événement a très-bien confirmé mon attente, & on peut en mettre davantage sans risquer de briser les vaisseaux, ce qui est d'autant plus utile dans cette expérience, où il faut un assés grande quantité de fluide, sans qu'il soit possible de faire un grand vuide à cause que l'animal périrait.

Cet effet surviendrait-il peut-être parceque la vitesse, avec laquelle l'air recouvre son élasticité trouvant moins de résistance, à cause que les parties n'adhérent plus entr'elles par un si fort contact, la force en serait amoindrie?

13. Cette façon de mettre le feu à la poudre en échauffant le verre me parait la plus propre, & la plus simple, outre les avantages qu'elle a d'être plus active, & d'en allumer une plus grande quantité, parce qu'elle peut embrasser une surface plus étendue.

Ce qui n'arrive pas en se servant d'un miroir, ou d'un verre ardent, puisque par ce moyen on n'embrase que les grains, sur lesquels tombent les rayons, car il faut remarquer ainsi que je l'ai dit en passant seulement (II.) que la Poudre dans le vuide ne s'embrase qu'après qu'une forte chaleur l'a mis en fusion; le miroir, ou verre ardent ne produit cet effet qu'aux peu de grains qu'il affecte; & l'application d'un fer rouge sous le disque de la platine de la Pompe, est une maniére trop pénible, qui a en

partie

partie le désagrément ci-devant indiqué, & qui plus est, elle ne peut convenir dans des expériences aussi délicates.

14. Par ce qui a été dit on voit clairement en prémier lieu, que, ce n'est qu'en vertu de la résistance de l'air extérieur que la Poudre détonne, puisque dans un air fort rare, l'explosion se fait sans détonnement.

En second lieu, que l'air qui se trouve dans les intervales de la Poudre grainée sert à la propagation du feu, car l'on sait, comme je l'ai dit, (13) qu'en se servant du miroir &c., ou du fer rouge l'on ne peut enflammer toute la Poudre, & si la communication du feu n'était point interdite l'inflammation de peu de grains devrait suffire pour mettre le reste en feu, & c'est aussi pour cette raison que je la fais piler, comme je l'ai fait observer, précaut. II.

15. La conjécture de Mr. Halles ne me paraissait pas moins fondée après l'expérience que je venais de faire, & dans l'intention de mettre fin à toute controverse, je commençai par refléchir sur la nature de chaque individu, afin de me former du fluide l'idée la plus juste, & ayant considéré que le salpêtre contient un alkali fixe & un acide volatil, que le souffre est composé d'un acide, d'une matiére huileuse & inflammable, que le charbon enfin contient une grande quantité de phlogistique; j'imaginai que le fluide serait constitué par des parties omogénes à celles des substances primitives, & en conséquence de ce jugement, je m'attachai à tenter la séparation des éxhalaisons pernicieuses par une voye chimique.

16. Persuadé donc que ce fluide contiendrait essentiellement des parties acides vitrioliques & nitreuses, & une grande quantité de matiéres grossiéres, (15) j'eus recours à une substance alkaline qui retenant par une grande affinité les prémiéres, interdiraient à l'aide des filtres le passage aux autres, & pour m'en convaincre je fis l'expérience suivante.

# EXPERIENCE SECONDE.

Fig. 1. pl. pr.

JE fis à l'apareil de la prémiére expérience la variation seule du tube, qui sert de communication du récipient au flacon : j'en employais un fait en plusieurs piéces (*r r r r*) qui entraient l'une dans l'autre : chacune de celles, qui s'emboitaient avoit un double filtre de gaze bien enduit d'huile, ou de sel tartre; celui qui entrait dans le récipient était ou triple, ou bien d'une toile plus serrée. Les jonctions furent soigneusement lutées, & je procédai ensuite de la même maniére, que dans la prémiére expérience. La Caille par son abatement & ses contorsions, ménaçait une fin prochaine. Le baromêtre était à 20. pouces environ, lorsque la poudre s'alluma; l'animal aussitôt prit sensiblement de nouvelles forces, loin de démeurer couché sur son ventre les yeux mourants, il se leva promptement, enfin il donna des marques non équivoques de l'alternative qu'il venait d'essuyer. Le baromêtre dans ce moment baissa de 10. pouces environ; les exhalaisons denses & noires ne passerent point au delà du prémier filtre: ayant répliqué cette expérience sans changer les filtres à cause de la grande quantité d'huile de tartre, dont je les avais enduits, j'en eus les mêmes résultats: j'ai trouvé après avoir ôté les filtres que le plus proche du flacon contenait une espéce de calcination en assés grande quantité, dans celui qui suivait un sel cristallisé, au troisiéme un peu du même sel, dans le dernier enfin je ne pû rien apperçevoir de sensible.

17. Le sel qui se trouve dans le second & troisiéme filtre suivant le jugement que j'avais formé (16), devait contenir un espéce de nitre regénéré, car l'on sait (*n*) que de l'inflammation du souffre combiné avec le salpêtre, il s'éléve

(*n*) Voy. Macquer. el. de Chim. prat. pag. 60.

s' éléve des vapeurs, dont l' odeur eſt mélée d' un eſprit ſulfureux & d' eſprit de nitre, & ſi on les raſſemble, on trouve effectivement que la liqueur eſt un mélange d' acide nitreux, d' acide de ſouffre & d'eſprit ſulfureux, ce qui étant combiné avec l' alkali du tartre, doit donner un compoſé de nitre regéneré & de tartre vitriolé, j'en ai mis ſur un charbon en feu, & j' ai obſervé qu' il petillait, & fuſait ſenſiblement, ce qui a ſervi à me confirmer dans mon idée; faute d' une quantité ſuffiſante de ce ſel, je n' ai pu l' aſſujettir à d' autres éxamens.

18. Cette expérience comparée avec la précédente fait connaître que les exhalaiſons infectées dont le prémier fluide n' était pas purgé, ſont celles qui on fait périr l' animal, ce qui étant auſſi arrivé à Mr. Muſchembroek lui a donné lieu de douter que les fluides élaſtiques ſoient du véritable air.

19. J' ai emploié le même artifice pour obſerver ſi le fluide ainſi purgé perd une auſſi grande partie de ſon élaſticité qu' en a perdu celui que Mr Hauksbee avait gardé, ce qui devait ſervir à établir avec plus de fondement l' iſſue de mes recherches, quoique d' ailleurs Mr. Halles ait (*o*) vu qu' en diſtillant le ſalpêtre à travers l' eau, l' air qui s' en dévelopait conſervait ſon élaſticité, ce qui n' arrivait pas ſans cette précaution, car alors ſes réſultats aprochaient de ceux de Mr. Hauksbee.

## EXPERIENCE TROISIEME.

UN robinet qui paſſait à travers la platine, & communiquait avec le récipient était ſoigneuſement luté à la partie ſupérieure (*o*) du tube d' un baromêtre, qui en cette occaſion ne touchait point au mercure, mais il Fig. 2. pl. pr.

 était

(*o*) Stat. des veg. pag. 168.

était recourbé en forme de ſiphon: le reſte de l'apareil était conforme à celui de l'expérience ſeconde. Je fis le vuide, & le mercure ſe trouvait environ à 27. pouces de hauteur, lorſque la Poudre prit feu; les oſcillations du mercure étant ceſſées, enſorte qu'on le voyait 10. à 12. pouces plus bas, je fermai le robinet, & je marquai avec un petit ſil de ſoye ciré le point où répondait la ſurface ſupérieure adhérante aux parois du tube, j'ai laiſſé enſuite pendant long tems cet apareil ſans que j'aie aperçu de changement bien ſenſible à la hauteur du mercure, & par conſéquent à l'élaſticité du fluide, de ſorte que j'ai lieu de croire que ces petites variations aient été cauſées par celles de l'atmoſphére, ou ſi elles dépendaient encore du fluide, c'eſt peut être, parceque je ne l'ai pas aſſés purgé des exhalaiſons vicieuſes; car au lieu d'enduire les ſiltres d'huile, j'aurais pû mettre du ſel de tartre qui les aurait retenu plus ſûrément & en plus grande quantité; je ſuis d'autant plus porté à le conjécturer que les différences furent de peu de conſéquence, tandis que Mr. Hauksbee (*p*) a trouvé que le fluide qu'il avait gardé dixhuit jours perdit en ce tems $\frac{19}{20}$ de ſon élaſticité une ſeule 20.$^{me}$ reſtant conſtante.

20. Par la comparaiſon des expériences de Mr. Hauksbee, & de Mr. Halles, il eſt d'autant plus plauſible de conclure que le fluide élaſtique de la Poudre perd une grande partie de ſon élaſticité à cauſe des exhalaiſons ſulfureuſes, & des vapeurs acides; car Mr. Halles démontre que les exhalaiſons, & les vapeurs de cette nature fixent, ou abſorbent une quantité déterminée d'air, & que le reſte ne ſouffre plus d'altération, ce qui eſt préciſément conforme à l'iſſue qu'ont eu les expériences de Mr. Hauksbée, que j'ai cité ci-devant, *expér.* 3.

EXPE-

(*p*) Expér. Phiſ. mec. pag. 83.

# EXPERIENCE QUATRIEME.

LE peu d'altération que, j'observai dans l'élasticité du fluide me détermina à profiter de cet apareil pour éxaminer un autre caractére du véritable air, il s'agissait d'observer dans quelle raison il se comprimerait, & par l'infusion que je fis de nouveau mercure dans la jambe recourbée, je trouvai qu'il se comprime à peu près de même que l'air commun en raison des poids. Fig. 2. pl. pr.

21. Mr. Muschembroek n'ayant point parlé de l'élasticité du fluide, & ayant remarqué seulement pour ainsi dire en passant la différence des raisons de compression entre ce fluide & l'air comun, je me ne suis pas trop attaché & n'ai pas pris toutes les précautions nécessaires pour décider incontestablement ces deux points; il est cependant bon de savoir que Mr. Halles (*q*) ayant comprimé de ces airs factices a trouvé aussi qu'ils suivent la loi de l'air comun.

22. La seconde objection de notre illustre Auteur ne peut qu'embarasser très-fort un Physicien par la grande difficulté qu'on rencontrerait dans l'arrangement d'une expérience qui ne laissa plus rien à désirer d'autant plus qu'il a laissé ignorer celles, par lesquelles il a trouvé que le fluide élastique éteint la flamme; elle n'est cependant pas à mon avis aussi solide, que l'autre, quoiqu'elle présente au premier coup d'œil quelque chose de plus frappant, qui parait décider la question; l'altération que la chaleur violente cause à cette propriété de l'air, lors même qu'il est comun & naturel, nous tire de l'admiration où nous pourrions être en voyant dans le fluide élastique de la Poudre tous les caractéres de l'air comun, excepté celui-ci; l'on sait que l'air en

(*q*) Stat. des veg. pag. 164. & 369.

en paſſant par la flamme, ou autour des corps que l'on a fait fortement échaufer ne ſçaurait plus être propre non ſeulement à entretenir un autre flamme, mais auſſi à nourrir quelque feu que ce ſoit (*r*).

24. Delà il pourrait très-bien reſulter que l'air nouvellement développé de la Poudre, quoique rendu à ſon prémier état d'air comun, (en le purgeant des parties qui altéraient ſi fort ſes propriétés qu'on avoit lieu de douter avec quelque fondement de ſa véritable nature) cet air dis-je ſe dégageant des obſtacles qu'il n'aurait pu ſurmonter ſans le ſecours du feu, qui lui fait recouvrer ſubitement ſon élaſticité, peut être ne peut-il aquérir ce caractére, de même que l'air échaufé dans un récipient ſans rien perdre de ſa gravité ſpécifique, de ſon élaſticité &c. eſt cependant privé entiérement de cette vertu.

25. Après tout ce que nous venons de dire, il parait qu'il n'y a plus aucun lieu de douter de la nature du fluide élaſtique de la Poudre; l'air par conſéquent eſt le grand mobile des effets ſurprenans, que nous voyons, & le violent reſſort, qui agit ſi puiſſamment, en vertu des particules ignées qui le mettent en action: de ſorte que l'air contenu dans chaque grain fait le principe virtuel de la force, celui qui ſe trouve dans les intervales des grains ſert de véhicule à l'inflammation, & l'extérieur cauſe le détonnement par la colliſion & l'impulſion que ſouffrent ſes particules de celles qui ſe développent avec une viteſſe prodigieuſe à l'inflammation de la Poudre.

26. Puiſqu'après avoir analiſé le fluide élaſtique en queſtion il eſt démontré en conſéquence que l'opinion des Auteurs cités (1) quelque ingénieuſe & brillante qu'elle ſoit, n'eſt pas confirmée par l'expérience, il eſt tems d'éxaminer les ſentimens de ceux dont j'ai parlé (2) pour en dé-

méler

(*r*) Com. pag.

méler les circonſtances qui font naître les différences entr' eux ſur la maniére, avec laquelle ils font agir l'air, qu' il reconnaiſſent tous comme la cauſe des effets de la Poudre, ſans qu' ils en aient aſſuré la vérité par des expériences.

I. Mr. Jean Bernoulli (s) prétend, que le feu met en action l' air condenſé dans chaque grain.

II. Mr. de la Hire (t) ajoute que non ſeulement l'air des grains eſt mis en agitation par le feu, mais auſſi celui qui ſe trouve dans les interſtices.

III. Mr. Belidor enfin généraliſe l' opinion, & ne met point de reſtriction à l' action de l' air, d' où l' on peut inférer qu' il comprend auſſi l' air extérieur.

27. Par ce qui a été dit on doit former le jugement ſuivant.

I. Que Mr. Bernoulli par ſon avis n'aſſigne que la ſource du fluide qui fait l' activité intrinſéque de la Poudre, ſans que tous ſes effets ordinaires ſoient compris en effet ſous l' idée qu' il avait de l' action de l' air, car il n' aurait pu combiner par ce ſeul ſecours le détonnement & la propagation du feu avec l' exploſion.

II. Mr. de la Hire à quelque avantage ſur Mr. Bernoulli, puiſqu' il pourrait indiquer la propagation du feu, cependant ſon opinion eſt encore imparfaite.

III. Mr. de Belidor n' ayant ſpécifié aucune eſpéce d' air, enſorte, qu' il n' entre point à déterminer l' action particuliére qu'elle éxerce à chaque phénoméne, a donné un explication conforme à la vérité de la cauſe générale des effets ordinaires, qui n' eſt en ce cas que la combinaiſon des trois différentes propriétés, avec leſquelles l'air influë ſur les phénoménes mentionnés.

28. Il

(s) Op. om. tom. pag. 34.
(t) Diff. an. 1702.

28. Il ſera moins difficile à préſent d'avoir avec plus de préciſion pluſieurs des connuës néceſſaires aux Mathématiciens pour reſoudre tous les Problêmes balliſtiques, & les autres de cette nature, puiſqu'en ſe ſervant des mêmes artifices, dont j'ai uſé, il ne s'agira plus que d'obſerver les différences des réſultats cauſées par les altérations apportées au fluide. Les expériences n'en ſeront ſans contredit pas moins délicates: l'utilité réelle qu'on y trouvera, ſera celle d'avoir une baze conſtante, dont on a déja bien des notions aſſurées, vu que pluſieurs de ſes propriétés caractériſtiques ſont ſoumiſes à des loix immuables, qui ſont ſous l'empire du Calcul: quoique ces données ayent été priſes juſqu'à préſent, (de l'aveu de Mr. Euler dans ſes notes à Mr. Robins) plutôt hipotétiquement à cauſe des grandes difficultés que l'on rencontre, cependant bien des ſavans ſe ſervant des obſervations plus aprochantes du vrai, ont répandu de grandes lumiéres ſur ce ſujet, non ſeulement par la réſolution de pluſieurs Problêmes, mais encore par les méthodes qu'ils ont fourni pour reſoudre les autres Problêmes poſſibles.

29. Mr. Nevvton eſt le prémier qui aie recherché la courbe que trace un corps pouſſé par la force de la Poudre en ſupoſant la réſiſtence de l'air proportionelle aux quarrés des viteſſes, & aprés bien des ſoins il l'a déterminée par aproximation. Mr. Jean Bernoulli en donna enſuite une ſolution plus ample & plus éxacte. Mr. Beniamin Robins après avoir trouvé que la viteſſe, avec laquelle l'air ſe précipite dans le vuide eſt moindre que celle, avec laquelle ſe meut un projectile pouſſé par la force de la Poudre, a déterminé la réſiſtence de l'air preſque en raiſon des cubes, & Mr. D'Alembert rapportant ce principe dans ſon excellent ouvrage ſur la réſiſtence des fluides lui fait une ingénieuſe application du Calcul; Mr. Euler enfin a donné dans ſes notes à Mr. Robins & dans

dans une Diſſertation particuliére, (*u*) tout ce que l'on peut trouver de plus complet à préſent: il y a même ajouté des méthodes, & des formules pour reſoudre les cas poſſibles. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail ſur ces ſortes d'applications, une telle digreſſion étant tout à fait étrangére au ſujet que je me ſuis propoſé.

(*u*) Mém. de l'Ac. R. des Sc. de Berlin tom. 6.

# RECHERCHES
## SUR LA METHODE
## *DE MAXIMIS, ET MINIMIS*
## PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

1. LES Géométres ſavent depuis long-tems, que lorſque la premiére différentielle d'une variable quelconque diſparoit ſans que la ſeconde diſparoiſſe en même tems, elle devient toujours un *maximum*, ou un *minimum*; & en particulier elle eſt un *maximum*, ſi ſa différentielle ſeconde eſt négative, & un *minimum*, ſi cette différentielle eſt poſitive. Si la différentielle ſeconde diſparoit en même tems que la premiére, alors la quantité n'eſt ni un *maximum*, ni un *minimum*, à moins que la troiſiéme différentielle ne diſparoiſſe de même, dans lequel cas la propoſée deviendra un *maximum*, ſi la différentielle quatriéme ſera négative, & un *minimum*, ſi elle eſt poſitive, & ainſi de ſuite. En général, pour qu'une quantité ſoit un *maximum*, ou un *minimum*, il faut que les ordres ſucceſſifs des différentielles, qui s'évanouiſſent enſemble, ſoient en nombre impair, & alors elle eſt ſûrement un *maximum*, ou un *minimum*, ſelon que la différentielle qui ſuit la dernière évanouiſſante ſe trouve négative, ou poſitive. Voyez Maclaurin, traité des fluxions p. 238. & 857.

2. Tout ceci ſuppoſé & bien entendu, que $Z$ repréſente une fonction algébrique des variables $t$, $u$, $x$, $y$, &c., & qu'on ſe propoſe de la rendre un *maximum*, ou un *minimum*. Soit ſelon les regles ordinaires

$dZ$

$dZ = pdt + qdu + rdx + ſdy +$ &c., & l'on aura d'abord cette équation
$pdt + qdu + rdx + ſdy +$ &c. $= 0$. Mais comme la relation entre $t$, $u$, $x$, &c. eſt encore indéterminée, de même que celle de leurs différentielles $dt$, $du$, $dx$ &c., & que d'ailleurs l'équation donnée doit être vraie quel que ſoit leur rapport; il eſt évident que pour les chaſſer tout à fait de l'équation, il faut égaler ſéparément à zero chaque membre $pdt$, $qdu$, $rdx$ &c., d'où l'on tire autant d'équations particuliéres qu'il y a de variables ſavoir $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ &c. Par le moien de toutes ces équations on trouvera les valeurs de chaque inconnue, $t$, $u$, $x$ &c. qui ſubſtituées dans la fonction propoſée $Z$ la rendront un *maximum*, ou un *minimum*.

3. Paſſons maintenant à l'examen de la ſeconde différentielle. En ſuppoſant, ce qui eſt permis, les premiéres différentielles $dt$, $du$, $dx$ &c. conſtantes, l'on aura
$d^2Z = dpdt + dqdu + drdx + dſdy +$ &c.
Soit $dp = Adt + Bdu + Ddx + Gdy$
$dq = Bdt + Cdu + Edx + Hdy$
$dr = Ddt + Edu + Fdx + Idy$
$dſ = Gdt + Hdu + Idx + Ldy$
ce qui donnera
$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2 + 2Gdtdy + 2Hdudy + 2Idxdy + Ldy^2$.
Pour commencer par le cas le plus ſimple ſuppoſons qu'il n'y ait qu'une ſeule variable $t$, de ſorte que $d^2Z = Adt^2$; on voit d'abord que, puiſque $dt^2$ eſt toujours poſitif, la différentielle $d^2Z$ doit avoir le même ſigne que la quantité $A$; donc ſi $A$ eſt poſitif $Z$ ſera un *minimum*, & ſi $A$ eſt négatif il ſera un *maximum*; ſi $A = 0$ on ſuivra les regles données §. 1.

4. Les variables contenues dans $Z$ ſoient deux, ſavoir $t$ & $u$; alors $d^2Z = Adt^2 + 2Bdtu + Cdu^2$. Il paroit au premier aſpect bien difficile de connoître ſi cette expreſſion $d^2Z$ doit être poſitive, ou négative, ſans qu'on ait le rapport de $dt$ à $du$, qui n'eſt pas donné; car puiſqu'en changeant ce rapport la fonction $d^2Z$ doit auſſi varier, il ſemble indubitable qu'elle pourra auſſi paſſer du poſitif au négatif, & du négatif au poſitif, pendant que les quantités $A$, $B$, $C$ reſtent les mêmes. Qu'on donne cependant à la propoſée $Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$ cette forme $A\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2$; & on verra que, comme les quarrés $\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2$, & $du^2$ ont toujours le même ſigne $+$, toute la quantité ſera néceſſairement poſitive ſi les deux coëficiens $A$ & $C - \frac{B^2}{A}$ ſont poſitifs, & au contraire elle deviendra négative, lorſque ceux-ci ſeront tous deux négatifs, quel que ſoit le rapport de $dt$ à $du$. On aura donc pour le cas du *minimum* $A > 0$ $C - \frac{B^2}{A} > 0$ ſavoir $C > \frac{B^2}{A}$, ou $CA > B^2$ ce qui donne de même $C > 0$; à moins donc que les quantités $A$, $B$, $C$ n'aient ces conditions $A > 0$, $C > 0$, & $AC > B^2$ la propoſée $Z$ ne pourra pas être un *minimum*. En ſecond lieu on trouvera pour le *maximum* $A < 0$ $C - \frac{B^2}{A} < 0$ ſavoir $C < \frac{B^2}{A}$, $CA > B^2$, puiſque $A$ eſt négatif; ce qui donne encore $C < 0$; donc les conditions pour le *maximum* ſeront en partie les mêmes, & en partie précifément contraires à celles du *minimum*.

5. Si

5. Si $A$ ou $C$, ou toutes deux font $= 0$ fans que $B$ le foit auffi, la condition de $AC > B^2$ ne pourra pas fubfifter, ainfi la quantité propofée ne deviendra jamais un vrai *maximum*, ou *minimum*; la même chofe arrivera toutes les fois que $A$, & $C$ feront de figne contraire; car puifque $B^2$ eft toujours pofitif la condition de $AC > B^2$ devient impoffible. Si $B$ s'évanouiffoit encore en même tems que $A$, ou $C$; $d^2 Z$ fe trouveroit réduite au cas d'une feule variable, & par conféquent pourroit être de nouveau un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un, ni l'autre, felon ce qu'on a dit pour le premier cas. Enfin fi la quantité $d^2 Z$ étoit toute $= 0$, favoir $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, il faudroit recourir à la différentielle troifiéme; que fi celle-ci fe trouve n'être pas égale à zero, la quantité $Z$ ne peut être ni un *maximum*, ni un *minimum*; & au contraire fi elle évanouit en même tems que la feconde on cherchera tout de fuite la quatriéme; & fi elle n'eft pas évanouiffante il fera facile par la méthode dont nous nous fommes fervi ci-devant de connoître fi elle eft pofitive, ou négative, ce qui déterminera de nouveau le *maximum*, ou le *minimum*.

6. Lorfque les variables font trois, favoir $t$, $u$, $x$ la différentielle $d^2 Z$ prend cette forme $d^2 Z = A\,dt^2 + 2\,B\,dt\,du + C\,du^2 + 2\,D\,dt\,dx + 2\,E\,du\,dx + F\,dx^2$ qu'on réduira d'abord à

$$A\left(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right) du^2$$

$$+ 2\left(E - \frac{BD}{A^2}\right) du\,dx + \left(F - \frac{D^2}{A}\right) dx^2$$

Soit pofé $C - \frac{B^2}{A} = a$, $E - \frac{BD}{A^2} = b$, $F - \frac{D^2}{A} = c$, & on aura $d^2 Z = A\left(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A}\right)^2 + a\,du^2 + 2\,b\,du\,dx + c\,dx^2$; qu'on opére à préfent

fur

ſur ces trois derniers membres, comme on a fait ci-deſſus §. 4., & toute la différentielle propoſée $d^2 Z$ deviendra $A\,(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A})^2 + a\,(du + \frac{b\,dx}{a})^2 +$ $(c - \frac{b^2}{a})\,dx^2$; or les quarrés $(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A})^2$, $(du + \frac{b\,dx}{a})^2$, & $dx^2$ étant toujours poſitifs, toute la différentielle ſera de même poſitive ſi les coéficiens $A$, $a$, & $c - \frac{b^2}{a}$ ont chacun le ſigne $+$; on a donc pour le *minimum* les conditions ſuivantes $A > 0$, $a > 0$, $ca > b^2$, ou en remettent au lieu de $a$, $b$, $c$, leurs valeurs, $A > 0$; $C - \frac{B^2}{A} > 0$, $(C - \frac{B^2}{A}) \times (F - \frac{D^2}{A}) > (E - \frac{BD}{A})^2$ ſavoir $A > 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2) \times (FA - D^2) > (EA - BD)^2$, d'où il réſulte encore $C > 0$, $F > 0$, & $FA > D^2$. On trouvera par les mêmes principes pour le *maximum* $A < 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$, & par conſéquent $C < 0$, $F < 0$, & $FA > D^2$.

7. Si les quantités $A$, & $C$ évanouiſſent ſeules, ou toutes deux, ou une ſimplement, la ſeconde condition devient impoſſible; ſi c'eſt $F$ qui s'évanouit, alors la troiſiéme devient impoſſible; car $(CA - B^2) \times - D$ qui eſt néceſſairement négatif, à cauſe de $CA > B^2$ doit toujours ſe trouver moindre de $(EA - BD)^2$, d'où il ſuit que $Z$ ne ſauroit être un *maximum*, ou un *minimum*, ſi $A$, $C$, $D$ priſes ſéparément, ou enſemble comme on voudra ſont égales à zero. Si par l'évanouiſſement des termes la différentielle $d^2 Z$ ſe reduiſoit à deux variables, ou à une ſeulement, elle tomberoit dans le ſecond cas, ou dans le premier, & on devroit ſuivre les regles données §. 3., & *ſuiv.* Enfin ſi toute la $d^2 Z$ ſe trouvoit égale à zero, &

que

que la différentielle troisiéme ne soit pas de même égale à zero, on seroit sur que la proposée $Z$ ne pourroit jamais devenir ni un *maximum*, ni un *minimum*; & quand cette différentielle troisiéme évanouiroit avec la seconde, par des transformations semblables à celles que nous avons pratiquées, on pourroit dans la quatriéme différentielle distinguer les cas du *minimum*, & du *maximum*, & ceux qui sont inutiles.

8. On peut étendre la même théorie aux fonctions de quatre, ou plus variables. Quiconque aura bien saisi l'esprit des réductions que j'ai employées jusqu'ici, pourra sans peine découvrir celles qui conviendront à chaque cas particulier. Au reste pour ne pas se méprendre dans ces recherches, il faut remarquer que les transformées pourroient bien venir différentes de celles que nous avons données; mais en examinant la chose de plus-près on trouvera infailliblement que quelles qu'elles soient, elles pourront toujours se réduire à celles-ci, ou au moins y être comprises.

9. Comme je crois cette théorie entiérement nouvelle, il ne sera peut-être pas inutile d'ajouter les réflexions suivantes. Quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction proposée $Z$; si on les regarde chacune en particulier, & qu'on cherche le *maximum*, ou *minimum* qui lui convient pendant que toutes les autres demeurent les mêmes, on trouvera à part les premiéres différentielles $p\,dt$, $q\,du$, $r\,dx$ &c., dont chacune étant égalée à zero, nous donneroit les mêmes équations que ci-dessus, $p = 0$, $q = 0$, $r =$ &c. §. 2. De la même maniére passant aux différentielles secondes, ont trouveroit celles-ci séparément $A\,dt^2$, $C\,du^2$, $F\,dx^2$, $L\,dy^2$ &c., & par conséquent si $A$, $C$, $F$, $L$ &c. sont toutes positives, ou négatives, on pourroit croire que cela suffit pour que les valeurs de $t$, $u$, $x$ &c. tirées des équations $p = 0$,

$q = 0$

$q = o$ *&c.* rendent néceſſairement la propoſée $Z$ un *minimum*, ou un *maximum*. Il eſt vrai en effet que par rapport à chacune de ces variables conſidérées à part la quantité donnée $Z$ devra toujours être la plus grande, ou la plus petite; mais eſt-il certain que ce qui vaut pour chacune priſe ſéparément doive auſſi valoir pour toutes enſemble? Examinons la choſe plus intimément.

10. Que la propoſée $Z$ contienne les ſeules variables $t$ & $u$, & on pourra la regarder comme l'ordonnée à une ſurface, dont $t$ & $u$ ſont les deux autres; donc la queſtion dans ce cas ſe reduit à trouver la plus grande, ou la plus petite ordonné d'une ſurface, dont l'équation eſt donnée, ſavoir $dZ = p\,dt + q\,du$. Si l'on fait $u$ conſtant, elle ſe reduit d'abord à $dZ = p\,dt$, & dans ce cas elle exprime toutes les ſections de la même ſuperficie paralléles à l'axe des $t$, à meſure que la quantité $u$ reçoit des valeurs différentes. Soit donc poſé $p = o$, & on aura §. 2. une valeur de $t$ qui donnera la plus grande, ou la plus petite ordonnée $Z$ dans chacune de ces ſections paralléles; mais puiſque $u$ eſt conſtant, ſi l'on différentie de nouveau la $dZ$ on a $d^2 Z = A\,dt^2$, & par conſéquent on jugera du *maximum*, ou *minimum* par la ſeule valeur de $A$, après y avoir cependant ſubſtitué à la place de $t$ la valeur que fournit l'équation $P = o$. Savoir ſi $A$ ſe trouve poſitive, ou négative quelle que ſoit la valeur d'$u$, ou bien ſi en changeant $u$, elle peut auſſi changer de ſigne, on conclura dans le premier cas que toutes les dites ſections ont un *maximum*, ou un *minimum*, & dans le ſecond qu'elles ont entre certaines limites un *maximum*, entre d'autres un *minimum*. Si $A$ eſt $= o$, quelle que ſoit la valeur de la conſtante $u$, alors aucune des dites ſections n'aura ni un *maximum*, ni un *minimum*. Mais ſi $A$ devient ſeulement $= o$, lorſque $u$ a de certaines valeurs données, dans ces cas ſeulement les ſections correſpon-

refpondantes feront deftituées du *maximum*, ou du *minimum*. Le lieu de toutes ces ordonnées qui font un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l' un ni l' autre fera contenu dans l' équation $p = o$, en aiant égard à la feule variabilité de $u$, elle formeront donc dans la même fuperficie une fection qui fera à fimple, ou à double courbure, & qui fera déterminée par les deux équations conjointes $d Z = p d t + q d u$ & $p = o$, ou $d Z = q d u$ & $p = o$. On voit par là, que pour trouver le *maximum*, ou le *minimum* de la furface entiére, il faudra chercher la plus grande, ou la plus petite ordonnée qui convient à cette même fection; on aura donc de nouveau $q = o$, ce qui donnera la valeur de l'autre variable $u$.

11. Paffons maintenant à la différentielle de $q$; elle a été d' abord fuppofée $= B d t + C d u$ §. 3.; mais puifque dans ce cas $t$ eft déterminé par $u$ dans l'équation $p = o$, ou bien dans fa différentielle $A d t + B d u = o$, $d t$ eft $= - \frac{B d u}{A}$, ce qui rend $d q = (- \frac{B^2}{A} + C) d u$; il refulte donc que fi $- \frac{B^2}{A} + C$ eft pofitif, favoir fi $C > \frac{B^2}{A}$ l'ordonnée fera la moindre; fi $C < \frac{B^2}{A}$ elle fera la plus grande, & fi $C = \frac{B^2}{A}$ elle ne fera ni l'une, ni l'autre, à moins que les conditions réquifes dans les différentielles des genres plus élevés ne foient remplies. Or en reflechiffant fur ces *maximum* & *minimum*, il fera aifé de comprendre que l'ordonnée $Z$ ne pourra pas être un *maximum* entre toutes les autres, à moins qu' elle ne foit la plus grande de toutes celles qui font contenues dans la fection determinée par $d Z = q d u$, & de plus que toutes les ordonnées qui compofent cette même fection ne foient encore elles mêmes des *maximum* dans les fections

d paral-

parallèles correſpondantes. §. 10. On prouvera de même que la quantité $Z$ ne ſauroit être abſolument un *minimum* ſans qu'elle ſoit de même un *minimum* dans la ſection qui contient tous les *minimum*. Car dans tous les autres cas l'ordonnée ſeroit ou la plus grande, ou la plus petite d'entre celles qui ne ſont ni les plus grandes, ni les plus petites, ou bien entre les plus grandes, ou les plus petites, elle ne ſeroit ni la plus grande, ni la plus petite, ou enfin elle ſeroit la plus grande d'entre les plus petites, ou au contraire, ce qui ne donne pas un vrai *maximum*, ou *minimum* comme on cherche. De tout ceci je conclus donc qu'après avoir tiré des équations $p = 0$, $q = 0$, les valeurs de $t$ & $u$, & les avoir ſubſtituées dans $A$, & dans $C - \frac{B^2}{A}$ il faut pour que $Z$ ſoit un vrai *maximum*, que $A$ ſoit négatif, & $C < \frac{B^2}{A}$, ſavoir $CA > B^2$; & au contraire ſi $Z$ doit être un vrai *minimum* on doit trouver $A$ poſitif, & $C > \frac{B^2}{A}$, ou $CA > B^2$, conformément à la théorie générale expliquée §. 4., & *ſuiv.*

12. Si au lieu de conſidérer d'abord $u$ conſtant & $t$ variable, on avoit fait $u$ variable & $t$ conſtant, on ſeroit parvenu aux déterminations ſuivantes $C < 0$, & $AC > B^2$, pour le *maximum* $C > 0$, & $AC > B^2$, pour le *minimum* ce qui revient au même. Au reſte cette méthode que nous venons d'employer pour découvrir les conditions des *maximum* & *minimum* dans les fonctions à deux ſeules changeantes, eſt également applicable à toutes les autres fonctions plus compoſées, elle a même l'avantage d'être plus analitique, & plus directe que la première, c'eſt pourquoi je tâcherai ici de la développer dans toute ſa généralité.

13. So-

13. Soient les variables contenues dans $Z$ en tel nombre qu'on voudra ; je ne conſidére d'abord qu'une variable ſeule, & je tire par la différentiation l'équation pour le *maximum*, ou *minimum* qui lui convient ; puis en paſſant à la différentielle ſeconde, je trouve les conditions qui déterminent la propoſée à être un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un ni l'autre. Après cette premiére opération je ſubſtitue dans $Z$, ou dans ſes différentielles ſimplement la valeur de la premiére variable trouvée, & je procéde ſur un autre variable de la même maniére ; enſuite mettant de nouveau dans la fonction propoſée $Z$ la valeur qu'on aura trouvée pour cette ſeconde variable, on paſſera à l'examen d'une troiſiéme variable ; & ainſi de ſuite &c. Soit $t$ la premiére variable qu'on veut conſidérer dans $Z$, & on aura $dZ = p\,dt$ ; & $d^2Z = A\,dt^2$ ; d'où $p = 0$, & $A > 0$ pour le *minimum* ; $A < 0$ pour le *maximum* §. 1. Que $t$ & $u$, ſoient à préſent toutes deux variables, il en réſultera $dZ = p\,dt + q\,du$ qui à cauſe de $p = 0$ ſe reduit à $dZ = q\,du$, d'où l'on tire $d^2Z = (B\,dt + C\,du)\,du$ ; mais puiſque $p = 0$ ; $dp$ le ſera auſſi, & par conſéquent $A\,dt + B\,du = 0$ ; ce qui donne $dt = -\frac{B\,du}{A}$ ; cette valeur ſubſtituée dans $d^2Z$ la changera en $d^2Z = \left(-\frac{B^2}{A} + C\right)du^2$, j'aurois donc $q = 0$ ; & $-\frac{B^2}{A} + C > 0$ pour le *minimum*, & $-\frac{B^2}{A} + C < 0$ pour le *maximum*, ſavoir, puiſque $A$ eſt poſitif dans le premier cas, & négatif dans le ſecond, en multipliant par $A$, il réſultera toujours la même condition de $AC > B^2$. Si outre les deux précédentes il y a encore une troiſiéme variable $x$ à conſidérer, je cherche la valeur de $dZ$ eu égard à ces trois variables $t, u, x$, & je trouve $dZ = p\,dt +$

$q\,du + r\,dx$ ce, qui à cauſe de $p = 0$, $q = 0$ ſe change en $dZ = r\,dx$; donc la différentielle ſeconde $d^2 Z$ ſera $= (D\,dt + E\,du + F\,dx)\,dx$. A préſent par le moyen des équations $p = 0$, $q = 0$, ou bien de leurs différentielles $A\,dt + B\,du + D\,dx = 0$, & $B\,dt + C\,du + E\,dx = 0$ je cherche des valeurs de $dt$ & $du$ en $dx$, & je trouve

$dt = \frac{BE - CD}{AC - B^2}\,dx$; $du = \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,dx$ je les ſubſtitue dans l'expreſſion de $d^2 Z$; ce qui me donne.

$d^2 Z = \left(\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F\right)dx^2$ Il réſulte donc en premier lieu pour le *maximum*, ou *minimum*. $r = 0$; enſuite

$\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F > 0$ pour le *minimum*, & $< 0$ pour le *maximum*, ou bien en ôtant le dénominateur $AC - B^2$ qui eſt toujours poſitif, on a $2\,BDE - CD^2 + AE^2 - FB^2 + ACF > 0$ pour le *minimum*, & $< 0$ pour le *maximum*. Soit multipliée cette expreſſion par $A$ qui eſt poſitif dans le premier cas, & négatif dans le ſecond, & on aura

$2\,ABDE - ACD^2 - A^2E^2 - AB^2F + A^2CF > 0$ ſoit pour le *maximum*, ſoit pour le *minimum*, ſavoir $(CA - B^2) \times (FA - D^2) > (EA - BD)^2$. On ſuivra le même procédé pour un plus grand nombre de variables.

14. Cette méthode étant générale pour quelque nombre de variables que ce ſoit, ne ſera pas bornée au ſeules fonctions algébriques, mais pourra encore s' étendre avec ſuccès aux *maximum* & *minimum* qui ſont d' un genre plus élevé, & qui appartiennent à des formules intégrales indéfinies. Je me reſerve de traiter ce ſujet que je crois d' ailleurs entiérement nouveau dans un ouvrage particulier que je prépare ſur cette matiére; & dans lequel après

avoir

avoir exposé la méthode générale, & analitique pour résoudre tous les problêmes touchant ces sortes de *maximum*, ou *minimum* j'en déduirai, par le Principe de la moindre quantité d'Action, toute la Mécanique des corps soit solides, soit fluides.

15. Je finirai ce mémoire par quelques exemples des plus simples qui éclaircissent la théorie qu'on vient d'établir. Soient tant de corps qu'on voudra parfaitement élastiques, & rangés en ligne droite sans se toucher; supposons que le premier vienne choquer le second avec une vitesse donnée $c$, le second avec la vitesse acquise du premier choque le troisiéme, & ainsi de suite, les masses du premier & du dernier étant données, on demande celles des corps intermédiaires, afin que le dernier reçoive la plus grande vitesse possible. Soit $a$ la masse du premier, & $b$ celle du dernier; soient ensuite $t$, $u$, $x$, $y$ *&c.* les masses intermédiaires inconnues; par les loix du choc on trouvera la vitesse comuniquée par le premier corps $a$ au second $t = \frac{2ac}{a+t}$, celle que donne celui-ci au troisiéme $u = \frac{2act}{(a+t)(t+u)}$ & ainsi de suite; donc la vitesse que reçevra le dernier $b$ sera exprimée par $\frac{2catuxy \ldots\ldots\ldots\ldots b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y) \ldots\ldots\ldots}$ expression qui doit devenir un *maximum*. Pour en trouver plus aisément la différentielle, qu'on la suppose $= Z$, & prenant les logarithmes d'une part, & de l'autre on trouvera $l\,2ca + lt + lu + lx + ly +$ *&c.* $- l(a+t) - l(t+u) - l(u+x) - l(x+y) -$ *&c.* $= lZ$ ce qui donne par la différentiation $\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} +$ *&c.* $- \frac{dt}{a+t} - \frac{dt+du}{t+u} - \frac{du+dx}{u+x} - \frac{dx+dy}{x+y} -$ *&c.* $= \frac{dZ}{Z}$; d'où en mettant ensemble, & reduisant au même dénominateur les

les termes affectés des mêmes différentielles l'on tire $dZ = \frac{Z(au - t^2)dt}{t(a+t)(t+u)} + \frac{Z(tx - u^2)du}{u(t+u)(u+x)} + \frac{Z(uy - x^2)dx}{x(u+x)(x+y)} +$ &c. On aura donc en premier lieu pour le *maximum*, ou *minimum* les équations suivantes $au = t^2$; $tx = u^2$; $uy = x^2$ &c. qui donnent les analogies $a : t = t : u$, $t : u = u : x$, $u : x = x : y$ &c., savoir $\div\!\div\; a : t : u : x : y : \ldots\ldots\; b$; d'où l'on voit que toutes les masses doivent constituer une progression géométrique, dont les deux extrémes sont les données $a$ & $b$. Pour juger à présent du *maximum*, ou *minimum* soit fait d'abord pour abréger $\frac{Z}{t(a+t)(t+u)} = \alpha$; $\frac{Z}{u(t+u)(u+x)} = \beta$; $\frac{Z}{x(u+x)(x+y)} = \gamma$ &c. on aura $p = \alpha(au - t^2)$; $q = \beta(tx - u^2)$; $r = \gamma(uy - x^2)$ &c. donc $dp = (au - t^2)\,d\alpha + \alpha(adu - 2tdt)$; $dq = (tx - u^2)\,d\beta + \beta(xdt + tdx - 2udu)$; $dr = (uy - x^2)\,d\gamma + \gamma(ydx + udy - 2xdx)$ &c. Or comme les termes $a$, $t$, $u$, $x$, $y$ &c. doivent être en progression continue si l'on nomme $1 : m$ la raison constante d'un antécédent quelconque à son conséquent on trouve $t = ma$, $u = m^2a$, $x = m^3a$, $y = m^4a$, &c.; de plus $\beta = \frac{\alpha}{m^3}$ $\gamma = \frac{\alpha}{m^6}$ &c., lesquelles valeurs substituées dans les expressions précédentes les reduiront à $dp = \alpha a(du - 2mdt)$;

$$dq = \alpha a\left(dt - \frac{2du}{m} + \frac{dx}{m^2}\right); \qquad dr = \alpha a$$

$\left(\frac{du}{m^2} - \frac{2dx}{m^3} + \frac{dy}{m^4}\right)$; & ainsi des autres. On aura donc $A = -2m\alpha a$; $B = \alpha a$; $C = -\frac{2\alpha a}{m}$; $D = 0$; $E = \frac{\alpha a}{m^2}$; $F = -\frac{2\alpha a}{m^3}$; $G = 0$; $H = 0$; $I = \frac{\alpha a}{m^4}$ &c.

On

On voit par là en premier lieu que $A$ eſt négatif, & que par conſéquent la propoſée doit être un *maximum* ſi les autres conditions ſe trouvent remplies. Or $AC = 4\alpha^2 a^2$, & $B^2 = \alpha^4 a^4$ donc 1$^{mo}$ $AC > B^2$; $AC - B^2 = 3\alpha^2 a^2$ $FA - D^2 = \frac{4\alpha^2 a^2}{m^2}$; $EA - BD = -\frac{2\alpha^2 a^2}{m}$, donc

$$(AC - B^2)\times(FA - D^2) = \frac{12\alpha^4 a^4}{m^2}, \text{ \& } (EA - BD)^2$$

$= \frac{4\alpha^4 a^4}{m^2}$, & par conſéquent 2$^{do}$ $(AC - B^2)\times(FA - D^2) > (EA - BD)^2$. S'il n'y a que deux maſſes intermédiaires $t$ & $u$, il ſuffit d'avoir égard à la premiére de ces conditions, s'il y en a trois il faut encore conſidérer la ſeconde; s'il y en avoit pluſieurs autres il faudroit avoir recours à autant de conditions qu'il y a de variables. Au reſte dans ce problême on les trouvera toutes remplies, ſi on veut bien prendre la peine de pouſſer plus loin le calcul; de ſorte qu'on peut franchement aſſûrer, que lorſque les maſſes intermédiaires quel que ſoit leur nombre ſont telles qu'elles forment une progreſſion géométrique entre les deux extrémes données, la viteſſe que reçoit la derniére par leur moyen eſt toujours la plus grande poſſible. Ce problême a été traité par Mr. Huguens le premier, & depuis par beaucoup d'autres Géométres; mais ſans avoir aucunement égard aux nouvelles déterminations, que nous avons cependant trouvées néceſſaires pour s'aſſûrer de l'exiſtence du *maximum*, ou *minimum*.

16. Soit l'équation générale pour les ſurfaces de ſecond ordre $z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$, qu'on ſe propoſe de trouver le point où l'ordonnée $z$ eſt la plus grande, ou la plus petite; on aura en différentiant $2zdz = 2axdx + 2bydx + 2bxdy + 2cydy - edx - fdy$ ce qui fournit d'abord les deux équations ſuivantes $ax + by = \frac{e}{2}$; $cy + bx = \frac{f}{2}$, d'où l'on tire

$x =$

$x = \frac{ec - fb}{2(ac - b^2)}$; $y = \frac{eb - fa}{2(ac - b^2)}$. Différentions de nouveau la différentielle trouvée, & on aura, puisque $dz = 0$, $2z\,d^2z = 2a\,dx^2 + 4b\,dx\,dy + 2c\,dy^2$ où les quantités $x$, $y$ ne se trouvent plus. Or afin que l'ordonnée $z$ soit un vrai *maximum*, ou *minimum*, il faut que $a$ & $c$ soient toutes deux négatives dans le premier cas, & toutes deux positives dans le second, de plus il faut encore que $ca > b^2$, car sans cela les valeurs trouvées pour les ordonnées $x$ & $y$ ne donneroient jamais ni un *maximum*, ni un *minimum*; en effet toutes les fois que $ca$ n'est pas plus grand que $b^2$; le célébre Mr. Euler a demontré par une autre voie dans l'appendice à l'introduction à l'Analise des infiniment petits, que la surface proposée s'étend à l'infini, & qu'elle a une assimptôte conique. Il paroit donc clairement que la méthode pour déterminer les *maximum* & *minimum*, quand il y a plusieurs variables en ne les regardant qu'une à la fois, peut souvent être très-fautive. Car par exemple dans le cas précédent, en traitant d'abord $x$ comme variable, on trouve la différentielle première $2(ax + by - \frac{e}{2})dx$, & la seconde $2a\,dx^2$; de même en faisant varier $y$ on a pour la différentielle première $2(cy + bx - \frac{f}{2})dy$, & pour la seconde $2c\,dy^2$. Or les deux différentielles premiéres posées $=$ à zero donnent les mêmes équations qu'on a trouvé, & les deux secondes font voir que si $a$ & $c$ sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives l'ordonnée $z$ est un *maximum*, ou un *minimum*, si on a simplement égard à la variabilité des $x$ & $y$ considérées séparément; mais on n'est pas en droit de conclure pour cela que $z$ soit un *maximum*, ou un *minimum*, par rapport à toutes deux ensemble, comme on vient de le voir.

## *Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes*

# PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

1. SOIT proposée l'équation differentielle $dy + yXdx = Zdx$, ou $X$ & $Z$ expriment des fonctions quelconques de la variable $x$; l'on sait que pour intégrer cette équation, il suffit de faire $y = uz$, ce qui donne $udz + zdu + uzXdx = Zdx$, où l'on peut faire évanouir deux termes par une valeur convenable de $u$, ou de $z$. Supposons donc $zdu + uzXdx = 0$, & divisant par $z$, l'on aura $du + uXdx = 0$, & par conséquent $\frac{du}{u} = -Xdx$, & $lu = -\int Xdx$, savoir $u = e^{-\int Xdx}$, ou $e$ est le nombre, dont le logarithme hyperbolique est 1. Par cette supposition la proposée deviendra $udz = Zdx$, ce qui donne $dz = \frac{Zdx}{u}$; $z = \int \frac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx$, & enfin $y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}$.

2. En observant le procédé de cette méthode, on verra aisément qu'elle doit pouvoir s'appliquer encore avec succès aux équations différentielles qui ont la même forme que la précédente, quoique les différences soient supposées finies. Soit donc l'équation $dy + My = N$, dont la differentielle $dy$ soit finie, & les autres quantités $M$ & $N$ soient des fonctions d'une autre variable quelconque $x$. Supposons en premier lieu $y = uz$, & l'on aura dans ce cas $dy = udz + zdu + dudz$, & l'équation se changera en $udz + zdu + dudz + Muz = N$. Qu'on pose comme ci-dessus les deux ter-

mes $z\,du + Muz = 0$, & on aura $du + Mu = 0$, ſavoir $\frac{du}{u} = -M$; pour reſoudre cette équation dans notre cas où la différentielle $du$ n'eſt pas infiniment petite, qu'on ſuppoſe $u = e^t$, & l'on aura $u + du = e^{t+dt}$; & $du = e^t(e^{dt} - 1)$; d'où $\frac{du}{u} = e^{dt} - 1 = -M$; $e^{dt} = 1 - M$, & prenant les logarithmes $dt = l(1-M)$, & enſuite intégrant $t = \int l(1-M)$; mais l'on ſait que la ſomme des logarithmes de pluſieurs nombres eſt égale au logarithme du produit de tous ces nombres; donc ſi l'on exprime généralement par $\pi.(1-M)$ le produit continuel de toutes les quantités contenues dans la formule $1-M$, on aura $t = l\pi.(1-M)$, & par conſéquent $u = e^t = \pi.(1-M)$. Par l'évanouiſſement de ces deux termes l'équation devient $u\,dz + du\,dz = N$, d'où l'on tire $dz = \frac{N}{u + du}$, & en intégrant $z = \int \frac{N}{u+du}$. Mais ayant déja trouvé $u = \pi.(1-M)$, ſi l'on exprime par $M'$ le terme conſécutif à $M$ on aura $u + du = \pi.(1-M')$, & par conſéquent $z = \int \frac{N}{\pi.(1-M')}$; & puiſque $y = zu$, $y = \pi.(1-M) \times (\int \frac{N}{\pi.[1-M']})$, ou bien en ajoutant à cette intégration une conſtante quelconque $A$; $y = \pi.(1-M) \times (A + \int \frac{N}{\pi.[1-M']})$.

3. Soit à préſent propoſée l'équation $y' = Ry + T$, ou $y'$ eſt le terme qui ſuit $y$ dans la ſuite des $y$; puiſque $y' = y + dy$ elle ſe reduira à $dy + (1-R) \times y = T$. Qu'on faſſe donc $1 - R = M$; $T = N$, & l'on trouvera pour la valeur de $y$ l'expreſſion ſuivante $ly = \pi.R.\,(A + \int \frac{T}{\pi.R})$. Si $R$ eſt une quantité con-

ſtante,

ſtante, il eſt clair que $\pi . R$ & $\pi . R^1$ deviennent des puiſſances de $R$, donc l'expoſant eſt égal au nombre qui dénote la place des termes $y$, & $y^1$ dans la ſuite des $y$; ſoit donc $m$ ce nombre, de ſorte que $y^m$ ſoit le même que $y$, & on aura $y^m = R^m \left( A + \int \frac{T}{R^{m+1}} \right)$. Si $T$ eſt conſtant $\int \frac{T}{R^{m+1}}$ eſt $= T \int \frac{1}{R^{m+1}}$, où les termes exprimés par $\frac{1}{R^{m+1}}$ forment une progreſſion géométrique, dont il ſera aiſé d'avoir la ſomme; ſoit cette ſomme qui commence par $\frac{1}{R} = S$, ſavoir que $\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \&c. + \frac{1}{R^m} = S$, & on aura, en multipliant par $R$, $1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \&c. + \frac{1}{R^{m-1}} = SR = S + 1 - \frac{1}{R^m}$ de cette égalité l'on tirera $S = \frac{R^m - 1}{R^m [R-1]}$, par conſéquent $y^m = R^m \left( A + T \frac{R^m - 1}{R^m [R-1]} \right)$, ou bien $y^m = AR^m + T . \frac{R^m - 1}{R - 1}$.

4. Pour ſe convaincre que cette valeur de $y$ ſatisfait entiérement aux conditions de l'équation donnée $y^1 = Ry + S$, ou bien $y^{m+1} = Ry^m + S$, on n'a qu'à multiplier la formule trouvée pour $y^m$ par $R$, & lui ajouter la quantité $T$, & l'on trouvera le réſultat $AR^{m+1} + T . \frac{R^{m+1} - R}{R - 1} + T$ qui ſe réduit à $AR^{m+1} + T . \frac{R^{m+1} - 1}{R - 1}$ qui eſt la valeur que la formule générale nous donne pour le terme $y^{m+1}$.

5. Après avoir trouvé la méthode d'intégrer toute équation différentielle à différences finies, compriſe ſous la

forme générale $dy + My = N$, l'on pourra de même procéder à l'intégration des autres qui dépendent de celle-ci. Or Mr. D'Alembert dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin a fait voir, que toutes les équations différentielles, telles que

$y + \frac{A\,dy}{dx} + \frac{B\,d^2y}{dx^2} + \frac{C\,d^3y}{dx^3} + \&c. = X$ où $A, B, C$ &c. sont des constantes quelconques, & où $X$ est une fonction quelconque de $x$, se réduisent à une équation de cette forme $z + \frac{H\,dz}{dx} = V$, ou $H$ est une constante, & $V$ une fonction de $x$; laquelle équation est la même que nous avons appris à intégrer dans le cas même des différences finies. Si donc le procédé de Mr. D'Alembert peut avoir lieu aussi quand les différences sont finies, l'on pourra intégrer encore dans cette circonstance tout équation différentielle de cette forme $y + A\,dy + B\,d^2y + C\,d^3y + \&c. = X$, & par conséquent l'équation $y^{\text{I}} + P\,y^{\text{II}} + Q\,y^{\text{III}} + \&c. = X$, qu'on peut regarder comme la formule générale des suites récurrentes. La méthode de Mr. D'Alembert se trouve détaillée dans le second tome du Calcul intégral de Mr. Bougainville; mais pour épargner de peine aux Lecteurs je tâcherai de la développer ici en peu de mots. Qu'on suppose $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ &c., & l'équation proposée se changera en $y + Ap + Bq + \frac{C\,dq}{dx} = X$. Qu'on multiplie à présent chacune des équations qu'on a supposé par des coéficiens indéterminés $a$, $b$, $c$ &c., & qu'on les ajoute toutes à celle-ci; on aura $y + (A + a)p + (B + b)q$. $- \frac{a\,dy}{dx} - \frac{b\,dp}{dx} + \frac{C\,dq}{dx} = X$. Soit fait ensorte que la pre-

premiére partie du premier membre de cette équation devienne un multiple exact de l'intégral de la seconde, savoir que $dy + (A+a)\,dp + (B+b)\,dq = dy + \frac{b\,dp}{a} - \frac{C\,dq}{a}$, & en comparant terme à terme il en resultera $A + a = \frac{b}{a}$; $B + b = -\frac{C}{a}$; de ces deux équations l'on tire $b = -\frac{C}{a} - B = aA + a^2$, & $a^3 + Aa^2 + aB + C = 0$, dont les racines donneront trois valeurs d'$a$ qui satisfairont également aux conditions requises. Supposons maintenant $y + (A+a)\,p + (B+b)\,q = z$, l'équation trouvée deviendra $z - \frac{a\,dz}{dx} = X$, laquelle comparée avec celle du §. 1. donnera en intégrant $z = e^{x:a} \int \frac{X}{a\,e^{x:a}}$. Or comme la quantité $a$ peut avoir trois valeurs différentes, nommons les $a^{\text{I}}$, $a^{\text{II}}$, $a^{\text{III}}$, & exprimons par $Z^{\text{I}}$ la valeur de $z$ qui contient $a^{\text{I}}$, par $Z^{\text{II}}$ celui qui contient $a^{\text{II}}$, & par $Z^{\text{III}}$ celui qui contient $a^{\text{III}}$; on aura donc les trois équations suivantes:

$$y + (A + a^{\text{I}})\,p + (B + b^{\text{I}})\,q = Z^{\text{I}}$$
$$y + (A + a^{\text{II}})\,p + (B + b^{\text{II}})\,q = Z^{\text{II}}$$
$$y + (A + a^{\text{III}})\,p + (B + b^{\text{III}})\,q = Z^{\text{III}}.$$

De ces trois équations on tirera la valeur de $y$, laquelle à cause des quantités constantes $A$, $B$, $a^{\text{I}}$, $a^{\text{II}}$ &c. se réduira à cette forme $y = FZ^{\text{I}} + GZ^{\text{II}} + HZ^{\text{III}}$, où $F$, $G$, $H$ sont des constantes, dont la valeur dépend des autres $A$, $B$, $a^{\text{I}}$, $a^{\text{II}}$ &c.

6. Si l'on examine le procédé de cette méthode il paroitra clairement que si l'équation eut contenu beaucoup plus de termes, par exemple qu'elle eut été

$$y + \frac{A\,dy}{dx} + \frac{B\,d^2y}{dx^2} + \frac{C\,d^3y}{dx^3} + \frac{D\,d^4y}{dx^4} + \frac{E\,d^5y}{dx^5} + \&c = X$$
$$+ \&c.$$

l'on auroit trouvé de même $y = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^{V}$, où les quantités $Z^{I}$, $Z^{II}$, &c. sont des fonctions de $X$ & $x$, telles que

$Z = e^{x:a} \int \frac{-X}{a e^{x:a}}$, en posant pour $a$ les racines $a^{I}$, $a^{II}$, $a^{III}$, $a^{IV}$, $a^{V}$ de cette équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$; de plus l'on s'appercevra que les opérations que requiert cette méthode peuvent également se faire, soit que les différences soient finies, ou qu'elles soient infiniment petites.

7. Ayant donc l'équation à différences finies $y + Ady + Bd^2y + Cd^3y + Dd^4y + Ed^5y = X$, & posant $dy = p$, $dp = q$, $dq = r$, $dr = s$, l'on parviendra de la même maniére à une équation telle que $z - adz = X$, où $z = y + (A + a)p + (B + b)q + (C + c)r + (D + d)s$, & la quantité $a$ dépendra de cette équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$, dont les racines ont été deja supposées $a^{I}$, $a^{II}$ $a^{III}$, $a^{IV}$, $a^{V}$. Que l'on compare à présent l'équation $z - adz = X$, avec celle du §. 2., savoir $dy + My = N$, & on aura $M = -\frac{1}{a}$; $N = -\frac{X}{a}$; par conséquent $1 - M = \frac{1 + a}{a}$, ce qui donne enfin $z = \pi . (\frac{1 + a}{a}) \times [const. + \int \frac{-X}{a} : \pi . (\frac{1 + a}{a})]$, ou bien puisque $a$ est constant $z^m = (\frac{1 + a}{a})^m . (const. - \int \frac{Xa^m}{[1 + a]^{m+1}})$; $m$ exprimant comme ci-dessus le quantiéme du terme $z$ dans la série des $z$. Si l'on fait de plus $X$ constant on aura en prenant la somme de la progression géométrique exprimée par $\int \frac{a^m}{[1 + a]^{m+1}}$; $z^m = (\frac{1 + a}{a})^m \times (const. - X . \frac{(1 + a)^m - a^m}{[1 + a]^m})$. Or comme $a$ peut avoir les valeurs $a^{I}$, $a^{II}$, $a^{III}$, $a^{IV}$, $a^{V}$ il est

clair

clair qu'en substituant chacune d'elles dans la formule trouvée, il en résultera autant de valeurs de $z^{II}$ qui satisferont toutes également. Soient donc toutes ces valeurs exprimées par $Z^{I}, Z^{II}, Z^{III}, Z^{IV}, Z^{V}$, & puisque $z = y + (A+a)p + (B+b)q + (C+c)r + (D+d)s$, l'on tirera par le moyen des cinq équations $z = Z^{I}$ $z = Z^{II}$, $z = Z^{III}$, $z = Z^{IV}$, $z = Z^{V}$, l'expression suivante de $y$, savoir $y = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^{V}$.

8. Soit enfin proposée l'équation $y^{I} + Ay^{II} + By^{III} + Cy^{IV} + \&c. = X$, où $y^{I}$, $y^{II}$, $y^{III}$ &c. expriment des termes consécutifs de la suite des $y$; il est d'abord évident que, puisque $y^{II} = y^{I} + dy^{I}$; $y^{III} = y^{I} + 2\,dy^{I} + d^{2}y^{I}$, & ainsi des autres, cette équation peut être ramenée à la forme de celle que nous venons d'examiner; mais puisque le Calcul devient de cette façon trop long, il sera utile de la resoudre directement par les mêmes principes que nous avons employés jusqu'ici. De plus afin de pouvoir plus aisément appliquer cette équation aux séries récurrantes, il sera mieux de considérer les termes $y^{I}, y^{II}, y^{III}$ &c. dans un ordre renversé, savoir que $y^{II} + dy^{II} = y^{I}$; $y^{III} + dy^{III} = y^{II}$, & ainsi des autres, de sorte que les exposans I, II, III &c. dénotent la distance de chaque terme au dernier $y^{I}$. Supposons $y^{II} = p^{I}$, & l'on aura $y^{III} = p^{II}$, soit donc de nouveau $p^{II} = q^{I}$ & $p^{III} = q^{II}$; soit encore $q^{II} = r^{I}$ & $q^{III} = r^{II} = s^{I}$, & l'on aura $y^{II} = p^{I}$; $y^{III} = q^{I}$; $y^{IV} = r^{I}$; $y^{V} = s^{I}$, $y^{VI} = s^{II}$; substituant ces valeurs dans la proposée, elle deviendra $y^{I} + Ap^{I} + Bq^{I} + Cr^{I} + Ds^{I} + Es^{II} = X$. Qu'on réduise à présent les suppositions précédentes en équations, savoir $p^{I} - y^{II} = 0$; $q^{I} - p^{II} = 0$; $r^{I} - q^{II} = 0$; $s^{I} - r^{II} = 0$, & après les avoir multipliées par les coéficiens indéterminés $a$, $b$, $c$ &c. qu'on les ajoute toutes à celle qu'on vient de trouver. Il en résultera

fultera la fuivante $y^{\mathrm{I}} + (A+a)p^{\mathrm{I}} + (B+b)q^{\mathrm{I}} + (C+c)r^{\mathrm{I}} + (D+d)f^{\mathrm{I}} - ay^{\mathrm{II}} - bp^{\mathrm{II}} - cq^{\mathrm{II}} - dr^{\mathrm{II}} + Ef^{\mathrm{II}} = X$. Qu'on faffe maintenant que chaque coéficient de la premiére partie foit multiple de la même maniére de fon correfpondant dans la feconde, & l'on parviendra aux mêmes équations qu'on a trouvé §. 6., & la quantité $a$ fera déterminée par l'équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$, dont on a fuppofé les racines $a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}$ &c. Donc fi l'on fait $y^{\mathrm{I}} + (A+a)p^{\mathrm{I}} + (B+b)q^{\mathrm{I}} + (C+c)r^{\mathrm{I}} + (D+d)f^{\mathrm{I}} = z^{\mathrm{I}}$ l'équation fe reduira à $z^{\mathrm{I}} - az^{\mathrm{II}} = X$, qui par une intégration femblable à celle du §. 3. donnera

$z^m = a^m\ (const. + \int \frac{X}{a^{m+1}})$, où $m$ exprimera le quantiéme du terme $z^m$ dans la fuite des $z$. Or comme pour $a$ l'on peut fubftituer chacune des cinq racines $a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}$ &c. de l'équation $a^5 + Aa^4 +$ &c. $= 0$, l'on aura de même cinq valeurs différentes de $z^m$ que nous exprimerons comme ci-deffus par $Z^{\mathrm{I}}, Z^{\mathrm{II}}, Z^{\mathrm{III}}$ &c.; donc à caufe que $z^m = y^m + (A+a)p^m + (B+b)q^m + (C+c)r^m + (D+d)f^m$, l'on parviendra en chaffant les lettres $p^m$, $q^m$ &c. à la formule $y^m = FZ^{\mathrm{I}} + GZ^{\mathrm{II}} + HZ^{\mathrm{III}} + IZ^{\mathrm{IV}} + KZ^{\mathrm{V}}$, où $F, G, H$ &c. font des conftantes qu'on doit puis déterminer par la comparaifon d'autant de termes donnés dans la fuite des $y$.

9. Si $X$ eft conftant, par ce qu'on a démontré §. 4. la fomme exprimée par $\int \frac{X}{a^{m+1}}$ deviendra $= X\frac{a^m - 1}{a^m[a-1]}$; & nommant $L$ la conftante ajoutée à cette intégration, on aura finalement $Z = La^m + X\frac{a^m - 1}{a^m[a-1]}$, d'où l'on tirera par conféquent les autres valeurs $Z^{\mathrm{I}}, Z^{\mathrm{II}}, Z^{\mathrm{III}}$ &c. en fubftituant à la place de $a$ fes valeurs $a^{\mathrm{I}}, a^{\mathrm{II}}, a^{\mathrm{III}}$ &c.

10. De

10. De tout ceci l'on peut déduire le théorème général suivant; si l'on a l'équation
$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} + Ey^{m-5}$ $+ \&c. = X$, où les exposans des $y$ dénotent leurs places; que l'on cherche toutes les racines $a^{I}, a^{II}, a^{III}\ a^{IV}$ &c. de l'équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$, & l'on aura généralement

$$y^m = Fa^{Im}\left(L + \int\frac{X}{a^{I\,m+1}}\right) + Ga^{IIm}\left(L + \int\frac{X}{a^{IIm+1}}\right) +$$
$$Ha^{IIIm}\left(L + \int\frac{L}{a^{III\,m+1}}\right) + Ia^{IVm}\left(L + \int\frac{X}{a^{IV\,m+1}}\right) +$$
$$K\ a^{Vm}\left(L + \int\frac{X}{a^{Vm+1}}\right) + \&c.$$

& dans le cas, où $X$ est constant.

$$y^m = L\left(Fa^{Im} + Ga^{IIm} + Ha^{IIIm} + Ia^{IVm} + Ka^{Vm} + \&c.\right)$$
$$+ X\left(F\frac{a^{Im}-1}{a^{I}-1} + G\frac{a^{IIm}-1}{a^{II}-1} + H\frac{a^{IIIm}-1}{a^{III}-1} + \right.$$
$$\left. I\frac{a^{IVm}-1}{a^{IV}-1} + K\frac{a^{Vm}-1}{a^{V}-1} + \&c.\right).$$ Si $X = 0$ l'on pourra supprimer la constante $L$, & on aura plus simplement
$y^m = Fa^{Im} + Ga^{IIm} + Ha^{IIIm} + Ia^{IVm} + Ka^{Vm}$ &c.
formule connuë pour l'expression du terme général de la suite des $y$, telle que
$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} + Ey^{m-5} + \&c. = 0$;
ce qui n'est autre chose qu'une suite récurrente, dont l'échelle de rélation est $-A - B - C - D - E -$ &c.

11. Voila donc la théorie des suites récurrentes réduite au calcul différentiel, & établie de cette façon sur des Principes directs & naturels au lieu que jusqu'ici elle n'a été traitée que par de voies tout-à-fait indirectes. De plus les recherches qu'on a fait sur cette matiére, ont toujours été bornées au cas de $X = 0$; & personne que je sache n'a jamais entrepris d'examiner généralement les autres cas, où $X$ est constant, ou même variable, ce qui

peut néanmoins être de la derniére importance pour la réſolution de pluſieurs problêmes qui conduiſent à de telles équations, dont la doctrine des hazards eſt principalement remplie, comme je me propoſe de le faire voir une autre fois, en appliquant à cette eſpéce de calcul la théorie que je viens d'expliquer.

# JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

## *De Analogia Magnetiſmi, & Electricitatis*

# DISSERTATIO.

MAgnetica phaenomena ad electrica pertinere etiam ante inventam electricitatis theoriam ingenioſi Viri conjectarunt, quod utrimque attractionis motus, & repulſionis obſervarent, atque adeo analogia ducti ex eodem fluido excitari arbitrarentur, quod in electricis quidem in ſenſus incurreret, in magneticis autem occulte actionem ſuam exerceret: quae porro opinio, etſi ab aliis, iiſque Clariſſimis Viris impugnata fuerit, nuper tamen per immortalia electrica inventa reſtituta eſt, ac illuſtrata. Cum in eam rem meditarer, nonnulla occurrebant, quae ut analogiam magnetici, & electrici fluidi confirmare, ita identitatem dubiam reddere poſſe videbantur, quae quamquam obvia ſunt, cum tamen magna ex parte hactenus non ſint animadverſa paullo fuſius exponenda eſſe duxi.

1. Corpora inaequaliter electrica ſe attrahunt, aequaliter ſe repellunt, eodem modo poli magnetici diverſi nominis ſe attrahunt, ejuſdem ſe repellunt (*a*).

2. Motus electrici non contingunt, niſi corpora actu electrica fuerint *inſulata*, magnetici motus perpetuo contingunt, ergo magnes perpetuo *inſulatus* eſt.

3. Corpora actu electrica movent corpora deferentia, ſeu eadem attrahunt, magnes ferrum attrahit; ergo ferrum eſt inſtar corporis deferentis.

4. Prae-



(*a*) Obſervante Cl. D. Alibardo in addit. ad FranscKlini epiſ. t. 2. p. 208.

4. Praeterea magnes in ferrum agit ad ingentem distantiam, si ferrum aliud teres, nec nimis magnum fuerit interpositum, eodemque demto ad tantam distantiam magnetis actio non amplius extenditur; ergo si magnes tamquam corpus consideretur electricum fluidum emittens, vel recipiens, ferrum considerari poterit tamquam corpus deferens; atque ideo magnes est instar globi vitrei emittentis, vel resinosi recipientis, ferrum est instar catenae transmittentis.

5. Hoc tamen discrimen intercedit, quod globus vitreus, vel resinosus electricum fluidum non recipiat, aut emittat, nisi fricetur, magnes quocumque tempore absque ulla praeparatione recipiat, & emittat.

6. Melius itaque comparari poterit cum metallo electrico aëri exposito, quod perpetuo electricum est ob majorem metalli respectu electrici fluidi, quam aliorum corporum permeabilitatem, ob quam electricum fluidum in minus resistens metallum, faciliusque permeabile continuo fertur: corpora adeo omnia, quibus magnes insistere potest perfecte non coërcent magneticum fluidum, sed tantummodo minus facile ab eodem permeantur, quam ferrum, aut alius magnes; praeterea vero corpora deferentia electricum fluidum illud ad remotissima intervalla transferre possunt, si corporibus rite coërcentibus confinia sint; ferrum magneticum fluidum, nonnisi per certum intervallum defert sensim debilius (*b*). Ergo nec ferrum perfecte deferens, nec reliqua corpora perfecte coërcentia sunt.

7. Si corporibus deferentibus corpora actu electrica contigua fiant, electricum fluidum per ipsa distribuitur, & eorum vis electrica hebescit. Eodem modo ingens ferri

massa

(*b*) Actio enim magnetis, quae per interpositum ferrum propagatur, aucta distantia per gradus minuitur. Muschem. dis. de magni exp. 52. p. 112. Ex hoc fere fonte reliqua hausi, quae ad magneticorum phaenomenorum historiam spectant.

massa magneti propinqua ipsius actionem in admotum ferrum imminuit, aut etiam extinguit.

8. Ex hac porro explicatione intelligitur, cur ferrum interpositum, quod actionem magnetis ad majora intervalla extendit, si sit exiguum (4), si ingens sit, eamdem tollat, quod postremum quibusdam Physicis imposuerat, putantibus ideo ferrum magnetis actionem intercipere ex eo, quod magneticum fluidum difficilius per ipsum permearet (*c*). Enim vero non ideo intercipit actionem, quod difficilius permeari possit, sed quod facilius permeabile, si ingens sit, fluidum magneticum retineat, & *insulationem* auferat, non secus ac corpora electricum fluidum deferentia corporibus actu electricis contigua, si ingentia sint *insulationem* tollunt, & electricos motus extinguunt. Ex his intelligi potest, cur magnes albi ferri laminae applicitus, ferri limaturam in ipsius margine positam non attrahat, si lamina ampla sit, sin autem sit angusta, ad eam distantiam commoveat, ad quam demta lamina commovere nullatenus potuisset; cur item scobs ferri albi ferri folio superposita a magnete ad oppositam folii superficiem admoto eo validius commoveatur, quo folium fuerit arctius.

9. Ut autem eo evidentius pateret ferrum non minus, quam reliqua corpora magnetico fluido permeari sequens experimentum institui. Acum ferream ex praelongo filo ferreo suspendi, dein ensem ad apicem magnetismo imbutum ad eamdem admovi, & aeque vividas acus motiones observavi, ac quando alio corpore acus sustentabatur; quo in experimento, quum acus ferro fulciretur, & apex ensis magnetismo imbutus cum ense reliquo magnetismo destituto continuaretur; luculenter constat utrumque corpus optime *insulatum* futurum fuisse; ac proinde motum nullum fuisse secuturum, siquidem ferrum magneticum fluidum

coër-

(*c*) Vid. Mémoir. de l'Acad. 1733.

coërceret, caeterum respectu magnetici fluidi ferrum vices praestare corporis deferentis evidentius constabit inferius, ubi de armatura magnetis sermonem habebo.

10. Corpora electrica se attrahunt, quando ex his alterum fluidum electricum emittit, alterum recipit, se repellunt, quando vel utrumque emittit, vel utrumque recipit, nempe se attrahunt, quando eadem directione per ipsa fluidum electricum movetur; se repellunt, quando movetur directione opposita. Quoniam igitur poli magnetici ejusdem nominis se repellunt, nominis diversi se attrahunt horum unum magneticum fluidum recipere, alterum emittere censendum est; inde intelligitur cur electrica corpora se non repellant, nisi aequaliter electrica fuerint; contra poli ejusdem nominis se repellant, etsi inaequalem habuerint magnetismum; nempe in corporibus electricis, ut contraria sit electrici vaporis directio, non sufficit, ut eodem modo sint electrica, sed praeterea necesse est, ut sint electrica aequaliter, contra in polis magneticis sufficit, ut sint ejusdem nominis, ut contraria quoque sit magnetici fluidi directio.

11. Electrica porro corpora postquam se attraxerunt, se repellunt, quod cum prius horum alterum ex altero electricum fluidum reciperet, paullo post aequaliter electrica facta, vel ambo recipiunt, vel ambo emittunt. Contra magnes constanter ferrum attrahit, & polus magneticus polum item diversi nominis constanter attrahit, ejusdem constanter repellit. Ergo per magnetem, & ferrum constanter eadem directione magneticum fluidum movetur, tum etiam per polos diversi nominis, per polos ejusdem nominis diversa (*).

12.

(*) Lex illa motuum electricorum, quod corpora inaequaliter electrica se attrahant, aequaliter electrica se repellant eatenus vera est, quatenus fluidum electricum per corpora communicatione electrica ad aequalitatem distribuitur, ac proinde, quando bina corpora aequaliter electrica facta sunt ab uno in alterum fluere desinit, sed vel in utraque ingredi, vel

12. Propterea polus unus magnetis constanter magneticum fluidum recipit, alter constanter emittit, non secus, ac in electricis machina vaporem recipit, catena emittit, vel contra, quamdiu globus circumducitur.

13. Quemadmodum igitur in electricis, sic in magneticis, nulla necessitas duplicis fluidi affluentis, & effluentis, quale a Cartesio fuerat propositum (*d*).

14. In locis reliquis magnetis extra polos, quoniam vis magnetica exigua est per eadem, nonnisi exigua quantitate magneticum fluidum movetur, atque adeo a polo ad polum fertur; inde autem intelligitur cur si transversim magnes secetur, plana, quae sectione gignuntur polos diversi nominis exhibeant (*e*); cum etenim ex uno in alterum magneticum fluidum ante sectionem moveretur, etiam post sectionem planum unum magneticum fluidum emittet, alterum recipiet, ac propterea tamquam poli diversi

ab utrisque egredi nititur pro ut positivam, vel negativam habuerint electricitatem: at si quaestio sit de motibus inter corpora deferentia, & coërcentia sibi invicem admota, quoniam in his lex illa aequabilis distributionis non obtinet, nec etiam ea motuum regula obtinebit. Vitrum tenue, aut talci folium ex serico filo pendulum, ita admoveo corpori metallico catenae electricae adnexo, ut plana vitri superficies ejus corporis superficiei obvertatur ad aliquot pollicum distantiam. In eadem distantia ad oppositam vitri faciem colloco corpus deferens cum solo communicans: vibrat vitrum inter catenam, & corpus deferens oppositum; nempe dum superficies vitri catenae obversa electricum vaporem recipit, vitrum ad catenam fertur, dum opposita vitri superficies aequalem vaporis quantitatem exonerat in adpositum deferens corpus versus illud movetur. Apicem metallicum corpori huic substituo, ut ad majorem distantiam electricum fluidum haurire possit ex vitri superficie, vitrum constanter adhaeret corpori catenae adnexo; dum enim apex metallicus eo una vitri superficie vaporem haurit, ex catena in oppositam superficiem idem vapor fluere pergit, ex quo vaporis ex uno corpore, in alterum corpus constanti fluxu adhaesio illa constans producitur: ergo superficies vitri ad catenam conversa aequaliter, imo magis electrica evadit quam catena ipsa, & tamen catenae constanter adhaeret, quando constans est electrici vaporis ex catena in illam superficiem effluxus. En igitur etiam in electricis exemplum adhaesionis constantis ad similitudinem magneticae attractionis.

(*d*) Confer Regnault entretien 15. n. 3. 6.
(*e*) Muschenb. dis. de magn. exp. 83. pag. 139.

versi nominis erunt spectanda (11): sin autem plano ad axim paralello magnes secetur, extrema, quae prius cohaerebant, se repellent, quod poli ejusdem nominis remaneant (*f*).

15. Quoniam ferrum a polis diversi nominis aeque attrahitur, necesse est, ut a polo fluidum emittente idem accipiat, & ad polum recipientem idem traducat, ut adeo aequali facilitate quacumque directione a fluido magnetico possit permeari.

16. Ferrum porro ex magnetis contactu, multo magis ex magnetici poli juxta ipsius longitudinem ductu, magneticum evadit, etiamsi pannus hoc inter, & magnetem fuerit interpositus (*g*). Ergo ubi semel per ipsum certa directione magneticum fluidum moveri coepit, eamdem deinceps affectare pergit. Inde fit, ut qua parte ferrum magneticum polum tangit, diversi nominis polum acquirat (*h*); si polo debilioris magnetis aptetur polus diversi nominis magnetis validioris, illius virtus augeatur (*i*), si polus ejusdem nominis debilitetur, destruatur, in contrariam mutetur (*K*), ut demum magnetici poli ejusdem nominis vim suam ex vicinia perpetuo imminuant, nominis diversi servent, adaugeant in ratione aliqua distantiarum inversa (*l*).

17. Quod autem diximus ferrum quacumque directione aeque facile a magnetico fluido permeari (15), magnetem nonnisi certa directione (11), ulterius comprobatur, observando polum magneticum, qui ex validiore polo ejusdem nominis in contrarium mutatur (16), antequam mutetur, omnem magnetismum amittere, ac proinde in ferri conditionem redigi: cum igitur simplicis ferri conditio sit veluti gradus,

quo

(*f*) Id. l. c. exp. 80. pag. 140.
(*g*) Muschenb. l. c. pag. 100.
(*h*) Rohaul. pag. 244. n. 8. Muschenb. exp. 89. pag. 141.
(*i*) Muschenb. l. c. exp. 89. pag. 141.
(*K*) Muschenb. l. c. exp. 119. pag. 243.
(*l*) Encyc. ex Mitchelio, Article aiman.

quo a polo uno in contrarium fit tranſitus, quando contrarias directiones magneticum fluidum affectat (10), neceſſe eſt, ut ferrum ipſum indifferens ſit ad utramque; atque adeo ad quamcumque magnetici fluidi directionem. Praeterea vero ferrum magnetiſmo imbutum, & magnes ipſe diuturna ignitione vim attrahendi amittunt (*m*), & vim directivam, aut nullam, aut exiguam retinent (*n*), cum tamen poſtquam refrigerata fuerint aeque valide a magnete alio attrahantur (*o*), quod nempe vi ignis, magnete, & ferro mollibus factis fluidum magneticum aeque facile quacumque directione aditum ſibi compareт, ſicque ipſa (ſi ſatis diuturna fuerit ignitio) in merum ferrum redigat, quod attrahi quidem a magnete poſſit, ferrum vero aliud attrahere non poſſit, ſin autem ignitio breviori tempore perduret, tum frigefacta vim duntaxat aliquam attractivam ſervabunt, quae jugi magnetici fluidi juxta priſtinam directionem fluxu augeri poterit, ac reparari (*p*): magnetem vero, & ferrum ex igne mollia magnetico fluido quavis directione in ipſa incurrenti facilius cedere, quam ſi frigida fuerint experimenta alia inferius adducenda comprobabunt.

18. Corpora contrario modo electrica ad majorem diſtantiam in ſe agunt, quam in corpora deferentia electricitate deſtituta (*q*). Ita ferrum magnetiſmo imbutum ad



(*m*) Muſchenb. diſ. cit. exp. 29. pag. 71. 72. magnetem, qui per ſex horas canduerat, nequidem ſcobis ferri particulam elevare potuiſſe, & Boyleus apud eumdem pag. 262.

(*n*) Magnes modo dictus in Muſchenb. exp. acum mobiliſſimam ſex polic. longam nonniſi ad diſtantiam $\frac{1}{2}$ polli attrahebat, ac repellebat; ferrum ignitum minorem adhuc vim directivam oſtendebat exp. 131. pag. 234.

(*o*) De magnet. conf. exp. cit., de ferro autem dum candet minori vi a magnete attrahi Muſchenb. diſ. cit. exp. 23. pag. 55. 56. vi aequali Monier Encyc. l. c. contendit; conſentiunt tamen poſtquam fuerit refrigeratum priſtina vi magneti adhaeſurum.

(*p*) Quod contigiſſe videtur in exp. Monierii loc. cit.

(*q*) Cl. Beccaria *dell' elettriciſmo artif.* § 68.

majorem distantiam in polum diversi nominis agit, quam in ferrum magnetismo destitutum (*r*).

19. Foliola metallica ad corpus actu electricum celerius feruntur, si deferente corpore, quam si coërcente sustineantur (*s*). Ita ferrum validius magneti adhaeret, si ferrum, quam si aliud quodvis corpus suppositum fuerit (*t*).

20. Ex eodem principio fit, ut ferrum nimis breve minorem ex affrictu magnetismum suscipiat, admoto in extremitate ferro alio majorem (*u*); majorem iterum si ex utroque extremo ferrum fuerit admotum (*x*); majorem denique, quo admota in extremitatibus ferramenta iisdem fuerint propinquiora (*y*), eo nempe major ex affrictu vis excitatur, quo facilius per unum extremum magneticum fluidum ingredi potest, per alterum egredi, facilior autem ingressus, egressusque paratur admotis ferramentis, eoque facilior, quo proximius admoventur.

21. Ex eadem electricitatis analogia corpora deferentia electricum fluidum, si levia sint, ac mobilia, ita disponuntur, ut viam faciant inter corpora idem recipientia, & emittentia (*z*). Ita scobs ferrea circa magnetem posita in arcus disponitur, quorum extrema utrumque polum attingunt (*a*).

22. Supra dictum est magnetem, nonnisi certa directione a magnetico fluido permeari (11. 17.); inde fit, ut per polorum superficies fluere, ac simul colligi fluidum illud non possit; eodem modo, quo electricum fluidum per vitro-

(*r*) Muschenb. cor. 3. pag. 45. diss. cit.
(*s*) Nollet essai sur l'electric.
(*t*) Reaumur mémoire de la Acad. 1723.
(*u*) Encyc. l. c.
(*x*) Si plures virgae aequales, & similes in longum dispositae magnete fricentur, quae mediae sunt, maximam vim aquirunt. Encyc. l. c.
(*y*) Muschenb. exp. 53. pag. 112. dis. cit.
(*z*) P. Beccaria in epis. ad Cl. Beccarium.
(*a*) Rohault. pag. 268. n. 24. Muschenb. dis. cit. exp. 66. pag. 121., & exp. 117. pag. 242.

trorum ſuperficies fluere nequit. In electricis vitrum corpore aliquo deferente tegitur, quo vapor electricus colligi poſſit; ita, & in magneticis ſuperficies polorum bracteis ferreis teguntur (quod unum corpus reſpectu fluidi magnetici (4) deferens eſt), ut ſimiliter fluidum magneticum per eaſdem fluere, ac ſimul colligi poſſit; in utriſque ea operimenta ex corporibus deferentibus armaturae vocantur (*b*).

23. Verumtamen non ſufficit, ut vapor magneticus per armaturam ferream fluere queat, ſed praeterea neceſſe eſt, ejus motum omnem ad certam plagam determinari, ut ibidem colligi, & condenſari fluidum illud poſſit; propterea ferreae laminae armaturam conſtituentes pedem ferreum continuum habent, qui ſub magnetem extenditur, & fertur verſus pedem alterum ab oppoſiti poli lamina ſimiliter productum; ita enim magneticum fluidum per unam laminam effluens ad pedem accurrit, unde faciliorem, brevioremque viam invenit, ut ad pedem alterum regrediatur; non ſecus ac, ſi alicubi machinae electricae partes catenae partibus fuerint viciniores, ad eam viam percurrendam omnis vapor electricus determinatur, quod per eam viam minimam reſiſtentiam inveniat (*c*).

24. Cum armatura colligat fluidum per polorum ſuperficies fluens (22), intelligitur cur eo pacto magnes majori ferri ponderi ſuſtentando aptus evadat (*d*); cur item armatus magnes majorem magnetiſmum ferro communicare valeat, quam non armatus (*e*); cur demum magnetis armati virtus, cæteris paribus, ſit in ratione ſuperficierum polarium (*f*).



(*b*) Haec comparatio ab Illuſtri FranKlino propoſita fuit epiſ. 4. ad Collinſonium §. 1.
(*c*) P. Beccaria §. 58.
(*d*) Muſch. diſ. cit. exp. 74. p. 132. 133.
(*e*) Id. l. c. exp. 76. p. 133.
(*f*) Id. exp. 79. p. 135.

25. Quod autem ex armaturae pedum vicinia magneticum fluidum determinetur, ut ab altero in alium fluat (24), ulterius confirmatur observando ex armatura sphaeram activitatis magnetis imminui (*g*), tum armaturam ipsam opposita pedibus parte minimam vim possidere, ac demum armaturae crura, dum versus pedem protenduntur, & proinde majorem magnetici fluidi copiam transferre debent, crassiora etiam fieri debere (*h*).

26. Conjecturam itaque feci vim armaturae crurum auctum iri, siquidem fluxus magnetici fluidi ab uno ad alterum pedem interciperetur, de qua re ut certior fierem, polum cognominem aequalis propemodum virtutis ad armaturae pedem admovi, & revera deprehendi eo pacto illius armaturae crura, tum ad majorem distantiam, tum majori virtute ferrum attraxisse: polus diversus admotus contrarium praestitit effectum.

27. Ideo ferrum a magnete attrahi proposueram, quod ferrum respectu fluidi magnetici corpus deferens sit (3), id vero ex eo confirmatur, quod ferrum molle, & armaturae aptius, proindeque magnetico fluido colligendo magis idoneum validius etiam magneti adhaereat; ferrum item phlogistico destitutum, & armaturae ineptum debilissime a magnete attrahatur (*i*).

28. Ex hac ipsa observatione confirmatur, quod superius indicavimus (16) ferrum magneticum effici ex magnetici fluidi fluxu per ipsum certa directione fluentis; quo enim ferrum durius est, atque adeo ex §. praec. difficilius a magnetico fluido permeatur, eo etiam difficilius, tardiusque magneticam vim acquirit (*K*).

29.

(*g*) Id. exp. 77. p. 134. Encyc. l. c.
(*h*) Id. Essai. de phys. §. 556.
(*i*) Musch. Essai. §. 555. 557. Idem ex eo, quod fluido magnetico chalybs difficilius pervadatur majori vi ab eodem contra magnetem impulsum iri concludit, unde contra magnetici fluidi existentiam argumentum desumit §. 787. p. 313. Confer. etiam eumd. in dis. cit. exp. 33. 39. pag. 127.
(*K*) Encyc. *l.* c.

29. Quando inter corpora positive, & negative electrica corpus deferens aptatur validius utrisque id corpus adhaerebit, quam si alterutro tantum admoveretur, imo majus pondus eo pacto machina, & catena simul elevare poterunt, quam si seorsim in corpora sejuncta actionem suam exercerent; interea tamen fluidum electricum per corpus deferens appositum a catena in machinam redibit, sicque exteriora electricitatis signa extinguentur. Ita ferrum transversim a polo ad polum magnetis traductum, & majus pondus sustinere valet, quam bina ferri frustra seorsim polis appensa, & interea ab uno ad alterum polum fluidum magneticum revehit, sicque sphaeram activitatis magnetis in reliqua exteriora corpora imminuit, ac ferme extinguit (*l*).

30. Idipsum ferrum magnetis virtutem conservat, restituit, dum magnetico fluido certa directione fluenti liberiorem viam praebet, magisque expeditam, ex cujus fluidi certa directione per ferrum, & magnetem fluxu ipsorum vim nasci, servari, augeri superius innuimus (16). Afferti veritatem confirmant annuli chalybei, qui etiam ea directione siti, quae spontaneae directioni sit opposita magnetismum non amittunt, quin imo ex contrario magnetis affrictu aegrius virtutem deperdunt, & licet aliquando amisisse videantur paullo post eamdem recuperant (*m*).

31. Muschenbroeckius observavit, quod si magnes suspensos retinere possit aliquot annulos ferreos sibi invicem admotos, unus autem ex iis ita suspendatur, ut utrumque armaturae pedem simul tangat, tunc hunc unum sustineri, reliquos decidere (*n*); ego vero generatim sum expertus magnetem armatum, qui exteriore unius pedis parte tres claves facile sustentabat, nec unicam sustinere potuisse, quan-

(*l*) Musch. dis. cit. exp. 77.
Encyc. l. c.

(*m*) De la Hire phil. trans. n. 188.

(*n*) Exp. 75. p. 173. dis. cit.

quando ipſarum altera utrumque pedem tangebat: ratio autem perſpicua eſt ex §. 29., quod ſcilicet in poſtremo caſu magneticum fluidum, per appoſitam clavim ab uno in alium pedem traductum per magnetem ipſum circumiret, atque adeo minorem in ferrum extrinſecus admotum actionem exercere poſſet; nil igitur ſingulare eſt in Muſchenbroeckii experimento, nec opus eſt cum eodem confugere ad ferri figuram, ut phaenomeni ratio eruatur: ex eadem ratione intelligi poteſt, cur pes unus magnetis contra albi ferri laminam applicitus multo validius, & copioſius ferri limaturam margini circumpoſitam alliciat, quam ſi ambo armaturae pedes ipſi laminae aptentur; in primo nimirum caſu magneticum fluidum per ferri laminam effuſum ad ipſius margines copioſius pervenit, quam in altero, quando per laminae portionem pedibus interjectam ad ſocium pedem faciliorem invenit regreſſum.

32. Quo vis magnetis major, eo armatura craſſior eſſe debet (*o*), ut, & ferrum tranſverſim adhaerens (29); crura item armaturae dum majorem magnetici fluidi quantitatem ſucceſſive verſus pedes recipiunt, ſucceſſive etiam craſſeſcere debent (25): ergo ferrum nonniſi certam magnetici fluidi quantitatem tranſmittere commode poteſt, cum corpora electricitatem deferentia maximam facillime ferant.

33. Electricitas catenae fortior erit ſi machina corporibus perfecte deferentibus, quam ſi imperfecte deferentibus ſuffulta ſit, & viciſſim machinae electricitas fortior erit, ſi catena perfecte, quam ſi imperfecte deferentibus corporibus ſuffulciatur: ſimiliter vim unius poli majorem fuiſſe deprehendi (*p*), quando oppoſitus polus praelongum ferrum contiguum habebat, quod praeſtantiſſimum deferens corpus eſſe demonſtravimus (27).

34.

(*o*) Id. Eſſai §. 554.
(*p*) Id ipſum a Savery fuerat obſervatum vid. Sag. delle tranſ. filoſof. del Cavaliere Dereham t. 5. p. 100. §. 26.

34. Si folium auri versus catenam apicem suum dirigat, atque inter hoc, & catenam transversim metallum mucronatum admoveatur, bracteae apex eam directionem amittet; sic dum acus ex superposito magnete supra tabulam erigitur, si alia inter illam, & magnetem admota fuerit, prima statim decidet. En igitur phaenomeni explicationem, quod omnes fluidorum currentium leges respuere Muschenbroeckius affirmat, ex quo concludit magnetem non operari effluviis, aut fluido quocumque alio (*q*).

35. Bina fila ex catena, vel machina actu electricis pendentia a se mutuo recedunt (*r*). Ita binae acus apicibus suis ex utrovis magnetis polo pendentes invicem divergunt. 2. Angulum eo majorem fila electrica constituunt, quo major est electricitas (*ſ*). Ita acus angulum majorem constituent, si ex admoto polo validiore ejusdem nominis, poli sustinentis magnetismus augeatur, ad parallelismum accedunt, si admoto ferro, multoque magis ad oppositum polum traducto (29), ejusdem magnetismus minuatur. 3. Fila electrica magis divergunt si ipsis admoveatur corpus deferens (*t*). Ita acus ex admoto ipsis ferro majorem divergentiam acquirunt. 4. Si filum ad contactum corporis deferentis perveniat, ipsi adhaeret (*u*). Ita si acus ferrum attingat, cum eodem jungitur. 5. Quod si fila inter bina corpora aequaliter electrica posita sint parallela evadunt (*x*). Ita si acus inter polos cognomines pendeant ipsarum divergentia minuitur, aut penitus aufertur. Cavendum autem est in hisce experimentis, ne acuum, quae adhibentur, extrema magnetismo, ac praesertim contrario imbuta sint, quod eorum experimentorum eventum perturbare posset.

36.

(*q*) Differt. exp. 54. p. 113.
(*r*) Beccaria §. 94. n. 1.
(*ſ*) Ibid. n. 2.
(*t*) Ibid. n. 3.
(*u*) Ibid. n. 4.
(*x*) Ibid. n. 5.

36. Si maximum ferri pondus, quod a magnetis polo sustentari potest eidem appensum sit, admoto polo diversi nominis alterius magnetis appensum ferrum decidet, si vero ejusdem nominis polus alterius magnetis admoveatur ad eam distantiam, ad quam eumdem repellit, ferrum non modo non decidet, verum etiam aliquot alia pondus cula ipsi appensa sustentabit, quod scilicet in primo casu liberiori facta via fluido magnetico per datum polum fluenti ejusdem affluxus per appensum ferrum minuatur, in altero impedito fluidi magnetici transitu, a fluido contraria directione fluente, id majori copia per appensum ferrum moveri cogatur, quod apprime congruit cum iis, quae §. 26. proposuimus, ex quibus ea lex erui potest polos se attrahentes vim suam in ferrum extrinsecus admotum imminuere contra dum se repellunt majori vi ferrum extrinsecus positum allicere.

37. Docent nonnulli armaturae pedes validius attrahere interna parte, quam externa. Id verum esse tantummodo videtur, quando utriusque pedis externae, internaeve partes simul agunt, per ferrum transversum iisdem applicitum (29), falsum quando agunt seorsim; nam in primo casu fluidum, quod ad vicinum polum copiosius accurrit, per ferrum attractum transit (§. cit.), secus ac in altero casu contingat (§. praeced.).

38. Docent etiam, si pedes armaturae introrsum sub magnetem vergant validius attrahere, quam si vergant extrorsum, quod iterum verum duntaxat esse videtur, quando utroque pede simul utimur; nam si unico pede utamur, is eo debilius adhaerens ferrum sustentabit, quo proximior erit pedi alteri, ad quem divertere potest magneticum fluidum.

39. Quando unico pede utimur majus ferri, quam alterius corporis pondus sustentabit, quando utroque majus alterius corporis quam ferri. In primo enim casu copiosius

ad

ad ferrum, quam ad aliud corpus, fluidum affluet, in altero dum per ferrum diffunditur tanta copia in oppositum polum non redibit.

40. Acuminata porro corpora majori copia electricum fluidum recipiunt, & emittunt (*y*); idipsum in magnetico obtinere videtur: extremitates enim conicae cylindrorum, qui magnetismo imbuti fuerunt pondus ferreum multo gravius sustinent, quam plana eorumdem basis (*z*), & limatura ferri copiosius magnetis, vel magnetici ferri angulis adhaeret, quam planis eorumdem superficiebus (*a*), & anguli armaturae (22) externi, si acuti fuerint vim magneticam imminuunt, ac disperdunt (*b*), non secus, ac metallicus apex catenae, aut machinae adnexus electricam vim imminuit (*c*), & acutum demum ferrum ex affrictu, contra ferrum, aut rigidum aliud corpus, majorem, quam planum ferrum virtutem acquirit (*d*).

41. Cum autem ad eamdem distantiam magnetis actio extendatur, sive corpora, quaevis fuerint interposita, sive nullum corpus intercedat (*e*), inde conjectabam aërem non minus, quam corpora reliqua, fluidi magnetici expansioni resistere, ac propterea coërcentis corporis vicem praestare, qualem aëris resistentiam respectu electrici fluidi experimenta demonstrarunt (*f*). Quamquam enim interpositam flammam electrici vaporis actionem ad longinquius intervallum extendere novissem (*g*) imminuta, ut puto, aëris resistentia, magnetici non item (*h*), quamquam



(*y*) FranKlin. epist. 1. §. 17.
(*z*) Muschenb. dis. pag. 97.
(*a*) Id. l. c. exp. 64. pag. 118., & exp. 116. pag. 241.
(*b*) Ideo in rotunditatem secondos esse monet idem Muschenb. Essai de Physiq. §. 556.
(*c*) FranKlin. epist. 6. §. 76. P. Beccaria §. 191. 232.
(*d*) Muschenb. dis. cit. exp. 245. pag. 268.
(*e*) Saggi di naturali esperienze intorno alla calamita, esp. 1. & 2. Muschenb. dis. cit. pag. 59. & seq.
(*f*) FranKlin. epist. 2. §. 22.
(*g*) P. Beccaria §. 457.
(*h*) Muschenb. dis. cit. exp. 28. pag. 70.

magnetem in vacuo boyleano idem ferri pondus gestare, quod in aperto aëre compertum habuissem, quamquam magnetem in aëre constitutum magnetem alium ad datam distantiam aequali vi attrahere meminissem, sive is in vacuo, sive in aëre collocaretur (*i*); hisce tamen experimentis non acquiescebam, ex eo vel maxime, quod ferrei apices majori copia magneticum fluidum, & emittant, & recipiant (40), ac similis apicum proprietas in electricis ex aëris resistentia in primis nascatur (*K*), etsi in vacuo adhuc obtineat (*l*). Sequens igitur in eam rem experimentum institui. Sub campanam pneumaticam ferramentorum congeriem collocavi, & in suprema recipientis parte notam apposui, ut ad idem punctum semper magnetis polum aptarem, dein ex opposita recipientis parte ad eamdem notae altitudinem acum nauticam collocavi, & tentando distantiam maximam inveni, ad quam acus illa nautica a magnete ad notam apposito commoveri posset; postremo aërem exhantlavi expectans futurum, ut magnetis actio ad acum usque pervenire amplius non posset; siquidem aër magnetico fluido resistentiam faceret; enim vero ablato aëre resistentia minui similiter debuisset fluido ad supposita ferramenta tendenti, hacque ratione aucto ejusdem fluidi ad ea ferramenta affluxu id ab acu averti debuisset; perinde ac catena electrica, cujus extremum per verticem recipientis pneumatici traducitur corpora extrinsecus posita ad datam distantiam agitat, quamdiu aër prohibet ne electricum fluidum in subjectam lancem fluere, ac disperdi possit, ablato autem aëre, & liberiori parata via electrico fluido ad lancem tendenti catenae actio in exteriora corpora extinguitur (*m*). Sed nihil hujusmodi observare con-

(*i*) Id. diss. cit. exp. 25.
(*K*) P. Beccaria §. 217. 218. & seq.
(*l*) Id. §. 235.
(*m*) Consule Beccariam §. 121.

contigit, cum ad eadem diſtantiam magnes in acum ageret, ſive vacuum recipiens eſſet, ſive aëre plenum, ex quo proclive erat concludere per ſpatia aëre vacua aeque difficulter magneticum fluidum moveri, ac per corpora alia quaevis excepto ferro. Quantum porro firma eſt hujus experimenti veritas, tantumdem erroribus obnoxiae eſſent hypotheſes, quae ad id explicandum excogitari poſſent: ſatius igitur erit conſectaria quaedam adnotare; ſcilicet 1. Vapor electricus, dum ex corpore in corpus tranſit ſtridorem edit, magneticus non item 2. Corpora actu electrica auram quamdam excitant, magnetica nil ſimile praeſtant. 3. Interpoſita ut diximus flamma electricam atmoſphaeram ad majus intervallum extendit, magneticam non mutat, quae omnia ex memorata aëris reſiſtentia intelligi poſſe videntur, quae, cum reſpectu electrici fluidi ingens ſit, magneticum non afficiat.

42. Diximus polos ejuſdem nominis utcumque inaequaliter magneticos, tamen ſe repellere (10); id in majori aliqua tantum diſtantia verum eſt, namque in minoribus diſtantiis, non modo vis repulſiva non augetur, ſed minuitur, & tandem in attractivam mutatur, eoque citius, quo virium differentia major eſt: tamdiu nempe ſe repellunt, quamdiu fluidum magneticum per utroſque contraria directione movetur, contraria autem directione movetur, quamdiu polus debilior in tanta diſtantia ab actuoſiori conſtituitur, ut fluidum ab actuoſiori emanans ac in debilius irruens, per debiliorem polum eadem directione non feratur, tunc enim juxta ſancitam motuum legem (10), vis repulſiva in attractivam mutabitur; & revera, quando ad polum dati nominis ejuſdem nominis polus validior admovetur in diſtantia adeo exigua, ut eumdem attrahat tardius, vel citius polus debilior in contrarium mutatur (16), quod demonſtrare videtur magneticum fluidum a validiore magnete erumpens alterius fluidi a debiliori polo contraria

directione effluentis resistentiam vicisse, & propria directione per ipsum permeasse (§. cit.): imo vero caeteris paribus eo citius debiliori poli virtus mutatur, quo inter ipsius vim, & vim validioris major differentia intercedit, & quo magis ad se mutuo admoventur (§. cit.); attractio autem polorum cognominum in data distantia eo item major existit, quo virium differentia major est, & imminuendo sensim distantias vis repulsiva eo citius in attractivam mutatur, quo virium differentia major, eo tardius, quo minor existit, quemadmodum sequentibus experimentis comprobavi.

1. Poli magnetici debilioris virtutem adhuc imminuebant per ferrum transversum eidem admotum (30), tum vero polus validior ejusdem nominis ad exteriorem illius partem admotus longe fortius adhaerebat, quam si nullum hujusmodi transversum ferrum adfuisset, unde patet in contactu polorum ejusdem nominis attractionem augeri, si debilioris poli virtute imminuta, virium differentia augeatur.

2. Quod si ferro transverso non debilioris poli, sed robustioris vim imminuerem, tunc attractiones in contactu similiter minui observabam, imminuta virium differentia.

3. Ad apicem acus magnetismo imbutae, & per filum libere suspensae polum magneticum ejusdem nominis paullatim admovebam, & ad hujus latus ferream clavim aptabam, quando autem ad talem acus viciniam polum adduxeram, ut jam vim repulsivam in attractivam mutandam fuisse conjectarem, si clavis abfuisset, ipsam auferebam, eodemque, ut plurimum momento acus ad magnetem apice suo ferebatur, id ipsum luculentius adhuc transverso ferro, aut polo diversi nominis admoto, tum sublato, sicque vi imminuta, ac dein restituta experiri licebat, unde constitit polos cognomines ad distantiam eo majorem se attrahere, quo inter eorum vires differentia major intercedit.

Cum

Cum igitur eae conditiones, quae efficiunt, ut dati poli vis directiva tardius, citiusve mutetur, eaedem efficiant, ut is a cognomine polo proximius, remotiusve, tum validius, debiliusve attrahatur, cumque mutata poli directio a contrario fluxu magnetici fluidi producatur (16), inde confirmari videtur repulsivam quoque vim in attractivam ob eamdem caussam mutari, ob servatam scilicet a fluido validioris poli per debiliorem propriam directionem (*n*).

43. Muschenbroeckius, quando in minori aliqua distantia polorum vis repulsiva minuitur, aut extinguitur, non revera minui, aut extingui censet, sed cum attractiva duntaxat conjugi, quae magis crescat, quam repulsiva imminutis distantiis, & proinde eamdem aequet, aut superet, unde, vel nulla vis repulsiva remaneat, vel etiam attractiva nascatur (*o*). Haec vero Muschenbroeckii sententia confirmatur experimento 3. §. praeced., nam clavis robustiori polo admota debiliorem acus polum certe non repellere, sed potius attrahere debuisset, & tamen repulsivam vim servabat, quod praestitisse videtur attractivam vim validioris poli in debiliorem, imminuendo, quae si integra fuisset repulsivam facile superasset, atque extinxisset.

Quae quidem Muschenbroeckii theoria cum principiis nostris egregie consentit; nam fluidum magneticum ad debiliorem polum spectans, & fluido robustioris poli resistens vim repulsivam facit; excessus virium fluidi ad robustiorem polum spectantis, quo debilioris fluidi resistentiam superat, & per debiliorem polum propriam directionem servat, attractionem producit.

44.

(*n*) Mitchelius ideo vires repulsivas, imminutis distantiis, imminui censet, quod poli repellentis debilioris virtus imminuatur (Encyc. l. c.) sed saepe observatur in aliqua distantia vim repulsivam imminui, aut etiam in attractivam mutari, etiamsi debilior polus debilitari, aut mutari adhuc non potuerit. Enim vero fluxus fluidi certa directione sufficit ad attractionem faciendam, ut vero magnetismum mutet per tempus aliquod debet perdurare (16).

(*o*) De magn. exp. 15., ubi si attractivae vires a repulsivis subtrahantur has certas reciprocas distantiarum proportiones servare adnotavit.

44. Chalybis porro temperati magnetiſmo imbuti virtus caeteris paribus difficilius, quam ſimplicis ferri virtus a robuſtiori polo mutatur (*p*): An non ideo, quod difficilius validioris poli fluidum per chalybem, quam per ferrum ſibi viam faciat (28)? An non itaque debilius chalybei poli ejuſdem nominis ſe attrahere debent, & ad minores diſtantias, quam poli ferrei, ſiquidem ea, quam propoſui, theoria locum habeat? Ex eadem quoque theoria intelligitur, cur poli cognomines, quamdiu ſe repellunt ſuas vires in ferrum extrinſecus admotum mutuo augeant (36), quando vero jam repulſio in attractionem mutata eſt potius imminuant; quamdiu enim ſe repellunt fluida contraria directione lata ſe mutuo coërcent, quando vero ſe jam attrahunt a robuſtiori polo in debilius, vel contra magneticum fluidum movetur, atque adeo in primo caſu per ferramenta extrinſecus admota fluidum illud adigitur, in altero per admotum polum diſſipatur.

45. Magneticae acus directio ea eſt, ut uno extremo fluidum magneticum recipere, altero emittere quam commode poſſit, quam proprietatem electricorum corporum phaenomenis analogam eſſe ſuperius monuimus (21), inde vero fit, ut ferrum magnetiſmo deſtitutum, ſi collocetur in eo ſitu, ad quem acus ſponte ſe dirigit ex magnetici fluidi juxta eam directionem fluxu magneticum evadat (*q*), imo eamdem magneticam vim acquirat, ſi juxta lineam conſtituatur, quae meridianam magneticam ad angulum quemvis interſecet, ſed eo tardius, debiliuſque, quo angulus major fuerit, donec ad angulum 90° nullam adipiſcatur (*r*): ferrum quoque eo citius vim eam acquirit, quo longitudo majorem ad craſſitiem proportionem habuerit. & quo mollius fuerit, multoque majorem ſuſcipit, ſi candens eo in ſitu ſponte, aut aqua frigida affuſa, refrigeſcat: extre-

(*p*) Encyc l. c.
(*q*) Muſchenb. diſ. exp. 132. pag. 216.
(*r*) Id. l. c. ab exp. 133. ad 136.

tremitas autem, qua ad polum boreum inclinat, borealem polum, qua inclinat ad australem, australem acquirit, & ex contrario situ vim pristinam amittit, oppositamque adipiscitur (*s*), quae omnia cum iis conveniunt, quae de magnetismo per magnetem inducto observata sunt (16.20.) unde recte Muschenbroeckius conclusisse videtur (*t*), *vim magnetis terrestris esse admodum universalem, eam se extendere per totum terrarum orbem, agere in omne ferrum, id dirigere haud aliter, quam ferrum allici, regique a magnete observetur.*

46. Acus vero ferrea magnetismo destituta, debilius quidem, dirigitur tamen juxta meridianam magneticam, sed indiscriminatim, quae extremitas polo telluris septentrionali proximior est ad illum convertitur, quae vero australi ad australem dirigitur, & inversa acus aeque facile contraria directione se collocat, quamdiu ex diuturna mora in aliquo situ constantem magnetismum non acquisivit (*u*): ea enim directione se collocat, qua viam faciliorem praebeat magnetico fluido certa directione fluenti (21), quapropter cum id fluidum, quamdiu magnetismo destituta est oppositis directionibus juxta ejus longitudinem aequali facilitate feratur (15. 17.), idcirco oppositas directiones indiscriminatim acus affectabit.

47. Neque solum terrestris magnetis actio manifesta fit, quando ex diuturno magnetici fluidi per ferrum fluxu id magneticum demum evasit (44), verum etiam in ferro magnetismo destituto ejusdem effectus observantur; nam si virga quaevis ferrea in situ quovis collocetur, ut meridianam magneticam intersecet, mediatas virgae, quae ad polum magneticum borealem telluris inclinat vim poli septentrionalis ostendit, quae ad australem, australis, inversaque virga eae medietates contrarium polum protinus exhi-

(*s*) Id. loc. ult. cit.
(*t*) Exp. 146. pag. 268.
(*u*) Savery. vid. sag. delle transf. del Cav. Dereham t. 5. §. 32. pag. 102.

exhibent, ita ut polaritas, quae reſpectu telluris conſtans eſt, reſpectu virgae ferreae ex mutato ſitu mutetur, donec ea virga conſtantem magnetiſmum ex diuturna mora in certo ſitu non fuerit adepta (*x*), ex quibus, & vis magnetis terreſtris conſpicua efficitur, & confirmatur magnetiſmi contrarietatem in contraria magnetici fluidi directione reponendam eſſe, & demum evincitur ferrum magnetiſmo deſtitutum a magnetico fluido aeque facile quacumque directione permeari (15. 17.), cum eadem virga magnetico fluido oppoſita directione fluenti, tam facilem tranſitum praebeat, ut ipſius extremitates ex inverſione in oppoſitos polos illico mutentur.

48. Quoniam ferrum ex magnetici fluidi juxta certam directionem fluxu magneticum fit, ex contraria ejuſdem fluidi directione contrarium acquirit magnetiſmum (16.45.), quoniam facilius ex fluido per meridianum excurrente, vel a magnete prodeunte vim magneticam acquirit, ſi ex igne molle, ſponte, vel ſuperaffuſa aqua refrigeſcat (*y*), quoniam chalybs durior difficilius magnetiſmo imbui poteſt (*z*), ſed majorem recipit, & diutius ſervat (*a*), quoniam ignitio (17), percuſſio, attritus (*b*) magnetiſmum deſtruunt, inde confici videtur magnetiſmum in certa partium diſpoſitione ſitum eſſe, ob quam ferrum magnetico fluido ex una parte recipiendo, ex altera emittendo aptum ſit, eamque diſpoſitionem ab ipſo fluido induci, tum auferri poſſe, idque eo facilius, quo ferrum fuerit mollius.

49. Carteſiani, qui motus magneticos ex ſolis mechanicis legibus explicare contendebant, partibus magnetici fluidi, tum magnetis, ac ferri poris figuram tribuerunt, quam

(*x*) Id. l. c. §. 18. pag. 97.
(*y*) Conf. loca cit. §. 16., & 45.
(*z*) Encyc. l. c.
(*a*) Muſchenb. diſ. pag. 232.
(*b*) Id. pag. 73. 74.

quam maxime opportunam eſſe opinabantur, aëris quoque reſiſtentiam, ac reactionem huc accerſerunt; cautiores alii, ut Muſchenbroeckius (*c*) Wiſthonus (*d*), cum Carteſianos ſcopum non attigiſſe animadverterent, vel ipſius magnetici fluidi exiſtentiam in dubium revocarunt. Ego ad mechanicas rationes omnia exigere minime potui, ac ne ſtudui omnino quidem, cum nec ipſa electricitatis theoria uſque eo perduci potuerit; malui igitur analogia ductus theoriae electricae innumera, ſejunctaque phaenomena ad certas claſſes revocare: nec vero diſſiteor hanc me comparationem multo, quam fecerim, verſare potuiſſe accuratius. At ſumma tantum capita ſpeciminis loco attingenda eſſe putavi, ne in re facili nimia prolixitas lectori moleſta evaderet.

§. 50. De Analogia inter fluidum electricum, ac magneticum hactenus: nunc de identitate horum fluidorum aliqua eſſent addenda. Et experimenta quidem nupera, per quae acus magnetica fit artificiali electriciſmo, aut ipſius poli mutantur; tum obſervationes, quibus conſtitit acus nauticae directionem vi fulminis mutatam fuiſſe, identitatem confirmare utique poſſent; ſi definitum eſſet, utrum electricum fluidum magnetiſmum inducat magnetici fluidi vices gerens, an agat duntaxat ad inſtar communis ignis (*e*), quod olim Muſchenbroeckius propoſuerat (*f*), quae minus dubia forent, ſi certis experimentis conſtaret, num extremitates acus quae meridiem, & ſeptentrionem reſpiciunt

 po-

(*c*) Diſ. p. 57. & ſeq., & a p. 63. ad 76., & p. 218., & Eſſai §. 587.

(*d*) Apud eumdem p. 65. diſ. cit. Cl. Monnier in act. Acad. R. S. P. an. 1733. contra fluidi magnetici receptam theoriam argumenta propoſuit.

(*e*) Revera ad magnetiſmum inducendum tanta requiritur electrici fluidi copia, talis acus inter vitreas laminas diſpoſitio, tanta ejuſdem tenuitas, ut electricum fluidum acus colorem mutare, quin imo ipſam liquefacere poſſit (Cl. D. Alibard. in addit. ad FranKlinum t. 2. pag. 137. 147. 148.) atque adeo effectus praeſtare, qui ab ignis violentia producuntur.

(*f*) Diſ. pag. 225. exp. 106.

polum constanter acquirant cognominem plagae, ad quam diriguntur, quaecumque fuerit directio fluidi electrici acum permeantis, num contra in quocumque acus situ extremitas, per quam electricus vapor ingreditur, septentrionalis, per quam egreditur australis perpetuo evadat (*g*), num demum acus juxta aequatorem magneticum collocata ex electricitate nullum magnetismum acquirat, quemadmodum ignitum ferrum eo in situ refrigeratum nullum adipisci experimenta demonstrarunt (45).

51. Caeterum contraria, quae se se offerunt argumenta minime reticenda videntur. Scilicet primo magneticum fluidum dum a magnete ad ferrum, vel a ferro ad magnetem fluit, per interpositam aëris laminam, etiam in tenebris non lucere, quod electricum fluidum facere solet. 2. Ab aëre resistentiam nullam pati, nec ab interposita candela ejus actionem mutari, nec stridorem edere, auramve excitare (41), quae omnia phaenomena in electrico fluido observamus. 3. Magnetem ipsum frictione electricum fieri, tumque novam proprietatem acquirere a priori distinctam, cito cessantem. 4. Resinosa, serica corpora, quae fluidum electricum coërcent, magneticum non magis, quam caetera coërcere 5. Metalla omnia, ferro excepto, quae fluidum electricum deferunt, magneticum non magis, quam caetera deferre (*h*). 6. Corpora deferentia electricum fluidum maxima copia deferre facile posse, deferentia electricum nonnisi certa quantitate (37) 7. Ex affrictu corporum electricum fluidum deferentium vim nullam electricam nasci, contra ex ferri contra ferrum certa lege affrictu maximum magnetismum produci. 8. Demum eas tempestatum mutationes, quae electrica phaenomena insigniter

(*g*) Non consentiunt FranKlini, & D. Alibardi experimenta t. 2. p. 144. 145.
(*h*) Musch. Essai. §. 187. n. 3.

gniter mutant, non eodem modo magnetica afficere, contra, quae magnetica afficiunt, non ſimiliter afficere electrica (*i*), quae omnia fluidorum horumce identitatem, ſi non refutare, at certe dubiam reddere poſſe videntur.

(*i*) Encyc. artic. cit.

# EJUSDEM.

## De colore Sanguinis experimenta nonnulla.

COccineum rutilumque ſanguinis colorem, exhauſto aëre, in atrum, & nigricantem converti Cl. Viri ſcripſerunt (*a*), cum contrarium alii traderent ſupremam nempe ſanguinis ſuperficiem in vacuo non minus, quam in aperto aëre rutilum colorem ſervare (*b*). Quod quidem experimentum cum multis phyſiologicis graviſſimis quaeſtionibus illuſtrandis opportunum eſſe animadverterem, ea cautione, eaque diligentia renovari cupiebam, ut nullum de ipſius eventu dubium ſupereſſet. Itaque Virum experientiſſimum J. B. Beccaria rogavi, ut idipſum ſuſciperet, quod humaniter praeſtitit, quemadmodum ſum expoſiturus.

1. Sanguinem ex homine febricitante eductum, & quaſſatione ſolutum in bina pocula vitrea aequalia, & ſimilia infudit, horum alterum ſub recipiens pneumaticum collocavit, alterum in aperto aëre reliquit. Subducto aëre ſanguinem ſub recipiente poſitum inſigniter elevari, in ſpumam faceſſere, intumeſcere in bullas obſervavimus ſenſim increſcentes, quae tandem diſruptae aërem emittebant elaſticum, ex quo altitudo mercurii in appoſito indice augebatur: interea color ſanguinis eleganter floridus, & rubicundus perſeverabat.

Cum vero repetitis diu exantlationibus omni aëre exhauſtus ſanguis ſubſediſſet, floridum colorem cum atro, & nigricante mutavit, quemadmodum ex comparatione cum eo, qui extra recipiens erat, facile innotuit; etenim non in ſuprema tantum ſuperficie, verum etiam in tota mole multo obſcurior, ac nigrior deprehendebatur; poſtremo cum poculum

(*a*) Dorſten apud Haller n. 9. ad §. 203.
(*b*) Gorter comp. trac. 31. §. 9. n. 9., & Rega conſent. SchvvencKe haematol. p. 116.

culum eductum ex recipiente fuiſſet, paullo poſt contentus ſanguis rutilum in ſuprema ſuperficie colorem recuperavit, & rutili ſtrati craſſities, aëre profundius pervadente, ſenſim, ſenſimque increſcebat, adeo ut poſt aliquod tempus totum ſanguinem aeque rutilum, ac prius, ſe inveniſſe Cl. Beccaria narraret.

3. (α) Cum igitur aër ſanguini admixtus ruborem faciat, inde cum Lovvero intelligimus, cur ſanguis venae pulmonalis, perinde ac arterioſus floridus ſit, cur contra arteriae pulmonalis ſanguis perinde ac venoſus atro colore inficiatur.

(β) Cur poſtquam ſanguis arterioſus, & venoſus per aliquot minuta aëri expoſitus fuit omne coloris diſcrimen tollatur (*).

(γ) Cur item, obturata trachea, & impedito aëris acceſſu ad pulmonem id diſcrimen ſanguinis arterioſi, & venoſi tollatur.

(δ) Cur inflato in cadavere pulmone, eadem diverſitas reſtituatur (*c*).

(ε) Cur rejectus ex pulmone ſanguis ſpumoſus floriduſque eſſe ſoleat.

(ζ) Cur in foetu, qui pulmone non utitur, ſanguis obſcuri, & rubiginoſi coloris, & aquoſus perpetuo reperiatur (*d*).

(η) Cur in eryſipelate, aliiſque morbis, quos ingruens putredo comitatur, ſanguis intenſe floridus, ac rutilus obſervetur (*e*), aëre nempe putredinis vi ex eodem prodeunte, cur item in confirmata putredine, omni prorſus aëre difflato, ſanguinis color niger, & luridus evadat.

(θ) Cur

(*) Hammerſchmidt. in diſput. cui titul. notabile diſcrimen inter ſanguinem arterioſum, & venoſum §. 22.

(*c*) Vid. Lovverum de mot. cord. p. 159. & ſeq., & conſentientes Bohon, Duverney apud Haller n. 11. ad §. 200.

(*d*) Obſervante Haller l. c.

(*e*) Gorter. Chirurg. §. 14. 29. & alibi.

(ϑ) Cur demum in gangraena partes emphysematicae evadunt aëre vi putredinis prodeunte, tumque sanguis ex scarificationibus effluens nigro colore inficiatur.

Sanguis quassatione solutus, & aequabili rubore praeditus, dum putrescit, ruborem amittit, nigrumque colorem acquirit, & primo quidem ea mutatio in superiori sanguinis strato contingit, quae pedetentim ad inferiora strata progreditur, quemadmodum in suis circa putredinem experimentis D. Gaber observavit, cujus phaenomeni ratio esse videtur, quod superiora strata putrescentia aërem facilius emittant, quam illa, quae iisdem subjiciuntur.

Definiendum autem superesset, num sanguis ruborem in pulmone receptum in venis amittat ex eo, quod aërem per corporis superficiem expellat (*f*), an quod aëri elasticitatem demat, & rubori servando imparem efficiat, inde enim forte intelligeretur, cur diversitas sanguinis arteriosi, & venosi aliquando maxima, alias nulla fuerit observata (*g*).

4. Sanguis porro quamdiu solutus est, aequaliter coloratus apparet, dum autem concrescit in suprema superficie ruborem servare, in infima nigrum colorem induere ab antiquissimis temporibus est observatum (*h*), idque post Galenum (*i*), veteres plerique tribuerunt humori melancholico, qui reliquo sanguine gravior, & nigrior proprio pondere ad infimam vasis partem delaberetur, interea dum cruor specifice levior supernataret, nec multum ab hac theoria recesserunt recentiorum non pauci, qui ruborem parti magis sulphureae, leviori, tenuiorique tribuerunt, inferioris partis nigredinem densiori, magisque terrestri sanguinis

(*f*) Quae Mery sententia est apud Haller. n. f. ad §. 201., quam idem Hallerus rejicit n. a ad §. 432.

(*g*) Haller prim. lin. phys. §. 117. 206. caeterum eam diversitatem nuper confirmavit Hammerschmidt. disp. cit. §. 22.

(*h*) Arist. hist. anim. lib. 3. cap. 19. Hippoc. de gland. 1. 6.

(*i*) Com. in 3. epid. 1. 5. de atra bile toto libro, de elem. 2. 12.

guinis parti adſcribendam eſſe exiſtimarunt (*K*), & quamquam, inverſa ſanguinea placenta, ut inferior ſuperficies ſuprema evaderet, quae vero ſuprema fuerat in inferiorem abiret, illam rubrum, hanc nigrum colorem induere cernerent (*l*), id nihilominus tribuere maluerunt gravioribus, & nigrioribus ſanguinis partibus, quae ſuperiora deſerant, & proprio pondere ad inferiora trudantur (*m*), quamquam non levis erat objectio in maſſa ſolida, & concreta, qualis ſanguinea placenta eſt, haud facile partes juxta variam ſpecificam gravitatem diſtribui poſſe: ut igitur phaenomeni cauſſam aſſequerer, ſequentia experimenta inſtitui.

5. Sanguinem ex vena hominis pleuritici eductum ſtatim affudi aequali quantitate in bina pocula vitrea aequalia, & ſimilia. Alterius ſuperficiem ſuperaffuſo oleo ad pollicis altitudinem cooperui, alterum in libero aëre reliqui, in utroque ſanguis coagulabatur, & is, qui aëri expoſitus erat rutilum admodum ruborem in ſuperficie aëri contigua contrahebat, reliqua ſuperficiei pars, quae poculi parietes tangebat in atrum colorem mutabatur: ſanguis vero alterius poculi, educto per ſyphonem oleo, aequabiliter niger eſt deprehenſus, interea aëri expoſitus ruborem in ſuperiori ſuperficie adeptus eſt, in aliquibus tantum locis, ubi oleo adhuc inunctus erat, nigrum colorem ſervavit. Id deinceps experimentum in recenti vitulino ſanguine coram Cl. Beccaria, pari ſucceſſu, renovavi.

6. Cum igitur nigricans color non in infima tantum ſuperficie naſcatur, verum etiam in quacumque alia poculi parietibus contigua (*n*) patet nigredinem non fieri a partibus gravioribus fundum petentibus: imo cum ſuprema

etiam

(*K*) SchuvencKe Haematol. cap. 11. p. 117. Gorter compend. trac. 31. §. 22. n. 3. alii permulti.

(*l*) Notante primum Fracaſſato in tranſ. phil. anni 1667. num. 27. art. 4., qui id aëri tribuit.

(*m*) ScuvencKe l. c., qui globulos alios prae aliis ponderoſiores eſſe docet.

(*n*) Conſent. Boer. Chem. t. 1. p. 261. edit paris.

etiam ſuperficies atro colore infecta ſit, ſi tenui olei ſtrato obtegatur manifeſtum fit ab immediato aëris attactu ruborem oriri: errant propterea, qui putant ruborem a levioribus partibus eſſe repetendum, niſi forte eo ſenſu leviores eſſe velint, quod ob contiguum, admixtumque aërem aliquanto ſolutae, minuſque invicem cohaerentes ſtratum efforment ſpecifice levius (*o*), interea dum partes ipſae a reliquis ſanguineae maſſae partibus nullo modo differant.

7. Hanc etiam partium ſpecifice leviorum hypotheſim alio experimento refutare aggreſſus ſum, quod a Lovvero olim jam tentatum inveni (*p*), ſupremam nempe rubicundam coagulati ſanguinis ſuperficiem cultro abradebam, & nigricantem ſubjectam ſuperficiem deregebam, quae, ubi per breve tempus aëri expoſita fuiſſet, novum rubicundum ſtratum priori ſimile ſuppeditabat, atque eo pacto repetita abraſione totam ſanguineam placentam in rubra ſtrata convertere facile potuiſſem.

8. Praeterea vero, ſive amplo, ſive anguſto vaſe ſanguis recipiatur, in ſuprema tantum ſuperficie rubicundus apparet; attamen ſi ex particulis datae ſolummodo gravitatis rubor oriretur, eo craſſius rubicundum ſtratum eſſe deberet, quo vas arctius, craſſius item, quo major copia ſanguinis in eodem vaſe contineretur, nec fieri poſſet, ut modica ſanguinis copia in amplum vas effuſa tota rubeſceret; quemadmodum quotidianis experimentis comprobatur.

9. Poſtremo ſanguineam placentam mox ex poculo eductam, atque adeo in lateralibus, & inferiori ſuperficie nigricantem reti ſuperimpoſui, & non multo poſt in lateralibus, & inferiori ſuperficie aeque florida evaſit, ac in ſuprema, ut aequabiliter colorata quaquaverſum deprehenderetur.

10.

(*o*) Quae LeuvvenhoecKii ſententia eſt in obſervationibus circa ſanguinem menſ. Junii 1674.

(*p*) Loc. cit.

10. Ex his autem etiam eorum ſententia infirmatur, qui inferiorum partium nigredinem ex ſuperiorum pondere, aut preſſione oriri autumant; obſervavimus enim tenuiſſimum olei ſtratum ſanguinis ſuperficiem inungens nigritudinem ſervare, ex quo tamen vix ulla compreſſio poteſt expectari; deinde, ſi nigrities ex incumbentium partium preſſione oriretur, prout ſanguis profundior eſſet, magiſque compreſſus, eo majorem nigredinem acquireret, cum tamen iis in locis, quibus aërem non attingit, aequabiliter niger conſpiciatur.

11. Quoniam igitur ſuprema ſanguinis ſuperficies rubra eſt, quando aërem tangit, nigra, quando aër ab eadem arcetur (5), & ſimiliter infima ſuperficies, quae nigra eſſe ſolet, admiſſo aëre, rubeſcit (9), quoniam ſanguis totus rubeſcere poteſt, ſi vel ſimul, vel ſucceſſive aëri totus exponatur (7. 8.), quoniam rubor, & nigrities, non per ſucceſſivos gradus aut creſcit, aut minuitur pro altitudine incumbentis ſanguinis, ſed aequabilem ruborem, & aequabilem nigredinem ſanguis acquirit (10), quoniam aëre exhauſtus ſanguis niger evadit (2), manifeſtum fit ab aëris attactu ſanguineae placentae ruborem oriri.

12. Ex his intelligitur, cur ſi conquaſſatione aër ſanguini admiſceatur, & tardius concreſcat, & majorem ruborem acquirat (*q*).

Cur ea, quae ſanguinem fluidum ſervant, eadem ruborem ſervare ſoleant, & contra.

13. Sanguis porro, dum concreſcit, denſior evadit (*r*), & interim ruborem, ut diximus, amittit: errant igitur, qui ex majori denſitate ſanguinis arterioſi, & condenſatione in pulmone nata ipſius ruborem deducunt: quod ſi in pulmone, non maſſae ſanguineae, ſed globulorum denſitatem augeri intelligant, quo id tandem experimento comprobarunt? Profecto inter globulos ſanguinis arterioſi, & venoſi nullum

k dif-

(*q*) Ex Lowero, Haleſio aliiſque.
(*r*) Jurin in compend. tranſac. philoſophic. verſione italica Derehami tom 3. pag. 3. exp. 13.

discrimen microscopii ope detegere potuit Hammerschmidtius (*s*), quod ostendit coloris diversitatem non in componentibus particulis, sed in varia earumdem miscela, ac dispositione positam esse.

14. Cum in foetu sanguis aquosus simul, & obscurus deprehendatur, (3-ζ) patet ex sola seri mixtione ruborem non oriri.

15. Ad attritum quod spectat, ex quo ruborem in pulmone nasci plerique existimant, jam recte opposuit Lowverus in musculis multo magis, quam in pulmone sanguinem atteri (*t*), attamen ab ipsis nigricantem prodire, & praeterea adnotandum in ejusdem Lowveri experimento, in cadavere strangulati canis, inflato pulmone, sanguinem comprimi potius, quam atteri debuisse, nihilominus ruborem sanguini fuisse restitutum, ac proinde soli attritui ruborem in pulmone natum minime esse adscribendum.

16. Neque vero facile est definire, cur coagulatus sanguis ea in parte, qua aërem non attingit, niger evadat; num ex eo, quod liber aëris per sanguinem transitus prohibeatur, qui dum libere permeat salia, vel quid aliud deponat rubori servando aptum, quod non videtur; nam in clauso etiam spatio suprema sanguinis pars rubicunda diutissime remanet, dummodo tenuem aëris lamellam superpositam habeat; num ex eo, quod atmosphaerae pondere sanguis prematur, quod iterum probabile non est; siquidem atmosphaerae pressionem non minus superficies patitur oleo inuncta, quam ea, quae immediatae aërem contingit; num demum aër sanguini admixtus, & globulis sanguineis interpositus ruborem servet, contra concrescens cruor contentum in poris aërem expellat, vel ita fixum reddat, ut rubori efficiendo impar evadat, quod aucta concreti sanguinis densitas, & emissus ab aliis concrescentibus fluidis aër confirmare quodammodo videntur.

JOH.

(*s*) L. c. §. 6.

(*t*) Consentit Cl. Sauvages Phys. elem. pag. 110.

# JOH. BAPTISTAE GABER

## *Specimen experimentorum circa putrefactionem humorum animalium.*

QUanti Medicinam, & naturalem scientiam intersit putrefactionis historia, jam ipse noverat Philosophiae instaurator Verulamius, qui Medicis idcirco, & Philosophis saepe auctor fuit, ut illius caussas, modos, & phaenomena diligentius pervestigarent; eaque passim commoda significavit, quae in affines facultates derivari possent. Atqui tanti Viri monita usque adeo neglecta sunt, ut vix pauci rem tam necessariam tractandam, & illustrandam susceperint; sed plerique ex aliis quaecumque extiterant experimenta, & observationes describere, aut ex praeconceptis opinionibus consectaria deducere maluerunt, quam rem tentare, & scrutari diligenter: ex eo fortasse etiam praetextum aliquem nacti, quod videbant Chymicorum sectam, & quidquid Chymicam saperet male audire apud prudentiores Medicos, qui ex illius abusu tantam intelligebant rei Medicae perniciem illatam. Sed egregiam huic facultati navavit operam Clariss. Pringle, qui rem diu ante neglectam retractandam adgressus est, novasque aperuit in tam multiplici, & complicata disquisitione proficiendi, progrediendique vias. Magni hujusce Viri exemplo, & monitis excitatus ejus vestigia persequi constitui, quod & rei utilitatem perspectam haberem, & vitae, officiique mei ratio commodam mihi occasionem exhiberet hujusmodi tentandi experimenta. Neque tamen totam simul putrefactionis historiam investigandam suscepi, ne pluribus intentus minorem in singulis diligentiam adhiberem. Solos humanos humores, neque omnes, sed praecipuos tantum per experimenta scrutatus sum, cum haec cognitio prae caeteris omnibus plurimum conducere videatur ad multorum morborum internas caussas detegendas, eorum effectus, seu symptomata explicanda, atque ideo ad indicationes eruendas. Quoniam autem experimenta nostra cum Pringlianis minime conveniunt, caussas idcirco ex ipsis experimentis eductas aperiam, quibus eventuum diversitatem adscribendam puto.

Lubens omitto inutilia omnia tentamina, qualia antequam aliquid certi in hoc genere assequi possem, fere innumera instituere opus fuit: ea duntaxat recensebo, quae novam aliquam lucem videntur suppeditare.

1. Quinquagenarius vir absque febre inveterato ictero confectus est. Cadaver integro nychtemero, brumali tempore, loco frigido repositum fuerat: hoc transacto temporis intervallo, dissecabatur: conspiciebantur crassa intestina cinereis foecibus infarcta, tenuia flavescente muco hac illac conspersa, cysticus, & choledocus ductus pervii: cystis ipsa bilis in atrum vergentis ingenti copia distendebatur. Vesicula pertusa bilem vitreo vase excipiebam, modicum foetebat, viscida erat, & tenax: minusculae hujus portioni unam, vel alteram aquae fortis guttulam affudi: effervescebat, erumpebant ad liquoris superficiem aereae bullae cum sibilo, qui admoto ad aures vasculo percipiebatur, atque ipso tactu sentiebam liquorem incalescentem.

2. Superstitem bilem in tres portiones distinctas totidem vitreis vasis apertis infudi, vario situ, & vario caloris gradu distribui; unum in hypocausto ad trigintaquinque circiter gradus Reaumuriani Thermometri calefacto, alterum in alio hypocausto, quod viginti quinque tales calebat gradus, tertium vero cubiculi servabat temperiem, quae inter septimum, & decimum fere continebatur. Viginti quatuor horis elapsis singulas portiones acidis exploravi. Quae bilis triginta quinque graduum calori fuerat exposita, ea dilutior evaserat, vixque indicia levissimae

effer-

effervescentiae praebebat: bilis, quae vigintiquinque gradus caloris passa fuerat, diluta quoque apparuit, cum acidis aliquanto magis, sed parum admodum efferbuit: quae demum fuerat in cubiculi temperie relicta suam viscriditatem servaverat, & aeque vehementer, ac antea (1) cum acidis conflictabatur. Quod postremum experimentum coram Equite Salutio, Ludovico de la Grange, D. Cigna, & Mich. Ant. Plazza luculentissimis testibus, aliquot exinde horis simili eventu renovavi.

3. Ex ejusdem cadaveris vena eodem tempore eductus sanguis rubro-flavescentem exhibebat colorem. Ejus sanguinis portio simulac fuit educta, & nitri spiritu dilutiori permixta effervescentiam similiter exhibuit, multo tamen minorem, quam bilis; quo sanguine in digestione per paucas horas relicto, flavum serum a cruore secedebat, quinimo flavo colore superficies cruoris inficiebatur. Idem sanguis per tantumdem temporis, ac bilis in hypocaustis servatus majorem effervescendi vim retinuit, quam bilis, quae vis ex mora sensim hebescebat.

4. Ex hujusmodi observationibus haec videntur posse deduci consectaria.

1° Tantam in morbis nasci posse alkalescentiam, ut humores cum acidis effervescant: neque enim probabile est, eam in cadavere mutationem contigisse, quod per horas viginti quatuor servatum fuerat in loco frigido, ubi per plures dies servati humores sani ad talem alkalescentiae gradum vix pervenissent.

2° Levem putredinis, & foetoris gradum, qui extra corpus nullum adhuc alkali praebet, quemadmodum experimentis inferius exponendis constabit, intra animale corpus alkali producere.

3° Alkali intra corpus genitum, & bile contentum volatile admodum esse, & expeditum, quippe quod vigintiquinque graduum calore tam brevi tempore maxima ex

parte

parte in auras avolaret, secus a reliquorum elementorum nexu aliquanto magis intricatum esse illud alkali, quod in sanguine continetur, minusve volatile, quum per idem tempus, eodem calore, minor ejusdem portio dissiparetur.

5. Ex postrema hac observatione conjecturam feci, an forte in tentaminibus, quae circa putredinem fuerunt instituta, ex quibus indubias alkali notas nonnulli comperisse affirmant, alii vix levissimas observasse testantur, eventuum discrepantia ex vario caloris gradu, varia corruptorum corporum aetate, majori, minorive geniti alkali libertate repetenda esset.

6. Non aliter ac bilem corruptam, integram bilem tentavi, sanguinis cruorem, & serum: singulorum tres distinctas portiones memoratis (2) tribus diversis caloris gradibus exposui, & quum acidis mineralibus eos liquores quotidie explorarem, deprehendi omnium humorum citissime bilem efferbuisse (*a*), & citius adhuc humanam, quam bubulam; aliquanto tardius cruor corruptus cum acidis efferbuit, omnium tardissime serum effervescentiam exhibuit. Quae porro effervescentiae iisdem phaenomenis distinguebantur, quae paullo ante memoravi (1); neque vero cum solis acidis mineralibus corrupti humores effervescebant, verum etiam cum dilutissimo aceto distillato confligebantur. Quae artificiali calori expositae fuerant humorum portiones foetorem citius, & effervescentiam dederunt; citius quinimo pervenerunt ad summum effervescentiae gradum, quem cum attigissent, continuato ejusdem loci calore effervescendi vim non solum amiserunt (*b*), sed ingratissimum

(*a*) Inter omnes humores citissime putrescere. Baglivi Oper. omn. p. 439.; & digestam sal alKali copiosius dare. Henninger de bile. Argent. 1705. apud Haller not. 2. ad §. 99.

(*b*) Imo serum in hypoc. ad 35. calido nunquam efferbuit, argumento dicendi alKali in sero natum ex eo caloris gradu dissipatum fuisse ea proportione, qua gignebatur.

mum foetorem in herbaceum, ac minime injucundum odorem commutarunt (*c*). Caeterum multo citius plerumque prodiit foetor, quam alkalescentia, idemque tardius desiit.

7. Dixi corruptos humores cum acidis mineralibus efferbuisse, quod ut clarius designem, notare juvat me ut plurimum aqua forti usum, quae diluta admodum erat, nec ullum, vel minimum excitabat motum aquae communi admixta; tantumque abest, ut acidorum concentrationi tribuenda sit effervescentia (*d*), ut potius putem, si nimia sit eorumdem concentratio, effervescentiam inde minorem reddi posse ex eo vel maxime, quod cito nimis, arctiusque ex acidis concrescentes animales humores effervescentiae motui resistant: adhibito enim aceto distillato, quod corruptos humores nequaquam coagulabat, vehementem pariter oriri effervescentiam deprehendi; imo aliquando ex admixto aceto distillato totum corruptum serum in spumam abiisse.

8. Jam vero dum Clariss. Pringle experimenta perpendo, adverto eumdem aliquando partes putrescentes calori centum graduum Thermometri Fahrenheitiani (qui quidem calor triginta gradibus Reaumurianis fere respondet) exposuisse, in quo calore animales humores citius quidem putrescunt, veruntamen eadem celeritate, ac temporis brevitate ex putrescentia acquisitam alkalescentiam amittunt; cum itaque limites temporis, inter quos ex eo calore putrescentes humores alkalinam indolem ostendunt, angusti admodum sint, fieri facile potuit, ut nulla alkalescen-

(*c*) Bilis in loco tepido mox rancescit, graviter olet, & post longum tempus ambrae odorem contrahit. Boerh. in praelect. ad §. 99. ad verbum *acescentibus*. Quod vero de bile docuit Boerhaave, id generatim in omnibus humoribus tepido loco putrescentibus obtinere comperi.

(*d*) Quemadmodum in bile sana contingit, quae cum fortissimis acidis effervescit, observante Verchyeno, & Hombergio. Mémoir. de l'Acad. des Scienc. 1700. eo fere modo, quo aqua ipsa ab oleo vitrioli incalescit. Boerh. Elem. Chim. tom. II. pag. 301.

lescentiae signa obtinuerit, si intra eosdem limites non instituerit experimentum, videlicet si paullo ante quam alkali genitum fuisset, vel paullo postquam in auras abiisset, corruptos humores exploraverit. Praeterea etiamsi intra illos ipsos limites tentasset experimentum, cum tamen ea proportione, qua alkali gignitur, magna ex parte ex ambienti calore in auras dissipetur, eo pacto non nisi levia alkalescentiae indicia eruere debuit, dum tamen ex minore caloris gradu evidentissima sum assecutus. Si igitur humoribus ad eum caloris gradum putrefactis semper usus fuisset Clariss. Pringle, ex proposita interpretatione nostra experimenta cum ipsius experimentis conciliari posse censeo: sin minus, vel varietati individuorum, ex quibus humores educti fuerant (1. 3.), vel vario gradui concentrationis acidorum (7), vel alii, quam ignorem, caussae diversitas adscribenda erit.

9. Sanguinem, dum e vena flueret, continua quassatione solvebam, quassatum deinde putrefieri sinebam; rubens, & floridus, qui apparuerat color, pedetentim mutabatur, & in atrum, nigrumve vergebat, quae quidem mutatio non eodem tempore totam sanguinis massam inficiebat, sed a superiori parte incipiens temporis progressu sensim ad inferiorem propagabatur.

10. Si vero sanguis ita quassatus fuisset, & tardius putrescebat, & tardius praebebat alkalesceutiae indicia; quam cruor a sero sejunctus, quod scilicet prae omnibus humoribus serum tardissime putrescat.

11. Cum propositis experimentis comperissem alkali in auras avolare ex miti caloris gradu, experiri adhuc volui, an non illud ipsum alkali colligere possem, ac retinere. Vitreo itaque alembico serum sanguinis ex febricitantribus paucas ante horas eductum excepi: alembicum reposui in hypocausto inter vigintiquinque, & vigintiocto Thermometri Reaumuriani gradus calente, collum alembici per

fora-

foramen in operculo ligneo hypocausti apertum trajiciebatur eo consilio, ut eidem adaptatum capitellum cubiculi, decem circiter ejusdem Thermometri graduum, temperiem servaret, & exhalans vapor inibi colligi, & in liquorem posset condensari: capitelli rostro phialam agglutinavi, quae collectum liquorem reciperet; alternis diebus obtinebam distillati liquoris drachmas tres, cui acida admiscens, varium, vario tempore, consequebar effectum. Portio, quae primum adscenderat, seri odorem, & saporem referebat, limpida erat, & diaphana, neque cum acidis, neque cum alkalicis effervescebat: portio, quam altera vice obtinui, foetidum quidem, modice tamen olebat; ejusdem ferme saporis erat, & pelluciditatis ac prima, atque in his cum secunda conveniebat tertia: nulla huc usque effervescentia. Quarta portio foetebat graviter, turbida erat, & opaca, coloris subalbentis, nullam exhibuit effervescentiam, sed levem rubelli coloris tincturam ab admixtis acidis assequebatur. Quinta portio, quae scilicet post dies decem distillaverat, limpida iterum apparuit, admixtis acidis effervescentiam dedit cum sibilo, qui admoto ad aures vase percipi poterat, bullas, spumamque excitavit (*e*). Sexta portio itidem limpida, debilius efferbuit. Cum jam nihil liquoris ex eo caloris gradu distillare observarem, alembicum fregi, ut residuum examini subjicerem; crustam efformaverat glutinosam subrufam, corio similem, quae pessimum foetorem emittebat, nullum tamen, vel levissimum affusis acidis indicium dedit effervescentiae. Ex hoc experimento patere arbitror vigintiquinque inter, & vigintiocto caloris gradus alkali dissipari, quod si colligatur, effervescat, massam inde relinqui foeten-



(*e*) Hoc experimentum tentavi matutinis horis, cum adesset D. Cigna: horis vero vespertinis, cum illud Clarifs. D. Bruni observandum praeberem, eventu quidem non caruit, sed minor inde nata est effervescentia: Heliotropii tinctura huic liquori admixta minime coloris mutationem passa est.

tentissimam utique, sed emisso alkali ad effervescendum ineptam.

12. Cum sanguinem intra vas accurate obturatum servassem, diutius alkalescentem indolem retinuit, etsi calori vingintiquinque graduum expositus fuisset; dum vero obturaculum educerem magno impetu vapores erumpebant, quibus totum cubiculum tetro admodum odore inficiebatur: vaporum explosio orta videtur ab aëre per putrescentiam extricato. Ex quo experimento intelligi potest, cur intra vasa humani corporis humores vix foetentes jam alkali contineant (§. 4. n. 2.), cum educti, & in apertis vasis servati gravem foetorem prius acquirant, quam ullum alkali indicium praebeant (6): nempe intra vasa humani corporis, ubi primum alkali gigni incipit, retinetur, cum in apertis vasis exhalans, tum demum percipi possit, quando majori copia gignitur, quam in auras dissipetur.

13. Quoniam vero serum integrum post decem demum dies alkali emisit (11), nonnisi post illud temporis intervallum corruptum fuisse censeo, tum quod clauso in vase tardius humores corrumpantur, tum quod inter illos serum tardissime putrescat: quod si corruptum jam humorem distillationi commisissem, minime dubitabam protinus alkali proditurum; propterea cupiebam corruptis humoribus idem experimentum capere, quod sero sano instituteram, ut & tempus definirem, quo alkali distillare inciperet, & collecto distillante liquore, eam coloris caerulei vegetabilis mutationem iterum tentare, quam ob cunctationem praecedenti experimento obtinere nequiveram. Sanguinem itaque putrefactum, & ex putrefactione cum acidis effervescentem (quem solum alkalescentem humorem tum habebam in promptu) alembico inclusi vitreo, eidemque caloris gradui exposui eodem apparatu, quem in superiori experimento adhibueram. Et quum prima die stillantes liquoris drachmas duas acidis variis miscerem, vehementem effervescentiam observavi,

eum-

eumdemque liquorem fucco violarum inftillans, color viridis non minus elegans ortus eft, quam ex affufo fpiritu c. c. oriretur , inductoque rubore ex admixta aqua forti, is nova diftillati liquoris affufione deletus eft, & violaceus color reftitutus. Liquor, qui per quinque fequentes dies diftillavit, eafdem alkali notas retinuit , quibus elapfis cum nihil amplius diftillare obfervarem, alembicum fregi, & ad ejus fundum cruftam inveni defcriptae (11) fimilem, fub qua portio ad fyrupi confiftentiam redacta recondita erat, quae alkalicam adhuc indolem oftendebat, fed levem, adeo ut fpatio duodecim horarum , per quod fuper feneftram , cujus temperies circa decem gradus Thermometri Reaumuriani erat, diffipato alkali, nulla ipfius veftigia remanferint.

14. Igitur & effervefcentia, & colorum mutatione conftat verum alkali illud effe, quod in humoribus putrefactis natum leviffimo calore in auras diffipatur. Ipfis equidem humoribus putrefactis colorum mutationem tentare maluiffem, nifi & feri corrupti turbida opacitas, & fanguinis rubor, ac bilis flavedo ambiguum de hifce experimentis judicium effeciffent; limpido itaque exhalante humore eadem experimenta inftituere tutius effe putavi, ut omne erroris periculum declinarem.

15. Quum foeteret graviffime refiduum diftillationis, quamquam omni alkali orbatum fuiffet, manifeftum videtur ab alkali foetorem exaltari quidem poffe, & magis penetrantem effici, non autem ab eodem produci, quandoquidem fupereft eo fublato.

16. Quoniam tamen continuato calore non folum alkalefcentia, fed & foetor fimul perit (6), videtur is odor a volatilibus admodum particulis etiam proficifci, fed quae ab alkali volatili diffimiles fint, & plerumque citius gignantur, tardiufque diffipentur, cum ante alkalefcentiam, & poft ipfam foetor plerumque percipiatur (8). Praeterea vero aliquando alkalefcentia adeffe poteft modico foe-

 tori

tori conjuncta, ut observavimus (13), vicissim maximus foetor absque alkalescentia, ut in postremo experimento deprehendimus (11. 12.). Ex quibus differentia inter foetidas, alkalinasque partes confirmari videtur, quam Clariss. Pringle alio argumento demonstraverat, animadvertens corruptae urinae halitus minime perniciosos esse, etsi prae caeteris corruptis corporibus maximam alkali salis quantitatem contineat; cum corruptorum aliorum humorum halitus infesti admodum sint, ex quo efficitur eos ab alkalici salis natura discrepare.

17. Quae cum ita sint, videtur alkali volatile non esse productum necessarium putrefactionis, neque gradum alkalescentiae gradui putrefactionis respondere, sed nativa salia oleis permixta vi putrefactionis volatilia reddi, si de stirpium partibus sermo sit, si vero de partibus animalium, videtur alkali actione viscerum jam inchoatum, aut aliis adhuc elementis involutum ex putrefactione persici, aut extricari: quapropter eo major quantitas alkali salis ex putrefactione nascatur, quo major sit in corporibus eidem expositis salium, aliorumque elementorum quantitas, quae salibus permixta volatilitatem alkalinam eisdem impertiri possunt. Si enim consideremus stirpes acescentes, & acidum in distillatione emittentes, postquam solidis animalium partibus subactae in sanguinem, aut humores conversae sunt, vix accescere (*f*), & parum acidi distillando emittere (*g*), sed fere statim putrescere, & in distillatione copiosum alkali acidi loco praebere; si consideremus alkali ex corporibus putrefactis citius adhuc in distillatione prodire (*h*); si animadvertamus actione viscerum, & putredine reliqua salia fere omnia destrui, nec in corruptorum corporum

(*f*) Macquer elem. de chym. theor. cap. 15. pag. 173. 174., & elem. de chym. pratiq. tom. 2. pag. 377. 380.
(*g*) Id. tom. cit. pag. 381., & seq.
(*h*) Id. tom. cit. pag. 378. 379.

porum combuſtorum cineribus ullum alkali amplius reperiri (*i*); ſi perpendamus eos humores, qui maximam ſalium quantitatem continent, ut urinam, maximam alkali copiam putreſcendo praebere (*j*), confirmari videtur ea, quam ſequimur, Chymicorum ſententia, qui cenſent ſalia volatilia a reliquis ſalibus ortum ducere, quae vi viſcerum animalium putredine, igne ita immutentur, ut alkalica evadant, nullo ſuperſtite priſtinae formae veſtigio (*k*). Inde vero intelligi poſſet, cur ſalia volatilia putredinem arcere poſſint (*l*), non ſecus, ac reliqua ſalia, quamquam ex putredine ortum ducant: quantitas enim alkalinorum ſalium per putredinem productorum reſpondet quantitati ſalium nativorum praeexiſtentium, quae porro ſalia cum arcendae putredini non ſufficerent, mirum non eſt genitum alkali ejuſdem progreſſui impediendo ineptum fuiſſe: quod ſi nativa ſalia majori copia praexiſtant, videtur utique, & genitum alkali putredinis progreſſum retardaturum: urina enim quae ſalibus copioſe referta eſt, non tam corrumpitur, nec ejuſdem corruptae halitus adeo pernicioſi ſunt, quemadmodum aliorum humorum (*m*), quod non aliunde, quam a praeexiſtentium ſalium, & geniti inde alkali copia, & efficacia repetendum eſſe videtur.

18. Urina ſana nonniſi trium dierum intervallo ita putreſcebat, ut cum acidis efferveſceret; veruntamen urina hominis putrida febre laborantis brevi tempore, ſpatio nimirum vigintiquatuor horarum, hujuſmodi alkaleſcentiam obtinuit. Sanguis ejuſdem hominis multo quoque citius, quam ſanguis ab homine pleuritico eductus alkaleſcentiae indi-

(*i*) Id. tom. cit. pag. 380. 381.
(*j*) Pringle Tr. ſur les ſub. ſept., & antiſep. mémoire 1. exper. 2. pag. 161.
(*k*) Macquer l. ult. cit., & tom. eod. pag. 343. 344. 349. 350.
(*l*) Quod, & Pringle teſtatur ( l. c. mem. 1. exp. 2. 3. ), & ego pluries expertus ſum, & propriis etiam experimentis confirmavit Cl. Gilbertus in diſp. de putred. Lipſ. 1753. §. 7. pag. 13.
(*m*) Pringle loc. cit. ad not. j.

indicia oſtendit. Sed haec ſpectant ad aliam claſſem experimentorum, quae in tempus aliud differenda eſſe conſtitui, ut opportunitatem nactus morboſos humores explorare, atque ex phaenomenorum comparatione ea deducere poſſim, quae morborum, eorumdemque indoli detegendae, aut therapejae perficiendae apta videbuntur.

19. Nec vero in graviſſima quaeſtione propriis tantum oculis fidere volui, ſed Clariſs. D. Bruni Anat. Profeſs., & Londinenſem Socium rogavi, ut experimentis meis intereſſet, ut & errores, qua eſt ſolertia, praecaveret, & auctoritate ſua experimentorum veritatem tueretur.

P. S. Doctiſſimus Navier (*n*), quum carnem bubulam vaſis accurate obturatis, ac glutinatis incluſam putrefactioni commiſiſſet in gradu caloris inter nonum, & vigeſimum Thermometri Reaumuriani, poſtquam in liquamen, & putrilaginem reſolutam fuiſſe obſervavit, per vitream retortam cum excipulo accurate glutinatam, arenae balneo diſtillavit, & liquorem clarum, ſubalbidum, ac foetentem primum obtinuit, ex quo caerulea carta, nonnihil rubra facta eſt: hunc tamen liquorem alkalino volatili ſale refertum eſſe comperit, cum ſuperaffuſo alkalici fixi liquore ſpiritus volatiles urinoſi ex miſcella prodierint; aucto deinceps igne, donec retorta candeſceret, diſtillare adhuc continuavit per horae quadrantem ſimilis liquor pauculo oleo imbutus, poſtremo ſal volatilis albus, concretus, vegetationis ſpecie, modica quantitate ad retortae collum depoſitus eſt, & vapores, qui adhuc per horae quadrantem prodierunt oleum craſſum, ambrei coloris ſuppeditarunt. Cum vero laudatus Auctor incorruptam carnem arenae balneo ſimiliter diſtillaſſet, liquor, qui eo calore prodiit, lim-

(*n*) Poſtquam mea haec experimenta in aliquem ordinem diſpoſuiſſem, ut typis committerem Celeb. Navier diſſertationem de oſſium mollitie legendam praebuit Clariſs. Bertrandi, in qua pag. 33., & ſeqq. Clariſſ. Viri citata experimenta reperi.

limpidus erat, nullumque alkaleſcentiae indicium exhibuit, nec niſi violento igne hujuſmodi demum ſales prodierunt. Quae quidem Clar. Viri experimenta noſtris egregie conſentire videntur: nam & miti caloris gradu ad putreſcentiam uſus eſt, & vaſis exacte obturatis corrumpendam carnem incluſit, ac propterea alkali retinuit, quod liquore primum extillante ſolutum leviſſimo calore prodiit, cum ex integris carnibus, nonniſi per auctam vim ignis demum educeretur (*o*).

(*o*) Idipſum in partibus omnibus animalibus obtinere, ut corruptae leviſſimo caloris gradu alKali diſtillando praebeant, integrae majorem ignis vim requirant, ut id alKali emittant. Clariſs. Macquer docuit Chym. pratiq. loc. cit. ad not. h.

DE

# FASCICULUS STIRPIUM

## Sardiniae in Dioecesi Calaris lectarum

## A Michaele Antonio Plazza

CHIRURGO TAURINENSI,

*Quas in usum Botanicorum recenset*

## CAROLUS ALLIONUS.

ACANTHUS foliis sinuatis inermibus *Linn. spec. pl.* 639.
Acanthus sativus, seu mollis Virgilii *C. B. pin.* 383.
*Habitat in vinetis circa Calarim.*

ACANTHUS foliis pinnatifidis spinosis *Linn. sp. pl.* 639.
Acanthus aculeatus *C. B. pin.* 383.
*Crescit iisdem locis.*

AEGYLOPS spica ovata aristis breviore *Linn. sp. pl.* 1050.
Festuca altera capitulis duris *C. B. the.* 151.

AGROSTEMMA glabra foliis lineari-lanceolatis, patalis emarginatis coronatis *Linn. sp. pl.* 436.
Lychnis foliis glabris calyce duriore *Bocc. sic.* 27.

ANAGALLIS foliis cordatis amplexicaulibus, caulibus compressis *Linn. sp. pl.* 149.
Anagallis hispanica latifolia maximo flore *Tournef. inst.* 143.

ANTIRRHINUM foliis caulinis lanceolato-linearibus sparsis: radicalibus rotundis ternis *Linn. sp. pl.* 615.
Linaria annua purpuro-violacea, calcaribus longis, foliis imis rotundioribus *Magn. monsp.* 159.

ANTIRRHINUM procumbens ramosum, foliis alternis ovatis acuminatis integerrimus, floribus caudatis axillaribus.
*Folia succosa, glabra, alterna, sessilia, supremis angustioribus elliptico acuminatis. Pedunculi foliis altiores, singulares, uniflori. Flos cyanaeus cum hiatu clauso. Calcar floris acutum pedunculo subaequale, & florem longitudine*

aequans

*aequans. Capsula rotunda calyce minor. Eritne?* Linaria lusitanica maritima polygalae folio *Tourn. inst.* 169.

ANTHEMIS caule ramoso, foliis pinnato-multifidis setaceis, calycibus villosis pedunculatis *Linn. sp. pl.* 895.

Buphthalmum cotulae folio *C. B. pin.* 134.

APHANES *Linn. sp. pl.* 123.

Alchemilla minima montana *Col. ecphr.* 145.

APHILLANTHES *Linn. sp. pl.* 294.

Aphillanthes Monspeliensium *Lob. adv.* 190.

ARBUTUS caule erecto, foliis glabris serratis, baccis polyspermis *Linn. sp. pl.* 395.

Arbutus folio serrato *C. B. pin.* 460.

*Abunde in montibus* septem Fratrum.

ARENARIA foliis filiformibus, stipulis membranaceis vaginantibus *Linn. sp. pl.* 423.

Alsine spergulae facie minor, seu spergula minor sub caeruleo flore *C. B. pin.* 251.

ARISTOLOCHIA foliis cordatis subsessilibus, obtusis, caule infirmo, floribus solitariis *Linn. sp. pl.* 962.

Aristolochia rotunda flore ex purpura nigro *C. B. pin.* 307.

*Provenit in agro* di Siurgius.

ARUM a caule foliis cordato-oblongis, spatha bifida, spadice incurvo *Linn. sp. pl.* 966.

Arisarum latifolium *Clus. hist.* 2. *p.* 73.

*Circa* Calarim, *& in agro* S. Pantaleonis.

ASPHODELUS caule nudo, foliis strictis subulatis striatis subfistulosis *Linn. sp. pl.* 309.

Asphodelus minor *Clus. hist.* 1. *p.* 197.

ASPHODELUS caule nudo, foliis ensiformibus carinatis laevibus *Linn. sp. pl.* 310.

Asphodelus albus ramosus mas *C. B. pin.* 28.

Asphodelus albus non ramosus *C. B. pin.* 28.

BARTSIA foliis superioribus alternis serratis, floribus lateralibus *Linn. sp. pl.* 602.

Alectorolophos italica luteo-pallida *Barrel. rar. ic.* 665.

Bartsia foliis oppositis lanceolatis obtuse serratus *Linn. sp. pl.* 602.

Trixago apula unicaulis *Col. ecphr.* 1. *p.* 199.

Bulbocodium foliis lanceolatis *Linn. sp. pl.* 294.

Colchicum vernum Hispanicum *C. B. pin.* 69.

*Prope oppidum* Ulassay *secus torrentem*.

Bufonia *Linn. sp. pl.* 123.

Herniaria angustissimo gramineo folio erecta *Magn. hort.* 97.

Bunias siliculis ovatis laevibus ancipitibus *Linn. sp. pl.* 670.

Eruca maritima Italica siliqua hastae cuspidi simili *C. B. pin.* 99.

*In sabulosis mari proximis, & maxime stagnis exsiccatis.*

Bupleurum involucellis pentaphillis acutis : universali diphillo, foliis lanceolatis petiolatis *Linn. sp. pl.* 237.

Bupleurum folio subrotundo sive vulgatissimum *C. B. pin.* 278.

Bupleurum caule dichotomo subnudo, involucris minimis acutis *Linn. sp. pl.* 238.

Bupleurum folio rigido *C. B. pin.* 278.

*Utrumque inter segetes agri* di Sardara.

Buphthalmum calycibus acute foliosis, ramis alternis, foliis lanceolatis amplexicaulibus integerrimus *Linn. sp. pl.* 903.

Aster luteus foliis ad florem rigidis *C. B. pin.* 266.

Campanula caule dichotomo, foliis sessilibus utrinque dentatis *Linn. sp. pl.* 169.

Erini seu rapunculi minimum genus *Col. phytob.* 122.

Capparis aculeata *Linn. sp. pl.* 503.

Capparis spinosa fructu minore, folio rotundo *C. B. pin.* 480.

*Rupes circa* Calarim *inhabitat.*

Celtis foliis ovato-lanceolatis *Linn. sp. pl.* 1043.

Lotus fructu cerasi *C. B. pin.* 447.

CENTAUREA calycibus laevibus, ſquammis ovatis mucronatis, foliis ciliato-ſpinoſis.

*Caulis erectus, ſtriatus, ramoſus, durus, pedalis, aut paullo elatior ramis unico flore terminatis. Folia prima dentato-lyrata; reliqua integra, lineari-lanceolata: omnia denticulis ſpinulas exerentibus, & pinnatis inſtructa, erecta, firmula, glabra. Flos luteus. Calix ex ſquammis laevibus, arcte imbricatis, in ſpinulam brevem abeuntibus.*

CERASTIUM floribus pentandris petalis integris *Linn. ſp. pl.* 439.

CISTUS arboreſcens, foliis ſeſſilibus utrinque villoſis rugoſis, inferioribus ovatis baſi connatis; ſummis lanceolatis *Linn. ſp. pl.* 514.

Ciſtus mas anguſtifolius *C. B. pin.* 464.

CISTUS arboreſcens, foliis oblongis tomentoſis incanis ſeſſilibus ſupra avenis, alis nudis *Linn. ſp. pl.* 524.

Ciſtus mas, folio oblongo incano *C. B. pin.* 464.

CISTUS arboreſcens, foliis ovatis petiolatis utrinque hirſutus, alis nudis *Linn. ſp. pl.* 524.

Ciſtus foemina folio ſalviae *C. B. pin.* 464.

CISTUS herbaceus exſtipulatus, foliis oppoſitis trinerviis, racemis ebracteatis. *Linn. ſp. pl.* 526.

Helianthenum flore maculoſo *Col. ecphr.* 2. *p.* 78.

*Omnes hi ciſti ſicca paſcua amant, & abunde naſcuntur circa Oppidum* Villanova Tullo.

CLEMATIS cirrhis ſcandens *Linn. ſp. pl.* 544.

Clematis peregrina foliis pyri inciſis: nunc ſingularibus, nunc ternis *Tournef. cor.* 20.

CLYPEOLA ſiliculis unilocularibus monoſpermis *Linn. ſp. pl.* 652.

Jonthlaſpi minimum ſpicatum lunatum *Col. ecphr.* 1. *p.* 281.

CONVOLVULUS foliis ſagittatis utrinque acutis, pedunculis unifloris *Linn. ſpec. pl.* 153.

Convolvulus minor arvenſis *C. B. pin.* 294.

CONVOLVULUS foliis sagittatis postice truncatis, pedunculis unifloris *Linn. sp. pl.* 156.

Convolvulus major albus *C. B. pin.* 294.

CONVOLVULUS foliis palmatis cordalis sericeis: lobis repandis, pedunculis bifloris *Linn. sp. pl.* 156.

Convolvulus argenteus folio altheae *C. B. pin.* 194.

CRITHMUM foliolis lanceolatis carnosis *Linn. sp. pl.* 246.

Crithmum, seu foeniculum maritimum minus *C. B. pin.* 288.

*Ad rupes, quæ mare spectant.*

CROTON foliis rhombeis repandis, capsulis pendulis, caule herbaceo *Linn. sp. pl.* 1004.

Ricinoides, ex qua paratur Tournesol Gallorum *Tourn. Nissole act. Paris.* 1712. *p.* 337.

*Abunde in arvis.*

CYCLAMINUS foliis cordatis acutis angulose dentatis.

Cyclamen folio anguloso *C. B. pin.* 308.

*Ubique in celsis montibus.*

*Folia tenuiora, quam in vulgari cyclamino, & ampliora angulis, seu dentibus brevissima spinula notatis. Corolla purpurea retroflexa.*

CYNOSURUS paniculae spiculis sterilibus pendulis ternatis, floribus aristatis *Linn. sp. pl.* 73.

Gramen panicula pendula aurea *C. B. the.* 33.

CYTISUS floribus lateralibus, foliis hirsutis, caule erecto striato *Linn. sp. pl.* 740.

Cytisus monspessulanus medicae folio, siliquis dense congestis, & villosis *Tournef. inst.* 648.

DAPHNE floribus sessilibus aggregatis axillaribus, foliis ovatis utrinque pubescentibus norvosis *Linn. sp. pl.* 356.

Thymelaea foliis candicantibus, & serici instar mollibus *C. B. pin.* 463.

*Abunde circa* Ulassay.

DRABA caule non ramoso, foliis cordatis acutis dentatis sessilibus.

*Cau-*

*Caulis ſimpliciſſimus, pedalis, in lungo racemo floriger. Folia piloſo-hiſpida acute terminata, & acutis dentibus praedita, non amplexicaulia.*

Erica antheris bicornibus incluſis, corollis companulatis longioribus, foliis quaternis patentiſſimis, caule ſubarboreo tomentoſo *Linn. ſp. pl.* 353.

Erica maxima alba *C. B. pin.* 485.

Ervum pedunculis ſubbifloris, ſeminibus globoſis quaternis *Linn. ſp. pl.* 738.

Vicia ſegetum ſingularibus ſiliquis glabris *C. B. pin.* 345.

Eryngium foliis radicalibus ſubrotundis plicatis ſpinoſis, capitulis pedunculatis *Linn. ſp. pl.* 233.

Eryngium maritimum *C. B. pin.* 386.

Eryngium foliis radicalibus planis quadratis ſublobatis, caulinis digitatis, pedunculo terminali.

Eryngium capitulis pſillii *Bocc. rar.* 88.

*Copioſe in paſcuis.*

*Radix tuberoſa obſcura, ex qua folia plura longe petiolata plana dentato-ſpinoſa, quadrato-orbiculata nunc integra, nunc ſubtriloba. Prima caulina profundius triloba, aut quinqueloba, adhuc petiolata; quae, ſequuntur, ſeſſilia, quinquedigitata foliolis lineari-lanceolatis, & ciliato-ſpinoſis. Ex ſummis foliorum alis, aut ſumma planta pedunculus floriger cum uno, alterove ſeſſili folio.*

Euphorbia umbella trifida: dichotoma involucellis lanceolatis, foliis linearibus *Linn. ſp. pl.* 456.

Tithymalus ſive eſula exigua *C. B. pin.* 291.

Euphorbia umbella ſubquinqueſida ſimplici, involucellis ovatis: primariis triphillis, foliis oblongis integerrimis, caule fruticoſo *Linn. ſp. pl.* 457.

Tithymalus maritimus ſpinoſus *C. B. pin.* 291.

*In monte* Eſterſili *frequens.*

Ferula foliolis linearibus longiſſimis ſimplicibus *Linn. ſp. pl.* 247.

Ferula

Ferula femina Plinii *C. B. pin.* 148.

FUMARIA subcirrhosa ex alis florigera, segmentis foliorum bilobis, pericarpiis rotundis monospermis.

*Abunde circa* Calarim.

*Caules erecti, spithamaei, sulcati, laeves, ramosi extremis ramis quandoque in cirrhum desinentibus. Folia petiolata, glauca, profunde, & inaequaliter trifida segmentis bilobis ovalibus cum spinula, alterna, sed ad ramorum ortum opposita. Floralium segmentum unum saepe bilobum, reliqua integra sunt. Nudus pedunculus foliis altior flores fert fumariae officinalis in brevem spicam congestos.*

GALIUM foliis quaternis ovatis, aculeato-ciliatis, seminibus hispidis *Linn. sp. pl.* 108.

Rubia semine duplici hispido latis, & hirsutis foliis *Bocc. rar.* 6.

*Folia glabra, vix nervosa. Panicula axillaris cauli perpendicularis.*

GALIUM foliis quaternis ovatis laevibus obtusis, panicula dichotoma, seminibus hispidis *Linn. sp. pl.* 108.

Rubia quadrifolia semine duplici hispido *Bauh. hist.* 3. *p.* 718.

GALIUM foliis verticillatis lineari-setaceis, pedunculis folio longioribus *Linn. sp. pl.* 107.

Galium nigro-purpureum montanum tenuifolium *Col. ecphr.* 1. *p.* 298.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis cordatis sublobatis *Linn. sp. pl.* 680.

Geranium folio altheae *C. B. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphillis, floribus pentandris, foliis pinnatis acutis sinuatis *Linn. spec. pl.* 680.

Geranicum acu longissima *C. B. pin.* 319.

GERA-

Geranium pedunculis bifloris, calycibus pyramidatis angulatis rugofis, foliis quinquelobis rotundatis *Linn. fpec. pl.* 682.

Geranium lucidum faxatile *C. B. pin.* 318.

Geranium pedunculis bifloris, foliifque rameis alternis, caule ramofo diffufo, calycibus muticis *Linn. fp. pl.* 682.

Geranium columbinum villofum petalis bifidis purpureis *Vaill. Parif.* 79. *t.* 15. *f.* 3.

Geranium pedunculis bifloris, foliis quinquepartito- multifidis angulatis: laciniis acutis, capfulis glabris, calycibus ariftatis *Linn. fp. pl.* 682.

Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculo longiffimo, caule proftrato *Hall. helv.* 367.

Gentiana dichotoma, ramis unifloris, corollis quinquefidis infundibuli-formibus, calycibus membranaceis.

Centaurium luteum novum *Col. ecphr.* 2. 77.

*Caules ad fummum fpithamaei, fubrotundi, glabri. Folia feffilia, oppofita, ovata. Caules irregulariter dichotomi femel, aut bis. Corolla lutea fegmentis ovato acutis, & tubo calycem fuperante. Tubi longitudo bis, & ultra corollae limbum metitur. Calix decem ftriatus, membranaceo-tranfparens fegmentis capillaribus.*

Gladiolus foliis enfiformibus, floribus diftantibus *Linn. fp. pl.* 36.

Gladiolus floribus uno verfu difpofitis *C. B. pin.* 41.

Gnaphalium caule erecto dichotomo, floribus pyramidatis axillaribus *Linn. fp. pl.* 857.

Gnaphalium minimum alterum noftras ftoechadis citrinae foliis tenuiffimis *Pluk. alm.* 172. *t.* 298. *f.* 2.

Gnaphalium caule fimpliciffimo, foliis amplexicaulibus lanceolatis denticulatis, corymbo compofito terminali.

*Circa oppidum* Villanova Tullo.

*Tomentofa ftirps eft palmaris altitudinis. Folia fubvirent erecta, mollia, ambitu minutim & inaequaliter denticulato.*

*Flo-*

*Flores rotundi parvi ex citrino, & viridi subrubentes in densum corymbum conglobati.*

GYPSOPHILA foliis mucronatis recurvatis, floribus aggregatis *Linn. sp. pl.* 406.

Caryophillus saxatilis, ericae foliis umbellatis corymbis *C. B. pin.* 211.

*In promontorio* S. Eliae *circa* Calarim.

HERNIARIA hirsuta *Bauh. hist.* 3. *p.* 379.

HESPERIS caule erecto ramoso, foliis cordatis amplexicaulibus serratis villosis *Linn. sp. pl.* 664.

Leucojum minus rotundifolium flore purpureo *Barrel. ic.* 876.

HELIOTROPIUM foliis ovatis tomentosis integerrimis rugosis, spicis conjugatis *Linn. sp. pl.* 130.

Heliotropium majus Dioscoridis *C. B. pin.* 253.

ILLECEBRUM floribus bracteis nitidis occultatis, capitulis terminalibus, caule erecto *Linn. sp. pl.* 207.

Paronychia narbonensis erecta *Tournef. inst.* 508.

JUNIPERUS foliis quaternis patentibus subulatis mucronatis *Linn. sp. pl.* 207.

Juniperus major bacca refuscente *C. B. pin.* 489.

JUNIPERUS foliis oppositis erectis decurrentibus oppositionibus pixidatis *Linn. sp. pl.* 1039.

Sabina folio cupressi *C. B. pin.* 487.

LAGURUS spica ovata *Linn. sp. pl.* 81.

Gramen alopecuroides spica rotundiore *C. B. the.* 56.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis diphillis, leguminibus ovatis compressis: dorso canaliculatis *Linn. spec. pl.* 740.

Lathyrus sativus flore purpureo *C. B. pin.* 344.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis aphillis, stipulis sagittato-cordatis *Linn. sp. pl.* 279.

Vinea lutea foliis convolvuli minoris *C. B. pin.* 345.

LAPSANA calycibus fructus torulosis depressis obtusis sessilibus *Linn. sp. pl.* 811.

Chon-

Chondilla verrucaria foliis cichorii viridibus *C. B. pin.* 130.
*Ubique ad vias*.

LAPSANA calycibus fructus undique patentibus: radiis subulatis, foliis lyratis *Linn. sp. pl.* 812.
Rhagadiolus lapsanæ foliis *Tournef. cor.* 36.

LINUM calycibus acuminatis, foliis lanceolatis sparsis strictis scabris acuminatis, caule tereti basi ramoso *Linn. sp. pl.* 278.
Linum sylvestre caeruleum folio acuto *C. B. pin.* 214.

LINUM calycibus acutis, foliis lineari-lanceolatis alternis, paniculae pedunculis bifloris *Linn. sp. pl.* 279.
Linum sylvestre minus flore luteo *C. B. pin.* 214.
*In pascuis* S. Pantaleonis.

LINUM calycibus, foliisque lanceolatis strictis mucronatis: margine scabris *Linn. sp. pl.* 279.
Lithospermum linariae folio monspeliensium *C. B. pin.* 259.

LOTUS capitulis aphillis, foliis sessilibus quinatis *Linn. sp. pl.* 776.
Dorychnium monspeliensium *Lob. ic.* 51.

LUPINUS calycibus alternis appendiculatis: labio superiore bipartito, inferiore integro *Linn. sp. pl.* 721.
Lupinus angustifolius caeruleus elatior *Ray hist.* 908.

MOLLUGO foliis quaternis obovatis, panicula dichotoma *Linn. sp. pl.* 89.
Anthillis marina alsinefolia *C. B. pin.* 282.

MYOSOTIS seminibus nudis: foliorum apicibus callosis *Linn. sp. pl.* 131.
Echium scorpioides palustre *C. B. pin.* 254.

OENANTE umbellularum pedunculis marginalibus longioribus ramosis masculis *Linn. sp. pl.* 254.
Oenanthe prolifera apula *C. B. pin.* 163.

ONONIS trifolia viscosa, hirsuta, pedunculis congestis, floribus pendulis *Sauv. monsp.* 190.

Anonis pusilla villosa, & viscosa purpurascente flore *Tourn. inst.* 408.

*Folia cuneiformia in apice denticulata, trifoliata; sed floralia simplicia. Stipulae lanceolatae, non setaceae. Spicae ramos, & caulem terminant. Flores ex alis stipularum prodeunt singulares. Pedunculus petiolo longior. Flos calyce minor reflexus. Fructus longitudine calycis: semina nigra angulata decem circiter.*

Ononis pedunculis unifloris filo terminatis, foliis simplicibus *Linn. sp. pl.* 718.

Anonis lutea viscosa latifolia minor, flore pallido *Barrel. ic.* 1239.

Anonis viscosa spinis carens lutea latifolia annua *Magn. monsp.* 21.

*Folia brevis petioli ope insidentia retangulae stipulae, orbiculata, aut oblonga, minutim denticulata. Pedunculi uniflori, axillares, stipula longiores, terminati filo folia superante. Flos pentaphillo calyce minor. Fructus longior calyce, aequalis stipulae semina recondit tria, aut quatuor reniformia. Planta tota villosa est.*

Ornithopus foliis pinnatis, leguminibus subarcuatis *Linn. sp. pl.* 743.

Ornithopodium minus *C. B. pin.* 350.

Othonna foliis pinnatifidis tomentosis: laciniis sinuatis; caule fruticoso *Linn. sp. pl.* 927.

Jacobaea maritima *C. B. pin.* 131.

*Ad maris littus abunde.*

Passerina foliis carnosis extus glabris, caulibus tomentosis *Linn. sp. pl.* 559.

Thymelaea tomentosa foliis sedi minoris *C. B. pin.* 463.

Phillyrea foliis cordato-ovatis serratis *Linn. sp. pl.* 8.

Phillyrea folio leviter serrato *C. B. pin.* 476.

Plantago foliis lineari-lanceolatis hirsutis, spica cylindrica erecta, scapo tereti foliis longiore *Linn. sp. pl.* 114.

Flo-

Holosteum hirsutum albicans minus *C. B. pin.* 190.

PLANTAGO caule ramoso, foliis integerrimis, spicis foliosis *Linn. sp. pl.* 115.

Psyllium majus erectum *C. B. pin.* 191.

PLUMBAGO foliis amplexicaulibus *Linn. sp. pl.* 151.

Lepidium dentellaria dictum *C. B. pin.* 197.

POLYGONUM floribus pentandris trigynis axillaribus, foliis lanceolatis, caule stipulis obtecto fruticoso *Linn. sp. pl.* 361.

Polygonum maritimum latifolium *C. B. pin.* 280.

POLYPODIUM fronde bipinnata: pinnis lunulatis dentatis, stipite strigoso *Linn. sp. pl.* 1090.

Filix aculeata major *C. B. pin.* 358.

POTERIUM inerme caulibus subangulosis *Linn. sp. pl.* 994.

Pimpinella sanguisorba minus hirsuta *C. B. pin.* 160.

POTERIUM spinis ramosis *Linn. sp. pl.* 994.

Poterio affinis, foliis pimpinellae, spinosa *C. B. pin.* 388.

*Abunde circa* Calarim.

PSORALEA foliis omnibus ternatis: pedunculis spicatis folio longioribus *Linn. sp. pl.* 763.

Trifolium bitumen redolens *C. B. pin.* 327.

*Ubique circa* Calarim.

QUERCUS foliis ovato-oblongis indivisis, serratisque, cortice integro *Linn. sp. pl.* 995.

Ilex oblongo serrato folio *C. B. pin.* 424.

*Ubique frequens.*

QUERCUS foliis ovato-oblongis indivisis serratis subtus tomentosis, cortice rimoso fungoso *Linn. sp. pl.* 995.

Suber latifolium sempervirens *C. B. pin.* 424.

QUERCUS foliis ovatis indivisis spinoso-dentatis glabris *Linn. sp. pl.* 995.

Ilex aculeata cocciglandifera *C. B. pin.* 425.

*Abunde loco dicto* Pedra de Fogu.

Reseda foliis lanceolatis integris, calycibus quadrifidis *Linn. sp. pl.* 448.

Luteola herba salicis folio *C. B. pin.* 100.

Reseda foliolis alternis integerrimis, fructibus tetragynis.

Reseda minor incisis foliis *Barrel. ic.* 587.

Reseda foliis calcitrapae flore albo *Mor. hort. bles.*

Rubia foliis senis *Linn. sp. pl.* 109.

Rubia sylvestris aspera *C. B. pin.* 33.

Rumex floribus hermaphroditis, valvulis dentatis nudis reflexis *Linn. sp. pl.* 336.

Acetosa ocymi folio Neapolitana *C. B. pin.* 114.

Rumex floribus dioicis, foliis lanceolato-hastatis *Linn. sp. pl.* 338.

Acetosa arvensis lanceolata *C. B. pin.* 114.

Sagina caule erecto unifloro *Linn. sp. pl.* 128.

Alsine verna glabra *Vaill. paris.* 6. *t.* 3. *f.* 2.

Saxifraga foliis caulinis palmato-lobatis, caulinis sessilibus, caule ramoso bulbifero *Linn. sp. pl.* 403.

Saxifraga bulbosa altera bulbifera montana *Col. ecphr.* 1. *p.* 318.

Scandix seminibus ovatis hispidis, corollis uniformibus, caule laevi *Linn. sp. pl.* 257.

Myrrhis sylvestris aequicolorum *Col. ecphr.* 1. *p.* 110.

Scandix seminibus subulatis, hispidis, floribus rostratis, caulibus laevibus *Linn. sp. pl.* 257.

Scandix cretica minor *C. B. pin.* 152.

Scrophularia, foliis difformibus, pedunculis axillaribus aggregatis *Linn. sp. pl.* 620.

Scrophularia foliis laciniatis *C. B. pin.* 236.

Scrophularia foliis cordatis: superioribus alternis, pedunculis axillaribus bifloris *Linn. sp. pl.* 621.

Scrophularia urticae folio *C. B. pin.* 236.

Serapias bulbis subrotundis, nectarii labio trifido acuminato petalis longiore *Linn. sp. pl.* 950.

Or-

Orchis montana italica flore ferrugineo, lingua oblonga *B. C. pin.* 84.

SHERARDIA foliis omnibus verticillatis, floribus terminalibus *Linn. sp. pl.* 102.

Rubeola arvensis repens caerulea *C. B. pr.*

SILENE hirsuta, petalis emarginatis, fructibus erectis alternis hirsutis sessilibus *Linn. sp. pl.* 417.

Viscago cerastei foliis, vasculis erectis sessilibus *Dill. elth.* 416. *t.* 309.

SISON foliis caulinis subcapillaribus *Linn. sp. pl.* 252.

Arumi parvum foliis foeniculi *C. B. pin.* 159.

SPARTIUM foliis ternatis, ramis angulatis spinosis *Linn. sp. pl.* 709.

Acacia trifolia *C. B. pin.* 392.

TAXUS foliis approximatis *Linn. sp. pl.* 1040.

Taxus *C. B. pin.* 505.

*Occurrit in agro* Ulassey; *de caetero rarus.*

TEUCRIUM foliis integerrimis ovatis utrinque acutis, racemis secundis villosis *Linn. sp. pl.* 564.

Marum cortusi *J. B. p.* 242.

TEUCRIUM . . . . . . . .

Polium maritimum erectum monspeliacum *C. B. pin.* 221.

Polium monspessulanum *J. B.* 3. 299.

THLASPI siliculis subrotundis, foliis amplexicaulibus cordatis subserratis *Linn. sp. pl.* 646.

Thlaspi arvense perfoliatum majus *C. B. pin.* 106.

THYMUS erectus, foliis revolutis ovatis, floribus verticillato-spicatis *Linn. spec. pl.* 591.

Thymus vulgaris folio latiore *C. B. pin.* 219.

*Frequens circa* Calarim.

TORDYLIUM umbella conferta, foliolis ovato-lanceolatis pinnatifidis *Linn. sp. pl.* 241.

Caucalis semine aspero, flosculis rubentibus *C. B. pr.* 80.

*Ad fossas prope oppidum* Gerey.

TORDYLIUM umbellis ſimplicibus ſeſſilibus, ſeminibus exterioribus hiſpidis *Linn. ſp. pl.* 240.

Caucalis nodoſa echinato ſemine *C. B. pr.* 80.

*Ibidem* .

TORDYLIUM alterum majus λειοκαρπος *Col. ecphr.* 122.

TRIFOLIUM ſpicis villoſis ovalibus, dentibus calycinis ſetaceis aequalibus *Linn. ſp. pl.* 768.

Trifolium arvenſe humile ſpicatum, ſive Lagopus *C. B. pin.* 328.

TRIFOLIUM ſpicis ovalibus imbricatis, vexillis deflexis perſiſtentibus, calycibus nudis, caule erecto *Linn. ſp. pl.* 772.

Trifolium agrarium *Dod. pemp.* 576.

TRIFOLIUM caulibus ſimplicibus, ſpicis piloſis aphillis mollibus ſubrotundis, foliolis cordatis.

Trifolium alopecurum ſpica globoſa *Barrel. ic.* 1188.

*Caules rotundi, villoſi, ſpithamaei. Stipula ampla in duos lobos quadrato-ovales denticulatos diviſa educit petiolum biunciale, quod jungit tria foliola denticulata, ex cuneiformi cordata,* oxalidi *ſimilia. Spica ſubrotunda, compreſſa, terminalis. Calyces ſtriati, ſericeo villoſi. Dentes calycini ſubaequales patentes, & tubo calycis longiores. Flos polypetalus calyci ſubaequalis.*

TURRITIS foliis omnibus hiſpidis, caulinis amplexicaulibus *Linn. ſp. pl.* 666.

Eryſimo ſimilis hirſuta non laciniata alba *C. B. prodr.* 42.

VERONICA floribus ſolitariis, foliis cordatis inciſis pedunculo longioribus *Linn. ſp. pl.*

Alſine veronicae foliis, floſculis cauliculis adhaerentibus *C. B. pin.* 250.

VERONICA floribus ſolitariis, foliis cordatis planis quinquelobis *Linn. ſp. pl.* 13.

Alſine hederulae folio *C. B. pin.* 250.

VIBURNUM foliis integerrimis ovatis: ramificationibus ſubtus villoſo-glanduloſis *Linn. ſp. pl.* 267. Lau-

Laurus ſylveſtris corni foeminae foliis ſubhirſutis *C. B. pin.* 461.

**Vicia** pedunculis multifloris, foliolis reflexis ovatis mucronatis, ſtipulis ſubdentatis *Linn. ſp. pl.* 734.

Vicia maxima dumetorum *C. B. pin.* 385.

**Vicia** leguminibus ſeſſilibus ſubbinatis erectis, foliis retuſis, ſtipulis notatis *Linn. ſp. pl* 736.

Vicia ſativa vulgaris ſemine nigro *C. B. pin.* 344.

**Viola** acaulis foliis cordatis, ſtolonibus reptantibus *Linn. ſp. pl.* 935.

Viola martia purpurea flore ſimplici odoro *C. B. pin.* 119.

*Rara in* Sardinia *planta creſcit in agro* Hierſu.

# OBSERVATIONES

## AMBROSII BERTRANDI.

VEteres Anatomici observationibus destituti de generationis opere parum, aut nihil intellexerunt; atque in summa rei obscuritate posteros vix aliquid esse intellecturos, nisi potius modos operis sequantur, pene desperandum est; Harvejus hanc methodum primus amplificavit, quam ipse quum sequerer non nullas observationes cumulare contigit, quas modo nudas exponam. Primae institutae sunt circa corpora ovariorum, ut vocant glandulosa; neque de his, quae satis vulgaria sunt, transcribam. Quaerebant Physiologi non nulli, an in virginibus intemeratis comperirentur, nec ita facile, atque constanter respondebant Anatomici. Santorinus vero per conjecturam rem adeo invexit, ut virginum morbos aliquos uteri a praecoci, & vehementi ipsorum intumescentia repetendos esse existimaverit. Cl. Morgagnius rem maxime cohibuit, ut nullum hujusmodi corpus in virginibus, quod cum iis nuptarum comparari posset, numquam observavisse scripserit (in epist. ad me dat. die XIII. Novembr. 1749.) Ego vero in puellis a decimo quarto ad vigesimum annum, quas non magis transactae vitae genus, quam partium genitalium intemerata integritas, & plenitudo virgines decessisse indicabant, in ovariis stigmata, seu granula quaedam observavi, quae corporum glandulosorum rudimenta referrent; in aliis porro adeo perfecta, & turgentia vidi, ut totam amplitudinem suam acquisivisse facile putarem; imo in robusta, & succiplena puella hujusmodi corpus inveni, cujus papilla gan-

gangraena esset correpta, idque totum sanguine atro oppletum.

Corpora hujusmodi glandulosa in puellis veluti in masculis semen excitare crediderim; vesiculae seminales in his dilatantur, semineque recens affluente replentur ad XII., vel XIV. vitae annum magis, vel non ita cito, eo quidem tempore, quo ephoebi pubertatem attingunt, nutritionis materia ultra corporis incrementi rationem in his tunc redundante, atque in prolificum semen evadente, siquidem nutritio, & generatio, idem pene naturae opus sint: Malpighius frequentissime in vitulis nuper natis unam, aut alteram vesiculam insignem deprehendisse scripsit, cui lutea substantia graminis instar adnascebatur; ego vero in animantibus hujus generis, atque aetatis flavescere vidi, non autem veluti adoriente lutea substantia, sed potius tinctura, quae facile abstergeretur, aut equidem solidam substantiam non comperi, quam veluti lutei corporis rudimentum asseverare possem, nec porro vesiculas adeo insignes in his potui deprehendere; asperam, leviterque tuberosam sentiebam ovarii superficiem, vesiculas non satis bene distinguebam. Nihilo secius veluti florum uterum undique, & in solido crescere hujusmodi corpora ostendam, si primum qualia sint, quando plena, perfectaque inveniuntur, indicavero.

Glandem referunt, quae profunde in ovario infixa papillam ad ejusdem superficiem porrigit, veluti segmentum minoris spherae majori appositum, & acretum: mammae papillae comparaveris; hujusmodi papilla saepius bene devoluta, terminataque videtur, alias nulla est, atque glandis ipsa convexitas aliqua parte protuberat, alias verrucam excisam, minus bene per ambitum terminatam inveniebam. Ovarium in transversum ovatum, anterius, posteriusque compressum est; ad latus externum, ut plurimum germinat corpus luteum, etsi in quacumque parte itidem inve-

O niatur;

niatur; in Vacca frequentiſſime maximam ovarii partem occupat, totum occupaſſe non ſemel vidi; in humanis ciceris, aut mediocris fabae craſſitiem non raro excedit, in illis olivam refert, aut ceraſum majus, in pecude, aut ſcropha humanorum amplitudinem ſequitur, aut parum ſuperat.

Simplex, & unum ut plurimum eſt, rariſſime duo in eodem ovario, aut unum in utroque reperitur. At vero, quum praeſens fuerit amplum, plenumque corpus luteum, alia minora quandoque occurrunt circumſcripta, terminataque, vel tanquam, quod magis raro vidimus, majoris continuatas appendices; rariſſime non invenimus maculas obſcuras cinereas ſubluteas, vel etiam nitide croceas profunde reconditas, aut veluti granula, aut papulas, quae mox ſub ovarii tunica tranſparebant, aut etiam turgebant; in beſtiis corpus luteum plenum, perfectumque perpetuo in eo reperiebatur ovario, quod ex latere eodem erat cornu gravidi, atque licet multiparae ſint, numerus tamen luteorum corporum nequaquam ex embryonum numero eſt.

Tunicam habent ſat craſſam, renitentemque, quae vaſculis plurimis ſanguineis obducitur, eaque ſpermaticorum, uterinorumque fuiſſe ſoboles comperimus; venae magis, quam in aliis corporis partibus arteriarum amplitudinem excedunt. Exterius communi ovarii tunica, quae tenuvior fit, obvolvitur, & cooperitur, quae & in id ipſum continuari videtur, circum circum qua parte ovario innititur fibris rubellis, compactis, reticulatis obducitur, quibus illud opus tribuerunt Anatomicorum aliqui, ut premerent, urgerentque ovulum foras e ovario in Fallopianam dictam tubam.

Veſiculas, ſeu ut ajunt, ova corpore glanduloſo increſcente decreſcere, & abſumi ſcripſerunt; ipſe quidem alterum ovarium in corpus luteum evaſiſſe nullis, aut pauciſſimis veſiculis duas veſiculas inſigniter turgentes obſervavi in quodam luteo, ut ita dicam, ovario, alias plures uſque ad viginti, & ultra, etſi corpus luteum non leviter

tur-

turgeret. Vidi non raro, quod tumente altero ovario ob corpus luteum, & vesiculas sat copiosas, alterum exiguum esset, & veluti extenuatum, idque saepius contigit: quae in ovario sunt reliquae vesiculae, luteo ut plurimum adjacent corpori, aliquas vidi, ut singula enarrem, ipsi papillae inhaerentes; memorata papilla saepissimae ad verticem foraminulo, quod usque in fundum corporis lutei continuatur, ductum ideo, seu canalem efformans, perforatur. Hujusmodi canalis membrana fit subcinerea, aut albida, cujus appendices in latera sparguntur, affiguntur que, seu continuantur eidem membranae exteriori corporis lutei. Non autem raro hujusmodi membrana vix apparet, aut etiam deficere videtur, vel etiam nullo pacto pertusum observatur luteum corpus, etsi per axim excisum cavitatis, ceu sinuli, qui nisi potius distrahendo fiat, in ipso, ut ita dicam, parenchimate vestigium videatur. Quandoque per tubum aëre quodam modo distendi poterat corpus luteum, compressum liquorem limpidum, mox magis crassum, subcinereum, aut leviter croceum extillabat. Nunquam vero cavitatem adeo patentem, & amplam invenimus, quae pisum posset continere, ut asseveravit Malpighius.

Hujusmodi corpus frustulis, & quasi lobulis componi scripserunt, structuram ipsius renibus, ut vocant, succenturiatis comparabant, varicosis propaginibus lutei corporis conflatam, quasi adipis minima frustula. Dum haec scribo plusquam triginta corpora glandulosa alia recentia, alia macerata, alia in frustula excisa ob oculos habeo, atque ut potius dydymo comparem analogiae cujusdam ratione adducor: diviso itaque per axim verticalem, aut transversim corpore luteo conicas mamillas, strias, seu appendices utraque facie planas video, quae ex tota circumferentia obtusa cuspide in communem longitudinalem caveam vergant. Hujusmodi mamillae ex vasculis tenuissimis, mollissimisque fiunt, quae crispata ad invicem per longitudinem cumu-

 lantur

lantur in ipsius mamillae fabricam ; quando vero per corporis lutei longitudinem membranosus ductus protenditur, ille, inquam, expansionibus suis lateralibus mamillas eas firmat, & devincit, ut fila ea, quae a tunica testium albuginea, eorum compagem pervadunt, & fasciculos vasorum seminariorum sustinent, & uniunt; microscopio examinata tenuissima longitudinalia harumce mamillarum fragmenta eamdem, ac ea, quae testium sunt, fabricam quodammodo exhibent, crispata nempe sunt, cava, turgentia, & liquido farcta: injiciens per arteriam spermaticam tenuissimam gummi solutionem in alcohol, seu vernicem, hujusmodi mamillas pervadisse non semel, etsi multa cum difficultate vidimus, atque vasculorum, quae sanguineorum propagines essent, elegantissimae myriades observabantur; hinc ex iis ipsis spermaticis vasculis corpus luteum educi suspicabar, quamquam, si ingenue fatear, usque in ipsa lutea vascula injectionis materiam nunquam penetrasse viderim.

Nonnulli Anatomici in nuper foecundatis phlogosi correpta observaverunt ovaria, eorumque vesiculas. Quid si jam pridem factum fuerit? Non equidem per eam temporis brevitatem excitari adeo facile credimus, tum propterea quod ipse uterus non leviter immutetur. In junioribus ovaria intus intertexta videntur confertissimis vasculorum, ita dicam, manipulis, quae in puellis, quibus mammae sororiari, & caetera pubertatis signa sobolescere incipiunt admodum rubent, & veluti florescunt; nonnullae ipsorum tenuissimae propagines circa vesiculas producuntur; verum e profundo ovarii villi nonnulli lutei germinare videntur, qui graminis adinstar, ut Malpighiana phrasi loquar, vesiculis iis circumducuntur, nec quidpiam referunt, quod cum luteo corpore comparari possit, hinc vero mira celeritate in papillas, seu penicillos luteorum vasculorum cumulantur, quae veluti papulam effingunt, atque illinc vesicula minus apparet, flosculos diceres florescentes, glomerantur, cumulanlanturque ſenſim magis, magiſque, atque ſoliditate non minus, quam amplitudine creſcunt.

Vidimus interdum ab aliquo corpore luteo, alteram veluti appendicem, ſeu apophyſim pullulare; non erat alterius corporis nimium producta papilla, ut primum ſuſpicatus eram, at quidem connatum corpus ejuſdem ſtructurae, hinc mecum ipſe meditabar ex iis, quae primum ſpectaveram, & ex aliis an veſiculae in hanc maſſam evaderent, extus, aut intus ſuccreſcente luteo tomento, aut recens ſine his germinaret. Plenitudo ipſorum, defectus reſidui folliculi, me in hanc potius trahebant ſententiam; tum praeſente pleno, perfectoque corpore luteo, alia eorumdem rudimenta vidiſſe viſus ſum, quae non ita circum veſiculam, veluti penicilli pulpoſi imagine germinarent, nec alium germinationis modum referrent, ac flos, aut gemma in plantis. *Ante conceptionem*, inquit Cl. Hallerus *plerumque naſcitur, ſenſim circa veſiculam aliquam ovarii coagulum flavum, ſaepe a me viſum, quod valde auctum, circum natum membranae veſiculae, abire videtur in hemiſphericum, acinoſum, luteum corpus intus cavum, & in ea cavitate, quantum videtur, continens ovulum, ſive membranulam minimam cavam, ſedem futuri hominis.* Prim. Lin. Phyſiol. edit. 2. pag. 545. §. DCCCXXV. Eae Halleri obſervationes noſtras non ſolum comprobant, imo etiam anteceſſerunt, neque eas renovare auſus eſſem, niſi idem Clariſſimus Auctor in eodem paragrapho, imo in eadem linea adjunxiſſet, *quod ea corpora in foemina poſt conceptum primum adparent*, quam ſententiam iterum, atque praeciſe tranſcripſit ad finem §. DCCCLVII., quae tamen poſtrema verba deficiebant in eodem paragrapho primae editionis.

Corpora igitur glanduloſa non ſemper eamdem plenitudinem aſſequuntur, incrementi vero rationem quamdam tenent; duo aeque perfecta in eodem ovario, aut unum in utroque nunquam inveniſſe diximus. Incidimus foemina e

cada-

cadaver, quae gemellos enixa erat, ſolitarium globoſum, terminatum comperiebamus. Hae moliem ſuam aſſequuta turgent, & duriuſcula ſunt, altera molliora flacidiora; illa intenſe crocea, vel etiam rubent, atque in his vaſculorum ordo nitidior apparet, vaſculorum, ſeu inteſtinulorum inquam, quae corporis lutei compagem faciunt, altera ſublutea, pallida ſubcinerea, pulpam, cujus ſtructuram non tam facile diſtinguimus, perhibent. Caeterum per geſtationis tempora magis, vel minus celeriter decreſcunt, donec in exiguiſſimam molem evadant, ceu in granula, vel maculas minimas, quae quidem & in provectis mulieribus, quae jam a multis annis utero nihil geſtarunt, intenſe luteae, quandoque apparent; papulae, quas ſuperius memoravimus, praecipue occurrebant, quando praeſentis geſtationis decreſceret, vel praeterita geſtatione longe magis decreviſſet. Veniamus jam vero ad uterum.

Ipſe quoque uterus ad concoeptionem praeparatur: ex veteribus Anatomicis Carolus Stephanus uteri vaſa ſanguinea deſcribens, haec eadem in papillas, quae Hipocrates *acetabula* nominabat, elongari ſcripſerat, eaque percipi poſſe, *non ſolum in praegnantibus, ſed etiam in iis, quarum uterus ad ſuſcipiendum ſemen aptus eſt*; confirmaverat Harveus, quam rem non modo neglexerunt Anatomici, imo etiam deſpexerunt. Ego vero jam ab anno MDCCXLVIII. cornua uteri vaccini, tuberculis hic, illic turgentia quandoque videram, quod idem cum ſaepius, iterumque vidiſſem, multa enim mihi ipſorum erat copia, non adeo facile morbi genus, quae mihi primum ſuſpicio obvenerat, eſſe credebam, nam neque durities, neque ſordes, aut ulcera morbi ſuſpicionem dabant; cogitavi poſtea, an acetabula eſſent, quae per puerperium decreſcerent, nam compreſſa humorem tenuem quidem, atque dilutum, at vero quodammodo lacteum interdum dabant.

Nactus ergo multam copiam uterorum pecudum, atque vaccarum, quae marem quidem erant passae, at nunquam evaserant foecundae, subductae porro jam fuerant a mare ab hebdomada, vel etiam mense; in iisdem ea quoque tubercula observare contigit, quorum nonnullis, quae majora essent, delectis post macerationem aliquot dierum in aqua, ejusdem esse structurae, ac corpora glandulosa utero gerentium comperi, idem observavi in cuniculis, quas ipse domi servaveram: papulas primum spongiosas, quando minima sunt, referre videntur, quae quidem papulae novam excitatam fabricam demonstrant, si cum reliqua uteri interna superficie comparentur, rubent, atque in aqua diu maceratae, tubercula videntur spongiosa elegantissimo reticulo tecta, e cujus areolis villi quidam, seu villosa lanugo emergit; reticulum illud cum interna uteri membrana continuari conspicimus; villi e profundo emergunt, neque eadem structura continuatur in reliquis uteri areis (de quadrupedibus loquimur), e quibus nulla eminent acetabula. Hujusmodi reticulum in acetabulis pecudum, quae adinstar calicis sunt excavata, non ad oram, sed non nihil profunde observatur, in vaccis vero in foraminulis spongiosae substantiae intromittitur, atque nisi distrahendo, rumpendoque adesse noscimus.

Bestiae quadrupedes, quae menstrua non patiuntur, si libidine aestuent, sanguinem e vagina extillant, atque catula aestu libidinoso furens, neque dum a mare compressa sanguinem sat copiosum emittebat; itemque in ejus utero per varia cornuum loca septem distinctissima, variaeque amplitudinis corpuscula inde repereram, quae acetabulorum rudimenta viderentur, mollia erant, spongiosa, rubella, e quibus tamen serum potius lactescens pressione exprimebatur; vasa ad ea corrivabant sanguine turgida, in iisque confundebantur.

In mulieribus, priusquam concoeperint, nihil profecto hujusmodi observavisse ingenuus fateor; Clarifs. Morgagnius sinus demonstravit, e quibus sanguis menstruus extillaret; eos ampliores utpote sanguine turgidos, instantibus catameniis, semper comperimus, atque compresso utero potius per oblongos hiatus, quam per vasculorum foramina sanguinem exstillare observavimus; rubet, turget uterus ob aestum venereum, nihil ultra immutatum ante conceptum revera vidimus. Porro tamen propria vi mutari ex eo deducimus, quod cum non semel mulieres aperiremus, quae primis graviditatis hebdomadibus obierant, etsi ovum utero nullibi adhuc dum adhaereret, nihilo tamen minus, alicubi magis turgere uterum, & sinus magis patulos, longius productis tumidis labris, observabamus, ceu veluti designatum locum, ubi placenta tandem infigi, & adhaerere deberet. Idem observavimus in utero vacuo cum conceptus esset in tuba sinistra, ut, inquam, propria vi immutari uterum dicamus, ceu non ex solo placentae contactu. Erat in eo loco pusillus foetus, turgebat tuba crassis parietibus, atque vasis summe turgidis circumdabatur; uterus porro triplo erat naturali major, rubellus, turgidus, atque ad eum locum, ubi tuba illius lateris insinuabatur, per tres digitos transversos magis erat tumidus, atque in superficie interna sinus satis patulos habebat productis labellis crassis, atque non nihil tumidis. Longe tumidae erant arteriae spermaticae, atque instituta injectione, ceram plenis rivulis in uteri tumidi sinus penetrasse observavimus, quum eae arteriae, quando mulieres nihil in utero habent, ad eum tota naturali diametro perveniant, angustentur inde, ut tenuissimae in uteri substantia intercipiantur. Quid porro? foeminae nonnisi post purgationem concipiunt, atque si cesset, non amplius foecundae evadunt; mulieres ultra quinquagesimum annum menstruantes pepererunt, praecoces hujusmodi purgationes in puellis praecoces reddunt foecundationes.

Har-

Harveus mucosá filamenta describit , quae ab ultimo , seu superiore cornuum angulo ducta , simulque inde juncta, membranosam, ac mucilaginosam tunicam, seu, ut ajunt manticam, vacuam vero, ceu nullo occupatam embryone efficerent. Equidem embryonis membranas tamquam ex muco compaginari amplissimis Anatomicorum observationibus ediximus. Semel in scropha, in qua luculenta occurrebant uteri acetabula, mucosam, sanguinolentam telam observaveram, per totam uteri amplitudinem perfusam, nec ullam minimam compactam substantiam, quae pro embryone, vel minimo sumi posset, occludentem; in aqua neque solvebatur, & adinstar membranae natabat, & expandebatur facillime citra rupturam, crassam, mucosam, spongiosamque telam dixisses, quae passim rubebat papulis, seu maculis sanguineis. Etsi per quam attentum in hujus uteri anatome me praestiterim, non potius Harvei observationem confirmare intendo, quam Anatomicorum diligentiam excitare, ut in iisdem insistant; Harveus enim tanta observandi opportunitate, atque diligentia observationes suas adauxit, ut hae negligi quidem non debeant; atque ut ipse fatear quod recogito, postremae, quas in ovibus, & vaccis institui observationes, a communi sententia me non leviter deturbarunt, ut generationem multiplici patium apparatu promoveri, foveri, & perfici crediderim; dubium observationes excitarant; eaedem aliquando fortasse absolvent, si porro operis modos sequamur.

Equidem placenta, quam partem organicam tandem conspicimus veluti ex muco fit. Primis gestationis temporibus ab utero delapsum ovum mucosa substantia sanguinolenta circumquaque obvolutum videtur: hujusmodi placentam Ruyschius sanguinem praeter naturam concretum existimaverat; at vero si aqua dissolvatur, fibrosam permixtam texturam observamus; quam Clariss. Albinus nitide resolvit; quo magis placentae organica structura adolescit, eo

P soli-

ſolidior videtur, mucoſa, villoſa fit ſubſtantia, elegantiſſimum muſcum refert, vaſcula fiunt ſenſim majora, ſolidiora, e quibus funiculus tandem umbilicalis educitur. Perpendite quemadmodum habitis proportionibus adaucta placentae ſoliditate, amplitudo decreſcat, pulpoſam tamen ſemper retinet mollitiem, vel ſolubilem ſaltem, atque ſpongioſam, reliqua membranarum pars, ſuper quam non adcrevit placenta, mollis celluloſa, mucoſa, glutinoſa inquam ſupereſt ex ea facie. Modo huic, modo illi ovi plagae (deſuper ipſum uteri orificium offendimus) in mulieribus adhaeret, dum tamen foetus in membranis eumdem ſemper ſitum tenet, ne dicamus ex ovi inclinatione fieri; funiculus umbilicalis non ſemper ab eadem placentae plaga prodit, quod iſta vegetationis inquam modum non ſemper eumdem tenet, aptatur autem aptae uteri plagae, etenim in beſtiis, quae diſcreta habent, & uteri cornubus propria acetabula, cotyledones omnino reſpondentes numero habent, ſitu, atque figura; exceſſum, aut defectum ullum numquam obſervaſſe contigit; longe tamen diverſa eſt cotyledonum, & acetabulorum ſtructura, quemadmodum & partium, quibus adnaſcuntur, ut cauſſa, quae alteros efficit, non eodem pacto altera componat, etſi ſucceſſive fiant; eſt tamen utrorumque ſtructura elegantiſſima, adeoque inquam diverſa, ut per contactum fieri, nequidem ſuſpicari poſſimus, itidemque longe variant inter ſe, ex variis animantium ſpeciebus, & in eiſdem animantibus harum partium numerus, & figura multum variat, etſi ſemper ſibi ad invicem reſpondeant; placenta inquam ipſa humana non per totam ſuperficiem ſuam aeque adoleſcit, per cumulos diſtinctos pleniores, ampliores, vividioreſque compaginatur, & in cotyledones aeque reſolvitur.

# SUITE DES RECHERCHES

## *Sur le fluide Elastique de la Poudre à Canon.*

## PAR LE CHEVALIER SALUCE.

1. JE crois d'avoir asés prouvé dans le Mémoire précédent que le fluide élastique qui se développe de la poudre à Canon est de même nature que l'air commun, & que la force prodigieuse de ce fluide dépend de l'action du feu dans toutes ses parties qui lui fait recouvrer sa force élastique. Comme cependant cette matiére est une de plus intéressantes dans la Physique, je tacherai de perfectioner de plus en plus le travail que j'avais entrepris, en y ajoutant des nouvelles lumiéres qui serviront non seulement à confirmer la Théorie que j'ai établi, mais encore à lui donner une plus grande étendue.

Je vais donc exposer les principaux résultats de mes recherches. Les expériences sur l'élasticité, & sur la compression du fluide, que je n'avais qu'imparfaitement tenté comme je l'ai dit (*a*) & que j'ai tachê de répéter soigneusement, serviront avec l'annalise de quelqu'autres faits à mettre hors de doute ce que j'ai déja avancé; je passerai ensuite à faire voir que la force du fluide dépend principalement de la vitesse avec laquelle il se développe: les expériences qui suivent remplissent la prémiere de ces vues.

2. Je formai le tube de comunication entre le flacon ou je mettais la poudre, & le récipient, de cinq cilindres de verre assés longs; celui qui tenait au flacon l'était même d'avantage, afin que le fluide pû se dilater dans un



(*a*) Voiés la notte * du mém. pag. 6.

plus grand eſpace ſans trouver le moindre obſtacle (*b*); je les garnis chacun d'un double filtre de gaze bien ſerrée, & j'en enduiſis les quatre prémiers de bonne huile de tartre: je paſſai dans les tubes auſſi du coton trempé dans la même huile, & je mis du ſel de tartre pilé groſſiérement ſur le filtre de la piéce qui entrait dans le récipient; le baromètre recourbé finiſſait en forme d'entonnoir vers la partie qui comuniquait avec l'air extérieur, & l'autre extrémité entrait dans un petit cilindre qui tenait à un robinet, lequel paſſait dans le récipient en traverſant la plattine de la machine pneumatique. Toutes les jonctions furent ſoigneuſement maſtiquées, & j'opérai enſuite de la même maniére que dans l'expérience (3. du mém.): le mercure était preſque à la hauteur de 27 pouces lorſque la poudre prit feu, en ſorte qu'il ne ſerait reſté dans ces cavités qu' $\frac{1}{2}$ pouce d'air environ, il baiſſa au prémier inſtant de dix à douze pouces, & après quelques oſcillations qui diminuaient par dégrés le mercure commença à monter, & ne diſcontinua qu'après quelque tems; s'étant arrêté à un, ou à deux pouces plus bas qu'il n'était au moment que la poudre s'enflamma; je reconnus alors que le fluide avait aquis la température de l'air ambient, & je notai le point d'élévation à l'accoûtumée.

3. Je plaçai enſuite ce baromêtre d'épreuve à côté d'un autre exactement conſtruit ſuivant la métode donnée (com. pag. 16.) afin de pouvoir comparer les changemens, & eſtimer la cauſe des altérations qui pouvaient ſurvenir; je le gardai ainſi durant ving-trois jours ſans qu'il m'ait été poſſible de découvrir que ce baromêtre eut ſouffert d'autres change-

(*b*) Il m'eſt toujours arrivé de voir briſer mes vaiſſeaux lorſque le tube étant trop court, le filtre ſe trouvait prés du flacon, ou lorſque étant dans l'obligation de plier le tube, la courbure n'était pas aſſés eloignée du flacon. Mr. Halles dans ſon Appendice à la ſtat. des végét. nous apprend qu'il prit auſſi cette précaution. pag. 341.

changemens que ceux qui dépandaient des variations de l'atmoſphére: je crus enfin inutile de le garder plus long tems puiſque je n'avais pas la moindre indication d'abſorbtion, d'autant plus que Mr. Hauksbee nous apprend, comme je l'ai déja dit, que les $\frac{19}{20}$ dont il fait mention fûrent abſorbés dans 18 jours ſans avoir ſubit enſuite aucune variation. Le vingt-quatriéme jour pour déterminer les lois de la compreſſibilité de ce fluide j'ai verſé à plusieurs repriſes dans la jambe ouverte différentes quantités de vif argent, & ayant obſervé les diminutions de l'eſpace je trouvai que le degré de compreſſion était préciſément en raiſon des poids ajoutés (*c*).

4. La concluſion que j'ai tiré de mes expériences eſt ſans contredit très-ſimple, & naturelle; & on doit acquieſcer d'autant plus volontiers que tous les réſultats concourent à la démontrer. Je ſuis pourtant d'avis que quoique l'air ſoit le grand agent qui produit les effets de la poudre, il exerce cependant dans cette rencontre au prémier inſtant une force plus expanſive que s'il était parfaitement ſec: car l'on ſait qu'un air humide peut ſe dilater d'avantage, & qu'il ſe trouve en effet de l'humidité dans le ſalpêtre, ainſi que dans tous le ſels criſtalliſés: il eſt pourtant clair, par ce que nous avons vû, que l'humidité n'a pas grande part dans les effets de la poudre, & ceci ſera encore plus clairement prouvé dans la ſuite. Au reſte quelque ſoit l'effet que peut produire l'humidité qui ſe développe d'une poudre donnée on ne ſaurait la déterminer préciſément ſans en connaitre exactement la quantité: on pourrait peut-être l'obtenir en brûlant cette poudre dans un flacon, qui fut ma-

(*c*) Je crois de devoir avertir ici que les colonnes de mercure que j'ai ajouté dans le tube ſuſdit ſe trouvaient contenues dans l'eſpace cilindrique, de ſorte que l'entonnoir que j'avais appliqué pour avoir une quantité ſuffiſante de mercure, lorſque je faiſais le vuide dans la jambe oppoſée, ne me ſervait en cette occaſion que pour me faciliter les opérations.

maſtiqué à une ſile de balons ; on aurait alors cette quantité en entier par ſa condenſation. Je ne crois pas d'ailleurs qu'il y eut une méthode plus ſûre pour dénoüer cette queſtion ; car outre qu'il eſt fort difficile de ſavoir parfaitement combien chaque compoſant contient d'eau, quand même on en ſerait aſſûré, il ſerait encore queſtion de déterminer combien en retiennent les ſels neûtres, que l'on trouve après l'inflammation ; ce n'eſt pas un point à negliger, puiſqu'on ſait que les ſels qui ſe criſtalliſent en contiennent une quantité conſidérable ; l'umidité donc qui ſe trouve dans les compoſans, ou dans la poudre même êtant connue, on ne ſerait nullement illuminé ſur l'accraiſſement de la force expanſive qu'elle apporte à l'air.

5. Du reſte ſi l'eau que contient la poudre ſe développait en vapeurs dans le tems de l'inflammation, il eſt viſible que non ſeulement elle produirait toute ſeule les effets de la poudre, mais encore des bien plus grands, puiſque Mr. Muſchembroek a trouvé que l'eau qui ſe reſout en vapeurs a alors pour le moins une force onze fois plus grande qu'une égale quantité de (*d*) poudre ; une onziéme donc, c'eſt à dire une quantité bien petite de l'eau qui ſe trouve en effet dans la poudre, ſuffirait pour produire tous ſes effets, de façon que l'air n'y entrerait plus pour rien, ce qui eſt abſolument contraire à ce que j'ai fait voir & qui ſe trouve encore confirmé par l'autorité de pluſieurs Auteurs du prémier ordre.

6. Un Phyſicien renommé de notre tems prétend que l'air n'eſt pas ſuffiſant à produire tous les effets de la poudre je rapporterai ici ſes propres termes. *La (e) plûpart des Phyſiciens qui ont parlé de l'exploſion de la poudre ont attribué ce merveilleux effet uniquement à l'air qui s'y trouve comme incorporé par l'action des pilons, & à celui*

(*d*) Eſſai de phyſ. §. 873.
(*e*) Leçons de phyſ. expérim.

*celui qui remplit les petits espaces, que les grains rassemblés comprennent entr' eux... . ....... Ces raisonnemens doivent sans doute entrer dans l' explication des effets de la poudre enflammée, & je n' ai garde de les contester : mais je ne les crois pas suffisans, & je pense qu' il faut y en ajouter quelqu' autre &c.* Je tenterai de développer les raisons qu' il apporte en les comparant aux autorités sur lesquelles il les appuye. Quant aux vapeurs qu' il associe à l' air auxquelles il attribue la vertu d' avoir contribué à faire baisser l' eau dans le tube de Mr. Bernoulli comme on peut le voir par ses propres expressions. *N' est-on pas tenté de croire, que dans le tuyau de Mr. Bernoulli il reste après l' inflammation quelque vapeur qui augmente un peu le volume de l' air avec lequel il se mêle, & qui fait baisser la surface de l' eau ?* quelles qu' elles soient, il suffit d' observer que ce grand Géométre n' ayant déterminé cet abbaissement que quattre heures après le refroidissement du fluide (*f*) on ne peut plus emprunter le secours d' aucune espéce de vapeur pour rendre raison du fait ; car il ne nous est pas encore donné de en connaître d' aucune sorte qui n' aquiére dans

(*f*) Mr. Bernoulli nous aprend qu' ayant mis le feu dans un tube au moyen d' un miroir ardent, à quattre grains de poudre, l' air qui s'en développa chassa l' eau hors du tuyau, après quoi elle remonta jusqu' à ce que le fluide eut acquis la température de l' air ambient, & s' arrêta ensuite trois ou quattre heures après; il mesura alors l'espace occupé par le fluide, & il le trouva capable de contenir 200 de ces grains, ce fait, & quelque réflexions qu' il y ajoute, lui font déterminer l' air contenu dans la poudre cent fois plus dense qu' il est dans son état naturel.

On peut remarquer en prémier lieu qu' il fait sentir, qu' à l' occasion de l' explosion l' eau fut poussée avec tant de violence que si le tube n' avait pas été bien long, non seulement l' eau, mais l' air même en aurait été entiérement chassé. *Adeo ut nonnunquam, nisi portio tubi sit satis longa, per orificium, non solum omnis aqua, sed aër expelli possit.* On peut noter en second lieu que Mr. Bernoulli n' a donné que l' espace absolu de quattre heures après que l' eau s'était arrêtée, ou comme il dit, après le réfroidissement du fluide, & qu' il ne tient aucun compte de l' absorbtion des vapeurs sulfureuses pendant ce tems. *Proinde res ex voto successit; ideoque machinam immutatam in priorem locum temperatum transtulimus,* dans un aussi long espace de tems sa condensation naturelle, lorsque la cause qui avait produit sa dilatation a entiérement cessé.

7. Quoique cet Illustre Auteur ait cherché par là de donner une explication du résultat que Mr. Bernoulli rapporte dans sa dissertation *De effervescentia, & fermentatione*, insérée dans le pr. Volume de ses oeuvres à la pag. 35., on voit cependant qu'il a quelque doute sur cette expérience comme ses paroles semblent l'indiquer. *Je sais bien* dit-il *que Mr. Bernoulli cité par Varignon ayant mis le feu &c.* (g) . . . . . . . *& je conviens que cette induction s'il n'y a rien à rabattre donne beaucoup de force à l'opinion de ceux qui attribuent à l'air seul les grands effets de la poudre. Mais comment accorder cette expérience avec celles de Mr. Halles, d'ou il conclut avec toutes les apparences de vérité, que les matiéres sulfureuses que l'on brûle absorbent l'air.* Il est pourtant sûr que l'espace des deuxcent grains n'est pas exagéré, & qu'il est au contraire fort au dessous de ce qu'il aurait été sans l'absorbtion des vapeurs sulfureuses, mais l'on voit assés que ce n'est qu'en conséquence de la persuasion ou il était par sa Théorie *a priori*, que *l'air ne suffit pas &c.* qu'il a avancé, que *dans le tuyau de Mr. Bernoulli* il restait *après l'inflammation quelque vapeur qui* augmentait *le volume de l'air &c.* & qu'il trouve de la difficulté à accorder cette expérience avec celles des Mr. Halles, il me parait cependant qu'elle ne porte pas coup à celles ci, à moins que l'on ne craie que Mr.

*stulimus, ubi aquam in tubo sensim rursum ascendere observavimus, nimirum ob duplicem causam, tum ob translationem ex loco calidiori in frigidorem, tum ob subito incensum ignem iterum extinctum, tamdiu, inquam, ascendit aqua, donec tota machina refriguisset, & pristinum statum, induisset; tum demum amplius non ascendit, sed quievit, etiam per tres, vel quatuor horas, quamdiu in isto statu permittebamus; sic itaque advertimus, non ad priorem terminum usque ascendisse, sed notabiliter infra limitem posuisse . . . . . . ., sed prout judicavimus ducenta granula pulveris pyri vix adimplevissent spatium.*

(g) Voiés la note ci devant.

Mr. Halles n' ait voulu démontrer que les vapeurs sulfureuses ont la proprieté de fixer, ou d' absorber dans ce peu de tems presque tout l' air d' un tube quelconque, ce qui ne serait pas l' intention de ce célebre Anglais (& c'est ce dont je n' oserais soupçonner le savant Auteur dont je parle). Car dans la Statique des végétaux il fait voir que l'air est absorbé par ces sortes de vapeurs (*h*): qu' il ne l' est que fort lentement, de sorte qu' elles ont cette vertu pendant plusieurs jours (*i*): que dans les prémiers tems elles ont plus d' action que dans la suite, comme le remarque Mr. Hauksbée (k): qu' elles ne peuvent enfin absorber tout l' air contenu dans l' espace ou elles sont renfermées (*l*); il parle ensuite de la grande quantité d' air qui sort du salpêtre, & en conséquence il ne doute point que le fluide élastique

(*h*) Exp. 76. pag. 173.

(*i*) Ibid.

(k) Mr. Hauksbee ayant brûlé de la poudre dont le poid était d' un grain dans un tuiau, où il avait observé par l' abaissement de l' eau que la quantité du fluide generé occupait au prémier instant 222 fois le prémier volume, il remarqua que dans deux heures de là, l'eau était remontée de $\frac{4}{20}$ de l'espace abandonné, & que deux heures encore après elle était $\frac{5}{20}$ de plus au dessus. Hors il est évident que cette ascension de l' eau ne peut pas seulement dépendre du refroidissement du fluide, & de la condensation des vapeurs aqueuses comme parait le soupçonner l' Auteur de cette expérience: car comment pourrait-on penser qu' un peu de ce fluide si rare ait pû rétarder non seulement quelques heures, mais bien des journées avant que d' avoir acquis la température de l' atmosphere, puisque l' eau continua à monter pendant dix-huit jours, & qu' il n' y resta plus qu' $\frac{1}{20}$ après ce tems qui n' ai plus changé? Les expériences de Mr. Halles, & celles que j' ai fait moi même font voir qu' une aussi longue absorbtion n' est düe qu' aux vapeurs acides & sulfureuses, & puisqu' on peut croire sans hazarder que dans une heure de tems, l' action de la chaleur, & des vapeurs aqueuses ait entierement cessé, il faut convenir que la diminution du fluide dans ce tems apportée par trois différentes causes, c' est à dire par la condensation des vapeurs, par celle de l' air, & enfin par l' absorbtion n' égalant que $\frac{2}{20}$, ou soit $\frac{1}{20}$ du fluide generé, le vapeurs aqueuses sur tout n' ayent pas cette grande vertu qu' on leur attribue.

(*l*) Pag. 202.

ſtique de la poudre ne ſoit de l'air commun (*m*): cet air cependant doit être conſidérablement condenſé, puiſque le même Mr. Halles par la diſtillation qu' il a fait du ſalpêtre a trouvé que l' air qui en eſt géneré occupait un volume cent quattre vingt-fois le prémier (*n*).

8. On peut auſſi examiner à cette occaſion le ſentiment d' un Phyſicien qui dans le quatriéme tome de l' Accadémie de Bologne a donné une diſſertation ſur ce ſujet; cet Auteur, dont le travail montre d' ailleurs aſſés d'érudition, entreprend de faire voir par un enchainement d'argumens, qu' il faut avoir recours aux vapeurs aqueuſes pour obtenir l' immenſe raréfaction du fluide, & il prétend que l'air n' eſt pas ſuffiſant, comme on peut le voir par le précis de ſon ſentiment que je vais expoſer. *Mr. Bernoulli* dit-il *nous aprend que l' eſpace abandonné par l' eau aurait pû contenir deux cent des grains qu' il avoit employés, donc en diviſant par 4 qui était le nombre des grains dont il ſe ſervit, l'on aura la denſité de l' air en raiſon de 50 par grain, or en ſuppoſant une chaleur égale à celle de l' huile bouillante, le volume du fluide rarefié, ſera 250 fois plus grand que celui de la poudre; mais Mr. Ammontons, Belidor, & moi même*, continue-t-il, *nous avons trouvé que la flamme de la poudre ſe dilate dans un eſpace 4 ou 5000 fois plus grand que l' eſpace de la poudre, donc, pour que l' air pût ſe dilater dans un auſſi grand eſpace, il faudrait que le degré de chaleur néceſſaire fût à celui de l'huile bouillante comme 16 : 1 ce qui n' étant pas probable, il faut donc avoir recours à l' eau qui eſt dans le ſalpêtre, & qui ſe convertit en vapeurs en même tems que la poudre s' enflamme.*

9. En prémier lieu je ne ſaurais penſer que la force, ou l' activité de la poudre dépende du volume de la flamme, ni qu' on puiſſe la méſurer par là, étant très-naturel que dans un fluide composé de parties inflammables, & de parties

(*m*) Pag. 237.
(*n*) Exp. 72. pag. 159.

parties actives, ces dernieres ne se dilatent pas dans un volume aussi grand que la flamme qui émane des autres: en effet il est évident que la force du fluide doit être determinée par l'espace qu'il occupe dans son expansion, en vertu de laquelle il chasse les obstacles qui se présentent, & non pas par le volume qu' acquiert la flamme dans cet instant, puisqu' il est certain que la prémiere dépend entiérement des parties actives du fluide, sans que l' on puisse porter le même jugement par rapport à l'autre.

10. Notre Auteur n'a pas non plus observé que dans le tube de Mr. Bernoulli il faut avoir égard à l' air qui est absorbé par les vapeurs sulfureuses; or en supposant même que ce soit le refroidissement de l' air humide, qui ait seul contribué dans la prémiere heure à l' ascension de l' eau dans le tube, & que ces vapeurs sulfureuses n' y entrent pour rien, de façon que sans cela le fluide ne se serait dilaté que dans $\frac{18}{20}$; l' on ne pourra cependant pas se dispenser de leur attribuer les changemens arrivés dans les trois heures suivantes: or ces changemens, comme je l' ai ci devant observé (not. k) montent à 7 autres vingtiémes de l' espace résidu, de sorte que dans le tube il ne pouvait plus rester alors que $\frac{11}{20}$ de l' air generé (ibid.), & comme cet air qui restait, était égal à cinquante fois le volume de la poudre, donc trois heures auparavant le volume du fluide generé devait être pour le moins 81 fois plus grand que le volume de la poudre.

11. Ce résultat cependant ne saurait convenir avec celui que Mr. Hauksbee nous donne, quand même nous tiendrions encore compte de la prémiere heure, car nous n'aurions qu' un volume 90 fois plus grand, tandis que le susdit Auteur le trouve de 222, mais on voit assés que Mr. Bernoulli n' a pas prétendu donner une mesure exa-

ĉte du fluide, mais ſeulement une ingénieuſe maniére de le déterminer; car par ce que nous avons vu ci-devant (not. *f*) il a crû que l'aſcenſion de l'eau avait été cauſée par le tranſport de la machine d'un endroit à un autre qui était moins chaud, & par la prompte extinĉtion du feu; c'eſt pourquoi il fait obſerver que l'eau ne ceſſa de monter que lorſque le fluide eut acquis la temperature de l'atmoſphere ſans pourtant nous faire ſavoir le tems que ce fluide employe à ſe refroidir, il nous dit ſeulement avoir obſervé la hauteur de l'eau trois ou quatre heures après qu'elle fut tranquille; mais c'eſt là une détermination bien vague, parceque l'on ſait que l'eau dans l'expérience de Mr. Hauksbee continua encore à monter pendant 18 jours compris le tems de ſon refroidiſſement: & cela eu égard a l'abſorbtion de l'air cauſée par les vapeurs ſulfureuſes, de ſorte que l'on ne peut pas ſavoir le tems qui s'écoula depuis l'inflammation juſqu'à celui où Mr. Bernoulli fit ſon obſervation, ni par conſéquent faire entrer en compte l'abſorbtion qui ſe fit dans ce tems là.

12. Pour en revenir à l'Auteur ci devant cité (8): il détermine la denſité abſolue de l'air dans chaque grain de poudre par rapport à celle de l'air commun comme 50 : 1. parceque l'expanſion du fluide dans le tube de Mr. Bernoulli était au tems de l'obſervation dans la même raiſon à l'égard du volume de la poudre; outre les reflexions que j'ai fait, par leſquelles on peut facilement appercevoir l'inconſéquence de ce raiſonnement, il faudrait ſuppoſer encore que tout le volume de la poudre conſiſta dans un égal volume d'air pur condenſé, qui cependant comme nous l'apprend Mr. Halles n'y entre que pour la huitiéme partie, le reſte étant de parties inflammables, & groſſiéres (*o*): de

(*o*) Mr. Halles à la vérité ne dit cela qu'en parlant du ſalpêtre, exp. 72, pag. 159. mais comme l'air de la poudre n'eſt produit que par la décompoſition de cette ſubſtance, & que les deux autres n'en fourniſſent point, ou du moins de plus l'on doit prendre en considération les intervalles qui sont entre les grains, & dont la somme en rend le volume absolu moindre d'un tiers.

13. Ensuite de toutes ces raisons, & de celles (11) qui me font préférer l'expérience de Mr. Hauksbee, ne s'agissant point d'ailleurs d'introduire ipotéthiquement l'action d'une chaleur sujete jusqu'a présent a plusieurs déterminations arbitraires, je remarque en prémier lieu que l'air generé à l'occasion de l'inflammation occupait un espace 222 fois plus grand que le volume de la poudre; or en retranchant la $\frac{1}{10}$ de l'espace qui avait été remplacé par l'eau dans la prémiere heure, pour être assurés que la chaleur de l'air n'y a plus aucune part, nous aurons le volume du fluide reduit à la température de l'air ambient environ 200 fois plus grand que celui de la poudre : en second lieu comme ce volume est moindre d'un tiers (12), celui du fluide sera par conséquent au moins 266 fois plus grand, & puisque l'air ne faisait que une huitiéme partie de la poudre (12) donc le volume du fluide était pour le moins 2128 fois plus grand que celui qu'il occupait dans la poudre avant l'inflammation, d'où il en vient enfin que l'air dans chaque grain, ou pour mieux dire dans la poudre employée, avait cette densité; ce qui est fort éloigné de ce que prétend l'Auteur dont j'ai rapporté le sentiment (8).

14. D'après tout ce que je viens de dire on peut voir clairement que les Théories purement speculatives, & établies

*a priori*

---

moins si peu qu'on ne s'en apperçoit pas assés sensiblement, j'ai crû de pouvoir me servir de cette lumiére par rapport à la poudre, & cela d'autant plus que le salpêtre ne faisant que les $\frac{7}{9}$ de la meilleure poudre on n'aurait à ce prix que la $\frac{1}{8}$ des $\frac{7}{9}$ &c.

*a priori* ſur de principes éloignés ſans le ſecours d'un enchainement d'expériences qui en appuyent le ſiſtême, ſont fort ſuiettes à caution, & c'eſt là un avvertiſſement que nous donnent les Phyſiciens du prémier ordre, & que j'ai táché de ſuivre autant qu'il m'à été poſſible: *en fait de Phyſique*, dit Mr. de Buffon, *on doit rechercher autant les expériences, que l'on doit craindre les ſiſtêmes, & la connoiſſance des effets*, dit-il, *nous conduira inſenſiblement à celle des cauſes, & l'on ne tombera plus dans les abſurdités, qui ſemblent les caractériſer*: il eſt vrai qu'il n'en faut pas non plus abuſer, & pour cela il avertit que l'on doit *en amaſſer juſqu' à ce que nous ſoyons inſtruits*.

15. Mr. Daniel Bernoulli apporte encore une difficulté qui eſt ſans doute plus réelle, & qui parait même inſurmontable au prémier aſpect. Voici en quoi elle conſiſte.

Ce ſavant Géomètre ayant calculé par les gravités ſpécifiques connues, de l'air, & de la poudre, la quantité d'air qui pouvait y être contenu, a trouvé que quand même on voudrait la ſuppoſer toute d'air, l'elaſticité de celui-ci ne ſerait jamais capable de produire la force que nous y obſervons. D'où il conclud qu'il faut, ou admettre dans la poudre un autre principe plus actif, que l'air, ou bien ſuppoſer que ſa force élaſtique augmente en ce cas dans une raiſon plus grande que celle des condenſations.

16. L'on pourrait à la vérité éluder entiérement cette difficulté en accordant à Mr. Bernoulli cette derniére hypotéſe, l'expérience nous apprend en effet que lorſque la denſité de l'air eſt ſeulement quadruple de la naturelle, la condenſation augmente en moindre raiſon que les poids comprimans; d'où l'on a tout lieu de croire, que cette raiſon ira toujours en diminuant de plus en plus dans les plus grandes condenſations. Mais quoique l'on ne doive pas exclure abſolument cette raiſon, on peut cependant y en ajouter un autre qui n'eſt pas moins digne de conſidéra-

tion

tion c' eſt-à dire, que puiſque l'air contenu dans la poudre eſt mêlé avec des ſubſtances hétérogênes, il pourrait bien avoir une gravité ſpécifique plus grande que celles-ci, & par conſéquent que la poudre même, & dans ce cas l'excès de condenſation pourrait en quelque façon compenſer la moindre quantité qu' il y en a, en effet nous avons trouvé *a poſteriori* que l'air de la poudre eſt aumoins 2128 fois plus denſe que l'air naturel, & au contraire ſelon le calcul de Mr. Bernoulli il ne pouvait avoir tout au plus, qu' une denſité mille fois plus grande.

17. De la réfléxion propoſée il parait que l'on peut déduire la véritable raiſon de cette différence; Mr. Bernoulli a déterminé la denſité de l' air de la poudre 1000 fois plus grande que la naturelle, enſuite de ce qu'il a poſé la gravité ſpécifique de la poudre égale à celle de l' eau; nous verrons dans la ſuite que l' air de la poudre n' eſt pas contenu indiſtinctément dans chacun de ſes compoſans, mais qu' il ſe trouve dans le ſalpêtre; or la gravité ſpécifique de ce ſel eſt plus-que double de celle de l' eau, & par conſéquent la détermination de celle de la poudre aſſignée par cet Illuſtre Mathématicien eſt moindre de plus de la moitié de ce qu' elle eſt en effet; il n' eſt pas extraordinaire par conſéquent que l' air ſoit beaucoup plus condenſé qu' il ne l' a ſuppoſé: La plus grande denſité enfin de l' air dans la poudre, & la plus grande raiſon ſelon laquelle cet air ſi fort condenſé augmente ſon élaſticité, peuvent fournir une ſolution de la difficulté propoſée par ce Savant.

18. Je ne ſaurais convenir non plus avec l' Auteur Italien ſur ce qu' il avance dans ce même mémoire que dans les opérations de la poudre, on condenſe de l' air ſans s' en appercevoir, car ſelon cette opinion il s' enſuivrait que les ſubſtances étant ſeulement broyées enſemble ne devraient point produire autant de fluide que ſi on en grainait une égale

quan-

quantité, cependant soit que les matiéres ne soient que broyées, ou qu' étant grainées on les pile, & on les presse finement, la quantité du fluide ne change pas du moins assès sensiblement pour s' en apperçevoir: l' air enfin à mon avis se trouve dans les parties intimes. Quant à ce que ces deux Savans (6. 8.) nous disent par rapport à l'inflammation de la poudre dans le vuide, je ne crois pas d' être obligé d' en parler plus au long ici, après ce qu' en ont dit de grands Hommes, & ce que j' ai exposé moi même dans le mémoire précédent.

19. Il est inutile de pousser plus loin ces petites discussions, je passerai maintenant à éxaminer les proprietés, & les fonctions particulières de chacun des composans de la poudre; mais comme l' on ne saurait parvenir, le plus souvent à découvrir la raison, & le rapport des phénomênes, sans combiner les effets produits par des principes qui aient entr' eux quelque analogie, j' ai crû devoir en comparer quelques uns selon les combinaisons qui m' ont paru les plus propres à cet effet.

20. Le salpêtre est un sel moyen, qui a entr' autres propriérés celle de se décomposer par l' attouchement du phlogistique auquel l' acide qui s' en sépare, s' unit intimément, ainsi qu' il est universellement reconnu en Chimie; & je ferai voir dans la suite que c' est en conséquence de cette manoeuvre que se produisent les effets de la poudre. Mrs. Boyle, Halles, Muschembroek, & plusieurs autres Physiciens ont réconnu qu' il se développe un fluide élastique du salpêtre, lorsqu' il se décompose, ils ont même taché d' en déterminer la quantité, & presque tous le tiennent pour de l' air naturel; Mr. Halles entr' autres n' en doute pas, (*p*) Mr. Boyle pour s' assûrer si l'air était nécessaire pour la cristallisation de ce sel éssaya de combiner de l' esprit de nitre avec du sel de tartre dans une phiole vuide

(*p*) Stat. des végét.

vuide d'air (q), & n'ayant point vû ce mélange tomber en criſtaux après un certain tems, il conclut de la très-judicieuſement que l'air y était néceſſaire.

21. On obſerve à l'occaſion de l'effervefcence qui ſe fait par le mêlange de ces deux ſubſtances, en le pratiquant dans une vaſe fermé que le baromêtre deſcend après quoi il remonte, & ſe rend toujours à niveau, d'où l'on peut conclure que dans les prémiers tems il ſe développe beaucoup d'air, & qu'il ſe réabſorbe enſuite; de façon que l'on pourrait démander ſi ce n'eſt point les parties des matiéres qui étant dans un violent mouvement pour s'unir réciproquement, excitent une chaleur qui communique à l'air la vertu de ſe dégager de dedans ces mêmes matiéres, & ſi ce n'eſt point dans le tems que commence l'évaporation qu'il s'introduit de nouveau? il eſt vrai qu'on pourrait douter que la chaleur qui eſt produit par le mélange des matiéres cauſe la deſcente du mercure, par la dilatation qu'elle procure à l'air, laquelle ceſſant l'oblige de remonter.

22. Ce ſont deux points trop délicats pour chercher de les décider ſans le ſecours d'une longue ſuite d'expériences guidées par les raiſonnemens les plus éclairés, je me contenterai en attendant de ſuivre l'opinion commune des Phyſiciens, & d'en apporter quelque raiſon plauſible me réſervant de traiter ces matiéres plus amplement une autre fois, d'autant plus que je me flatte d'avoir le plaiſir de lire ce que l'Auteur dont j'ai expoſé le ſentiment (8) promet de donner, & de profiter de ſes découvertes pour mieux reüſſir dans mon entrepriſe.

23. La deſcente du mercure dans l'eau eſt très-rapide, la derniére même à cauſe de ſa moindre gravité ſpécifique en eſt chaſſé du Siphon par repriſes, après les prémiers moments il ſe fait des oſcillations, & enfin le liquide ſe

 rend

(q) Op. omn. Tom. 2.

rend à niveau dans les deux jambes, mais comme il se passe un tems considérable avant que le liquide se soit rendu à niveau, il parait que nous devons plutôt penser que c'est de l'air développé, car il n'est pas probable qu'il fallut autant de tems à l'air du récipient pour se remettre dans son prémier état, & qu'il peut se faire que l'absorbtion de l'air generé soit plus difficile, & dure plus long tems, comme nous en avons des exemples dans celle qui se fait par les vapeurs sulfureuses, & même par la poudre brulée, laquelle selon ce que nous avons vû dûre pendant plusieurs jours; (*r*) enfin dans les expériences qui j'ai fait avec les vases soigneusemeut mastiqués je n'ai jamais trouvé qu'une partie du mélange reduite en sel (*ſ*), & encore après long tems, ayant ensuite exposé à l'air le reste, qui était encore liquide il s'est aussi transformé en sel, & j'ai toujours trouvé au fond du vase dans lequel j'avais placé celui ou dévaient se méler les substances, une quantité d'humidité qui ne peut-être à mon avis que les vapeurs condensées.

24. Cet air qui sort ainsi, lorsque ces deux liquides sont mélés ensemble ne doit différer de celui de la poudre à Canon, qu'en ce qu'il ne se trouve point mélé avec de vapeurs sulfureuses, & par cette même raison si l'extinction du feu ne dépend que de la mauvaise nature de ces sortes d'exhalaisons, la flamme ne devrait rien souffrir, c'est cependant ce qui n'arrive pas, car un flambeau allumé étant introduit dans un vase, ou ces deux liquides ayent été combinés, s'éteint dans le moment, c'est un phénomene des plus singuliers, je m'en suis cependant assûré par plusieurs expériences réiterées.

25. Ce phénomène ne paroit qu'une conséquence de la Théorie que nous avons donné sur l'extinction du feu, & de la flamme dans des lieux clos (com. pag. 22.); car l'air

(*r*) Voi. la not. k.

(*ſ*) Je crois que l'on me dispensera de donner le mannuel des expériences, il sont trop aisés a être imaginés.

l' air qui eſt chaſſé des ſubſtances, & celui qui eſt dans le vaſe ſouffrent des altérations cauſées par la chaleur excitée enſuite de la mixtion de ces liquides, comme s' il paſſait autour d' un corps échauffé à un égal degré de chaleur, ou plus encore que ſi on le lui communiquait par un feu extérieur d' égale intenſité.

28. Il n' eſt par conſéquent pas extraordinaire que Mr. Muſchembroek n' aie pu entrétenir la flamme dans les airs *factices*, puiſque s' étant ſervi à peu près de la méthode de Mr. Halles pour ſe les procurer, leurs procédés dépendent tous de ce principe. Ceci eſt encore confirmé par l' expérience que j' ai fait dans cette vûe; je combinai dans un récipient fermé (de la même maniére que j' ai fait pour le nitre regéneré) du vinaigre diſtillé avec de l' eſprit de ſel ammoniac, (*t*) quelque tems après l'efferveſcence, j'introduiſis le flambeau allumé, & il ne me fut pas poſſible de connaître qu' il eut ſouffert la moindre altération.

27. Il n' eſt pas douteux que l' air dévéloppé de quelque corps que ce ſoit, par l' action du feu, ou par une chaleur inteſtine, ne ſert aucunement à la conſervation de la flamme, & du feu, & que les moiens dont on ſe ſert per rendre ces fluides propres à la reſpiration des animaux, & à conſerver leur élaſticité, ne ſont d' aucune utilité pour entretenir le feu (*u*) cependant en conſéquence de la Théorie établie, que la chaleur endommage tellement l' air qu' il ne peut acquerir ſes proprietés ſans ſe rénouveller, à moins qu' on ne lui faſſe ſubir par le moyen de la glace un froid violent, & même pendant pluſieurs heures, j' ai tenté cet expédient ſur les fluides, & m' étant procuré une quantité de fluide élaſtique de la poudre dans un vaſe con-



(*t*) Le mélange de l' eſprit de nitre avec celui d' Ammoniac fait un efferveſcence que l' on dit froide, en effet elle ne manifeſte aucune chaleur ſenſible.

(*u*) Comme on peut le voir au long dans les *comm. pag.* 22.

venable pour l'éprouver, je començai par introduire un flambeau allumé dans ce fluide non purgé, mais à peine en eut-il aproché qu'il fût éteint, je fermai auffitôt le trou par le moyen d'une platine bien aiuftée, & j' entourai le vafe de glace fur laquelle je mis du fel ammoniac, j'eus foin enfuite de faire ajouter à propos de la glace, & du fel, & après environ 12 heures, j'ouvris la platine fans exciter le moindre mouvement, & j' introduifis enfuite le flambeau allumé qui fe conferva auffi bien que s' il eut été dans l'air commun. Des pareilles expériences faites fur l'air corrompu par l' effervefcence du fel de tartre avec l' efprit de nitre donnérent les mêmes réfultats (*v*).

28. De tout ce que je viens de dire, il eft clair que les moyens propres pour rendre à l'air la propriété d' être conftamment élaftique, & de fervir à la refpiration des animaux, ne peuvent pas réuffir à lui rendre auffi celle d'entrétenir le feu, parceque les fumées, les exhalaifons, & les vapeurs endommagent les deux prémieres, & la chaleur détruit celle-ci; mais comme ces caufes font réunies dans l'inflammation de la poudre, ainfi tout ces caractéres de l'air doivent néceffairement fouffrir (*x*) toutes ces altérations.

29. Après avoir établi ce principe univerfel dans le plein j'ai voulu éxaminer les effets, qui furviendraient en tirant une

(*v*) Dans le mémoire précédent j'ai mis fous un point de vuë le plus clair qu'il m'a été poffible les raifons pourquoi le fluide élaftique de la poudre, quoiqu'il foit de l'air pur, ne peut cependant pas être propre à entretenir le feu; elles fuffifaient toutes feules à détruire la feconde objection du Célébre Mr. Muffchembroek, & à donner plus de poids à mon fentiment que j'avais appuyé d'un nombre de faits, mais comme il nous eft réuffi de jetter les fondemens d'une Théorie fur cet importante partie de la Phyfique, & que ne nous étant pas contenté d'avoir démélé la véritable caufe de la dépravation de l'air par rapport à la nourriture de la flamme dans des lieux clos, nous avons trouvés des moyens propres à lui rendre cette vertu, j'ai crû néceffaire de tenter des expériences, par lefquelles je puffe confirmer de plus en plus ce que j'avais dit, d'autant plus que le mobile de nos recherches fur ce point intéreffant, avait été celui de décider la difficulté de l'Auteur mentioné.

(*x*) Cet article a été traité plus au long dans le *comm. pag.* 33.

une partie de l'air du récipient, à cet effet je disposai selon la méthode dont se servent les Physiciens une pétite phiole qui contenait de l'esprit de nitre, ensorte qu'on pouvait par le moyen d'une verge, qui passait à travers le sommet du récipient, faire verser le liquide dans un vase où j'avais mis de l'huile de tartre, sans introduire de l'air: je pompai à peu près la moitié de l'air, & après cela je procurai de saturer le mélange; la mixtion se fit avec une effervescence extraordinaire, de sorte qu'une partie du mélange se répandit sur la platine avec un grand bouillonement, les oscillations suivirent à l'ordinaire, & après que le mouvement eut cessé, le mercure qui était resté suspendu dans la jambe exposée à l'air commença à remonter dans l'opposée, & s'arrèta ensuite à peu près à la même hauteur qu'il était avant la mixtion, je laissai l'appareil pendant long tems, & n'étant survenu aucun changement au mercure, j'observai que le sel n'était formé que çà & là en très petite quantitè, j'exposai à l'air cette mixtion, & le sel se forma.

30. Je répétai deux fois cette expérience pour y introduire le flambeau qui s'y conserva allumé, mais on en voit assés la raison; c'est qu'en ouvrant le trou de la platine il s'introduisit beaucoup d'air commun & frais, qui servit à remplacer celui qui manquait.

31. L'on voit par tout ce que je viens de rapporter qu'il est très naturel qu'il se dévèloppe de l'air en mêlant les deux liquides, & qu'il soit ensuite entiérement réabsorbé; que le salpêtre, qui ne différe du nitre régéneré que parcequ'il est naturel, contient une grande quantité d'air; en conséquence de ces notions d'ailleurs confirmées par un infinité d'autres expériences, que les Physiciens ont fait, je cherchai de m'assurer si le salpêtre a par lui même la proprieté expansive, & je fis l'expérience, de la maniére, que je vais décrire.

Je

Je ſcellai hermétiquement dans une phiole de verre, du ſalpêtre, la quantité du ſel occupait environ $\frac{1}{3}$ de la capacité: je la mis enſuite ſur le feu que j'augmentai graduellement, enſorte que l'air ſe développait peu à peu ſans ſouffrir une grande raréfaction au commencement de l'opération, & ſe trouvait enſuite très raréfié, lorſque ce qui reſtait était contraint de ſe déployer; aprés cinq à ſix minutes la phiole ſe briſa avec quelque détonnement; m'étant déterminé à la répéter, je jugeai à propos de ſceller en même tems un autre phiole avec un bouchon de liége pouſsé à force, & bien battu, & après l'avoir miſe ſur les charbons en même tems qu'un autre fermée à la lampe, elle força le bouchon à un hauteur aſsès conſidérable, & il tomba à trois pieds loin du rechaud quelque tems avant que l'autre éclata.

33. Il eſt bon de remarquer que lorſque le bouchon fut loin, il ne ſortit rien du ſalpêtre qui était reſté liquide au bas de la phiole ſans un grand bouillonement d'où il s'enſuit que le ſalpêtre a la propriété de forcer les obſtacles qui le retiennent, lorſque par le moyen du feu il peut dégager l'air qu'il contient, quoiqu'il ne s'enflamme pas pour autant.

34. Le ſucre a auſſi cette vertu, mais elle eſt moins ſenſible; je l'aſſujettis aux mêmes expériences, & quoique il ne la manifeſte pas dans un tems auſſi court, ni avec autant de violence il ne laiſſe pas de briſer la phiole, & de chaſſer le bouchon. Il ne ſerait peut-être pas hors de propos d'examiner tous les ſels eſſentiels; mais je réſerve cet examen à un autre tems.

35. Le ſouffre contient un acide vitriolique, & une matiére phlogiſtique, il a un nombre de propriétés qui nous ſont connues. Le Célébre Mr. Stahl s'eſt diſtingué dans l'analiſe qu'il en a fait, Mrs. Halles, Muſchembroek, &

après

après eux bien d'autres Physiciens sont d'avis que les vapeurs du souffre brûlé absorbent l'air.

36. Ces deux grands Hommes on décidé ce fait d'après les expériences dont ils se sont servis, mais comme elles ne sont pas tout à fait décisives, parceque le souffre étant allumé hors du récipient donne lieu à la raréfaction de l'air qui l'environne, & que lorsqu'il se refroidit, l'eau doit nécessairement monter considérablement (*y*), j'ai jugé a propos de lui mettre le feu avec un miroir ardent, & dés qu'il eut discontinué de brûler, je le laissai durant deux jours entiers, & j'ai observé que le mercure monta sensiblement au dessus du niveau environ $\frac{2}{7^e}$ de ligne: cette ascension cependant se fit dans moins de quatre heures de tems; j'ai remarqué aussi que durant l'inflammation du souffre le mercure baissait dans le siphon, ce qui m'avait fait croire qu'il se développait de l'air, mais ayant eu soin de mettre le flacon à l'abris des rayons du soleil, ne laissant à découvert que ce qui était dardé par le foyer du miroir, j'ai vû une grande différence dans l'abbaissement, que je crois d'autant plus causé par la raréfaction, qu'en le plongeant dans de l'eau qui avait aquis la température de l'air ambient, le liquide rémonta assés visiblement jusqu'au niveau sans discontinuer.

37. Le charbon est la troisiéme substance qui entre dans la composition ordinaire de la poudre à Canon; il est très-porreux, & on prétend que c'est ce qui lui donne la couleur brune que l'on lui voit, & un Célébre Physicien (*a*) a observé que c'est en conséquence de cela qu'il prend feu aisément: il est composé de parties terrestres, & de parties crasses, ou phlogistiques. Cette matiére ne nous fournit pas

(*y*) Stat. des végét.
(*z*) Boher. chaem.

pas des réflexions plus particuliéres. Je m'en vais donner maintenant comme je l'avais promis un détail des résultats que j'ai eu de plusieurs mélanges que j'ai jugé à propos d'essayer.

38. On obtient une espéce de fusée en mettant deux parties égales de souffre, & de salpêtre dans un creuset qu'on expose ensuite au feu, ou dans un creuset enflammé.

39. En substituant du charbon au souffre il se fait une explosion, & une déflagration subite, si l'on jette les deux matières dans un creuset enflammé, ou que l'on fait dévenir rouge; cette déflagration est plus forte que la précédente.

40. Le souffre intimément broyé avec le charbon se consume plutôt que lorsqu'il est seul, si le charbon n'est pas réduit en poudre il s'envéloppe de la flamme du souffre sans pourtant s'embraser, & si ce charbon est en feu il s'éteint à mésure que le souffre se fond, & s'enflamme: si enfin on jette un charbon dans le souffre fondu la flamme de toute la surface l'entoure aussitôt presque en forme conique.

41. On parvient à un mélange des plus conditionnés pour la poudre en mettant 7 parties de Salpêtre, une de souffre, & une de charbon, cette combinaison nous ébauche tous les phénomènes de la poudre quoiqu'elle ne soit pas encore manufacturée.

42. Je crois ne devoir pas non plus passer sous silence, que la poudre s'enflamme dans quelqu'air infecté que ce soit, c'est ce que j'ai tâché de bien assûrer, & il m'est réussi d'enflammer de la poudre dans un endroit rempli de la fumée d'une chandéle, une autre fois dans un flacon rempli de vapeurs de poudre, & enfin dans un autre plein de vapeurs sulfureuses, il est vrai que dans les deux derniéres elle tarda plus long tems à s'enflammer apparemment parceque ces vapeurs avaient fixé une partie de l'air.

43. Un mélange de souffre & de salpêtre étant moins facile à s'enflammer qu'un mélange de charbon, & de salpêtre; il me parait qu'on doit conclure de là que le phlogistique du charbon quitte plus facilement, & plus promptement les parties terrestres auxquelles il est uni pour s'attâcher à l'acide nitreux & le faire détonner, que celui du souffre; parceque celui-ci se trouve déja rétenu par l'acide vitriolique avec lequel il a une grande affinité.

44. En considérant donc la plus grande facilité que le dernièr mélange en question a de se décomposer plus simultanéement, ce qui ne peut de moins de lui procurer plus de force; & faisant ensuite attention aux désavantages que le souffre apporte aux armes à feu, je suis porté à croire que la poudre que l'on férait sans souffre, ne pourrait être que d'un très grand usage dans plusieurs occasions (*a*).

45. Les effets de la poudre se manifestent donc en conséquence de l'inflammation du souffre qui met ensuite en feu le charbon pilé lequel donnant de l'effort au feu, communique un plus grand dégré de chaleur au Salpêtre qui est décomposé par l'action du phlogistique auquel son acide s'unissant se dissipe avec bruit, & ainsi en vertu de l'action, & de la réaction de l'air généré, & de l'ambient, le feu se communique aux grains, ce qui sert à prouver aussi, comme le démontre Mr. le Chev. D'Arci, (*b*) que l'inflammation de la poudre est successive (*c*) ainsi que j'ai déja fait



(*a*) Cette conjecture que je n'ai deduit, que des faits, se trouve confirmée par des expériences faites dans cette vue par un habile homme; il en donne un long détail dans l'Encyclopédie à l'article *feu artificiel*. Les essais qu'il a fait pour décider ce point paraissent assés décisifs, de sorte que je me dispense volontiers de mettre au long ici les autres réflexions qui m'ont porté à jetter cette proposition, on sera satisfait de celles que l'on trouve à l'endroit cité.

(*b*) Mém. de l'Accad. des Scienc. de Paris ann. 1750.

(*c*) Presque dans tous les calculs qu'on a établi pour déterminer la vitesse d'un boulet chassé par la poudre hors du Canon, ou pour déterminer la force absolue de la poudre, on a posé que l'inflammation fut instantanée, parceque l'on n'avait pas tenté bien soigneusement de s'en assûrer par l'expérience: d'où l'on peut inférer que ces calculs ne sont pas irrépréhensibles.

obſerver (*d*) : il eſt bon de rémarquer ici en paſſant que cette union ne peut ſe faire que par la force ou vertu d'affinité, or il eſt probable que l' air ſe dégage auſſi vite que l' acide ſe diſſipe, & que c' eſt cette même force qui contraint les deux ſubſtances à s' unir réciproquement, qui en détermine le dégré.

46. Quoique le ſucre ait la propriété de ſe dilater comme nous avons vû (34), & de forcer en conſéquence les obſtacles qui s' oppoſent à ſon expanſion, il ne m' a cependant jamais donné aucune marque aſſûrée qu' il pû faire quelque exploſion, quoique je l' euſſe melé avec du ſouffre, & du charbon ſelon pluſieurs proportions : il ne faiſait que fuſer très-lentement, lorſqu' il prenait feu.

47. Les matiéres graſſes, & huileuſes, comme le ſuif, la cire, les réſines combinées avec le ſalpêtre produiſent le même effet que ſi l' on avait melé du charbon avec du ſalpêtre, & elles n' agiſſent que lorſque le feu les a réduites en une eſpéce de charbon : le camphre quoiqu' il ſoit auſſi de la nature des matiéres précédentes, cependant comme il eſt ſi facile à s' enflammer, & qu' il ne peut pas changer comme les autres, il ne procure pas une déflagration auſſi violente au ſalpêtre, car le mélange s' enflamme à une chaleur très-modique.

48. On voit clairement par ce que je viens de rapporter qu' il faut que les matiéres ſoient propres à être réduites en charbon pour déflagrer avec le ſalpêtre, c' eſt à dire qu' elles puiſſent ſe dépouiller de l' eau, & des autres élémens par l' action du feu, & que le phlogiſtique ne ſe trouve plus uni qu' à des parties terreſtres; d' où il parait que les autres élémens ont la propriété de retenir le phlogiſtique, ou celle d' empêcher qu'il agiſſe, en effet nous avons vû que le ſouffre dont le phlogiſtique eſt fortement retenu par l' acide vitriolique (43) fait une déflagration

(*d*) Voi. le mém. pag. 9. (14).

gration plus lente avec le salpêtre, que ne fait le charbon (39).

49. Le sucre qui quoique mêle avec des matiéres grasses, ne fait aucune explosion non plus que plusieurs autres substances qui contiennent d'ailleurs une grande quantité d'air, ne serait-il peut-être pas, comme elles, incapable de déflagration, parcequ' il ne se trouve pas dans le melange une action d'affinité suffisante à les décomposer subitement, & par conséquent à donner un effort libre, & prompt à l'air qui est engagé, malgré l'action de la chaleur, & du feu? & quelques unes comme le camphre ne serait ce point, parcequ' étant trop faciles à s'enflammer, elles ne laissent pas le tems aux autres matiéres d'acquerir un dégrè de chaleur suffisant pour se décomposer? car si l'on substitue le camphre au souffre dans la composition de la poudre, ce mélange a beaucoup moins de force que celui du souffre, & du salpêtre.

50. La poudre fulminante ayant beaucoup de rapport à la matiére que j'ai traité jusqu'à présent: je crois en devoir maintenant faire l'objet de mes recherches.

51. L'explosion de la poudre fulminante comme l'on sait, est accompagnée d'un détonnement très violent, & infiniment supérieur à celui de la poudre à Canon; on à de plus remarqué qu'à l'occasion de sa décomposition elle percé la cuillére de mètal dans laquelle on l'expose au feu, de sorte que plusieurs Physiciens ont pensé que cette poudre avait une particuliére direction vers le bas: des autres, pour donner une explication du bruit horrible dont son explosion est suivie, ont crû que cet'étrange phénomène dépendait d'un plus grand développement de fluide: Mr. Halles cependant remarque très sensément que cet accraissement n'est pas causé par une plus grande quantité d'air qui se déploye, & il l'attribue à la fixitè du sel de tartre, dont l'air ne peut se développer que par un très grand dégré de chaleur.

52. Sans m' arrêter à donner la description de toutes les expériences que j' ai fait, je rapporterai seulement ce qui m' en est constamment résulté.

I.

En mettant le feu à la poudre fulminante de la maniére que l' on le met à la poudre à Canon, elle ne fait que décrépiter saus aucun détonnement, & ce n' est qu' avec peine qu' elle s' enflamme.

I I.

Pour pouvoir se décomposer, elle doit prémiérement entrer en fusion, soit qu' elle soit en plein air, ou dans le vuide.

I I I.

Le fluide élastique qui en est produit a à peu prés les mémes caractéres que celui de la poudre à canon, il est pernicieux à la respiration, il ne conserve pas toute son élasticité, & n' entretient pas le feu; on ne doit pas s'en étonner, car j' ai fait voir ci-devant, & dans le mem: pag: 11. & suiv: que les exhalaisons sulfureuses en sont la cause.

I V.

Ce mélange enfin qui détonne avec tant de violence dans l' air; qui se fait jour à travers une cuillére, ne fait aucun bruit dans le vuide, & ne brise pas seulement un flacon de verre le plus mince. J' ai fait cette expérience d'autant plus soigneusement qu' elle devait me fournir des grandes lumiéres; l' appareil fut des plus simple, un flacon ou j' avais mis de cette poudre était mastiqué à un long tuyau de verre, qui entrait dans un petit récipient muni d' une tube de baromêtre; aprés le vuide fait, indiqué par la hauteur de 27 pouces environ du mercure dans le tube, on plaça un rechaud plein de charbons en feu, aprés quelque tems la poudre se décomposa, & j' en fus avverti par la lumiére qui en émana; je ne quittai point le baromêtre de vuë, & la dépression du mercure fut très grande

au

au prémier inſtant, & diminua enſuite conſidérablement. Enfin au tems qu'il devait avoir aquis la température de l'air ambient, je trouvai le volume du fluide moindre, que ſi ç'avait été de poudre à Canon, d'ou l'on peut conclure avec aſſûrance que ces grands effets ne dépendent pas d'un plus grand dévéloppement d'air.

53. Le phénomène dont j'ai fait mention ci devant de percer une cuillére, eſt donc celui ſur le quel on s'eſt fondé pour attribuer à cette poudre la proprieté d'éxercer ſa vertu élaſtique vers le bas: elle eſt cependant ſi ſurprénante qu'on ne ſaurait jamais imaginer en vertu de quoi les loix ordinaires de la nature ſeraient ici violées; c'eſt précisément ce qui m'a determiné à conſtater ce fait par les expériences avant que de m'y repoſer.

54. J'ai commencé par dire (52. IV.) que dans l'expérience que je fis dans un flacon vuide d'air, il n'y eut aucun détonnement, & que le verre n'en a rien ſouffert: j'ai mis une autre fois de cette poudre entre deux lames minces, & concaves enſorte qu'elles en étaient remplies, je les liai enſemble, & les mis au milieu des charbons ardents, aprés quelque tems il ſe fit une détonnement horrible, & je ne trouvai plus que quelque petit reſte des lames: mais pour m'aſſûrer encore d'avantage de ce fait je fis menager deux petites cuilleres, enſorte qu'en rempliſſant l'eſpace concave de poudre fulminante l'air extérieur ne pouvait s'y introduire, je les mis enſuite dans le feu ayant pris mes précautions pour obſerver ſans riſque; dans quelque tems de là, la cuillére ſupériere fut chaſſée en haut avec une impétuoſité étonnante, & celle d'en bas ne ſouffrit rien.

55. L'on voit évidemment par ces expériences prémiérement que la force élaſtique de cette poudre eſt uniforme en tout ſens, & on peut déduire en raprochant ce que

j'ai

52. Sans m' arrêter à donner la description de toutes les expériences que j' ai fait, je rapporterai seulement ce qui m' en est constamment résulté.

I.

En mettant le feu à la poudre fulminante de la maniére que l' on le met à la poudre à Canon, elle ne fait que décrépiter saus aucun détonnement, & ce n' est qu' avec peine qu' elle s' enflamme.

I I.

Pour pouvoir se décompofer, elle doit prémiérement entrer en fusion, soit qu' elle soit en plein air, ou dans le vuide.

I I I.

Le fluide élastique qui en est produit a à peu prés les mémes caractéres que celui de la poudre à canon, il est pernicieux à la respiration, il ne conserve pas toute son élasticité, & n' entretient pas le feu; on ne doit pas s'en étonner, car j' ai fait voir ci-devant, & dans le mem: pag: 11. & suiv: que les exhalaisons sulfureuses en sont la cause.

I V.

Ce mélange enfin qui détonne avec tant de violence dans l' air; qui se fait jour à travers une cuillére, ne fait aucun bruit dans le vuide, & ne brise pas seulement un flacon de verre le plus mince. J' ai fait cette expérience d'autant plus soigneusement qu' elle devait me fournir des grandes lumiéres; l' appareil fut des plus simple, un flacon ou j' avais mis de cette poudre érait mastiqué à un long tuyau de verre, qui entrait dans un petit récipient muni d' une tube de baromêtre; aprés le vuide fait, indiqué par la hauteur de 27 pouces environ du mercure dans le tube, on plaça un rechaud plein de charbons en feu, aprés quelque tems la poudre se décomposa, & j' en fus avverti par la lumiére qui en émana; je ne quittai point le baromêtre de vuë, & la dépression du mercure fut très grande

au

au prémier instant, & diminua ensuite considérablement. Enfin au tems qu'il devait avoir aquis la température de l'air ambient, je trouvai le volume du fluide moindre, que si ç'avait été de poudre à Canon, d'ou l'on peut conclure avec assûrance que ces grands effets ne dépendent pas d'un plus grand dévéloppement d'air.

53. Le phénomène dont j'ai fait mention ci devant de percer une cuillére, est donc celui sur le quel on s'est fondé pour attribuer à cette poudre la proprieté d'éxercer sa vertu élastique vers le bas: elle est cependant si surprénante qu'on ne saurait jamais imaginer en vertu de quoi les loix ordinaires de la nature seraient ici violées; c'est précisement ce qui m'a determiné à constater ce fait par les expériences avant que de m'y reposer.

54. J'ai commencé par dire (52. IV.) que dans l'expérience que je fis dans un flacon vuide d'air, il n'y eut aucun détonnement, & que le verre n'en a rien souffert: j'ai mis une autre fois de cette poudre entre deux lames minces, & concaves ensorte qu'elles en étaient remplies, je les liai ensemble, & les mis au milieu des charbons ardents, aprés quelque tems il se fit une détonnement horrible, & je ne trouvai plus que quelque petit reste des lames: mais pour m'assûrer encore d'avantage de ce fait je fis menager deux petites cuilleres, ensorte qu'en remplissant l'espace concave de poudre fulminante l'air extérieur ne pouvait s'y introduire, je les mis ensuite dans le feu ayant pris mes précautions pour observer sans risque; dans quelque tems de là, la cuillére supériere fut chassée en haut avec une impétuosité étonnante, & celle d'en bas ne souffrit rien.

55. L'on voit évidemment par ces expériences prémiérement que la force élastique de cette poudre est uniforme en tout sens, & on peut déduire en raprochant ce que

j' ai dit au commencement de ce paragraphe, que puisque les phénomènes qui se manifestent dans l' air n' ont plus lieu dans le vuide, il faut que la vitesse avec laquelle l'air se développe soit si subite, & si grande que l' air extérieur ne puisse avoir le tems de céder, & que par consequent le fluide rencontre de la part de l' air une résistence supérieure à celle de la cuillére, qui a déja souffert par l' action du feu, & par celle du foye de souffre qui se forme dans ce tems. L' on remarque même que si la cuillére est de fer, elle n' est point aussi aisément percée.

56. Si l' on considére que la résistence d' un milieu est en raison composée de la densité du même milieu, & de la vitesse du fluide qui heurte, & que la poudre à Canon ne rencontre pas assés de résistence de la part de l' air pour pouvoir réagir avec autant de force que la poudre fulminante sur les corps ou' il est placé, il faudra accorder à la vitesse immense du dévéloppement du fluide, l' action étonnante de cette poudre, qui par conséquent doit être infiniment supérieure à celle de l' autre.

Si donc la vitesse seule avec laquelle un fluide se développe, contribue si fort à son action, de maniére que les effets de la poudre fulminante ne soient pas comparables pour l' intensité avec ceux de la poudre à Canon, il sera moins extraordinaire que par la lenteur du développement, ces matiéres dont nous avons parlé (46. 47.) qui contiennent une égale, & peut-être une plus grande quantité d' air que la poudre à Canon, ne puissent pas produire des effets aprochans des siens.

57. L' inflammation d' un mélange de charbon, & de salpêtre déflagre plus promptement comme nous avons vu (33. 24.) que celui du souffre, & du salpêtre, donc cette poudre aura beaucoup plus de force que celle ou il entre du souffre, & par conséquent outre l' épargne que l' on fera

l'on

l'on obviera encore aux endomagemens causés par le souffre, sur tout à l'évasement des lumiéres (*e*).

58. Il est connu que la poudre à Canon s'enflamme beaucoup plus vite, dans des espaces renfermés comme dans les piéces d'Artillerie, (*) & dans les mines, qu'en plein air: Outre cela les obstacles qu'elle rencontre ne la laissent éclater que lorsque la plus grande partie de son fluide est développé; c'est ce qui fait que son action est presque instantanée & ce qui rend ses effets semblables à ceux de la poudre fulminante.

59. Si nous faisons attention à présent aux substances qui entrent dans la composition de la poudre fulminante nous pourrons peut être découvrir d'ou dépendent ses effets étonnans. Le souffre avec le salpétre fait une poudre qui mise dans le creuset fuse lentement, & donne une explosion très faible, qu'on ajoute ensuite à ce mélange du sel de tartre, ce sera à la décomposition qui s'en fera que l'on aura tous ces phénomènes surprenans; donc la violence de l'explosion, & du détonnement seront un effet du sel, causé ou par l'humidité ou par l'alkalinité; ce n'est pas par l'humidité, & cela par plusieurs raisons la premiere se tire de la maniére avec laquelle elle s'enflamme, on observe en effet à cette occasion qu'elle est non seulement toute déssechée mais qu'elle doit être en fusion (51. II.): la qualité de l'Alkali pour que cette poudre soit parfaite nous fournit une seconde raison, il doit être parfaitement calciné, car s'il est humide il ne fait plus autant d'effet; une poudre de cette espéce que j'ai fait me fournit la confirmation de ceci, elle etait faite de deux parties de salpétre, une de souffre, & deux de tartre reduit en charbon

(*e*) Je me crois dispensé de faire ici des applications de cette Théorie à l'usage de l'artillerie, ces recherches demanderaient un tems plus long, & un examen plus réflechi, d'ailleurs Mr. le Chev. D'Antonj, Directeur des écoles Théoriques de l'Artillerie prépare sur cette matiére un ouvrage qui sera une nouvelle preuve de l'étendue de ses lumiéres dans toutes les sciences qui peuvent servir à la perfection de celle ci. (*) Mém. de l'Acad. de Scienc. an. 1750.

bon cette poudre contenait assurément beaucoup plus d' eau que la fulminante ordinaire, & cependant ne détonnait pas avec autant de violence quoique elle surpassa de beaucoup l'explosion de la poudre à Canon.

61. Une autre espéce de poudre fulminante que j' ai fait qui n' attire pas l' humidité, & qui n' a encore été indiquée par personne que je sache, me présente un troisiéme argument contre l' action de l' humidité, & concourt à faire voir que ces effets dépendent de l' alkalinité. J'employai du sel de soude qui ne contient point d' eau, & dont les cristaux n' attirent non seulement pas l' humidité de l' air, mais se réduisent encore comme en farine, les doses étaient les mêmes, parceque je ne cherchais pas de déterminer celles qui me donneraient la meilleure poudre, je l' exposai à l'accoutumé sur le feu, & elle ne détonna pas avec moins de force que l' ordinaire, j' oserais même avancer qu' elle était plus forte.

62. Ensuite donc des réflexions que nous avons fait sur ce sel, & rémarquant ici que c' est l' alkali le plus puissant qu' il y ait, après celui qu' on retire des cendres des plantes terrestres, il me parait que l' on doit conclure que la différence des effets qu' on voit arriver en faisant décomposer un mélange de souffre & de salpêtre, & un mélange de souffre, de salpêtre, & de sel de tartre, ne dépend aucunement de l' humidité, & que l' alkalinité est celle qui les produit.

63. J' ai cependant encore voulu m' assûrer s' il ne se trouve point d' autres causes qui agissent aussi; il me paraissait que le dègré de chaleur dévait y contribuer. J' ai à cet effet tenté de faire du foye de souffre avec un alkali volatil, & m' étant reussi, je le mélai avec du salpêtre, mais le mélange ne fit aucune explosion, probablement parcequ'-il s' est dissipé avant que le salpêtre ait pû se décomposer; de façon qu' il parait clair qu' il est nécessaire

que

que les matiéres du mélange puissent acquérir un certain dégré de chaleur.

64. Je pense que l'action de l'alkali sur les autres matiéres vient de ce que, dans le tems que les substances se fondent, il se forme un foye de souffre dans lequel le phlogistique étant uni à un sel neutre, il s'en sépare moins difficilement que lorsqu'il ne se trouve qu'avec l'acide vitriolique, dans le souffre même, & qu'il peut par conséquent se dévèlopper avec plus de vitesse pour détonner avec l'acide nitreux; tout ceci semble encore être confirmé par les expériences que j'ai fait.

65. En prémier lieu ayant substitué du charbon au souffre il ne s'ensuivit plus aucune fulmination, mais comme dans ce cas le phlogistique a pour base des parties terrestres, & l'alkali n'ayant aucune action particulière sur cette terre, le dévèloppement du phlogistique ne peut pas être favorisé.

66. Je fis ensuite une poudre composée successivement de plusieurs doses de tartre vitriolé, de charbon, & de salpêtre, croyant qu'il se serait peut-être fait un foye de souffre, lequel en se décomposant avec le salpêtre aurait pû faire le mêmes effets que la poudre fulminante, mais il ne me reussit pas, & ce mélange au contraire fit un explosion plus lente que si je n'y avais point mis du tartre vitriolé, ce qui me fait croire que le dégré de chaleur nécessaire au salpêtre pour se décomposer avec le charbon, est moindre, que celui qui est nécessaire pour faire ce foye de souffre (*f*) & que par conséquent le charbon détonne avec le salpêtre avant que le phlogistique puisse s'unir au tartre vitriolé, & faire le foye de souffre.

t 67. Je

(*f*) On voit aisément que le foye de souffre dont je parle ne peut pas se faire à une chaleur aussi modique que celui qu'on fait communement.

67. Je fis enfin divers mélanges de charbon, & de salpêtre, auxquels j'ajoutai l'acide vitriolique uni à différentes bases, affin d'avoir une espéce de poudre fulminante, dont les combinaisons des composans fussent variées, mais je n'ai pas réussi non plus que dans celle du tartre vitriolé, je crois que ce que j'ai dit par rapport à celle-là sert aussi pour donner la raison de ce que je viens d'exposer. Il me reste encore bien des recherches, que je me suis proposé sur la poudre à canon, sur celleci, & sur le rapport, que peuvent avoir avec elles les métaux fulminans, mais je me réserve de traiter plus amplement de la prémiére dans la traduction que je donnerai de l'ouvrage de Mr. Benjamin Robins, qui à déja été enrichi par les notes que le grand Géomètre Mr. Euler y a fait, & j'aurai occasion une autre fois de parler des deux derniéres.

# RECHERCHES

## SUR LA NATURE, ET LA PROPAGATION DU SON.

PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

## INTRODUCTION.

QUOIQUE la Science du Calcul ait été portée dans ces derniers tems au plus haut dégré de perfection, il ne paroit cependant pas qu'on se soit beaucoup avancé dans l'application de cette Science aux phénomènes de la Nature. La Thèorie des fluides qui est assurément une des plus importantes pour la Physique, est encore très imparfaite dans ses élémens, malgré les efforts de plusieurs grands Hommes qui ont tenté de l'approfondir. Il en est de même de la matière que j'entreprens d'examiner ici, & qu'on peut avec raison regarder comme un des principaux points de cette Théorie. Car le Son ne consistant que dans de certains ébranlemens imprimés aux corps sonores, & communiqués au milieu élastique qui les environne, ce n'est que par la connoissance des mouvemens de ce fluide, qu'on peut espérer de découvrir sa véritable nature, & de déterminer les lois qu'il doit suivre dans sa propagation.

Newton, qui a entrepris le premier de soummetre les fluides au calcul, a aussi fait sur le Son les premiéres recherches; & il est parvenu à en déterminer la vitesse par une formule, qui ne s'éloigne pas beaucoup de l'expérience. Mais si cette théorie a pû contenter les Physiciens dont la plûpart l'ont adopté, il n'en est pas de même des Géomètres qui en étudiant les démonstrations sur lesquelles elle est appujée, n'y ont pas trouvé ce degré de solidité, & d'évidence qui caractérise d'ailleurs le reste de ses Ouvrages. Cependant aucun que je sache, ne s'est jamais attaché à découvrir, & à faire connoitre les principes qui peuvent les rendre insuffisantes; encore moins a-t-on entrepris de leur en substituer de plus surs, & de plus rigoureux (*).

Les

(*) Voici comment parle un des plus Célebres Géomètres de nôtre tems dans son excellent traité des fluides art. 219. *Ce séroit ici le lieu de donner des Méthodes pour déterminer la vitesse du son, mais j'avoue que je ne suis point encore parvenu à trouver sur ce sujet rien qui pût me satisfaire. Je ne connois jusqu'à présent que deux Auteurs qui ayent donné des formules pour la vitesse du son, savoir M Nevvton dans ses Principes, & M. Euler dans sa dissertation sur le feu qui a partagé le prix de l'Académie en* 1738. *La formule donnée par M. Euler sans démonstration est fort différente de celle de M. Nevvton, & j'ignore quel chemin l'y a conduit; à l'égard de la formule de M. Nevvton elle est démontrée dans ses Principes, mais c'est peut être l'endroit le plus obscur, & le plus difficile de cet Ouvrage. M. Jean Bernoulli le fils dans la Piece sur la Lumière, qui a remporté le prix de l'Académie en* 1736., *dit qu'il n'oseroit pas se flatter d'entendre cet endroit des Principes &c.*

Les Commentateurs des *Principes* ont à la verité tâché de rétablir cet endroit par une Méthode purement analitique, mais outre qu' ils n' ont envisagé la question que sous un point de vüe tout-a-fait particulier, leurs calculs sont d' ailleurs si compliqués, & embarassés dans des suites infinies, qu'il ne paroit pas, qu' on puisse en aucune façon acquiescer aux conclusions qu' ils se sont efforcés d' en déduire.

J'ai donc cru qu' il étoit nécessaire de reprendre toute la question dans ses fondemens, & de la traiter comme un sujet entiérement nouveau, sans rien emprunter de ceux qui peuvent y avoir travaillé jusqu' à présent.

Tel est l'objet que je me suis proposé dans les Recherches suivantes. Pour le faire mieux connoitre je commence par donner une idée de la théorie de M. Newton, & des difficultés aux quelles elles est sujette.

C'est dans la section VIII. du II. Livre des *Principes* que se trouve renfermée toute cette théorie. L' Auteur considére d'abord la propagation du mouvement dans les fluides élastiques, & la fait consister dans des dilatations, & des compressions successives, qui forment comme autant de pulsations, & qui se répandent à la ronde par tout le fluide. Il passe ensuite à examiner comment ces pulsations peuvent être produites par le frémissement des parties d' un corps sonore quelconque. Il imagine pour cela qu' une particule du fluide poussée par les vibrations du corps contigu condense par une certaine distance les particules suivantes, jusqu' à ce que la condensation étant devenue la plus grande, les mêmes particules comencent à se dilater de part, & d' autre ; ce qui forme selon lui une infinité de fibres sonores qui partent toutes du même point, comme d' un centre commun. Il veut de plus que chacune de ces premiéres fibres en engendre une autre égale à son extremité,

* lorsqu'

lorſqu'elle a achevé une oſcillation entière, & celle-ci une troiſiéme, & ainſi ſucceſſivement, de ſorte qu'il ſe forme, pour ainſi dire, autour du corps ſonore pluſieurs voutes ſphériques, qui aillent toujours en s'élargiſſant, tout de même, comme l'on obſerve dans les ondes, qui s'excitent ſur la ſurface d'une eau tranquille, par l'agitation de quelque corps étranger que ce ſoit.

Voila quels doivent être ſelon cet Illuſtre Auteur les mouvemens des particules de l'air qui produiſent, & propagent le ſon. Mais M. Newton eſt encore allé plus loin; il a calculé tous les mouvemens particuliers, qui compoſent chacune des pulſations. Pour y parvenir il regarde les fibres élaſtiques de l'air comme compoſées d'une infinité de points phyſiques diſpoſés en ligne droite, & à égale diſtance les uns des autres. La méthode qu'il emploie pour déterminer les oſcillations de ces points conſiſte à les ſuppoſer d'abord iſochrones, & toujours les mêmes dans chacun d'eux. M. Newton prouve enſuite que cette hypothéſe s'accorde entierement avec les Loix méchaniques qui dépendent de l'action mutuelle, que les points exercent en vertu de leur reſſort; d'ou il conclut, qu'en effet ces mouvemens ſont tels qu'il les a ſuppoſé; & comme à chaque oſcillation il doit s'engendrer ſelon lui une nouvelle fibre égale, & ſemblable à la premiére, il trouve l'eſpace, que le ſon parcourt dans un tems donné en calculant ſeulement la durée d'une ſimple vibration.

M. Jean Bernoulli le fils dans ſon excellente Piéce ſur la Lumiére a auſſi déterminé d'après les mêmes hypothéſes la viteſſe du ſon; ſon procédé différe pourtant de celui de M. Newton en ce qu'il a d'abord ſuppoſé que les vibrations des particules ſont parfaitement iſochrones; ce qui eſt préciſément, ce que ce Grand Géomètre s'étoit propoſé de démontrer. Auſſi n'eſt-il pas ſurprenant que ces deux Auteurs

teurs soient arrivés à la même formule pour la vitesse du son: et l'accord apparent de leurs calculs ne peut être apporté comme une preuve des fondemens de la Théorie qu'on vient d'exposer (*).

A l'égard des premiéres propositions sur la formation des fibres élastiques, & sur tout de leur comparaison avec les ondes, je crois inutile de m'arrêter davantage à les examiner. Car outre que plusieurs Auteurs en ont déja fait voir le peu de solidité, & l'insuffisance même pour l'explica-

(*) M. Bernoulli prouve à la vérité dans l'Ouvrage cité, que tout corps qui est tenu en équilibre par deux puissances égales, & directement contraires, s'il vient à être tant soit peu déplacé doit faire autour de son point de repos des oscillations simples, & réguliéres. Mais cette théorie n'est guere applicable qu'au seul cas, ou il n'y ait qu'un corps mobile. Pour le faire sentir, supposons d'abord selon cet Auteur, que le corps soit sollicité selon deux diréctions contraires par les forces égales $P$, & $Q$, il est clair que ces forces ne pourront être que des fonctions de la distance du corps à un point fixe quelconque; donc si on lui fait parcourir une espace infiniment petit $ds$ la somme des accroissement de ces deux forces sera exprimé par $pds$, ce qui donnera par conséquent la force accélératrice qui porte le corps vers son point d'équilibre; & comme on ne veut considérer que les mouvemens infiniment petits on supposera $p$ constant, d'ou la force donnée déviendra proportionelle à la distance à parcourir $ds$, & les oscillations se feront selon les loix connues de l'Isocronisme. Mais il n'en sera pas de même s'il y a plusieurs corps qui se soutiennent mutuellement en équilibre, quoique rangés tous sur la même droite. Dans ce cas les forces $P$, $Q$, $P^{I}$, $Q^{I}$, $P^{II}$, $Q^{II}$ qui agissent sur chacun d'eux seront des fonctions de leurs distances intermédiaires, ainsi $ds^{I}$, $ds^{II}$, $ds^{III}$ représentant les déplacemens infiniment petits de tous les corps, on aura pour les forces accélératrices des expressions de cette forme $pds^{I} + qds^{II} + rds^{III}$, ou $p$, $q$, $r$ *&c.* peuvent être regardées comme constantes. D'ou il est aisé de comprendre que les mouvemens des corps, ne seront plus astreints au simple isochronisme; & c'est proprement ce qui arrive aux particules des fibres élastiques de l'air. C'est aussi par cette raison que le calcul qu'on trouve dans le Commentaire des *Principes* seroit encore insuffisant même quand il ne renfermeroit pas des approximations; puisque on n'y considére que trois, ou quatre particules mobiles. M. D. Alembert a fait sentir cette difficulté pour le cas d'une corde vibrante chargée de plusieurs pétits poids pag. 359. des Mémoires de Berlin pour l'année 1750.

plication des phénomènes du Son (*), la maniére avec laquelle elles ſont préſentées dans les *Principes* fait voir évidemment que l'Auteur ne les adoptoit, que comme des ſimples hypothèſes pour ſimplifier la nature d'un problême aſſés compoſé de lui même. Et quand même ces hypothèſes ſeroient vraies, ne ſeroit-on pas en droit d'en exiger une démonſtration? Or cette démonſtration doit néceſſairement dépendre de la réſolution générale du problême propoſé. Il faut donc avoüer que la Théorie de M. Newton ſeroit même à cet égard bien éloigné de pouvoir entiérement ſatisfaire à ſon objet. Mais il y a plus le Théorème dans lequel il détermine les loix des oſcillations des particules eſt fondé ſur des principes inſuffiſants, & même fautifs.

Le Célèbre M. Euler paroit s'en être apperçu dés l'année 1727., comme l'on voit dans une Théſe ſur le Son ſoutenue à Bale la même année. Cependant M. Cramer eſt, je crois, le premier qui en ait donné une preuve ſolide, & convainçante (**). Il fait voir que le procédé de M. Newton peut égalemment s'appliquer à démontrer cette autre propoſition ſavoir : que les particules élaſtiques ſuivent dans leurs mouvemens les lois d'un corps peſant qui monte, & qui tombe librement; ce qui eſt tout-a-fait incompatible avec l'iſochroniſme des oſcillations, que l'Illuſtre Auteur Anglois a prétendu établir. Cette remarque ſeule paroitroit ſuffire pour faire tomber entierement la Théorie en queſtion. Cependant comme les grands Hommes ne doivent être jugés, que d'aprés l'examen le plus exact, & le plus rigoureux, l'on auroit tort de la rejetter

(*) Voies la ſuite de l'article des fluides cité ci-deſſus. Vojés encore le Mémoire de M. de Mairan dans l'Académie de Paris année 1737., la Phyſique de Perrault, & d'autres.

(**) Vojés les Commentaires des *Principes*.

ter, avant que d'en avoir démontré l'insuffisance d'une maniére qui ne laissa plus rien à désirer.

Voila le premier pas que j'ai pensé dévoir faire en entrant dans les recherches que je m'étois proposé sur la nature, & la propagation du son.

J'ai donc commencé par étudier avec toute l'attention dont j'ai été capable les propositions de M. Newton dont il s'agit, & j'ai trouvé en effet qu'elles sont fondées sur des suppositions incompatibles entr'elles, & qui portent nécessairement à faux. C'est ce que j'ai taché de faire voir par deux voies différentes dans le premier Chapitre de la Dissértation suivante. Cet objet ainsi rempli, je me suis appliqué à rechercher des méthodes directes, & générales pour résoudre le problême proposé, sans emploier d'autres Principes que ceux qui tiennent immédiatement aux lois connües de la Dinamique.

Pour donner à mes recherches le plus de généralité qu'il est possible, & pour les rendre en même tems applicables à ce qui se passe réellement dans la nature, j'ai d'abord envisagé la question sous le même point de vue sous lequel tous les Géomètres, & les Physiciens l'ont regardé jusqu'ici; & je doute qu'on puisse jamais reduire le problême sur les mouvemens de l'air qui produisent le son, à un énoncé plus simple, que celui-ci. Savoir.

Etant donné un nombre indefini de particules élastiques rangées en ligne droite qui se soutiennent en équilibre, en vertu de leurs forces mutuelles de répulsions, déterminer les mouvemens, que ces particules doivent suivre dans le cas qu'elle aient été, comme que ce soit, dérangées, sans sortir de la même droite.

Pour en faciliter la résolution, je suppose seulement que les particules sont toutes de même grandeur, & doüées d'une même force élastique, & de plus, que leurs mouvemens

vemens sont toujours infiniment petits : conditions que je ne crois pas pouvoir porter la moindre atteinte à la nature du problême envisagé physiquement.

En examinant les équations trouvées d'après ces seules *données*, je me suis bientôt apperçu qu' elles ne différoient nullement de celles qui appartienent au problême *de chordis vibrantibus*, pourvu qu' on suppose les mêmes corpuscules, disposés de la même maniére dans un cas que dans l' autre ; d' ou il s' ensuit qu' en augmentant leur nombre à l' infini, & diminuant les masses dans la même raison, le mouvement d' une fibre sonore dont les particules élastiques se touchent mutuellement, doit être comparé à celui d' une corde vibrante correspondante (*).

Ceci m' a donc conduit à parler des théories, que les grands Géomètres, Mrs. Tailor, D' Alembert, & Euler ont donné sur ce sujet. J' expose en peu de mots leurs différents, & les objections que M. Daniel Bernoulli a fait aux deux derniers ; & aprés avoir soigneusement examiné les raisons des uns, & des autres, j' en conclus que les calculs, qu' on a fait jusqu' à présent, ne sauroient décider de telles questions, & que c' est nécessairement à la solution générale que nous avons en vue qu' il faut s' en rapporter.

J' entreprens donc cette solution dont l' analise me paroit en elle même neuve, & intéressante, puisque il y a un nombre indéfini d' équations à résoudre à la fois. Heureusement la méthode que j' ai suivi m' a mené à des formules qui ne sont pas fort composées, eu égard au grand nom-

(*) C' est une justice que l' on doit ici au Célèbre M. D' Alembert, que de faire remarquer qu' il avoit déja trouvé ce rapport entre les deux problêmes mentionées dans l' art. XLVI. de son premier Mémoire sur les cordes vibrantes dans l' Académie de Berlin. Mais il ne paroit pas, du moins que je sache, qu'il en ait jamais fait aucun usage.

nombre d' opérations, par où j' ai été obligé de passer. Je considére d' abord ces formules dans le cas, ou le nombre des corps mobiles est fini, & j'en tire aisément toute la théorie du mélange des vibrations simples, & régulières que M. Daniel Bernoulli n'a trouvé que par des voies particuliéres, & indiréctes. Je passe ensuite au cas d'un nombre infini de corps mobiles, & après avoir prouvé l' insuffisance de la théorie précédente dans ce cas, je tire de mes formules la même construction du problême *de chordis vibrantibus*, que M. Euler a donné, & qui a été si fort contestée par M. D'Alembert. Je donne de plus à cette construction toute la généralité dont elle est capable, & par l'application que j' en fais aux cordes de Musique, j'obtiens une démonstration générale, & rigoureuse de cette importante verité d' expérience, savoir: que quelque figure qu'on donne d' abord à la corde la durée de ses oscillations se trouve néanmoins toujours la même (*).

A cette occasion je développe la Théorie générale des sons harmoniques, qui résultent d'une même corde, de même que celle des instrumens à vent. Quoique ces deux théories aient été déja proposées, l' une par M. Sauveur, & l' autre par M. Euler, cepandant je crois être le premier qui les ait immédiatement déduit de l' Analise.

Je viens maintenant au principal objet de mes recherches, savoir aux loix de la propagation du son. Je suppose qu'une particule d' air reçoive du corps sonore une impulsion quelcon-

(*) Le savant M. D'Alembert cité ci-dessus dans l' article III. de son Addition au mémoire des cordes vibrantes, imprimée dans le tome de l'Académie de Berlin pour l' année 1750., fait à ce propos la remarque suivante. *Il est vraisemblable qu'en général quelque figure que la corde prenne, le tems d'une vibration sera toujours le même, & c' est ce que l' expérience paroit confirmer, mais ce qui seroit difficile, peut être impossible de démontrer en rigueur par le calcul*. Je ne rapporte ces paroles d' un si grand Géomètre, que pour donner une idée de la difficulté du problême que j' ai résolu.

conque, je trouve par l' application des mes formules qu' il ſe communique d' une particule à l' autre un mouvement qui n' eſt qu' inſtantané, & qui ne dépend en rien de la force du premier ébranlement. La viteſſe avec laquelle ſe fait cette communication eſt déterminée par la même formule, que M. Newton avoit déja donné pour la viteſſe du Son, & dont les réſultats ſe trouvent aſſés conformes à l' expérience. Le calcul me conduit ici à traiter des échos ſimples, & compoſés, & la théorie que j' établis n' eſt ſujette à aucune des difficultés qui ſe rencontrent dans l' explication, que le Phyſiciens en ont donné juſqu' à préſent. Ces recherches ſont ſuivies d' un examen du mélange des ſons, & de la maniére avec laquelle ils peuvent ſe répandre dans le même eſpace ſans ſe troubler, ou ſe confondre en aucune façon. Je tire enfin de mes formules une explication rigoureuſe, & inconteſtable de la réſonance & du frémiſſement naturel des cordes harmoniques au bruit de la principale; Phénomène connu dépuis long-tems, & pour lequel on a inventé pluſieurs ſiſtèmes, ſans être parvenu à en donner une raiſon ſatisfaiſante.

Voila les principaux objets que j'ai traité dans la Diſſértation préſente, & que le défaut de tems, & quelques autres obſtacles imprévus m' ont empêché d' expliquer avec plus d' ordre, & de netteté. Je ſuis bien éloigné de croire qu' elle contienne une théorie complette ſur la nature, & la propagation du ſon; mais ce ſera du moins avoir contribué à l'avancement des Sciences Phyſico-Mathématiques, que d' avoir démontré par le calcul pluſieurs verités qui avoient juſqu' ici paru inexplicables dans la nature; et l'accord de mes réſultats avec l' expérience ſervira peut-être à détruire les préjugés de ceux qui ſemblent déſeſpérer, que les Mathématiques ne puiſſent jamais porter des vrayes lumiéres dans la Phyſique. C' eſt un des principaux buts que je m' étois propoſé pour le préſent.

RE-

# SECTION PREMIERE.

## *Recherches ſur la nature du ſon.*

## CHAPITRE PREMIER.

### *Des oſcillations des parties intimes des fluides élaſtiques.*

1. J'Entreprens avant tout d'éxaminer la Théorie, que M. Newton a renfermée dans la ſection VIII. du II. Livre des Principes Mathématiques. Laiſſant a part toute diſcuſſion ſur la formation des ondes, & des fibres ſonores, dont on a parlé dans l'Introduction, je m'attache principalement à l'Analiſe du théorême, dans lequel il prétend établir, que chaque particule d'un fluide élaſtique homogéne ſuit dans ſes mouvemens les mêmes loix, qu'un pendule qui décrit une cicloide dont la longueur égale l'excurſion totale de la particule, & ou la peſanteur qui l'anime eſt équivalente à l'élaſticité naturelle du fluide. Pour démontrer que cette propoſition eſt conforme à la vérité, ſuppoſons d'abord, dit M. Newton, qu'elle le ſoit en effet, & voyons ce qui s'enſuivra. Il cherche donc d'après une pareille ſuppoſition la force accélératrice des particules, & il trouve que cette force eſt précisément la même, qui fait mouvoir un pendule dans des arcs de la cicloide donnée. Pour faire mieux ſentir l'inexactitude, & l'inſuffiſance du procédé qui l'a conduit à cette concluſion, j'ai cru devoir convertir le théorême en problême, en ſuppoſant d'abord inconnuë, ou indeterminée la loi des mou-

vemens qu' on se propose de trouver. Pour cela il n'y a d' autres changemens à faire aux propositions de M. Newton, que de substituer au lieu du cercle dont les arcs expriment les tems, & les coupées les espaces parcourus, une autre courbe quelconque qui fasse la même fonction.

Je rapporterai donc ici la proposition dont il s' agit, & j' aurai soin de me servir des mêmes expressions de l' Auteur autant qu' il me sera possible.

## *Propositio* XLVII. LIB. II. Problema.

2. Pulsibus per fluidum elasticum propagatis invenire legem, qua singulae fluidi particulae motu reciproco brevissimo euntes, & redeuntes accelerantur, & retardantur.

*Designent* (Fig.1.) *AB, BC, CD* &c. *pulsuum successivorum aequales distantias, ABC plagam motus pulsuum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria physica medii quiescentis in recta AC ad aequales ab invicem distantias sita; Ee, Ff, Gg spatia aequalia perbrevia, per quae puncta illo motu reciproco singulis vibrationibus eunt, & redeunt; ε, φ, γ loca quaevis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG lineolas physicas, seu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca εφ, φγ, & ef, fg: Rectae Ee aequalis ducatur recta PS;* Et super ipsa describatur curva in se rediens *PHShP.* (Fig.2.) *Per hujus* peripheriam *totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius, cum ipsius partibus proportionalibus, sic ut completo tempore quovis PH, vel PHSh, si demittatur ad PS perpendiculum HL, vel hl, & capiatur Eε aequalis PL vel Pl, punctum physicum E reperietur in ε; hac lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E vibrationes singulas peraget*, prout fert natura curvae propositae *PHShP*; invenienda est hujusmodi curva. *In* peripheria *PHSh capiantur aequales arcus HI, IK, vel hi,*

*ik*

*i k eam habent rationem ad* peripheriam *totam, quam habent aequales rectae E F, F G ad pulsuum intervallum totum B C, & demissis perpendiculis I M, K N, vel i m, k n, quoniam puncta E, F, G motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu, & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C, si P H, vel P H S h sit tempus ab initio motus puncti E erit P I, vel P H S i tempus ab initio motus puncti G, & propterea* $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ *erunt ipsis P L, P M, P N in itu punctorum, vel ipsis P l, P m, P n in punctorum reditu, aequales respective. Unde* $\varepsilon\gamma$ *seu* $EG + G\gamma - E\varepsilon$ *in itu punctorum aequalis erit* $EG - LN$ *in reditu autem aequalis* $EG + ln$; *sed* $\varepsilon\gamma$ *latitudo est, seu expansio partis Medii E G in loco* $\varepsilon\gamma$; *& propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut* $EG - LN$ *ad E G, in reditu autem ut* $EG + ln$, *seu* $EG + LN$ *ad E G* . . . . . . . . . . .
*Unde vis elastica puncti F in loco* $\varepsilon\gamma$ *est ad ejus vim elasticam mediocrem in loco E G ut* $\frac{1}{EG - LN}$ *ad* $\frac{1}{EG}$ *in itu; in reditu vero ut* $\frac{1}{EG + ln}$ *ad* $\frac{1}{EG}$; *& eodem argumento vires elasticae punctorum physicorum E, & G in itu sunt ut* $\frac{1}{EG - MR}$ *&* $\frac{1}{EG - QM}$ *ad* $\frac{1}{EG}$ ( ductis scilicet (Fig. 3.) perpendiculis *D R*, F *Q*, quae intercipiant partes arcus *F H*, *K D* aequales ipsis *H I*, *I K*), *& virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut* $\frac{QM - MR}{(EG - MR)\times(EG - QM)}$ *ad* $\frac{1}{EG}$; *hoc est ut* $\frac{QM - MR}{EG^2}$ *ad* $\frac{1}{EG}$, *sive ut* $QM - MR$ *ad E G, si modo ( ob angustos vibrationum limites ) supponamus M R, Q M indefinite minores esse quantitate E G; quare cum quantitas E G detur, differentia virium est, ut*

 *R M*

$QM - MR$. *Sed differentia illa (ideſt exceſſus vis elaſticae puncti* $\varepsilon$ *ſupra vim elaſticam puncti* $\gamma$*) eſt vis qua interjecta Medii lineola phyſica* $\varepsilon\gamma$ *acceleratur, & propterea vis acceleratrix lineolae phyſicae* $\varepsilon\gamma$ *eſt, ut* differentia linearum $QM$, & $MR$; igitur ex Mechanicae principiis differentia iſta eſſe debebit, ut fluxio ſecunda ſpatii quod deſcribitur a particula $\varepsilon\gamma$, poſita ſcilicet fluxione prima temporis conſtante. Jam vero quoniam ex hypoteſi tempora exprimuntur per arcus, & ſpatia per abſciſſas reſpondentes erunt $MR$, & $QM$ fluxiones primae ſpatiorum $PR$, $PQ$, adeoque $QM - MR$ aequabitur fluxioni ſecundae ſpatii $PR$, vel etiam $PM$, quod ab illo infinite parum differt; quum itaque partes arcus $DI$, $IF$ aequentur inter ſe habebimus ad determinandam curvam $PHSh$ ſequentem aequationem identicam $QM - MR = QM - MR$, ſeu $o = o$ quod nihil indicat.

3. Cette concluſion vague, & indéterminée, que nous venons de trouver, nous apprend donc clairement la raiſon pour laquelle les principes de M. Nevvton peuvent nous conduire également à des réſultats très différens entr' eux, comme M. Cramer l'a ingénieuſement démontré dans l'hypothéſe, que les particules élaſtiques ſuivent dans leurs mouvemens la même loix, que les corps peſans qui montent, ou qui deſcendent alternativement. Mais ſuivons encore la théorie de M. Newton, & paſſons à la propoſition 49. dans laquelle il détermine le tems que chaque particule doit employer à faire une oſcillation entière. Or comme de la propoſition précédente il réſulte que toute courbe rentrente $PHShP$ peut également exprimer la rélation entre les eſpaces, & les tems, l'on ſera auſſi bien en droit de ſubſtituer au cercle dans cette propoſition une courbe quelconque, & d' y appliquer généralement les mêmes raiſonnemens que M. Newton a fait ſur ſon hypothéſe particulière. Soit donc

PRO-

## *Propositio* XLIX. *Problema*.

4. *Datis Medii densitate, & vi Elastica invenire velocitatem pulsuum.*

*Fingamus Medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimi, sitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adaequet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis, & centrum oscillationis sit A, & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu, & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiae circuli radio A descripti aequale. Nam stantibus, quae in Prop. 47. constructa sunt, si lineola quaevis physica E F singulis vibrationibus describendo spatium P S urgeatur in* loco quovis $\varepsilon\varphi$ *a vi Elastica, quae* eadem omnino sit, quam proposita spatiorum, & temporum scala $PHShP$ requirit seu $= \frac{QM - MR}{HK^2} \times M$, dénotante $M$ massam, seu pondus lineolae physicae $EG$, peraget haec vibrationes singulas tempore $PHS$, & oscillationes integras tempore $PHShP$; *id adeo, quia vires aequales aequalia corpuscula per aequalia spatia simul impellent* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*Sed vis elastica, qua lineola physica E G* in loco quovis $\varepsilon\gamma$ *existens urgetur erat (in demonstratione* Prop. 47.) *ad ejus vim totam elasticam, ut Q M – M R ad E G; & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola E G comprimitur est ad pondus lineolae, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolae longitudinem E G, adeoque ex aequo vis, qua lineola E G* in loco quovis $\varepsilon\gamma$ *urgetur, est ad lineolae illius pondus, ut* $(QM - MR)A$ *ad* $EG^2$ hinc vis ista erit ad vim superius inventam $\frac{QM - MR}{HK^2} \times M$, ut

*A*

$\frac{A}{EG^2}$ ad $\frac{1}{HK^2}$. Porro $HK = 2\,KI$ & $EG = 2\,EF$; unde quum ex constructione propositionis antecedentis habeatur $KI : EF = PHShP : BC$ erit etiam $HK : EG = PHShP : BC$ unde proportio virium supra inventa transmutabitur in hanc $\frac{A}{BC^2} : \frac{1}{[PHShP]^2}$. *Quare cum tempora, quibus aequalia corpora per aequalia spatia impelluntur sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa elastica, ad tempus* $PHShP$ *in subduplicata ratione* $\frac{BC^2}{A} : (PHShP)^2$, seu ut $\frac{BC}{\sqrt{A}} : PHShP$. Quum itaque consequentia in hac analogia eadem sint, aequalia esse debebunt & antecedentia; hinc orietur tempus vibrationis unius lineolae $EG$ urgente vi elastica $= \frac{BC}{\sqrt{A}}$. *Sed tempore vibrationis unius, ex itu & reditu compositae pulsus progrediendo conficit latitudinem suam* $BC$; *ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium* $BC$ erit $= \frac{BC}{\sqrt{A}}$. *Tempus autem, quo pulsus percurrit spatium* $BC$ *est ad tempus, quo percurret longitudinem circumferentiae* circuli, cujus radius est $A$ *aequalem in eadem ratione*, scilicet, ut $BC : \pi A$ (posita scilicet pro $\pi$ ratione circumpherentiae ad radium) adeoque erit hoc tempus $= \frac{\pi A}{\sqrt{A}} = \pi \sqrt{A}$; sed ex theoria pendulorum reperitur etiam tempus oscillationis unius penduli longitudinis $A$ $= \pi \sqrt{A}$; *ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiae aequalem.*

5. Voila donc un nouveau paradoxe déduit des Principes de Mr. Newton, savoir que quelle que soit la loi des mouvemens des particules élastiques le tems des oscil-

lations

lations eſt néanmoins toujours le méme. Ces deux propoſitions que nous venons de détailler, contiennent toute la théorie que cet Auteur a donné concernant les mouvemens de l'air qui font l'objet principal de la Diſſertation préſente, c'eſt pourquoi nous les examinerons ici avec tout le ſoin poſſible. Pour peu qu'on reſléchiſſe ſur la nature des démonſtrations précédentes, on s'apperçevra ſans peine que les défauts de cette théorie dépendent moins de l'enchainement des raiſonnemens que des Principes, & des *données* que l'Auteur adopte tacitement pour la ſolution du problême. Ces *données* étant développées ſe réduiſent aux ſuivantes. 1.$^{mo}$ Que les mouvemens de toutes les particules ſoient exprimés par le même lieu géométrique, d'où il ſuit qu'il doivent être tous d'une même nature. 2.$^{do}$ Que ces particules ſe communiquent le mouvement dans des tems égaux, enſorte qu'elles viennent toutes à paſſer ſucceſſivement par les mêmes dégrés de mouvement. Il eſt conſtant qu'on ne peut admetre aucune de ces ſuppoſitions, ſi on n'a auparavant démontré qu'elles ſont des conſéquences néceſſaires des conditions données du problême. Or tant s'en faut que dans notre cas la choſe ſoit ainſi, qu'au contraire ce ſont ces mêmes conditions qui détruiſent entiérement celles qui dépendent de l'action mutuelle, que les parties exercent en vertu de leurs forces répulſives. Pour développer cette difficulté dans toute ſon étendue, ainſi que l'importance de la matiére, & l'autorité du grand Homme, dont les égaremens mêmes nous ſont inſtructifs, ſemblent l'exiger, je vais donner l'Analiſe pure & exacte du problême, dont il s'agit telle, que peuvent la fournir les premiers Principes de Mécanique.

6. Soient ſelon les premiéres ſuppoſitions de Mr. Newton (Fig. 1.) *E*, *F*, *G &c.* des Points Phyſiques qui compoſent le milieu élaſtique, lorſqu'il eſt en repos; ſoient

enſuite

enſuite parvenus ces mêmes points en $\varepsilon$, $\varphi$, $\gamma$, de ſorte qu'il reſtent néanmoins dans la même ligne droite $BC$; qu'on dénote les eſpaces rectilignes parcourus $E\varepsilon$, $F\varphi$, & $G\gamma$ par $y^{\text{I}}$, $y^{\text{II}}$, $y^{\text{III}}$, & ſuppoſant que la premiére diſtance $EF$, $FG$ entre ces points ſoit $= r$, l'on aura $\varepsilon\varphi = r + y^{\text{II}} - y^{\text{I}}$; $\varphi\gamma = r + y^{\text{III}} - y^{\text{II}}$; or la force d'élaſticité naturelle qui agit entre les points $E$, $F$, $G$ eſt exprimée par $\frac{A \times M}{r}$, comme il eſt démontré dans la *Prop.* 49. ci-deſſus, où $M$ dénote le poid de chaque particule, & $A$ eſt la hauteur d'une colomne homogéne du même fluide, dont la peſanteur égale le reſſort naturel des parricules; donc lorſque les points $E$, $F$, $G$ viennent a être tranſportés en $\varepsilon$, $\varphi$, $\gamma$ cette force d'élaſticité ſe changera en $\frac{A \times M}{\varepsilon\varphi} = \frac{A \times M}{r + y^{\text{II}} - y^{\text{I}}}$ pour les points $\varepsilon$ & $\varphi$, & en $\frac{A \times M}{\varphi\gamma} = \frac{A \times M}{r + y^{\text{III}} - y^{\text{II}}}$ pour les points $\varphi$ & $\gamma$, & ainſi de ſuite; par conſéquent la différence de ces deux forces donnera la force motrice de la particule intermédiaire $\varphi$, laquelle ſe trouvera $= AM \times \left( \frac{1}{r + y^{\text{II}} - y^{\text{I}}} - \frac{1}{r + y^{\text{III}} - y^{\text{II}}} \right)$, c'eſt à dire $= AM \times \frac{y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}}{(r + y^{\text{II}} - y^{\text{I}})(r + y^{\text{III}} - y^{\text{II}})}$. Mais, comme les particules ſont ſuppoſées devoir faire des excurſions aſſés petites, les différences $y^{\text{II}} - y^{\text{I}}$, & $y^{\text{III}} - y^{\text{II}}$ des eſpaces parcourus s'évanouiront auprès de la quantité $r$, d'où il réſulte pour la force motrice de la particule $F$, $AM \times \frac{y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}}{r^2}$, qui eſt celle qui fait parcourrir l'eſpace $y^{\text{II}}$. De la même maniére on trouvera pour les autres particules des expreſſions des forces motrices toutes ſemblables à celle-ci; d'où ſi l'on nomme $t$ le tems écoulé depuis le commen-

cement

cement du mouvement de la particule $E$, & ſi l'on fait ſes différences $dt$ conſtantes on obtiendra par les Principes de la Mécanique l'équation ſuivante qui contient les loix du mouvement de la particule $F$, ſavoir

$\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2} \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r^2}$, où $h$ eſt l'eſpace qu'un corps peſant parcourt librement en tombant durant le tems $T$; de méme on aura pour la particule ſuivante $G$ l'équation

$\frac{d^2 y^{III}}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2} \times \frac{y^{IV} - 2y^{III} + y^{II}}{r^2}$, & ainſi des autres.

En général, ſi l'expoſant de $y$ exprime toujours la place que tient la particule qui parcourt l'eſpace $y$, en comptant depuis la premiére $F$, on trouvera pour le mouvement de la particule, dont le quantiéme du rang eſt $m$, l'équation générale $\frac{d^2 y^{m}}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2} \times \frac{y^{m+1} - 2y^{m} + y^{m-1}}{r^2}$. Ces équations, comme il eſt aiſé de le voir, ſont en même nombre que les particules mobiles, dont on cherche les mouvemens; c'eſt pourquoi le problême étant déja abſolument déterminé par leur moyen, on eſt obligé de s'en tenir là, de ſorte, que toute condition étrangére qu'on voudra introduire, ne peut pas manquer de rendre la ſolution inſuffiſante, & même fautive. Mais pour connoître diſtinctément quelle atteinte doivent porter à l'Analiſe cideſſus expliquée les hypothéſes particuliéres que Mr. Newton a imaginées, pour faciliter peut être le problême qui de ſa propre nature eſt très-compliqué, nous allons réduire ces hypothéſes en formules.

7. Pour cela nous commencerons par remarquer que ſi $t$ eſt le tems écoulé depuis le commencement du mouvement de la particule $E$, il faudra en vertu de la ſeconde hypothèſe qu'il ſe ſoit écoulé un tems $t + dt$, afin que la particule ſuivante $F$ ait pû ſe mouvoir durant

un tems $t$; il faudra aussi un tems $t + 2dt$ pour un mouvement semblable de la particule suivante $G$, & ainsi pour les autres; d'où il s'ensuit que, puisque toutes les particules sont supposées suivre les mêmes loix par l'hypothèse première, l'espace parcouru par le point $F$, durant le tems $t$, sera égal à l'espace parcouru par la particule $G$ pendant le tems $t + dt$, & que l'espace parcouru par le point $E$ pendant le tems $t$ sera le même que l'espace parcouru par la particule $G$ dans le tems $t + 2dt$; or $y^{I}$, $y^{II}$, $y^{III}$ expriment les espaces parcourus par les particules $E$, $F$, $G$, &c. dans le même tems $t$, on aura donc $y^{II} = y^{III} + dy^{III}$; $y^{I} = y^{III} + 2dy^{II} + d^2y^{I}$; maintenant si l'on substitue ces valeurs de $y^{I}$ & de $y^{II}$, dans l'expression $y^{III} - 2y^{II} + y^{I}$, l'équation qui contient le mouvement de la particule $F$ se changera en celle-ci $\frac{d^2y^{II}}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2} \times \frac{d^2y^{III}}{r^2}$; mais $y^{II} = y^{III} + dy^{III}$, & par conséquent $d^2y^{II} = d^2y^{III} + d^3y^{III}$, l'on aura donc l'équation $\frac{d^2y^{III} + d^3y^{III}}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2} \times \frac{d^2y^{III}}{r^2}$, ou bien en négligeant le terme $d^3y^{III}$, & divisant tout par $d^2y^{III}$ nous aurons $\frac{1}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2r^2}$, équation, qui comme on voit, ne contient plus aucune des variables $y^{I}$, $y^{II}$, $y^{III}$ &c. On trouvera par des raisonnemens semblables que toutes les autres équations se réduiront encore à celle-ci, laquelle par conséquent pourra être vraie quelles que soient les valeurs des $y$, pourvu que l'on ait $dt^2 = \frac{T^2r^2}{2Ab}$. Maintenant si l'on nomme $\theta$ le tems d'une oscillation entiére, on aura $\theta = PHShP$ & $dt = KI$; par conséquent $dt : EF = \theta : BC$; par la *Prop.* 49., savoir $dt = \frac{r\theta}{BC}$ & $dt^2 = \frac{r^2\theta^2}{BC^2} = \frac{T^2r^2}{2Ab}$; d'où l'on tire

$\theta^2 =$

$\theta^2 = \frac{BC^2 \times T^2}{2Ab}$ & $\theta = \frac{T \times BC}{\sqrt{2Ab}}$ qui eſt la même expreſſion que nous avons déja trouvé pour la meſure du tems dans la *Prop.* 49.

Tout ce que nous venons de démontrer ſuffit aſſés, ce me ſemble, pour faire connoître à fond l'inſuffiſance & la fauſſeté de la méthode de Mr. Newton. Nous allons donc chercher une autre voie qui nous mène à une ſolution du problême, dont il s'agit fondée ſur des Principes ſurs & inconteſtables.

8. Pour enviſager d'abord la queſtion ſous le point de vue le plus ſimple & le plus général qu'il ſoit poſſible, je regarde avec Mr. Newton les fluides élaſtiques comme des amas de corpuſcules, qui ſe fujent mutuellement ſelon les loix connues de l'élaſticité. Imaginons donc une ſuite de corps qui ayent tous la même maſſe, & qui ſoient rangés ſur une même ligne droite, à diſtances égales les uns des autres; ſuppoſons de plus que ces corps ſe répouſent mutuellement par des forces élaſtiques qui ſuivent la raiſon inverſe des diſtances; & pour contenir l'action continuelle de ces forces de répulſion, qui tendent ſans ceſſe à écarter les corps les uns des autres, qu'on conſidére les deux extrêmes comme fixes & immobiles, en ſorte que quelque mouvement qu'on excite dans leur ſiſtème, il demeure toujours renfermé entre les deux limites données. Maintenant ſoit le nombre des corps mobiles $= m - 1$, leur maſſe $= M$, la force du reſſort naturel $= E$, en conſervant les autres ſuppoſitions ci-deſſus (art. 6.), on trouvera que les mouvemens de tout le ſiſtème ſeront contenus dans les équations ſuivantes;

$$\frac{d^2 y^{\mathrm{I}}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}}}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{\mathrm{II}}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{\mathrm{III}} - 2y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{I}}}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{III}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{IV} - 2y^{III} + y^{II}}{r}$$

Ces équations feront au nombre de $m - 1$, favoir en même nombre que les corps mobiles, & de plus toutes femblables, excepté la premiére & la derniére, dans lefquelles les quantités $y^\circ$ & $y^m$, qui repréfenteroient felon l'ordre établi les efpaces parcourus par le premier & dernier corps, doivent être à caufe de l'immobilité de ces corps, fuppofées égales, à zero; la derniére de ces équations fe trouvera donc

$$\frac{d^2 y^{m-1}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{-2y^{m-1} + y^{m-2}}{r}.$$

C'eft en intégrant toutes ces équations, & en tirant des valeurs pour chaque inconnue $y^I$, $y^{II}$, $y^{III}$ *&c.* exprimées par la même variable $t$ que l'on parviendra à déterminer les mouvemens de tous les corps qui compofent le fiftème propofé; mais avant que d'entrer dans ces recherches, il eft néceffaire de traiter des caufes qui peuvent produire de tels ébranlemens dans les parties intimes des fluides élaftiques. Nous nous bornerons ici aux cordes vibrantes, dont les mouvemens font plus connus, & qui, peut être, font les feuls de cette efpèce qui ne fe refufent pas à l'Analife.

CHA-

## CHAPITRE II.

### *Des vibrations des cordes.*

9. SOIT $AB$ ( Fig. 4. ) une corde tant ſoit peu extenſible, & qu'on puiſſe conſiderer abſtraction faite de ſa gravité, & de ſa roideur; ſuppoſons qu'elle ſoit attachée fixément aux deux points immobiles $A$, & $B$ qui la tiennent tendue avec une force égale au poid $P$. Soit de plus cette corde chargée de tant de corpuſcules $E$, $F$, $G$ &c. qu'on voudra, qui aient tous la même maſſe $M$, & qui ſoient éloignés les uns des autres, par des intervalles égaux $AE$, $EF$ *&c.* Il eſt évident par les Principes de la Mécanique que, ſi les points $E$, $F$, $G$ *&c.* viennent à être écartés de la ligne droite, enſorte qu'ils décrivent les lignes infiniment petites $Ee$, $Ff$, $Gg$ *&c.* chacun de ſes points $f$ ſera pouſſé vers $F$ par une force égale à $P \times$ ſin: $efg$. Or ſi l' on nomme $y^{\mathrm{I}}$, $y^{\mathrm{II}}$ *&c.*: les excurſions $Ee$, $Ff$ *&c.* des corps $E$, $F$, & qu'on faſſe l'intervalle conſtant $AE = EF = r$ on aura ſin: $efg = \dfrac{y^{\mathrm{III}} - 2y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{I}}}{r}$; d'ou l'on tire pour le mouvement du corps $F$ l' équation $\dfrac{d^2y^{\mathrm{II}}}{dt^2} = \dfrac{2Ph}{MT^2} \times \dfrac{y^{\mathrm{III}} - 2y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{I}}}{r}$ on trouvera de même pour le mouvement du corps ſuivant $G$, l'équation $\dfrac{d^2y^{\mathrm{III}}}{dt^2} = \dfrac{2Ph}{MT^2} \times \dfrac{y^{\mathrm{IV}} - 2y^{\mathrm{III}} + y^{\mathrm{II}}}{r}$, & ainſi pour les autres. Par conſéquent ſi les corps attachés à la corde ſont au nombre de $m-1$ on aura en général pour leurs mouvemens, qnels-qu'ils ſoient, les équations ſuivantes.

$$\frac{d^2y^{\mathrm{I}}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}}}{r}$$

$$\frac{d^2y^{\mathrm{II}}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{\mathrm{III}} - 2y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{I}}}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2 P h}{M T^2} \times \frac{y^{IV} - 2 y^{III} + y^{II}}{r}$$

&c.

Dont le nombre ſera encore $m - 1$, & la derniére ſera exprimée par $\frac{d^2 y^{m-1}}{dt^2} = \frac{2 P h}{M T^2} \times \frac{-2 y^{m-1} + y^{m-2}}{r}$.

Il eſt viſible que toutes ces équation ſont entiérement ſemblables à celles que nous avons trouvées pour les mouvemens des corps élaſtiques, & qu'il n'y a qu'à faire $P = E$, pour qu'elles deviennent tout-à-fait les mêmes; d'où il s'enſuit que les deux problêmes qui y répondent ſont de même nature, & qu'en en reſolvant un, on reſout l'autre en même tems.

Imaginons que le nombre des corps dans l'un & dans l'autre cas augmente à l'infini, & que leurs maſſes diminuent en même raiſon, les globules rangés en ligne droite formeront des fibres élaſtiques, telles qu'on peut les conçevoir dans l'air commun, & la corde tendue deviendra une corde uniformément épaiſſe dans toute ſa longueur, comme le ſont les cordes de Muſique; le même rapport ſubſiſtera donc encore entre les oſcillations des parties de l'une & de l'autre, par conſéquent la théorie des mouvemens des cordes étant connue, l'on pourra par une ſimple application en déduire celle des mouvemens de l'air qui produiſent le ſon. Ces deux problêmes ſont donc liés entr'eux, non ſeulement par leur nature même, mais encore par les Principes, d'où dépandent leurs ſolutions. Comme la matiére des vibrations des cordes a déja été traité par des grands Géométres, il ſera a propos de rappeller ici en peu de mots les principales méthodes qu'ils ont imaginé pour cela. J'entrerai dans ce détail d'autant plus volontier, que ces Auteurs ſont peu d'accord ſur les Principes, & dans les réſultats,

ce

ce qui pourroit faire douter de la généralité, & de la rigueur de leurs solutions.

10. Le premier qui ait tenté de soumettre au calcul le mouvement des cordes vibrantes est le célébre Mr. Tailor dans son excellent ouvrage *de Methodo Incrementorum*.

Il suppose d'abord, & il prétend même le démontrer que la chorde doit toujours prendre des figures telles, que tous ses points arrivent en même tems à la situation rectiligne; d'où il déduit que ces figures ne peuvent être que celles d'une espèce de cicloides allongées, qu'il nomme *compagnes de la cicloide*. Voici son procédé.

Nommant $x$ une abscisse quelconque (Fig. 5.) $AE$, & $y$ l'ordonnée $Ee$ qui dénote la distance du point $E$ de la corde à l'axe dans un tems quelconque $t$, on démontrera par le même raisonnement de l'art. 9., que la force accélératrice du point $e$ vers $E$ est exprimée par $-\frac{P}{M} \times \frac{d^2y}{dx}$. Soit $a$ la longueur de toute la corde, & $S$ son poid total on aura $M = \frac{S\,dx}{a}$; & par conséquent la force accélératrice en $e$ deviendra $= -\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2}$. Or afin que toute la corde puisse reprendre sa situation rectiligne, l'Auteur suppose cette force proportionelle à la distance $Ee$, que le point $e$ doit parcourir; ainsi en faisant $K$ égale a une ligne quelconque il obtient l'équation $-\frac{aP}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{K}$; d'où en faisant $\frac{S}{aPK} = f$, il résulte par les méthodes connues $x\sqrt{f} = \text{Arc. sin.} \left(\frac{y}{Y}\right)$; & $y = Y \text{ sin:} (x\sqrt{f})$, équation de la courbe pour un tems quelconque $t$, où l'ordonnée $Y$ est la plus grande. Or comme le point $e$ en parcourant l'espace $eE$ est continuellement poussé par une force accélératrice proportio-

nelle

nelle à l'espace qui reste à parcourir, l'on aura $-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2h}{T^2} \times \frac{y}{K}$, d'où si l'on fait encore pour abréger $\frac{2h}{T^2K} = g$, l'on tirera de nouveau $t\sqrt{g} =$ Arc. sin. $(\frac{y}{Y^1})$, & $y = Y^1$ sin. $(t\sqrt{g})$. Equation qui donne pour un tems quelconque $t$ le rapport de l'éloignement $y$ du point $e$ de l'axe, à son plus grand éloignement $Y^1$, donc si l'on met au lieu de $Y^1$ la valeur de $y$ qui convient à la courbe la plus grande $AeB$, & que avons trouvé plus haut $Y$ sin. $(x\sqrt{f})$, il en résultera l'expression générale des $y$ pour tous les tems $t$, & pour chaque coupée $x$, savoir $y = Y$. sin. $(x\sqrt{f}) \times$ sin. $(t\sqrt{g})$; & telle est l'équation de la corde vibrante dans l'hypotèse de Mr. Tailor, en supposant qu'elle soit en ligne droite au commencement de son mouvement.

Si la corde eut d'abord eu la figure d'une trochoide allongée, allors, puisque $t$ croissant, $y$ diminueroit, on auroit trouvé $y = Y$. sin. $(x\sqrt{f}) \times$ cos. $(t\sqrt{g})$, ou $y = Y$ sin. $(x\sqrt{f})$ exprimeroit la figure de la corde au commencement.

Pour déterminer la constante $K$ qui entre dans les quantités $f$ & $g$, on remarquera que $y$ doit être $= 0$, soit qu'$x$ soit $= 0$, soit qu'$x$ soit $= a$, quelle que soit la valeur de $t$. Or en posant $x = 0$, on a d'abord $y = 0$, parceque sin. $0 = 0$. Qu'on fasse donc $x = a$, & sin. $(a\sqrt{f}) = 0$; si $1 : \pi$ est la raison du rayon du cercle à la circonférence, l'on sait que sin. $\frac{s\pi}{2} = 0$, prenant pour $s$ un nombre quelconque entier, c'est pourquoi l'on aura $a\sqrt{f} = \frac{s\pi}{2}$, & $\sqrt{f} = \frac{s\pi}{2a}$; or $\sqrt{f} = \sqrt{\frac{S}{aPK}}$, ce qui

donne

donne $\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{s\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{Sa}}$; & par conſéquent $\sqrt{g} = \frac{1}{T}$ $\sqrt{\frac{2h}{K}} = \frac{s\pi}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}$.

12. Cette ſolution que nous venons d'expliquer, outre qu'elle porte ſur l'hypothèſe entiérement gratuite, que tous les points de la corde s'étendent en même tems en ligne droite, eſt encore bien éloignée d'être générale, même dans cette hypothèſe, puiſqu'il faudroit encore démontrer que c'eſt dans le ſeul cas des forces accélératrices proportionelles aux diſtances des points de la corde à l'axe, que tous ſes points peuvent toucher l'axe dans le même inſtant. C'eſt pour ſuppléer à ce défaut, que le célébre Mr. D'Alembert a imaginé une autre méthode de réſoudre le problême *de chordis vibrantibus* pris dans le ſens le plus général qu'il ſoit poſſible. Cette méthode qui eſt ſûrement une des plus ingénieuſes, qu'on ait tiré juſqu'ici de l'Analiſe, ſe trouve détaillée dans deux Mémoires que l'Auteur a donné dans le Tôme de l'Académie Royale de Pruſſe, dont nous avons fait mention ci-devant. Je ne rapporterai ici que les Principes, ſur leſquels elle eſt appuyée, & les conſéquences qui en réſultent pour la théorie en queſtion.

L'on a vu (art. 11.) que la force accélératrice du point $E$ en $e$ eſt exprimée généralement par $-\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2}$, quelle que ſoit la courbe de la corde tendue $AeB$; donc puiſque cette force tend à faire parcourir au point $E$ l'eſpace $eE = y$, elle devra être égale à $-\frac{T^2}{2h} \times \frac{d^2y}{dt^2}$, l'on aura donc pour l'équation générale de la courbe dans un tems quelconque $t$, $\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T^2}{2h} \times \frac{d^2y}{dt^2}$. Il faut d'abord remarquer dans cette équation que la differentielle $d^2y$ du premier membre doit être prise en regardant l'$x$ seule comme variable, au lieu que dans la différentielle $d^2y$ du second membre c'est le seul tems $t$ qui doit varier. Les Géométres ont coutume de mettre de telles expressions entre deux parenthèses de la maniére suivante $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ afin que l'on puisse juger par la simple inspection, laquelle des variables $x$, ou $t$ doit être changeante dans la différentiation de $y$. Soit pour abréger $\frac{2Pah}{ST^2} = c$, & on aura à intégrer l'équation $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$. Or Mr. D'Alembert trouve par une Analise neuve & ingénieuse, que l'équation finie qui répond à celle-ci est $y = \Psi.(t\sqrt{c} + x) + \Gamma.(t\sqrt{c} - x)$, $\Psi$ & $\Gamma$ exprimant des fonctions quelconques des quantités $t\sqrt{c} + x$, & $t\sqrt{c} - x$. Voila donc quelle sera l'équation générale de la courbe, que peut former une corde tendue. A l'égard de la nature des fonctions exprimées par $\Psi$ & par $\Gamma$, elles sont en elles mêmes indéterminées; mais puisque les deux bouts de la corde sont supposés fixes, il est évident qu'elles doivent satisfaire à ces deux conditions, savoir que $y$ soit $= 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$ quel que soit le tems $t$; l'on aura par là les deux équations $\Psi(t\sqrt{c}) + \Gamma(t\sqrt{c}) = 0$, & $\Psi(t\sqrt{c} + a) + \Gamma(t\sqrt{c} - a) = 0$; il résulte de la premiére $\Gamma = -\Psi$, & ainsi la seconde se change en $\Psi(t\sqrt{c} + a) - \Psi(t\sqrt{c} - a) = 0$, laquelle doit être vérifiée par la nature même de la fonction $\Psi$. Supposant donc une fonction quelconque $\Psi$ qui soit telle, que $\Psi(t\sqrt{c} + a) = \Psi(t\sqrt{c} - a)$, quelle que soit la valeur de $t$, on aura généralement pour la corde tendue l'équation $y = \Psi(t\sqrt{c} + x) - \Psi(t\sqrt{c} - x)$. L'on sait, que toute fonction peut être représentée par l'ordonnée d'une d'une courbe, dont l'abſciſſe ſoit la variable contenue dans la fonction propoſée ; donc ſi l'on décrit une courbe quelconque qui ait des ordonnées égales à toutes les abſciſſes exprimées par $t\sqrt{c} + a$, & $t\sqrt{c} - a$, cette courbe donnera une conſtruction fort ſimple de l'équation propoſée, car on n'aura qu'à prendre les ordonnées qui répondent aux abſciſſes $t\sqrt{c} + x$, & $t\sqrt{c} - x$, dont la diffèrence donnera l'ordonnée de la courbe, que forme la corde ſonore dans un tems quelconque $t$. Or puiſque la fonction $\Psi$ doit reſter la même, ſoit qu'on ajoute, ou qu'on retranche de la changeante $t\sqrt{c}$ la quantité $a$, ſi l'on ſuppoſe dans l'équation générale $y = \Psi\,(t\sqrt{c} + x) - \Psi\,(t\sqrt{c} - x)$, que le tems $t$ ſoit augmenté de la quantité $\frac{a}{\sqrt{c}}$ la valeur de $y$ n'en ſera en rien dérangée, & ainſi la corde au bout d'un tems $= \frac{a}{\sqrt{c}} = T\sqrt{\frac{Sa}{2Ph}}$ reprendra toujours la figure qu'elle avoit au commencement de ce tems; c'eſt pourquoi ſi la corde dans ſes mouvemens ſe trouve une fois étendue en ligne droite, elle reviendra en cette ſituation après chaque tems $t$, qui contiendra un certain nombre de fois exactement le tems $T\sqrt{\frac{Sa}{2Ph}}$; l'on a donc une infinité d'autres courbes différentes de la *compagne de la trochoide allongée*, donnée par Mr. Tailor, qui toutes ſont douées de cette proprieté, que tous leurs points ſe retrouvent en même tems dans l'axe. Mr. D'Alembert a fait enſuite beaucoup de recherches ingénieuſes ſur la nature de ces courbes, qu'il nomme génératrices, & ſur la maniére, dont elles peuvent être engendrées, mais comme ces diſcuſſions n'ont pas un rapport immédiat au ſujet que nous avons en vuë, nous nous contenterons de renvoyer le Lecteur aux Mémoires cités.



13. Mr.

13. Mr. Euler a traité depuis dans le Tôme ſuivant le même problême par une méthode analogue à celle dont nous venons de parler. Il parvient à cette équation $y = \varphi\,(x + t\sqrt{c}) + \varphi\,(x - t\sqrt{c})$, dans laquelle la fonction $\varphi$ doit être telle, que $\varphi\,(t\sqrt{c}) + \varphi\,(-t\sqrt{c}) = 0$, & $\varphi\,(a + t\sqrt{c}) + \varphi\,(a - t\sqrt{c}) = 0$, quelle que ſoit la valeur de $t$, ce qui ne différe pas eſſentiellement de ce qu'on a trouvé ci-devant. Mr. Euler conclut de-là, que toute courbe *anguiforme* $CcAaBbD$ (Fig. 6.) continuée de part & d'autre à l'infini par des parties ſemblables $CcA$, $AaB$, $BbD$ *&c.*, ſituées alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe, ſera propre à repréſenter la fonction $\varphi$, ſoit que cette courbe ſoit réguliére, ou qu'elle ſoit irréguliére. D'où il s'enſuit que, puiſque au commencement du mouvement l'équation de la courbe eſt $y = 2\,\varphi\,(x)$, il ſuffira de conſidérer la courbe initiale de la corde $AaB$, quelle qu'elle ſoit, & ſi on réitére ſa deſcription au deſſous, & au deſſus de l'axe de part & d'autre à l'infini, la moitié de la ſomme des ordonnés qui répondent aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$, $x - t\sqrt{c}$ dans la courbe compoſée $CcAaBb$, ſera l'ordonnée à l'abſciſſe $x$ dans la courbe de la corde tendue après un tems quelconque $t$.

14. Cette conſtruction de Mr. Euler eſt évidemment beaucoup plus générale que celle, que Mr. D'Alembert a imaginé, celui-ci ayant toujours ſuppoſé que la courbe génératrice fut réguliére, & qu'elle puiſſe être renfermée dans une équation continuë. C'eſt dans cette idée que ce grand Géométre a cru qu'une telle conſtruction devenoit inſuffiſante toutes les fois que dans la courbe génératrice, on n'auroit pas ſuivi la loi de continuité, & il s'eſt contenté d'en avertir le Public dans une Addition à ſes Mémoires imprimée dans le Tôme de l'année 1750.

Mr. Euler a tâché de répondre à cette objection dans le Tôme pour l'année 1753.; il reprend ici toute l'Analiſe

liſe du problême, & il ſoutient conſtamment contre Mr. D'Alembert que pour l'exactitude de la conſtruction donnée, il n'eſt nullement néceſſaire d'avoir égard à la loi de continuité dans la fonction $\varphi$, qui dépend de la courbe initiale de la corde. Mais comme Mr. D'Alembert n'a apporté aucune raiſon particuliére pour appuyer ſon objection, Mr. Euler n'en a auſſi apporté aucune, d'où il ſuit que la queſtion reſte encore indéciſe. Mr. D'Alembert promet dans ſa nouvelle Edition de l'excellent Traité de Dinamique de l'Année paſſée un Ecrit aſſés étendu ſur cette matiére; mais je ne ſai pas s'il ait encore vu le jour; en attendant, qu'il me ſoit permis de faire ſur cette diſpute la refléxion ſuivante.

15. Il eſt certain que les Principes du calcul différentiel & intégral dépendent de la conſidération des fonctions variables algébriques; il ne paroit donc pas qu'on puiſſe donner plus d'étendue aux concluſions tirées de ces Principes que n'en comporte la nature même de ces fonctions. Or perſonne ne ſauroit douter que dans les fonctions algébriques toutes leurs différentes valeurs ne ſoient liées enſemble par la loi de continuité; c'eſt pourquoi il ſemble indubitable, que les conſéquences qui ſe déduiſent par les régles du calcul différentiel & intégral, ſeront toujours illégitimes dans tous les cas, ou cette loi n'eſt pas ſuppoſée avoir lieu. Il s'enſuit de-là, que, puiſque la conſtruction de Mr. Euler eſt déduite immédiatement de l'intégration de l'équation differentielle donnée, cette conſtruction n'eſt applicable par ſa propre nature qu'aux courbes continuës, & qui peuvent être exprimées par une fonction quelconque des variables $t$ & $x$. Je conclus donc que toutes les preuves qu'on peut apporter pour décider une telle queſtion, en ſuppoſant d'abord que l'ordonnée $y$ de la courbe, ſoit une fonction de $t$ & $u$, comme l'ont fait juſqu'ici Mr. D'Alembert, & Mr. Euler,

ſont

ſont abſolument inſuffiſantes ; & que ce n'eſt, que par un calcul tel que celui, que nous avons en vuë, dans lequel on conſidére les mouvemens des points de la corde chacun en particulier, qu'on peut eſpérer de parvenir à une concluſion qui ſoit à l' abris de toute atteinte.

16. Pendant le cours d' une telle diſpute entre deux des plus grands Géométres de notre ſiécle, il s' eſt élevé un troiſiéme Adverſaire contre tous les deux ; c'eſt le célébre Mr. Daniel Bernoulli ſi avantageuſement connu par ſes excellens Ouvrages. Celui-ci dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l' Académie Royale de Berlin de l'anne 1753. prétend avoir démontré que la ſolution de Mr. Tailor *de chordis vibrantibus* eſt ſeule capable de ſatisfaire à tous les cas poſſibles d' un tel problême, & il établit cette propoſition générale, que, quel que puiſſe être le mouvement d'une corde tendue, elle ne formera toujours que des trochoides allongées, ou bien que ſa figure ſera un mélange de deux, ou pluſieurs courbes de cette eſpèce. Or nous avons trouvé plus haut (art. 11.), que dans l' hypothèſe de Mr. Tailor l' équation de la corde vibrante eſt généralement $y = Y$ ſin. $\left(\frac{s\pi x}{2a}\right) \times$ coſ. $\left(\frac{s\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}\right)$; donc poſant différentes conſtantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ *&c* pour $Y$, & mettant au lieu d'$s$ les nombres 1, 2, 3 *&c.* il réſulte pour l' équation générale de la corde ſelon Mr. Bernoulli.

$$\begin{aligned} y = {} & \alpha \text{ ſin.} \left(\frac{\pi x}{2a}\right) \times \text{coſ.} \left(\frac{\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}\right) \\ & + \beta \text{ ſin.} \left(\frac{2\pi x}{2a}\right) \times \text{coſ.} \left(\frac{2\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}\right) \\ & + \gamma \text{ ſin.} \left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \times \text{coſ.} \left(\frac{3\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}\right) \\ & + \delta \text{ ſin.} \left(\frac{4\pi x}{2a}\right) \times \text{coſ.} \left(\frac{4\pi t}{2T}\sqrt{\frac{2hP}{Sa}}\right) \\ & + \&c. \end{aligned}$$

L'Au-

L'Auteur déduit cette ingénieuſe théorie par une eſpéce d'induction qu'il tire de la conſidération des mouvemens d'un nombre de corps qui ſont ſuppoſés former des vibrations réguliéres & iſochrones; il démontre que s'il n'y a qu'un ſeul corps, il doit ſuivre les loix connues de l'iſochroniſme, que s'il y en a deux, leurs vibrations peuvent être cenſées compoſées de deux vibrations iſochrones de la premiére eſpéce, & ainſi de ſuite; d'où il conclut que l'équation générale apportée ci-deſſus ſera propre à exprimer toutes ces eſpéces de mouvemens, en prenant autant des termes qu'il y a de corps; & que dans le cas de la corde tendue le nombre des termes doit être infini; il appuye de plus ſon ſentiment ſur l'expérience qui nous enſeigne, que d'une même corde il réſulte pluſieurs ſons armonieux, qui répondent pour ainſi dire à chaque terme de ſon équation. Enfin il étend cette théorie à tous les mouvemens réciproques infiniment petits, qui ont lieu dans la nature, & il croit pouvoir en déduire beaucoup de conſéquences importantes. Toutes ces choſes ſont expoſées en détail par l'Auteur dans la piéce citée, à laquelle nous renvoyons les Lecteurs; il me ſuffira d'en avoir donné en général une idée aſſes nette.

Le deſſein de Mr. Bernoulli étoit donc de faire voir que les calculs des Mrs. D'Alembert, & Euler ne nous apprenoient rien de plus, que ce qu'on pouvoit déduire de ceux de Mr. Tailor, & même que ces calculs, quoique extrémement ſimples pouvoient répandre ſur la nature des vibrations des cordes une lumiére qu'on attendroit en vain de l'Analiſe abſtraite & épineuſe de ces deux Géométres.

17. L'un d'eux, ſavoir Mr. Euler s'eſt hâté de répondre à ces objections dans la même Diſſertation citée, qui eſt imprimée à la ſuite de celles de Mr. Bernoulli. Il objecte à ſon tour à celui-ci, que ſon équation pour la

courbe

courbe ſonore, quoique continuée à l'infini, ne peut cependant exprimer tous les mouvemens poſſibles d'une corde tendue; car ſi l'on poſe $t = o$ l'équation de la courbe devient $y = \alpha$ ſin. $\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \beta$ ſin. $\left(\frac{2\pi x}{2a}\right) + \gamma$ ſin. $\left(\frac{3\pi x}{2a}\right)$ + &c. Par conſéquent il faudroit que cette équation renfermat toutes les figures qu'on peut donner à une corde tendue, ſavoir toutes les courbes poſſibles, ce qui ne paroit pas être à cauſe de certaines propriétés, qui ſemblent diſtinguer les courbes compriſes dans cette équation de toutes les autres courbes qu'on pourroit imaginer; ces propriétés ſont les mêmes que Mr. D'Alembert requiert dans ſes courbes génératrices, ſavoir qu'en augmentant, ou diminuant l'abſciſſe d'un multiple quelconque de l'axe, la valeur de l'ordonnée $y$ ne change point. En effet l'on peut, ce me ſemble, démontrer que toutes les courbes douées de ces propriétés pourront ſe réduire à l'équation ci-deſſus. D'où il s'enſuit, que quoique Mr. D'Alembert ait trouvé l'Analiſe Tailorienne inſuffiſante pour en tirer une réſolution générale, néanmoins il paroit convenir avec Mr. Bernoulli dans le fond de la choſe, ſavoir que le problême ne ſoit réſouluble dans d'autres cas, que dans ceux de la trochoide, ou du mélange de pluſieurs trochoides.

18. On voit de-là, que les objections de Mrs. Bernoulli, & D'Alembert contre Mr. Euler, quoiqu'elles différent beaucoup les unes des autres, tiennent néanmoins aux mêmes Principes. Au reſte ni Mr. Bernoulli, ni Mr. Euler n'ont fait voir directement, ſi toutes les courbes que peut former une corde tendue ſont compriſes ou non dans l'équation rapportée; car, puiſque dans cette équation chaque terme répond, pour ainſi dire, aux mouvemens de chaque point de la corde, il eut fallu pour cela

donner

donner d'abord une ſolution générale du problême de la corde vibrante dans l'hypothéſe qu'elle fut chargée d'un nombre indéfini de corps; ſolution que Mr. Bernoulli même avoue n'avoir jamais vu, & qu'il croit de plus que perſonne n'ait jamais donnée.

Il réſulte de tout cet expoſé que l'Analiſe que nous avons propoſée dans le chapitre précédent eſt, peut être, la ſeule qui puiſſe jetter ſur ces matiéres obſcures une lumiére ſuffiſante à éclaircir les doutes qu'on doit former de part, & d'autre. Je vais donc entreprendre cette Analiſe, & je tâcherai de la développer dans toute ſon étendue, non ſeulement parcequ'elle doit ſatisfaire à tous les objets que nous avons ici en vue; mais encore parce qu'elle eſt, ce me ſemble, entiérement neuve, puiſque il s'agit de déterminer les mouvemens de tant de corps qu'on en voudra ſuppoſer ſans concevoir d'abord qu'il y ait entr'eux aucune loi de continuité, par laquelle ils ſoient liés, pour ainſi dire, & contenus dans une même formule.

# CHAPITRE III.

## *Solution du Problême général proposé dans les chapitres précédens.*

19. Soit pour abréger $\frac{2Eh}{MT^2r} = e$, on aura par l'article 8. les équations suivantes,

$$\frac{d^2y^{I}}{dt^2} = e\,(y^{II} - 2y^{I})$$
$$\frac{d^2y^{II}}{dt^2} = e\,(y^{III} - 2y^{II} + y^{I})$$
$$\frac{d^2y^{III}}{dt^2} = e\,(y^{IV} - 2y^{III} + y^{II})$$
$$\frac{d^2y^{IV}}{dt^2} = e\,(y^{V} - 2y^{IV} + y^{III})$$

&c.

$$\frac{d^2y^{m-1}}{dt^2} = e\,(-2y^{m-1} + y^{m-2}).$$

Pour intégrer toutes ces équations, on n'a qu'à recourir à la méthode, que Mr. D'Alembert nous a donné dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin. On supposera d'abord selon cette méthode $dy^{I} = u^{I}dt$, $dy^{II} = u^{II}dt$, $dy^{III} = u^{III}dt$, $dy^{IV} = u^{IV}dt$ &c. $dy^{m-1} = u^{m-1}dt$; ce qui changera les équations différentielles du second ordre dans les suivantes du premier

$$du^{I} = e\,(y^{II} - 2y^{I})\,dt$$
$$du^{II} = e\,(y^{III} - 2y^{II} + y^{I})\,dt$$
$$du^{III} = e\,(y^{IV} - 2y^{III} + y^{II})\,dt$$
$$du^{IV} = e\,(y^{V} - 2y^{IV} + y^{III})\,dt$$

&c.

$$du^{m-1} = e\,(-2y^{m-1} + y^{m-2})\,dt.$$

Il

Il eſt à remarquer que les quantités $u^{\text{I}}$, $u^{\text{II}}$, $u^{\text{III}}$ &c. expriment les viteſſes des corps qui parcourent les eſpaces $y^{\text{I}}$, $y^{\text{II}}$, $y^{\text{III}}$ &c. & qu'ainſi il eſt encore important de déterminer leurs valeurs.

Préſentement il faut multiplier toutes ces équations, moins une à volonté, par des coéficiens indéterminés, & les ajouter enſuite dans une même ſomme. Soient $M^{\text{I}}$, $M^{\text{II}}$, $M^{\text{III}}$ &c. les coéficiens qui doivent multiplier les derniéres équations, & $N^{\text{I}}$, $N^{\text{II}}$, $N^{\text{III}}$ &c. ceux qui multiplient les autres, & on aura $M^{\text{I}}\,du^{\text{I}} + N^{\text{I}}\,dy^{\text{I}} + M^{\text{II}}\,du^{\text{II}} + N^{\text{II}}\,dy^{\text{II}} + M^{\text{III}}\,du^{\text{III}} + N^{\text{III}}\,dy^{\text{III}} + \&c. + M^{m-1}\,du^{m-1} + N^{m-1}\,dy^{m-1} = (N^{\text{I}}u^{\text{I}} + e\,[M^{\text{II}} - 2\,M^{\text{I}}]\,y^{\text{I}})\,dt + (N^{\text{II}}u^{\text{II}} + e\,[M^{\text{III}} - 2\,M^{\text{II}} + M^{\text{I}}]\,y^{\text{II}})\,dt + (N^{\text{III}}u^{\text{III}} + e\,[M^{\text{IV}} - 2\,M^{\text{III}} + M^{\text{II}}]\,y^{\text{III}})\,dt + \&c. + (N^{m-1}u^{m-1} + e\,[-2\,M^{m-1} + M^{m-2}]\,y^{m-1})\,dt$, où l'on ſuppoſera pour plus de facilité le premier coéficient $M^{\text{I}} = 1$.

Soit fait enſorte que le premier membre de cette équation devienne un multiple exact de la différentielle du ſecond; & ſuppoſant $R$ un coéficient conſtant quelconque on trouvera par la comparaiſon des termes $R\,M^{\text{I}} = N^{\text{I}}$; $R\,M^{\text{II}} = N^{\text{II}}$; $R\,M^{\text{III}} = N^{\text{III}}$ &c. $R\,M^{m-1} = N^{m-1}$; enſuite $R\,N^{\text{I}} = e\,(M^{\text{II}} - 2\,M^{\text{I}})$; $R\,N^{\text{II}} = e\,(M^{\text{III}} - 2\,M^{\text{II}} + M^{\text{I}})$; $R\,N^{\text{III}} = e\,(M^{\text{IV}} - 2\,M^{\text{III}} + M^{\text{II}})$ &c. $R\,N^{m-1} = e\,(-2\,M^{m-1} + M^{m-2})$; en ſubſtituant dans ces derniéres équations les valeurs des $N$ tirées des premiéres, il en réſultera

$$\begin{aligned}
R^2 M^{\text{I}} &= e\,(M^{\text{II}} - 2\,M^{\text{I}})\\
R^2 M^{\text{II}} &= e\,(M^{\text{III}} - 2\,M^{\text{II}} + M^{\text{I}})\\
R^2 M^{\text{III}} &= e\,(M^{\text{IV}} - 2\,M^{\text{III}} + M^{\text{II}})\\
&\&c.\\
R^2 M^{m-1} &= e\,(-2\,M^{m-1} + M^{m-2}).
\end{aligned}$$

Soit poſé $\frac{R^2}{e} + 2 = K$, & en ordonnant les termes on parviendra aux équations $\qquad d\,2 \qquad M^{\text{II}}$

$$M^{\text{II}} = K M^{\text{I}}$$
$$M^{\text{III}} = K M^{\text{II}} - M^{\text{I}}$$
$$M^{\text{IV}} = K M^{\text{III}} - M^{\text{II}}$$
&c.

d'où l'on doit tiret les valeurs d'$M$.

Pour y parvenir, je considère que ces équations étant toutes semblables, on peut les exprimer généralement par $M^{\mu} = K M^{\mu-1} - M^{\mu-2}$, posant pour $\mu$ tous les nombres entiers positifs depuis $0$ jusqu'à $m-1$, laquelle équation contient évidemment une suite récurrente, dont l'échelle de rélation est $K - 1$. On aura donc pour la valeur de $M^{\mu}$ l'expression $A a^{\mu} + B b^{\mu}$, où $A$, & $B$ sont des constantes, & $a$ & $b$ expriment les racines de l'équation du second dégré $z^2 - Kz + 1 = 0$. De cette équation l'on tire $z = \frac{K}{2} \pm \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$, ce qui donne $a = \frac{K}{2} + \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$, $b = \frac{K}{2} - \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$. Pour déterminer les constantes $A$ & $B$, on fera la comparaison des deux premiers termes, savoir $M^0$, & $M^1$; or $M^0$ est évidemment égal à zero, puisque l'équation qu'il devroit multiplier ne se trouve pas; & $M^1 = 1$ par supposition; l'on aura donc $A + B = 0$; & $A a + B b = 1$, d'où l'on déduit $B = -A$; $A(a-b) = 1$; $A = \frac{1}{a-b}$; & $B = -\frac{1}{a-b}$; ces valeurs étant substituées, il en résultera $M^{\mu} = \frac{a^{\mu} - b^{\mu}}{a-b}$.

Nous avons supposé que le nombre des équations fut $= m - 1$ (art. 8.); il faut donc que le coéficient qui auroit multiplié l'équation suivante, soit de soi même égal à zero; savoir, il faut que $M^m = 0$, ou bien

que

que $\frac{a^m - b^m}{a - b} = 0$. Voila l'équation qui nous donnera la valeur de la quantité $R$ qui étoit encore inconnuë.

20. Pour résoudre cette équation j'ai recours au fameux théorème de Mr. Cotes, par lequel on trouve $a^m - b^m = (a - b) \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{\pi}{m} + b^2) \times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{2\pi}{m} + b^2) \times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{3\pi}{m} + b^2) \times$ &c., en prenant un nombre de facteurs égal à $m$, de sorte que le dernier devienne $\surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2)$, où $\pi$ dénote la circonférence du cercle, dont le rayon est 1. L'on a donc dans notre cas $\surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{\pi}{m} + b^2) \times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{2\pi}{m} + b^2) \times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{3\pi}{m}) \times$ &c. $\times \surd (a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2) = 0$, ce qui donne autant d'équations particuliéres, qu'il y a de facteurs, savoir en dégageant ces expressions des radicaux,

$$a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{\pi}{m} + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{2\pi}{m} + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{3\pi}{m} + b^2 = 0$$

&c.

$$a^2 - 2ab \text{ cos.} \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2 = 0.$$

Soit $v$ un nombre quelconque entier depuis 0 jusqu'à $m - 1$, & toutes ces équations se réduiront à celle-ci

$a^2 -$

$a^2 - 2ab$ cof. $\frac{\nu\pi}{m} + b^2 = 0$; fi l'on fubftitue les valeurs trouvées de $a$ & $b$ (art. 19.), elle fe change en $K^2 - 2 - 2$ cof. $\frac{\nu\pi}{m} = 0$, d'où l'on tire $K^2 = 2$ $(1 +$ cof. $\frac{\nu\pi}{m})$, ce qui fe réduit par les théorèmes de la multiplication des angles à $K^2 = 4$ cof. $(\frac{\nu\pi}{2m})^2$, d'où l'on a enfin $K = \pm 2$ cof. $\frac{\nu\pi}{2m}$.

21. Je remarque d'abord, que la variété des fignes dans cette expreffion de $K$ eft inutile, parceque en faifant $\nu$ plus grand de $\frac{m}{2}$ la formule nous redonne les mêmes valeurs, que quand $\nu$ étoit plus petit, mais avec des fignes contraires; l'on aura donc fimplement $K = 2$ cof. $\frac{\nu\pi}{2m}$, pofant pour $\nu$ tous les nombres entiers pofitifs, depuis $0$ jufqu'à $m - 1$. Par cette valeur générale de $K$, on trouvera celle de $R$ par le moyen de l'équation $\frac{R^2}{e} + 2 = K$ (art. 18.); car on aura $R^2 = 2e$ ( cof. $\frac{\nu\pi}{2m} - 1$ ) $= - 4e$ (fin. $\frac{\nu\pi}{4m})^2$ par les théorèmes cités, d'où il réfulte $R = \pm 2\sqrt{e} \times$ fin. $\frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$. On déduira encore de la valeur de $K$, celles des quantités $a$ & $b$, comme il fuit, $a =$ cof. $\frac{\nu\pi}{2m} + \sqrt{([\text{cof. } \frac{\nu\pi}{2m}]^2 - 1)}$, $b =$ cof. $\frac{\nu\pi}{2m} - \sqrt{([\text{cof. } \frac{\nu\pi}{2m}]^2 - 1)}$, favoir

$a =$

$a = \text{cof.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + \text{fin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, $b = \text{cof.}\,\frac{\nu\pi}{2m} - \text{fin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, d' où l' on tire en fubftituant

$$M^{\mu} = \left(\text{cof.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + \text{fin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}\right)^{\mu} : 2\,\text{fin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$$
$$- \left(\text{cof.}\,\frac{\nu\pi}{2m} - \text{fin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}\right)^{\mu} : 2\,\text{fin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$$

laquelle expreffion fe réduit encore, par les mêmes théorèmes ci-deffus, à $M^{\mu} = \text{fin.}\,\frac{\mu \times \nu\pi}{2m} : \text{fin.}\,\frac{\nu\pi}{2m}$.

22. Toutes ces opérations achevées, retournons à préfent fur nos pas pour procéder à l' intégration de l' équation differentielle (art. 19.). Soit pour abréger $M^{I} u^{I} + M^{II} u^{II} + M^{III} u^{III} + \&c.; + M^{m-1} u^{m-1} + R\,(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1}) = z$, elle deviendra par ce moyen $dz = Rz\,dt$, dont l' intégrale fe trouve $z = F c^{Rt}$, où $c$ eft le nombre, dont le logarithme hyperbolique eft 1, & $F$ dénote une conftante quelconque égale à valeur de $z$, qui répond au cas de $t = 0$; l'on aura, donc en reftituant au lieu de $z$ fa valeur premiére, $M^{I} u^{I} + M^{II} u^{II} + M^{III} u^{III} + \&c. + M^{m-1} u^{m-1}; + R\,(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1}) = F c^{Rt}$, & puifque $u^{I}\,dt = dy^{I}$; $u^{II}\,dt = dy^{II}$; $u^{III}\,dt = dy^{III}$; &c. fi l' on multiplie toute l'équation par $dt$, il en réfultera $M^{I}\,dy^{I} + M^{II}\,dy^{II} + M^{III}\,dy^{III} + \&c. + M^{m-1}\,dy^{m-1} + R\,(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1})\,dt = F c^{Rt}\,dt$, & multipliant encore par $c^{Rt}$, & intégrant de nouveau $(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1})\,c^{Rt} = \frac{F c^{2Rt}}{2R} + G$.

Pour déterminer les conftantes $F$ & $G$ foient $V^{I}, V^{II}, V^{III}$ &c., $V^{m-1}$, & $Y^{I}$, $Y^{II}$, $Y^{III}$ &c., $Y^{m-1}$, les valeurs de $u^{I}$,

$u^{II}$,

$u^{II}$, $u^{III}$ &c., $u^{m-I}$, & de $y^{I}$, $y^{II}$, $y^{III}$ &c., $y^{m-I}$ au commencement du mouvement, lorſque $t = 0$; ſuppoſons de plus pour abréger

$$M^{I} Y^{I} + M^{II} Y^{II} + M^{III} Y^{III} + \&c. + M^{m-I} Y^{m-I} = P.$$

$$M^{I} V^{I} + M^{II} V^{II} + M^{III} V^{III} + \&c. + M^{m-I} V^{m-I} = Q,$$

l'on aura d'abord $F = Q + RP$, enſuite poſant $t = 0$ dans la derniére équation, $P = \frac{F}{2R} + G$, d'où l'on tire

$$G = \frac{2PR - F}{2R} = \frac{2PR - Q - PR}{2R} = \frac{PR - Q}{2R};$$

donc en diviſant l'équation par $c^{Rt}$ on trouvera finalement

$$M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-I} y^{m-I} = \frac{RP + Q}{2R} \times c^{Rt} + \frac{RP - Q}{2R} \times c^{-Rt} = P \times \frac{c^{Rt} + c^{-Rt}}{2}$$

$$+ \frac{Q}{R} \times \frac{c^{Rt} - c^{-Rt}}{2},$$

ce qui à cauſe de $R = \pm 2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\, \frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$ ſe reduit à

$$M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-I} y^{m-I} = P \times \text{coſ.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\, \frac{\nu\pi}{4m}\right) + \frac{Q \times \text{ſin.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\, \frac{\nu\pi}{4m}\right)}{2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\, \frac{\nu\pi}{4m}},$$

ſoit qu'on prenne dans $R$ le ſigne $+$, ou le ſigne $-$, comme nous l'enſeignent les expreſſions exponentielles imaginaires des ſinus & coſinus, ſi familiéres aujourd'hui aux Géométres.

23. Cette équation toute ſimple qu'elle eſt ſuffit néanmoins pour déterminer les valeurs des inconnues $y^{I}$, $y^{II}$, $y^{III}$ &c. qui ſont au nombre de $m - 1$. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à reflèchir qu'elle contient le nombre indéterminé $\nu$, qui peut avoir les valeurs 1, 2, 3 &c. jusqu'à $m - 1$, d'où il réſultera autant d'équations. Tout ſe réduit donc à déterminer par le moyen de toutes ces équa-

équations, les valeurs de chaque inconnuë qu'elles contiennent, c'est ce que nous allons entreprendre.

Je commence par mettre au lieu des quantités $M$ leurs valeurs trouvées (art. 21.), & effaçant le dénominateur commun fin. $\frac{\nu\pi}{2m}$ qui s'évanouit naturellement de l'équation, je pose pour plus de commodité.

$$P^{\nu} = Y^{\mathrm{I}} \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} + Y^{\mathrm{II}} \text{fin.} \frac{2\nu\pi}{2m} + Y^{\mathrm{III}} \text{fin.} \frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + Y^{m-1} \text{fin.} \frac{(m-1)\nu\pi}{2m}.$$

$$Q^{\nu} = V^{\mathrm{I}} \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} + V^{\mathrm{II}} \text{fin.} \frac{2\nu\pi}{2m} + V^{\mathrm{III}} \text{fin.} \frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + V^{m-1} \text{fin.} \frac{(m-1)\nu\pi}{2m}.$$

Où les exposans de $P$, & $Q$ dénoteront simplement les valeurs particuliéres de $\nu$, qui leur appartiennent. Ainsi l'équation générale ci-dessus, deviendra

$$y^{\mathrm{I}} \text{fin.} \frac{\nu\pi}{2m} + y^{\mathrm{II}} \text{fin.} \frac{2\nu\pi}{2m} + y^{\mathrm{III}} \text{fin.} \frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + y^{m-1} \text{fin.} (m-1) \frac{\nu\pi}{2m} = P^{\nu} \times \text{cof.} (2t\sqrt{e} \times \text{fin.} \frac{\nu\pi}{4m})$$

$$+ \frac{Q^{\nu} \times \text{fin.} (2t\sqrt{e} \times \text{fin.} \frac{\nu\pi}{4m})}{2\sqrt{e} \times \text{fin.} \frac{\nu\pi}{4m}}$$

Soit encore pour abréger $P^{\nu} \times \text{cof.} (2t\sqrt{e} \times \text{fin.} \frac{\nu\pi}{4m})$

$$+ \frac{Q^{\nu} \times \text{fin.} (2t\sqrt{e} \times \text{fin.} \frac{\nu\pi}{4m})}{2\sqrt{e} \times \text{fin.} \frac{\nu\pi}{4m}} = S^{\nu}$$

& posant successivement à la place de $\nu$ tous les nombres naurels depuis o, jusqu'à $m - 1$, on aura les équations suivantes

e $y^{\mathrm{I}}$ fin.

$$y^{I} \sin.\frac{\pi}{2m} + y^{II} \sin.\frac{2\pi}{2m} + y^{III} \sin.\frac{3\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \sin.(m-1)\frac{\pi}{2m} = S^{I}$$

$$y^{I} \sin.\frac{2\pi}{2m} + y^{II} \sin.\frac{4\pi}{2m} + y^{III} \sin.\frac{6\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \sin.2(m-1)\frac{\pi}{2m} = S^{II}$$

$$y^{I} \sin.\frac{3\pi}{2m} + y^{II} \sin.\frac{6\pi}{2m} + y^{III} \sin.\frac{9\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \sin.3(m-1)\frac{\pi}{2m} = S^{III}$$

&c.

$$y^{I} \sin.(m-1)\frac{\pi}{2m} + y^{II} \sin.2(m-1)\frac{\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \sin.(m-1)^2\frac{\pi}{2m} = S^{m-1}$$

dont le nombre ſera $m - 1$.

Il faudroit à préſent, ſelon les règles ordinaires ſubſtituer les valeurs des inconnues $y^{I}$, $y^{II}$, $y^{III}$ &c. d'une équation dans les autres ſucceſſivement, pour arriver à une, qui ne contienne plus qu'une ſeule de ces variables; mais il eſt facile de voir, qu'en s'y prenant de cette façon on tomberoit dans des calculs impraticables à cauſe du nombre indéterminé d'équations & d'inconnues, il eſt donc néceſſaire de ſuivre une autre route; voici celle qui m'a paru la plus propre.

24. Je multiplie d'abord chacune de ces équations par un des coéficiens indéterminés $D^{I}$, $D^{II}$, $D^{III}$, $D^{IV}$ &c., en ſuppoſant que le premier $D^{I}$ ſoit $= 1$; enſuite je les ajoute toutes enſemble, j'ai

$$y^{I}\left(D^{I} \sin.\frac{\pi}{2m} + D^{II} \sin.\frac{2\pi}{2m} + D^{III} \sin.\frac{3\pi}{2m} + \&c\right.$$

$$\left. + D^{m-1} \sin.[m-1]\frac{\pi}{2m}\right)$$

$$+ y^{II}$$

$$+ y^{II} \left( D^{I} \text{ſin.} \frac{2\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{4\pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{6\pi}{2m} + \&c. \right.$$

$$\left. + D^{m-1} \text{ſin.}\ 2[m-1] \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$+ y^{III} \left( D^{I} \text{ſin.} \frac{3\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{6\pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{9\pi}{2m} + \&c \right.$$

$$\left. + D^{m-1} \text{ſin.}\ 3[m-1] \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$+ \&c.$$

$$+ y^{m-1} \left( D^{I} \text{ſin.} [m-1] \frac{\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.}\ 2[m-1] \frac{\pi}{2m} \right.$$

$$\left. + \&c. + D^{m-1} \text{ſin.} [m-1]^2 \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$= D^{I} S^{I} + D^{II} S^{II} + D^{III} S^{III} + \&c. + D^{m-1} S^{m-1}.$$

Qu'on veuille à préſent la valeur d'un $y$ quelconque, par exemple de $y^{\mu}$, l'on fera évanouir les coéficiens des autres $y$, & l'on obtiendra l'équation ſimple.

$$y^{\mu} \left( D^{I} \text{ſin.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{2\mu\pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{3\mu\pi}{2m} \right.$$

$$\left. + \&c. + D^{m-1} [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \right)$$

$$= D^{I} S^{I} + D^{II} S^{II} + D^{III} S^{III} + \&c. + D^{m-1} S^{m-1}.$$

L'on déterminera enſuite les valeurs des quantités $D^{II}$, $D^{III}$, $D^{IV}$ &c., qui ſont en nombre de $m-2$ par les équations particuliéres qu'on aura en ſuppoſant égaux à zero les coéficiens de tous les autres $y$; l'on aura par là l'équation générale.

$$D^{I} \text{ſin.} \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{II} \text{ſin.} \frac{2\lambda\pi}{2m} + D^{III} \text{ſin.} \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c.$$

$$+ D^{m-1} \text{ſin.} [m-1] \frac{\lambda\pi}{2m} = 0,$$ laquelle devra être vraie quelque nombre poſitif entier qu'on poſe au lieu de $\lambda$ depuis $0$, jusqu'à $m-1$, excepté $\mu$.



25. Pour

25. Pour tirer de cette équation les valeurs des quantités $D$, je remarque d'abord, que tout ſinus d'un angle multiple ſe reduit à une ſuite de puiſſances entiéres, & poſitives du coſinus de l'angle ſimple, dont le plus grand expoſant eſt égal au nombre qui en dénote le multiple diminué de l'unité, toute la ſuite étant encore multipliée par le ſinus de l'angle ſimple. Donc ſi l'on développe de cette façon tous les ſinus des angles multiples de $\frac{\lambda\pi}{2m}$ & qu'on diviſe enſuite l'équation par ſin. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, on parviendra à une autre équation, qui ne contiendra que des puiſſances de coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, & dont le dégré ſera $= m - 2$; de-là il ſuit qu'en regardant coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, comme l'inconnue de cette équation, ſes racines devront être coſ. $\frac{\pi}{2m}$, coſ. $\frac{2\pi}{2m}$, coſ. $\frac{3\pi}{2m}$ &c. juſqu'à coſ. $(m - 1)\frac{\pi}{2m}$, excepté coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$. Par conſéquent toute l'équation ne pourra être que le produit continuel des facteurs coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ − coſ. $\frac{\pi}{2m}$; coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ − coſ. $\frac{2\pi}{2m}$; coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ − coſ. $\frac{3\pi}{2m}$, &c. dont le dernier ſera coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ − coſ. $(m - 1)\frac{\pi}{2m}$, en omettant toute fois le facteur intermédiaire coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ − coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$; c'eſt pourquoi ſi l'on nomme $L$ une conſtante quelconque, l'on aura

$D^1$ ſin.

$$\frac{D^{I} \text{ fin. } \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{II} \text{ fin. } \frac{2\lambda\pi}{2m} + \&c. + D^{m-1} \text{ fin. } (m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}}{\text{fin. } \frac{\lambda\pi}{2m}}$$

$$= L \left(\text{cof. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{cof. } \frac{\pi}{2m}\right)\left(\text{cof. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{cof. } \frac{2\pi}{2m}\right)$$

$$\left(\text{cof. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{cof. } \frac{3\pi}{2m}\right) \ldots \left(\text{cof. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{cof. } [m-1]\frac{\pi}{2m}\right)$$

Le théorème déja cité de Mr. Cotes nous donne l'équation

$$p^{2m} - q^{2m} = (p^2 - q^2)\left(p^2 - 2pq \text{ cof. } \frac{\pi}{2m} + q^2\right)$$

$$\left(p^2 - 2pq \text{ cof. } \frac{2\pi}{2m} + q^2\right)\left(p^2 - 2pq \text{ cof. } \frac{3\pi}{2m} + q^2\right)$$

$\ldots\ldots \left(p^2 - 2pq \text{ cof. } [m-1]\frac{\pi}{2m} + q^2\right)$, en n'omettant aucun des facteurs intermédiaires; que l'on compare donc ces facteurs avec ceux de l'équation précédente, en faisant $p^2 + q^2 = \text{cof. } \frac{\lambda\pi}{2m}$, & $2pq = 1$, & l'on aura

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1 + \text{cof. } \frac{\lambda\pi}{2m} = 2\left(\text{cof. } \frac{\lambda\pi}{4m}\right)^2$$

$$p^2 - 2pq + q^2 = \text{cof. } \frac{\lambda\pi}{2m} - 1 = -2\left(\text{fin. } \frac{\lambda\pi}{4m}\right)^2,$$

d'où en extrayant les racines, il résulte $p+q = \pm\sqrt{2} \times \text{cof. } \frac{\lambda\pi}{2m}$, $p-q \pm \sqrt{2} \times \text{fin. } \frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, & enfin

$$p = \pm \frac{\text{cof. } \frac{\lambda\pi}{4m} + \text{fin. } \frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

$$q = \pm \frac{\text{cof. } \frac{\lambda\pi}{4m} - \text{fin. } \frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

Par

Par conſéquent l'on aura

$$p^2 = \frac{1}{2}\left(\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{4m} + \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-}\right)^2$$

$$= \frac{\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} + \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$$q^2 = \frac{1}{2}\left(\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{4m} - \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^2$$

$$= \frac{\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$p^2 - q^2 = \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$ ; de même

$$p^{2m} = \frac{1}{2^m}\left(\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{4m} + \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^{2m}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2} + \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^m}$$

$$q^{2m} = \frac{1}{2^m}\left(\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{4m} - \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^{2m}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2} - \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^m}$$

$$p^{2m} - q^{2m} = \frac{\text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^{m-1}}$$

Toutes ces valeurs étant ainſi trouvées, l'on diviſera $p^{2m} - q^{2m}$ par $(p^2 - q^2)(p^2 - 2pq\ \text{coſ.}\ \frac{\mu\pi}{2m} + q^2)$ ce qui donne $\dfrac{\text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2}}{2^{m-1}\ \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} \times \left(\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\ \frac{\mu\pi}{2m}\right)}$ laquelle expreſſion multipliée par $L$ devra être égale au premier membre

membre de l'équation trouvée dans cet article; dont en ôtant de part & d'autre le diviſeur commun ſin. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ on trouvera

$$D^{\mathrm{I}} \text{ ſin. } \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{\mathrm{II}} \text{ ſin. } \frac{2\lambda\pi}{2m} + D^{\mathrm{III}} \text{ ſin. } \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c.$$

$$+ D^{m-1} \text{ ſin. } (m-1)\frac{\lambda\pi}{2m} = \frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{\text{ſin. } \frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ. } \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ. } \frac{\mu\pi}{2m}}$$

équation qui doit être identique.

Si donc l'on multiplie toute l'équation par coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ $-$ coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$, & qu'après avoir réduit les produits des ſinus par les coſinus en ſimples ſinus, on faſſe la comparaiſon des termes, on trouvera les valeurs cherchées des quantités indéterminées $D$. Pour faire cette opération plus aiſément commençons par multiplier la ſuite qui forme le premier membre de l'équation rapportée par 2 coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$; en développant chaque produit particulier, & en ordonnant les termes, il viendra

$$D^{\mathrm{II}} \text{ ſin. } \frac{\lambda\pi}{2m} + (D^{\mathrm{III}} + D^{\mathrm{I}}) \text{ ſin. } \frac{2\lambda\pi}{2m} + (D^{\mathrm{IV}} + D^{\mathrm{II}})$$

$$\text{ſin. } \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. + D^{m-2} \text{ ſin. } (m-1)\frac{\lambda\pi}{2m} +$$

$$D^{m-1} \text{ ſin. } \frac{\lambda\pi}{2}.$$

Enſuite ſi l'on multiplie la même ſerie par 2 coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$, & qu'on retranche ce dernier produit de l'autre, on parviendra à l'équation

( $D^{\mathrm{II}}$

$$(D^{II} - 2D^{I} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m}) \text{ fin.} \frac{\lambda\pi}{2m} + (D^{III} - 2D^{II} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{I}) \text{ fin.} \frac{2\lambda\pi}{2m} + (D^{IV} - 2D^{III} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{II}) \text{ fin.} \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. + (-2D^{m-1} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{m-2}) \text{ fin.} [m-1] \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{m-1} \text{fin.} \frac{\lambda\pi}{2} = \frac{L}{2^{m-2}} \times \text{fin.} \frac{\lambda\pi}{2}.$$

L'on aura donc

$$D^{II} - 2D^{I} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} = 0$$

$$D^{III} - 2D^{II} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{I} = 0$$

$$D^{IV} - 2D^{III} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{II} = 0$$

&c.

$$-2D^{m-1} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + D^{m-2} = 0$$

$$D^{m-1} = \frac{L}{2^{m-2}}$$

d'où l'on doit tirer les valeurs des quantités $D$.

Il eſt viſible au premier aſpect, que les quantités $D$ conſtituent une progreſſion recurrente, dans laquelle en commençant par le bas, il eſt

$$D^{m} = 0$$

$$D^{m-1} = \frac{L}{2^{m-2}}$$

$$D^{m-2} = 2D^{m-1} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} - D^{m}$$

$$D^{m-3} = 2D^{m-2} \text{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} - D^{m-1}$$

&c.

Le

Le terme général de cette ſuite ſe trouvera comme ci-deſſus (art. 19.) exprimé de cette façon $D^{m-n} = A a^n + B b^n$, où $a$ & $b$ ſont les racines de l'équation du ſecond dégré $z^2 - 2z \operatorname{cof.} \frac{\mu\pi}{2m} + 1 = 0$. Pour déterminer les conſtantes $A$ & $B$ qu'on poſe $n = 0$, & $= 1$, l'on aura $A + B = 0$, & $Aa + Bb = \frac{L}{2^{m-2}}$, ce qui donne $B = -A$, $A = \frac{L}{2^{m-2}(a-b)}$, $B = -\frac{L}{2^{m-2}(a-b)}$, & par conſéquent $D^{m-n} = \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{a^n - b^n}{a-b}$. Or ſi l'on ſubſtitue au lieu de $a$ & $b$ les racines de l'équation propoſée, il en réſultera par un procédé ſemblable à celui de l'article 25. $\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{\operatorname{fin.} \frac{n\mu\pi}{2m}}{\operatorname{fin.} \frac{\mu\pi}{2m}}$, d'où $D^{m-n}$

$$= \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\operatorname{fin.} \frac{n\mu\pi}{2m}}{\operatorname{fin.} \frac{\mu\pi}{2m}};$$

& poſant pour plus de comodité

$$m - n = s,\ D^s = \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\operatorname{fin.} (m-s)\frac{\mu\pi}{2m}}{\operatorname{fin.} \frac{\mu\pi}{2m}};$$

mais

$$\operatorname{fin.} (m-s)\frac{\mu\pi}{2m} = \operatorname{fin.} \left(\frac{\mu\pi}{2} - \frac{s\mu\pi}{2m}\right) = \pm \operatorname{fin.} \frac{s\mu\pi}{2m};$$

où le ſigne + doit être pris toutes les fois que $\mu$ eſt un nombre impair, & le ſigne − quand $\mu$ eſt pair; on aura donc enfin

$$D^s = \pm \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\operatorname{fin.} \frac{s\mu\pi}{2m}}{\operatorname{fin.} \frac{\mu\pi}{2m}},$$

& telle eſt la

 valeur

valeur générale de $D$, d'où dépend la résolution des équations de l'article 23.

26. Reprenons maintenant l'équation de l'article 24., & substituant dans son second membre les valeurs trouvées des quantités $D$, on la réduira d'abord à

$$y^{\mu}\left(D^{\mathrm{I}}\,\text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}+D^{\mathrm{II}}\,\text{sin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m}+D^{\mathrm{III}}\,\text{sin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m}+\&c\right.$$
$$\left.+D^{m-1}\,\text{sin.}\,[m-1]\,\frac{\mu\pi}{2m}\right)=\pm\frac{L}{2^{m-2}\,\text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$$
$$\left(S^{\mathrm{I}}\,\text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}+S^{\mathrm{II}}\,\text{sin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m}+S^{\mathrm{III}}\,\text{sin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m}+\&c.\right.$$
$$\left.+S^{m-1}\,\text{sin.}\,[m-1]\,\frac{\mu\pi}{2m}\right).$$

A l'égard du premier membre, on remarquera que $D^{\mathrm{I}}\,\text{sin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}+D^{\mathrm{II}}$ $\text{sin.}\,\frac{2\lambda\pi}{2m}+D^{\mathrm{III}}\,\text{sin.}\,\frac{3\lambda\pi}{2m}+\&c.+D^{m-1}\,\text{sin.}\,(m-1)$ $\frac{\lambda\pi}{2m}=\frac{L}{2^{m-1}}\times\frac{\text{sin.}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{\text{cos.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}-\text{cos.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$ (art. 25.)

Donc si l'on suppose $\lambda=\mu$ l'on aura $D^{\mathrm{I}}\,\text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}$ $+D^{\mathrm{II}}\,\text{sin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m}+D^{\mathrm{III}}\,\text{sin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m}+\&c.+D^{m-1}$ $\text{sin.}\,(m-1)\,\frac{\mu\pi}{2m}=\frac{L}{2^{m-1}}\times\frac{\text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2}}{\text{cos.}\,\frac{\mu\pi}{2m}-\text{cos.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$;

mais puisque $\mu$ est un nombre entier, on a $\text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2}=0$, donc le dernier membre de l'équation se réduit à

$L$

$\frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{0}{0}$. Pour en trouver la vraie valeur soit supposé $\lambda$ variable, & différentiant à part le numérateur, & le dénominateur de la formule générale

$$\frac{\text{sin.}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{\text{cos.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{cos.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$$ on trouvera $$\frac{m\ \text{cos.}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{-\ \text{sin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}}$$, or $\mu$ étant un nombre entier, cos. $\frac{\mu\pi}{2}$ est $= \pm 1$, le signe supérieur répond à $\mu$ pair, l'inférieur à $\mu$ impair; l'on aura donc $D^{I}$ sin. $\frac{\mu\pi}{2m} + D^{II}$ sin. $\frac{2\mu\pi}{2m} + D^{III}$ sin. $\frac{3\mu\pi}{2m}$

$$+ \&c. + D^{m-1}\ \text{sin.}\ (m-1)\frac{\mu\pi}{2m} = \pm \frac{L}{2^{m-1}}$$

$$\times \frac{m}{\text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$$, & ainsi l'équation précédente deviendra

$$\pm\, y^{\mu} \times \frac{mL}{2^{m-1}\ \text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}} = \pm \frac{L}{2^{m-2}\ \text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}} \Big( S^{I}\ \text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}$$

$$+ S^{II}\ \text{sin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m} + S^{III}\ \text{sin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m} + \&c. + S^{m-1}$$

$$\text{sin.}\ [m-1]\,\frac{\mu\pi}{2m}\Big)$$, d'où l'on tire

$$y^{\mu} = \frac{2}{m} \times \Big( S^{I}\ \text{sin.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + S^{II}\ \text{sin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m} + S^{III}\ \text{sin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m}$$

$$+ \&c. + S^{m-1}\ \text{sin.}\ [m-1]\,\frac{\mu\pi}{2m}\Big).$$

Voila donc quelle doit être l'expression générale des $y$ qui dénotent les espaces parcourus par chacun des corps dans un tems quelconque $t$.

27. Pour connoître plus clairement la nature de l'équation trouvée, on y substituera les valeurs des quantités

 $S^{I}$,

$S^{\mathrm{I}}$, $S^{\mathrm{II}}$, $S^{\mathrm{III}}$ de l'art. 23. ce qui donnera finalement la formule

$$
\begin{aligned}
y^{\mu} = {} & \frac{2}{m} \times P^{\mathrm{I}} \text{ fin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{cof. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{\pi}{4m}\right) \\
& + \frac{2}{m} \times P^{\mathrm{II}} \text{ fin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{cof. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{2\pi}{4m}\right) \\
& + \frac{2}{m} \times P^{\mathrm{III}} \text{ fin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{cof. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{3\pi}{4m}\right) \\
& + \&c. \\
& + \frac{2}{m} P^{m-1} \text{ fin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{cof. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}\right) \\
& + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{\mathrm{I}} \text{ fin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{fin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{\pi}{4m}\right)}{\text{fin. } \frac{\pi}{4m}} \\
& + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{\mathrm{II}} \text{ fin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{fin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{2\pi}{4m}\right)}{\text{fin. } \frac{2\pi}{4m}} \\
& + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{\mathrm{III}} \text{ fin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{fin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } \frac{3\pi}{4m}\right)}{\text{fin. } \frac{3\pi}{4m}} \\
& + \&c. \\
& + \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{m-1} \text{ fin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{fin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{fin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}\right)}{\text{fin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}}
\end{aligned}
$$

les quantités $P^{\mathrm{I}}$, $P^{\mathrm{II}}$, $P^{\mathrm{III}}$ &c. & $Q^{\mathrm{I}}$, $Q^{\mathrm{II}}$, $Q^{\mathrm{III}}$ dépendent de la premiére fituation des corps, & de leurs premiéres viteffes, felon les fuppofitions de l'article 22.

De

De cette expression de $y^\mu$ on tirera aisément celle de $u^\mu$ qui exprime la vitesse, avec laquelle l'espace $y^\mu$ est parcouru; car puisque $u^\mu = \frac{dy^\mu}{dt}$, on n'aura qu'à différentier l'équation donnée en faisant $t$ variable; & on trouvera l'expression suivante.

$$
\begin{aligned}
u^\mu = & - \frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{I} \sin. \frac{\pi}{4m} \times \sin. \frac{\mu\pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{\pi}{4m}) \\
& - \frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{II} \sin. \frac{2\pi}{4m} \times \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{2\pi}{4m}) \\
& - \frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{III} \sin. \frac{3\pi}{4m} \times \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{3\pi}{4m}) \\
& - \&c. \\
& - \frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\pi}{4m} \times \sin. [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \\
& \qquad \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. [m-1] \frac{\pi}{4m}) \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{I} \sin. \frac{\mu\pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{\pi}{4m}) \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{II} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{2\pi}{4m}) \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{III} \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{3\pi}{4m}) \\
& + \&c. \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{m-1} \sin. [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \cos. (2t\sqrt{e} \times \\
& \qquad \sin. [m-1] \frac{\pi}{4m}).
\end{aligned}
$$

CHA-

## CHAPITRE IV.

### *Analise du cas, où le nombre des corps mobiles est fini.*

28. NOUS regarderons les quantités $y$, comme des ordonnées à l'axe $AB$ (Fig. 7.), qui est supposé divisé en un nombre $m$ de parties égales à $r$; & les exposans de ces variables exprimeront le quantiéme de la place qu'elles occupent sur l'axe, en comptant depuis l'extrémité $A$. Ainsi le poligone qu'on pourra faire passer par les extrémités de toutes ces ordonnées sera la figure de la corde tendue, & chargée à chaque angle d'un poid $M$, & il sera en même tems le lieu géométrique des excursions des corps élastiques $M$, disposés dans la même ligne droite $AB$, selon ce qu'on a démontré dans les chapitres précédens.

Il est d'abord évident que la formule qui donne la valeur de $y^\mu$ est composée d'une suite de formules telles que

$$A \text{ sin. } \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{cos. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{sin. } \frac{s\pi}{4m}\right)$$

$$+ \frac{B \text{ sin. } \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{sin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{sin. } \frac{s\pi}{4m}\right)}{\text{sin. } \frac{s\pi}{4m}}$$

que je dénoterai dorénavant par $\varphi^\mu$; $A$ & $B$ sont des constantes qui dépandent du premier état du sistème des corps, & $s$ exprime un nombre quelconque dans la suite naturelle $1, 2, 3, \ldots\ldots m-1$; ainsi si l'on construit un nombre $m-1$ de poligones qui répondent tous à cette expression générale en y supposant $s$ successivément égal à $1, 2, 3,$ &c. jusqu'à $m-1$, & qu'on prenne

prenne le premier pour axe du ſecond, le ſecond pour axe du troiſiéme, & ainſi de ſuite, le dernier qui ſera formé ſur tous les autres contiendra les vraies valeurs de toutes les variables $y$; d'où l'on voit que les mouvemens rectilignes des corps qui parcourent les eſpaces $y^{\text{I}}$, $y^{\text{II}}$, $y^{\text{III}}$, &c. pourront être cenſés compoſés d'autant de mouvemens particuliers qu'il y a de corps mobiles.

Examinons de plus près la compoſition de ces mouvemens.

29. Soit poſé $\varphi^{\mu} = 0$, l'on aura les deux équations $\sin. \frac{s\mu\pi}{2m} = 0$, & $A \cos. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{s\pi}{4m}) +$

$$\frac{B \sin. (2t\sqrt{e} \times \sin. \frac{s\pi}{4m})}{\sin. \frac{s\pi}{4m}} = 0,$$ qui détermineront les points, où chacun des poligones ſimples pourra couper ſon propre axe. Il eſt viſible que la premiére aura lieu toutes les fois que $\frac{s\mu}{m}$ ſera égal à zero, ou à un nombre entier quelconque; ſoit donc $k$ un tel nombre, on aura $\frac{s\mu}{m} = k$, & $\mu = \frac{km}{s}$, laquelle valeur de $\mu$ ſatisfera toujours quel que ſoit le tems $t$.

Soit $s = 1$, l'on aura $\mu = km, = 0, = m, = 2m$, &c. d'où il s'enſuit que le poligone ne pourra rencontrer l'axe $AB$ que dans ſes deux extrémités $A$ & $B$, il ſera donc tout au deſſus, ou au deſſous de lui comme l'on voit (Fig. 7.).

Soit $s = 2$ l'on aura $\mu = \frac{km}{2} = 0, = \frac{m}{2} = m$; &c. le poligone coupera donc l'axe au milieu $C$, & il aura par conſéquent une moitié au deſſus, & l'autre au deſſous, comme dans la (Fig. 8.)

Soit

Soit $s = 3$, l'on aura $\mu = \frac{km}{3}, = 0, = \frac{m}{3}, = \frac{2}{m}, = m$ &c. Et le poligone rencontrera l'axe deux fois, & le divisera en trois parties égales, il aura donc une figure semblable à celle qu'on voit (Fig. 9.), & ainsi de suite. D'où l'on conclura que les poligones auront toujours autant de ventres d'égale longueur qu'il y a d'unités dans le nombre $s$.

30. Présentement si l'on s'attache à la seconde équation on trouvera en la réduisant, fin. $(2t\sqrt{e} \times \text{fin.} \frac{s\pi}{4m})$

$$= \frac{A \text{ fin.} \frac{s\pi}{4m}}{\sqrt{(B^2 + A^2 [\text{fin.} \frac{s\pi}{4m}]^2)}}$$ Posons pour abréger

$$\frac{A \text{ fin.} \frac{s\pi}{4m}}{\sqrt{(B^2 + A^2 [\text{fin.} \frac{s\pi}{4m}]^2)}} = Z,$$ on en tirera $2t\sqrt{e}$ fin. $\frac{s\pi}{4m}$

$= \text{Arc.} (\text{fin.} Z)$, & $t = \frac{\text{Arc.} (\text{fin.} Z)}{2\sqrt{e} \text{ fin.} \frac{s\pi}{4m}}$. Equation qui pourra être vraie quel que soit le nombre $\mu$, parceque il n'y entre point; d'où il suit que les poligones ne peuvent jamais couper leurs axes en d'autres points, que dans ceux que nous avons déterminé ci-dessus, à moins qu'ils ne se confondent entiérement avec les axes mêmes, ce qui arrivera toutes les fois, que $t$ aura la valeur assignée. Or comme il y a une infinité d'Arcs qui répondent tous aux mêmes sinus, la quantité $t$ pourra aussi recevoir une infinité de valeurs. Pour les trouver soit $\theta$ le moindre Arc qui répond au sinus $Z$, & $k$ un nombre quelconque entier, on aura généralement

$t =$

$$t = \frac{k\pi + \theta}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}\text{, où encore } t = \frac{(2k+1)\frac{\pi}{2} - \theta}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}$$

il réſulte donc de cette formule qu'après que le poligone ſe ſera pour la premiére fois étendu en ligne droite, il retournera dans cet état à chaque intervalle de tems exprimé par $\frac{\pi}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}$, qu'on devra par conſéquent regarder comme le tems d'une oſcillation entiére, d'où l'on voit que ces tems, toutes choſes d'ailleurs égales, ſeront en raiſon inverſe de ſin. $\frac{s\pi}{4m}$, donc le tems d'une vibration pour la premiére figure ſera à celui de la ſeconde, de la troiſiéme, &c. comme ſin. $\frac{\pi}{2m}$ à ſin. $\frac{\pi}{4m}$; comme ſin. $\frac{3\pi}{4m}$ à ſin. $\frac{\pi}{4m}$, & ainſi de ſuite.

31. Les loix des mouvemens de chacun des poligones ſimples, nous feront aiſément connoître par leur combinaiſon ceux du poligone compoſé. Nous venons de voir que le premier poligone qui a pour axe la droite $AB$ n'a qu'un ſeul ventre, & que ſes vibrations s'achévent dans un tems proportionel à $\frac{1}{\text{ſin.}\ \frac{\pi}{4m}}$; que le ſecond qui a pour axe celui-ci, contient deux ventres, & qu'il emploie dans chaque vibration un tems proportionel à $\frac{1}{\text{ſin.}\ \frac{\pi}{2m}}$ & ainſi de ſuite. Il s'enſuit de-là, que, puiſque ces tems ſont preſque toujours incommenſurables entr'eux, il arrivera très-rarement que le poligone compoſé s'étende

tout en ligne droite ; c'eſt pourquoi ſes vibrations paroitront tout-à-fait irréguliéres, quoiqu'elles ſoient compoſées d'un nombre de vibrations ſimples, réguliéres & iſocrones en elles mêmes.

32. Cette théorie générale que nous avons immédiatement déduit de nos formules, appliquée aux mouvemens des cordes vibrantes eſt la même que Mr. Daniel Bernoulli a inventé ſur ce ſujet, comme on l'a expoſé dans le Chapitre III. ; ſi donc ce grand Homme a pû croire qu'une ſolution purement analitique étoit en elle même incapable de faire connoître la véritable nature de ces mouvemens, ces recherches pourront ouvrir une route nouvelle pour faire des applications de calcul à des ſujets qui n'en paroiſſoient pas ſuſceptibles, & ſervir à perfectioner l'Analiſe. Au reſte on ne peut trop eſtimer la ſagacité, & la pénétration de ce célèbre Géomètre, qui par un pur examen ſintétique de la queſtion propoſée eſt parvenu à réduire à des loix ſimples & générales des mouvemens qui ſemblent s'y refuſer par leur nature.

33. Avant que d'abandonner cette matiére, examinons encore les cas, où les vibrations compoſées peuvent devenir ſimples & réguliéres.

Il eſt viſible que ceci arrivera toutes les fois que $y^{\mu} = \varphi^{\mu}$, ſavoir quand tous les termes exprimés généralement par $\varphi^{\mu}$ ſe réduiront à un ſeul quel qu'il ſoit. Soit $s$ le quantiéme du terme reſtant, on aura par l'art. 27.

$$y^{\mu} = \frac{2}{m} \times P^{s} \operatorname{ſin.} \frac{s\mu\pi}{2m} \times \operatorname{coſ.} \left(2t\sqrt{e} \times \operatorname{ſin.} \frac{s\pi}{4m}\right)$$

$$+ \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{s} \operatorname{ſin.} \frac{s\mu\pi}{2m} \times \operatorname{ſin.} \left(2t\sqrt{e} \times \operatorname{ſin.} \frac{s\pi}{4m}\right)}{\operatorname{ſin.} \frac{s\pi}{4m}}$$

enſuite il faudra que $P^{I} = 0$ ; $P^{II} = 0$ ; $P^{III} = 0$ &c. juſqu'à $P^{m-1}$, excepté $P^{s}$ ; & de même $Q^{I} = 0$ ; $Q^{II} = 0$ ; $Q^{III} = 0$ &c. juſqu'à $Q^{m-1}$, excepté $Q^{s}$ ; d'où l'on l'on tirera les conditions réquises dans le premier état du sistème, afin que les vibrations des corps suivent les loix proposées. On aura donc ces deux équations

$$Y^{\text{I}} \text{ fin. } \frac{\sigma\pi}{2m} + Y^{\text{II}} \text{ fin. } \frac{2\sigma\pi}{2m} + Y^{\text{III}} \text{ fin. } \frac{3\sigma\pi}{2m} + \&c.$$
$$+ Y^{m-1} \text{ fin. } (m-1)\frac{\sigma\pi}{2m} = 0$$

$$V^{\text{I}} \text{ fin. } \frac{\sigma\pi}{2m} + V^{\text{II}} \text{ fin. } \frac{2\sigma\pi}{2m} + V^{\text{III}} \text{ fin. } \frac{3\sigma\pi}{2m} + \&c.$$
$$+ V^{m-1} \text{ fin. } (m-1)\frac{\sigma\pi}{2m} = 0$$

qui devront se vérifier quelque nombre qu'on pose au lieu de $\sigma$ depuis 1, jusqu'à $m - 1$, excepté $s$.

Que l'on compare maintenant cette équation avec celle de l'art. 24., il est évident qu'en substituant $\sigma$ au lieu de $\lambda$, & $s$, au lieu de $\mu$, les quantités $Y$ & $V$ seront déterminées de la même maniére que les quantités $D$; c'est pourquoi l'on trouvera généralement

$$Y^{\nu} = \pm \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\text{fin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{fin. } \frac{s\pi}{2m}}, \& V^{\nu} = \pm \frac{L^{\text{I}}}{2^{m-2}} \times \frac{\text{fin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{fin. } \frac{s\pi}{2m}}$$

où $L$, & $L^{\text{I}}$ sont deux constantes arbitraires, qu'on pourra déterminer par la valeur de deux termes quelconques de la suite des $Y$ & des $V$. Supposant donc que les deux premiéres quantités $Y$ & $V$ soient données, l'on aura $\frac{L}{2^{m-2}} = Y$, & $\frac{L^{\text{I}}}{2^{m-2}} = V$; d'où l'on tire enfin

$$Y^{\nu} = \pm Y \frac{\text{fin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{fin. } \frac{s\pi}{2m}}, V^{\nu} = \pm V. \frac{\text{fin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{fin. } \frac{s\pi}{2m}}$$ le signe

supérieur répond à $s$ impair, & l'inférieur à $s$ pair.



Telle

Telles ſont les valeurs qu'il faudra donner d'abord aux viteſſes, & aux éloignemens des corps, afin que le ſiſtème ſouffre des vibrations ſimples & réguliéres, ſuivant les loix de l'eſpèce $s^{me}$ qui contient $s$ ventres, & dont le tems d'une oſcillation entiére eſt toujours exprimé par $\frac{\pi}{2\sqrt{c}\,\text{ſin.}\,\frac{s\pi}{4m}}$. L'on peut prendre dans ces formules le nombre $s$ égal à 1, à 2, à 3, &c. juſqu'à $m - 1$, d'où il s'enſuit qu'on peut donner à tout le ſiſtème autant d'arrangemens différens, qui néanmoins ſeront tous propres à produire tant le ſincroniſme, que l'iſocroniſme des corps.

Ce problême a été déja réſolu par quelques Géomètres dans le cas d'un nombre de corps déterminé, mais la route qu'ils ont pris les a toujours conduit à des équations d'un dégré égal au nombre des corps mobiles, dont il falloit par conſéquent chercher les racines dans chaque cas particulier; je ne crois pas qu'on ait jamais donné pour cela une formule générale, telle que nous venons de la trouver.

# CHAPITRE V.

## *Analiſe du cas, où le nombre des corps mobiles eſt infini.*

34. LA théorie du mélange des vibrations ſimples & réguliéres que nous venons d'établir découle de la forme même des équations trouvées. Or cette forme ſubſiſtera toujours, tandis que le nombre des corps mobiles ſera fini, ſavoir quand $m$ ſera un nombre fini, mais ſera-t-il auſſi vrai que la ſuppoſition de $m$ infini, ne déſigure pas, pour ainſi dire, l'équation, & n'en altére pas entiérement la forme? c'eſt ce que nous allons examiner dans ce chapitre.

Il eſt évident qu'en faiſant $m = \infty$ les angles $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ &c. deviendront infiniment petits, & que leurs ſinus ne différeront pas des Arcs qui leur appartiennent; ainſi l'on aura, $\text{ſin.}\,\frac{\pi}{4m} = \frac{\pi}{4m}$; $\text{ſin.}\,\frac{2\pi}{4m} = \frac{2\pi}{4m}$; $\text{ſin.}\,\frac{3\pi}{4m} = \frac{3\pi}{4m}$ &c. donc la formule qui donne la valeur de $y^\mu$ ſe changera en celle-ci.

$$
\begin{aligned}
y^\mu = {} & \frac{2}{m} \times P^{\text{I}}\ \text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\,\frac{\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& + \frac{2}{m} \times P^{\text{II}}\ \text{ſin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\,\frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& + \frac{2}{m} \times P^{\text{III}}\ \text{ſin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\,\frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m} \\
& + \text{\&c. à l'infini} \\
& + \frac{4}{\pi\sqrt{e}} \times Q^{\text{I}}\ \text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\,\frac{\pi t\sqrt{e}}{2m}
\end{aligned}
$$

+

$$+ \frac{4}{2\pi\sqrt{e}} \times Q^{II} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{4}{3\pi\sqrt{e}} \times Q^{III} \sin. \frac{3\pi\mu}{2m} \times \sin. \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$+$ &c. à l'infini

l'on aura de même dans ce cas

$$u^{\mu} = -\frac{\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{I} \sin. \frac{\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$-\frac{2\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{II} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$-\frac{3\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{III} \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \sin. \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$-$ &c. à l'infini

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{I} \sin. \frac{\mu\pi}{2m} \times \operatorname{cos}. \frac{\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{II} \sin. \frac{2\mu\pi}{2m} \times \operatorname{cos}. \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{III} \sin. \frac{3\mu\pi}{2m} \times \operatorname{cos}. \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$+$ &c. à l'infini

35. Soient infiniment petites les masses $M$ des corps, en sorte que leur somme soit finie, & $= S$, on aura $m = \frac{S}{M}$, de plus si $a$ exprime la longueur de l'axe $AB$, on aura encore $m = \frac{a}{r}$, d'où $\frac{a}{r} = \frac{S}{M}$, & $r = \frac{aM}{S}$, donc la quantité $e$ qui est $= \frac{2Eh}{MT^2r}$ (art. 19.) deviendra $= \frac{2EhS}{T^2M^2a}$, & par conséquent $\frac{\sqrt{e}}{m} = \frac{1}{TMm}\sqrt{\left(\frac{2EhS}{a}\right)}$;

ou

ou bien puiſque $m \times M = S$, il ſera $\frac{\sqrt{e}}{m} = \frac{1}{T} \sqrt{\left(\frac{2Eh}{aS}\right)}$ qui eſt une quantité finie, & toute connuë, qu'on ſuppoſera pour abréger $= \frac{H}{T}$.

36. Suppoſons que le rapport des nombres $m$, & $\mu$ ſoit celui de $a : x$; $x$ exprimera l'abſciſſe dans l'axe $AB$, a laquelle repondra l'ordonnée $y^{\mu}$, de même que la viteſſe $u^{\mu}$, l'on aura donc $\frac{\mu}{m} = \frac{x}{a}$; & faiſant de plus $dx$ conſtante, & égale à $r$, on aura $\frac{a}{dx} = m$; toutes ces valeurs ſubſtituées dans les formules ci-deſſus l'on obtiendra généralement

$$
\begin{aligned}
y = {} & \frac{2dx}{a} \times P^{\mathrm{I}} \text{ ſin. } \frac{\pi x}{2a} \times \text{ coſ. } \frac{\pi Ht}{2T} \\
& + \frac{2dx}{a} \times P^{\mathrm{II}} \text{ ſin. } \frac{2\pi x}{2a} \times \text{ coſ. } \frac{2\pi Ht}{2T} \\
& + \frac{2dx}{a} \times P^{\mathrm{III}} \text{ ſin. } \frac{3\pi x}{2a} \times \text{ coſ. } \frac{3\pi Ht}{2T} \\
& + \text{\&c. à l'infini} \\
& + \frac{4Tdx}{\pi Ha} \times Q^{\mathrm{I}} \text{ ſin. } \frac{\pi x}{2a} \times \text{ ſin. } \frac{\pi Ht}{2T} \\
& + \frac{4Tdx}{2\pi Ha} \times Q^{\mathrm{II}} \text{ ſin. } \frac{2\pi x}{2a} \times \text{ ſin. } \frac{2\pi Ht}{2T} \\
& + \frac{4Tdx}{3\pi Ha} \times Q^{\mathrm{III}} \text{ ſin. } \frac{3\pi x}{2a} \times \text{ ſin. } \frac{3\pi Ht}{2T} \\
& + \text{\&c. à l'infini}
\end{aligned}
$$

& de même

$$u = -\frac{\pi H dx}{aT} \times P^{\mathrm{I}} \text{ ſin. } \frac{\pi x}{2a} \times \text{ ſin. } \frac{\pi Ht}{2T}$$

$- 2\pi H dx$

$$- \frac{2\pi H dx}{aT} \times P^{II} \text{ fin. } \frac{2\pi x}{2a} \times \text{ fin. } \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$- \frac{3\pi H dx}{aT} \times P^{III} \text{ fin. } \frac{3\pi x}{2a} \times \text{ fin. } \frac{3\pi Ht}{2T}$$

$-$ &c. à l'infini

$$+ \frac{2dx}{a} \times Q^{I} \text{ fin. } \frac{\pi x}{2a} \times \text{ cof. } \frac{\pi Ht}{2T}$$

$$+ \frac{2dx}{a} \times Q^{II} \text{ fin. } \frac{2\pi x}{2a} \times \text{ cof. } \frac{2\pi Ht}{2T}$$

$$+ \frac{2dx}{a} \times Q^{III} \text{ fin. } \frac{3\pi x}{2a} \times \text{ cof. } \frac{3\pi Ht}{2T}$$

$+$ &c. à l'infini.

37. Préfentement il faut fubftituer dans ces formules les expreffions des quantités $P^{I}$, $P^{II}$, $P^{III}$ &c. $Q^{I}$, $Q^{II}$, $Q^{III}$ &c. d'où en ordonnant les termes par les quantités connues $Y^{I}$, $Y^{II}$, $Y^{III}$ &c. $V^{I}$, $V^{II}$, $V^{III}$ &c. on trouvera autant de fuites infinies, dont chacune fera multipliée par une de ces quantités.

Soit $X : a$ la raifon générale des expofans des $Y$ & des $V$ au nombre $m$, $X$ dénotera la partie de l'axe qui leur eft correfpondante dans le premier état du fiftème; donc fi l'on emploie le figne intégral $\int$ pour exprimer la fomme de toutes ces fuites, on aura

$$y = \frac{2}{a} \int dx Y \left( \text{fin. } \frac{\pi X}{2a} \times \text{ fin. } \frac{\pi x}{2a} \times \text{ cof. } \frac{\pi Ht}{2T} \right.$$
$$+ \text{ fin. } \frac{2\pi X}{2a} \times \text{ fin. } \frac{2\pi x}{2a} \times \text{ cof. } \frac{2\pi Ht}{2T}$$
$$+ \text{ fin. } \frac{3\pi X}{2a} \times \text{ fin. } \frac{3\pi x}{2a} \times \text{ cof. } \frac{3\pi Ht}{2T}$$
$$\left. + \text{ \&c. à l'infini} \right)$$

$$+ \frac{4T}{\pi Ha} \int dx V \left( \text{sin.} \frac{\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{\pi x}{2a} \times \text{sin.} \frac{\pi Ht}{2T} \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \text{sin.} \frac{2\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{2\pi x}{2a} \times \text{sin.} \frac{2\pi Ht}{2T}$$
$$+ \frac{1}{3} \text{sin.} \frac{3\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{3\pi x}{2a} \times \text{sin.} \frac{3\pi Ht}{2T}$$
$$\left. + \text{\&c. à l'infini} \right)$$

& de même pour $u$

$$u = - \frac{\pi H}{aT} \int dx Y \left( \text{sin.} \frac{\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{\pi x}{2a} \times \text{sin.} \frac{\pi Ht}{2T} \right.$$
$$+ 2 \text{sin.} \frac{2\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{2\pi x}{2a} \times \text{sin.} \frac{2\pi Ht}{2T}$$
$$+ 3 \text{sin.} \frac{3\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{3\pi x}{2a} \times \text{sin.} \frac{3\pi Ht}{2T}$$
$$\left. + \text{\&c. à l'infini} \right)$$
$$+ \frac{2}{a} \int dx V \left( \text{sin.} \frac{\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{\pi x}{2a} \times \text{sin.} \frac{\pi Ht}{2T} \right.$$
$$+ \text{sin.} \frac{2\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{2\pi x}{2a} \times \text{cos.} \frac{2\pi Ht}{2T}$$
$$+ \text{sin.} \frac{3\pi X}{2a} \times \text{sin.} \frac{3\pi x}{2a} \times \text{cos.} \frac{3\pi Ht}{2T}$$
$$\left. + \text{\&c. à l'infini} \right),$$

où il eſt à remarquer que les intégrations doivent ſe faire en ſuppoſant $X$, $Y$, & $V$ variables, & $t$, & $x$ conſtantes.

38. Si on refléchit maintenant ſur ces formules, on s'appercevra, que la premiere partie de l'expreſſion de $y$, & la ſeconde partie de l'expreſſion de $u$ qui ne différent entr'elles, que par rapport aux quantités $Y$ & $V$ ſeront ſommables au moyen de la formule trouvée (art. 25.). Qu'on ſuppoſe donc, pour ſimplifier le calcul, que les

quantités $V$ s'évanouissent dans la formule de $y$, & les quantités $Y$ dans celle de $u$, ce qui réduit le problême aux seuls cas considérés jusqu'à présent dans les cordes vibrantes; & on pourra se contenter de faire le calcul pour la valeur de $y$, puisque en changeant simplement les $Y$ en $V$ on obtiendra tout de suite celle de $u$. Je raméne d'abord l'expression sin. $\frac{\pi x}{2a} \times$ cos. $\frac{\pi H t}{2T}$ à celle-ci

$$\frac{\text{sin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}\right)+\text{sin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}\right)}{2}$$

, & en opérant de la même maniére sur toutes les autres je change la formule en

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{a}\int dx\,Y\ \Big(&\text{sin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{sin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\text{sin.}\ \frac{2\pi X}{2a} \times \text{sin.}\ \frac{2\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\text{sin.}\ \frac{3\pi X}{2a} \times \text{sin.}\ \frac{3\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\ \&c.\ \text{à l'infini}\Big)\\ +\frac{1}{a}\int dx\,V\ \Big(&\text{sin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{sin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\text{sin.}\ \frac{2\pi X}{2a} \times \text{sin.}\ \frac{2\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\text{sin.}\ \frac{3\pi X}{2a} \times \text{sin.}\ \frac{3\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\ \&c.\ \text{à l'infini}\Big). \end{aligned}$$

Or si l'on met dans la formule de l'art. 25. au lieu des quantités $D$ leurs valeurs $\pm \frac{L}{2m-2} \times \frac{\text{sin.}\ \frac{s\mu\pi}{2m}}{\text{sin.}\ \frac{\mu\pi}{2m}}$ & qu'on

mul-

multiplie tout par $2^{m-2}$ ſin. $\frac{\mu\pi}{2m}$, on trouve généralement

$$\text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} + \text{ſin.}\ \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{2\lambda\pi}{2m} + \text{ſin.}\ \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. + \text{ſin.}\ (m-1)\frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ (m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}$$

$$= \pm \frac{1}{2} \frac{\text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\ \frac{\mu\pi}{2m}}$$

, où le ſigne + a lieu, lorſque $\mu$ eſt impair, & le ſigne − lorſqu'il eſt pair, donc ſi l'on poſe $\frac{\mu}{m} = \frac{X}{a}$, & $\frac{\lambda}{m} = \frac{x}{a} \pm \frac{H}{T}$, il en réſultera

$$y = \pm \frac{1}{2a} \int \frac{dx\, Y\ \text{ſin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}\right)}{\text{coſ.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}\right) - \text{coſ.}\ \frac{\pi X}{2a}}$$

$$\pm \frac{1}{2a} \int \frac{dx\, Y\ \text{ſin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} - \frac{mHt}{T}\right)}{\text{coſ.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}\right) - \text{coſ.}\ \frac{\pi X}{2a}}$$

Or puiſque $m$ eſt infini, $m\left(\frac{x}{a} \pm \frac{Ht}{T}\right)$ ſera toujours un nombre entier quels que ſoient $x$ & $t$, donc l'on aura ſin. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} \pm \frac{mHt}{T}\right) = 0$, & par conſéquent les ter- termes qui conſtituent les intégrales exprimés par $\int$ s'éva- nouiront en général. Il y a pourtant un cas particulier à excepter, c'eſt celui où $\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la premiére in- tégrale, & $\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la ſeconde deviennent $= 2s \pm \frac{X}{a}$, $s$ dénotant un nombre quelconque entier poſitif,

 ou

ou négatif, car dans ces cas les dénominateurs cof. $\frac{\pi}{2}$ $(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}) - \text{cof.}\ \frac{\pi X}{2a}$, & cof. $\frac{\pi}{2}(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}) - \text{cof.}\ \frac{\pi X}{2a}$ deviennent égaux à zero, & les termes fe trouvent exprimés par $\frac{0}{0}$. Pour en déterminer les vraies valeurs on prendra la différentielle des numérateurs, & des dénominateurs, en confidérant $\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la premiére formule, & $\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la feconde pour les feules variables; on mettra enfuite à leur place la quantité $2s \pm \frac{X}{a}$; l'on trouvera donc en premier lieu

$$\frac{1}{2a}\int \frac{dxY\,\text{fin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{fin.}\ \frac{\pi}{2}(\frac{mx}{2a} + \frac{mHt}{T})}{\text{cof.}\ \frac{\pi}{2}(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}) - \text{cof.}\ \frac{\pi X}{2a}} =$$

$$-\frac{m}{2a} \times \frac{dxY\,\text{fin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{cof.}\ \frac{\pi}{2}(2ms \pm \frac{mX}{a})}{\text{fin.}\ \frac{\pi}{2}(2s \pm \frac{X}{a})}$$

Mais puifque $\frac{mX}{a}$ eft un nombre infini $= \mu$ on a cof. $\frac{\pi}{2}$ $(2ms \pm \frac{mX}{a}) = \mp 1$, le figne fupérieur répondant à $\mu$ impair, & l'inférieur à $\mu$ pair; l'on a de plus fin. $\frac{\pi}{2}$ $(2s \pm \frac{X}{a}) = \pm\ \text{fin.}\ \frac{\pi X}{2a}$, donc l'expreffion précedente fe réduit à $\pm \frac{mdxY}{2a}$, ou bien puifque $a = mdx$ elle

devient

devient $\pm \frac{Y}{2}$, où $Y$ eſt l'ordonnée qui répond l'abſciſſe $X$, ſavoir à l' abſciſſe $= \pm (x + \frac{aHt}{T} - 2sa)$ dans le premier état du ſiſtème, d'où l'on voit que cette ordonnée doit toujours être priſe avec le même ſigne que toute la quantité $x + \frac{aHt}{T} \pm 2sa$. Que l'on dénote cette ordonnée par $\varphi. (\pm [x + \frac{aHt}{T} - 2sa])$; & que l'on dénote de même par $\varphi. (\pm [x - \frac{aHt}{T} - 2sa])$ celle qui répond à l' abſciſſe $\pm (x - \frac{aHt}{T} - 2sa)$, & qu'on faſſe ſur la ſeconde partie de l' expreſſion générale de $y$, des opérations ſemblables à celle qu'on a pratiqué ſur la premiére, on trouvera enfin

$$y = \frac{\varphi. (\pm [x + \frac{aHt}{T} - 2sa]) + \varphi. (\pm [x - \frac{aHt}{T} - 2sa])}{2}$$

39. Soit (Fig. 5.) $AB$ l' axe, & $AeB$ la courbe qui repréſente le premier état du ſiſtème dans le cas où le nombre des corps mobiles eſt infini, on trouvera la figure de cette courbe pour un tems quelconque $t$, en ordonnant à une abſciſſe quelconque $x$ la quantité $y$ égale à la moitié de la ſomme des appliquées qui répondent aux abſciſſes $\pm (x + \frac{aHt}{T} - 2sa)$, & $\pm (x - \frac{aHt}{T} - 2sa)$ dans cette premiére courbe donnée. A' l'égard des ſignes ambigus, & du nombre indéterminé $s$, on remarquera, que puiſque l' axe $AB$ eſt d' une longueur donnée $a$, il faut que les abſciſſes qu'on y doit prendre ne ſurpaſſent pas la quantité $a$, & de plus qu'elles ſoient toujours poſitives, & ces conditions ſuffiront pour déterminer tout-à-fait chacune des abſciſſes en queſtion.

Si

Si $x + \frac{aHt}{T}$ eſt moindre que $a$, on ſuppoſera $s = 0$, & on prendra le ſigne $+$, & l'ordonnée ſera poſitive.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ eſt plus grand que $a$ mais moindre que $2a$, on fera $s = 1$, & on prendra le ſigne $-$, l'on aura donc l'abſciſſe $= 2a - x - \frac{aHt}{T}$, & l'ordonnée devra être priſe négative.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ devient plus grand que $2a$ mais moindre que $3a$, on fera $s = 1$; & on prendra le ſigne $+$, l'abſciſſe ſera donc dans ce cas $x + \frac{aHt}{T} - 2a$, & l'ordonnée devra être de nouveau poſitive.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ ſe trouve plus grand que $3a$ mais moindre que $4a$, on fera $s = 2$, & on prendra le ſigne $-$, ainſi l'abſciſſe deviendra $4a - (x + \frac{aHt}{T})$ & l'ordonnée correſpondente devra être priſe négativement, & ainſi de ſuite.

Par un raiſonnement ſemblable, on trouvera que lorſque $x - \frac{aHt}{T}$ eſt poſitif, l'on doit faire $s = 0$; & qu'il faut emploier le ſigne $+$, ce qui donne l'ordonnée poſitive.

Si $x - \frac{aHt}{T}$ devient négatif mais moindre que $a$, on ſuppoſera $s = 0$, & on prendra le ſigne $-$; l'on aura ainſi l'abſciſſe poſitive $- (x - \frac{aHt}{T})$ & l'ordonnée devra être priſe négativement.

Si

Si $x - \frac{aHt}{T}$ étant négatif eſt encore plus grand que $2a$ mais moindre que $3a$, on fera dans ce cas $s = -1$; & on prendra le ſigne $-$, ainſi l' on obtiendra l' abſciſſe poſitive $-(x - \frac{aHt}{T}) - 2a$, & l'ordonnée devra être priſe négativement.

Si $x - \frac{aHt}{T}$ devient plus grand que $3a$ mais moindre que $4a$, on continuera à faire $s = -2$, & on prendra de nouveau le ſigne $+$, ce qui donnera l'abſciſſe poſitive $4a + x - \frac{aHt}{T}$, & l'ordonnée devra être encore poſitive; & ainſi de ſuite.

L' on voit aſſés par tous ces cas particuliers que nous venons de développer, que quelle que ſoit la longueur de l'abſciſſe, il ſera toujours poſſible de la réduire en ſorte qu'elle ne ſurpaſſe plus l'axe donné $AB$. On pourra ſimplifier encore cette réduction, en ſuppoſant que les abſciſſes données, ſoient repliées (pour ainſi dire) ſur l'axe une, ou pluſieurs fois, ſelon qu'elles ſe trouvent plus, ou moins excédentes, & les ordonnées devront enſuite être priſes alternativement poſitives, & négatives ſelon les loix ci-deſſus établies. Mais ſi l'on veut avoir une conſtruction tout-à fait ſimple & générale, on pourra la déduire aiſément de la maniére ſuivante (Fig. 10.). Aiant tracé la courbe initiale $ANB$ qu'on repéte ſa deſcription de part & d'autre à l' infini, en la poſant alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe, de ſorte que les mêmes branches ſoient liées entr'elles par les mêmes extrémités. Conſidérant la courbe ainſi engendrée comme une courbe unique & continue, on prendra dans l'axe $AB$ qui s'étend à l' infini de part & d' autre toutes les abſciſſes qu'on voudra, ſans s'embaraſſer qu'elles ſoient négatives, ou plus grandes que $a$, ainſi la demiſomme des ordonnés qui ſe trouveront répondre aux abſciſſes $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$, quelle que ſoit la valeur de $x$ & de $t$, donnera toujours la vraie ordonnée qui convient à l' abſciſſe $x$ après le tems $t$.

40. Nous avons ſuppoſé $H = \sqrt{(\frac{2Eh}{aS})}$ (art.35.) Or dans le cas de la corde vibrante $E$ exprime le poid qui tend la corde $a$ ſa longueur, & $S$ ſon poid total; (art. 9. & 35.), on aura donc $H^2 = \frac{T^2c}{a^2}$ (art. 12.), & par conſéquent $\frac{aH}{T} = \sqrt{c}$; & les ordonnées, dont on doit prendre la demiſomme répondront aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$. Nous aurons donc par ce moien la conſtruction de la figure que forme une corde tendue pour un tems quelconque $t$ en cas qu'elle ait été d'abord forcée de prendre une figure quelconque donnée, & qu'enſuite on l'ait relaché tout-à-coup, & cette conſtruction eſt évidemment la même que Mr. Euler a inventée ſur la même hypothèſe.

Voila donc la théorie de ce grand Géomètre miſe hors de toute atteinte, & établie ſur des Principes directs & lumineux, qui ne tiennent en aucune façon à la loi de continuité que demande Mr. D'Alembert; voila encore comment il peut ſe faire que la même formule qui a ſervi pour appuier & démontrer la théorie de Mr. Bernoulli ſur le mélange des vibrations iſocrones, lorſque le nombre des corps mobiles étoit finis, nous en dévoile l'inſuffiſance dans le cas où le nombre de ces corps devient infini. En effet le changement que ſubit la formule en paſſant d'un cas dans l' autre, eſt tel que les mouvemens ſimples qui compoſoient les mouvemens abſolus de tout le ſiſtème s'annéantiſſent pour la plus part, & que ceux qui reſtent

ſe

ſe défigurent & s'altérent de façon qu'ils deviennent abſolument méconnoiſſables. Il eſt vraiment facheux qu'une théorie auſſi ingénieuſe, & qui auroit pû ſans doute jetter des grandes lumiéres ſur des matiéres également obſcures qu'importantes, ſe trouve démentie dans le cas principal qui eſt celui, auquel ſe rapportent tous les petits mouvemens réciproques qui ont lieu dans la nature.

41. Si l'on veut que la corde ſoit étendue en ligne droite au commencement de ſon mouvement, & que tous ſes points reçoivent en cet état des viteſſes quelconques, on ſuppoſera que les ordonnées à la courbe ne repréſentent plus les premiers éloignemens de points de la corde de l'axe, mais les viteſſes des mêmes points au premier inſtant; & les courbes qu'on trouvera pour les inſtants ſuivans donneront de la même maniére leurs viteſſes ſuivantes (art. 38.).

## CHAPITRE VI.

### *Refléxions ſur les calculs précédens.*

42. LA méthode que j'ai emploié dans le Chapitre III. eſt à la vérité un peu longue, & fort compliquée; cependant elle eſt, ſi je ne me trompe, l'unique qui puiſſe conduire à une ſolution directe, & générale, telle que nous nous ſommes propoſé.

Quoique l'intégration des équations differentielles s'achève fort aiſément par l'ingénieuſe méthode de Mr. D'Alembert, cependant il eſt clair qu'on eſt encore aprés cela beaucoup éloigné du but principal, car il s'agit de plus de tirer d'un nombre indéfini d'équations autant d'inconnues,

nues, & de les exprimer toutes par une même formule générale. La difficulté de cette opération n'à pas ſans doute échapé au ſavant Géomètre, dont nous venons de faire mention; car aiant propoſé à réſoudre le problême des mouvemens des cordes vibrantes, en les regardant comme des fils extenſibles chargés de pluſieurs petits poids, il s'eſt contenté de dire qu'on auroit toujours pû trouver leurs vibrations *à peu près* (Voiés l'art. 44. de ſon Mémoire cité ci-deſſus).

Il ſeroit à ſouhaiter que l'Analiſe qui a réuſſi dans ce cas pût également s'appliquer à tous les autres qui dépendent de la réſolution d'un nombre indéfini d'équations différentielles toutes ſemblables entr'elles, & où les changeantes ne montent qu'à la premiére dimenſion; puiſqu'il eſt facile de démontrer que tous les petits mouvemens réciproques qui peuvent avoir lieu dans un ſiſtème quelconque de corps ſemblables, qui agiſſent les uns ſur les autres tous d'une même maniére, ſont néceſſairement contenus dans de telles équations. Nous ſerions par-là en état de ſuivre les actions de la nature de beaucoup plus près, qu'on n'a oſé le faire juſqu'à préſent.

J'ai déja tenté une ſolution générale du problême des vibrations des cordes élaſtiques, & des chaines péſantes; mais étant maintenant fort preſſé ſur l'impreſſion de cette piéce, & aiant d'ailleurs quelques autres occupations indiſpenſables, je ne puis pas pouſſer aſſès loin ces recherches, c'eſt pourquoi je me reſerve à traiter ce ſujet dans une autre occaſion.

Au reſte ſi on ſuppoſe dans notre cas que les corps ſe meuvent dans un milieu, dont la réſiſtance ſoit proportionelle à $\varepsilon u + \alpha$, $\varepsilon$ & $\alpha$ dénotant des conſtantes quelconques, la double intégration des équations différentielles réuſſira de même; & ſi les quantités $\varepsilon$ & $\alpha$ ſont aſſès petites par rapport à la quantité $e$, on pourra encore

achever

achever le calcul par un procédé ſemblable à celui que nous avons expoſé plus haut. Cette Analiſe pourroit être à la vérité de quelque utilité dans la recherche de la diminution du ſon, mais ce ſeroit s'écarter trop de l'objet principal que de la vouloir expoſer ici tout au long.

43. La conſtruction que nous avons trouvé dans le chapitre précédent pour le cas, où le nombre des corps mobiles eſt infini, eſt fondée entiérement ſur ce qu'une ſuite infinie de produits de deux ſinus, dont les Arcs croiſſent en progreſſion arithmétique eſt toujours égale à zero, excepté dans le cas, où les ſinus devenant égaux la ſuite donnée ſe change en une ſuite des quarrés des mêmes ſinus. Quoique cette vérité découle immédiatement de la formule, que nous avons trouvé pour exprimer la ſomme d'une telle ſuite, cependant comme c'eſt-là un des points principaux de notre Analiſe, il ne ſera pas hors de propos de démontrer encore la même propoſition d'une autre maniére, qui ſoit & plus directe, & plus lumineuſe.

Soit propoſée la ſuite infinie

$$\text{ſin.}\,\varphi \times \text{ſin.}\,\theta + \text{ſin.}\,2\varphi \times \text{ſin.}\,2\theta + \text{ſin.}\,3\varphi \times \text{ſin.}\,3\theta + \&c.$$

ſi l'on développe chaque terme par les téorèmes de la multiplication des angles, on aura les deux ſeries

$$\frac{\text{coſ.}\,(\varphi-\theta) + \text{coſ.}\,2\,(\varphi-\theta) + \text{coſ.}\,3\,(\varphi-\theta) + \&c.}{2}$$

$$-\frac{\text{coſ.}\,(\varphi+\theta) + \text{coſ.}\,2\,(\varphi+\theta) + \text{coſ.}\,3\,(\varphi+\theta) + \&c.}{2}$$

dont chacune eſt ſommable par la théorie des progreſſions géométriques. Suppoſons pour ſimplifier le calcul, que la ſerie dont on veut prendre la ſomme ſoit généralement coſ. $x$ + coſ. $2x$ + coſ. $3x$ + &c. On réduira d'abord chaque terme aux expreſſions immaginaires exponentielles, ainſi l'on obtiendra

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}} + e^{3x\sqrt{-1}} + \&c.}{2}$$

$$+ \frac{e^{-x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}} + \&c.}{2}$$

ces deux ſuites traitées comme deux progreſſions géométriques infinies, ſe changent par les règles connues en $\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{2(1-e^{x\sqrt{-1}})} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{2(1-e^{-x\sqrt{-1}})}$, & réduiſant au dénominateur commun $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} - 2}{2(2-e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}})}$, ſavoir $\frac{\text{coſ.}\, x - 1}{2(1-\text{coſ.}\, x)} = -\frac{1}{2}$, & telle eſt la valeur d'une ſuite quelconque infinie de coſinus, dont les Arcs croiſſent en progreſſion arithmétique. En appliquant ceci à notre cas, on trouvera la ſomme des deux ſuites données $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$, quelles que ſoient les valeurs des angles $\varphi$, & $\theta$. Cependant lorſque $\theta = \varphi$, il eſt clair que les deux ſeries ſe réduiſent à $\frac{1 + 1 + 1 + 1 + \&c.}{2}$ $- \frac{\text{coſ.}\, 2\varphi + \text{coſ.}\, 4\varphi + \text{coſ.}\, 6\varphi + \&c.}{2}$ Si $m-1$ eſt le nombre des termes dans chacune de ces ſuites, la ſomme de la première eſt néceſſairement $= \frac{m-1}{2}$, la ſomme de la ſeconde eſt par ce que nous avons trouvé ci-deſſus $= -\frac{1}{2}$, donc la ſomme de toutes deux ſe trouvera dans ce cas $= \frac{m-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$.

44. Mais dira-t-on comment peut il ſe faire, que la ſomme de la ſuite infinie, coſ. $x$, + coſ. $2x$, + coſ. $3x$, + &c. ſoit toujours $= -\frac{1}{2}$, puiſque dans le cas de $x = 0$,

$= 0$, elle devient néceſſairement égale à une ſuite d'autant d'unités ; je répons que cela provient des termes qui ſe détruiſent naturellement dans tous les cas excepté dans celui, où $x = 0$. Pour rendre la choſe plus ſenſible cherchons la ſomme de la ſuite, $\text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, 2x + \text{coſ.}\, 3x + \&c. + \text{coſ.}\, mx$ ; on trouvera par la même méthode ci-deſſus qu'elle eſt égale à

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{(m+1)x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{x\sqrt{-1}})} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}} - e^{-(m+1)x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{-x\sqrt{-1}})}$$

expreſſion qui ſe réduit à $\dfrac{\text{coſ.}\, x - 1 + \text{coſ.}\, mx - \text{coſ.}\, (m+1)x}{2(1 - \text{coſ.}\, x)}$

$= \dfrac{\text{coſ.}\, mx - \text{coſ.}\, (m+1)x}{2(1 - \text{coſ.}\, x)} - \dfrac{1}{2}$. Or dans le cas où $m$ eſt un nombre infini, l'on ſuppoſe que l'$1$ évanouiſſe auprès d'$m$, d'où le terme $\text{coſ.}\, (m+1)x$ devient $= \text{coſ.}\, mx$, & la formule $\dfrac{\text{coſ.}\, mx - \text{coſ.}\, (m+1)x}{2(1 - \text{coſ.}\, x)}$ reſte $= 0$ ; mais lorſque $x = 0$ le dénominateur devient auſſi égal à zero ; c'eſt pourquoi elle reçoit une valeur donnée qu'on trouvera par la différentiation du numérateur & du dénominateur. On a donc en différentiant $\dfrac{(m+1) \times \text{ſin.}\, (m+1)x - m\, \text{ſin.}\, mx}{2\, \text{ſin.}\, x}$ qui ſe réduit de nouveau à $\dfrac{0}{0}$ par la ſuppoſition de $x = 0$ ; qu'on différentie une ſeconde fois, il en viendra $\dfrac{(m+1)^2 \times \text{coſ.}\, (m+1)x - m^2 \times \text{coſ.}\, mx}{2\, \text{coſ.}\, x}$, & faiſant $x = 0$, $\dfrac{(m+1)^2 - m^2}{2} = m + \dfrac{1}{2}$ ; donc la valeur de la ſerie eſt dans ce cas $= m + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = m$ préciſément comme l'on a vû plus haut.

Au reſte par la méthode de ſommer les ſuites des coſinus, ou ſinus, que nous venons d'expliquer, on trouvera que la ſuite finie, $\text{ſin.}\ \varphi \times \text{ſin.}\ \theta + \text{ſin.}\ 2\varphi \times \text{ſin.}\ 2\theta + \text{ſin.}\ 3\varphi \times \text{ſin.}\ 3\theta + \&c. + \text{ſin.}\ (m-1)\varphi \times \text{ſin.}\ (m-1)\theta$

$$\text{eſt} = \frac{\text{ſin.}\ m\varphi \times \text{ſin.}\ (m-1)\theta - \text{ſin.}\ (m-1)\varphi \times \text{ſin.}\ m\theta}{2(\text{coſ.}\ \varphi - \text{coſ.}\ \theta)}$$

ce qui convient avec ce qu'on a trouvé (art. 38.) en faiſant $\varphi = \frac{\lambda\pi}{2m}$, & $\theta = \frac{\mu\pi}{2m}$, & ſuppoſant $\mu$ un nombre entier quelconque.

45. Nous avons enſeigné dans l'art. 39. à conſtruire l'ordonnée $y$, & la viteſſe $u$, l'une dans le cas, où les viteſſes initiales $V$ ſont $= 0$, & l'autre dans le cas, où les premiéres ordonnées $Y$ ſont $= 0$; cependant ſi on vouloit une conſtruction générale pour tous les cas poſſibles, on pourroit la trouver moiennant les formules précédentes. Car on ſait que les expreſſions de $u$ ne ſont autre choſe, que les différentielles de celles de $y$ en prenant le ſeul tems $t$ pour variable, & effaçant le $dt$; donc ſi après avoir réduit la premiére partie de l'expreſſion de $y$ qui contient ſeulement les $Y$, par la méthode donnée (art. cité), on différentie la formule qui en réſulte, en ne regardant que le tems $t$ pour variable, on aura la formule qui donne la valeur de la premiére partie de l'expreſſion de $u$, & qui contient auſſi les ſeules quantités $Y$. De même ſi l'on intégre par $dt$ la formule réduite de la ſeconde partie de l'expreſſion de $u$, où ſe trouvent les ſeules quantités $V$, & qui eſt ſemblable à celle de $y$ pour les quantités $Y$, comme on a vu (art. 38.) on aura la formule qui donnera la valeur de la ſeconde partie de l'expreſſion de $y$, qui contient de même les ſeules quantités $V$. Ces calculs ſont aſſes longs, & compliqués, & ils demandent d'ailleurs beaucoup de circonſpection, c'eſt pourquoi je ne fais que les indiquer ici pour montrer la route qu'on devroit

tenir

tenir pour parvenir à une réduction directe & générale des expressions données. Il est cependant visible qu'on pourra aisément s'en passer si on veut se contenter d'une construction des quantités $y$ & $u$ pour chaque tems $t$ dérivée de celle qu'on a trouvé (art. 39.).

Soit donc, comme dans l'article cité, $ANB$ la figure dont les ordonnées $MN$ représentent les premiéres excursions $Y$, & $anb$ celle dont les ordonnées expriment les vitesses initiales $V$. Qu'on réitère leur description de part & d'autre (Fig. 10. 11.) à l'infini de la maniére enseignée; qu'on construise ensuite deux autres courbes infinies (Fig. 12. 13.) $A^1N^1B^1$, $a^1n^1b$, dont la première $A^1N^1B^1$ soit telle que chaque ordonnée $M^1N^1$ qui répond à l'abscisse $A^1M^1 = AM$ soit toujours quatriéme proportionelle à la soutangente au point $N$, à l'ordonnée $MN$, & à l'unité; & la seconde $a^1n^1b^1$ ait ses ordonnées $m^1n^1$, égales aux aires $anm$, qui répondent aux abscisses $am = a^1m^1$. Par le mojen de ces quatres courbes que je nommerai, comme celles de Mr. D'Alembert, courbes génératrices, on aura toujours l'ordonnée $y$, & la vitesse $u$ pour chaque abscisse $x$, & pour quelque tems $t$ que ce soit. Car on n'aura qu'à prendre dans la courbe $ANB$ la demisomme des ordonnées qui répondent aux abscisses $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$; & dans la courbe $a^1n^1b^1$ la demidifférence des ordonnées qui répondront aux mêmes abscisses; & la somme totale de ces quantités sera l'ordonnée $y$ cherchée. De même pour la vitesse $u$, on prendra dans la courbe $anb$ la demisomme des ordonnées qui appartiennent aux abscisses $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$, & dans la courbe $A^1N^1B^1$ la demidifférence des ordonnées qui répondent aux mêmes abscisses, & la somme totale de ces quantités donnera la valeur cherchée de la vitesse $u$.

Quoique cette construction soit entiérement fondée sur les tangentes, & sur la quadrature des courbes génératrices trouvées, il ne paroit cependant pas qu'elle puisse être sujette aux difficultés que nous avons exposées (art. 5.) Car, la construction des courbes génératrices une fois établie, il n'est plus besoin d'avoir recours aux théories du calcul différentiel & intégral, pour en déduire celles des autres courbes cherchées; puisque on peut indépendemment de ces calculs par la simple considération des tangentes, & des quadratures, démontrer que ces courbes resolvent le problême sans avoir en aucune façon égard à la loi de continuité dans leurs équations.

Si l'on prend pour la courbe *ANB* la courbe initiale de la corde tendue, & que l'autre courbe *anb* représente les vitesses qu'on donne à tous ses points en la rélachant tout-à-coup, on aura de cette façon la solution générale du problême des cordes vibrantes telle que Mr. D'Alembert l'a eu en vuë dans l'art. XXIII. & suiv. son Mémoire. Il est vrai que ce grand Homme ne cesse d'inculquer que les expressions des vitesses, & des excursions initiales des points de la corde ne peuvent pas être données à volonté (art. XXXIV.) ce qu'il répéte encore expressément dans l'art. II. de son Addition. Mais nous avons fait voir plus haut les raisons qui obligoient cet Auteur à penser ainsi, & ces raisons cessent d'avoir lieu dès qu'on considére tous les points de la corde comme isolés dans leurs mouvemens, comme nous l'avons fait dans les calculs précédens.

# CHAPITRE VII.

## *Théorie des cordes de Musique, & des Flutes.*

46. Les cordes, dont on se sert ordinairement pour les instrumens de Musique, sont de boïau ou d'acier, ou de cuivre; à l'égard des premiéres, elles n'ont presque point d'autre élasticité que celle qui est produite par la tension, mais il n'en est pas de même des autres, dont la roideur se manifeste même, lorsque elles sont tout-à-fait lâches. Cependant il est aisé de voir que la force de cette roideur pour mouvoir la corde, doit être bien petite par rapport à celle qui nait de la tension, d'où il s'ensuit que nous pouvons, sans crainte d'erreur, supposer toutes les cordes parfaitement flexibles, en tenant compte seulement de l'effet de la tension donnée. La maniére commune de les mettre en vibration, en les touchant par quelqu'un de leurs points, soit avec un archet, ou quelqu'autre instrument, consiste à les faire sortir de leur état de repos, & à donner à tous leurs points des impulsions quelconques. Donc si l'on a une corde uniformément épaisse, dont la masse & la longueur soient données, & la tension soit exprimée par un poid équivalant, on pourra toujours par la théorie exposée dans les chapitres précédens trouver le mouvement de cette corde pour un tems quelconque de quelque façon que ses vibrations aient été d'abord produites. Mais la connoissance des mouvemens particuliers des cordes est de peu de conséquence dans la pratique, & ce n'est qu'à la durée de leurs vibrations qu'il est important d'avoir égard, puisque c'est de-là que dépend, selon le sentiment généralement reçu par tous les Physiciens, le ton grave, ou aigu qu'elles doivent rendre.

Or ſi l' on éxamine la conſtruction des courbes génératrices expoſée (art. 45.), on s'appercevra aiſément que leur nature eſt telle, que ſi on augmente, ou qu'on diminue les abſciſſes d'un multiple quelconque de $2a$ les ordonnées correſpondantes demeurent tout-à-fait les mêmes; donc ſi l'on fait que la quantité $\frac{aHt}{T}$ qui doit être ajoutée, & retranchée de chaque abſciſſe $x$ devienne un multiple quelconque de $2a$, on aura la valeur du tems $t$, après lequel la corde reprendra ſa premiére ſituation, avec les mêmes viteſſes dans tous ſes points. Ce tems ſera donc $= \frac{2sT}{H}$ quelque nombre entier poſitif qu'on poſe au lieu de $s$. C'eſt pourquoi le tems des oſcillations ſera toujours le même pour la même corde, & il ne dependra en aucune façon du premier ébranlement, qui peut varier à l'infini. Pour connoître plus exactement ce tems qui eſt $= \frac{2T}{H}$, on n'a qu'à remettre au lieu de $H$ ſa valeur premiére $\surd\,(\frac{2Eh}{aS})$ (art. 25.), & on aura $T\,\surd\,(\frac{2aS}{Eh})$ pour le tems d'une oſcillation entiére, compoſée d'une allée, & d'une revenue, où $a$ eſt la longueur de la corde, $S$ ſon poid, $E$ le poid qui eſt égal à la force de tenſion; or comme $h$ exprime la hauteur d'où un corps péſant peut tomber librement durant le tems $T$ (art. 6.), ſi l'on fait ce tems d'une ſeconde, on aura le tems cherché exprimé de même en ſecondes de cette façon $\surd\,(\frac{2aS}{Eh})$. Suppoſons que le rapport du poid de la corde, à celui qui la tend ſoit comme $a : b$, $b$ ſera une quantité qui ne dependra que de l'épaiſſeur, & de la gravité ſpécifique de la corde; on aura donc

S

$\frac{S}{E} = \frac{a}{b}$, & par conſéquent la formule du tems des vibrations entiéres deviendra $= \frac{2a}{\sqrt{2bb}}$, & une oſcillation ſimple devra être cenſée d' une durée $= \frac{a}{\sqrt{2bb}}$ tout de même comme ſi la corde eut toujours fait ſes mouvemens ſelon les lois de Mr. Tailor. Cette formule a été regardée juſqu'à préſent pour vraie par tous les Auteurs qui ont écrit d' Acouſtique, parce qu'elle s'accorde entiérement avec les proportions connues des divers tons des cordes, qu'on a toujours fait dépendre de la durée de leurs oſcillations. C'eſt auſſi par cette raiſon que pluſieurs d' entr'eux ont cru qu'une corde tendue ne pouvoit reſonner à moins que ſes vibrations ne fuſſent toutes réguliéres & iſocrones comme celles des pendules; ce qui paroit ſans doute inconcevable vû qu'une même corde rend toujours le même ſon, lorſqu'elle eſt pincée, ou ébranlée de quelque façon que ce ſoit. La démonſtration que nous venons de donner peut donc ſervir à établir ces vérités généralement admiſes, ſavoir, que le ton d'une corde eſt toujours proportionel au nombre de ſes vibrations dans un tems donné, & que ce ton ſe conſerve toujours le même, tandis que la corde reſte dans les mêmes circonſtances.

47. Quoique la connoiſſance abſolue de la durée de chaque vibration dans une corde donnée ne ſoit guere d' uſage dans la pratique ordinaire, elle eſt cependant néceſſaire pour la détermination d' un ſon fixe, tel que Mr. Sauveur l'a eu en vue dans l' Hiſt. de l' Académie des Sciences de Paris pour l' année 1700. La méthode que ce ſavant Auteur a imaginée pour cela eſt à la vérité fort ingénieuſe, mais elle eſt preſque impraticable, à cauſe de l' extrème délicateſſe d'oreille qu'il faut pour apprécier

les momens des *battemens* de plusieurs sons, & de la grande difficulté qu'on rencontre à mésurer au juste l'intervalle du tems qui se passe entre deux de ces *battemens* consécutifs. Si la détermination de ce son fixe est de tant de conséqnence, comme elle l'a paru à Mr. Sauveur, je crois qu'on pourra la tirer avec plus d'exactitude, & de facilité de la formule trouvée, qui ne requiert d'autres *données* que la longueur de la corde, sa gravité spécifique, & la raison de son poid à celui, par lequel elle est tendue. Par exemple si l'on veut selon Mr. Sauveur, que le son fixe rende 100 vibrations dans une seconde, on fera $\frac{a}{\sqrt{2bh}} = 100$, d'où $b$, & $h$ étant donnés, on tirera $a = 100\sqrt{2hb}$.

48. Nous venons de voir que le nombre des vibrations d'une corde donnée est généralement toujours le même; il est cependant quelque cas particulier, où ce nombre peut être diminué, & réduit à la moitié, au tiers &c. Pour s'en convaincre on n'a qu'à refléchir, que la corde vibrante ne revient à son premier état, que parceque la construction des courbes génératrices est telle, qu'en levant, où ajoutant aux abscisses les tems donnés les ordonnées demeurent les mêmes. Donc si on suppose que la figure initiale de la corde participe déja à cette propriété, savoir qu'elle contienne deux, ou trois, ou plusieurs ventres égaux, & disposés alternativement au dessus, & au dessous de l'axe, & qu'il en soit de même pour la courbe des vitesses, on verra aisément que les courbes génératrices déduites de celles-ci rendront la corde à son premier état dans la moitié, le tiers &c. du tems donné. Ainsi la durée d'une oscillation se reduira dans ce cas à $\frac{a}{n\sqrt{2bh}}$, ou $n$ exprime le nombre des ventres primitifs. Il n'en sera pas de même si les ventres ne se trouvent

pas

pas égaux, & diſpoſés de la façon qu'on a dit, car il ſera toujours facile de démontrer, que les courbes réſultantes ne pourront jamais avoir les propriétés néceſſaires, afin que les vibrations puiſſent s'achever dans un tems différent de celui qui convient à la nature de la corde donnée. Mr. Euler avoit déja fait cette importante remarque pour le ſeul cas où la corde part du repos dans les Mémoires cités de l'Académie de Berlin.

49. Lorſque une corde eſt en vibration, il n'y a généralement parlant que les deux bouts qui reſtent toujours immobiles; cependant ſi l'on fait attention aux cas particuliers qu'on vient d'examiner, on voit clairement que tous les points, où la figure initiale de la corde coupe l'axe doivent néceſſairement demeurer en repos, puiſque il y a de part & d'autre des branches ſemblables ſituées alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe. Voions donc s'il ne pourroit pas y avoir d'autres points qui fuſſent revétus des mêmes propriétés.

Qu'on ſe repréſente pour cela une branche entiére *AMNB* de la courbe génératrice pour la corde *AB*; & qu'on ſuppoſe qu'un de ſes points quelconque *M* doive reſter immobile. (Fig. 14.) Il eſt d'abord évident qu'elle devra couper l'axe dans ce même point, il faudra enſuite que la partie *MN* de la courbe ſoit égale & ſemblable à la partie *AM*, afin que la demiſomme des ordonnées également diſtantes de part & d'autre ſoit toujours nulle, d'où il s'enſuit qu'à moins que le point *M* ne ſoit à la moitié de l'axe *AB* le point *N* tombera hors du point *B*, & ainſi la courbe cherchée *AMNB* coupera toujours l'axe en deux points *M* & *N*. Elle ſera par conſéquent compoſée de trois parties *AM*, *AN*, & *NB*, dont les deux premiéres ſont égales par ſuppoſition, & la troiſiéme eſt encore arbitraire. Or je dis que la courbe *AMNB* doit avoir toutes ces parties égales, ſemblables, & ſituées al-

terna-

ternativement au deſſus & au deſſous de l'axe $AB$. Pour s'en convaincre, qu'on refléchiſſe, que, puiſque les branches qui ſe trouvent ſituées de part & d' autre des deux points $A$ & $M$ doivent être ſemblables & égales dans toute la courbe génératrice engendrée par la deſcription réitérée de celle-ci, il faut que cette courbe ait toutes ſes parties de même nature que celle qui eſt compriſe entre les points $A$ & $M$, d'où il ſuit que la partie de l'axe $NB$ ne peut être qu'égale à la partie $AM$ ou double, ou triple &c., ou encore la moitié, ou le tiers &c. de ſorte que l'axe entier $AB$ puiſſe ſe diviſer en un nombre de parties égales, & aliquotes aux deux parties données $AM$ & $MB$. Et toute la courbe $AMNB$ devra dans ce cas couper l'axe à chaque point de ces diviſions, & elle devra contenir de plus autant de ventres égaux correſpondans.

On conclura donc que nul point d'une corde de Muſique vibrante ne pourra demeurer en repos, à moins qu'il ne la diviſe en deux parties commenſurables entr' elles ; que dans ce cas la figure initiale de la corde, & la courbe des premiéres viteſſes devront néceſſairement avoir autant de branches égales & ſemblables, qu'il y aura d'unités dans les deux parties $AM$, $MB$, & qui ſeront de plus ſituées alternativement au deſſus & au deſſous de chacune des parties aliquotes, dans leſquelles tout l'axe $AB$ ſera diviſé. Si donc en mettant une corde en vibration, on fait enſorte qu'un point quelconque reſte immobile, ſans empêcher que la vibration ne ſe communique, & ne s'étende de part & d'autre à toute la corde, cette corde ſe diviſera naturellement en autant des parties égales qu'il en faut pour rendre commenſurables les deux parties coupées par le point immobile. D'où il s'enſuit que, lorſque ces deux parties ſont en elles mêmes incommenſurables, il ſera impoſſible que le point de leur diviſion puiſſe jamais reſter en repos, & la corde dans

ce

ce cas ſera obligée de changer de figure d'un inſtant à l'autre, ce qui détruira néceſſairement l'iſocroniſme, & la régularité de ſes vibrations. Mais dans le cas, où le point immobile diviſe toute la corde en parties commenſurables, il ſe formera pour lors un nombre de points de repos naturels, & la corde continuera de faire des oſcillations réguliéres & iſocrones, dont la durée ne ſera que la moitié, le tiers, le quart &c. de la durée des oſcillations entiéres, ſelon que les deux parties auront pour commune méſure la moitié, le tiers, le quart &c. de toute la corde, comme on l'a démontré (art. 48.).

Par un ſemblable raiſonnement, on trouvera que ſi les points ſuppoſés immobiles coupent la corde en un nombre de parties quelconques elle ſe diviſera en autant de parties égales qu'il en faudra, pour que chacune d'elles méſure exactement chacune des premiéres parties coupées; par conſéquent ſi ces parties ſont entr'elles incommenſurables, les mouvemens de la corde deviendront irréguliers, pendant que dans tout autre cas les vibrations s'achéveront dans un tems proportionel réciproquement à celui des ventres naturels de la corde.

50. On s'eſt apperçu depuis long-tems qu'une corde pouvoit rendre dans certaines circonſtances des ſons aigus qui différoient plus, ou moins du ſon naturel, & on a même reconnu que ces ſons n'étoient preſque jamais que l'octave au deſſus, l'octave de la quinte, & la double octave de la tierce.

Mr. Sauveur qui a fort bien traité cette matiére dans ſon ſiſtème général d'Acouſtique, imprimé parmi les Mémoires de l'Académie Royale de Paris pour l'année 1701. s'eſt appliqué le premier, que je ſache, à découvrir la véritable origine de ces divers ſons rendus par une même corde qu'il appelle ſons harmoniques; il prend (Fig. 15.) pour cela une corde d'une longueur quelconque qui étant

pincée

pincée à vuide forme des vibrations ſimples & uniques qui rendent le ſon naturel de la corde qu' il nomme ſon fondamental ; il diviſe enſuite cette corde en un nombre de parties égales, & mettant un chevalet mobile, ou un autre obſtacle quelconque leger, au premier point marqué des diviſions, de ſorte que le mouvement qu'on donne à la corde puiſſe ſe communiquer de part & d'autre, & que l' obſtacle poſé ne faſſe d' autre effet que d' obliger le point, où il eſt appliqué, à reſter toujours en repos, cet Auteur obſerve que ſi l' on ébranle la corde dans cet état, elle ſe diviſe naturellement par une eſpèce d'ondulation en autant de ventres égaux, dont les extrémités qui reſtent immobiles répondent préciſément aux points marqués des diviſions; car aiant mis ſur la corde divers morceaux de papier, il trouve, que ceux qui ſont ſur les neuds ne ſont point du tout déplacés, les autres au contraire tombent auſſi-tôt que la corde commence de ſe mouvoir. Mr. Sauveur compare de plus les ſons harmoniques produits par une telle corde avec les ſons naturels d' autres cordes ſemblables, & il reconnoit que la longueur de celles-ci doit toujours égaler celle de la partie de la corde donnée qui eſt interceptée entre le chevalet & le bout plus proche. Il en eſt de même ſi le chevalet eſt placé à la ſeconde, troiſiéme &c. diviſion, & en général la corde forme toujours autant de neuds immobiles à égale diſtance les uns des autres qu'il en faut pour que le chevalet réponde à un d'eux, & le ſon rendu eſt toujours ſemblable au ſon que produiroit une des parties de la corde compriſe entre deux des points de repos naturels. Que ſi le chevalet diviſe la corde en deux parties incommenſurables, la corde ne fait pour lors que fremir, ſans réſonner, & l' on n' entend qu'une eſpèce de bruit confus & deſagréable à l'oreille.

51. L'on

L'on ſait qu'en prenant le ſon d'une corde pour fondamental ſa moitié rend l' octave au deſſus, ſon tiers rend l'octave de la quinte, ſon quart rend la double octave du ſon fondamental, & la cinquiéme rend la double octave de la tierce; les autres diviſions ne forment plus que des diſſonances avec le ſon principal, à moins qu'elles ne donnent des octaves de ceux-ci. D'où il s'enſuit que l'on ne peut tirer d' une même corde d' autres ſons harmoniques que la quinte, ou la tierce, en omettant les octaves qui peuvent être regardées comme des repétitions de leurs ſons principaux. Ainſi la trompette marine qui eſt composée d' une ſeule corde, à laquelle on applique le doigt en la faiſant réſonner avec un archet, ne produit jamais d'autres ſons que ceux qu'on vient de nommer, & le doigt tient lieu de l'obſtacle leger qui diviſe les vibrations de toute la corde.

L' on a encore heureuſement appliqué cette théorie à toutes les eſpèces de violons, où par le moien d' une legère preſſion de doigt on produit des ſons harmoniques très agréables à l' oreille, & qui s' approchent beaucoup du ſon des flutes; on pourroit même, je crois, avec beaucoup d' exercice parvenir à exécuter ſur le violon une piéce quelconque de Muſique par des ſons toujours harmoniques, car pour en tirer tous les ſons néceſſaires, il ne s'agiroit que d'ajuſter ſur les cordes deux doigts, dont l' un fut appuié fortement ſur le manche, comme on le fait ordinairement, en appliquant en même tems l' autre au tiers, ou à la cinquiéme de la corde pour lui donner le ſon harmonique convenable. C' eſt aux habiles Muſiciens à juger ſi l' exécution de ce projet n' eſt pas ſujette à d' autres difficultés capables de rebuter les meilleurs Artiſtes.

52. Nous avons fait voir dans l' art. 9. que les mouvemens des parties de l' air qui compoſent une fibre éla-

ſtique continue, ne différent nullement de ceux des cordes vibrantes, ſi ce n'eſt en ce que les vibrations de celles-ci ſont perpendiculaires à l'axe, au lieu que les autres ſont longitudinales. Donc ſi l'on conſidére une fibre quelconque d'air, ou bien un amas de pluſieurs fibres renfermées dans un tuïau qui les borne, & les diſtingue de la maſſe continue de l'air extérieur, ces fibres pourront recevoir dans toutes leurs parties des mouvemens ſemblables à ceux des points d'une corde de Muſique d'égale longueur & d'égal poid, & dont la force de tenſion ſoit équivalente à celle de l'élaſticité naturelle de l'air. Si donc les mouvemens de ces fibres peuvent ſe communiquer à l'air extérieur, il en réſultera un ſon qui ſera de même nature qui celui qui ſeroit produit par la corde correſpondante.

Voila le principe, & l'origine de tous les inſtrumens à vent, qui conſtituent une claſſe d'inſtrumens de Muſique non moins étendue, & non moins importante que celle des inſtrumens à cordes.

Le célèbre Mr. Euler a tâché le premier de raprocher les théories de ces deux eſpèces d'inſtrumens dans une Théſe ſur le ſon imprimée à Bâle l'année 1727., & puis dans ſon excellent traité de Muſique qui a paru l'année 1739. Il compare en effet dans ces endroits la colomne d'air contenue dans un tuiau à une corde du même poid, & de même longueur, & qui ſeroit tendue par un poid égal à celui d'un cilindre de mercure, dont la baſe fut la même que celle du tuiau, & la hauteur celle du Baromètre. Par cette comparaiſon il détermine le ſon que doit rendre une flute quelconque donnée, & il le trouve entiérement d'accord avec l'expérience. Il faut avoüer, que cette théorie a été portée par ce ſavant Auteur au plus haut dégré de perfection, & qu'il n'y reſtoit rien à déſirer qu'une démonſtration analitique, & tirée de la nature même des mouvemens qu' il a comparé ensemble. Mais pour mettre cette importante matiére dans tout son jour, développons-en ici encore quelque cas particulier. Soit une flute de longueur $= a$ depuis l'embouchure jusque à l'autre extrémité, soit $b^2$ la largeur de sa base, que je suppose être par tout la même; on aura par l' art. 46. la durée d'une oscillation aérienne $= \sqrt{\frac{Sa}{2Eb}}$, où $S$ est le poid de la colonne d' air contenue dans la flute, & $E$ son élasticité naturelle. Supposons donc $k$ égal à la hauteur barométrique, & $1 : n$ la raison de la gravité spécifique de l' air à celle du mercure, on aura $E$ égal au poid d' une colonne de mercure, dont la base est $b^2$, & la longueur $= k$; & $S$ égal au poid d' une semblable colonne, dont la longueur soit seulement $= \frac{a}{n}$, d'où $\frac{S}{E} = \frac{a}{nk}$; & par conséquent le tems d' une oscillation sera $= \sqrt{\frac{a^2}{2nkb}} = \frac{a}{\sqrt{2nkb}}$, ce qui fait voir que ces tems, toutes choses d' ailleurs égales, sont comme les longueurs des flutes, auxquelles les tons répondent comme l' expérience nous l' enseigne en effet. Si l' on veut que la flute achéve 100 vibrations dans une seconde, ce qui produit le son fixe de Mr. Sauveur, on sera $\frac{100a}{\sqrt{2nkb}} = 1''$, d' où $a = \frac{\sqrt{2nkh}}{100}$; or $nk$ exprime précisément la hauteur de l' air supposé homogène qui se trouve à peu près $= 850 \times 32$ pieds, & $h$ est de 15 pieds environ; donc $2nkh$ sera $= 850 \times 32 \times 30 = 816000$, dont la racine quarrée se trouve 903. 3 . . *&c.* ce qui étant divisé par 100 donne pour la longueur du tuiau 9 pieds & 33 milliemes de pied.

Il est vrai que Mr. Sauveur trouve d' après ses expériences des *battemens* que le tuiau d' Orgue qui rend le

 son

ſon fixe eſt ſeulement de 5 pieds, ce qui donneroit ſuivant la théorie environ le double des vibrations que cet Auteur a déterminé pour chaque ſeconde; mais il eſt aiſé de trouver la raiſon de cette différence ſi on refléchit que les vibrations de deux cordes ne ſont réellement concurrentes, c'eſt-à-dire commençantes en même tems, & ſe faiſant dans le *même ſens* qu'après un nombre de vibrations double de celui qui eſt porté par la nature des deux cordes données, d'où il ſuit, que puiſque les *battemens* ne conſiſtent que dans la concurrence des vibrations, le nombre déterminé par l'expérience de Mr. Sauveur ſera préciſément la moitié de ce qu'il eſt en effet, & dans ce cas les réſultats de l'expérience s'accordent aſſès bien avec ceux de la théorie.

53. Puiſque les mouvemens des parties de l'air contenu dans une flute quelconque ſont les mêmes que ceux d'une corde de Muſique correſpondante, il s'enſuit que la durée de leurs vibrations pourra de même dans certains cas particuliers devenir moindre qu'à l'ordinaire, & n'en être plus que la moitié, le tiers, le quart &c., comme nous l'avons démontré dans les cordes vibrantes, lorſqu'elles ſe diviſent en pluſieurs ventres égaux. Or ceci arrive préciſément dans les inſtrumens à vent, lorſque on augmente d'une certaine façon la force du ſoufle; car c'eſt une vérité de long-tems reconnue dans les trompettes, & dans toutes ſortes de flutes, & ſur tout dans les traverſiéres, que par un ſimple changement d'embouchure l'on obtient depuis le ſon grave, ou fondamental, ceux qui y répondent comme les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ſavoir l'octave au deſſus la douziéme, la quinziéme, & la dix-ſeptiéme majeure; car le ſon ſuivant eſt proſcrit de l'harmonie du ſon principal.

Au

Au reſte quelque fondée & plauſible que ſoit cette théorie des inſtrumens à vent, il faut pourtant avoüer qu'on ne ſauroit encore par ſon moien rendre raiſon de toutes les propriétés qu'on y obſerve, & qui regardent la forme de l'inſtrument, la largeur, & la poſition des trous. Car aiant méſuré au juſte leurs diſtances dans des bonnes flutes traverſiéres, & douces je ne les ai point trouvé tout-à-fait proportionnelles aux tons correſpondans. De plus l'on ſait que pour rendre certains tons, il faut une combinaiſon donnée de trous ouverts & bouchés ou entiérement, ou à demi ſeulement, ce qui me paroit fort difficile à expliquer par la ſimple comparaiſon des cordes vibrantes. Comme cette matiére demande un éxamen long & éxact de toutes les circonſtances qui entrent dans chaque cas particulier, & que d'ailleurs cette piéce eſt actuellement ſous preſſe, j'ai cru devoir différer ces recherches pour une autre occaſion ou, ſuivant quelques vues que j'ai déja formé, j'eſpère de pouvoir raméner aux lois de la théorie ci-deſſus établie la plûpart des bizarreries qui ſe rencontrent dans ces ſortes d'inſtrumens.

# SECTION SECONDE

## *De la propagation du son .*

---

## CHAPITRE PREMIER

### *De la vitesse du son.*

54. IMaginons une fibre élastique composée d'un nombre infini $m$ de particules d'air, dont une quelconque reçoive par l'ébranlement des parties du corps sonore une impulsion donnée $c$, il s'agit de déterminer la loi suivant laquelle ce mouvement se communiquera aux autres particules de la même fibre. Soit $AB$ (Fig. 15.) la longueur de toute la fibre $= a$, $AC$ la distance de la particule $C$ qui est frappée par le corps sonore $= X$, & $AD$ la distance d'une autre particule quelconque $D$, dont on veut savoir le mouvement $= x$, on trouvera par l'application des formules données (art. 35.) que la vitesse $u$ de cette particule sera exprimée par une seule série infinie, comme il suit

$$u = \frac{2c}{m} \left( \text{sin.} \frac{X\pi}{2a} \times \text{sin.} \frac{x\pi}{2a} \times \text{cos.} \frac{tH\pi}{2T} \right.$$
$$+ \text{sin.} \frac{2X\pi}{2a} \times \text{sin.} \frac{2x\pi}{2a} \times \text{cos.} \frac{2tH\pi}{2T}$$
$$+ \text{sin.} \frac{3X\pi}{2a} \times \text{sin.} \frac{3x\pi}{2a} \times \text{cos.} \frac{3tH\pi}{2T}$$
$$\left. + \, \&c. \text{ à l'infini} \right).$$

Car tous les termes $P^{\prime}$, $P^{\prime\prime}$, $P^{\prime\prime\prime}$ &c. évanouissent par supposition, & les autres $Q^{\prime}$, $Q^{\prime\prime}$, $Q^{\prime\prime\prime}$ &c. se réduisent

a,

à, $c \times$ sin. $\frac{X\pi}{2a}$, $c \times$ sin. $\frac{2X\pi}{2a}$, $c \times$ sin. $\frac{3X\pi}{2a}$. Qu'on change maintenant le produit de sin. $\frac{X\pi}{2a}$ par cos. $\frac{tH\pi}{2T}$ avec les produits des sinus & cosinus des autres angles multiples en des simples sinus, & l'équation ci-dessus deviendra

$$u = \frac{c}{m} \Big( \text{sin. } \frac{x\pi}{2a} \times \text{sin. } \Big[ \frac{X}{a} + \frac{Ht}{T} \Big] \frac{\pi}{2} + \text{sin. } \frac{2x\pi}{2a} \times \text{sin. } \Big[ \frac{X}{a} + \frac{Ht}{T} \Big] \frac{2\pi}{2} + \text{sin. } \frac{3x\pi}{2a} \times \text{sin. } \Big[ \frac{X}{a} + \frac{Ht}{T} \Big] \frac{3\pi}{2} + \text{\&c. à l'infini}$$

$$+ \text{sin. } \frac{x\pi}{2a} \times \text{sin. } \Big[ \frac{X}{a} - \frac{Ht}{T} \Big] \frac{\pi}{2} + \text{sin. } \frac{2x\pi}{2a} \times \text{sin. } \Big[ \frac{X}{a} - \frac{Ht}{T} \Big] \frac{2\pi}{2} + \text{sin. } \frac{3x\pi}{2a} \times \text{sin. } \Big[ \frac{X}{a} - \frac{Ht}{T} \Big] \frac{3\pi}{2} + \text{\&c. à l'infini} \Big).$$

On démontrera ici de la même maniére que nous avons fait (art. 38.) sur des formules semblables, que ce deux suites infinies sont toujours égales à zero, excepté dans le cas, où $\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la premiére, & $\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la seconde deviennent $= \pm \left(\frac{x}{a} + 2s\right)$, $s$ dénotant un nombre quelconque entier positif, ou négatif; d'où il s'ensuit que la vitesse $u$ dans chaque particule ne sera, pour ainsi dire, qu'instantanée, & qu'elle n'obtiendra jamais aucune valeur réelle, que lorsque $\frac{X}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm \left(\frac{x}{a} + 2s\right)$ quels que soient les signes qu'on y veuille prendre.

Cette

Cette équation contient comme on le voit un certain rapport entre les eſpaces $x$, & les tems $t$, les autres quantités $X$, $a$, $H$, $T$, $S$ demeurant conſtantes. Elle contiendra donc la loi générale, ſuivant laquelle ſe fait la propagation du ſon.

55. Pour développer cette importante matiére autant qu'il eſt poſſible, imaginons que la particule $D$ qui reçoit ſon petit mouvement inſtantané au bout du tems $t$ ſoit éloignée par $DC = z$ de la premiére particule $C$ qui a reçu l'impulſion extérieure; l'on aura donc $AD = x = z + X$, laquelle valeur ſubſtituée dans l'équation ci-deſſus donnera $\frac{X}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm \left(\frac{X+z}{a} + 2s\right)$, & multipliant par $a$, & tranſportant les termes $\pm \frac{Hat}{T} = z + 2sa$, ou bien encore $\pm \frac{Hat}{T} = -(2X + z + 2sa)$; & ces deux équations ſatisferont toujours également en prenant les ſignes ambigus comme on voudra. Or puiſque le tems $t$ doit toujours être poſitif l'ambiguité des ſignes tombera néceſſairement ſur la quantité $z$ qui pourra par conſéquent avoir des valeurs poſitives, & négatives, d'où il ſuit que le ſon partant du point $C$ ſe propagera également de part & d'autre vers $A$ & vers $B$. De plus il eſt viſible par ces formules que la communication du mouvement d'une particule à l'autre ſera toujours uniforme, & qu'elle ſe fera avec une viteſſe qui ne depandra en rien de la premiére viteſſe $c$ imprimée extérieurement, puiſque l'expreſſion de cette viteſſe ne ſe rencontre nulle part dans la formule trouvée. Voici donc les lois que les ſons doivent toujours ſuivre dans leur propagation.

Une particule quelconque d'air ébranlée par le mouvement d'oſcillation d'un corps ſonore mettra en mouvement

vement les particules circonvoiſines, & celles-ci les autres qui les ſuivent dans les fibres rectilignes, qui partent toutes du même point comme d' un centre commun; ces mouvemens dans chaque particule ſeront inſtantanés, & ſe communiqueront toujours avec une même viteſſe conſtante, quelle que ſoit l' impulſion que la première particule ait reçu, d' où dépand la force, où la foibleſſe du ſon. Ce n'eſt donc pas par une eſpèce d'ondulation que le ſon ſe propage, comme l'ont cru juſqu'ici tous les Phyſiciens d' après Mr. Newton; en effet l' on a fait voir dans l' Introduction que cette hypothèſe eſt inſuffiſante pour en expliquer les principaux phénomènes, & qu'elle eſt, outre cela, ſujette à beaucoup d'autres difficultés qui la rendent tout-à-fait inſoutenable.

On voit de-là que le nombre des coups d'air qui viennent frapper nos organes, doit néceſſairement répondre au nombre des vibrations des particules des corps ſonores. Donc puiſque dans les cordes de Muſique la durée de leurs vibrations ne dépand que de leur nature, & nullement des ébranlemens extérieurs, on a la raiſon pour laquelle chaque corde rend généralement toujours le même ton quelle que ſoit la maniére avec laquelle on la mette d'abord en vibration, ce ton ne dépandant que de la groſſeur, de la longueur, & de la tenſion de la corde, comme on le ſavoit déja d'après la ſeule expérience. On appliquera encore le même raiſonnement au flutes, dont les mouvemens ont été prouvés ſemblables à ceux des cordes vibrantes. Et ſi on veut juger par analogie, on pourra l' étendre à tous les autres corps ſonores qui ont lieu dans la nature, & dont les oſcillations ne paroiſſent pas ſuſceptibles d' une juſte eſtimation analitique.

56. Mais pour retourner à notre formule: l'on a poſé (art. 35.) $H = \sqrt{\left(\frac{2Eh}{Sa}\right)}$, par conſéquent on aura $Ha$

$= \sqrt{(\frac{2Eah}{S})}$; & faiſant les mêmes ſuppoſitions de l'art. 52. on trouvera $Ha = \sqrt{2nkh}$; par ce moien on aura $\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = z + 2sa$; $\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = -(2X + z + 2sa)$, d'où l'on tire par la différentiation $\pm \frac{dt\sqrt{2nkh}}{T} = \pm dz$, ſavoir $\pm \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{2nkh}}{T}$, qui eſt l'expreſſion de la viteſſe abſolue du ſon, ſoit qu'il ſe propage de $C$ vers $B$, ou de $C$ vers $A$.

On peut évaluer cette expreſſion comme dans l'art. cité; mais afin de la pouvoir plus commodement comparer avec les formules déja connues, il ſera utile de la réduire aux méſures ordinaires des oſcillations des pendules. Soit $l$ la longueur du pendule ſimple iſocrone, qui fait une oſcillation dans le tems $T$; l'on ſait qu'un corps péſant parcourt un eſpace $\frac{l}{2}$ dans un tems qui eſt à $T$ comme le diamètre du cercle eſt à la circonférence; on aura donc ce tems $= \frac{2T}{\pi}$, & comme les eſpaces parcourus en tombant ſont comme les quarrés des tems, l'on aura de plus $h : T^2 = \frac{l}{2} : \frac{4T^2}{\pi^2}$, d'où l'on tire $h = \frac{\pi^2 l}{8}$, qui donnera $\pm \frac{dz}{dt} = \frac{\pi}{2T} \sqrt{nkl}$; c'eſt pourquoi l'eſpace parcouru par le ſon dans le tems $T$ d'une oſcillation du pendule $l$ ſera $= \frac{\pi}{2} \sqrt{nkl}$. Il eſt à remarquer en premier lieu que la longueur $a$ de la fibre aérienne ne ſe trouve plus dans cette formule de la viteſſe du ſon, d'où il ſuit qu'elle doit toujours être la même, ſoit que le ſon ſe propage dans des lieux ouverts, où l'Atmoſphère peut

être

être confidérée comme continuée à l'infini de toute part, foit qu'il fe trouve renfermé dans des détroits quelconques, où les fibres aériennes ne peuvent être que d'une longueur donnée.

L'expérience eft encore d'accord fur ce point de l'aveu de tous les Phyficiens; mais il y a plus: la formule que nous venons de trouver eft la même qui avoit déja été donnée par Mrs. Newton, & Bernoulli, & dont les réfultats fe trouvent affès conformes à la vérité, quoique ces deux Auteurs l'aient tiré de Principes infuffifans, & même fautifs, comme on l'a fait voir au commencement de cette Piéce. Pour fe convaincre de l'identité de ces formules nous n'avons qu'à nous rapeller la *Prop.* 49. de l'art. 4., où il eft dit que le fon doit parcourir un efpace égal à la circonférence du cercle, dont le rayon eft $A$, ou bien $nk$ dans le tems qu'un pendule de même longueur fait une ofcillation entiére compofée d'un allée & d'une revenue; donc puifque Mr. Newton fuppofe le mouvement du fon uniforme, & que les tems des ofcillations des pendules font comme les racines quarrées de leurs longueurs, l'on aura l'efpace $\frac{\pi nk}{2}$ parcouru par le fon dans le tems d'une ofcillation fimple du pendule $nk$ à l'efpace qu'il parcouroit dans le tems d'une femblable ofcillation du pendule $l$ comme $\sqrt{nk} : \sqrt{l}$, d'où l'on tire cet efpace $= \frac{\pi}{2}\sqrt{nkl}$ tout de même comme on l'a trouvé par nôtre calcul.

57. Les réfultats de cette formule étant affès connus, je ne crois pas devoir m'arrêter à les examiner. On fait effectivement qu'elle ne donne que 979 piés pour chaque feconde, au lieu que les expériences moiennes donnent un efpace de 1142. Cette différence quoique affès grande en elle même ne monte néanmoins qu'environ à

 un

une dixiéme de l'espace total. D'ailleurs Mr. Newton expose dans le scolie à la *Prop.* 49. du second Livre des Principes quelles peuvent en être les raisons; au reste il ne doit pas être étonnant que la théorie différe tant soit peu de l'expérience à l'égard des quantités absolues; car on sait que les expériences toujours assès compliquées ne peuvent jamais fournir des données simples, & debarassées de conditions étrangéres, telles que l'Analise pure les demanderoit.

Mr. Euler a donné à la vérité dans les endroits cités dans l'Introduction une formule plus approchante du vrai qui est d'une espace $= 4\sqrt{nkl}$; ce qui revient à 1222 piés par seconde dans les plus grandes chaleurs, & à 1069 dans les plus grands froids. Mais comme cet Auteur n'a pas laissé voir l'Analise qui l'a conduit à ce résultat nous ne pouvons porter aucun jugement la dessus. Je remarquerai seulement que Mr. Euler suppose, sans le démontrer, que chaque globule d'air subisse des dilations & des contractions successives qui se communiquent, suivant les lois de la communication du mouvement, aux particules contenues dans la même fibre avec une vitesse constante, & la même pour tous les sons soit forts, soit foibles [ voiés la Thése cité, art. 52., où il a donné pour la premiére fois la formule qu'il a ensuite repété dans la Dissertation du Feu ] ce qui peut servir, pour le dire en passant, à faire voir de combien notre théorie doit être préférable, malgré son inéxactitude sur ce point.

CHA-

# CHAPITRE II.

## *De la refléxion du son, ou des Echos.*

58. Nous avons trouvé dans le chapitre précédent que les lois de la propagation du son sont contenues dans les deux formules générales.

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = z + 2sa$$

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = -(z + 2X + 2sa)$$

Or il y a ici trois cas à distinguer. 1$^{mo}$ Quand l'air est tout-à-fait libre ce qui donne $a = \infty$, & $X = \infty$; 2$^{do}$ Quand l'air n'est libre que d'un côté, par éxemple quand il y a au point $A$ de la fibre aérienne un obstacle invincible qui lui sert d'appui; dans ce cas l'on aura de même $a = \infty$, mais l'$X$ qui est égal à $AC$ sera fini, puisque il dénote la distance du corps sonore à l'obstacle qui est en $A$; 3° Quand les fibres de l'air sont terminées des deux côtés par des obstacles inébranlables aux extrémités $A$ & $B$. L'on aura dans ce cas $a$ fini, & égal à la distance des deux obstacles, & $X$ sera de même fini, & exprimera la distance du corps sonore au premier obstacle $A$.

Examinons avec soin ces cas l'un après l'autre. Soit en premier lieu $a = \infty$, & $X = \infty$, $X$ sera un infini moindre que $a$, parce qu'on doit toujours regarder la fibre comme infinie de part & d'autre du point $C$; ainsi l'on aura $X = \frac{a}{2}$, & les deux équations ci-dessus deviendront

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = z + 2sa$$

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = -(z + [2s + 1]a).$$

Il eſt viſible que, $a$ étant infini, le tems $t$ n'obtiendra des valeurs finies que dans la premiére de ces équations, & dans le cas de $s = 0$; car l'on a ici $\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{2nkb}}$, où l'alternative des ſignes eſt néceſſaire afin que le tems $t$ puiſſe toujours être poſitif ſoit que $z$ ſoit poſitif, ou négatif. Donc il n'y aura dans ce cas qu'un inſtant donné, dans lequel chaque particule ſoit ébranlée; d'où il s'enſuit que dans l'air tout-à-fait libre le ſon ſera unique, & qu'on ceſſera de l'entendre dès que le corps ſonore aura fini ſes vibrations.

59. Suppoſons en ſecond lieu $a$ infini & $X$ fini, on tirera des valeurs finies de $t$ des deux formules générales en poſant $s = 0$; la premiére nous donnera $\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nkb)}}$; & la ſeconde $\pm t = -\frac{T(z + 2X)}{\sqrt{(2nkb)}}$ Chaque particule ſera donc ébranlée deux fois de ſuite; le premier ébranlement arrivera comme dans le cas précédent, le ſecond lui ſuccédera après un intervalle de tems fini, qui dépendra des deux diſtances $X$ & $z$. Donc quand il ſe trouve un obſtacle quelconque qui peut terminer les fibres aériennes d'un côté, il ſe formera une répétition du même ſon, laquelle ſera diſtinguée du ſon primitif ſi l'intervalle du tems entre l'un & l'autre ne ſe trouvera pas moindre d'une quinziéme de ſeconde, qui eſt le moindre eſpace requis pour que l'oreille puiſſe appercevoir diſtinctement deux ſons ſucceſſifs.

Pour méſurer au juſte cet intervalle, on diſtinguera deux cas, lorſque $z$ eſt poſitif, & lorſqu'il eſt négatif. Dans le premier on aura $t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nkb)}}$, & $t = \frac{T(z + 2X)}{\sqrt{(2nkb)}}$, dont la différence eſt $\frac{2TX}{\sqrt{(2nkb)}}$; dans le ſecond on aura de même $t$

$= \frac{T z}{\sqrt{(2nkb)}}$ ; & l'autre valeur ſera $t = \frac{T(2X - z)}{\sqrt{(2nkb)}}$ dont la différence ſe trouvera $= \frac{2T(X - z)}{\sqrt{(2nkb)}}$.

Cette différence ſera donc dans le premier cas égale au tems que le même ſon met à parcourir un eſpace $= 2X$; & dans le ſecond égale au tems qu'il lui ſaudroit pour parcourir l'eſpace $= 2X - 2z$. Or comme le ſon qui part du point $C$ (Fig. 15.) ſe propage de part & d'autre, l'on concevra clairement la formation du ſon répété, ſi on imagine que celui qui eſt propagé vers $A$, ſoit pour ainſi dire refléchit par le point $A$; & qu'il retourne en arrière avec la même viteſſe ; ainſi lorſque $z$ eſt poſitif, & que l'oreille eſt en $D$ de l'autre part de l'obſtacle, elle recevra premiérement l'impreſſion du ſon qui a parcouru l'eſpace $CD$ enſuite elle ſera de nouveau frappée par un ſemblable ſon qui aura parcouru l'eſpace $CA + AD$, ſavoir $2CA + CD$ ce qui donne préciſément, pour la différence des tems, un tems proportionel à l'eſpace $2CA = 2X$. Au contraire ſi $z$ eſt négatif, & que l'oreille ſoit placée en $D'$ entre le corps ſonore, & l'obſtacle, ce ſera le même ſon qui part de $C$ vers $A$ qui ſe fera entendre deux fois, le premier tems repondra à l'eſpace $CD' = z$; & le ſecond à l'eſpace $CA + AD = 2X - z$, dont l'intervalle repond au juſte à l'eſpace $2X - 2z$.

Le phénomène de la répétition du même ſon eſt un des plus connus dans la nature; on l'appelle ordinairement *Echo*, & on voit en effet qu'il eſt produit par des obſtacles quelconques qui interceptent le ſon, & l'obligent pour ainſi dire à rebrouſſer chemin, tels ſont par exemple les montagnes, les bois épais, les rochers, les cavernes, & même les nuées qui ſe trouvent à côté des corps ſonores.

60. Mais

60. Mais achevons l'éxamen des nos formules, & passons au troisiéme cas, où $a$ & $X$ sont deux quantités finies. Il est d'abord évident que les deux équations nous donneront ici une infinité de valeurs pour le tems $t$ qui répondront à autant d'instans, où une même particule d'air sera remuée. Pour les développer supposons successivement $s = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$ &c. on tirera de la première équation

$$\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z + 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z - 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z + 4a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$\pm$ &c.

& ainsi de suite

La seconde nous donnera

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X + 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X - 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X + 4a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$\pm$ &c.

On conclut de-là que quand les fibres sonores de l'air sont terminées des deux côtés par des obstacles immobiles, qui en appuient & soutiennent les extrémités, il doit pour lors y avoir une infinité de répétitions du même son, savoir

ſavoir un Echo composé qui dureroit toujours ſi la conſtitution de ces fibres ne pouvoit jamais être altérée. Pour connoître la progreſſion des tems, au bout deſquels doit ſe faire une des répétitions, nous remarquerons que chacun des tems $t$ dans les équations précédentes, eſt égal au tems que le ſon emploie à parcourir les eſpaces correſpondans $z, z + 2a, z - 2a$, &c. $z + 2X, z + 2X + 2a, z + 2X - 2a$ &c. Donc ſi l'on conſidère toujours ces eſpaces poſitifs, on pourra les repréſenter par les parties de la ligne $AB$ de la maniére ſuivante.

*1.re Série.*

$CD$
$CB + BA + AD$
$CA + AB + BD$
$CB + BA + AB + BD$
$CA + AB + BA + AD$
& ainſi de ſuite.

*2.de Série.*

$CA + AD$
$CA + AB + BA + AD$
$CB + BD$
$CB + BA + AB + BD$
& ainſi de ſuite.

Si l'on conjoint ces deux ſéries, on en tirera ces deux-ci
$CD$
$CB + BD$
$CB + BA + AD$
$CB + BA + AB + BD$
&c.
$CA + AD$
$CA + AB + BD$
$CA + AB + BA + AD$
&c.

La nature & l'arrangement des termes qui composent ces progressions, fait assés connoître comment le même son qui part du corps sonore qui est en *C*, doit revenir plusieurs fois frapper l'oreille au même endroit *D*. Car on voit aisément que la premiére de ces derniéres suites exprime le chemin du son propagé de *C* vers *B*, & reflêchi d'abord par l'obstacle *B*, ensuite par *A*, & de nouveau par *B*, & ainsi à l'infini. Au contraire la seconde exprime de même les lois des allées, & revenues du son, qui partant du même endroit *C* se meut d'abord vers *A*, d'où il est ensuite porté vers *B*, & de-là de nouveau vers *A*, & ainsi alternativement. Et ces deux sons achèvent pour ainsi dire leurs mouvemens dans le même espace *AB*, & dans le même tems sans se troubler, ou s'entrempêcher en aucune façon dans leurs rencontres. Donc toutes les fois que chacun d'eux passera par le même point *D*, on entendra dans cet endroit une répétition, ou bien un écho du son primitif.

C'est ainsi que se forment les échos composés qui répétent plusieurs fois le même son en differens tems, qui ne sont pas toujours égaux entr'eux, selon que le corps sonore, & le point d'où l'on veut entendre l'écho se trouvent différemment placés sur la ligne qui joint les deux obstacles.

61. Les Physiciens rapportent quelques exemples de ces échos composés, entre lesquels il en est qui répétent le même son plus de cinquante fois de suite, & on observe toujours qu'ils sont produits par des murs ou des rochers, ou des autres obstacles quelconques situés presque vis-à-vis. La plûpart d'entr'eux ont cru pouvoir expliquer ces phénomènes par la théorie de la reflexion; car disent-ils, les particules de l'air qui est en vibration rencontrant des obstacles invincibles sont refléchies à peu-prês comme l'on concoit que le sont les rayons de la

lumière

par les ſurfaces unies des miroirs ; & cette explication paroit d'autant plus plauſible, qu'on trouve en effet par expérience que l'intervalle du tems écoulé entre deux ſons conſécutifs, eſt préciſément tel qu'il le faut pour que le ſon principal puiſſe être refléchit par les obſtacles donnés, & revenir à l'oreille.

Cependant à examiner la choſe à fond, on ſera obligé de convenir que le Principe de la refléxion, comme on la conçoit ordinairement dans le choc des corps, ou dans la lumière, eſt ici un Principe tout-à-fait illuſoire. Car l'expérience nous montre que l'écho ne dépend en rien du poli de la ſurface refléchiſſante, puiſque il arrive que des ſurfaces en apparence polies ne produiſent point d'écho, au lieu qu'on l'entend ſouvent dans des lieux remplis de mille inégalités. En effet comment concevoir que des rochers, des forets, des nuées ſoient propres à produire dans l'air une refléxion ſemblable à celle des rayons de la lumière ſur les miroirs. Rien donc n'eſt moins fondée que cette Catoptrique des ſons que l'on a inventé pour rendre raiſon des propriétés de l'écho. Mr. D'Alembert eſt, peut-être, le premier qui aie ſenti l'inſuffiſance de cette théorie, dans l'Enciclopédie au mot *Echo*; mais ni lui, ni aucun autre que je ſache n'a jamais entrepris de donner des explications plus fondées de ce phénomène.

La théorie que nous venons de déduire de nos formules eſt, ce me ſemble, tout-à-fait à l'abris de ces difficultés; car il ne faut autre choſe pour produire l'écho, ſi non que les extrémités des fibres aériennes ſonores trouvent un appui fixe, de quelque nature qu'il ſoit; s'il n'y a qu'un obſtacle d'un côté le ſon ne ſera renvoié qu'une fois; c'eſt l'écho ſimple. S'il y en a deux qui terminent la fibre de part & d'autre les ſons ſeront renvoiés réciproquement, ce qui formera des échos compoſés qui dureront autant que la conſtitution des fibres ſonores pourra subsister; si donc ces sortes d'échos durent plus, ou moins, ce sont toujours quelques circonstances extérieures qui en sont cause. Mais dira-t-on, pourquoi n'entend-on pas d'écho toutes les fois que l'air est renfermé entre quelques obstacles. Les Physiciens ont déja répondu à cette difficulté en faisant voir qu'il faut une certaine distance entre le point, d'où l'on veut entendre l'écho, & l'obstacle qui doit le renvoier, de même qu'entre le corps sonore, & cet obstacle, afin qu'on puisse le distinguer du son primitif. Sans cela le son refléchi se confond entiérement avec le direct, & ne fait qu'en augmenter la force, comme on l'observe tous les jours. Il faut de plus que l'espace que l'écho doit parcourir ne soit embarassé par aucun corps qui en empêche la propagation. Lorsque ces conditions auront lieu je ne doute pas qu'il n'y ait toujours des échos; la construction des échos artificiels est appuiée sur ces seuls Principes.

## CHAPITRE III.

### *Du mélange, & du rapport des sons.*

62. JE n'ai traité jusqu'ici de la propagation du son que dans le cas qu'il n'y ait qu'un seul corps sonore qui communique ses vibrations aux parties contigues de l'air; il nous reste à voir si les lois trouvées ont de même lieu quand plusieurs sons sont excités en même tems dans divers endroits, & en quelle maniére ces sons peuvent se répandre dans le même espace sans se troubler, ou se confondre en aucune façon, comme nous le montre l'expérience journaliére.

Sup-

Concevons donc dans la même fibre aérienne sonore $AB$ ( Fig. 16. ) divers points physiques $C'$, $C''$, $C'''$ qui soient frappés en même tems par des corps sonores, qui différent les uns des autres comme on voudra ; soient représentées par $c^{I}$, $c^{II}$, $c^{III}$ *&c.* les impulsions, où les vitesses communiquées à ces points, & que $X^{I}$, $X^{II}$, $X^{III}$ *&c.* désignent leurs distances $AC'$, $AC''$, $AC'''$ *&c.* de la premiére extrémité donnée $A$, on trouvera pour la vitesse $u$ d'un point quelconque $D$ de la même fibre qui est éloignée de $A$ par l'intervalle $AD = x$, l'expression générale suivante.

$$\begin{aligned}
u = \frac{2c^{I}}{m} \Big( & \text{sin.}\,\frac{X^{I}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{tH\pi}{2T} \\
& + \text{sin.}\,\frac{2X^{I}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{2x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{2tH\pi}{2T} \\
& + \text{sin.}\,\frac{3X^{I}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{3x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{3tH\pi}{2T} \\
& + \textit{\&c. à l'infini} \Big) \\
+ \frac{2c^{II}}{m} \Big( & \text{sin.}\,\frac{X^{II}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{tH\pi}{2T} \\
& + \text{sin.}\,\frac{2X^{II}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{2x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{2tH\pi}{2T} \\
& + \text{sin.}\,\frac{3X^{II}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{3x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{3tH\pi}{2T} \\
& + \textit{\&c. à l'infini} \Big) \\
+ \frac{2c^{III}}{m} \Big( & \text{sin.}\,\frac{X^{III}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{tH\pi}{2T} \\
& + \text{sin.}\,\frac{2X^{III}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{2x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{2tH\pi}{2a} \\
& + \text{sin.}\,\frac{3X^{III}\pi}{2a} \times \text{sin.}\,\frac{3x\pi}{2a} \times \text{cos.}\,\frac{3tH\pi}{2a} \\
& + \textit{\&c. à l'infini} \Big) \\
+ \textit{\&c.} &
\end{aligned}$$

Or

On raménera ces expressions à la forme de celles de l'art. 54., & il viendra, comme il est aisé de le voir, une suite de formules toutes semblables entr'elles, & semblables à celle qu'on a trouvé pour le cas d'une seule impulsion donnée $c$. Or afin de connoître ce qui arrivera, lorsque une même particule d'air sera ébranlée par plusieurs sons divers, il faut chercher la valeur d'$u$ au moment de l'ébranlement, & en suivant le même procédé qu'on a enseigné, art. cité, on trouvera que chacune des expressions qui composent la valeur générale de $u$, se réduira à $\pm c^{\text{I}}$, $\pm c^{\text{II}}$, $\pm c^{\text{III}}$ *&c.*, selon que le tems $t$ répondra aux formules $\frac{X^{\text{I}}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$; $\frac{X^{\text{II}}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$; $\frac{X^{\text{III}}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$ *&c.*, où il est à remarquer que l'alternative des signes des quantités $c^{\text{I}}$, $c^{\text{II}}$, $c^{\text{III}}$ *&c.* doit répondre exactement à celle des quantités $\frac{x}{a} + 2s$.

On voit de-là que lorsqu'il n'y a qu'une de ces équations qui soit vérifiée, $u$ retient la même valeur $c$ qu'il a eu au commencement; mais quand plusieurs ont lieu dans même tems, la valeur d'$u$ devient composée des premiéres valeurs $c^{\text{I}}$, $c^{\text{II}}$, $c^{\text{III}}$ *&c.* Donc puisque chacune des équations répond, pour ainsi dire, à chacun des sons particuliers propagés ensemble, cette propagation se fera toujours de la même maniére par rapport à chacun d'eux, comme s'il eut été seul, & il se communiquera d'une particule à l'autre la même impulsion qui a été produite par le corps sonore; par conséquent lorsque deux, ou plusieurs sons se rencontreront, la particule d'air qui se trouve dans leur point de rencontre recevra une impulsion composée des impulsions particuliéres qui constituent la nature de chacun d'eux; & passé ce moment, ils continueront leur chemin comme auparavant, tout de même comme on a vu qu'il arrive dans les échos composés.

63. Nous avons donc trouvé dans nos formules le développement d'un des principaux points de la théorie du son, qui regarde la maniére, avec laquelle l'air est capable de transmettre à l'oreille sans mélange les impressions de plusieurs sons différens. Cette vérité qui est une des plus connues par expérience a cependant embarassé si fort les Physiciens jusqu'à présent, que les plus habiles ont été obligés de recourir à des sistèmes pour en rendre raison. Les principaux se réduisent à deux; celui du mélange des vibrations isocrones proposé par Mr. Daniel Bernoulli; & celui de la différente élasticité des particules de l'air inventé par Mr. De-Mairan. Pour ce qui est du premier nous en avons vu l'insuffisance dans le Chap. V. A l'égard de l'autre il suffira de remarquer que la différente nature des particules de l'air ne peut influer que sur la vitesse du son, comme il résulte de la formule donnée (art. 56.); mais que pour ce qui est de leur ébranlement, il ne dépand que de la nature du corps sonore, dont les parties frappent dans leurs oscillations indistinctement toutes celles de l'air contigu. On peut voir dans l'Article *Fondamental* de l'Encyclopédie les autres raisons qui rendent ces deux sistèmes insoutenables, c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

64. Nous venons de voir que la particule d'air qui se trouve dans la rencontre de deux sons, reçoit un ébranlement différent de celui qui est produit par chaque son en particulier; donc si les sons sont de telle nature que leurs vibrations concourrent toujours après un certain tems donné, l'impression suivie & régulière de ces ébranlemens composés pourra être distinguée des autres impressions particuliéres, & une oreille assés exercée entendra un troisiéme son, dont le rapport avec les autres se trouvera en

com-

comparant le nombre des vibrations particulières, que chacun d'eux achève entre deux concurrences successives. On devra donc entendre ce troisiéme son précisément au point de milieu de la ligne qui joint les deux corps sonores, parceque les sons aiant toujours une même vitesse, c'est là qu'il doivent nécessairement se rencontrer; cependant si l'on considère la masse continue de l'air, on voit que chaque particule d'une fibre sonore doit être considérée comme le centre d'une infinité d'autres fibres, auxquelles elle peut aussi communiquer du mouvement, ce qui fait que le son se propage en tous sens; d'où il suit que l'ébranlement composé, pourra être de même porté à l'oreille dans une infinité d'autre endroits; quoique avec moins de force & moins distinctement à cause de la diminution & de l'altération causée par les résistances des particules éthérogènes, dont toute la masse de l'air est parsémée.

Comme il faut une extrème finesse d'oreille pour appercevoir ces sons composés, aussi n'y a-t-il que quelques uns des plus habiles Artistes qui les aient reconnus. Mr. Tartini est le premier, que je sache, qui se soit attaché à les examiner avec soin, comme on peut le voir dans son Traité de Musique imprimé à Padoue l'année 1754. Ce célèbre Auteur nous apprend qu'en tirant d'un même instrument capable de tenue, comme les violons, les trompettes &c. deux sons à la fois, ou bien en les tirant de deux instrumens éloignés l'un de l'autre de quelques pas, l'on en entend un troisiéme qui est d'autant plus sensible, qu'on se rapproche de plus du point de milieu de l'intervalle donné.

Après beaucoup d'expériences sur ce sujet Mr. Tartini conclut que si l'on considère la suite des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ &c., & qu'on ajuste autant de sons qui

aient

aient le même rapport entr'eux, que les termes de cette ſuite, deux ſons voiſins quelconques produiront toujours, pour troiſiéme ſon, le prémier ſon qui répond au terme $\frac{1}{2}$. Or en éxaminant la concurrence des vibrations de tous ces ſons, on trouve, qu'elle ne peut avoir lieu qu'après un nombre de vibrations égal aux dénominateur de la fraction qui exprime les ſons correſpondans; ainſi les deux ſons exprimés par $\frac{1}{5}$, & par $\frac{1}{6}$ ne deviennent concurrens, qu'après cinq vibrations du premier & ſix du ſecond, & ainſi des autres; d'où il s'enſuit qu'en comparant le nombre des concurrences au nombre des vibrations de chaque ſon particulier, le troiſiéme ſon produit par deux de la férie précédente devroit toujours être exprimé par 1, ce qui donne proprement l'octave de celui qui eſt réſulté à Mr. Tartini. Mais l'on ſait que la difference entre un ſon, & ſon octave eſt ſouvent inſenſible à l'oreille, par la facilité naturelle que nous avons de les confondre enſemble; donc ſi l'on ſubſtitue au troiſiéme ſon de Mr. Tartini ſon octave au deſſous, les réſultats de ces éxperiences deviendront en tout conformes à ceux que nous donne notre théorie. L'on doit être d'autant plus porté à admettre cette échange d'un ſon dans ſon octave, que Mr. Serre dans ſon Ouvrage ſur les Principes de l'Harmonie de 1753. en faiſant mention des expériences de Mr. Tartini, nous rapporte, que les troiſiémes ſons produits par des tierces majeures, & mineures, ſe trouvent preciſément à l'octave baſſe de ceux de Mr. Tartini.

Nous avons parlé plus haut de l'éxperience des *battements* de Mr. Sauveur, & nous avons vû qu'ils répondent exactement aux concurrences des vibrations; il y à donc tout lieu de croire qu' ils ſont de même formés par la rencontre de deux ſons, & qu' ainſi leur explication dépend éntierement de la théorie que nous venons de donner ; Il eſt donc vraiſemblable que le troiſiéme ſon de Mr. Tartini n' eſt produit, que par une ſuite de *battemens*, & dans ce cas il eſt très aiſé de réconnoître, que le troiſiéme ſon doit avoir avec les deux ſons primitifs le rapport que nous avons ci-deſſus établi.

Ce ſeroit ici le lieu d' examiner la nature, & la ſource des conſonances, & des diſſonances ; mais il faut avouer que, malgré les efforts de pluſieurs habiles Muſiciens, on n' eſt pas encore parvenu à établir la-deſſus des fondemens conſtans, & généraux; Mr. Sauveur eſt dans l' idée qu' un accord plait d' autant plus à l' oreille que ſes *battemens* ſont plus fréquens, & qu' ils reſtent pour cela moins ſenſibles ; d' où il ſuit, que les accords conſonans doivent être précíſément ceux dont les vibrations ſont les plus concurrentes, & qu' au contraire les accords deviennent diſſonans, lorſque la concurrence des vibrations eſt telle, qu' elle peut aiſément être apperçue de l' oreille. Mr. Tartini tire auſſi de ſes expériences du troiſiéme ſon pluſieurs conſéquences pour la nature de l' Harmonie. Il prétend que le troiſiéme ſon eſt toujours la vraie baſſe dont les ſons particuliers ſont les deſſus ; & c' eſt ſur cela qu' il a principalement fondé ſon ſiſteme de Muſique. Quoique il en ſoit il eſt au moins certain par ce que venons de démontrer, que de quelque façon qu' on prenne la choſe, la concurrence des vibrations en eſt toujours le fondement, quoique préſenté ſous des points de vue différens ; nous verrons encore ci-après, que le Principe de l' Harmonie qu' on prétend trouver dans la nature même des corps ſonores revient encore a celui-ci.

Lorſ-

65. Lorſque les parties des corps ſonores ſont ebranlées, l' air reçoit autant d' impreſſions ſucceſſives, que ces parties font de vibrations, & ces impreſſions ſe répandent par tout ſans ſe multiplier, ou ſe troubler en paſſant d'une particule d' air dans l' autre. Donc ſi le corps ſonore eſt de telle nature, que les vibrations de ſes parties commencent toutes, & s' achèvent toujours dans le même tems, l' oreille ſera frappée à la fois par pluſieurs petits coups, qui ſe ſuccederont par des intervalles de tems égaux, & cette uniformité d' impreſſions produira ce ſentiment agréable qu' on appelle *Son*; au contraire ſi les vibrations des parties du corps ſonore différent les unes des autres, c' eſt a dire qu' elles ne ſoient pas toutes d' égale durée, notre organe recevra à chaque inſtant des ébanlemens différens, & on n' entendra dans ce cas qu'un bruit confus. Cette verité qui à été de long-tems réconnue eſt une ſuite néceſſaire de ce que l' on a démontré ſur les mouvemens des cordes vibrantes, & ſur ceux des fibres élaſtiques d' air; car on prouve tous les jours que les cordes, qui produiſent les meilleurs ſons ſont toujours celles qui ont une plus grande uniformité dans toute leur extenſion, ce qui les rend plus capables des mouvemens réguliers, & iſocrones, que nous avons determiné dans le Chap. VII. Ainſi l' explication du ſon, & du bruit que quelques Auteurs ont voulu donner en diſant que tout bruit eſt *un*, & qu' au contraire tout ſon eſt *compoſé*, tombe ici d' elle même, puiſqu' elle eſt tout a fait oppoſée à ce que nous venons de démontrer.

Suppoſons a préſent, que pendant qu'une corde reſonne il y ait près d' elle pluſieurs autres cordes tendues, il eſt clair que l' air ébranlé par la première frappera toutes les autres, & que les impulſions reçues par celles-ci répondront parfaitement a chaqu'une des vibrations de celle qu' on fait résonner ; donc à force de coups reitérés, elle devront de même entrer en vibration ; or puisque la durée des vibrations des cordes est absolument déterminée par la constitution de la corde même, il s'ensuit que si toutes les cordes sont de même nature, les vibrations naissantes de celles qui sont ébranlées par l'air pur, seront toujours favorisées par des impulsions continues qui procédent de la corde principale ; c'est pourquoi au bout d'un certain tems elles seront aussi forcées de résonner. Au contraire si les cordes sont telles, que leurs vibrations ne puissent jamais être concurrentes, elles seront tantôt favorisées, & tantôt troublées par les impulsions qui procédent de la corde principale, & ainsi il sera impossible, qu'elle reçoivent jamais un mouvement sensible, & capable de produire le le son qui leur est propre. Supposons à présent que les cordes tendues ne soient pas à l'unisson de celle qu'on fait résonner, mais qu'elles y répondent comme nombre à nombre, il faudra ici distinguer deux cas ; lorsque le son de la corde principale est mésuré exactement par ceux des autres cordes, & lorsque ces sons sont seulement commensurables entr'eux. Il est visible que dans le premier de ces cas, les vibrations des cordes qu'on laisse en repos, seront toujours favorisées par celles de la corde principale qu'on ébranle, & par conséquent ces cordes devront de même résonner comme si elles étoient à l'unisson ; dans l'autre cas les cordes ne pourront résonner dans leur totalité ; car elles seront toujours en partie troublées, & en partie favorisées par les vibrations de la principale ; & comme les impulsions contraires, & favorables sont toujours uniformes, elles les forceront de prendre des figures telles, que leurs vibrations puissent toujours être favorisées. Il faudra donc qu'elles se divisent en plusieurs ventres égaux, de sorte que le son de chacun

de

de ces ventres ſoit où à l'uniſſon de celui de la corde principale, où bien, qu' il le méſure toujours exactement comme dans le premier cas. Or puiſque il n'y a rien qui rétienne fixes les noeuds formés par les ventres naturels de ces cordes, il arrivera facilement que les vibrations particuliéres ſe dérangent les unes les autres, ce qui en détruira l'uniformité, & empêchera par conſéquent les cordes de réſonner; elle ne feront donc que frémir au ſon de la principale, & ſe diviſeront, en frémiſſant, par une eſpèce d'ondulation, comme on le voit dans les ſons harmoniques.

Ce Phénomène a été obſervé par Mrs. Wallis, & Merſenne les premiers, & puis par Mr. Sauveur dans la diſſertation citée (art. 50.). Tout le monde le reconnoit aujourd' hui; & on convient généralement, que l'air ébranlé par les oſcillations d'une corde eſt celui qui met les autres en mouvement, mais il reſtoit encore à donner la raiſon pourquoi, de pluſieurs cordes frappées également par les mêmes coups d'air il n'y a que les harmoniques qui puiſſent réſonner, où frémir ſimplement. C'eſt a quoi il me paroit d'avoir entiérement ſatisfait par tout ce qui a été démontré juſqu' à préſent.

Je ſouhaiterois pouvoir expliquer de même la multiplicité des ſons harmoniques, qui ſe font ſentir en frappant une ſeule corde, tels que la douxiéme, & la dixſeptiéme, au deſſus du ſon principal. Mais j'avoue qu' après bien de réflexions, je ne ſuis pas encore parvenu a trouver ſur ce ſujet rien de ſatisfaiſant. Ayant examiné avec toute l'attention dont je ſuis capable, les oſcillations des cordes tendues, je les ai toujours trouvé ſimples, & uniques dans toute leur étendue, d'où il me paroit impoſſible de conçevoir comment divers tons peuvent être engendrés à la fois. Il ſeroit pour cela inutile de recourrir aux théo-

ries

ries dont on à fait mention (art. 63.) puisque nous en avons fait aussi-tot sentir le défaut. Je suis donc enclin a croire que ces sons puissent être produits par d'autres corps qui résonnent au bruit du son principal, comme ont vient de le voir dans les cordes; & ce qui peut donner quelque poids à cette conjécture, c'est que ce mélange de sons harmonieux n'est guère sensible, que dans les Clavecins, ou dans les autres instrumens montés de plusieurs cordes.

Quoique il en soit je désirerois que des personnes dont l'oreille fût extrémement fine, & qui ne l'eussent pas beaucoup exercé a entendre de la Musique, voulussent bien se prendre la peine de répéter ces expériences sur une seule corde fixée par deux chevalets sur une simple table, dans des lieux ouverts de toute part; dans ce cas l'on pourroit être sûr, que ni la prévention de l'oreille acoutumée a entendre toujours les sons principaux accompagnés de leurs harmoniques, ni la résonnance des corps circonvoisins ne pourroit y avoir aucune part; & le résultat de l'expérience déviendroit hors de toute atteinte.

Mr. Rameau, un de plus célèbres Artistes de nos jours, & a qui l'art Musical est si rédevable à donné en 1750. une démonstration du Principe de l'Harmonie fondée sur les expériences rapportées de la résonnance des corps sonores. Cet Auteur croit avoir ainsi découvert dans la nature même les vrais fondemens de l'Harmonie, qu'on avoit avant lui inutilement cherché par d'autres voies; mais après tout ce que nous venons de démontrer on voit évidemment que ce Principe même tire son origine de celui de la concurrence des vibrations, Principe dès longtems réconnu pour la source des consonnances, & des dissonances; & sur lequel Mr. Euler à établi sa nouvelle théorie de Musique dans le Traite cité (art. 52.)

Ce

Ce célebre Géometre à donné en effet à ce principe toute l'étenduë, dont il paroit capable, & il à tâché par la de ramener a des formules assés simples, les principales règles de la Composition. L'on ne doit donc plus régarder le principe de Mr. Raméau que comme une nouvelle preuve de celui-ci tirée immédiatement de l'expérience; mais cet Auteur aura toujours le mérite d'avoir sçu en déduire avec une extreme simplicité la plupart des loix de l'Harmonie que plusieurs expériences détachées, & aveugles avoient fait connoître.

Au reste quelque principe qu'on adopte pour développer la nature des consonances, & des dissonances il réstera toujours a expliquer pourquoi il n'y a d'autres rapports primitifs consonans que ceux qui sont contenus dans les nombres 1, 3, 5; car il est certain qu'une corde qui sera la septiéme partie, où bien septule d'une autre devra resonner dans le premier cas, & frémir seulement dans le second tout de même comme si elle rendoit une douxiéme, ou une diseptiéme, d'où il s'ensuit, que suivant même le Principe de Mr. Rameau on dévroit régarder le rapport de 4 : 7., où bien de 7 : 8 pour consonans, ce qui est néanmoins dementi par l'expérience. Mais ce qui est plus étonnant c'est, que le rapport de 8 : 9 qui constitue une seconde majeure, est beaucoup moins dissonant que celui de 7 : 8, quoique les concurrences soient plus fréquentes dans celui-ci, que dans l'autre. Il y a la même question a faire sur plusieurs accords, qui ne sont pas reçus dans l'Harmonie, quoique ils contiennent moins de dissonances que d'autres, qu'on emploie avec succès. Je crois, que dans quelque sistème de Musique, que l'on veuille imaginer l'on ne pourra éluder ces difficultés qu'en récourant au gout, & au sentiment comun sur lesquels l'habitude, & les préjugés ont peut être beaucoup plus de pou-

pouvoir, qu'on ne le pense ordinairement. Mais ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans des telles discussions. Le savant Mr. D'Alembert en a traité fort au long dans l'Article *fondamental* de l'Encyclopédie, auquel nous nous contenterons de renvojer.

# REFLEXIONS

## SUR LES QUANTITES IMAGINAIRES

## PAR M. LE CHEV. DAVIET DE FONCENEX.

1. ON rencontre si souvent des quantités imaginaires dans les expressions algébriques qu'il seroit à souhaiter qu'on se fut attaché à en examiner avec plus de soin la nature & l'origine. Ces recherches auroient été d'un grand secours dans toutes les parties de Mathématiques qu'on traite par le calcul, & on auroit évité par là beaucoup de paradoxes & de contradictions dans une Science qui en devroit être entiérement exempte. La nature du calcul introduit en effet presque toujours dans la solution d'une question, des cas qui lui sont étrangers, & le problême alors quoique possible conduit à des équations, dont plusieurs racines peuvent être imaginaires: souvent même une formule qui paroissoit devoir satisfaire entiérement à la question, nous la présente dans certaines circonstances d'une façon absurde & impossible: nous en verrons des exemples frappans dans la suite. Du reste le premier cas n'a d'autre inconvénient que la difficulté de débarasser l'équation de ces valeurs imaginaires; mais dans le second on pourroit facilement être induit en erreur par ces formules, & regarder comme impossible une question, dont toute la contradiction consiste dans la maniére, dont on l'exprime algébriquement. Souvent au contraire, parcequ'on ne peut faire entrer dans l'expression analytique d'un problême toutes les conditions qui lui appartiennent, l'algèbre nous en fournit une solution réelle pour des cas où ces conditions le rendent impossible. J'en pourrois apporter beaucoup d'exemples;

mais cette matiére d'ailleurs étrangère à mon sujet, ayant été suffisamment traitée par d'autres, & particuliérement par Mr. D'Alembert dans l'Encyclopédie à l'article *Equation*, où l'on trouvera des réflexions neuves & intéressantes, je passe à examiner avec plus de soin l'origine des racines imaginaires qu'on trouve dans les équations élevées.

2. Il est d'abord évident que si toutes ces racines sont imaginaires, le problême implique contradiction: mais s'il s'en trouve des réelles & des imaginaires, la question sera-t-elle en même tems possible & contradictoire? éclaircissons ceci par un exemple. Qu'on se propose de trouver deux moyennes proportionelles $x$ & $y$ entre les quantités $a$ & $b$ données; les deux équations $x^2 = ay$, & $xb = y^2$ donneront en substituant dans la seconde la valeur de $x$ prise dans la premiére $y = \pm \sqrt{(b \times \pm \sqrt{ay})}$, où l'on voit que l'ambiguité des signes de $\pm \sqrt{ay}$ entraine dans la formule deux valeurs imaginaires pour $y$ exprimées par $y = \pm \sqrt{(b \times - \sqrt{ay})}$. Ces valeurs de $y$ répondroient au cas où $x$ seroit négatif, circonstance qui rendroit en effet le problême impossible.

Or comme en chassant les radicaux l'ambiguité des signes évanouit, il est nécessaire que l'équation réduite contienne les deux cas de $x$ positive & négative, & donne par conséquent des racines réelles & imaginaires pour y satisfaire également. Voilà de quelle maniére la même équation appartient en même tems à un problême possible & à un impossible.

En suivant le même procédé on pourroit presque toujours reconnoître (principalement dans les problêmes géométriques) quelles sont les questions qu'on résoud malgré soi avec celle qu'on a en vuë, & on se persuaderoit aisément que puisqu'on n'introduit plusieurs valeurs pour l'inconnue dans l'équation finale que par la multiplication & l'élévation aux puissances, on pourroit de même

com-

combiner de telle façon les opérations inverſes qu'on trouva à part chaque valeur de $x$, qui devroit par conſéquent toujours avoir une expreſſion finie réelle, ou imaginaire.

3. Pour mettre hors de doute cette vérité qui a toujours été ſuppoſée par tous les Algébriſtes, Mr. de Bougainville dans ſon Introduction au calcul intégral, s'eſt ſervi de la conſidération d'une courbe; mais la démonſtration qu'il en tire ne me paroit ni naturelle, ni aſſès rigoureuſe: puiſque la valeur imaginaire qu'il trouve par cette méthode n'étant qu'approchée, on pourroit ſoupçonner que la quantité que l'on néglige, quelque petite qu'elle ſoit, ne fût préciſément celle qui empêcheroit qu'on ne pût exprimer l'inconnue par une expreſſion finie: & l'on eſt d'autant plus porté à former ce doute, que comme il l'a lui même fait voir d'après Mr. D'Alembert, il arrive ſouvent qu'un terme qu'on croyoit pouvoir négliger dans une ſérie, eſt cependant celui qui la fait changer de nature.

Quoiqu'il en ſoit, cette propoſition, qui comme on l'a vu, paroit être une ſuite du procédé qui nous conduit aux équations de dégré élevé, ſuffiroit pour démontrer ce théorème fameux: qu'une équation quelconque peut toujours être diviſée en facteurs réels du ſecond dégré; car il s'en ſuivroit que quelque compliquée que fût une racine quelconque de cette équation, il ne s'agiroit toujours que de diviſions ou d'extractions de racines. Or dans tous ces cas on pourra toujours par une ſimple conſtruction géométrique réduire cette expreſſion à la forme $A + B\sqrt{-1}$, où $A$ & $B$ ſont des quantités réelles (voyés l'article 5.): d'où il ſuit que puiſque toute équation qui conduit à $x = A + B\sqrt{-1}$ doit donner également $x = A - B\sqrt{-1}$ (étant arbitraire de prendre les radicaux quarrés avec le ſigne + ou −) l'équation propoſée ſera diviſible par $x - A \pm B\sqrt{-1}$, & aura par conſéquent encor pour facteur le produit réel $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$.

4. L'importance de ce théorème exigeroit cependant qu'on en eut une démonstration rigoureuse, tirée de la nature même des équations: d'autant plus qu'on mettroit en même tems hors d'atteinte la proposition de l'art. 3. Tel est le plan qu'a suivi Mr. Euler dans une excellente piéce qu'il a donné sur cette matiére dans les Mémoires de l'Académie Royale de Prusse de l'année 1749. Voici la route qu'il a tenu. Qu'on réduise toutes les équations au dégré $2^n$ ce qui est facile par la multiplication: cela fait il est évident qu'il suffiroit de démontrer généralement qu'une équation du dégré $2^n$ est toujours divisible réellement en deux autres du dégré $2^{n-1}$; car par la même raison chacune de celles-ci se diviseroit en deux autres du dégré $2^{n-2}$, & en suivant ce raisonnement on auroit cette équation divisée en $2^{n-1}$ facteurs du second dégré. Pour démontrer donc cette proposition, après avoir fait évanouir le second terme de l'équation, qui devient par là

$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + \&c.$ où les coéficiens $B$, $C$, $D$ &c. sont en nombre $2^n - 1$, qu'on suppose que les deux facteurs cherchés, soient

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \&c.$$

$$\& \; x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \mu x^{2^{n-1}-2} + \nu x^{2^{n-1}-3} + \&c.$$

où le nombre des coéficiens indéterminés est encore $2^n - 1$. La comparaison du produit de ces deux équations avec la proposée fournit autant d'égalités, de façon que toutes les lettres $\alpha$, $\beta$, $\mu$, $\nu$ &c. se pourront déterminer par les connues $B$, $C$, $D$ &c. mêlées avec l'indéterminée $u$, réellement sans extraction de racine, ce qui donnera une équation pour $u$, dont l'exposant sera, comme on le sait par

les

les combinaisons $\frac{2^n \times 2^n - 1 \times 2^n - 2 \times 2^n - 3 \ldots \times 2^n - 1 + 1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots \ldots \ldots 2^n - 1}$ nombre que l'Auteur démontre pairement impair. De ce que le second terme manque dans l'équation, il conclut qu'une racine quelconque $p$ aura toujours sa compagne $-p$, d'où il infère encore qu'on aura généralement pour facteur de cette équation $u^2 - p^2$: donc puisque le nombre des racines est pairement impair, le nombre de ces facteurs doubles sera impair, & par conséquent, dit-il, le dernier terme de cette équation sera négatif, ce qui suffiroit pour démontrer que $u$ aura au moins deux valeurs réelles, ce qui rendroit aussi réels tous les coéficiens $\alpha$, $\beta$, $\mu$, $\nu$ &c.

A l'égard de ce qu'on a dit qu'une racine $p$ exige dans cette équation la $-p$, il ne paroit pas qu'on en puisse douter, puisque l'équation qui détermine $u$ n'appartenant pas plus à la premiére qu'à la seconde des équations supposées, elle doit fournir indifféremment la valeur de $+u$ & de $-u$: d'où il est évident non seulement que le second terme manquera dans cette équation, mais aussi tous les termes pairs. Mais puisque $p$, $p'$, $p''$, $p'''$ &c. sont les racines de l'équation, dont quelques unes peuvent être imaginaires, & avoir un quarré négatif, on ne peut pas conclure de ce que les facteurs $u^2 - p^2$ sont en nombre impair, que le dernier terme de leur produit soit essentiellement négatif. Il faudroit avant tout avoir démontré que le produit $p p' p'' p'''$ &c. de toutes les racines positives doit toujours être réel. Mr. Euler le trouve en effet tel pour les équations du quatriéme dégré; mais pour les autres cas il se contente de dire que ce produit étant déterminable par les coéficiens $C$, $D$, $E$ il ne peut être imaginaire. On sent bien qu'il faudroit encor qu'on fut assûré qu'il est égal à une fonction rationelle de ces coéficiens. Cette circonstance, sans laquelle le théorème ci-dessus perd toute sa force, me paroit assès difficile à démontrer. Pour cela cependant

dant je m' étois d' abord assûré que les racines de l'équation étant $p$, $p'$, $p''$, $p'''$ &c. il suffisoit de faire voir que si entre les combinaisons qu' on peut faire en prenant $2^{n-1}$ de ce quantités ensemble, on choisissoit seulement celles où entroit $p$, & qu' on les multiplia ensemble, cela donneroit exactement le produit $p\,p'\,p''\,p'''$ &c.; mais quoique ces produits se présentassent d' abord selon une loi assès simple, la difficulté que j'ai trouvé à les déduire généralement des coéficiens de l' équation proposée m' a fait abandonner cette recherche, pour examiner si indépendamment des Principes que Mr. Euler avoit déja établi; on ne pourroit point démontrer la proposition en question.

5. Si on a une équation quelconque du second dégré $x^2 + Ax + B = 0$, dans laquelle $A$ & $B$ soient des quantités imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, je dis que ses racines seront aussi de la forme $c + d\sqrt{-1}$, $a$, $b$, $c$, $d$ étant des quantités réelles. Qu'on résolve l' équation proposée, on trouvera $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(-B + \frac{A^2}{4})}$: il est d'abord évident qu'on pourra réduire cette équation à $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$, $g$ & $h$ étant toujours des quantités réelles: on voit de plus que pour donner à cette expression la forme cherchée $c + d\sqrt{-1}$, il suffiroit d'y réduire le radical composé $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$. Pour cela dans un cercle, dont le rayon soit égal à $\sqrt{(g^2 + h^2)}$ qu'on cherche un angle $\varphi$, dont le sinus $= h$, & le cosinus $= g$, ce qu'il est facile de faire au moyen des tables. Le radical $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$ se changera ainsi en $\sqrt{(cos.\,\varphi + sin.\,\varphi\sqrt{-1})}$ qui est égal à $cos.\,\frac{\varphi}{2} + sin.\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}$ ce que je prouve de la maniére suivante. Que $\varphi$ & $\theta$ représentent deux angles quelconques si l'on multi-

multiplie $cos.\ \varphi + sin.\ \varphi \sqrt{-1}$ par $cos.\ \theta + sin.\ \theta \sqrt{-1}$, on trouvera pour produit $cos.\ \varphi \times cos.\ \theta + cos.\ \theta \times sin.\ \varphi \sqrt{-1} + cos.\ \varphi \times sin.\ \theta \sqrt{-1} - sin.\ \varphi \times sin.\ \theta$, ou bien $cos.\ \varphi \times cos.\ \theta - sin.\ \varphi \times sin.\ \theta + (cos.\ \theta \times sin.\ \varphi + cos.\ \varphi \times sin.\ \theta) \sqrt{-1}$. Or l'on sait par les Principes de la trigonométrie que $cos.\ \varphi \times cos.\ \theta - sin.\ \varphi \times sin.\ \theta = cos.\ (\varphi + \theta)$, & que $cos.\ \theta \times sin.\ \varphi + cos.\ \varphi \times sin.\ \theta = sin.\ (\varphi + \theta)$, on aura donc $(cos.\ \varphi + sin.\ \varphi \sqrt{-1}) \times (cos.\ \theta + sin.\ \theta \sqrt{-1}) = cos.\ (\varphi + \theta) + sin.\ (\varphi + \theta) \sqrt{-1}$. Si à présent on fait $\theta = \varphi$ la formule se réduira à $(cos.\ \varphi + sin.\ \varphi \sqrt{-1})^2 = cos.\ 2\varphi + sin.\ 2\varphi \sqrt{-1}$, d'où il suit évidemment que $\sqrt{(cos.\ \varphi + sin.\ \varphi \sqrt{-1})} = cos.\ \frac{\varphi}{2} + sin.\ \frac{\varphi}{2} \sqrt{-1}$, puisqu'en élevant les deux membres au quarré no a $cos.\ \varphi + sin.\ \varphi \sqrt{-1} = cos.\ \frac{2\varphi}{2} + sin.\ \frac{2\varphi}{2} \sqrt{-1}$ équation identique. Si je prens donc $m = cos.\ \frac{\varphi}{2}$ & $n = sin.\ \frac{\varphi}{2}$ j'aurai par la substitution $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})} = m + n\sqrt{-1}$: expression qui ajoûtée, ou levée de la quantité $\frac{A}{2}$ donnera $x = c + d\sqrt{-1}$, comme on s'étoit proposé. Cette proposition préparatoire à la principale que nous avons en vue pouvoit se déduire directement du théorème général démontré par Mrs. D'Alembert, & Euler; mais comme ils l'ont tiré du calcul differentiel, j'ai cru devoir en donner ici une démonstration plus simple, afin qu'une proposition qui appartient entiérement à l'algébre pure ne tint en aucune façon à des Principes transcendans, & ne dépendit que de la simple Géométrie.

Ce lemme posé: soit une équation d'un dégré quelconque $r$, dont on veuille trouver les facteurs trinomes. Qu'on résolve le nombre $r$ en ses facteurs simples, & on aura

$r = 2^m. p. q. r. s.$ &c. où les nombres $p, q, r, s,$ &c. seront des nombres premiers, & par conséquent impairs. Donc le produit $p. q. r. s.$ &c. sera un nombre impair que je nomme $P$.

Qu'on divise à présent l'équation proposée par une équation du second degré dont le coéficient du second terme, soit la lettre indéterminée $u$, & par les régles connues d'algébre on aura une nouvelle équation, où $u$ sera déterminée par les coéficiens de la donnée, & puisque $u$ doit pouvoir représenter toutes les combinaisons possibles des racines de la premiére équation prises deux à deux, on verra facilement par la théorie des combinaisons, que cette équation sera du degré $\frac{2^m. P. (2^m. P - 1)}{2} = 2^{m-1} P. (2.^m P - 1)$ si donc $m = 1$, cette équation sera d'un dégré impair, & aura par conséquent une racine réelle. Que si $m$ est plus grand que l'unité qu'on divise de nouveau cette équation par une autre du second dégré dont le coéficient du second terme soit $u'$, & qu'on fasse pour abréger $2^m. P - 1$ qui est un nombre impair $= P^1$; par les mêmes raisons, que ci-devant la lettre $u'$ sera donnée par une équation dont l'exposant sera exprimé par $\frac{2^{m-1} P. P^1. (2^{m-1} P. P^1 - 1)}{2} = 2^{m-2} P. P^1. (2^{m-1} P. P^1 - 2)$ Dans le cas de $m = 2$ cette équation sera de dégré impair & aura comme on sait une racine réelle. Si enfin $m$ étoit encore plus grand que 2 on n'auroit qu'a poursuivre le calcul, & il est évident que la $m^{me}$ équation devra être d'un dégré impair.

On aura donc les équations suivantes

$$z^2 + uz + M = 0$$
$$u^2 + u'u + M^1 = 0$$
$$u'^2 + u''u' + M^{11} = 0$$
$$u''^2 + u'''u'' + M^{111} = 0$$
&c. &c. &c.

et

Et la derniére équation ſera telle que ſon dernier terme, & le coéficient du ſecond ſeront réels ; puiſque ce coéficient ſera la racine réelle de l'équation $m^{me}$ qui eſt comme on l'a vû de dégré impair (*), & que le dernier terme eſt encor, comme on le ſait, déterminable par ce coéficient, & par ceux de l'équation donnée ſans extraction de racine : ſi donc on prend une des racines de cette équation elle aura la forme $m + n\sqrt{-1}$, & ſera le coéficient du ſecond terme de l'équation qui la précéde, dont le dernier terme ſe tirera de même par de pures préparations algébriques, de ce coéficient & des données de la premiére formule, & les racines de cette nouvelle équation ſeront donc de nouveau de la forme $p + q\sqrt{-1}$. En pourſuivant la même opération on arrivera finalement à la premiére $z^2 + uz + M$, par laquelle on a diviſé la propoſée, & par un raiſonnement ſemblable à celui que nous avons fait pour les autres, on verra que $u$ & $M$ auront la forme $r + s\sqrt{-1}$ : par conſéquent ſi on réſoud cette équation, ſes racines auront encore la forme $A + B\sqrt{-1}$ : d'oú il ſuit, que $z - A - B\sqrt{-1}$ ſera un diviſeur exact de l'équation donnée. Or en ſubſtituant dans celle-ci $A + B\sqrt{-1}$ au lieu de $z$, on trouve pour déterminer $B$ une équation dont tous les termes impairs manquent, ce qui fait connoître que cette équation ſera également diviſible par $z - A + B\sqrt{-1}$ elle le ſera donc auſſi par le produit de ces deux racines, qui eſt le trinome réel $z^2 - 2Az + B^2 + A^2$.

q Quoi-

(*) Comme cette propoſition, qu'une équation de dégré impair a toujours une racine réelle, eſt déduite communément dans les livres d'algébre de la ſuppoſition que les racines imaginaires ſe trouvent toujours deux à deux dans les équations : pour ne pas paroitre tomber dans une cercle vicieux, je remarquerai ici qu'on peut aiſément la démontrer indépendemment de cette ſuppoſition : car ſi on ſubſtitue pour l'inconnue dans une équation impaire, premiérement $+\infty$, & puis $-\infty$, il eſt évident que toute la formule déviendra dans le premier cas $= \infty$, & dans le ſecond $= -\infty$ d'où il ſuit qu'il y a toujours une quantité finie & réelle, qui ſubſtituée pour l'inconnue dans l'équation, la rendra $= o$ : c'eſt à dire que cette équation aura au moins une racine réelle.

Quoique cette propoſition très remarquable dans l'Analyſe, ait été maniée par les plus grands Géomètres de notre tems, elle n' a pas, que je ſache, été démontrée juſqu'à préſent d' une maniére rigoureuſe, & ſatisfaiſante. Au reſte la démonſtration que je viens d' en donner a cet avantage, qu' elle n' eſt fondée que ſur la pure théorie des équations.

Il faut avouer cependant que dans les équations élevées ce procédé dévenant impraticable, on ne peut par cette méthode trouver actuellement ces facteurs: il ſeroit à ſouhaiter que les différens procedés qu' à tenté, pour cela le *R.P.* Le Seur (dans un mémoire ſur le calcul intégral imprimé à Rome l'année 1748. où l'on obſerve, d' ailleurs une excellente conduite de calcul) fuſſent moins compliqués, & doüés d' un plus grand dégré de généralité; car quoique la longueur du calcul l' ait déja fait échouer dès le huitiéme dégré dans l'application qu' il a voulu en faire, ſans qu' il ait même put faire voir dans ce cas particulier la vérité de la propoſition que je viens de démontrer généralement, il paroit cependant qu' en ſimplifiant cette méthode on pourroit s' en ſervir avec ſuccès. C' eſt là une matiére que je me reſerve d' examiner une autre fois, avec la théorie & la réſolution générale des équations qui lui eſt intimément liée. Mais retournons anx quantités imaginaires conſiderées comme des derniers réſultats.

6. Si l' on réflechit ſur la nature des racines imaginaires, qui comme on ſait impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu' elles ne doivent point avoir de conſtruction Géomètrique poſſible, puiſqu' il n' eſt point de maniére de les conſidérer, qui lève la contradiction qui ſe trouve entres les données immuables par elles mêmes.

Cependant pour conſerver une certaine analogie avec les quantités négatives, un Aureur dont nous avons un cours d'algébre d'ailleurs fort eſtimable a prétendu les dé-

voir

voir prendre ſur une ligne perpendiculaire à celle où l'on les avoit ſuppoſé, ſi par exemple (pl. 1. Fig. 1.) on devoit couper la ligne $AB = 2a$ de façon que le rectangle des parties $x \times (2a - x)$, fut égal à la quantité $2a^2$ on trouveroit $x = a \pm \sqrt{(-a^2)}$, pour trouver donc cette valeur de $x$, qu'on prenne ſur la ligne $AB$, la partie $AC = a$ partie réelle de la valeur de $x$, & ſur la perpendiculaire $ED$ les $CE$, $CD$ auſſi $= a$, on aura les points $D$, $E$ qui reſolvent le problême en ce que $AD \times DB$, ou $AE \times EB = 2a$, mais puiſque les points $E$, & $D$ ſont pris hors de la ligne $AB$, & qu'une infinité d'autres points pris de même, auroient auſſi une propriété ſemblable, il eſt viſible, que ſi cette conſtruction ne nous induit pas en erreur, elle ne nous fait abſolument rien connoître, c'eſt cependant là un des cas ou elle pourroit paroître plus ſpécieuſe, car le plus ſouvent on ne voit abſolument pas comment le point trouvé pourroit réſoudre la queſtion, quelques changemens qu'on ſe permit dans l'énoncé du problême.

Les racines imaginaires n'admettent donc pas une conſtruction géomètrique, & on ne peut en tirer aucun avantage dans la réſolution des problêmes: on devroit par conſéquent s'attacher à les écarter autant qu'il eſt poſſible des équations finales, puiſque priſes dans quel ſens que ce ſoit, elles ne peuvent pas réſoudre la queſtion, comme les racines négatives, dont toute la contradiction conſiſte dans leur maniére d'être à l'égard des poſitives.

7. De cette conſidération il paroit qu'on peut conclure que les logaritmes des quantités négatives, qui ne ſont que l'expreſſion de leur rapport avec les poſitives, doivent être impoſſibles ou imaginaires. C'étoit le ſentiment de M. Leibnits, qui l'a ſoutenu vivement contre M. Bernoulli. Il fondoit ſon opinion ſur la nature des logaritmes, en diſant que ſi l'on ſuppoſe que $o$ ſoit le logaritme de 1, & 1 celui de 2 il eſt évident que $x$ pouvant repréſenter un

 nom-

nombre quelconque entier rompu positif ou négatif, $2^x$ devra être l'expression générale d'un nombre quelconque dont le logaritme sera $x$: or l'on voit qu'aucune valeur possible de $x$ ne peut rendre le nombre $2^x$ négatif, & que par conséquent il n'y a point de logaritme d'un nombre négatif. Ce qu'on doit admettre d'autant plus volontiers, qu'autrement il s'en suivroit une absurdité; c'est à dire qu'une quantité imaginaire auroit un logaritme réel, car si $+2$ avoit un logaritme $n$, $\sqrt{-2}$ devroit aussi avoir $\frac{n}{2}$ pour logaritme.

Cependant Mr. Bernoulli disoit que puisque $\frac{1}{2}\ l.\ 4 = l.\sqrt{4}$, & que $\sqrt{4}$ est également $+2$ & $-2$, on en doit conclure que le nombre négatif $-2$ a absolument le même logaritme que $2$. Quand aux raisons de Mr. Leibnits il y répondoit, que quoique les nombres négatifs ne formassent pas une suite avec les nombres positifs, cela n'empêchoit pas qu'ils n'en formassent une à part, dont $-1$ seroit le premier terme. Qu'au reste $l.\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ l.\ 2$ seulement parceque $\sqrt{2}$ est moyen proportionel entre $1$ & $2$; mais qu'il n'est pas vrai que $l.\sqrt{-2} = \frac{1}{2}\ l. -2$, puisque $\sqrt{-2}$ n'est pas moyen entre $-2$ & $-1$.

Outre les raisons que nous venons d'alléguer, Mr. Bernoulli déduisoit immédiatement son sentiment de la continuité de l'hyperbole; mais comme Mr. Euler a établi sur des calculs neufs & très ingénieux, un troisiéme sentiment qui concilie toutes les difficultés que nous venons d'exposer, je ne parlerai de cette nouvelle preuve de Mr. Bernoulli, à laquelle le célèbre Géomètre que je viens de citer n'a pas touché, qu'après avoir fait connoître son procédé en peu de mots.

8. On

8. On ſait que pour les logaritmes hyperboliques, ſi $\omega$ eſt infiniment petit, $l.(1+\omega)=\omega$, $l.(1+\omega)^2=2\omega$, & généralement $l.(1+\omega)^n=n\,\omega$, d'où l'on voit, que ſi l'on veut le logaritme fini $y$ d'un nombre $x$, on aura $y=n\,\omega$, & $x=(1+\omega)^n$, ou bien $x^{\frac{1}{n}}=1+\omega$, ce qui donne $\omega=x^{\frac{1}{n}}-1$, le nombre $n$ devant néceſſairement être infini dans ce cas: ſi l'on met dans l'équation $y=n\,\omega$, la valeur trouvée de $\omega$, on aura $y=n\,x^{\frac{1}{n}}-n=l.x$: or puiſque $n=\infty$, $x^{\frac{1}{n}}$ aura une infinité de valeurs qui fourniront une infinité de logaritmes pour le nombre $x$.

Pour les trouver plus commodément j'obſerve que, puiſque $x=1\times x$, ſi je nomme $X$ le logaritme tabulaire de $x$ j'aurai $l.x=l.1+X$. Je cherche donc tous les logaritmes de l'unité en ſubſtituant $1$ pour $x$ dans la formule qui dévient $n(1^{\frac{1}{n}}-1)=y$, ou bien $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$. Or ſi $\pi$ exprime l'Arc de 180 dégré d'un cercle, dont le rayon $=1$, & $\lambda$ un nombre quelconque entier, on ſait par le théorème de Mr. Cottes que cette équation réſoluë en ſes facteurs, donnera généralement $1+\frac{y}{n}=cos.\,\frac{2\lambda\pi}{n}\pm fin.\,\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$; mais parceque $n=\infty$, l'Arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ ſera infiniment petit; ce qui change la formule en $1+\frac{y}{n}=1\pm\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$, & donne finalement $y=\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$.

Tous les logaritmes de $+1$ feront donc $o$, $2\pi\sqrt{-1}$, $4\pi\sqrt{-1}$, $6\pi\sqrt{-1}$ &c. On trouvera de même tous les logaritmes de $-1$, en prenant de la même maniére tous les facteurs de $(1+\frac{y}{n})^n+1=0$ qui donnent généralement $1+\frac{y}{n}=cos.\,\frac{2\lambda-1}{n}\pi \pm sin.\,\frac{2\lambda-1}{n}\pi\sqrt{-1}$; les logaritmes de $-1$ feront donc parceque $n=\infty$ $\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$ &c.

Pour trouver enfin tous les logaritmes d'une quantité imaginaire quelconque $a+b\sqrt{-1}$, notre illuftre Auteur fait $\sqrt{(a^2+b^2)}=c$, & $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ feront le finus & le cofinus d'un angle $\varphi$ facile à trouver par les tables; & la quantité imaginaire fe changera en $c\,(cof.\,\varphi + fin.\,\varphi\sqrt{-1})$ dans un cercle, dont le rayon $=1$: & fi $C$ eft le logaritme de $c$, on aura $l.\,(a+b\sqrt{-1})=C+l.\,(cof.\,\varphi+\sqrt{-1}\,fin.\,\varphi)$, il fuffira donc de trouver tous les logaritmes de $cof.\,\varphi + fin.\,\varphi\sqrt{-1}$; pour cela j'obferve que (*)

$$cof.\,\varphi + fin.\,\varphi\sqrt{-1} = (1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})^n$$

tout fe réduit donc à trouver les facteurs de

$$(1+\frac{y}{n})^n-(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})^n=0 \text{ qui donnent}$$

$$1+\frac{y}{n}=(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})\,(cof.\,\frac{2\lambda\pi}{n}\pm fin.\,\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1},)$$

d'où l'on tire par les raifons précédentes $y=\varphi\sqrt{-1}\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$; tous les logaritmes de $a+b\sqrt{-1}$ feront donc $c+\varphi\sqrt{-1}$, $c+(\varphi\pm 2\pi)\sqrt{-1}$, $c+(\varphi\pm 6\pi)\sqrt{-1}$ &c.

On

(*) Mr. Euler démontre ceci dans la differtation citée en faifant voir que cette puiffance développée donne la même férie infinie qu'on trouve en exprimant $cof.\,\varphi + fin\,\varphi\sqrt{-1}$ en $\varphi$ par les fuites connues; mais on peut tirer cette conclufion avec plus de facilité en généralifant la formule de l'art. 5. comme on peut le voir dans le premier tôme de l'Ouvrage de cet Auteur intitulé *Introductio in Analyfim infinitorum*; Cap. VIII.

On voit non ſeulement que tous les logaritmes des nombres négatifs ſont imaginaires, comme Mr. Leibnits l'avoit penſé, mais on a une méthode facile pour en trouver un auſſi grand nombre qu'on voudra, & l'on s'appercevra aiſément du parfait accord de cette théorie avec les opérations que demande l'idée des logaritmes, & je renvois pour cela à l'excellent Mémoire que j'ai cité, où Mr. Euler fait voir comment

$$2\,l.-a = 2\,l.\,a\,,\ 2\,l.\sqrt{-1} = l.-1,\ 3\,l.-1+\frac{\sqrt{-1}}{2} = l.\,1\ \&c$$

ce qui réſoud toutes les difficultés, & les raiſons que Mr. Bernoulli oppoſoit à Mr. Leibnits. Il ſemble donc que tous les doutes ſont entiérement levés, & Mr. Euler ſe flatte que Mr. Bernoulli même ne ſe ſeroit pas refuſé à ſes raiſons.

9. Cependant nous trouvons dans les lettres de ce grand Géomètre une preuve qu'il regardoit comme invincible, pour établir les logaritmes des nombres négatifs, à laquelle les calculs précédens ne paroiſſent porter aucune atteinte, & dont Mr. Euler n'a pas même fait mention; il la tiroit comme nous l'avons dit plus haut de la quadrature de l'hyperbole, de la maniére ſuivante.

Soit (Pl. 1. Fig. 2.) l'hyperbole $PQG$ avec l'oppoſée $pqg$ entre les aſſimptotes perpendiculaires $Rr$, $OX$; ſi on conſidère le point $R$ comme fixe, & qu'après avoir tiré les ordonnées $RP$, $SQ$, $EG$; $rp$, $ſq$, $eg$, on prenne les $SF$, $EH$ proportionelles aux aires $PS$, $PE$, il eſt évident que la courbe $RFHO$ ſera la logaritmique, dont $OX$ ſera l'aſſimptote.

Mais ſi l'on ſuppoſe que le point $S$ après avoir paſſé en $T$ arrive en $e$ (car rien n'empéche qu'on ne puiſſe faire cette ſuppoſition) on voit que l'aire hyperbolique qui répondra à ce point ſera en partie affirmative infinie $TP$, & en partie négative $Tg$, c'eſt à dire $TP - Tg$, & ſi

$Te = TE$ l'aire qui répondra à cette abſciſſe ſera $= PE$, donc on aura une nouvelle appliquée $eh = EH$, ce qui donne une branche pour la logaritmique au deſſous de l'axe: indépandemment de la preuve qu'en vouloit tirer Mr. Bernoulli, de ce que $\frac{-dy}{-y} = \frac{dy}{y}$: raiſon que Mr. Euler a fait voir n'être pas concluante: & ces deux branches ſeront liées à l'infini, tout comme le ſont les branches de l'hyperbole (*).

La contradiction de ce réſultat avec les calculs inconteſtables de Mr. Euler, ſembloit faire douter de quelque équivoque dans le raiſonnement; cependant Mr. de la Grange de l'Académie de Berlin qui avoit auſſi été frappé de cette différence m'a bien voulu communiquer les réflexions qu'il avoit fait autrefois ſur ce ſujet; j'examinerai ici de nouveau, ſelon les vues qu'il s'étoit formé, l'origine des logaritmes hyperboliques.

10. Soit donc (Pl.2.Fig.3.) l'hyperbole $LAP$ dont le centre eſt $C$, $CX$, $CN$ les aſſimptotes, & $CA$ le demidiamétre: ſoit l'ordonnée quelconque $PM = y$ & l'abſciſſe $CM = x$ le demidiamètre $CA = r$ on ſait que $y = \sqrt{(x^2 - r^2)}$; & que par conſéquent $y = \sqrt{-1} \times \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Si à préſent

(*) Mr. Bernoulli après avoir conſidéré l'eſpace $OTR$ comme poſitif prend pour négatif l'eſpace $XTr$, quoiqu'ils paroiſſent devoir être du même ſigne, puiſqu'ils ſont oppoſés au ſommet. Pour lever cette difficulté, on peut arriver à la même concluſion de la maniére ſuivante. Qu'on réfléchiſſe que les aires hyperboliques, ne ſont les logaritmes des abſciſſes que parceque ſi l'on prend celles-ci en progreſſion géométrique, les aires formeront une progreſſion aritmétique: ainſi l'aire $OTRP$, peut être le logaritme de $TR$, & $OTSQ$ le logaritme de $TS$ &c., mais ſi l'on prend $TR$ pour l'unité affirmative, & qu'on veuille que ſon logaritme ſoit o, il faudra toujours ſouſtraire des aires correſpondantes aux abſciſſes dont on veut le logaritme, toute l'aire $OTRP$, & le logaritme de $TS$, par exemple, ſera alors $-PQRS$: en effet $TS$ étant plus petite que l'unité, ſon logaritme doit être négatif: en continuant le même raiſonnement, on trouvera que le logaritme de $T$, ou de o ſera $-OTPR$, & ſi le point $S$ continue à reculer juſqu'en $s$ le logaritme du nombre négatif $Ts$ ſera toujours $TXqs - OTRP$ ce qui ſe réduit encore à $-PQRS$, c'eſt à dire au logaritme du nombre poſitif $TS$.

présent on décrit du centre $C$ avec le rayon $CA$, un cercle dont les abscisses $Cm$ soient pareillement appellées $x$, & les ordonnées $Y$, on aura $Y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ donc si l'on prend les mêmes abscisses pour le cercle, & pour l' hyperbole, on aura toujours $y = Y\sqrt{-1}$ ce que l'on sait d'ailleurs. Or il est clair que si deux courbes ont leurs ordonnées dans une raison constante, les aires seront dans la même raison, aussi bien que les secteurs qui seront formés par des lignes tirées de l'origine commune des abscisses à chaque point des courbes: puisque ces secteurs ne différent de leurs aires que par des triangles de bases égales, & qui ont leurs hauteurs dans la même raison des ordonnées.

Puisque donc dans nôtre cas les ordonnées du cercle, & de l' hyperbole sont entre elles dans la raison constante de $1$ à $\sqrt{-1}$, les secteurs circulaires, & hyperboliques qui répondent aux mêmes abscisses seront aussi dans la raison de $1$ à $\sqrt{-1}$.

Cela posé soit dans le cercle l' angle $PCm = \varphi$ on aura $Cm = x = r.\ cos.\ \varphi$, $mp = Y = r.\ sin.\ \varphi$, & le secteur $ACp = \frac{r^2\varphi}{2}$, & par conséquent le secteur hyperbolique de l' abscisse $CM = x = r.\ cos.\ \varphi$, & de l' ordonnée $MP = y = r.\ sin.\ \varphi\sqrt{-1}$ sera $\frac{r^2\varphi\sqrt{-1}}{2}$

Si l'on considère à présent l' hyperbole entre les assimptotes $CN$, $CX$, on sait que l' aire $ABQP$ est égale à $\frac{r^2}{2}\ l.\frac{CQ}{CB}$: or si des deux triangles $CAB$, $CQP$, qui sont égaux, puisqu' ils ont les bases en proportion réciproque des hauteurs, on léve la partie commune $CHB$, on aura $CHA = BHQP$, & si on ajoûte $AHP$ on aura le secteur hyperbolique $CAP = BAPQ$, donc $\frac{r^2\varphi\sqrt{-1}}{2} = \frac{r^2}{2}\ l.\frac{CQ}{CB}$

 où

où $\varphi\sqrt{-1} = l.\frac{CQ}{CB}$ ; mais $\frac{CQ}{CB} = \frac{AB}{PQ}$, & à cause des triangles semblables $ACB$, $PQN$: $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PN}$, & par conséquent $\varphi\sqrt{-1} = l.\frac{AC}{PN}$ : or $PN = MN - MP = x - y = r.(\,cos.\,\varphi - sin.\,\varphi\sqrt{-1}\,)$; donc $\frac{AC}{PN} = \frac{r}{r.(\,cos.\,\varphi - sin.\,\varphi\sqrt{-1}\,)} = \frac{1}{cos.\,\varphi - sin.\,\varphi\sqrt{-1}}$, & $\varphi\sqrt{-1} = l.\frac{AC}{PN} = l.\frac{1}{cos.\varphi - sin.\varphi\sqrt{-1}} = -l.(\,cos.\,\varphi - sin.\,\varphi\sqrt{-1}$ à cause de $l.\,1 = 0$; & si l'on fait l'angle $\varphi$ négatif, on aura $\varphi\sqrt{-1} = l.(\,cos.\,\varphi + sin.\,\varphi\sqrt{-1}$, qui est une formule asſés connue aujourd'hui, mais qui n'a été jusques ici, que je sache, démontrée qu'à l'aide du calcul infinitesimal. Si $sin.\,\varphi$ est réel, ce qui arrivera toutes les fois que $cos.\,\varphi$ sera plus petit que l'unité, la quantité $cos.\,\varphi + sin.\,\varphi\sqrt{-1}$ pourra représenter une imaginaire quelconque : d'ou l'on voit comment les logaritmes imaginaires peuvent être ramenés à des Arcs de cercle; que si $cos.\,\varphi > 1$ alors $\sqrt{(1 - cos.\,\varphi^2)} = sin.\,\varphi$, sera une quantité imaginaire qui multipliée par $\sqrt{-1}$ devient réelle; donc dans ce cas $cos.\,\varphi + sin.\,\varphi\sqrt{-1}$ sera une quantité réelle dont le logaritme pourra être exprimé par un Arc de cercle imaginaire; on pourra de même ramener les Arcs de cercle réels à des logaritmes de quantités imaginaires, & des Arcs de cercle imaginaires à des logaritmes de quantités réelles, ce qu'il suffira d'avoir indiqué ici, puisque cette théorie est déja asſès connue, & qu'il en est amplement traité dans la Dissertation de Mr. Euler que j'ai déja citée.

Reprenons nôtre équation $\varphi\sqrt{-1} = l.(\,cos. + sin.\,\varphi\sqrt{-1})$, si l'on y suppose $\varphi = 2\,\lambda\,\pi$; $\pi$ dénotant la demicirconférence du cercle dont le rayon $= 1$, & $\lambda$ un nombre quel-

con-

conque entier positif ou négatif: puisque $\sin. 2\lambda\pi = 0$, & $\cos. 2\lambda\pi = 1$, on aura après avoir fait la substitution $2\lambda\pi\sqrt{-1} = l. + 1$, qui est la formule que Mr. Euler a trouvé par un procédé tout à fait différent, & qui donne $l. + 1 = 0, \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 4\pi\sqrt{-1}$ &c. De même si l'on fait $\varphi = \pi, = 3\pi, = 5\pi$, & généralement $\varphi = (2\lambda - 1)\pi$, ce qui donne $\sin. \varphi = 0$, $\cos. \varphi = -1$, on aura $(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1} = l. - 1$; on trouveroit avec la même facilité tous les logaritmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, car si on décrit un cercle dont le rayon soit $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ il est constant, qu'il y aura toujours un angle $\varphi$ qui donnera $\cos. \varphi + \sin. \varphi\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1}$. Or si dans la formule $\varphi\sqrt{-1} = l. (\cos. \varphi + \sin. \varphi\sqrt{-1})$ on ajoûte à $\varphi$, $2\lambda\pi$, la quantité $\cos. \varphi + \sin. \varphi\sqrt{-1}$. ne changera point de valeur, comme il est évident, & conséquemment cette supposition n'altérera point la valeur de $a + b\sqrt{-1}$; & l'on aura généralement $(\varphi + 2\lambda\pi)\sqrt{-1} = l. (a + b\sqrt{-1})$.

Voila donc la Téorie de Mr. Euler apuiée sur la quadrature de l'hyperbole, dont Mr. Bernoulli se servoit pour prouver un sentiment absolument opposé, sans que sa démonstration ait pour cela rien perdu de sa force; il est donc nécessaire de comparer ensemble ces deux conclusions, & les procédés qui nous y ont conduit: ce qui sera à présent plus facile, puisqu'ils sont réduits à dépendre d'un seul, & même principe.

11. Si l'on fait attention au raisonnement de Mr. Bernoulli on s'apercevra aisément qu'il est tout fondé sur la continuité de la branche $AL$ (pl. 2. fig. 4.) de l'hyperbole avec la $al$, ces deux branches étant liées à l'infini comme il est évident; car si l'on fait $CQ = z$, $CA = r$, $QP = u$, on a $CB = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $uz = \frac{r^2}{2}$ ce qui donne $u = \frac{r^2}{2z}$, d'où l'on voit que si on fait $z = \infty$, on trouve $u = 0$, & que si $z$ décroit jusqu'a être

$= o$ on aura $u = \infty = CX$, & $z$ dévenant à l'inſtant infiniment petit négatif ou $-o$, on trouvera $u = -\infty = CG$.

Concevons à préſent un rayon $CP$, qui ſuive le point $P$ pendant que celuici par un mouvement continu décrit l'hyperbole, & que les aires correſpondantes donnent naiſſance à la logaritmique; il eſt viſible que ce rayon partant de la poſition $CQ$, l'angle $ACP$ qu'il forme avec l'axe décroitra continuellement, juſqu'à ce que $CP$ dévenant $CA$ l'angle ſe trouve nul, d'où il commencera à prendre des acroiſſements négatifs, mais quand le rayon $CP$ ſera arrivé à la poſition $CX$, le point $P$ qui eſt alors $L$ paſſant immédiatement en $l$, comme on l'a vû, le rayon pour le ſuivre devra dévenir tout d'un coup négatif $CG$, & l'angle $ACP$ ſera en même tems acru de deux angles droits: & il eſt à remarquer que c'eſt alors préciſement que commence la génération de la ſeconde branche de la logaritmique.

Cela poſé reprenons nôtre équation $\varphi\sqrt{-1} = l.\,(cof.\,\varphi \pm fin.\,\varphi\sqrt{-1})$, on a vu que ſi $\varphi = o$ on avoit $o = l. + 1$ de même ſi $\varphi = \frac{\pi}{4}$ on a $\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = l.\,(cof.\frac{\pi}{4} \pm fin.\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$; mais il eſt évident, que pour ſuivre le mouvement du point $P$, & conſerver la continuité de l'hyperbole, il ſe doit faire un ſaut dans la continuité des angles, & le rayon qui étoit $CQ$ dévenant alors tout d'un coup $CR$, l'angle de $ACQ$ paſſera à être $aCR$, ce qui change la formule en $\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = l.\,(-cof.\frac{\pi}{4} \mp fin.\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}$; cependant l'angle qui à préſent eſt $\pi : 4$ décroitra toujours à cauſe du mouvement du point $P$, & donnera généralement $\varphi\sqrt{-1} = l.\,(-cof.\,\varphi \mp fin.\,\varphi\sqrt{-1})$ juſqu'à ce que le rayon vecteur dévenant $Ca$ on aye à cauſe de $\varphi = o$, $o = l. - 1$.

Il eſt cependant évident que ce ſaut de deux angles droits bleſſe la continuité des arcs de cercle: d'où on peut infeinférer que cette formule ne contient pas le passage algébrique des logaritmes des quantités positives à ceux des négatives ; mais il paroit d'autre part qu'une expression différentielle de l'arc $\varphi$ par ses sinus & cosinus devroit donner indistinctément la rélation de cet arc $\varphi$ à *cos.* $\varphi$ & *sin.* $\varphi$, & de $\varphi$ à *cos.* $(\varphi + \pi)$ & *sin.* $(\varphi + \pi)$.

12. Delà il semble qu'on pourroit croire qu'une expression différentielle qui conduit à des logaritmes, appartiendroit également à des logaritmes de quantités positives, & à des logaritmes de quantités negatives, j'observe en effet que ces sortes d'expressions différentielles (pour ne pas parler ici des autres qui sont étrangéres à mon sujet) sont beaucoup plus étendues, que leurs expressions algébriques, ou, pour mieux dire, qu'une même expression différentielle conduit également à différentes équations algébriques : si l'on cherche par exemple la soutengente de l'ellipse exprimée par $y = \frac{b^2}{a^2}(a - x^2)$ on la trouve $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2 - x^2}{x}$, où la fraction $\frac{b}{a}$ ne se trouve plus, & qui par conséquent appartient à toutes les elipses faites sur le même diamétre $a$: il est aussi visible que quoíque la courbe ne se trouve plus quand $x > a$ la soutengente cependant continue à être réelle, & appartient alors aux hyperboles qu'on peut décrire sur l'axe donné ; toutes ces courbes sont donc liées d'une maniére transcendante par le moyen de la formule $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2 - x^2}{x}$, & quoiqu'on ne puisse pas passer de l'une à l'autre sans violer la continuité algébrique, on peut faire ce passage sans violer en aucune façon la continuité transcendante. Or l'intégration de cette équation conduit à des logaritmes, car elle donne $\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{a^2 - x^2}$ & intégrant $ly = \frac{1}{2}l.(x^2 - a^2) + \frac{1}{2}l.m$ qui fait $y = \sqrt{m \times (a^2 - x^2)}$ où la lettre $m$ doit pouvoir recevoir une valeur quelconque

que

que positive négative ou même imaginaire, pour conserver la même généralité à cette formule qu' on rencontre dans la différentielle $\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{a^2 - x^2}$ puisqu' elle appartient également à $y = M(x^2 - a^2)$, & à $y = N(a - x^2)$.

14. Pour confirmer cette théorie je crois qu' il ne sera pas hors de propos de chercher directement l' intégrale de la formule $dx = \frac{ady}{y}$ par la méthode ordinaire du calcul intégral, qui a toujours été accusé d'être insuffisant, & même fautif dans cette occasion; je donnerai d' autant plus volontiers ici ce calcul qu'il est entiérement neuf, & qu'il peut être d' usage dans beaucoup d'autres occasions.

L' intégration de l' équation proposée fournit $x = \frac{ay^o}{o} + A$, pour déterminer $A$ supposons que $y$ doive être $= m$ lorsque $x = o$, on aura $\frac{am^o}{o} + A = o$, ou $A = -\frac{am^o}{o}$, & par conséquent $x = \frac{a(y^o - m^o)}{o}$, qu' on divise par $a$, & qu'on multiplie par $o$, & on aura $\frac{ox}{a} = y^o - m^o$ & $y^o = m^o + \frac{ox}{a}$, & extrayant de part & d'autre la racine $o$, $y = (m^o + \frac{ox}{a})^{\frac{1}{o}}$, & tirant de même la racine $x$ $y^{\frac{1}{x}} = (m^o + \frac{ox}{a})^{\frac{1}{ox}}$. Si à présent on développe cette puissance, on trouvera $y^{1:x} = m^{o:ox} + \frac{1:ox}{1} \cdot m^{o\cdot(1:ox-1)} \cdot \frac{ox}{a} + \frac{(1:ox)\times(1:ox-1)}{1\cdot 2} \cdot m^{o\cdot(1:ox-2)} \cdot$

$o^2x^2$

$\frac{o^2 x^2}{a^2} + \frac{(1:o x)\times(1:o x-1)\times(1:o x-2)}{1.2.3} . m^{o.(1:o x-3)} .$
$\frac{o^3 x^3}{a^3}$ + &c., & réduisant au même dénominateur les fractions dans les exposans, & les coéficiens

$$y^{1:x} = m^{o:ox} + \frac{1}{ox} m^{o(1-ox):ox} . \frac{o x}{a} + \frac{1\times(1-ox)}{2 o^2 x^2} m^{o.(1-o2x):ox} . \frac{o^2 x^2}{a^2} + \frac{1\times(1-ox)\times(1-o2x)}{2.3.o^3x^3} m^{o.(1-o3x):ox} . \frac{o^3 x^3}{a^3}$$

+ &c., & réduisant & laissant les termes qui sont nuls $y^{1:x} = m^{1:x} + \frac{m^{1:x}}{a} + \frac{m^{1:x}}{2 a^2} + \frac{m^{1:x}}{2.3 a^3}$ + &c., on aura donc

$$y^{\frac{1}{x}} = m^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3.a^3} + \frac{1}{1.2.3.4a^4} + \&c.\right)$$

si on fait cette suite

$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3a^3} + \frac{1}{1.2.3.4a^4} + \&c. = e$, on aura

$y^{\frac{1}{x}} = m^{\frac{1}{x}} e$, ce qui donne $y = m e^x$ qui est l'équation finale cherchée qui dévient $l.y = x\, l.e + l.m$.

L'arbitraire $m$ depend donc absolument des applications particuliéres qu'on veut faire de cette formule, ainsi dans l'équation $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{x^2 - a^2}{x}$ qui intégrée par le moyen des logaritmes nous à donné généralement $y^2 = m(a^2 - x^2)$: il faut faire l'indéterminée $m = \frac{a^2}{b^2}$ si l'on veut qu'elle apartienne à l'ellipse exprimée par l'équation $y = \frac{a}{b}\sqrt{(a^2 - x^2)}$,

&

& $m = -\frac{a^2}{b^2}$ si l'on veut l'appliquer à l'hyperbole de l'équation $y = \frac{a}{b} \sqrt{(x^2 - a^2)}$.

On conclut de tout ceci que la courbe exprimée par l'équation $dy = \frac{dy}{y}$ ou $x = l.\, my$ doit néceſſairement être composée d'une infinité de branches au deſſus, & au deſſous de l'axe; ainſi (fig. 6.), un logaritme $AE$ n'appartient généralement pas plus au nombre $EF$ qu'aux nombres $EG$, $EH$ &c., & même à un imaginaire quelconque. J'obſerve cependant qu'une ſeule branche $BF$ peut ſatisfaire à tous les cas des nombres poſitifs, & la $bf$ à tous les négatifs en changeant ſeulement l'origine $A$, ce qui étoit deja évident par la Théorie des logaritmes. Mais l'origine étant une fois fixée en $A$, ſi l'on veut par exemple que $l.\, 1 = 0$, $AB$ étant $= 1$, c'eſt dans la ſeule branche $BF$ qu'on doit chercher les logaritmes des autres nombres poſitifs; car ſi on vouloit encor ſe ſervir de la $NG$, il eſt évident qu'en prenant $MN = 1$ on auroit $- AM = l.\, MN = l. + 1$ ce qui eſt contre la ſuppoſition qu'on avoit fait de $l.\, 1 = 0$.

Toutes les branches $BF$ $CG$ &c. ne ſont donc pas liées algébriquement, & ne ſont qu'autant de cas particuliers de l'équation différentielle $x = \frac{dy}{y}$, qui ſont déterminés par l'intégration. L'expreſſion $y = e^x$ exclut auſſi la branche $bf$, puiſque quelque valeur qu'on donne a $x$, $y$ ne peut être négatif à moins qu'on ne fit $x$ imaginaire.

Au reſte pour faire mieux ſentir qu'on ne rencontre $x$ imaginaire, que parcequ'on cherche $y$ négative dans une branche ou elle ne peut pas l'être, il eſt bon de remarquer, que cela arrive même dans les courbes algébriques.

Soit

Soit par exemple la courbe représentée par l'équation $y = \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, qui a évidemment deux branches une au dessus, & l'autre au dessous de l'axe, à cause de l'ambiguité du signe radical, si dans la branche qui appartient à $+\sqrt{(a^2 - x^2)}$ je voulois trouver un $y$ négatif, on voit qu'il faudroit que je fisse $x$ imaginaire, ce qui me donneroit $y = \frac{-x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$.

Il est donc visible, que l'expression transcendante nous laisse à la vérité le choix d'une branche quelconque de la logaritmique, mais que la nature du problème nous ayant déterminé à une d'elles, il n'est plus permis de passer à une autre, puisqu'elles ne sont pas liées algébriquement.

15. Tout ce que nous venons de dire ne paroit cependant encor porter aucune atteinte à la démonstration de Mr. Bernoulli; mais par un examen réflechi on pourra en découvrir le défaut, & quels sont les cas où on pourroit l'adopter. Reprénons pour cela l'équation à l'hyperbole entre ses assimptotes $z = \frac{1}{u}$ qui donne $dz = -\frac{z\,du}{u}$, d'où l'on tire pour l'élement de l'aire $\frac{dz}{z}$, qui est aussi comme on sait la différence de $l.\,z$: qu'on suppose à présent avec Mr. Bernoulli, que l'abscisse $z$ décroisse, jusqu'à être finalement nulle, il est hors de doute, que l'ordonnée $u$, après être dévenue infinie passera à être infinie négative, & appartiendra à l'autre branche de l'hyperbole puisqu'il y a un passage algébrique de l'infini positif à l'infini négatif, mais il n'en sera pas de même de l'aire, puisque lorsque, l'abscisse $z$ dévient infiniment petite, & l'ordonnée infiniment grande, l'élement de la Courbe se trouvant alors

$\frac{md\zeta}{d\zeta}$, qui eſt une quantité finie, & cette aire lorſque $\zeta$ dévient infiniment petite négative ſe trouvant de même finie, mais négative, l'aire de l'hyperbole ne peut faire ce paſſage ſans reçevoir tout à coup un décroiſſement fini; or une quantité quelconque ne peut dévenir négative de poſitive qu'elle étoit, ſans paſſer par o ou par l'infini; il eſt donc évident qu'il n'y à pas un paſſage algébrique de la branche poſitive de la logaritmique à la branche négative, puiſque la continuité des aires hyperboliques eſt interrompuë par la quantité finie $\frac{md\zeta}{d\zeta} = m$.

Les deux branches de la logaritmique trouvées par Mr. Bernoulli ſont donc iſolées, & indépendantes l'une de l'autre algébriquement, quoiqu'elles ſoient liées par leur expreſſion tranſcendante; mais elles ne ſont pas moins réelles l'une que l'autre, & elles auront leurs uſages particuliers dans pluſieurs cas.

Cette théorie pouvant peut être paroître une pure ſpéculation abſolument inutile dans la pratique; je crois qu'il ne ſera pas hors de propos d'en faire ici l'application pour ſervir de dénouëment à quelques paradoxes tirés de la Mécanique (*).

16. Soit par exemple (Fig.8.) un centre d'attraction $C$ dont la force ſoit proportionelle, à la $n^{me}$ puiſſance des diſtances, on aura pour l'expreſſion de la viteſſe $u$ d'un corps $A$ lors qu'il aura parcouru l'eſpace $AB = x$; l'équation $\frac{dx}{[a-x]^n} = u\,du$, & en intégrant $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1} - (a-x)^{n+1}}{n+1}$ parceque $u = o$ quand $x = o$; l'on voit

(*) Pour connoitre l'importance des remarques ſuivantes, je prie le Lecteur de relire la Propoſition 32. du premier Tôme de la Mécanique de Mr. Euler, & les autres Propoſitions de cet excellent Ouvrage qui peuvent y avoir rapport.

voit ſacilement, que quand le corps ſera arrivé en $C$ on aura $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ ſi $n+1$ eſt poſitif, & $u^2 = \infty$ ſi $n+1$ eſt négatif, mais ſi $n+1 = 0$ on aura alors recours à la méthode, que nous avons enſeigné ( art. 14. ) & on trouvera pour l'expreſſion générale de la viteſſe, $\frac{u^2}{2} = l. \frac{a}{a-x}$ ſans retourner pour cela à l'équation différentielle, comme tous les Auteurs qui ont écrit de cette matiére ont été obligés de faire juſques à préſent, & il en ſera de même, pour le dire en paſſant, d'une infinité de cas ſemblables qui ſe rencontrent très fréquemment dans la mécanique, de façon qu'on étoit toujours contraint de recommencer un calcul ſouvent aſſés long: on aura dans ce cas pour la viteſſe au point $C$, $u^2 = l. \infty$

(*) Il eſt de plus évident par la nature du problème, que le corps devra dans tous les cas paſſer au delà du point $C$ de façon, que ſi $Ca = CA$, & $Cb = CB$ ſa viteſſe en $b$ ſera la même, qu'au point $B$., & ſera finalement nulle au point $a$ comme elle l'étoit en $A$: or on voit qu'afin que la même formule, qui nous donnoit la viteſſe du corps $A$ pour la partie $AC$ puiſſe s'appliquer également à la partie $aC$ il eſt néceſſaire qu'en faiſant $a-x$ négatif on trouve l'acroiſſement de la viteſſe négatif, & cette même viteſſe toujours poſitive, & il eſt facile de s'apercevoir, que cela doit toujours arriver quand $n$ ſera un nombre impair, & entier, poſitif ou négatif. Mais par quelle fatalité devroit-on en excepter le cas où $n = -1$ comme on l'à pré-



(*) Mr. Euler a prétendu à la vérité démontrer l'impoſſibilité de ce paſſage par la conſidération d'une elipſe ( art. 665. ) de ſa mécanique, mais le P. Boſcovik a réſolu cette difficulté ( *art. 82. Diſſertationis de atractione corporum ad centrum immobile tom. 2. part. 3. Academiæ Bononienſis.* )

tendu jusques à présent, parcequ' on supposoit dans ce cas, que l' expression de la vitesse au delà du point $C$ étoit imaginaire, étant exprimée par le logaritme d' une quantité négative.

Pour examiner ceci, qu' on se rappelle, ce que nous avons vu (art. 15.) que le passage des logaritmes des quantités positives à ceux des négatives n' étoit interrompu, que parceque l' aire qui leur donnoit naissance recevoit tout d' un coup un acroissement fini. Toutes les fois donc qu' on pourra faire cette supposition sans hurter la nature du problème, il est évident, que ce passage ne sera point interrompu, & que les logaritmes des quantités positives, & négatives quoique tirés de la même formule seront également réels. Or s' il existoit dans la nature une loi telle que nous venons de la supposer, je ne vois pas pourquoi on ne voudroit pas admetre cette espèce de saut dans l' acroissement de la vitesse du corps au point $C$ puisqu' il est sur que la vitesse, qui un instant avant le passage étoit finie redévient finie un instant après. Le cas de $n = -1$ rentreroit alors dans la régle générale, & $l.(a-x)$ demeureroit réel quoique $x > a$ ce qui en effet est conforme aux loix de la nature quoiqu' il en soit on peut faire cette supposition sans crainte d' erreur.

Pour ce qui est des cas, ou $n$ est un nombre pair, on a vu plus haut que quoique le Corps passe également le point $C$, de façon, que sa vitesse est de nouveau zero au point $a$, cependant en faisant $x > a$ la formule ne donne plus la vraye vitesse du corps $A$, & cela dépend uniquement du défaut de l' expression algébrique, qu' on ne peut alors assigner générale pour les deux cas.

Pour lui donner cependant la plus grande généralité, dont elle est susceptible qu' on pose $b(a-x)^n dx = u du$ où la lettre $b$ soit une indéterminée dont la valeur depende des applications particuliéres qu' on veut faire de cette formule

mule

mule ; on a en intégrant $b\left(\frac{a^{n+1}-[a-x]^{n+1}}{n+1.}\right)=\frac{u^2}{2}$ l'on voit que l'indéterminée $b$ doit être positive toutes les fois que $m$ est un nombre impair, & quand $m$ est un nombre pair on fera de même $b$ positive de $A$ jusqu'en $C$, & négative de $C$ jusqu'en $a$; or puisque dans le point $C$ considéré comme e dernier point de la ligne positive $AC$ on a $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ en le considérant comme le premier point négatif, on doit trouver pareillement $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ ce qui donne quand $x = 2a$, $u^2 = 0$, comme il doit être en effet.

Mais lorsque $n$ est un nombre rompu dont le dénominateur est pair, passé le point $C$, il faut faire $b = -m\sqrt{-1}$ & alors la même formule pourra servir pour tous les cas.

Voila quels changemens on est obligé de faire à la formule pour que dans certaines circonstances elle ne nous rende pas imaginaires des expressions qui doivent y être réelles.

17. Il se présente une autre difficulté dans les cas où $m$ est impair, & négatif, il est évident que le tems doit toujours croitre à mésure que le corps s'éloigne du point $A$ cependant supposons que $m = -3$ on aura $\frac{dx}{(a-x)^3} = u\,du$ & intégrant $u^2 = \frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{2ax-x^2}{a^2(a-x)^2}$, & $u = \frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{a(a-x)}$, & par conséquent $dt = \frac{dx}{u} = \frac{a\,dx\,(a-x)}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, & $t = a\sqrt{(2ax-x^2)}$ on voit que cette expression du tems est dans ce cas exprimée par des lignes proportionelles aux ordonnées d'un cercle décrit, sur le diamêtre $Aa$ (Fig. 9.), mais elle ne peut servir que jusques en $C$, puisque depuis ce point les ordonnées décroissent, ce qu'il

est absurde d'attribuer au tems. Mais si l'on fait reflexion que le radical $a\sqrt{(2ax - x^2)}$ a deux valeurs, on verra bien tôt que le signe $+$ de ce radical doit servir de $A$ en $C$. & le signe $-$ de $C$ en $a$ : on aura donc généralement dans ce dernier cas $t = - a\sqrt{(2ax - x^2} + A$; pour déterminer la constante $A$ qu'on réflechisse que dans le point $C$ les deux valeurs de $t$ doivent être les mêmes, d'où l'on tirera $a^2 = - a^2 + A$ & $A = 2a^2$, & le tems $t$ sera généralement exprimé par $2a^2 - a\sqrt{(ax - x^2)}$; ce n'est donc que le quart de cercle $AB$ qui servira à la construction du tems, jusqu'au point $C$, & au de là de $C$ on devra construire un cercle du diamètre $= a$ qui touche l'autre en $B$, & continuer à prendre les tems sur ce nouveau quart de cercle. Quoique ces deux cercles ne puissent pas être contenus dans une même equation algébrique, il est est cependant visible que le quart de cercle $AB$ est également contigu avec $BD$ qu'il le seroit avec le reste du demi cercle.

Cette construction est facile, & exacte, & elle me paroit lever les difficultés qui dans ce cas, & dans un grand nombre d'autres semblables ont arrèté les géométres.

Voila je crois assés d'exemples de formules algébriques, qui pour être appliquées à des cas qu'elles ne peuvent exprimer, rendent imaginaires & absurdes des expressions, qui doivent être réelles par la nature du problême. (*)

C'est

(*) Dans l'article *Gravitation* de l'Enciclopédie, & dans le troisiéme tôme des Recherches sur le sistême du Monde (pag. 198.): il est parlé d'un certain paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une surface sphérique quelconque. Comme l'explication que j'en ait trouvé, & que j'ai même communiqué à l'Auteur dans une lettre particulière, me paroit fondée, & que d'ailleurs elle tient immédiatement aux principes établis ci-dessus, je crois qu'on voudra me permettre d'ajouter ici deux mots sur ce point. Voici en quoi consiste le paradoxe. Soit cherchée l'attraction d'une surface spérique sur un point placé sur la surface même dans le cas des forces en raison inverse des quarrés des distances. Si l'on commence par considérer le point au delà de la surface, & qu'ayant trouvé l'expression générale de son attraction, on

C'eſt ſans doute un inconvénient dans l'algébre qu'on ne puiſſent pas toujours trouver des formules générales, qui puiſſe s'appliquer à toutes les circonſtances de la queſtion, mais il ſera toujours aſsès facile de reconnoître les cas qui ne peuvent être exprimés par ces équations, & on pourra les corriger par un procédé ſemblable à celui, dont je me ſuis ſervi.

18. Ces cas ſont au reſte plus fréquents dans l'algébre qu'on ne ſe l'imagine communément, & quoique le cas irréductible du troiſiéme dégré ne rende pas l'inconnue abſolument imaginaire, la mauvaiſe méthode qui y conduit ne laiſſe pas de lui en donner la forme, comme tout le monde le ſait.

On

faſſe enſuite évanouir la diſtance de ce point à la ſurface on aura $4\pi$ pour l'attraction. Au contraire ſi le point eſt d'abord ſuppoſé au dedans de la ſurface, ſon attraction ſe trouve toujours égale a zero, d'où elle reſte encore nulle quand le point vient toucher la ſurface même. Que ſi l'on veut d'abord regarder le point comme placé ſur la ſurface, on obtient pour lors la formule de ſon attraction $= 2\pi$. On a donc trois valeurs différentes $4\pi$, $2\pi$, $0$, qui ſemblent appartenir au même cas; ce qui doit paroitre au prémier aſpect abſurde, & contradictoire. Pour trouver le dénouement de cette difficulté, il faut rechercher avec ſoin ce que ces trois manières de conſidérer le même cas peuvent avoir de différent entr'elles. Or je dis que cette différence dépend du point de la ſurface $A$ qui exerce une force finie, & $= 2\pi$ le point $B$, lorſque on fait évanouir leur diſtance $AB$. Pour s'en convaincre on n'a qu'à réflechir qu'un point de ſurface eſt néceſſairement un infiniment petit des ſecond ordre; & que la fonction $AB^2$ de la diſtance évanouiſſante dévient auſſi infiniment petite du même ordre, d'où il s'enſuit que l'attraction du point $A$ qui eſt proportionelle à ce point, diviſée par la fonction donnée deviendra finie; & on peut s'aſſûrer d'ailleurs que cette attraction ſera préciſement $= 2\pi$. Ceci poſé quand on fait venir le point $B$ à la ſurface de dehors, on a l'attraction $= 4\pi$ qui eſt compoſée de l'attraction $2\pi$ du point $A$, & de l'autre partie $2\pi$ qui doit néceſſairement exprimer l'attraction du reſte de la ſurface. Mais ſi l'on fait que le point vienne toucher la ſurface au dedans alors l'attraction $2\pi$ du point $A$ devra agir en ſens contraire, & jointe avec l'autre partie $2\pi$ qui agit dans le même ſens, qu'auparavant donnera $2\pi - 2\pi = 0$ pour l'attraction dans ce cas; enfin, ſi le point eſt d'abord placé ſur la ſurface en $A$, on exclut dans ce cas l'attraction du point de ſurface $A$, & on a ſeulement $2\pi$ pour l'attraction totale, tout de même comme nous le donne le calcul. Pour ſentir mieux la raiſon de ces différences, il faut faire le calcul en entier; on verra aiſément que la différentielle eſt compoſée de deux parties, dont l'une eſt toute multipliée par la diſtance du point à la ſurface, & devient par conſéquent égale

On rencontre un ſemblable inconvénient, lorſqu' on tente de conſtruire une équation au moyen d' une courbe qui n'en eſt pas capable, car quoique ſes racines ſoyent réelles, on trouve pour les déterminer des interſections imaginaires, cela arrive ſouvent quand on ſe ſert de deux courbes qui peuvent avoir des abſciſſes auxquelles répondent des appliquées imaginaires, car il eſt évident que ces courbes peuvent avoir, à une abſciſſe commune, des ordonnées égales quoique imaginaires: ce qui ne peut pas ſervir à déterminer cette abſciſſe. Si cependant on ſubſtituoit à la place de ces courbes, des autres que j' appellerai leurs contraires, qui euſſent les ordonnées réelles préciſément où les premiéres les ont imaginaires, les interſections de ces deux courbes réſoudroient ſûrement le problême; mais cet ouvrage étant actuellement ſous preſſe, je ne m' arrêterai pas à examiner cette matiére, qui me paroit cependant digne de quelque attention.

Avant

à zero, lorſque cette diſtance évanouit, l' autre partie donnant $2\pi$ pour intégrale; c' eſt le cas, où le point eſt d' abord placé ſur la ſurface; mais ſi l' on achéve l' intégration avant que de faire évanouir cette diſtance on trouve l' intégrale de la prémiere partie une expreſſion finie, qui ſe réduit au contact $= 2\pi$ ſi le corps a été ſuppoſé de dehors, & a $- 2\pi$ ſi on l' a ſuppoſé de dedans, d' où l' on tire pour le prémier cas $2\pi + 2\pi = 4\pi$, & $2\pi - 2\pi = 0$ pour l'autre. Voila donc pourquoi la même formule ne peut pas ſervir pour tous les cas poſſibles, car dans le paſſage du point de dehors en dedans, il faudroit que l' attraction $2\pi$ devint tout d' un coup $= 0$; & puis $= - 2\pi$ ce qui choque directement la loi de continuité généralement admiſe dans les formules algébriques. M. Daniel Bernoulli avoit déja ſenti l' incompatibilité de ces cas dans une même formule, comme il paroit dans l' art. 4. du chap. 11. de la Pièce ſur le flux, & réflux de la mer. Au reſte il ne doit pas paroitre étonnant qu' un point qui par rapport à une ſurface doit être régardé comme zero puiſſe dans certains cas éxercer une force finie; car il eſt clair qu' il ſuffit pour cela que la fonction qui exprime la force dévienne infinie, & infinie du même ordre que le point eſt infiniment petit. Nous avons vu comment une formule qui eſt toujours égale a zero peut réçevoir une valeur finie dans certains cas particuliers (chap. VI de ma diſſertation ſur le ſon) c' eſt la même choſe qui arrive ici. Au reſte les Géomètres ne ſont plus étrangers a ces ſortes de paradoxes, ſi on les peut nommer ainſi, (Car je n' y vois que des conſéquences toutes naturelles des ſuppoſitions qu' on a fait dans le calcul.) Mr. Clairaut à fait voir un ſemblable cas dans ſa Théorie ſur la figure de la Terre, art. 45., de la prémiere partie, & le

19 Avant cependant que de finir ces réflexions je crois qu'il ne sera pas hors de propos de donner au moyen de la formule de l'art. 10. une démonstration nouvelle & purement géométrique du fameux Théorême des imaginaires, publié premiérement par Mr. D'Alembert dans son Traité de la cause des vents, & puis manié de nouveau par Mr. Euler dans la Dissertation sur les imaginaires déja citée, d'autant plus que ces deux célèbres Géomêtres ne l'ont démontré que par les Principes du calcul différentiel. Voici l'énoncé de cette proposition, dont véritablement l'usage me paroit fort rare dans l'Analyse. Une quantité imaginaire quelconque, de la forme $c+d\sqrt{-1}$ élevée à une puissance dont l'exposant soit aussi imaginaire de la même forme, peut toujours se réduire à une imaginaire simple $A+B\sqrt{-1}$, $A$ & $B$ étant des quantités réelles: qu'on pose donc $(a+b\sqrt{-1}.)^{m+n\sqrt{-1}}=A+B\sqrt{-1}$ il s'agit de trouver les valeurs de $A$ & de $B$.

Soit pour cela $\sqrt{(a^2+b^2)}=r$, & $\frac{a}{r}=cos.\,\varphi$, $\frac{b}{r}=sin.\,\varphi$, de plus $\sqrt{(A^2+B^2)}=R$, & $\frac{A}{R}=cos.\,\theta$, $\frac{B}{R}=$

t sin.

---

Pere Boschovik dans un mémoire sur l'attraction des corps vers un centre fixe imprimé dans la troisiéme partie du second tôme des Commentaires de l'Académie de Bologne; & on voit dans la dissertation présente que le dénouement des difficultés sur le passage des logaritmes des nombres positifs à ceux des nombres negatifs dépend d'un pareil Principe.

Mr. D'Alembert apporte encore pour objection à la loi de continuité l'exemple de la courbe $y=\sqrt{ax}+\sqrt[4]{a^3(x+b)}$, que Mr. Euler avoit déja proposé dans son Mémoire sur les logaritmes. Cette équation dégagée des radicaux monte au huitiéme dégré; & a généralement un diamètre, cependant dans le cas, où $b=0$ elle ne monte plus qu'au quatriéme, & perd tout d'un coup son diamètre; mais il faut remarquer que cela n'arrive que parceque la courbe dans ce cas devient un sistême de deux, qui sont exprimées par

$y^4-2axy^2+4ax^2y+a^2x^2-a^3x=0$ &

$y^4-2axy^2-4ax^2y+a^2x^2-a^3x=0$

dont chacune en particulier est à la vérité destituée de diamètre; mais leur sistême le conserve toujours. Tous les ordres des courbes algebriques contiennent des exemples de cas semblables. NOTE DE Mr. LOUIS DE LA GRANGE.

$\textit{sin.}\ \theta$, on aura $[r\,(\textit{cos.}\ \varphi + \textit{sin.}\ \varphi\sqrt{-1})]^{m+n\sqrt{-1}} = R\,(\textit{cos.}\ \theta + \textit{sin.}\ \theta\sqrt{-1})$, & en prenant les logaritmes $(m+n\sqrt{-1})\,[l.\,r + l.\,(\textit{cos.}\ \varphi + \textit{sin.}\ \varphi\sqrt{-1})] = l.\,R + l.\,(\textit{cos.}\ \theta + \textit{sin.}\ \theta\sqrt{-1})$, & par la formule citée $(m+n\sqrt{-1})\,(l.\,r + \varphi\sqrt{-1}) = l.\,R + \theta\sqrt{-1}$, & faisant la multiplication actuelle $m\,l.\,r - n\varphi + (n\,l.\,r + m\varphi)\sqrt{-1} = l.\,R + \theta\sqrt{-1}$, & comparant les imaginaires avec les imaginaires, & les réelles avec les réelles, on a $m\,l.\,r - n\varphi = l.\,R$, $n\,l.\,r + m\varphi = \theta$, équation, d'où l'on tirera facilement des valeurs réelles pour $R$ & $\theta$, & par conséquent pour $A$ & $B$ qui en dépendent : car on a $R = e^{m\,l.\,r - n\varphi}$, ou bien $R = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\,\textit{Arc. sin.}\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}$ & $\theta = n\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\,\textit{Arc. sin.}\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ de là $A = R\,\textit{cos.}\ \theta = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\,\textit{Arc. sin.}\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}$ $\textit{cos.}\ [n\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\,\textit{Arc. sin.}\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}]$ & $B = R$ $\textit{sin.}\ \theta = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\,\textit{Arc. sin.}\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}$ $\textit{sin.}\ [n\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\,\textit{Arc. sin.}\ \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}]$.

CON-

# CONSPECTUS TOTIUS OPERIS.

## DE IIS, QUÆ IN SOCIETATE ACTA SUNT COMMENTARII A JOHANNE FRANCISCO CIGNA CONSCRIPTI.

*De belliniano Problemate, seu de Ovorum elixatorum cicatricula.*

*De varia barometrorum diversæ diametri altitudine.*

*De corrigendis barometrorum erroribus ex calore, & frigore natis.*

*De fallacia methodi dimetiendi quantitatem attractionis.*

*De ascensu, & descensu thermometrorum variis liquoribus madentium ex inflato vento.*

*De caussa extinctionis flammæ in clauso aere.*

## DISSERTATIONES, ET OPUSCULA VARIA.

*Memoire du* CHEVALIER SALUCE *sur la nature du fluide élastique qui se développe de la Poudre à Canon.*

*Recherches sur la methode* de maximis, & minimis *par M.* LOUIS DE LA GRANGE.

*Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la Théorie des suites récurrentes par M.* LOUIS DE LA GRANGE.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA, *De analogia* magnetismi, & electricitatis *Dissertatio.*

*Ejusdem. De colore sanguinis experimenta nonnulla.*

JOHANNIS BAPTISTAE GABER *Specimen experimentorum circa putrefactionem humorum animalium.*

*Fasciculus stirpium Sardiniæ in Diœcesi Calaris lectarum a* MICHAELE ANTONIO PLAZZA *Chirurgo Taurinensi, quas in usum Botanicorum recenset* CAROLUS ALLIONIUS.

De

*De glanduloso Ovarii corpore, de utero gravido, & placenta Observationes* AMBROSII BERTRANDI.

*Suite des recherches sur le fluide élastique de la poudre à Canon par le* CHEVALIER SALUCE.

*Recherches sur la nature, & la propagation du son par M.* LOUIS DE LA GRANGE.

*Introduction*

*Section.* 1. *Recherches sur la nature du son.*

*Cap. I. Des oscillations des parties intimes des fluides élastiques.*

*Cap. II. Des vibrations des cordes.*

*Cap. III. Solution do Problême général proposé dans les chapitres précédens.*

*Cap. IV. Analise du cas, où le nombre des corps mobiles est fini.*

*Cap. V. Analise du cas, où le nombre des corps mobiles est infini.*

*Cap. VI. Réflexions sur les calculs précédens.*

*Cap VII. Théorie des cordes de musique, & des flutes.*

*Section.* 2. *De la propagation du son.*

*Cap. I. De la vitesse du son.*

*Cap. II. De la réflexion du son, ou des echos.*

*Cap. III. Du mêlange, & du rapport des sons.*

*Réflexions sur les quantités imaginaires par M. le* CHEVALIER DAVIET DE FONCENEX.

# *ERRATA*

*Pour le Mémoire ſur le fluide élaſtique qui ſe dèveloppe de la Poudre à Canon.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Pag.* 9 | *lin.* 33 | interdiraient *liſés* | interdirait |
| 14 | 4 | (*r*) Com. pag. | (*r*) Com. pag. 22. |
| 14 | 12 | ne peut-il | ne puiſſe |

*In Diſſertatione de analogia magnetiſmi, & electricitatis.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 47 | 32 | eo una vitri | ex una vitri |
| 57 | *not. b* | ſecondos | ſecandos |

*In Diſſertatione circa putrefactionem.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 75 | 1 | quanti | quanti ad |
| 86 | 5 | morborum | morborum cauſſis |

*In faſciculo ſtirpium Sardiniae.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 88 | 6 | Allionus | Allionius |
| | 26 | integerrimus | integerrimis |
| 89 | 7 | Alchemilla | Alchimilla |
| | 13 | 514. | 524. |
| | 16 | avenis | aveniis |
| 92 | 4 | cordalis | cordatis |
| | 29 | norvoſis | nervoſis |
| 96 | 20 | refuſcente | rufeſcente |
| | 32 | Vinea | Vicia |
| 97 | 5 | lapaſanae | lampſanae |
| | 29 | Oenante | Oenanthe |

*In obſervationibus de glanduloſo Ovarii corpore.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 20 | fatis | ſatis |
| 106 | 10 | continuatas | continuatae |
| 108 | 4 | ut | ac |

*Pour la ſuite des recherches ſur le fluide élaſtique de la Poudre.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 116 | 20 | plus bas | plus haut |
| 129 | 30 | dans l'eau | & de l'eau |
| 135 | 27 | (*a*) | (*z*) |

*Pour la Differtation fur le fon.*

*Page* 11 *ligne* 1 Qui eft la même expreffion &c. *lifez* qui fe réduit à la même expreffion &c.

*En effet ayant fuppofé dans l'art.* 4. *que la force motrice dans l'echelle PHShP fût fimplement* $= \frac{QM-MR}{HK^2} \times M$, *l'on doit de même ici exprimer les forces motrices des particules par* $\frac{M d^2 y}{dt^2}$, *ou bien fuppofer* $\frac{2h}{T^2} = 1$.

*Page* 13 *ligne* 16 on aura fin. $efg = \frac{y''' - 2y'' + y'}{r}$, *lifez* on aura fin. $efg = -\frac{y''' - 2y'' + y'}{r}$. *Mais cette erreur n'influe en rien dans le refte du calcul, parce-que les différentielles $d^2y$ doivent être auffi prifes négativement.*

*Page* 14 *ligne* 10 *mettez l'art.* 10. *avant* Imaginons.

*Page* 15 *ligne* 3 *au lieu de l'*art. 10. *lifez* article 11.

*Page* 19 *ligne* 14 de la quantité $\frac{a}{\sqrt{c}}$ *lifez* de la quantité $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; *dans la ligne fuivante* au bout d'un tems $\frac{a}{\sqrt{c}} = T\sqrt{(\frac{Sa}{2Ph})}$ *lifez* au bout d'un tems $\frac{2a}{\sqrt{c}} = 2T\sqrt{(\frac{Sa}{2Ph})}$; *dans la ligne* 17 c'eft pourquoi, *lifez* mais.

*Page* 33 *ligne* 4 *au lieu de* (art. 20.) *pofez* (art. 21.)

*Page* 50 *ligne* 8 *au lieu de* Chap. III. *lifez* Chap. II.

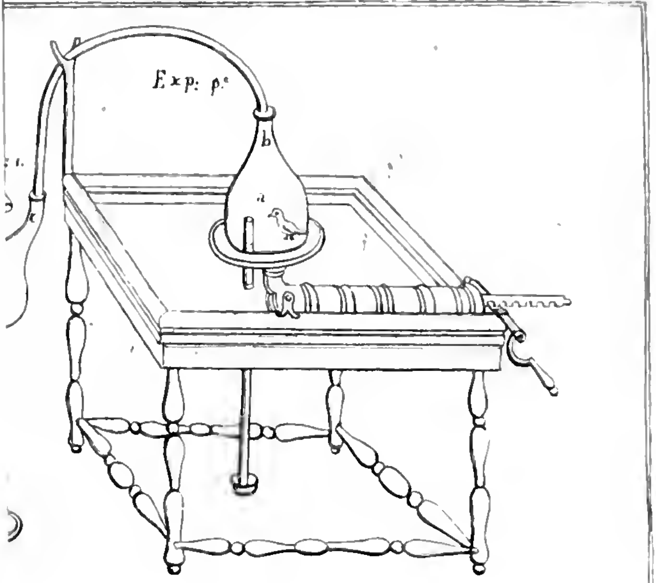
*Page* 57 *ligne* 10 *au lieu de* fin. $\frac{\pi Ht}{2T}$ *lifez* cof. $\frac{\pi Ht}{2T}$.

*Page* 71 *ligne* 16 à l'ordonnée $MN$, & à l'unité, *lifez* à l'ordonnée $MN$, & à la quantité conftante $\frac{aH}{T}$; *dans la même page ligne* 18 aux abfciffes $am = a'm'$, *ajoutez* ces aires étant divifées par $\frac{aH}{T}$.

*Page* 102 *ligne* 9, qu'on a enſeigné article cité, *liſez* qu'on a enſeigné article 38.

*Page* 112 *ligne derniére* conterons, *liſez* contenterons.

Series I Vols XL + [illegible] 3 nos
Dulau & Co. April 1881



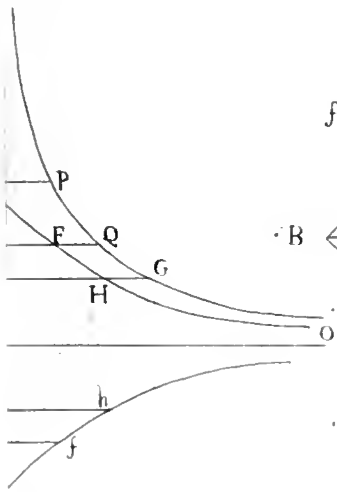




figure 1e

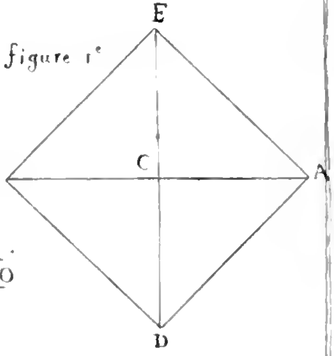
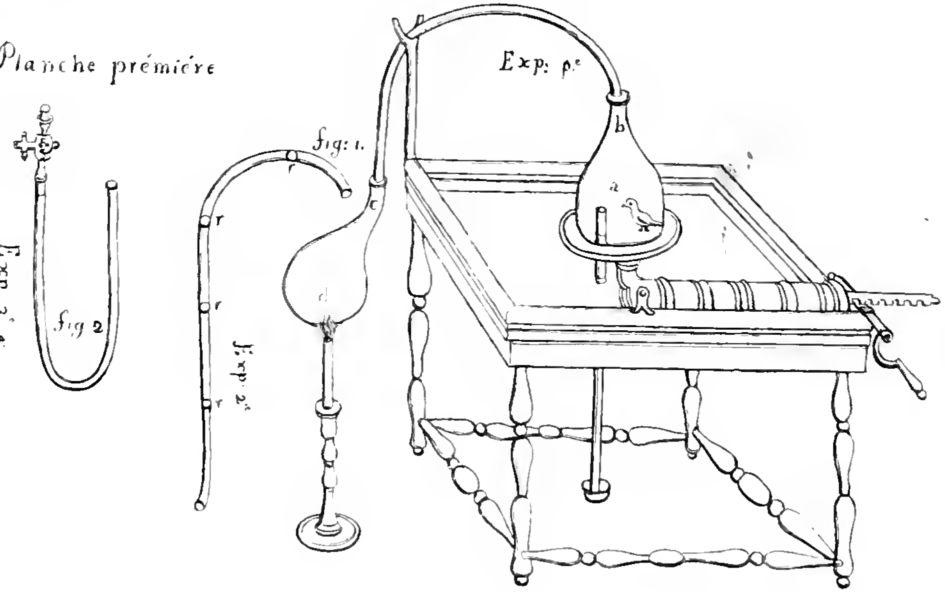
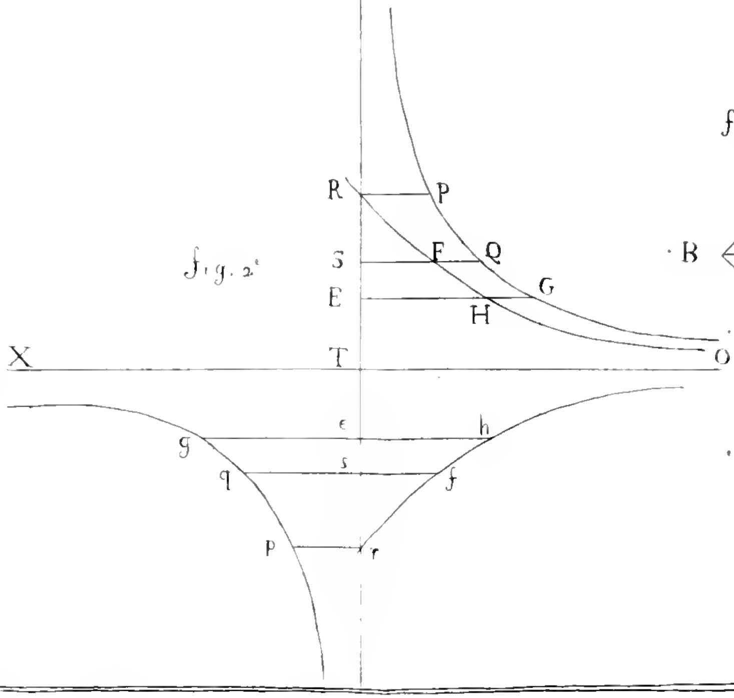
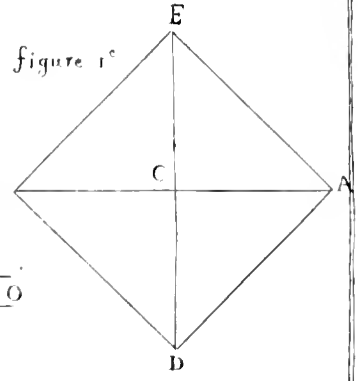


Planche première



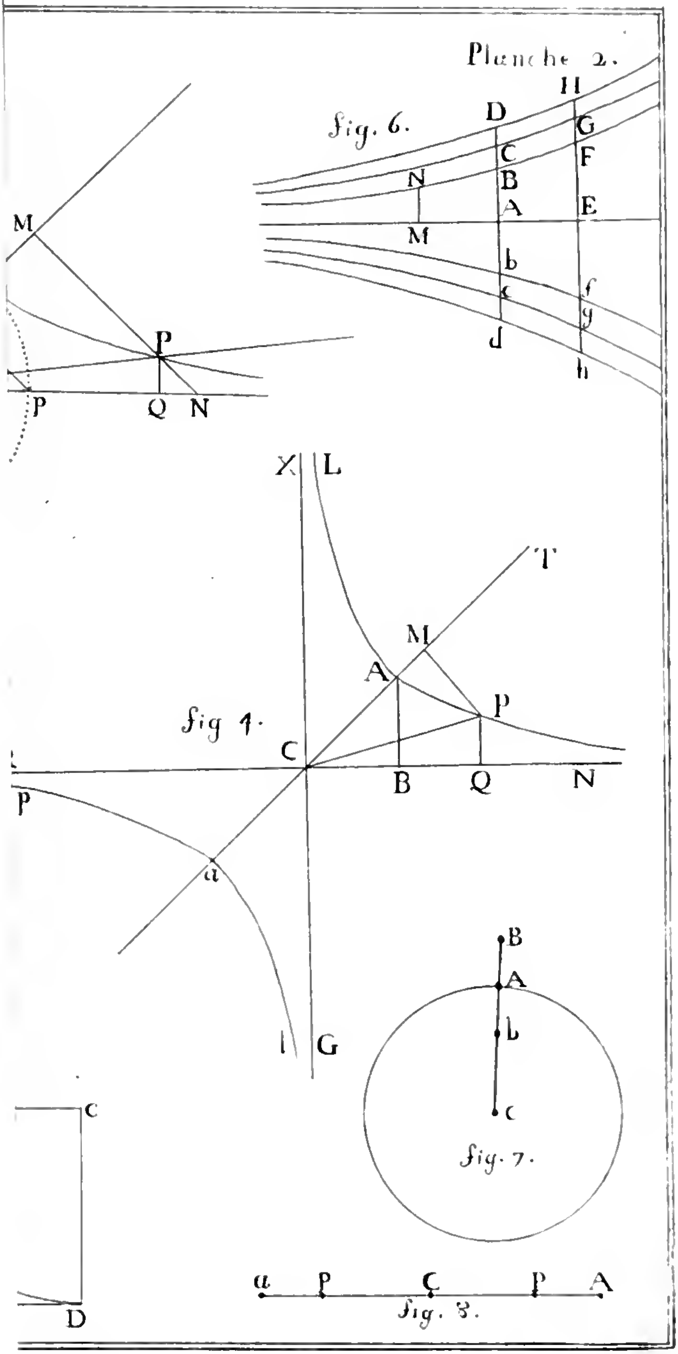


Planche 2.
fig. 6.
fig 4.
fig. 7.
fig. 8.

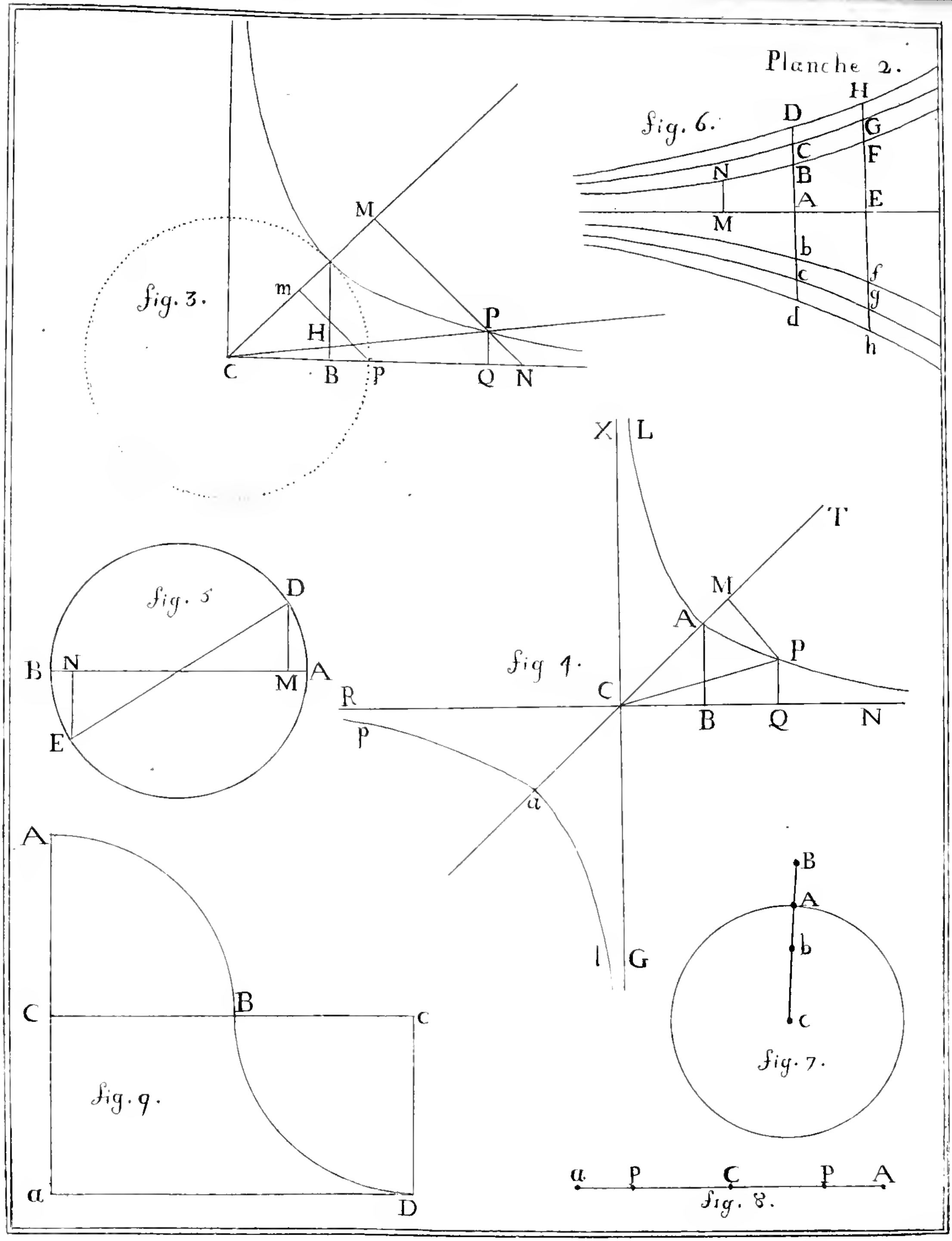


Planche 2.
fig. 3.
M
m
H
P
C
B
p
Q
N
fig. 6.
D
H
G
C
F
N
B
A
E
M
b
c
f
g
d
h
X
L
T
M
A
P
fig 4.
C
R
B
Q
N
p
a
l
G
fig. 5
D
B
N
A
M
E
A
C
B
c
fig. 9.
a
D
B
A
b
c
fig. 7.
a
p
C
P
A
fig. 8.

Planche 3e

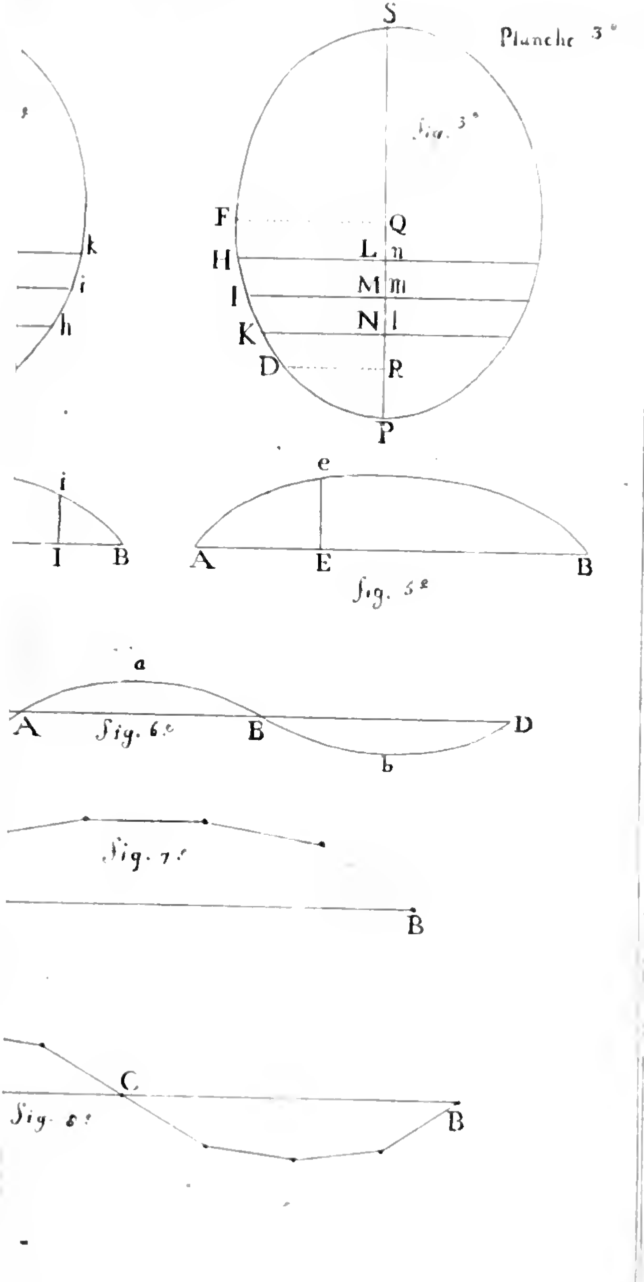
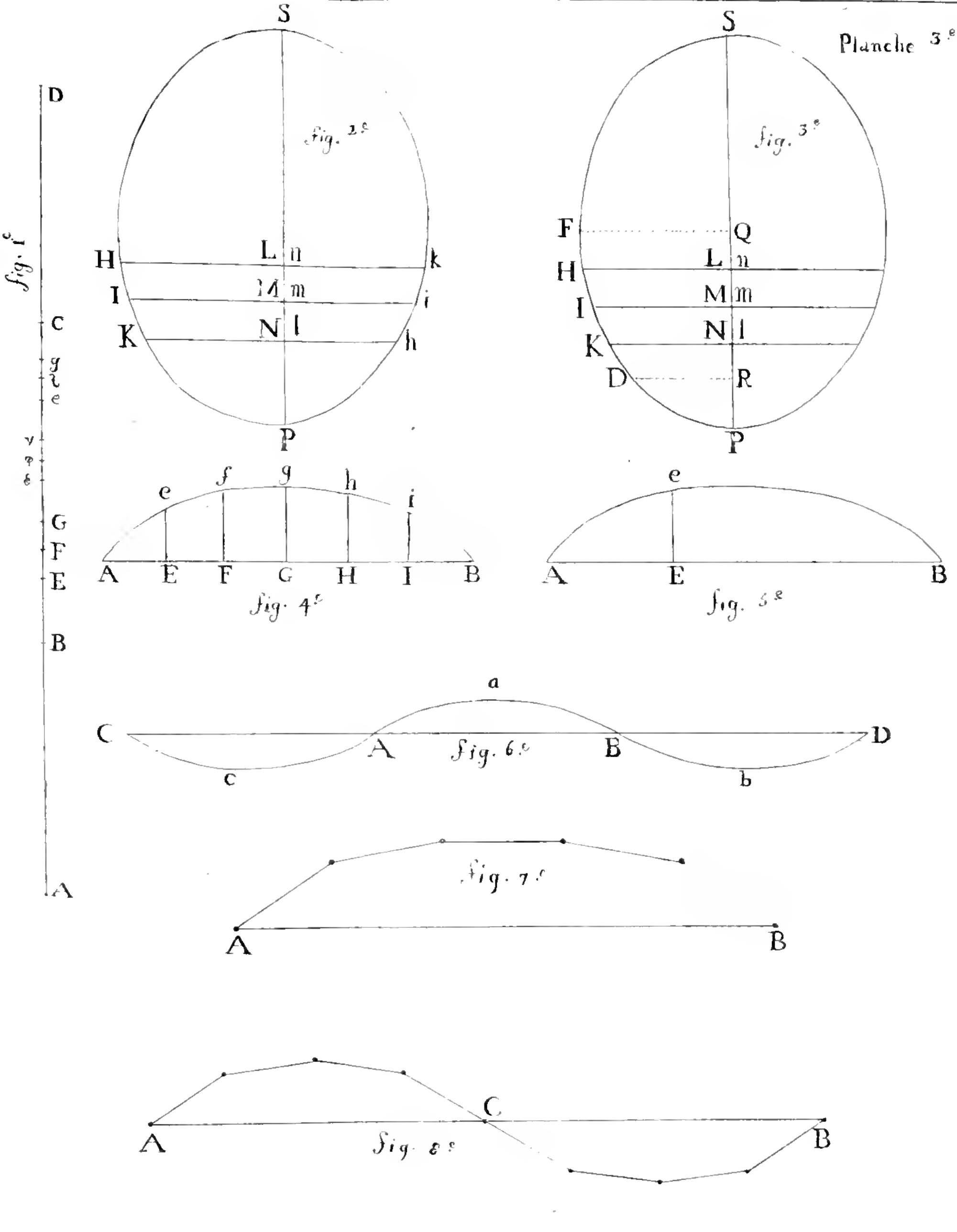

S
fig. 3e
F
Q
k
L n
H
i
M m
I
h
N l
K
D
R
P
i
e
I
B
A
E
B
fig. 5e
a
A
fig. 6e
B
D
b
fig. 7e
B
C
fig. 8e
B

Planche 3e




Pour la Dissertation sur le Son


fig. 9.

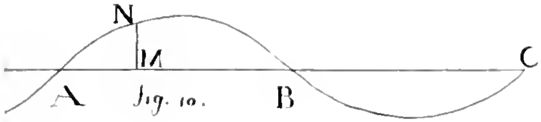



fig. 10.

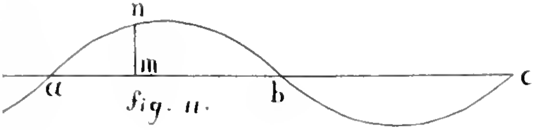



fig. 11.

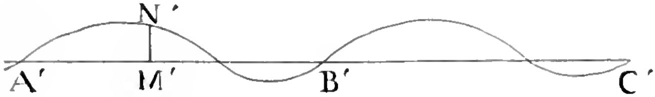



fig. 12.

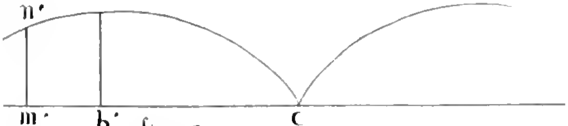



fig. 13.


fig. 14.

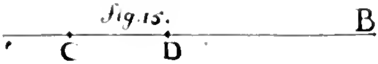



fig. 15.


fig. 16.

Planche 4e

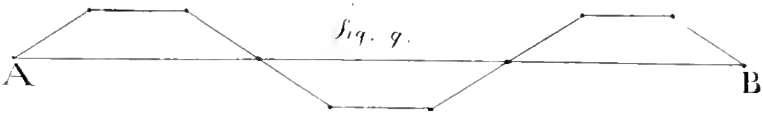



fig. 9.

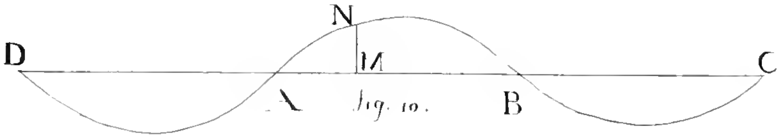



fig. 10.

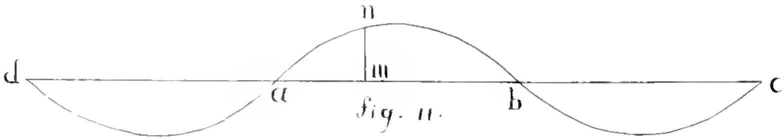



fig. 11.

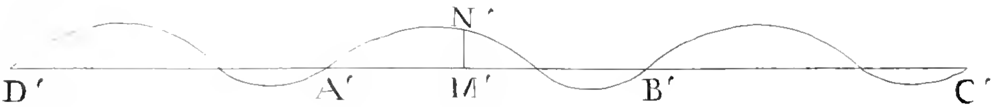



fig. 12.

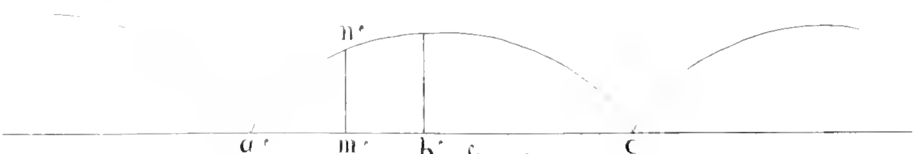



fig. 13.

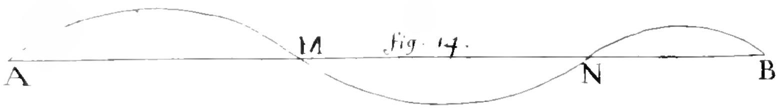



fig. 14.

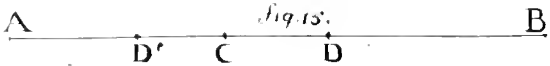



fig. 15.

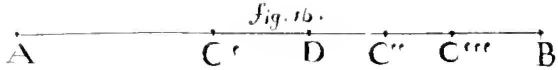



fig. 16.