Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1896.

Nr. 1399-1435.

Redaktion: J. H. Graf.

A BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1897.

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Mittheilungen

der

Naturforschenden Gesellschaft

in Bern

aus dem Jahre 1896.

Nr. 1399-1435.

Redaktion: J. H. Graf.

BERN.
Druck und Verlag von K. J. Wyss
1897.

[illegible]

Jahresbericht

über die

Thätigkeit der bernischen Naturforschenden Gesellschaft

in der Zeit vom 1. Mai 1895 bis 2. Mai 1896.

Hochgeehrte Herren!

Im abgelaufenen Vereinsjahr hielt unsere Gesellschaft die normale Zahl von 13 Sitzungen ab, 10 davon im Saale des Hotels Storchen, je eine im zoologischen und pharmaceutischen Institut und eine in Langnau. An diesen Sitzungen betheiligten sich mit Vorträgen, kleineren Mittheilungen oder Demonstrationen die folgenden 16 Herren:

Herr	Baltzer	1 Vortrag	1 Demonstration
„	E. Baumberger	1 „	
„	Brückner	1 „	
„	Coaz		1 „
„	E. Fischer	2 Vorträge	1 „
„	J. H. Graf	1 Vortrag	
„	P. Gruner	1 „	
„	G. Huber	2 Vorträge	
„	A. Kaufmann		1 „
„	Kissling	1 Vortrag	1 „
„	A. Rossel	1 „	1 „
„	Schaffer		1 „
„	Th. Steck		2 Demonstrationen
„	Th. Studer	2 Vorträge	3 „
„	Thiessing		2 „
„	Tschirch	2 „	

Allen Vortragenden sei an dieser Stelle der Dank der Gesellschaft ausgesprochen.

Am 15. Mai fand eine botanisch-geologische Exkursion statt in die Moränenlandschaft von Amsoldingen und Thierachern, zum erratischen Block bei Gurzelen, zum Geistsee und Dittingersee nach Thun. Die Betheiligung war wegen ungünstiger Witterung eine schwache.

Die auswärtige Sitzung wurde am 16. Juni gemeinsam mit der Naturforschenden Gesellschaft Solothurn unter zahlreicher Betheiligung im Löwen in Langnau abgehalten. Herr Pfarrer Müller daselbst hatte in verdankenswerther Weise die Vorbereitungen übernommen. Wir Berner stiegen in Emmenmatt aus, von wo wir, von einigen Herren aus Langnau abgeholt, einen prächtigen Spaziergang über das aussichtreiche „Bagenschwand" nach Langnau machten. An der Sitzung, die sich auch von Seite der Langnauer einer regen Theilnahme erfreute, sprach Herr Dr. Kissling „Ueber die Herkunft der bunten Nagelfluh"; Herr Tschirch „Ueber die Anwendung der Photographie zur Lösung moderner wissenschaftlicher Streitfragen" und Herr Enz aus Solothurn „Ueber die neueren Theorien der Hagelbildung". Nach dem wohlgelungenen Banket im Löwen demonstrirte Hr. Prof. Rossel das neue Calciumcarbidlicht. Nachmittags fand nach einem kleinen Spaziergang noch eine gemüthliche Vereinigung im Hirschen statt. Auch diese Zusammenkunft mit unsern Solothurner Freunden, die unter Anführung des Hr. Prof. Lang zahlreich erschienen waren, verlief äusserst schön, und es ist nur zu wünschen, dass noch öfters solche gemeinsame Sitzungen stattfinden mögen.

Im verflossenen Jahr erhielt unsere Gesellschafts-Bibliothek einen werthvollen Zuwachs durch die Schenkung des Herrn Hofrath Brunner in Wien, welcher derselben einen Theil seiner Bibliothek übermachte. Das Geschenk wurde bestens verdankt.

Nach 6-jähriger Thätigkeit hat Herr Prof. Graf seine Stelle als Oberbibliothekar der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft niedergelegt; die bernische naturforschende Gesellschaft sprach ihm den besten Dank aus für die geleisteten Dienste. Als Nachfolger wurde Herr Dr. Steck gewählt. Im letzten Sommer fand der Umzug der ganzen Bibliothek in grössere und bequemere Räume im ehemaligen historischen Museum statt.

Ueber den Lesezirkel berichtet Herr Dr. Steck:

« Der nunmehr im 7. Jahre seines Bestehens stehende Lesezirkel der naturforschenden Gesellschaft wird gegenwärtig noch von 25 Mitgliedern benützt, zeigt also einen stetigen Rückgang an Theilnehmern, der hauptsächlich bedingt wird durch die häufig auftretenden Störungen in der Cirkulation der Mappen. Unter den Austretenden befindet sich auch Herr Dr. Schlachter, einer der bisherigen Kontrolleure, der mit grosser Sorgfalt seines Amtes gewaltet hat, wofür wir ihm hier den verbindlichsten Dank abstatten. Seine Stelle wurde nicht wieder besetzt; der nachfolgende Kontrolleur, Herr Dr. von Steiger, übernahm in freundlicher Weise das Einlegen der bisher von Herrn Dr. Schlachter in Cirkulation gesetzten Zeitschriften.

Leider sah sich die Gesellschaft genöthigt, gegen einen frühern Theilnehmer am Lesezirkel, der sich geweigert hatte, die ihm vom Vorstande auferlegte sehr geringe Busse zu bezahlen, den Rechtsweg zu betreten. Infolge dessen erwachsen dem Betreffenden Kosten im Betrage von 360 Franken, die zwar die Höhe der für vorliegenden Fall nach Reglement rechtskräftig zustehenden Busse noch nicht erreichen.

Trotzdem die Zahl der Theilnehmer fast um die Hälfte geringer als die der vorhandenen Mappen, war es dem Vorstand nicht möglich jede Woche neue Mappen in Cirkulation zu setzen, da dieselben höchst unregelmässig bei ihm einliefen. Im Interesse einer regelmässigen Cirkulation ergeht daher wieder an alle Theilnehmer die dringende Bitte, die Mappen genau an dem vorgesehenen Absendungsdatum dem Nachfolger zu übermitteln und im Falle von Abwesenheit oder Erkrankung dem Vorgänger Mittheilung zu machen, mit der Bitte, ihn bei der Zusendung von Mappen vorläufig zu übergehen. Die Rücksicht auf die übrigen Theilnehmer am Lesezirkel erfordert, jedes Liegenbleiben der Mappen und daraus hervorgehende Stauungen zu vermeiden.»

Der Mitgliederbestand hat sich im Berichtsjahre nicht wesentlich geändert. Ausgetreten sind 7 Mitglieder; durch den Tod verloren wir leider Herrn Bundesrath Schenk, der seit 1872 Mitglied unserer Gesellschaft gewesen war, und Herrn Prof. Rütimeyer in Basel, seit 1853 korrespondirendes Mitglied. Eingetreten sind 6 neue Mitglieder. Die Zahl der Mitglieder hat also in diesem Zeitraum um 3 abgenommen.

Für das Vereinsjahr 1896/97 wurde zum Präsidenten gewählt, Herr Prof. Dr. Th. Studer, zum Vicepräsidenten Herr Prof. Dr. Drechsel.

Der abtretende Präsident:

G. Huber.

Sitzungs-Berichte.

897. Sitzung vom 11. Januar 1896.

Abends $7^1/_2$ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 16 Mitglieder und 4 Gäste.

1. Herr J. H. Graf: **L. Schläfli** (siehe die Abhandlungen für das Jahr 1895).
2. Es wird mitgetheilt, dass ein Mitglied des Lesezirkels, das sich arge Nachlässigkeiten in der Spedition der Mappen zu Schulden kommen liess, sich aber weigerte, eine ausgesprochene, kleine Busse zu bezahlen, dem Richter verzeigt und von diesem zu 250 Fr. Busse und 100 Fr. Entschädigung verurtheilt wurde.

898. Sitzung vom 25. Januar 1896.

Abends $7^1/_2$ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 17 Mitglieder und 4 Gäste.

1. Herr G. Huber spricht über **die Planetoiden.**
2. Herr Th. Steck legt die neueste Nummer der „Nature" vor, welche einige Reproduktionen von Photographien, durch X-Strahlen erzeugt, enthält.

899. Sitzung vom 8. Februar 1896.

Abends $7^1/_2$ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 31 Mitglieder und Gäste.

1. P. Gruner: **Kathodenstrahlen und X-Strahlen.** Der Vortragende gibt zunächst einen summarischen Ueberblick über die ältern Untersuchungen der elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen. Daran schliesst sich eine kurze Betrachtung der theoretischen Erklärungen, insbesondere der Convectionstheorie, der Dissociationstheorie und der Aethertheorie von E. Wiedemann, welch' letztere als die einzige noch haltbare Theorie hingestellt wird. Sodann bespricht der Vortragende eingehend die Untersuchungen von Lénard über Kathodenstrahlen. Eine Zusammenstellung der Eigenschaften dieser Strahlen zeigt eine grosse Analogie mit den gewöhnlichen Lichtstrahlen — nur das Verhalten im magnetischen Feld ist verschieden.

Ebenso werden die Kathodenstrahlen mit den in neuester Zeit von Röntgen in Würzburg entdeckten X-Strahlen verglichen. Diese Vergleichung ergibt nur zwei wesentliche Unterschiede: die verschiedene Absorptionsfähigkeit und das verschiedene Verhalten im magnetischen Feld. — Es wird aber darauf hingewiesen, dass diese Differenzen quantitativer Natur sind. Lénard hat sehr verschiedene Kathodenstrahlen gefunden; die neuen Versuche zeigen, dass es auch sehr verschiedenartige

X-Strahlen gibt, so dass noch ein Uebergang von den einen zu den andern gefunden werden könnte. Zudem ist die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen nur in verdünnten Gasen, nicht aber in gewöhnlicher Luft nachgewiesen worden. Endlich hebt der Vortragende hervor, dass jedenfalls bei allen diesen Versuchen das Entstehen sekundärer Kathoden an dem Apparat von Wichtigkeit sei, und dass diese sekundären Kathoden sich bei Lénard jedenfalls ganz anders bilden als bei Röntgen.

Der Vortragende sieht in den Kathodenstrahlen sowohl wie auch in den X-Strahlen eine ausserordentlich feine transversale Aetherschwingung, welche wegen ihrer Feinheit von den Molekülen der umgebenden Gase nicht modificirt und desshalb weder reflektirt, noch gebrochen, noch polarisirt werden kann.

2. Herr A. Tschirch berichtet über seine neuen chemischen und spektralanalytischen **Untersuchungen über das Chlorophyll und andere Pflanzenfarbstoffe, sowie über die Beziehungen des Chlorophylls zum Blutfarbstoff.** Die Untersuchungen wurden, soweit sie spektralanalytische sind, mit dem Quarzspektrographen ausgeführt und haben zu folgenden Resultaten geführt.

1. Der gelbe Farbstoff der Blätter (Xanthophyll der Autoren) und wahrscheinlich auch der der Blüthen (Anthoxanthin der Autoren) ist ein Mischfarbstoff; er besteht aus Xanthocoratin, einem Farbstoffe, dessen Lösungen 3 Absorptions-Bänder im Violet zeigen und dem Xanthophyll (im engeren Sinne), dessen Lösungen keine Bänder zeigen und nur Ultraviolet absorbieren (Endabsorption). Beide Farbstoffe wurden krystallinisch erhalten. Sie sind stickstofffrei.

2. Das grüne Chlorophyll der lebenden Blätter ist sehr wahrscheinlich eine gepaarte Verbindung von der Phyllocyaninsäure, die der Vortragende zuerst dargestellt und beschrieben (1884), und einem noch unbekannten aber farblosen Paarling. Die krystallisierte Phyllocyaninsäure enthält Stickstoff und zwar den Pyrrolring, denn sie liefert mit Zinkstaub erhitzt Pyrrol. Sie entspricht der Formel $C_{24}H_{28}N_2O_4$. Da die Pflanze sehr haushälterisch mit ihrem Stickstoffmateriale umgeht, so schafft sie im Herbst vor dem Blattfall zunächst das Chorophyll aus den Blättern. Das stickstofffreie Xanthophyll und Xanthocarotin bleiben im Blatte (Grund der herbstlichen Gelbfärbung).

3. Die Phyllocyaninsäure sowohl wie ihre Verbindungen, von denen der Vortragende bereits früher die Zink- und Kupferverbindung beschrieben hat, geben ein Absorptions-Spektrum (vgl. Tschirch, Wiedemann's Annalen der Physik 1884), das im sichtbaren Teile des Spektrums nur in 2 Bändern (von 5) mit dem Sauerstoff-Hämoglobin des Blutes übereinstimmt. Bei Untersuchungen mit dem Quarzspektrographen aber lassen sie im Violet ein neues Band erkennen, welches vollständig mit dem von Soret entdeckten Hauptblutbande übereinstimmt.

4. Das neue Chlorophyllband ist vom Vortragenden in allen daraufhin untersuchten Chlorophyllkörpern aufgefunden worden. Es teilt mit dem Blutbande, welches, wie besonders Gamgee zeigte, gleichfalls keinem der Blutfarbstoffe (Hämoglobin, Oxyhämoglobin, Hämin, Hämatin, Methämoglobin) fehlt, die Eigenschaft, in seiner Lage eine viel grössere Beständigkeit zu zeigen als alle andern Bänder, gleichviel welchen chemischen Eingriffen die Substanzen unterworfen werden. Seine Lage schwankt (wie beim Blutbande) nur zwischen G und M Fraunhofer.

5. Während, abgesehen von diesem Bande, zwischen den Blutfarbstoffen einerseits und den Chlorophyllfarbstoffen andererseits eine ziemlich grosse spektralanalytische Verschiedenheit herrscht, besitzt ein Derivat des Chlorophylls, die von dem Vortragenden aus Chlorophyll dargestellte in rotgelben Kristallen kristallisirende rote Phyllopurpurinsäure (Phylloporphyrin Schunck's) und das von Nencki aus Blut dargestellte rote Hämatoporphyrin im Wesentlichen dasselbe Spektrum, auch im sichtbaren Spektralbezirk. Beide zeigen ferner auch das Soret'sche Blutband. Die roten Lösungen beider fluoreszieren rot.

6. Da wir nun annehmen, dass die Absorptionen durch Schwingungen von bestimmten Atomkomplexen hervorgerufen werden, müssen wir schliessen, dass Körper mit gleichen Absorptionserscheinungen den gleichen oder die gleichen Atomkomplexe enthalten. Wir sind demnach vollständig berechtigt, anzunehmen, dass in den Körpern der Chlorophyllgruppe und den Blutfarbstoffen ein und derselbe Atomkomplex steckt, und dass dieser Atomkomplex eine viel grössere Beständigkeit besitzt als jene Komplexe, die die Absorptionen im Gelb und Grün hervorrufen, also wohl dem Kern angehört. Was für ein Atomkomplex ist das aber?

7. Da alle daraufhin untersuchten Körper beider Gruppen bei der Zinkstaubdestillation Pyrrol lieferten (vom Vortragenden für Phyllocyaninsäure, Chlorophyllinsäure und Verbindungen, sowie für das krist. Hämin, Hämatin, krist. Hämoglobin, Methämoglobin [und auch das Bilirubin], von Schunck und Marchlewski für andere Derivate des Chlorophylls nachgewiesen), so steckt offenbar sowohl im Blute wie im Chlorophyll der Pyrrolring. Ob dies aber die Atomgruppe ist, deren Schwingungen die beiden gemeinsamen Absorptionen zwischen G und M Fraunhofer hervorrufen, müssen weitere Untersuchungen lehren.

8. Immerhin bleibt schon allein der Nachweis interessant, dass Blut und Chlorophyll so nahe verwandt mit einander sind, — die beiden für die Biologie wichtigsten Farbstoffe: das Chlorophyll, welches die Kohlensäurezersetzung und Sauerstoffabspaltung bei den Pflanzen vermittelt, und das Blut, welches den Sauerstoff aufnimmt und Kohlensäure wenigstens abzuspalten vermag.

9. Die obigen Resultate sind in wesentlichen Teilen erzielt worden durch Kombination chemischer und spektralanalytischer Untersuchungsmethoden mit der Photographie. Die Spektren der reinen Körper wurden mit dem Quarzspektrographen photographiert.

Der Vortrag wurde durch Vorlage der photographischen Spektralaufnahmen, sowie der besprochenen Substanzen illustriert.

Zum Schluss dankt der Vortragende Herrn Buss für die freundliche Unterstützung bei der Aufnahme der Photographien.

900. Sitzung vom 29. Februar 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 12 Mitglieder und 1 Gast.

1. Herr Ed. Fischer spricht **über die Trüffeln, mit Berücksichtigung schweizerischer Vorkommnisse:**

Der Vortragende gibt zunächst eine kurze historische Uebersicht der Ansichten, welche im Laufe der Zeit über die Trüffeln geäussert worden sind, von den z. Th. sehr sonderbaren Vorstellungen des Alterthums und des Mittelalters bis zu den klassischen Untersuchungen von Vittadini und Tulasne. Nach einigen Bemerkungen über die Entwicklung und Lebensweise der Tuberaceen werden sodann ihre wichtigsten Repräsentanten und ihre Verwandtschaftsverhältnisse besprochen. Mit diesem letzteren Punkte hatte sich der Vortragende eingehend beschäftigt bei Gelegenheit der Bearbeitung der Tuberaceen für die zweite Auflage von Rabenhorst's Kryptogamenflora Deutschlands, Oesterreichs und der Schweiz. Die Tuberaceen sind eine Convergenzgruppe, in der sich besonders zwei von verschiedenen Ausgangspunkten abgehende Reihen auseinanderhalten lassen. Die erste derselben leitet von gymnocarpen Ascomyceten durch Genea und Hydnotrya, zu Pachyphloens und Tuber über; die zweite umfasst unter Anderem die Gattungen Terfezia, Choiromyces, Elaphomyces und schliesst sich den Perisporiaceen an, zu denen der Uebergang u. a. durch Onygena und die merkwürdige, von Massee seinerzeit fäschlich als Gastrolichen beschriebene Trichocoma vermittelt wird. Eine dritte Reihe, mit Balsamia als Vertreter, wurde im Vortrage übergangen.

In der Schweiz sind bisher folgende Gattungen nachgewiesen: Tuber, nach Jaczewski mit 8—9 Arten, darunter wohl am wichtigsten T. æstivum, das besonders im Jura häufig scheint, Choiromyces mit C. maeandriformis, im Jura z. B. bei Locle, auch bei Bern beobachtet, Elaphomyces und Onygena. Von letzterer kennen wir aus der Schweiz O. equina auf faulenden Pferdehufen, O. corvina vom Vortragenden kürzlich auf Vogelfedern im Dählhölzli gefunden und O. arietina Ed. Fischer nova spec. von Herrn J. Amann bei Davos auf den Hörnern eines alten Widders gesammelt.

2. Herr Thiessing macht einige Bemerkungen **über die Entdeckung eines neolitischen Gräberfeldes bei Worms.**

901. Sitzung vom 14. März 1896.

Abends $7^1/_2$ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 13 Mitglieder.

1. Herr E. Baumberger in Twann spricht **über die Entstehung der Hauterivientaschen:**

An der Hand grösserer Profile werden zuerst die tektonischen Verhältnisse von oberem Jura und unterer Kreide zwischen St. Immerthal und Bielersee vorgeführt und wird besonders auf die für die Südflanke der Seekette so charakteristische Erscheinung der Fauteuilbildung (épaulement) aufmerksam gemacht. Die Jura- und Kreideschichten steigen steil aus der schmalen Alluvialzone längs des Sees auf (60—70°), bilden dann ein stark gebogenes Knie, um in eine schwache Depression oder ein wenig geneigtes Plateau überzugehen (30—40°) und dann in der Seekette wieder steil sich aufzurichten (scharf zu beobachten auf der Strecke Kleintwann bis Pulverstampfe in der Twannbachschlucht). Nach einem stratigraphischen Ueberblick über die Kreidebildungen am Bielersee (Valangien, Hauterivien) wird auf die interessante Erscheinung der Hauterivientaschen hingewiesen, darin bestehend, dass die jüngern, normal höher gelegenen Hauterivienmergel mit Knollen aus dem darüber gelegenen Mergelkalk und eckigen Blöcken des obern Valangien (Calc. roux, Limonit) Höhlungen im untern Valangien, den Schichtflächen folgend, ausfüllen. Es wird hierauf, durch ein detaillirtes stratigraphisches Profil erläutert, im untern Valangien folgende Schichtenreihe nachgewiesen (von unten nach oben):

1. Alternirende Kalk- und Mergelschichten mit Fossilien, direkt über dem Purbeck 4 m.
2. Untere Kalkzone (Marbre bâtard) 8 m.
3. Körnige Mergel und Mergelkalk mit reicher Fauna 4 m.
4. Obere Kalkzone (Marbre bâtard) mit 4 konstant auftretenden Niveaux.
   a. Weisslicher, kompakter, wenig geschichteter Kalk 8 m.
   b. Gut geschichteter, kompakter, rostgelb gefärbter Kalk 12 m.
   c. Mergelkalk und Mergel mit Fossilien (Bipschal) 1 m.
   d. Weissliche, kompakte, ungeschichtete Kalke 4 m.

Die meisten Hauterivientaschen finden sich in der obern Kalkzone, Niveau b.

Die Hauterivienmergel bilden die Hauptmasse des Füllungsmaterials. Es wird betont, dass dieselben ganz normal aussehen, keine Spur von Wassertransport aufweisen, dass an vielen Stellen Keilstruktur (Harnische) sich konstatiren lässt und dass sie am Kontakt mit der Decke (Marbre bâtard) und rings um die in den Mergeln zertreut liegenden Blöcke des obern Valangien blättrig bis schieferig auftreten. Sie scheinen in alle Unebenheiten des einschliessenden Gesteins hineingepresst, indess der Marbre bâtard hie und da zackenartig in die Mergel eindringt. Letztere enthalten die charakteristischen Fossilien der Hauterivestufe.

Der Vortragende bespricht nun die verschiedenen Hypothesen früherer Beobachter, die Entstehung der Hauterivientaschen betreffend, und er kommt in Uebereinstimmung mit S c h a r d t zu dem Schlusse, dass deren Bildung als das Resultat der Faltenbildung zu betrachten sei und dass sie von oben her auf mechanischem Wege durch Abrutschen der höher gelegenen Hauterivienmergel sich gefüllt haben. Hergang:

1. In den Partien intensiver Biegung der Schichten (nur in der Region der knieförmigen Umbiegung sind die Taschen zu beobachten) entstehen bei der Faltenbildung Risse in der Richtung des Streichens; die unter dem Bruch liegenden Schichten klaffen infolge der im Gewölbe herrschenden Spannung nach aussen.

2. Schollen der Hauterivienmergel und mancherorts auch Gesteine des untern, aber namentlich des obern Valangien rutschen zwischen die klaffenden Kalkschichten.

3. Für die Taschen, in denen das Füllungsmaterial rings von Marbre bâtard eingeschlossen, ist nachgewiesen, dass die als Decke bezeichneten Schichten sich n a c h d e r F ü l l u n g d e r T a s c h e n über die Mergel geschoben, und letztere zusammengepresst, gestaut haben. Diese Bewegung der Decke ist nachgewiesen durch deutliche Rutschflächen und Breccienbildung in der Verlängerung der Taschen. Interessante Dislokationserscheinungen, die sich indes nicht über Hauterivientaschen zu erstrecken scheinen, sind zu beobachten westlich von Tüscherz und an der „Hohen Fluh“ bei Bipschal.

2. Herr Thiessing macht aufmerksam auf **neue Gräberfunde auf dem „Wyler“ bei Bern.**

902. Sitzung vom 2. Mai 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr G. Huber. Anwesend: 19 Mitglieder.

1. Wahlen: Zum Präsidenten für das Vereinsjahr 1896/97 wird gewählt: Herr Prof. Dr. Th. Studer, zum Vicepräsidenten: Herr Prof. Dr. Drechsel.

2. Herr A. Baltzer macht Mittheilung über ein von ihm als **interglacial erwiesenes Profil bei Pianico** in der Nähe des Iseosees. Die interglacialen Schichten sind von Grundmoräne über- und unterlagert. In ihnen kommt eine von Prof. Ed. Fischer untersuchte Flora vor, die auf ein etwas wärmeres Klima hinweist und durch pontische Formen (Rhododendron ponticum, Buxus sempervirens etc.) ausgezeichnet ist. Denselben pontischen Charakter trägt aber auch die Flora von Innsbruck und die früher vom Vortragenden in den Blättermergeln von Lugano aufgefundene Flora. Dadurch wird die von Wettstein'sche Ansicht bestätigt, wonach ein zusammenhängender Florengürtel mit pontischem Gepräge vom schwarzen Meer durch Mitteleuropa bis Spanien sich erstreckte. Nur lässt der Vortragende diese Verhältnisse schon in der jüngeren Interglacialzeit und nicht erst in der Postglacialzeit beginnen.

Die Arbeit erscheint im Neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie etc., Jahrgang 1896, Bd. I.

3. Herr Th. Studer weist **einen Zahn von Hyæmoschus** aus dem Muschelsandstein von Madiswyl vor.

4. Herr E. Kissling demonstrirt von der gleichen Lokalität einige gut erhaltene Exemplare der **Scutella helvetica.**

   Ferner macht derselbe wieder aufmerksam auf den schönen **Fundort von fossilen Pflanzen an der Losenegg** im Eriz.

5. Herr Th. Studer spricht **über Hörner einer Antilope aus dem Ober-Miocän** von Locle.

903. Sitzung vom 30. Mai 1896.

Abends 7½ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 18 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Uebernahme des Jahresfestes der schweiz. naturf. Gesellschaft.

   Es wird beschlossen, für das Jahr 1897 auf eine Bewerbung zu verzichten, dagegen für 1898 das Fest nach Bern zu verlangen.

2. Auf den 6. Juni wird eine Exkursion nach Maikirch und über den Schüpberg nach Schüpfen angeordnet.

3. Herr J. H. Graf spricht **über die schweizerische Landesvermessung von 1832—1864.**

904. Sitzung, Sonntag den 28. Juni 1896 in Kirchberg,

gemeinsam mit der naturforschenden Gesellschaft von Solothurn.

Vorsitzender: Herr F. Lang.

1. Herr Ed. Drechsel: **Ueber das Jod und seine Bedeutung für den thierischen Organismus.**

2. Herr Walker, Spitalarzt in Solothurn: **Louis Pasteur und seine Forschungen.**

3. Herr A. Rossel: **Ueber die Wirkung der Phosphorsäure als Düngmittel.**
4. Herr J. H. Graf: **Ueber die Ueberschwemmungen der Emme und alte und neue Flusskorrektionen.**

905. Sitzung vom 31. Oktober 1896.

Abends $7^1/_2$ Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 24 Mitglieder und 3 Gäste.

1. Herr Professor Lang in Solothurn dankt für die Gratulation zu seinem 50-jährigen Amtsjubiläum von Seiten der bernischen naturforschenden Gesellschaft.
2. Herr St. von Kostanecki spricht **über gelbe Pflanzenfarbstoffe.**
3. Herr Ed. Fischer weist **ein Stück eines Psaronius** vor.

906. Sitzung vom 14. November 1896.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 20 Mitglieder und 2 Gäste.

1. Herr A. Tschirch: **Die chemische Industrie auf den Ausstellungen in Genf und Berlin.**

907. Sitzung vom 28. November 1896.

Abends 8 Uhr im Storchen.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 23 Mitglieder und 3 Gäste.

1. Herr A. Baltzer: **Der alte Rhonegletscher und sein Verhältniss zum Aargletscher.**

908. Sitzung vom 12. Dezember 1896.

Abends 8 Uhr im zoolog. Institut.

Vorsitzender: Herr Th. Studer. Anwesend: 27 Mitglieder und 3 Gäste.

1. Herr Ed. Brückner: **Projektionen von Bildern** von Brandungswirkungen an der Küste der Insel Wight, von den Veränderungen des Rhonegletschers und von Gipfelformen in den kristallinen Schiefern.

2. Herr Ed. Fischer übergibt der Gesellschaft für ihre Bibliothek seine Bearbeitung der **Tuberaceen in Rabenhorst's Kryptogamenflora** Deutschlands, Oesterreichs und der Schweiz. Anschliessend daran hebt er den Parallelismus hervor, welcher zwischen den Tuberaceen und Gastromyceten besteht; wir haben es hier zu thun mit zwei Reihen, welche von getrennten Ausgangspunkten ausgehend sich unter dem Einflusse gleicher Bildungsgesetze in gleicher Richtung weiter entwickelt haben. (Näheres hierüber siehe Ed. Fischer: Ueber den Parallelismus der Tuberaceen und Gastromyceten, Bericht der deutschen botanischen Gesellschaft, 1896, p. 301 ff.)

3. Herr Oberfeldarzt Ziegler erwähnt **hufartige Spuren auf Sandsteinplatten** aus dem Rheinthal.
4. Herr Steck demonstrirt **Neuropteren** aus der entomologischen Sammlung des naturhistorischen Museums.
5. Herr E. Kissling weist **eigenthümliche Lehmkugeln** aus dem Sammelkanal des Lammbachs vor.

Verzeichnis der Mitglieder

der

Bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

(Am 31. Dezember 1896.)

Die mit * bezeichneten Mitglieder wurden im Jahre 1896 neu aufgenommen.

Vorstand.

Prof. Dr. *Th. Studer,* Präsident vom 1. Mai 1896 bis 30. April 1897.
Prof. Dr. *Drechsel,* Vice-Präsident.
B. Studer, jun., Apotheker, Kassier seit 1875.
Dr. *E. Kissling,* Sekretär seit 1892, Unterbibliothekar seit 1888.
Prof. Dr. *J. H. Graf,* Redaktor der Mitteilungen seit 1883.
Dr. Th. Steck, Oberbibliothekar und Geschäftsführer des Lesezirkels.

Mitglieder.

1.	*Anderegg,* Ernst, Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern .	1891
2.	*Andreæ,* Philipp, Apotheker, Bern	1883
3.	*Badertscher,* Dr. A., Sekundarlehrer, Bern	1888
4.	*Balmer,* Dr. Hans, Bern	1886
5.	*Baltzer,* Dr. A., Professor der Mineralogie und Geologie, Bern	1884
6.	*Baumberger,* Ernst, Sekundarlehrer in Basel	1890
7.	*Beck,* Dr. Gottl., Lehrer des Freien Gymnasiums, Bern .	1876
8.	*v. Benoit,* Dr. jur. G., Bern	1872
9.	*Benteli,* A., Rektor und Docent, Bern	1869
10.	*Benteli,* A., V. D. M., Bern	1891
11.	*Berdez,* H., Professor an der Tierarzneischule, Bern . .	1879
12.	*Berlinerblau,* Dr. J., Fabrikdirekt. in Sosnowice (Russ.-Polen)	1887
13.	*Bourgeois,* Dr. med. E., Arzt, Bern	1872
14.	*Brückner,* Dr. Ed., Prof. der Geographie, Bern . . .	1888
15.	*Brunner,* C., Dr. phil., Trautsohngasse 6, Wien . . .	1846
16.	*Büchi,* Fr., Optiker, Bern	1874
17.	*Burri,* Dr. phil., Prosektor	1895
18.	*v. Büren,* Eug., allié von Salis, Sachwalter, Bern . .	1877
19.	*Cherbuliez,* Dr. Direktor, Mülhausen	1861
20.	*Coaz,* eidgenössischer Oberforstinspektor, Bern . . .	1875
21.	*Conrad,* Dr. Fr., Arzt in Bern	1872
22.	*Cramer,* Gottl., Arzt in Biel	1854

23.	*Crelier, Dr., Sekundarlehrer in St. Immer	1896
24.	Dick, Dr. Rud., Arzt in Bern	1876
25.	*Drechsel, Prof. Dr., Bern	1892
26.	Droz, Arnold, Kantonsschullehrer in Pruntrut	1890
27.	Dubois, Dr. med., Arzt, Privatdocent, Bern	1884
28.	Dumont, Dr. med. F., Arzt, Privatdocent, Bern	1890
29.	Dutoit, Dr. med., Arzt in Bern	1867
30.	Eggenberger, J., Dr. phil., eidg. Beamter, Könitzstr. 32, Bern	1892
31.	Engelmann, Dr., Apotheker in Basel	1874
32.	v. Fellenberg, Dr. phil. E., Bergingenieur, Bern	1861
33.	Fischer, Dr. phil. Ed., Professor der Botanik, Bern	1885
34.	Fischer, Dr. L., Professor der Botanik, Bern	1852
35.	Frank, L., Assistent am chem. Laboratorium, Bern	1895
36.	v. Freudenreich, Dr. E., Bern	1885
37.	Fueter-Schnell, Apotheker, Obstberg, Bern	1894
38.	de Giacomi, J., Dr. med., Arzt und Privatdocent, Bern	1889
39.	Girard, Prof. Dr. med., Arzt in Bern	1876
40.	Gosset, Philipp, Ingenieur, Wabern bei Bern	1865
41.	Graf, Dr. J. H., Professor der Mathematik, Bern	1874
42.	Gressly, Alb., Oberst, Maschinen-Ingenieur, Bern	1872
43.	Grimm, J., Präparator, Bern	1876
44.	Gruner, Dr. Paul, Gymnasiallehrer und Docent, Bern	1892
45.	Guillebeau, Professor Dr., Bern	1878
46.	Haaf, C., Droguist, Bern	1857
47.	Haas, Dr. med. Sigismund, Arzt in Muri b. Bern	1890
48.	Hafner, René, Apotheker in Biel	1891
49.	Hasler, Dr. phil. G., Dir. d. Telegraphen-Werkstätte, Bern	1861
50.	Held, Leon, Ingenieur, Bern	1879
51.	Hess, E., Professor an der Tierarzneischule, Bern	1883
52.	Holzer, Ferd., Lehrer in Oberwyl bei Büren	1890
53.	Huber, Dr. G., Professor der Mathematik, Bern	1888
54.	Huber, Rud., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern	1891
55.	Jenner, E. Entomolog, hist. Museum, Bern	1870
56.	Jonquière, Dr., Professor der Medicin, Bern	1853
57.	Jonquière, Dr. med. Georg, Arzt in Bern	1884
58.	Küch, P., Sekundarlehrer in Bern	1880
59.	Kaufmann, Alfr., Dr. phil. und Gymnasiallehrer, Bern	1886
60.	Kesselring, H., Lehrer an der Sekundarschule in Bern	1870
61.	Kissling, Dr. E., Sekundarlehrer und Privatdocent, Bern	1888
62.	Kobi, Dr., Rektor der Kantonsschule Pruntrut	1878
63.	Kocher, Dr., Professor der Chirurgie, Bern	1872
64.	Koller, G., Ingenieur, Bern	1872
65.	*von Kostanecki, Dr., Prof. der Chemie, Bern	1896
66.	König, Emil, Dr. phil., Gymnasiallehrer, Bern	1893
67.	Körber, H., Buchhändler in Bern	1872
68.	Kraft, Alex., Besitzer des Bernerhofs, Bern	1872
69.	Krebs, A., Seminarlehrer in Bern	1888
70.	Kronecker, Dr. H., Professor der Physiologie, Bern	1884
71.	Kummer, Dr. med. J., Arzt in Bern	1890
72.	Kürsteiner, Dr. med., Bern	1895
73.	Lanz, Dr. Em., Arzt in Biel	1876
74.	Leist, Dr. K., Lehrer an der Sekundarschule, Bern	1888

75. *Lindt,* Dr. med. Wilh., Arzt in Bern 1854
76. *Lindt,* Dr. med., W. jun., Arzt und Docent, Bern . . 1888
77. **Lochbrunner,* Th., Uhrenmacher in Bern 1896
78. *Lory,* C. L., Rentier, Münsingen 1894
79. *Lüscher,* E., Dr. med., Bern 1895
80. *Lütschg,* J., Waisenvater, Bern 1872
81. *Marckwald,* Dr. Max, Bonn a. Rh. 1889
82. *Marti,* Christian, Sekundarlehrer in Nidau . . . 1889
83. *Marti,* Lehrer a. d. N. Mädchenschule, Bern . . . 1892
84. *Moser,* Dr. phil. Ch., Privatdocent, Bern 1884
85. *Müller,* Emil, Apotheker in Bern 1882
86. *Müller,* Professor Dr., P., in Bern 1888
87. *Müller,* Max, Dr. med., Bern 1893
88. *Münger,* F., Dr. phil., Sekundarlehrer, Basel . . . 1892
89. *v. Mutach,* Alfr., von Riedburg, Bern 1865
90. *Mützenberg,* Dr. med. Ernst, Spiez 1885
91. *Nanni,* Dr. Wilh., Arzt in Mühleberg 1890
92. *Nicolet,* L., Pharmacien, St. Imier 1892
93. *Pfister,* J. H., Mechaniker in Bern 1871
94. *Pflüger,* Dr. Professor, Bern 1889
95. *Pulver,* E., Apotheker in Interlaken 1890
96. *Pulver,* G., Vorsteher in Hindelbank 1891
97. *Ris,* F., Lehrer der Physik am städt. Gymnasium . . 1869
98. *Rossel,* A. Dr., Professor der Chemie, Luterbach . . 1893
99. *Rothen,* Dr. phil., internationaler Telegraphendirektor, Bern 1872
100. *Rothenbach,* Alfr., Gasdirektor in Bern 1872
101. **Rothenbühler,* Sekundarlehrer, Bern 1896
102. *Rubeli,* Dr. O., Professor an der Tierarzneischule, Bern . 1892
103. *Sahli,* Professor Dr. H., in Bern 1875
104. *Schällibaum,* Dr. H., Arzt in Sils-Maria 1889
105. *Schaffer,* Dr., Kantonschemiker und Docent, Bern . . 1878
106. *Schlachter,* Dr., Lehrer an der Lerberschule, Bern . . 1884
107. *Schmid,* Dr. W., Major im Generalstab, Bern 1891
108. *Schmidt,* F. W., Dr. phil., Assistent am chem. Laboratorium, Bern 1893
109. *Schönenberger,* eidgen. Forstadjunkt, Bern 1894
110. *Schuppli,* M., Direktor der N. Mädchenschule, Hilterfingen 1870
111. **Schütz,* Assistent des Kantonschemikers, Bern . . . 1896
112. *Schwab,* Alfr., Banquier in Bern 1873
113. *Schwab,* Sam., Dr. med., Bern 1885
114. *Sidler,* Dr., Professor der Astronomie, Bern . . . 1872
115. *Stähli,* F., Dr. phil., Gymnasiallehrer in Burgdorf . . 1893
116. *Steck,* Th., Dr. phil., Conservator am Naturhist. Museum, Bern 1878
117. *Stooss,* Dr. med. Max, Arzt in Bern 1883
118. *Strasser,* Dr. Hans, Professor der Anatomie, Bern . . 1872
119. *Studer,* Bernhard, sen., Bern 1844
120. *Studer,* Bernhard, Apotheker, Bern 1871
121. *Studer,* Dr. Theophil, Professor der Zoologie, Bern . . 1868
122. *Studer,* Wilhelm, Apotheker in Bern 1877
123. *Tambor,* J., Dr. phil., Chem. Laboratorium, Bern . . 1894
124. *Tanner,* G. H., Apotheker in Bern 1882
125. *Tavel,* Professor Dr. E., Bern 1892

126.	*Thiessing,* Dr., Redaktor, Bern	1867
127.	*v. Tscharner,* Dr. phil. L., Oberstlt., Bern . . .	1874
128.	*v. Tscharner-de Lessert,* Oberstlieutenant, Bern . .	1878
129.	*Tschirch,* Dr. A., Professor der Pharmakognosie in Bern .	1890
130.	*Valentin,* Professor Dr. med. Ad., Arzt in Bern . .	1872
131.	*Volz,* Wilhelm, Apotheker in Bern	1887
132.	*Wäber-Lindt,* A., Bern	1864
133.	*Wagner,* Karl, Dr. phil., Enge-Zürich	1892
134.	*Walthard,* Max, Dr. med., Arzt in Bern	1894
135.	*Wander,* Dr. phil., Chemiker, Bern	1865
136.	*Wanzenried,* Sekundarlehrer in Grosshöchstetten . .	1867
137.	*v. Wattenwyl-v. Wattenwyl,* Jean, Grossrat, Bern . .	1877
138.	*Weingart,* J., Schuldirektor in Bern	1875
139.	*Wüthrich,* Dr. phil. E., Direktor der Molkereischule Rütti .	1892
140.	*Wyss,* Dr. G., Buchdrucker in Bern	1887
141.	*Wyttenbach-v. Fischer,* Dr., Arzt in Bern	1872
142.	*de Zehender,* Marq., Ingenieur, Bern	1874
143.	*Zeller,* R., Dr. phil., Geolog, Bern	1893
144.	*Ziegler,* Dr. med. A., eidgen. Oberfeldarzt, Bern . .	1859
145.	*Zumstein,* Dr. med. J. J., in Marburg	1885
146.	*Zwicky,* Lehrer am städt. Gymnasium, Bern . . .	1856

Im Jahre 1896 ausgetreten:

v. Bonstetten, Aug., Dr. phil., Bern	1859
Frey, Rob., Dr., Arzt in Rubigen	1876
Gerber, Paul, Dr., Apotheker, Bern	1893
Guillaume, Dr. L., Direkt. des eidgen. statist. Bureaus, Bern .	1892
Jonquière, Alf., Dr. phil. Bern	1884
König, Emil, Dr., Arzt, Bern	1892
Langhans, Fr., Lehrer am städt. Progymnasium, Bern . .	1872
Lesser, Ed., Dr. Prof. der Dermatologie, Bern	1893
Prêtre, Henri, Progymnasiallehrer in Biel	1890
Tschumi, Dr., Lebensmittel-Inspektor, Bern	1890
Walser, H., Gymnasiallehrer, Bern	1895

Im Jahre 1896 verstorben:

Niehans-Boret, Dr. med., Arzt in Bern	1870
Pulver, Fried., Apotheker in Bern	1876
Schärer, Dr. med. Ernst, Bern	1885

Korrespondierende Mitglieder:

1.	*Biermer,* Dr. Professor in Breslau	1861
2.	*Flesch,* Dr. M., Arzt in Frankfurt	1882
3.	*Gasser,* Dr. E., Professor der Anatomie in Marburg . .	1884
4.	*Graf,* Lehrer, in St. Gallen	1858
5.	*Grützner,* Dr. A., Prof. in Tübingen	1881
6.	*Hiepe,* Dr. Wilhelm, in Birmingham	1874
7.	*Imfeld,* Xaver, Topograph in Hottingen	1880
8.	*Krebs,* Gymnasiallehrer in Winterthur	1864
9.	*Landolf,* Dr., in Chili	1881
10.	*Lang,* Dr. A., Professor in Zürich	1876
11.	*Leonhard,* Dr., Veterinär in Frankfurt	1870
12.	*Lichtheim,* Professor in Königsberg	1881
13.	*Metzdorf,* Dr. Professor der Vet.-Sch. in Proskau, Schlesien	1870
14.	*Petri,* Dr. Ed., Prof. der Geographie in St. Petersburg .	1883
15.	*Pütz,* Dr. H., Professor der Vet.-Med., Halle a. S. . .	1870
16.	*Regelsperger,* Gust., Dr., rue la Boétie 85, Paris . .	1883
17.	*Rothenbach,* Lehrer am Lehrerseminar in Küssnacht . .	1871
18.	*Wälchli,* Dr. med. D. J., Buenos Ayres	1873
19.	*Wild,* Dr. Professor, in St. Petersburg	1859

Auszug

aus der

Jahres-Rechnung der bernischen Naturforschenden Gesellschaft.

1895.

Einnahmen.

Saldo letzter Rechnung	Fr.	274. 95
An Jahresbeiträgen	„	1288. —
An Eintrittsgeldern	„	30. —
An Zinsen	„	122. 50
An ausserordentlichen Beiträgen	„	250. —
	Fr.	1965. 45

Ausgaben.

Mittheilungen	Fr.	1537. 32
Sitzungen	„	42. 40
Bibliothek	„	202. 65
Lesezirkel	„	206. 07
Verschiedenes	„	119. 25
	Fr.	2107. 69

Bilanz.

Ausgaben	Fr.	2107. 69
Einnahmen	„	1965. 45
Es ergibt sich demnach ein Passiv-Saldo von	Fr.	142. 24

Reservefonds.

Derselbe ist im Rechnungsjahre unverändert geblieben .	Fr.	2528. 55

Vermögensetat.

Das Vermögen der bernischen naturforschenden Gesellschaft besteht auf 31. Dezember 1895 in dem Reservefonds wie oben	Fr.	2528. 55
weniger dem Passiv-Saldo obiger Rechnung . . .	„	142. 24
	Fr.	2386. 31

Auf 31. Dezember 1894 betrug das Vermögen . . .	Fr.	2803. 50
„ „ „ 1895 beträgt dasselbe	„	2386. 31
Es ergibt sich demnach eine Verminderung von .	Fr.	417. 19

Bern, 22. Mai 1895.

Der Kassier: **B. Studer, Apoth.**

R. Zeller.

Nachträge zu meinem geologischen Querprofil durch die Centralalpen.

I. Ueber die Tektonik und das Alter der Glanzschieferzone im Oberwallis.

Im Sommer des Jahres 1895 hatte ich Gelegenheit, gemeinsam mit Herrn Prof. C. Schmidt aus Basel denjenigen Theil der Lepontischen Alpen, welcher zwischen dem Griespass und dem Simplon liegt, während vier Wochen zu durchstreifen um die Lagerungsverhältnisse festzustellen. Da mein Profil [1]) dieses Gebiet durchquert, so lag der Gedanke nahe, meine im Sommer 1893 gemachten Aufnahmen einer Revision zu unterwerfen. Wir untersuchten aus meinem Profil die Strecke vom Oberwallis bis zum Formazzathal und begiengen z. T. die Profillinie selbst. Es ergab sich dabei die volle Richtigkeit meiner Aufnahmen im Gotthardmassiv und im Gebiete der Deveroschiefer und des Ofenhorngneisses der Lebendunalpen und der Cima Rossa. Dagegen erwiesen sich als falsch die Bruchlinien, welche ich Anno 1893 am Nord- und Südrand der Glanzschieferzone zu beobachten vermeinte, und auf Grund welcher ich die Glanzschieferzone nach dem Vorgange von Diener und Bonney als eine Grabenversenkung auffasste. Ferner gelang es uns diesmal, über das Alter der Glanzschiefer in meinem Querschnitt neues Material beizubringen.

C. Schmidt hat bereits die Resultate der neuen Begehungen kurz erwähnt [2]) und es erübrigt mir noch näher darauf einzutreten.

---

[1]) R. Zeller, Ein geolog. Querprofil durch die Centralalpen. Inaug. Diss. Mittheilungen der Berner naturf. Gesellschaft. 1895.

[2]) C. Schmidt, Géologie du Massif du Simplon. Arch. scien. phys. et nat. Genève. Tome XXXIII. Nov. 1895.

Wie schon bemerkt stützte sich meine Anschauung, die Glanzschieferzone entspreche als Ganzes einem Graben, auf Discordanzen, die ich am Nord- und Südrand gefunden zu haben glaubte. In Bezug auf den Nordrand verweise ich auf den Text zu meinem Querprofil (pag. 22 und ff.) und die Fig. 16 und 17 ebendaselbst. Ich konstatirte damals zwischen den senkrecht stehenden Gneissen des Gotthardmassives und der Hauptmasse der Glanzschiefer eine schmale Contactzone ganz unregelmässig einfallender Gneisse und Glanzschiefer.

Die Profile durch das Hohlauibachtobel, welche diese Grenzzone und ihre Discordanzen darstellen (Fig. 17) sind faktisch richtig, nur ist das nördliche Einfallen der Gneisse und Glimmerschiefer des Gotthardmassives wie das Südfallen der Glanzschiefer nicht ursprüngliche Lagerung sondern durch Gehängerutschung verursacht.

Diese Erscheinung, welche ich in der Folge diesen Sommer in der Glanzschieferzone noch da und dort beobachten konnte, ist hier in so grossartiger Weise entwickelt und die Aufblätterung der Schichten an der ganzen Bergflanke geht so tief, dass ich damals glaubte, diese Lagerung nicht als sekundär deuten zu dürfen. Unsere neuen Beobachtungen aber geben Beweise dafür, dass diese Unregelmässigkeiten der Lagerung nicht ursprünglich, sondern wirklich als Gehängerutschung zu deuten sind.

Ungefähr in der Mitte des Hohlauibachtobels findet man steilstehende Rauchwacke und Zoisitschiefer, auf denen discordant wieder Zoisitschiefer liegen (vgl. Profile Fig. 17). Weiter oben aber im Tobel steht eine kleine Partie Gneiss ebenfalls fast senkrecht, also concordant obgenannter Rauchwacke. Diese Gneisspartie war zur Zeit meiner Aufnahmen nicht entblösst, darum fehlt sie in meinen Profilen, sie ist aber entscheidend, den sie stellt, verbunden mit der Rauchwacke weiter unten den normalen, concordanten Contact dar. Die scheinbar auf die steilstehenden Zoisitschiefer und Rauchwacke überschobenen, nach S einfallenden Glanzschiefer aber, ebenso wie die Gotthardmassivgesteine der anderen Bachseite sind am steilen Abhang aus der fast saigeren Stellung überkippt und beiderseits gegen das tief und steil eingeschnittene Hohlauibachtobel abgerutscht. Dabei sind die Schichten paketweise noch zusammengeblieben; die einzelnen Schichtschollen aber liegen nicht mehr einander parallel, sind sogar häufig übereinander geschoben. Diese Erscheinung ist um so leichter erklärlich, als das Hohlauibachtobel, wie häufig die Längstäler in diesem Gebiet, mit einer Rauchwackezone zusammenfällt. Auslaugungen mögen deshalb auch hier die besprochenen Abrutschungen begünstigt haben.

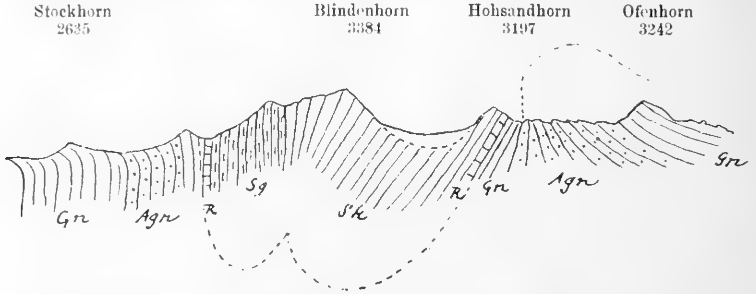
Die Discordanz zwischen Gotthardmassiv und Glanzschieferzone in unserem Querprofil besteht also nicht, wie man sich übrigens im Streichen östlich an der Ritzfurgge und westlich im Rappenthal überzeugen kann. Am Nordrand der Zone herrscht überall, vom Griespass bis gegen Brieg die schönste Concordanz.

Was die Bruchlinie am Südrand der Glanzschieferzone anbetrifft, so hatte ich hier gewisse, sehr jung aussehende Gneisse, die sich von den Augengneissen des Ofenhorns scharf abheben, noch zu den Glanzschiefern gerechnet und eine Knickung der Straten führte zu einer scheinbaren Discordanz. Dadurch kam der Dolomitstreifen am Südabhang des Hohsandhorns in die Glanzschieferzone hinein, während der Dolomit auch am Südrand die Grenzschicht bildet, wie überall soweit ich mich überzeugen konnte. Der Contact zwischen den Glanzschiefern und den Gneissen liegt also nicht in der Lücke südlich des Hohsandhorns sondern etwa in halber Höhe am Südabhang desselben. Daraus ergibt sich nun von selbst aus meinem Detailprofil Fig. 18. die völlige Concordanz. Die Granatgneisse, Granatglimmerschiefer, Lagengneisse und Sericitquarzite im Liegenden des Dolomites gehören also bereits der Ofenhorn-Monte Leone-Gneissmasse an und sie sind als oberstes Niveau der Gneisse nach den Beobachtungen von C Schmidt[1]) im Tessin sehr verbreitet. Mit der Feststellung des richtigen Alters dieser Gneisse ist aber die Discordanz noch nicht gehoben, sie wäre nur verlegt zwischen die jüngeren Glimmerschiefer und die älteren Augengneisse. Eine genaue Untersuchung der Gehänge gegen den Thäligletscher zeigt aber, dass wir es nur mit einer scharfen Knickung der Augengneisse zu thun haben.

Hiermit wäre auch diese Bruchlinie beseitigt und es steht nun nichts im Wege, die ganze beidseitig von Rauchwacke bezw. Dolomit eingefasste Schieferzone als eine Mulde sich zu denken oder vielmehr als eine Doppelmulde nach Analogie der Verhältnisse weiter östlich im Streichen am Griespass und im Bedrettothal. Der mittlere Rauchwackezug, welcher in Val Corno (Bedretto) die Schieferzone theilt, taucht zwar am Griespass unter, aber die petrographische Verschiedenheit der beiden Schieferzüge erhält sich noch weit gegen W, indem, wie man auch aus meinem Querprofil ersieht, der nördliche Zug vor-

[1]) C. Schmidt, Geolog. Excursion durch die centralen Schweizeralpen. Livret guide géol. VIII.

zugsweise aus schwarzen Zoisit-, Clintonit- und Granatphylliten, der südliche Zug aber aus einförmigen Kalkphylliten und Granathornfelsen besteht, ohne dass aber hier, wo die trennende Rauchwacke fehlt, eine scharfe Grenze zwischen beiden Facies gefunden werden könnte. Der Durchschnitt der Glanzschieferzone auf unserer Profillinie gestaltet sich nun infolge dieser neuen Untersuchungen etwa folgendermassen:



Gotthardmassiv
Gn Lagengneiss
Agn Augengneiss

Glanzschieferzone
Sg Zoisit-Clintonit- und Granatphyllite
Sk Kalkphyllite und Granathornfelsen
R Rauchwacke, Dolomit

Ofenhorngneissmasse
Gn Obere Gneisse (Granatgneisse)
Agn Augengneisse

Ob wir es hier wirklich mit einer Doppelmulde oder mit mehreren Falten zu thun haben oder ob wegen der petrographischen Verschiedenheit der Zone im Norden und Süden die Lagerungsverhältnisse noch anders zu deuten sind, lässt sich heute noch nicht mit Sicherheit sagen.

Was endlich das Alter der Glanzschieferzone in unserem Querschnitt anbetrifft, so lässt sich jetzt etwas Bestimmtes darüber sagen. Ich hatte Anno 1893 gehofft in den grossen Schutthalden der schwarzen Glanzschiefer am Nordabhang des Merzenbachschien Versteinerungen zu finden, da die Zone im Streichen der fossilführenden Nufenenschiefer liegt. Ich fand damals nichts und schrieb desshalb, die Schiefer seien hier *anscheinend* petrefaktenleer. Diesmal aber, als wir unsere Aufmerksamkeit nur denjenigen Gesteinsvarietäten zuwandten, welche nach Analogie mit andern Fundstellen Petrefakten enthalten konnten, gelang es uns bald in den Zoisitschiefern unzweifelhafte Belemniten zu finden, und zum Ueberfluss entdeckten wir noch einen von Cardinienschalen vollsteckenden Block. Damit war das Alter dieser Schieferzone gegeben. Die Verbindung mit den Nufenenvorkommnissen wurde einige Tage später hergestellt durch die Entdeckung der ausgiebigen Belemnitenfundstelle am Ritzengletscher ob Ulrichen, und auch gegen

Westen ergaben Petrefaktenfunde, über welche C. Schmidt ebenfalls berichtet hat [1]), dass jedenfalls die nördliche Grenzzone der Glanzschiefer vom Bedrettothal bis Brieg sicher jurassischen Alters ist.

II. Zum Amphibolitzug vom Ivrea.

Bei den Aufnahmen zu meinem Alpenprofil durchquerte ich auch meiner Profillinie entlang den Amphibolitzug von Ivrea im Gebiete der Val Cannobina, ohne zu wissen, dass zu dieser Zeit bereits ein italienischer Geologe, Herr Cesare Porro, mit einer kartographischen Aufnahme des Amphibolitzuges in eben jener Gegend beschäftigt war. Ich untersuchte die Lagerungsverhältnisse auf und in der Nähe meiner Profillinie soweit meine kurzbemessene Zeit es zuliess, und als petrographische Grundlage diente mir eine beschränkte Zahl von Gesteinstypen in Handstück und Dünnschliff.

Herr C. Porro, der im Sommer 1895 von meinem Profil Kenntniss erhielt, fühlte sich darauf veranlasst, in einer kurzen Notiz [2]) darzulegen, worin die Resultate seiner weit vollständigeren Untersuchungen von den meinigen abweichen. Indem er anfangs zugibt, dass meine Beobachtungen in vielen Stücken mit den seinigen übereinstimmen, erörtert er im Weitern, auf Grund seines ausgedehnten Materiales, die abweichenden Punkte.

Dass eine systematische Bearbeitung jener Gegend meinen Beobachtungen manches Ergänzende beifügen und dieselben auch in mannigfacher Hinsicht modifiziren würden, war von vornherein zu erwarten. Es scheinen mir denn auch in vielen Punkten die auf umfassenderen Vorarbeiten beruhenden Schlussfolgerungen des Herrn Porro die richtigen zu sein, während ich in andern meine Beobachtungen und deren Deutung aufrecht erhalten muss.

Was zunächst meine etwas abweichenden petrographischen Bezeichnungen anbetrifft, so hatte ich dieselbe auf Grund von Dünnschliffen aufgestellt. Herr Porro ist durch das Studium seines umfangreichen Materials hierin zu andern Benennungen gekommen, es bleibt eben in der petrographischen Namengebung stets der Willkür ein Spielraum, welcher durch den Reichthum an Varietäten in den Gesteinstypen noch gefördert wird. So hatte ich für meine Pyroxengesteine den rhombischen Pyroxen als den charakteristischen Gemengtheil zur Be-

---

[1]) C. Schmidt, loc. cit.

[2]) Separatum ohne Titel, Strassburg, Juli 1895.

zeichnung der betreffenden Gesteinsgruppe gewählt. Da nach den Untersuchungen von Porro der Olivin vorzuherrschen scheint, so mögen diese Gesteine nach dem Vorgang von Traverso [1]) zu den Peridotiten gezählt werden.

Meine Behauptung, die Peridotite und die Serpentine herrschten am Nordabhang des Monte Gridone gegen Val Vigezzo nicht so sehr vor, wie die Karte von Traverso vermuthen lasse, stützt sich auf die Beobachtungen in dem an der Schweizergrenze gelegenen Rio dei confini, der gerade in meiner Profillinie liegt; es mag allerdings in den von Porro untersuchten weiter westlich gelegenen Bachbetten der R. Motto, Molino und Coana sich anders verhalten.

Ob man die grobkörnigen Feldspatamphibolite der Testa di Misello als massig (Zeller) oder als grobkörnig gebändert (Porro) bezeichnen will, darüber lässt sich streiten. Ich habe diese Bänderung im Anstehenden ebenfalls beobachtet, aber da das betreffende Gestein in der Anordnung seiner Gemengtheile auch nicht die geringste Parallelstructur zeigt, so glaube ich solches sehr wohl als massig bezeichnen zu dürfen.

Ebenso halte ich daran fest, dass nach dem geologischen Verband die Gesteine der Amphibolitzone sich sondern in die deutlich parallelstruirten Hornblendeschiefer, und Diorite und die mehr massigen Feldspathamphibolite, Pyroxengesteine, Peridotite und Serpentine. Dass Gesteine der ersten Abtheilung hin und wieder ganz massig und umgekehrt solche der zweiten Reihe da und dort schiefrig sein können, und dass der Wechsel des Gebirgsdruckes hiebei mitspielt, weiss ich sehr wohl, aber es kommt auf den Hauptcharakter an und der ist mit aller nur wünschbaren Deutlichkeit der oben angegebene. Die beiden Abtheilungen bilden scharf geschiedene, mehrfach in einander auskeilende Zonen.

Was endlich die Wechsellagerung der Amphibolite mit den Sericitschiefern und Gneissen anbetrifft, so vermisste ich eine solche völlig am Nordrand der Zone. Herr Porro weist darauf hin, dass dieselbe weiter westlich im Gebiete des Cima della Laurasca und Valle Loana nachzuweisen sei und dass sie an den Abhängen des Gridone gegen Val Vigezzo unter Quartär verborgen liegt. An der Schweizergrenze aber liegt nicht soviel Quartär und reicht dasselbe nicht so hoch hinauf, dass man die Wechsellagerung nicht sehen könnte, wenn sie eben dort vorhanden wäre.

[1]) St. Traverso, Geologia dell'Ossola. Genova 1895.

Der Amphibolitzug wird überhaupt auch in Zukunft noch eine Menge von Widersprüchen und Räthseln darbieten, und man möchte nur hoffen, dass Herr Porro seine verdienstvollen Untersuchungen in dieser Zone noch weiter ausdehnen würde.

Bern, Januar 1896.

A. Rossel.

Neue chemische Verbindungen[1])

hergestellt bei hohen Temperaturen und ihr Zusammenhang mit den modernen Anschauungen.

I.

Die Grundsätze der modernen Chemie wurden am Ende des letzten Jahrhunderts festgestellt. Nachdem Priestley zum ersten Mal am 1. August 1774 den Sauerstoff aus Metalloxyden rein darstellte, ein Gas, das durch die Arbeiten von Lavoisier als einfacher Körper erkannt wurde als Ursache des Verbrennungsprozesses, zeigte im Jahr 1781 Cavendish, dass das Wasser aus einer chemischen Verbindung von Sauerstoff und Wasserstoff besteht; er leistete den Beweis, dass der Stickstoff als indifferenter Körper in der Luft den Sauerstoff begleitet. Damit verschwand die Theorie von Aristoteles, dass Wasser, Erde, Feuer und Luft Elemente seien.

Im Jahre 1782 zeigte ein sächsischer Chemiker, Wenzel, dass bestimmte Mengen von Säuren immer die gleiche Menge von Basen binden zur Erzeugung von Salzen.

Richter befestigte diese Anschauung und im Jahr 1802 wurde von Fischer die erste Aequivalenttafel aufgestellt. Der bekannte Streit zwischen Berthollet und Proust hatte zur Folge, dass eine grössere Anzahl von Verbindungsgewichten der Elemente genau bestimmt und die Grenze zwischen chemischen Verbindungen und Mischungen genau festgestellt wurde.

Gestützt auf die eroberten Thatsachen entdeckte Dalton 1808 das Gesetz der multiplen Proportionen. Dalton bestimmte das relative Gewicht, mit welchem ein Element mit einem zweiten Element verschiedene Verbindungen eingehen kann; er vereinfachte die chemischen Formeln und Gleichungen durch Einführung der Symbole.

[1]) Calciumcarbid, Phosphoraluminium, Magnesiumstickstoff, Künstliche Diamanten. Ursachen vulkanischer Eruptionen.

Berzelius vervollständigte die Arbeiten Daltons, indem er die Electrochemie gründete, und durch Einführung der chemischen Zeichen, die gegenwärtig noch gebräuchlich sind. Humboldt und Gay-Lussac, dann Avogadro haben die Verhältnisse zwischen Volumen und Gewichten der Elemente eingehend studirt, und die noch geltende Ansicht über Atom und Molecül festgestellt. Es entstanden die allgemein bekannten Gleichungen, nach welchen sowohl nach Volumen, wie nach Gewicht die chemischen Prozesse übersetzt werden. Vor 20 Jahren hat Stass durch äusserst genaue Messungen die bestehenden Theorien bestätigt und befestigt.

Alle diese genialen Arbeiten hatten nun zur Folge:

1⁰ Die Entdeckung der Elemente oder einfachen Körper, die Feststellung der relativen Gewichte und Volumen, mit denen sie Verbindungen eingehen, und die moderne Schreibweise der Formeln und Gleichungen.

2⁰ Das Gesetz der einfachen und das Gesetz der multiplen Proportionen.

In der nächsten Periode sind in der *rein theoretischen* Chemie keine Fortschritte von grosser Bedeutung gemacht worden; die Chemie ist eine *experimentale Wissenschaft* geblieben, deren bedeutende Resultate sich auf die genannten Gesetze stützen. Eine genügende Erklärung für die Bildung sämmtlicher chemischer Verbindungen existirt nicht, und wir erwarten noch den genialen Mathematiker, der die errungenen Thatsachen in endgültige, chemische Gesetze einreihen wird. — Die ausserordentlich grosse Anzahl von Thatsachen hat zu ganz besondern Ansichten geführt, die wir nicht als *Gesetze*, sondern als *Hypothesen* bezeichnen müssen.

Gerhardt hat die «*Typentheorie*» aufgestellt, die, bald als ungenügend erkannt, Kékulé, den Grossmeister der organischen Chemie, veranlasste, die *Valenz-Hypothese* anzunehmen. Es wurde den Elementen ein bestimmter Werth, unabhängig vom Atomgewicht, zugeschrieben, mit welchem sie in Verbindung gehen. Der Kohlenstoff wurde als vierwerthig erkannt und angenommen, dass die Kohlenstoffatome unter sich in offenen und geschlossenen Ketten Verbindung eingehen können, unter der Bedingung, dass die freien Valenzen durch den einwerthigen Wasserstoff, den zweiwerthigen Sauerstoff oder den drei- und fünfwerthigen Stickstoff gesättigt seien. Das Resultat dieser Spekulation war die Gründung der Constitutionsformen der Kohlenstoffverbindungen, welche *endgültig* die Bildung komplizirter Atomgruppen zu erklären zwar nicht genügt, doch dazu beitrug, die Entwicklung der organischen Chemie mächtig zu fördern. Die Valenztheorie ist eine Hypothese und nicht eine Theorie im wahren Sinne des Wortes, da, sobald man die Wasserstoffverbindung des Kohlenstoffs verlässt, keine genügende Erklärung für eine Anzahl chemischer Verbindungen gegeben werden kann. Schon die einfache Verbindung Kohlenoxid kann durch die Valenztheorie nicht erklärt werden. Ganz unerklärt bleiben die fünf Verbindungen des Stickstoffs mit Sauerstoff, wenn auch hier spekulative Forscher versucht haben, diese in eine annehmbare Theorie einzureihen. — Gewisse moderne chemische Formeln, ebenso bestechend in ihrer Entwicklung wie unerwiesen, wurden zur Genüge und zum Ueberfluss aufgestellt.

An der Entwicklung der Werthigkeitstheorie und der rationellen Formel (Strukturlehre) betheiligten sich dagegen eine grosse Anzahl genialer Forscher, die dem Ausbau der organischen Chemie grosse Dienste leisteten. Berthelot ging vom Acetylen aus, um durch Synthese organische Verbindungen herzustellen. Græbe und Liebermann sind unsterblich geworden durch die synthetische Herstellung des Alizarins aus Anthraceen, Bayer folgte mit der Synthese des Indigos, Ladenburg des Coniins, und Fischer des Traubenzuckers.

Grosses Aufsehen erregte die van't Hoff'sche Annahme der räumlichen Atomgruppirung, welche Arbeit von Wislicenus ausgedehnt wurde und wodurch versucht wird, die «räumliche Lagerung der Atome in Molecüle» anzugeben.

Für die Entwicklung der allgemeinen Chemie war die analytische Chemie von grosser Bedeutung. Die chemischen Reactionen der qualitativen Analyse, die Anwendung derselben in der quantitativen Analyse, die Electrolyse, namentlich aber die Spectral-Analyse leisteten unserer Wissenschaft unschätzbare Dienste, immer aber wieder im Bereich der *Experimentalchemie.*

Der Experimentalchemie sind die grossen Entdeckungen der chemischen Industrie, die der Menschheit so ausserordentliche Dienste leisten, zu verdanken. Die Vervollkommnung derselben wurde durch sorgfältig ausgeführte analytische Arbeiten (wir erinnern hier an die Fabrikation von Soda, an die Fabrikation des Stahls, Entphosphorung des Eisens nach der Methode von Thomas, die Regeneration der Chlorrückstände nach Weldon, u. s. w.) unterstützt. Auf dem Wege des Experimentes und der chemischen Analyse sind auf dem Gebiete der Landwirthschaft grossartige Errungenschaften zu verzeichnen, die namentlich in der Schweiz in hohem Grade gewürdigt werden. Die Wirkung von Phosphorsäure, Kali und Stickstoff ist der grössten Mehrzahl unserer Landwirthe bekannt, die Ernährungsfrage ist eine einfachere und der allgemeine Wohlstand erhöht worden.

II.

Gewisse Zahlenverhältnisse zwischen den Atomgewichten verschiedener Grundstoffe, die in chemischer Beziehung Aehnlichkeit haben, erweckten das Studium genialer Forscher; so hat man gefunden, dass 16 Einheiten sehr häufig die Atomgewichte von Elementen mit ähnlichem chemischen Charakter trennen.

Das Atomgewicht des	Fluors	ist	19,	das Atomgewicht des	Chlors	35,4;
»	»	» Sauerstoffs	„	16,	»	»	» Schwefels	32 ;
»	»	» Stickstoffs	»	14,	»	»	» Phosphors	31 ;
»	»	» Kohlenstoffs	»	12,	»	»	» Siliciums	28 ;
»	»	» Bors	»	11,	»	»	» Aluminiums	27 ;
»	»	» Berylliums	»	9,	»	»	» Magnesiums	24 ;
»	»	» Lithiums	»	7,	»	»	» Natriums	23 ;

Die hier angeführten Elemente, deren Atomgewichte durch die Zahl 16 oder annähernd 16 getrennt sind, besitzen bekanntlich unter sich eine nicht verkennbare chemische Verwandtschaft.

Es wurden auch auffallende Analogien zwischen gewissen Gruppen von Elementen, die von Dœbereiner 1829 Triaden genannt wurden, gefunden. Beim Addiren der Atomgewichte zweier Elemente solcher Triaden ergibt das arithmetische Mittel annähernd das Atomgewicht des dritten Elementes der Triade,

z. B. für Lithium, Kalium und Natrium:

$$7 \text{ (Atomgewicht des Lithiums)} + 39 \text{ (A. G. des Kaliums)} = 46$$

$$\frac{46}{2} = 23 \text{ Atomgewicht des Natriums.}$$

Dann für Kalium, Cæsium und Rubidium:

$$39 \text{ A. G. des Kaliums} + 133 \text{ A. G. des Cæsiums} = 172$$

$$\frac{172}{2} = 86 \text{ A. G. des Rubidiums.}$$

Dann für Calcium, Baryum und Strontium:

$$40 \text{ A. G. des Calciums} + 137 \text{ A. G. des Baryums} = 177$$

$$\frac{177}{2} = 88{,}5 \text{ A. G. des Strontiums.}$$

Auffallend ähnliche Verbindungen weisen nach: Chlor, Brom und Jod; Schwefel, Selen und Tellur; Phosphor, Arsen und Antimon u. s. w. Solche Gruppen von Elementen zeigen eine enge Beziehung der Atomgewichte zu ihren Eigenschaften, die zu einer neuen Eintheilung der Elemente nach ihren Atomgewichten führte.

Wenn man die Elemente nach aufsteigenden Atomgewichten ordnet, wird eine periodische Funktion derselben wahrgenommen. Zuerst war es Chancourtois (1862), der diese interessante Beobachtung gemacht hatte, dann davon unabhängig Newlands (1862—1864). Jahrelang schenkte man denselben wenig Aufmerksamkeit, bis Lothar Meyer und Mendeléjeff die neue Gruppirung allgemein bekannt machten. Dieses in den Sitzungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern wiederholt besprochene sogenannte periodische Gesetz (Eintheilung der Elemente nach Mendeléjeff) erweist sich ebenfalls als unzulänglich, um sämmtliche chemische Verbindungen zu erklären; es kann nicht als endgültiges Gesetz angenommen werden, indem auch hier Ausnahmen nicht selten vorkommen, es hat aber doch diese Eintheilung den Werth gehabt, im Wesen der Elemente mehr Klarheit zu verschaffen, und die Eigenschaft noch nicht entdeckter Elemente konnte im voraus festgestellt werden.

Solche von Mendeléjeff im voraus beschriebene Elemente wurden wirklich später auch aufgefunden; namentlich waren es Scandium, Gallium und Germanium, deren Atomgewichte und Eigenschaften ihrer Verbindungen mit den berechneten Angaben übereinstimmten. Der französische Forscher Lecoq du Boisbaudran entdeckte das Gallium, Nilson das Scandium und Cl. Winkler in Freiberg das Germanium. Aehnlich wie der Astronom den Lauf von Himmelskörpern beschrieb, bevor diese im Firmamente gesehen wurden, war es nun dem Chemiker möglich, nicht bekannte Elemente durch ihre Eigenschaften zu charakterisiren; der geniale Chemiker stützte sich aber nicht auf ein mathematisch eruirtes Gesetz, sondern auf eine muthig aufgestellte Hypothese.

Die sich daran knüpfenden «Theorien» mussten in Folge dieser Thatsache sehr bestechend sein, aber sie entbehren der genauen, mathematischen Grundlage. Es wurde wiederholt die Ansicht ausgesprochen, dass sehr wahrscheinlich die Elemente keine einfachen Körper sein können, dass diese möglicherweise aus einem einzigen Körper entstanden sind, durch Condensation, in Folge einer Form der Energie, die noch unbekannt war.

Schon hatte Proust im Jahre 1815 die Ansicht ausgesprochen, die Elemente seien Modifikationen des Wasserstoffes, entstanden unter Verhältnissen, die auf der Erde nicht mehr vorkommen. Die genauen Beobachtungen von Stass, der die Atomgewichte einer Revision unterstellte, haben gezeigt, dass an der Möglichkeit einer solchen Condensation gezweifelt werden darf, indem die oben angeführten Atomgewichte sich nicht als absolut genau erwiesen, so dass für die erwähnten Triaden das arithmetische Mittel zweier Elemente in Wirklichkeit nicht zum Atomgewicht des dritten Elementes führt.[1] Auch hat bis jetzt kein einziger praktischer Versuch zu Resultaten geführt, die zur Annahme der Permutation der Elemente (oder Umwandlung eines Elementes in ein anderes Element) berechtigen würden. Die Ansicht, dass zum Beispiel ein Metall in das andere umgewandelt werden könnte, entbehrt, trotz aller Spekulation, jeder demonstrativen Thatsache.

Sorgfältige Untersuchungen haben gezeigt, dass der Spruch der Jünger Mendeléjeff's: «*Sämmtliche Eigenschaften der chemischen Verbindungen sind periodische Funktionen der Atomgewichte*» absolut unrichtig ist; so lange man die Annahme Mendeléjeff's als eine neue Art der Eintheilung der Elemente betrachtete, die nicht ohne praktische Folgen war, aber an die man sich nicht unbedingt zu halten hat, konnte man der Entwicklung der neuen Schreibweise mit Interesse folgen; ganz anders verhält es sich, wenn die wissenschaftliche Welt mit der kühnen und doktrinären Behauptung überrascht wird, mit welcher die neue Schule rationelle Untersuchungen hemmt.

Es ist am Platze, wenn nun dagegen energisch protestirt wird, und es ist geschehen in einer denkwürdigen Rede, die M. Wyronboff im Hörsaal von Prof. Friedel in der Sorbonne in Paris jüngsthin gehalten hat.

Um sich zu überzeugen, wie unhaltbar der allgemeine Grundsatz von Mendeléjeff sein muss, genügt es, die Eintheilung der Elemente, wie er sie vorgeschlagen hat, genau zu studiren.

Wenn man in Ordinaten und Abscissen die Elemente in einer Tabelle aufträgt und zwar so, dass man willkürliche gewisse chemische

---

[1]) Die genauen Messungen von Stass ergeben, dass, wenn man von der Zahl 16 als Atomgewicht für den Sauerstoff ausgeht, folgende Zahlen für die Atomgewichte einiger Elemente erhalten werden:

S = 32,0626 statt 32; Cl = 34,4529 statt 35,5;
Na = 23,0575 » 23; H = 1,007 » 1,0.

Verbindungen der Elemente mit Sauerstoff berücksichtigt, so erhält man eine Curve, die durch ihre Regelmässigkeit bestechend ist.

Es ist aber bekannt, dass die Elemente ausser Fluor, eine grosse Anzahl von Sauerstoffverbindungen bilden und dass, wenn man von diesen Verbindungen je eine auswählt, man alles beweisen kann, was man für gut findet.

Mendeléjeff hat nun die Sauerstoffverbindung, die er für seine Theorie bedarf, willkürlich gewählt. Für die Alkalimetalle sind es die Oxyde der allgemeinen Formel R_2O, obschon man weiss, dass die höheren Oxyde K_2O_4 und Na_2O_2 vorkommen. Für Kupfer wird das Oxyd Cu_2O allein berücksichtigt, obschon das Oxyd CuO viel wichtigere Verbindungen bildet und CuO_2 bekannt ist. Für die Erdalkalimetalle wählte Mendeléjeff das Oxyd RO und verschweigt die Existenz der Oxyde CaO_2, BaO_2 und SrO_2, die eine sehr wichtige Rolle bei der Darstellung des Sauerstoffs spielen.

Wenn behauptet werden sollte, dass man für die Herstellung der Curve die beständigsten Oxyde berücksichtigt hat, so wäre auch hier die Willkürlichkeit erwiesen, indem für die Zeichnung der Curve als beständiges Oxyd des Eisens die Verbindung FeO_3 angenommen würde, während wenige Chemiker diese Verbindung kennen, und für Kobalt das Oxyd CoO_2, welches gar nicht vorkommt. Für Didyme wird die Formel eines Oxyds Di_2O_5 angenommen, während die höchste Oxidationsstufe dieses Elementes die Formel Di_4O_9 besitzt. Ausserdem sind eine ganze Anzahl Oxyde neuerdings entdeckt worden, die die Annahme Mendeléjeff's illusorisch machen, wie Zn_2O_3, Cd_2O_3, TiO_3, UO_6, Th_2O_7, CeO_3 so wie auch die Ueberschwefelsäure und die Uebermolybdänsäure.

Wenn man auf die Ordinaten der Tabelle wirklich die höheren Oxyde der Elemente, die bekannt sind, aufträgt, wie Mendeléjeff es verlangt, so erhält man statt seiner regelmässigen, aber willkürlichen Curve eine gebrochene Linie ohne Regelmässigkeit.

H. Wyrouboff findet noch wichtigere Anhaltspunkte gegen die neue Schreibweise, die als endgültige Theorie aufgestellt werden soll. Das Atomgewicht des Tellur ist 128 und trotz den Arbeiten von Brauner, der nach den verschiedensten Methoden einen Fehler in dieser Zahl finden wollte, ist das Atomgewicht des Tellurs 128 geblieben, während das Element, um seine Stellung in der Curve behaupten zu können, das Atomgewicht 125 haben sollte.

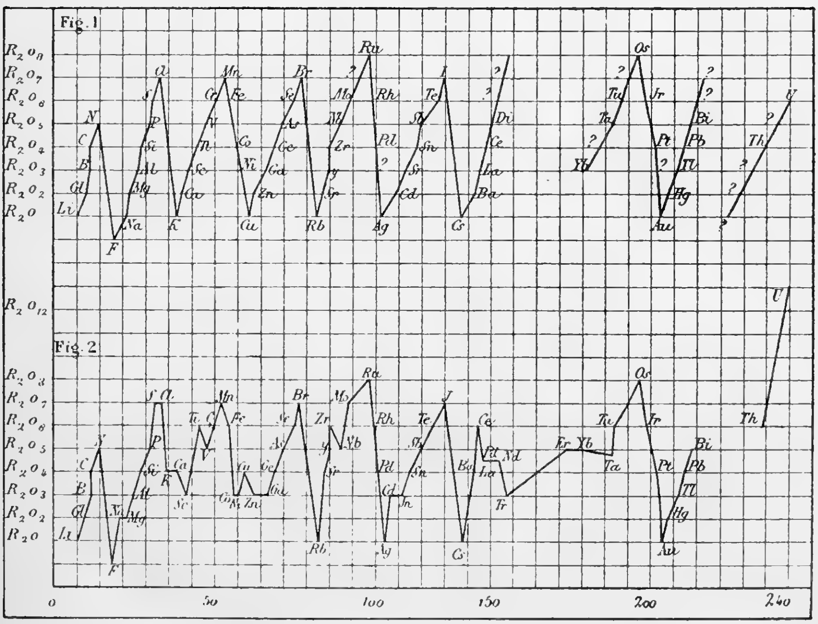
Noch bezeichnender ist folgende Thatsache. Mendeléjeff nimmt folgende Atomgewichte an: La = 138; Ce = 140; Di = 142. Diese

Zahlen waren ihm nothwendig, für die Regelmässigkeit der Curve. Es haben aber Marignoc, Bunzen, Jegel, Ramelsberg und Wolf das Atomgewicht des Ceriums bestimmt und 138 gefunden, während das Element Lantan das Atomgewicht 138,5 besitzt. Eine ähnliche Unregelmässigkeit findet für Didym statt, indem das theoretisch angenommene Atomgewicht nicht mit dem direkt bestimmten Atomgewicht zusammen fällt.

Zur Gewinnung der regelmässigen Curve, die die «Periodicität» der Elemente beweisen muss, sind daher ganz willkürlich Sauerstoffverbindungen gewählt worden und in ganz willkürlicher Weise Atomgewichte geändert worden.

Um die Täuschung klar darzulegen, genügt es, beide Curven zu vergleichen; die eine von staunenswerther Regelmässigkeit, aber absolut willkürlich, ohne gewissenhafte Berücksichtigung der Eigenschaften der Sauerstoffverbindungen und der Atomgewichte, daher streng theoretisch werthlos und die zweite, die wahre Curve, die die höheren Oxyde berücksichtigt und die richtigen Atomgewichte und daher absolut unregelmässig sich gestaltet, wie es auch in Wirklichkeit für die Eigenschaften der Sauerstoffverbindungen der Elemente der Fall ist.

Fig. 1.



Die geniale Schreibweise von Mendeléjeff entbehrt daher jeder Berechtigung, eine neue endgültige Theorie gründen zu wollen.

III.

Die ausserordentlich grosse Anzahl chemischer Verbindungen der Experimental-Chemie veranlassten die Forscher sich zu spezialisieren.

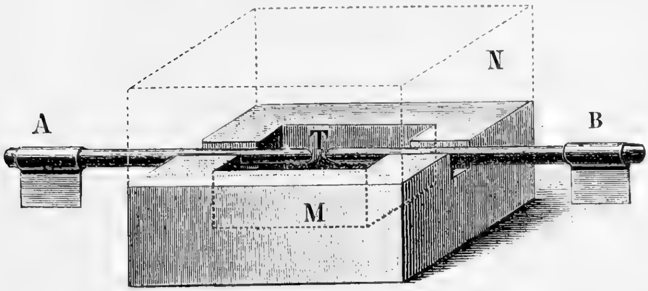
Raoul Pictet hat sich mit der Frage befasst, bei tiefer Temperatur chemische Reactionen zu studiren und hat sämmtliche Gase verflüssigt; der Sauerstoff, der Wasserstoff und der Stickstoff, wie auch sämmtliche bekannten Gase sind nicht permanent; es wurden die kritischen Temperaturen festgestellt, neue, grosse Entdeckungen für die Entwicklung der chemischen Theorie sind aber dadurch keine erfolgt.

Bei Anwendung höherer Temperatur hat man insofern mehr erreicht, indem die chemische Wissenschaft mit einer neuen Anzahl von Verbindungen bereichert worden ist, die zu neuen Ansichten führen müssen. Es wurde festgestellt, dass bei hoher Temperatur und hohem Druck einige Elemente eine andere physikalische Gestaltung annehmen können, und bis dahin unbekannte oder wenig studirte Verbindungen wurden hergestellt.

Wenn auch die allotropischen Modifikationen des Sauerstoffes, des Schwefels, des Phosphors, des Kohlenstoffs bekannt waren, so sind doch Arbeiten wie diejenigen von Moissan über die künstliche Herstellung der Diamanten und neuen chemischen Verbindungen bei hohem Druck und hoher Temperatur epochemachend, indem die erlangten Resultate den Gedanken bestärken müssen, dass für die Entwicklung der Wissenschaft noch wichtige Thatsachen festgestellt werden müssen. Am 6. Februar 1892 theilte Moissan in der französischen Akademie der Wissenschaften mit, dass es ihm gelungen sei, bei sehr hoher Temperatur und starkem Druck kristallisirten Kohlenstoff von den Eigenschaften der Diamanten herzustellen. Wöhler, Bunsen (1836—1889) und andere hervorragende Meister haben bei Anwendung des galvanischen Stroms die Wissenschaft mit einer grössern Anzahl von Entdeckungen bereichert; man bediente sich aber vor der Construction der vervollkommneten Dynamos zum Erzielen von hohen Temperaturen mehr allgemein der Brennmaterialien. Bei seinem Versuche benützte Moissan starke galvanische Ströme, er verwendete 300—350 Amp. und 50—70 Volt, die einer Temperatur von 3000 bis 3500° entsprechen.

Wir wollen kurz den mit durchschlagendem Erfolg ausgeführten Versuch der Darstellung des reinen Kohlenstoffes mittheilen.

Fig. 2. Elektrischer Ofen von Moissan.



A und B Elektroden aus Kohle.
M Steinblock aus weichem Kalkstein.
N Steinplatte » » »
T Vertiefung für den Kohlentiegel.

Der elektrische Ofen von Moissan besteht aus einem Block M von weichem Kalkstein; in der Mitte desselben befindet sich eine Vertiefung T zum Einlegen des Tiegels. Ueber den im Tiegel im Steinblock angebrachten Rinnen befinden sich horizontal die Kohlenstäbe A und B zur Leitung des Stromes; das Ganze wird mit einer Steinplatte N bedeckt. In diesem Ofen erhitzte Moissan in einem Kohlentiegel 200 Gramm Eisen zwischen 3000 und 3500 °. Dem geschmolzenen Metall wurde soviel Kohle gegeben, als dasselbe aufnehmen konnte; der Tiegel wird dann durch Werfen desselben in Wasser abgekühlt. Da das spezifische Gewicht des festen Eisens geringer ist, als dasjenige des flüssigen Metalls, so entsteht durch die Abkühlung in der Masse ein ausserordentlich starker Druck; unter diesen Verhältnisse krystallisirt ein Theil des geschmolzenen Kohlenstoffs des Eisens. Am 6. Februar theilte Moissan der französischen Akademie mit, dass es ihm gelungen sei, nach diesem Verfahren krystallisirten Kohlenstoff zu erhalten, der sich bei ausserordentlich genauer Untersuchung als *Diamant* zeigte[1]); die Krystallisation, die Härte, das spezifische Gewicht, die optischen Verhältnisse, die Bildung von Kohlensäure beim Verbrennen der Krystalle, bewiesen die Identität des künstlichen Diamantes mit demjenigen, der in der Natur vorkommt. Der grösste auf diese Weise erhaltene künstliche Diamant besitzt allerdings bloss einen Durchmesser von 0,5 Millimeter (siehe Fig. 7), es handelt sich daher nicht um ein industrielles Produkt, aber das Volumen desselben war genügend, um dessen Eigenschaften festzustellen.

[1]) Comptes rendus, 6 et 12 fév. 1892. Die Trennung nach der Methode von Berthelot gehört zu den schwierigsten Arbeiten der analytischen Chemie.

In Bestätigung der Ansicht, dass auch grössere Diamanten der Natur vulkanischen Ursprungs sind und sich bei sehr hohem Druck und Temperatur gebildet haben, hat Moissan den blauen Sand der Diamantlager des Kaps untersucht. Die Untersuchung fand nach der Methode der Analyse des geschmolzenen Eisens des elektrischen Ofens statt. Die Masse (das Eisen des im elektrischen Ofens geschmolzenen oder der zu untersuchende Sand) wird mit konzentrirter Salzsäure behandelt, dann mit ganz konzentrirter Salpetersäure der Rückstand oxydirt, das Zurückgebliebene wiederholt mit Kaliumchlorat geschmolzen und endlich der unlösliche Rückstand mit Fluorwasserstoffsäure und konzentrirter Schwefelsäure erhitzt. Nach diesen zahlreichen Operationen, von Berthelot angegeben und die wiederholt angeführt werden, wurde der krystallisirte Kohlenstoff oder Diamant von Graphit und anderen Verunreinigungen, namentlich Silicium, getrennt und es erhielt Moissan aus dem Sand der Diamantenlager des Kaps Diamantenstaub von gleicher Form und gleichen Eigenschaften, wie der künstlich hergestellte Diamantenstaub des geschmolzenen Eisens. Wenn nun in jenem Sand Diamanten von grösseren Dimensionen gefunden wurden, so muss angenommen werden, dass die Temperatur und die Druckverhältnisse, über die wir gegenwärtig verfügen, nicht genügen, um den werthvollen Stein in grössern Dimensionen künstlich herzustellen, oder dass ein anderes, noch unbekanntes Schmelzmittel den flüssigen Kohlenstoff aufnahm.

Diese Thatsachen haben mich dazu geführt, im harten Stahl die Anwesenheit von in Oktaeder krystallisirtem Kohlenstoff zu suchen. Die Methode der Analyse war die von Berthelot und Moissan beschriebene. [1]) Am 26. Januar 1896 fanden wir (bei dieser Arbeit war mein Privatassistent H. L. Franck mit Erfolg thätig) die ersten kleinen Oktaeder im Stahl. Diese durchsichtigen Kryställchen, durch ihre ausgezeichnete Härte charakterisirt, sind aber sehr spröde, ähnlich wie viele Diamantkrystalle, die in der Natur vorkommen; sie verbrennen im Sauerstoff bei 1000° C und liefern Kohlensäure, ohne namhafte Mengen Asche zurück zu lassen. Der Stahl, aus welchem die Gewehrläufe unseres neuen Infanteriegewehres hergestellt sind, lieferte Krystalle, die bei einer Vergrösserung von 300 linear regelmässige Oktaeder erkennen lassen; die Untersuchung im polarisirten Licht ergab

[1]) Recherches sur les états du carbone. Ann. de chimie et de physique, 4ème série, t. XIX p. 392.

die Identität der von uns hergestellten Diamanten mit dem natürlichen Diamantstaub. (Fig. 3.)

Fig. 3.

Vergrösserung 1060 Linear.

Die Analyse des Stahls nach der neuen Methode zeigt nun, dass bei metallurgischen Operationen der Kohlenstoff in Form von mikroskopischen Diamanten ausgeschieden werden kann. Die Dimensionen der Krystalle waren sehr klein, 3 bis 15 Mikro-Millimeter.

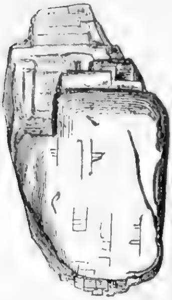
Später, bei der Untersuchung des Eisens des Herdes, eines seit 30 Jahren in Thätigkeit sich befindenden Hochofens, fanden wir Diamanten von grösseren Dimensionen, leider sehr spröde, so dass zuerst nur Splitter von sehr charakteristischer Form photographirt werden konnten. Diese Diamanten sind durchsichtig, scharfkantig, absorbiren das Licht und haben das seifige Aussehen der natürlichen Diamanten. Die übrigen Eigenschaften stim-

Fig. 4.

Fig. 5.

Diamantsplitter aus hartem Eisen auf chem. Wege getrennt
von Prof. Dr. A. Rossel und L. Franck.
Holzschnitt nach einer Mikrophotographie von Prof. Dr. L. Tavel in Bern.
Vergrösserung: 180 linear.

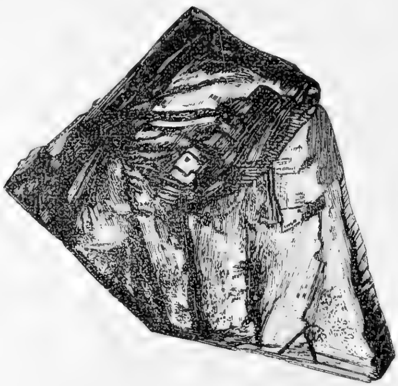
Fig. 6.



Diamant von Moissan. Vergrösserung: 500 linear.

men mit den angegebenen überein. Zum Vergleich ist in Fig. 6 der von Moissan im elektrischen Ofen hergestellte Diamant in einer Vergrösserung von 500 linear abgebildet, der in der Sitzung der französischen Akademie vom 12. Februar 1894 beschrieben wurde, und zugleich ein Diamant, von uns aus dem harten Eisen des oben erwähnten Hochofens von Herrn Metz & Cie. in Esch s. a. Luxemburg extrahirt. Unser Diamant besitzt die Form eines regelmässigen Oktaeders (Fig. 7); er hat einen Durchmesser von über 0,5 Millimeter, das Maximum, das wohl nach der angeführten Methode erreichbar ist.

Fig. 7.



IV.

Bei dem erwähnten geglückten Versuch zeigten sich Nebenerscheinungen, welche uns veranlassten, die Untersuchungen mit dem elektrischen Ofen in andern Richtungen auszudehnen. So wurde nämlich beobachtet, dass nicht nur das Eisen, sondern auch der Kalk des Ofens bei der Temperatur von 3000° flüchtig wird und Dämpfe abgibt: verschiedene Substanzen, die man früher als feuerfest betrachtete, zeigten die gleichen Erscheinungen: Kieselsäure, Thon, Kalk; sämmtliche Mineralien, welche die geologischen Schichten der Erdoberfläche bilden, sowie auch sämmtliche Metalle, Platin nicht ausgenommen, verlieren daher über 3000° C. an Gewicht, sie bilden Dämpfe, die sich an den kalten Stellen des Ofens absetzen.

Bei Anwendung einer Stromstärke von 350 Amp. und 70 Volt geben Kupfer, Silber, Platin, Aluminium, Zinn, Gold, Magnesium, Eisen, Uranium, Silicium, Kalk, Magnesia u. s. w. Dämpfe ab.

Mit einem Worte: sämmtliche Substanzen der Mineralchemie, die wir früher als feuerfest betrachteten, sind bei der Temperatur des elektrischen Ofens destillirbar.

Diese Resultate führen zu der Frage, welche Substanzen nun *wirklich feuerfest* sind, und in welchem Zustande nach ihrer chemischen Natur die Erdoberfläche sich bei der ersten geologischen Periode befand?

Feuerfeste Mineralien.

Im Conservatoire des arts et métiers in Paris, unter Direktion von Herrn Lausseda, dann in der grossartigen Installation der Avenue Trudaine der Compagnie Edison wurde die nöthige Kraft (bis zu 1000 Amp.) für Versuche dem Gelehrten Moissan zur Verfügung gestellt; es zeigte sich, dass eine grössere Anzahl beständiger Substanzen bei hoher Temperatur erhältlich sind. Diese haben eine ganz andere Zusammensetzung als die Mineralien, die an der Oberfläche der Erde vorkommen: ganz besonders zeichnen sich aus die Kohlenstoffverbindungen der Metalle, oder *Carbide.*

Bei Anlass eines Besuches bei Herrn Moissan, Professor der Chemie in Paris, im Dezember 1895, habe ich Gelegenheit gehabt diese höchst interessanten Verbindungen, die zum Theil bereits praktische Anwendung gefunden haben, kennen zu lernen, da dieser unermüdliche Forscher mit grosser Zuvorkommenheit mir seine reiche Sammlung selbsterzeugter Verbindungen zur Verfügung stellte.

Eine grössere Anzahl Carbide zersetzten sich mit Wasser, unter Bildung eines Kohlenwasserstoffes und eines Metallhydroxyds.

Das *Aluminiumcarbid* $C_3\,Al_4$ krystallisirt in gelben Krystallen (Compt. rend. 119, p. 16) und wird im elektrischen Ofen aus Kaolin und Kohle und auch aus Aluminium und Kohle hergestellt. Mit Wasser bildet das Carbid Methan und Thonerdehydrat:

$$C_3\,Al_4 + 12\,H_2O = 3\,CH_4 + 2\,Al_2\,(OH)_6.$$

der angewendete Strom betrug 300 Amp. und 65 Volt. —

Das *Siliciumcarbid Si C*, entstanden unter gleichen Verhältnissen aus Kohle und Kieselsäure, bildet ausserordentlich harte Krystalle, die den Namen Carborundum erhalten haben. Die Leistung des Carborundum als Schleifmittel ist 4mal grösser als diejenige des Corunds, so dass wir es hier mit einem Produkt zu thun haben, das unter den Schleif- und Polirmitteln eine sehr wichtige Rolle spielen wird. Durch Wasser wird das Siliciumcarbid nicht zersetzt. Gegenüber von Lösungsmitteln ist es fast so widerstandsfähig als Diamant und wird von Flusssäure nur sehr schwer angegriffen. Das spec. Gewicht beträgt 3,22.

Durch geschmolzene Alkalien wird das Carbid angegriffen und zersetzt. Beim Verbrennen im Sauerstoffstrom bei hoher Temperatur bilden sich Kohlensäure und Kieselsäure, so dass durch quantitative Analyse das Carbid von reinem Kohlenstoff unterschieden werden kann. Moissan hat festgestellt, dass der nach seiner Methode hergestellte Kohlenstoff auch Kieselsäure enthält und zwar bis auf 16 %. Der Unterschied zwischen dem krystallisirten Kohlenstoff und Siliciumcarbid ist daher schwer zu ermitteln; möglicherweise enthalten die Moissan-Diamanten, aufgelöst, Siliciumcarbid.[1])

Das *Baryumcarbid* $Ba\ C_2$ wurde aus Baryumcarbonat und Kohle hergestellt, es zersetzt sich mit Wasser unter Bildung von Acetylen und Baryumhydroxyd:

$$Ba\ C_2 + H_2O = Ba\,(OH)_2 + C_2\ H_2\,.$$

Das Strontiumcarbid $S_2\ C_2$ verhält sich ähnlich wie Baryumcarbid.
(Compt. rend. *118,* pages 501, 556, 683.)

Das Borcarbid $B_6\ C$ erweckt Aufsehen durch seine Eigenschaft eine noch grössere Härte als Siliciumcarbid zu besitzen und wird bereits in der Stahlfabrikation angewendet. Durch Wasser wird es nicht zersetzt. (Compt. rend. *118*, p. 556.)

Das Molybdäncarbid $Mo_2\ C$ wird von Moissan eingehend studirt; die Eigenschaften sind denjenigen des Siliciumcarbids ähnlich (Compt. rend. 1895, pag. 1320); ebenso werden mehrere Chromcarbide untersucht (Compt. rend. *119,* pag. 145).

Gegenwärtig ist weitaus am wichtigsten wegen seiner industriellen Bedeutung zur Herstellung von Acetylengas das

Calciumcarbid $Ca\ C_2$.

Am 5. März 1894 beschrieb Moissan vor der französischen Akademie die Methode der Herstellung in grösserer Menge dieser Verbindung im elektrischen Ofen (Compt. rend. 1894, pag. 501), nachdem am 12. Dezember 1892 von ihm die Reaction angegeben wurde.

Das Calciumcarbid war schon im Jahre 1862 im kleinen Maassstab von Wöhler hergestellt, aber von anderen Forschern unbeachtet geblieben.

---

[1]) Compt. rend. *115*, p. 1273; *116* p. 1222; *117* p. 425. 679.

(Wöhler, der als genialer Chemiker bereits die erste organische Synthese ausgeführt, indem er im Jahre 1828 den künstlichen Harnstoff herstellte.) — Annalen der Chemie und Pharmacie 124, Seite 220. (1862.)

Moissan mengt 120 Th. Kalk auf 70 Th. Kohle im Kohlentiegel des elektrischen Ofens und erhitzt mit einem Strome von 350 Amp. und 70 Volt. Es bildet sich im Tiegel, nach 5 bis 6 Minuten eine schwarze, krystallinische Masse, nicht mehr flüchtig, von konstanter chemischer Zusammensetzung von der Formel $Ca\,C_2$; nach der Werthigkeitshypothese handelt es sich um eine ungesättigte Verbindung, wo zwei vierwerthige Kohlenstoffatome *ein* zweiwerthiges Calciumatom binden. Die wichtigste Reaktion auf Calciumcarbid, die bis jetzt bekannt war, besteht in der Einwirkung von Wasser auf diese Substanz. Befeuchtet man $Ca\,C_2$ mit Wasser, so findet eine vollständige Zersetzung der feuerbeständigen Mineralsubstanz statt, und zwar unter Bildung von Kalk und Acetylen.

$$Ca\,C_2 + H_2O = Ca\,O + C_2\,H_2$$

Calciumcarbid, Wasser, Kalk, Acetylen.

Diese Reaktion ist für die Praxis von sehr grosser Bedeutung und es ist mit Bestimmtheit anzunehmen, dass bei der wunderbaren Leuchtkraft dieses Gases, welches mehr als um das fünfzehnfache die Leuchtkraft des Steinkohlengases übersteigt, das Acetylen in allerkürzester Zeit praktische Anwendung finden wird.

Die Herstellung des Acetylens ist sehr einfach, man entwickelt das Gas aus einem Blechgefäss durch regelmässige Zersetzung des Calciumcarbid mit Wasser und führt das Gas direkt zum Brenner.

Die Entwicklung des Acetylens kann auch dadurch regulirt werden, dass man dem Wasser, das als Entwicklungsflüssigkeit dient, irgend eine indifferente Substanz beimengt. Ich habe mittelst einer 50%igen Essigsäurelösung eine sehr regelmässige Entwicklung erhalten. Ein ähnliches Resultat erhält man durch Salzlösungen, Mischungen von Wasser mit Fettkörpern u. s. w.

Das Acetylen ist bereits flüssig erhalten worden und wird in dieser Form bedeutende Anwendung finden.

Wir haben Gelegenheit gehabt, eingehend über Herstellungskosten und Zukunft des neuen Gases Auskunft zu geben und verweisen auf die Spezialarbeiten, die gegenwärtig rasch aufeinander folgen.

Dank dem freundlichen Entgegenkommen der Finanzdirektion der Stadt Bern ist es mir gestattet worden, im elektrischen Werk einen elektrischen Ofen aufzustellen. Zu diesem Zweck habe ich im Jura (St. Ursanne) ein sehr geeignetes Material im weichen Kalkstein, der dort vorkommt, zur Herstellung des Ofens gefunden. Zur Beschaffung des Materials war mir in sehr verdankenswerther Weise Herr E. Schmieder in Pruntrut behülflich.

Es zeigte sich dieser Stein ebenso brauchbar als der Kalkstein der Kreideformation der Umgebung von Paris, so dass, wenn man über eine genügende Kraft verfügt, der Ausführung der wichtigen Versuche in Bern nichts im Wege steht.

Mit Beihilfe des Herrn Léon Franck habe ich nun eine Reihe von feuerfesten Verbindungen hergestellt, es sind dies die Verbindungen des Phosphors mit den Metallen, namentlich des Phosphor-Aluminiums, welche wir gegenwärtig einer nähern Untersuchung unterwerfen. Diese Verbindungen verhalten sich ähnlich wie die Carbide, widerstehen sehr hohen Temperaturen und entwickeln mit Wasser Phosphorwasserstoffe.

Eine dieser Verbindungen zersetzt sich wahrscheinlich nach der Gleichung

$$2\,(P\,Al) + 3\,H_2O = 2\,(P\,H_3) + Al_2\,O_3.$$

Je nach der Temperatur bilden sich aber Verbindungen von Phosphor und Aluminium in sehr verschiedenen Verhältnissen, die später beschrieben werden sollen.

Nicht unwichtig ist, festzustellen, dass in Folge der Publikationen von Wöhler und Moissan die von Willson in Amerika für die Herstellung des Calciumcarbids verlangten Patente, indem er Moissan seine wichtige Entdeckung streitig machen wollte, ungültig sind. Man darf hier auch nicht unterlassen zu erwähnen, dass Bullier auf die Entdeckung Moissan's ein deutsches Reichspatent erhalten hat (1894).

Bevor wir das Calciumcarbid verlassen, will ich noch erwähnen, dass es uns möglich war, mit Hülfe dieser Verbindung eine bedeutende Menge Luftstickstoff zu binden.

Die Reaktion wurde am 16. Dezember 1895 der französischen Akademie vorgelegt. Wenn man nämlich Calciumcarbid mit Magnesium in dem kleinen Tiegel mit der Flamme des Bunsenbrenners erwärmt, so verbrennt der Kohlenstoff zu Kohlensäure, das gebildete Calcium magnesium verbrennt dann unter Bildung von Kalk und Magnesiumstickstoff.

$$Mg_3\,N_2$$

Wird die Masse nach dem Erkalten mit Wasser behandelt, so entsteht Ammoniak.

$$Mg_3\,N_2 + 3\,H_2\,O = 3\,Mg\,O + 2\,NH_3.$$

Diese Reaktion ist insofern von Bedeutung, als dadurch bewiesen wurde, dass der Sauerstoff und der Stickstoff der Luft zu gleicher Zeit gebunden werden können.

Seither zeigte Maqueen, dass Kalk und Magnesium, an der Luft erhitzt, Magnesiumstickstoff bilden. Die Absorption des Sauerstoffes und des Stickstoffes ist bei dieser Reaktion so vollständig, dass sie gestattet, Argon aus der Luft rein darzustellen.

V.

Diese überraschenden Resultate der Versuche bei hoher Temperatur zeigen deutlich, dass Stickstoff, Kohlenstoff, Silicium, Bor, Phosphor bei der Bildung der ersten geologischen Schichten ursprünglich ohne Sauerstoff direkt mit den Metallen gebunden waren.

Die Reaktionen im elektrischen Ofen entsprechen den Verhältnissen, die bei der Bildung der ältesten geologischen Formationen vorkommen mussten. Organische Substanzen existirten nicht, der Kohlenstoff war ausschliesslich als Carbid vorhanden. Es ist anzunehmen, dass diese schwer flüchtigen Verbindungen von gleicher Zusammensetzung auch jetzt in den im glühenden Zustand sich befindenden Himmelskörpern vorkommen; der Stickstoff war ebenfalls gebunden, ähnlich wie im künstlich hergestellten Magnesiumstickstoff $Mg_3 N_2$.

Ich glaube, gestützt auf diese Thatsachen und auf die ausgeführten Versuche, die Ansicht aussprechen zu können, dass der Grund der Erdbeben und der vulkanischen Erscheinungen zum Theil auf die chemische Zersetzung feuerfester Materialien der untern geologischen Schichten zurückzuführen ist. Alle Vulkane liegen mit wenigen Ausnahmen auf Inseln oder in der Nähe der Küste, was sehr wahrscheinlich erscheinen lässt, dass das Wasser bei Eruptionen eine wichtige Rolle spielen muss. Ob man nun nach der Laplace-Kant'schen Theorie die Existenz des «Centralfeuers» annimmt oder nicht, so erscheint doch sehr wahrscheinlich, dass über der Grenzebene zwischen Erdkruste und flüssigem Erdinnern feuerfeste Massen von der oben angegebenen Zusammensetzung vorkommen müssen. Es sind das die Massen, die erstarrten ohne mit Wasser vorher in Berührung gekommen zu sein.

Die neuern Beobachtungen der Erdbeben scheinen festzustellen, dass diese unabhängig von den Eigenschaften des sehr tiefliegenden Erdinnern sein müssen; man ist immer mehr geneigt an chemische Prozesse zu denken, welche die Erderschütterungen und Eruptionen verursachen. Die nähere Erklärung dieser Prozesse und namentlich die Erklärung der Ursachen des Herausschleuderns von Mineralmassen aus dem Innern sind bis jetzt aber unerklärt geblieben.

Als eine der Ursachen ist nun die Einwirkung von Wasser auf die feuerfesten Materialien, die unter der uns bekannten geologischen Schicht sich befinden müssen, namentlich auf Carbide annehmbar. Die ungeheure Gasmasse, die bei der chemischen Reaktion entstehen muss, erklärt sowohl die Erderschütterung wie das Heben des Materials im geschmolzenen und halbgeschmolzenen Zustande der Vulcane. Dieses Material besteht aus aufgeschlossenen Silicaten, die den geschmolzenen Zustand ihrem Kalkgehalt verdanken; die durch den chemischen Prozess gebildete Kohlensäure und der Wasserdampf entweichen, um später an dem Verwitterungsprozess der Lava Theil zu nehmen, während die brennbaren Gase den sichern Beweis ihrer Anwesenheit durch die Erzeugung leuchtender Flammen darbringen. Die brennbaren Gase entzünden sich an der Luft, da sie stets von selbstentzündlichem Phosphorwasserstoff begleitet sind. Das Material der geologischen Schichten, welche die Oberfläche der Erde bilden, ist das Resultat derselben Reaktion; Kalk, Kalkstein, Magnesia haben sich in Folge der Zersetzung der feuerfesten Materialien durch Wasser gebildet, die Gase, die aus Silicium, Kohlenstoff, Bor und Phosphorverbindungen bestanden, haben als Verbrennungsprodukte Kieselsäure, Kohlensäure, Borsäure und Phosphorsäure geliefert.[1])

Die obern geologischen Schichten sind aus der Asche gebildet worden, die in Form der Carbonate und Silicate sich ablagerte, und in Folge des später eintretenden Verwitterungsprozesses hat die Erdoberfläche die heutige Gestalt angenommen.

An der Oberfläche der Erde finden wir einige Mineralien, die, von beständigerer Natur als die Carbide, vorkommen können. Es sind dieses die zahlreichen Schwefelverbindungen oder Sulfide, die an die Carbide erinnern, sich aber weniger leicht durch Wasser zersetzen und daher in den oberen geologischen Schichten sich befinden können.

VI.

Am Schluss dieser Arbeit angelangt, möchte ich vor Allem auf den wissenschaftlichen Werth der genannten Reaktionen aufmerksam machen, sodann auf deren Bedeutung für die Praxis, wo sie ebenfalls von grossem Einfluss werden können. Wir wissen nicht, ob in aller-

[1]) Es käme hier die angefochtene Hypothese von Mendeléjeff über die Bildung des Petroleums wieder zur Geltung.

nächster Zeit solche Verbindungen berufen sind, eine bedeutende Rolle zu spielen, und diejenigen, die über eine genügende Kraft verfügen, werden auch die Ersten sein, die davon Nutzen ziehen.

Diese Thatsache sollte uns in Bern ermuntern, die nothwendige, verhältnissmässig kleine Anstrengung zu machen, Wasserkraft zu gewinnen, und nicht länger zu zögern, unsern mächtigen Fluss, die Aare, zu zwingen nicht mehr vorbeizufliessen, ohne uns seinen Tribut an Kraft voll zu bezahlen. Die Anwendung der Wasserkräfte, in Verbindung mit der erzeugten elektromotorischen Kraft, wird sicher zu der rationellen Verwerthung der Energie führen. Wir besitzen gegenwärtig als praktischen Krafttransport die Accumulatoren ; es ist aber nicht unmöglich, dass die Energie in einer chemischen Verbindung billig aufgespeichert werden kann, die für die Uebertragung der Kraft von unschätzbarem Werthe sein müsste, wie es schon für das Calciumcarbid der Fall ist.

Damit habe ich endlich zeigen wollen,

1. dass die Chemie trotz ihrer grossen Entdeckungen, namentlich an neuen chemischen Verbindungen, immer noch eine reine Experimental-Wissenschaft geblieben ist, und

2. dass für die Zukunft die neuen bei hoher Temperatur gewonnenen chemischen Verbindungen die Aufmerksamkeit der Gelehrten und der Praxis auf sich ziehen müssen, indem durch dieselben ein neues Feld der Thätigkeit für die Forschung eröffnet wird.

G. Huber.

Die Planetoiden.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 25. Jan. 1896.)

Die *Planetoiden* oder *Asteroiden* sind sehr kleine Planeten, welche zwischen der Mars- und Jupiterbahn in meist sehr lang gestreckten Ellipsen um die Sonne kreisen.

Schon dem frühesten Alterthum waren fünf Planeten bekannt: *Merkur*, *Venus*, *Mars*, *Jupiter* und *Saturn*, welch letzerer in einer mittleren Entfernung von 190 Millionen geographischen Meilen um die Sonne kreist. Die *Erde* selbst wurde bis auf *Kopernikus* Zeiten, bis gegen die Mitte des 16ten Jahrhunderts und zum grossen Theil noch viel später, nicht als Planet, sondern als Mittelpunkt des Weltalls betrachtet, um welche sich Sonne, Mond und die sämmtlichen übrigen Gestirne bewegten. Allerdings kann in gewissem Sinne die Erde noch jetzt als Mittelpunkt des Weltalls angesehen werden, wie jeder Punkt des Weltraumes. Denn weil unser Auge nach allen Seiten unbegrenzt, also *gleichweit* in den Weltraum vordringt, so erscheint uns das Himmelsgewölbe als eine ungeheure Hohlkugel von unbestimmtem Radius, in deren Mittelpunkt wir stehen, und an deren Innenseite die Gestirne sich zu befinden scheinen. Weil dieselbe Erscheinung in jedem Punkt des Weltraumes stattfindet, so kann jeder Punkt als Mittelpunkt des Weltalls angesehen werden, also auch der Mittelpunkt der Erde oder der der Sonne, wie dies in der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie auch in der That geschieht. Der grosse französische Gelehrte *Pascal* sagt hierüber treffend: «Das Weltall ist eine Kugel, deren Mittelpunkt überall und deren Peripherie nirgends ist.»

Schon im Alterthum wurde, allerdings ganz unbestimmt, die Ansicht geäussert, dass es ausser diesen 5 noch andere Planeten gebe.

Diese Vermuthung tritt aber erst bestimmter auf bei *Kepler*, der in seinem *Mysterium Cosmographicum* die bestimmte Ansicht äussert, dass zwischen Mars und Jupiter noch ein Planet vorhanden sei. Diese Vermuthung Kepler's wurde aber erst in der zweiten Hälfte des 18ten Jahrhunderts wieder aufgenommen, zuerst von *Lalande*, dem Direktor der Pariser Sternwarte, und nachher von *Joh. Dan. Titius* in Wittenberg, von *Bode* in Berlin und *Wurm*. Diese machten auf die Lücke aufmerksam, die sich in der sonst ununterbrochenen Reihe der übrigen Planeten zwischen Mars und Jupiter befand; sie waren umsomehr davon überzeugt, dass sich in dieser Lücke ein Planet befinden müsse, als Titius im Jahre 1766 eine empirsche Formel fand, nach welcher sich die Abstände der Planeten von der Sonne in eine *geometrische Progression* ordnen lassen. Diese Formel, welche später im Jahre 1782, von Bode wieder in Erinnerung gebracht wurde, ist bekannt unter dem Namen des *Gesetzes von Titius-Bode*, später auch *Wurm'sche Reihe* genannt.

Setzt man den *mittleren Abstand der Erde von der Sonne*, 20 Millionen Meilen, den *Erdbahn-Halbmesser*, gleich der Einheit, oder die Entfernung des äussersten damals bekannten Planeten Saturn von rund 200 Millionen Meilen gleich 10, so werden die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne annähernd durch die Formel ausgedrückt, welche die genannte geometrische Reihe darstellt:

$$d = 0{,}4 + 2^n . 0{,}3$$

Vermittelst derselben ergibt sich für

$$n = -\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

die folgende Tabelle:

Planet	*Berechnete Entfernung*	*Wirkliche mittl. Entfernung*	*Abweichung von der Formel*
Merkur	0,4 = 0,4	0,387	— 0,013
Venus	0,4 + 0,3 = 0,7	0,723	+ 0,023
Erde	0,4 + 2 . 0,3 = 1	1	
Mars	0,4 + 4 . 0,3 = 1,6	1,524	— 0,076
—	0,4 + 8 . 0,3 = 2,8	—	—
Jupiter	0,4 + 16 . 0,3 = 5,2	5,203	+ 0,003
Saturn	0,4 + 32 . 0,3 = 10,0	9,539	— 0,461

Es musste also, um jene Lücke auszufüllen, ein Planet vorhanden sein, in der mittleren Entfernung von 2,8 Erdbahnradien oder 56 Millionen Meilen.

Unterdessen hatte der grosse englische Astronom *Herschel* ebenfalls den Gedanken gefasst und ausgeführt, mit seinem lichtstarken Spiegelteleskopen den Himmel nach neuen Planeten zu durchsuchen, und eine der ersten Früchte seiner Durchmusterung des Himmels war, am 13. März 1781, die Entdeckung eines neuen grossen Planeten, des *Uranus*, der in einer mittleren Entfernung von 19,182 Erdbahnhalbmessern oder 384 Millionen Meilen um die Sonne kreist, wodurch der Durchmesser des Sonnensystems auf das Doppelte erweitert wurde.

Der neu gefundene Planet, dem nach der Titius'schen Formel die Entfernung:

$$0{,}4 + 2^6 \,.\, 0{,}3 = 0{,}4 + 64 \,.\, 0{,}3 = 19{,}6$$

zukam, während seine wirkliche Entfernung 19,182 Erdbahnradien ist, passte so gut in die Reihe, dass man das Gesetz als richtig annahm.

Zach, 1787—1806 Direktor der von ihm gegründeten Sternwarte auf dem Seeberg bei Gotha, unternahm infolge dieser Uebereinstimmung, gestützt auf gewisse hypothetische Voraussetzungen, die Berechnung der Bahnelemente des fehlenden Planeten. Er begann im Jahre 1787 eine Durchmusterung der Sterne des Thierkreisgürtels, in der Hoffnung dabei auf den fehlenden Planeten zu stossen. *Zach* sah aber bald ein, dass die Aufgabe diesen Planeten zu finden ähnlich sei derjenigen, «eine Stecknadel in einem Heubündel zu suchen» und die Kräfte eines Einzelnen übersteige.[1]) Es wurde daher auf dem von *Lalande* im Jahre 1796 in *Gotha* und auf dem von *Zach* im Herbst 1800 zu *Lilienthal* bei Bremen veranstalteten *astronomischen Congress* eine Arbeitstheilung in Vorschlag gebracht. Es sollte eine eigene Gesellschaft gegründet und 24 Astronomen gewonnen werden, von denen je zwei eines der 12 Zeichen des Thierkreises zu durchmustern, genaue Karten zu bearbeiten und diese immer wieder mit dem Himmel zu vergleichen hätten, um auf diese Weise den fehlenden Planeten zu finden.

An der Conferenz zu Lilienthal betheiligte sich auch *Joh. Hieron. Schröter*, ein Jurist von Beruf, Justizrath und Oberamtmann zu Lilienthal, der sich für die Astronomie interessirte und um sie praktisch

[1]) Dr. R. Wolf. Handbuch der Astronomie 1893.

betreiben zu können, daselbst eine mit guten Instrumenten ausgerüstete Sternwarte errichtete, die 1813 von den Franzosen niedergebrannt wurde. Schröter's wichtigste Arbeiten beziehen sich auf Untersuchungen des Mondes und der Planetenoberflächen.

An der genannten Conferenz nahm ferner *Wilh. Olbers* Theil, der sich als Arzt in Bremen niedergelassen hatte und welcher die Astronomie nur aus Liebhaberei trieb, diese aber doch in allen Theilen beherrschte und wesentlich förderte. Mit Vorliebe beschäftigte er sich mit den Kometen.

Zu den von dem Lilienthaler Congress auserwählten 24 Astronomen gehörte auch *Joseph Piazzi*, Direktor der Sternwarte in Palermo. Bevor er aber die Anzeige hiervon erhielt, hatte er nicht nur den ihm zugedachten Theil, sondern die ganze Aufgabe auf eigene Faust gelöst. Piazzi war schon seit mehreren Jahren beschäftigt, an der Hand des sehr unvollkommenen *Wollaston'schen Catalogs*, ein genaues Fixsternverzeichniss aus der Gegend des Thierkreisgürtels herzustellen. Wegen einer falschen Notiz in diesem Catalog untersuchte er die Gegend im Sternbilde des Stiers, wo der betreffende Stern stehen sollte, genauer, zu welchem Zwecke er alle Sterne aufzeichnete. Auf diese Weise hatte er in der Nacht vom 1. Januar 1801, also gerade am Neujahrhundertstage, einen kleinen Stern beobachtet und verzeichnet, der am folgenden Abend nicht mehr an derselben Stelle stand, während in einiger Entfernung ein vorher dort nicht gesehener Stern sich vorfand, und am nächst folgenden Abend zeigte sich eine abermalige Ortsveränderung. Piazzi hielt sich daher überzeugt, einen Wandelstern gefunden zu haben, und zwar dachte er zuerst an einen Kometen. Er setzte seine Beobachtungen fort, bis am 11. Februar ungünstige Witterung und bald darauf eine Krankheit seine Beobachtungen unterbrachen. [1])

Piazzi hatte sofort mehreren Astronomen, so *Oriani* in Mailand und *Bode* in Berlin, seine Entdeckung mitgetheilt, aber in Folge der damaligen Kriegszustände trafen diese Briefe in Berlin erst am 20. März, in Mailand erst am 5. April ein, wo der neu entdeckte Himmelskörper wegen seines Standes zur Sonne nicht mehr zu beobachten war. Jedoch gelangten Bode und Zach, nach genauer Vergleichung seiner Bewegung sofort zu der Ueberzeugung, dass der neue Wandelstern kein Komet, sondern höchst wahrscheinlich der gesuchte, der

---

[1]) Mädler. Der Wunderbau des Weltalls.

Lücke angehörige Planet sei, welcher Ansicht nach einigem Zögern auch Piazzi beitrat. Er nannte den neuen Planeten, kraft seines Entdeckerrechtes, *Ceres*.

Die bis zum 11. Februar reichenden Beobachtungen Piazzi's waren aber die einzigen, die man erhalten hatte. Es handelte sich nun darum, aus diesen 6 wöchentlichen Beobachtungsresultaten die Bahn der Ceres so genau abzuleiten, um sie im nächsten Winter wieder aufzufinden, wenn sie in hinreichender Entfernung von der Sonne wieder gesehen werden konnte. Diese Bahn aber aus einer so kurzen Beobachtungsreihe abzuleiten, schien nach den bis dahin bekannten Methoden unausführbar. Viele versuchten sich an dieser Aufgabe, aber man erhielt so viele verschiedene Resultate, dass die Hoffnung, die Ceres wieder zu finden, je länger je mehr schwand.

Da entdeckte ein noch wenig bekannter, junger Mathematiker, *Dr. Gauss* in Göttingen, eine neue Methode, mit der man leichter und genauer als bis dahin aus Beobachtungen eines so kleinen Bogens der Bahn eines Planeten die *ganze Bahn* bestimmen kann. Er berechnete nach dieser seiner Methode, an der Hand der sehr gegenauen Beobachtungen Piazzi's, die Bahn der Ceres und gab an, wo sie im Januar 1802 erscheinen musste.

Die Arbeit von Gauss fand aber wenig Beachtung, nur *Olbers* in Bremen prüfte sie genauer, fand ihren grossen Werth und legte sie seinen Beobachtungen zu Grunde. Und so gelang es ihm, am Jahrestage der Entdeckung, am 1. Januar 1802 die fast verloren geglaubte Ceres wieder zu finden. Die Entdeckung war nun gesichert, denn vermittelst dieser zweiten Erscheinung war es nun möglich, die Bahn der Ceres so genau zu berechnen, dass sie zu jeder Zeit sofort aufgefunden werden kann.

Die Helligkeit der Ceres ist so gering, dass dieser Planet auch für das schärfste unbewaffnete Auge unsichtbar bleibt. Man musste hieraus auf eine sehr geringe Grösse, oder auf eine geringe Reflexionsfähigkeit für das Licht an seiner Oberfläche schliessen. In der That ist eine genaue Messung des Durchmessers dieses *Planetoiden* erst im Jahre 1894 gelungen, wovon später die Rede sein wird.

Die *mittlere Entfernung* der Ceres von der Sonne ergab sich zu 2,7672 Erdbahnhalbmessern oder nahezu 56 Millionen Meilen und dieser Werth passte so gut in die Titius'sche Reihe, dass man allgemein die Lücke zwischen Mars und Jupiter als ausgefüllt betrachtete, und sich mit dem gefundenenen kleinen Planeten zufrieden gab.

Olbers hatte an der Stelle, an welcher er die Ceres entdeckt hatte, die umliegenden Sterne besonders genau beobachtet und verzeichnet, um nach einem Umlauf der Ceres diese um so leichter wieder zu finden. Da entdeckte er schon am 28. März 1802 fast an derselben Stelle wie vorher die Ceres, einen zweiten kleinen Planeten, den er *Pallas* nannte, dessen mittlerer Sonnenabstand von 2,768 Erdbahnradien nur sehr wenig von dem der Ceres verschieden ist. Dieser Planet war erst 3 Wochen beobachtet worden, als *Gauss* schon mit grosser Genauigkeit seine Bahn bestimmte. Diese Entdeckung, dass man aus einem so kleinen beobachteten Bogen, die ganze Bahn eines Planeten bestimmen könne, setzte die Mathematiker und Astronomen fast noch mehr in Erstaunen, als die Entdeckung der neuen Planetoiden selbst und man erkannte es mit Bewunderung, dass Deutschland in Gauss einen Mathematiker besitze, der mit den Franzosen *Laplace* und *Lagrange* einen gleichen Rang einnehme.[1])

Die ganz unerwartete Entdeckung des zweiten Planetoiden, Pallas, verursachte vielen Zweifel. Einige hielten Pallas gar nicht für einen Planeten; die starke Neigung seiner Bahnebene gegen die Ebene der Erdbahn, die *Ekliptik*, welche Neigung beinahe 35° beträgt, seine lang gestreckte elliptische Bahn, und eine starke Nebelhülle die *H. Schröter* gesehen hatte, schienen auf einen Kometen zu deuten. Allein die späteren Beobachtungen und sein ganzes Verhalten sprachen für einen Planeten.

Einige Astronomen, in erster Linie *Olbers* nahmen daher eine *Theilung* eines früheren grösseren Planeten in zwei oder mehrere Planeten an. Diese Annahme hatte den günstigen Umstand für sich, dass die Bahnen der Ceres und Pallas an einem Orte des Thierkreises sehr nahe zusammen kamen. Man beobachtete desshalb jene gemeinsame Region, in welcher die Theilung vor sich gegangen sein sollte, genauer und wirklich fanden *Harding* in Göttingen am 1. September 1804 in den Fischen einen 3. Planetoiden, die *Juno*, im mittleren Sonnenabstand 2,67 und *Olbers* am 29. März 1807 in der Jungfrau einen 4., die *Vesta*, im mittleren Abstand 2,362 Erddistanzen.

Die mittleren Abstände der 4 neu entdeckten Planetoiden weichen nur wenig von einander und von dem, der Reihe des Titius entsprechenden Abstand 2,8 ab. *Bode* äussert sich desshalb folgenderweise hierüber: [2])

---

[1]) B r a n d e s. Vorlesungen über die Astronomie 1827.

[2]) Dr. J o h. E l e r t. Bode. Betrachtungen der Gestirne und des Weltgebäudes. Berlin 1816.

«Jene harmonische, nun auf's neue vollständiger bestätigte Progression in den Abständen der Planetenbahnen, wird auch keineswegs dadurch umgestossen, dass statt dem erwarteten einen Planeten bis jetzt deren 4 entdeckt worden sind, da diese fast in der nämlichen Entfernung von der Sonne sich aufhalten. Dass alle 4 in eigenen Bahnen nach eben der Richtung wie die übrigen um die Sonne laufen, macht sie zu Hauptplaneten. Ceres erscheint nur als Stern 7. Grösse und ist daher wirklich nur ein kleiner Weltkörper, oder er hat, wie es viel glaublicher ist, eine starke Atmosphäre um sich, so dass er das Sonnenlicht nur schwach von seiner Oberfläche zurückwirft und erscheint desshalb so klein und lichtschwach.»

Die ersten eingehenderen Beobachtungen der Oberflächen der 4 neuen Planeten gleich nach ihrer Entdeckung sind von *Schröter* ausgeführt worden. Er fand, dass diese Himmelskörper von ungeheuren Atmosphären umgeben seien, so dass sie als Zwischenglieder angesehen wurden, welche die Kette der Planeten mit den Kometen verbinden.

Nach Schröter's Messungen beträgt der Halbmesser der *Ceres* 176 Meilen, die Höhe ihrer Atmosphäre, Nebelhülle, zu verschiedenen Zeiten 65—147 Meilen, also fast gleich dem Halbmesser des Planeten. Oft, sagt Schröter, war der Kern der Ceres scharf begrenzt und liess sich, sowie die umgebende Lichtatmosphäre messen, zuweilen sah man bloss den Lichtnebel in dem der Planet schwimmt.

Den Halbmesser der *Pallas* fand er zu 227 Meilen, die Höhe ihrer Atmosphäre 102 Meilen. Bedenkt man, dass die Höhe der irdischen Atmosphäre etwa 10 Meilen beträgt, so kann man sich eine ungefähre Vorstellung machen von der Mächtigkeit dieser Gashüllen,

Dabei ist nicht zu vergessen, sagt Schröter, dass dies nur der untere Theil der Atmosphäre ist, der stark genug ist, das Sonnenlicht bis zur Erde zu reflektiren, so dass sein Durchschnitt gemessen werden kann. Wie weit mag sich also die feinere Atmosphäre ausdehnen! Welch ungeheure Revolutionen, müssen in diesem Dunstkreis vor sich gehen, der den unsrigen 10 bis 14mal übertrifft und der sich bald auf die Hälfte zusammenzieht, bald auf das Doppelte ausdehnt! und der sich uns, wie die Ceres, bald in einem röthlichen. bald in bläulichem, bald in weisslichem Lichte zeigt.

An *Juno* bemerkt man zwar nichts von einem kometenartigen Nebel, indes sieht man aus ihrem bald stärkeren bald schwächeren Licht, dass ihre Atmosphäre verhältnissmässig weit grösser ist und beträchtliche Veränderungen erleidet.

Vesta fällt durch ihr ausserordentlich starkes Licht auf woraus man schliessen möchte, dass sie ein sehr harter, felsiger und gebirgigter Körper ist, von nur einer schwachen Atmosphäre umgeben.

Soweit die Beobachtungen Schröter's.

Spätere, mit vollkommeneren und lichtstärkeren Fernrohren ausgeführte Beobachtungen zeigten keine Spur von einer Atmosphäre, die von Schröter gesehenen Nebelhüllen erwiesen sich als optische Täuschungen in seinen unvollkommenen Teleskopen, es besitzen diese Himmelskörper entsprechend ihrer Kleinheit nur äusserst geringe Atmosphären. Also keine Nebelhüllen, nichts kometenartiges, ihr ganzes Verhalten charakterisirte die 4 neu entdeckten Himmelskörper als Planeten, wegen ihrer Kleinheit erhielten sie den Namen *Planetoiten* oder *Asteroiden.*

Olbers hat die früher erwähnten Nachsuchungen nach neuen Planeten noch bis zum Jahre 1817 fortgesetzt; dabei behielt er hauptsächlich die beiden Stellen in den Sternbildern der Jungfrau und Fische im Auge, in welchen die scheinbaren Durchkreuzungspunkte der Ceres- und Pallasbahn liegen, welche Stellen somit muthmasslich auch von allfälligen andern Bruchstücken des als zertrümmert angenommenen grossen Planeten, von Zeit zu Zeit passirt werden mussten. Eine weitere Planetenentdeckung gelang ihm aber nicht und es blieb bis Ende 1845 also 39 Jahre lang, bei *7 grossen und 4 kleinen Planeten.*

Da fand am 8. Dezember des Jahres 1845 ein eifriger Liebhaber der Astronomie, der Postmeister *Karl Ludw. Hencke* zu Driesen in der Neumark, auf Grund von ihm selbst entworfener Spezialkarten, einen neuen fünften Himmelskörper aus der Familie der Planetoiden, der *Asträa* genannt wurde. Im Jahre 1847 entdeckte Hencke noch einen sechsten Asteroiden und eröffnete damit eine neue Periode von Planetoidenentdeckungen deren Ausdehnung alle Erwartungen übertraf und die noch heute nicht abgeschlossen ist.

Von dieser Zeit an ist kein Jahr, ja in neuester Zeit sogar fast kein Monat vergangen, in dem nicht neue Planetoiden entdeckt wurden: von 1845—1850 wuchs ihre Zahl um 6.

Aber erst von 1854 an wurde die Anzahl der entdeckten Asteroiden grösser, auf Grund der genauen vom Pariser Observatorium herausgegebenen Himmelskarte aus der Gegend des Thierkreisgürtels. Einzelne Astronomen widmeten sich mehr oder weniger speziell der Aufsuchung von Planetoiden, so *Hind* und *Pogson* in Nottingham, *de*

Gasparis in Italien, *Rob. Luther* und *Wilh. Tempel* in Deutschland, *Palisa* in Wien, *Coggia* und *Charlois* in Nizza, *Peters* und *Watson* in Nordamerika u. s. w.

Von 1850—1860 wuchs die Anzahl der Asteroiden um 47, von diesen haben Hind 10, Goldschmidt 12, Gasparis 7, Luther 8 u. s. w. entdeckt.

Von 1860—1870	wurden	55	Planetoiden	entdeckt,
» 1870—1880	»	99	»	»
» 1880—1890	»	82	»	»
und im Jahr 1891	»	21	»	»

Bis zum Dezember 1891 wurden alle Planetoiden, im Ganzen 322, vermittelst genauer Sternkarten entdeckt, und der Grund, warum von 1807—1845 kein neuer Planetoid entdeckt wurde, liegt nicht, wie man vielleicht meinen könnte, in dem Fehlen lichtstarker Fernrohre, sondern in dem *Mangel genauer Sternkarten.*

Der hellste Planetoid ist nämlich der 4. der zuerst entdeckten, die *Vesta;* er ist der einzige, der gerade noch mit blossem Auge gesehen werden kann, an den Grenzen der Sichtbarkeit als ein schwacher Stern 6. Grösse. Ceres ist von der 7. Grösse.

Ferner sind von den bis jetzt gefundenen:

7	Planetoiden	von	der	8.	Grösse	
25	»	»	»	9.	»	
69	»	»	»	10.	»	
157	»	»	»	11.	»	u. s. w.

bis hinunter zur 15. Grösse.

Es stehen nun schon gegen 30,000 Fixsterne der 7. und 8. Grösse am Himmel und geht man unter diese Grössenklassen hinab, so hat man mit Hunderttausenden und Millionen von teleskopischen, dem freien Auge unsichtbaren Sternen zu thun. Zu Anfang dieses Jahrhunderts waren aber noch nicht einmal alle Sterne 6. Grösse, geschweige denn die darunter liegenden Klassen in den Sternkarten eingetragen, da war es eben unmöglich, aus diesen lichtschwachen Sternen einen neuen Planeten herauszufinden, der sich von einem schwachen Fixsterne in gar nichts unterscheidet. Nur vermittelst sehr ausführlicher Sternkarten und Katalogen war auf neue Entdeckungen zu hoffen. Auf die Herstellung genauer Sternkarten waren daher lange Zeit hindurch die vereinigten Bemühungen der Astronomen gerichtet[1]).

[1]) Mädler, Der Wunderbau des Weltalls.

Gegenwärtig sind schon mehrere Hunderttausend Sterne katalogisirt und in Karten eingetragen und an den internationalen Kongressen von 1887, 1889 und 1891, an denen 16 Nationen mit 56 Astronomen vertreten waren, wurde beschlossen, den ganzen Himmel photographisch auf 12,000 Platten aufzunehmen, deren jede von 16 cm^2. Fläche etwa 2^0 im Quadrat am Himmel umfasst. An der Arbeit betheiligen sich 20 Sternwarten, sie soll bis zum Jahre 1900 beendigt sein. Alle Aufnahmen in eine ganze Karte vereinigt, überdecken eine Kugel vom Radius 3,43 m. Es werden 2 Serien hergestellt; die erste enthält, bei kurzer Expositionszeit der Platten, alle Sterne bis zur 11. Grösse, im Ganzen etwa $1^1/_2$ Millionen Sterne; die zweite Serie enthält, bei längerer Expositionszeit, alle Sterne bis zur 14. Grösse, ihre Zahl beträgt etwa 15—20 Millionen.

Vermittelst der neuen, genauen Sternkarten gelang es dann vom Jahr 1845 bis Ende 1891 im Ganzen 318 Planetoiden durch planmässiges Aufsuchen zu entdecken.

Da trat Ende 1891 eine neue Phase in der Geschichte der Planetoiden-Entdeckungen ein, durch die *Heranziehung der Photographie.* Der erste, auf photographischem Wege entdeckte Planetoid, der 323., wurde am 20. Dezember 1891 von *Max Wolf* in Heidelberg gefunden, welcher auch diese Methode Ende November 1891 in die Planetenastronomie eingeführt hat.

Durch die Einführung der photographischen Methode hat nebst anderm auch die Art der Auffindung der Asteroiden eine andere Gestalt angenommen. Früher wurde zu diesem Zwecke eine mühsame, zeitraubende Vergleichung des Himmels mit einer sehr genauen Sternkarte der betreffenden Gegend vorgenommen, wobei sich ein Planet dadurch verrieth, dass an einer leeren Stelle der Karte ein Stern angetroffen wurde. Um sich von der planetarischen Natur desselben vollständig zu überzeugen, wurde wenn möglich noch in derselben Nacht eine Ortsveränderung konstatirt. Jetzt aber ist die Auffindung eines Planetoiden in gewissem Sinne in das Studirzimmer verlegt worden. Auf einer 2—3 Stunden hindurch ausgesetzten photographischen Platte hinterlässt ein Planet, wegen seiner Bewegung eine kleine Linie als Spur zurück, während die Fixsterne als kleine Scheibchen erscheinen. Es sind aus diesem Grunde die Platten nach ihrer Entwickelung sehr sorgfältig nach den auf ihnen enthaltenen Strichen zu untersuchen, was besonders in sternreichen Gegenden eine mühsame und zeitraubende Arbeit ist. Aber man bedarf jetzt nur drei Stunden heiteren Himmels, um beim Forschen nach einem Planetoiden mittelst Photographie ebensoviel zu erreichen, als früher bei achtzigstündiger Arbeit. Wird nun während einer längere Zeit andauernden Periode heiteren Wetters eine grössere Zahl Platten gewonnen, so kann der Beobachter mit dem Untersuchen derselben nicht gleichen Schritt halten. Manche gelangen daher erst nach mehreren Tagen, selbst Wochen nach ihrer Aufnahme zur Untersuchung, wodurch das Auffinden der auf ihnen enthaltenen Planeten ebenso lange verzögert wird.[1])

Anfangs wählte man für die Asteroiden, wie für die grossen Planeten besondere *Zeichen*, so erhielt z. B. die zuerst entdeckte Ceres, als Göttin der Ernte das Zeichen einer Sichel, nämlich:

Ceres ⚳, Pallas ⚴, Juno ⚵, Vesta ⚶,

u. s. w. Weil sich aber ihre Zahl sehr vermehrte, wurden ihnen einfach im Kreise eingeschlossene, fortlaufende Nummern gegeben, welche die Reihenfolge ihrer Entdeckung angeben, z. B.:

Ceres ①, Pallas ②, Urania ㉚, Ismene (190) u. s. w.

Früher hat man allen neu entdeckten Planetoiden gleich die definitive fortlaufende Nummer nach der Zeit ihrer Entdeckung gegeben; daraus entstanden aber Irrungen, weil unter denselben sich hie und da ein älterer, verlorener, der schon früher eine Nummer erhalten hatte, befand. Nun bezeichnet man die neu aufgefundenen Asteroiden *provisorisch* nach der Zeitfolge ihrer Entdeckung durch die grossen lateinischen Buchstaben des Alphabets und fährt damit ununterbrochen fort und greift nach Erschöpfung des Alphabets auf die Doppelbezeichnung AA, AB, AC, ... BA, BB, BC . . . . Diese Bezeichnung wird seit Ende August 1892 in Anwendung gebracht, Ende 1895 war man bereits bei CC und CD angelangt.

Die definitive Numerirung erfolgt erst dann, und zwar in Gruppen von je 10, wenn die Beobachtungen bereits längere Zeit geschlossen sind und eine genaue Untersuchung erfolgt ist. Alle Planetoiden, welche nicht genügend genau beobachtet sind, um eine einigermassen sichere Bahnbestimmung zu gestatten, erhalten keine Nummer mehr, nur die lateinischen Buchstaben der Reihenfolge.

Bis zur Einführung der Photographie, bis zum 20. Dezember 1891 waren 322 Planetoiden entdeckt, von 1 bis 322 numerirt; seither wurden bis Ende 1895 entdeckt und ihre Bahn berechnet:

---

[1]) Astronomischer Kalender 1894 der Sternwarte in Wien.

Im Jahr 1892 = 27 Asteroiden,
» » 1893 = 27 »
» » 1894 = 20 »
» » 1895 = 11 »

Von den letzteren sind aber (Anfangs Januar 1896) fünf noch nicht berechnet. Im Ganzen sind in den letzten 4 Jahren 1892—1896 nicht weniger als *85 Planetoiden* entdeckt und berechnet worden, wovon 80 durch die Photographie und zwar 24 davon von *Max Wolf* in Heidelberg, 54 von *Charlois* in Nizza und nur 8 von anderen.

Ausserdem wurde in diesem Zeitraum noch eine grosse Anzahl anderer Planetoiden entdeckt; aus Mangel einer genügenden Anzahl von Beobachtungen konnten aber für dieselben die Bahnelemente nicht gefunden werden, so dass diese nicht als bleibende Erweiterung des Asteroidenringes betrachtet werden können und vorläufig weggelassen werden.

Charlois hat ausserdem vorher schon 26 Asteroiden vermittelst der alten Methode entdeckt, bis jetzt zusammen allein deren 80. Ebenso viele, nämlich 81, und zwar alle nach der alten Methode, hat *Palisa* in Wien entdeckt, *Peters* in Clinton (Nordamerika) 45 Planetoiden ebenfalls nach der alten Methode.

Mehrfache Auffindungun ein und desselben Asteroiden kamen nur wenige vor. Es rührt dies daher, dass sich bisher nur zwei Astronomen, Wolf und Charlois, der Photographie zur Aufsuchung dieser Himmelskörper bedienten, und dass sie zudem nicht zu derselben Zeit thätig waren.

Die Gesammtzahl der bis Ende 1895 bekannten Asteroiden beträgt 410, von diesen sind 404 vollständig berechnet und mit fortlaufenden Nummern versehen.

Die Bahnberechnung der weitaus grössten Zahl der in den letzten Jahren entdeckten Planetoiden rührt her von *A. Berberich*, einem Astronomen am Recheninstitute der königlichen Sternwarte in Berlin, der mit aussergewöhnlichem Geschick und Scharfblick diese mühsamen und zeitraubenden Berechnungen ausgeführt hat.

Die Bearbeitung der Bahnen und die fortlaufende Berechnung der *Ephemeriden*, d. h. die Vorausberechnung der täglichen Stellungen der Planetoiden wird durch die *Redaktion des Berliner astronomischen Jahrbuches* mit Unterstützung freiwilliger Mitarbeiter aller Nationen besorgt. Weil sich nun in den letzten Jahren die Anzahl der Asteroiden sehr vermehrt hat, war es diesem Institut nicht mehr möglich, alle dieselben in ihrer Bahn zu verfolgen; es findet eine Einschränkung der Berechnung der fortlaufenden *Ephemeriden* auf die wichtigsten Planetoiden statt, die übrigen lässt man, nachdem ihre Bahnelemente berechnet sind, einfach laufen, wenn nothwendig, lässt sich ihre Stellung zu jeder Zeit wieder berechnen.

Etwa 340 Planetoiden haben *Eigennamen* erhalten, die zehn zuerst entdeckten sind der Reihe nach:

Ceres, Pallas, Juno, Vesta, Asträa, Hebe, Iris, Flora.

Anfangs wurde streng das Princip innegehalten, für die Planetoiden nur Namen des *klassischen Alterthums* zu wählen, und so treffen wir neben den obigen auf die Bezeichnungen:

Minerva, Medea, Andromache, Kalypso, Penelope, Thalia, Ismene, Ariadne u. s. w.

Als sich aber ihre Zahl vermehrte, wurden auch andere Namen für die Planetoiden eingeführt und so finden wir Namen:

Aus der *germanischen Mythologie:*

Kriemhild, Brunhild, Gudrun, Idun, Freia, Gerda, Vanadis u. s. w.

Länder- und Städtenamen:

Russia, Germania, Bavaria, Svea, Badenia, Dresda, Heidelberga, Massilia u. s. w.

Alle möglichen *Frauennamen:*

Emma, Ida, Anna, Maria, Rosa, Eva, Katherina u. s. w.

So ist auch *Roxane*, die Gemahlin Alexanders des Grossen durch einen Planetoiden dieses Namens verewigt; auch eine *Xantippe* zieht ruhig ihre Bahn unter den übrigen Asteroiden.

Als sich durch Einführung der Photographie die Zahl der neu entdeckten Planetoiden noch in stärkerem Masse vermehrte, ist man von einer Namengebung ganz abgegangen und bezeichnet die neu gefundenen Asteroiden einfach durch fortlaufende Nummern.

Ueber die auf der Sternwarte zu Nizza zur Aufsuchung neuer Asteroiden mittelst der Photographie durch *Charlois* erhaltenen Resultate, hat der Direktor *Perrotin*, jener Anstalt vor Kurzem im Wesentlichen folgende Details veröffentlicht:

«Vom 19. September 1892 bis Ende Juni 1894 wurden im Ganzen 115 Clichés von je 11^0 Seitenlänge aufgenommen. Bei einer Expositionszeit von $2^1/_2$—3 Stunden enthielten die einzelnen Platten 8—9000 Sterne; die Untersuchung einer Platte erforderte etwa zwei Stunden. Auf 40 dieser Platten fand sich überhaupt kein Planet vor, die übrigen 75 enthielten zusammen 157 verschiedene Planetoiden, von denen sich 112 als bereits bekannt und 45 als neu erwiesen, was nur durch die Berechnung der Bahn konstatirt werden kann.

Bei den Planetoiden bis 11. Grösse waren die schon bekannten weit im Ueberschuss; bei den Planetoiden 12. Grösse kommen schon auf 3 alte zwei neue und bei denjenigen 13. Grösse sind die neuen auf den Platten zahlreicher als die alten, ein Zeichen, dass wir zwar die helleren Glieder der Asteroiden, nicht aber die schwächeren bereits ziemlich vollständig kennen.»

Im Laufe des Jahres 1895 ist das 4. Hundert der bekannten Asteroiden überschritten worden, es dürfte daher die folgende Tabelle zur Uebersicht über die Aufeinanderfolge der Planetoidenentdeckungen von Interesse sein:

Es wurde entdeckt:						Zeitraum für eine Gruppe von je 50:
(1)	Ceres	am	1.	Januar	1801	
(50)	Virginia	»	4.	Oktober	1857	56 Jahre
(100)	Hekate	»	11.	August	1868	11 »
(150)	Nuwa	»	18.	November	1875	7 »
(200)	Dynamene	»	27.	August	1879	4 »
(250)	Bettina	»	3.	November	1885	6 »
(300)	Geraldina	»	3.	November	1890	5 »
(350)	—	»	14.	Dezember	1892	2 »
(400)	—	»	15.	März	1895	$2^1/_4$ »

Der Photographie allein ist es zu verdanken, dass das 4. Hundert der Asteroiden in der überaus kurzen Zeit von $4^1/_4$ Jahren entdeckt wurde; dieselbe dürfte wohl dazu verhelfen, noch vor der Säkularfeier der Entdeckung der Ceres, bis zum 1. Jan. 1901, auch das fünfte Hundert auszufüllen.

Rechnet man alle Planetoiden, deren *Helligkeit* oder *Grösse* von 8,0 bis 8,9, von 9,0 bis 9,9, von 10,0 bis 10,9 u. s. w. reicht, beziehungsweise zur 8., 9. 10. u. s. w. *Grössenklasse*, und stellt dieselben wieder in Gruppen von je 50 zusammen, so findet man für die *mittleren Oppositionshelligkeiten der 400 ersten Planetoiden*:[1])

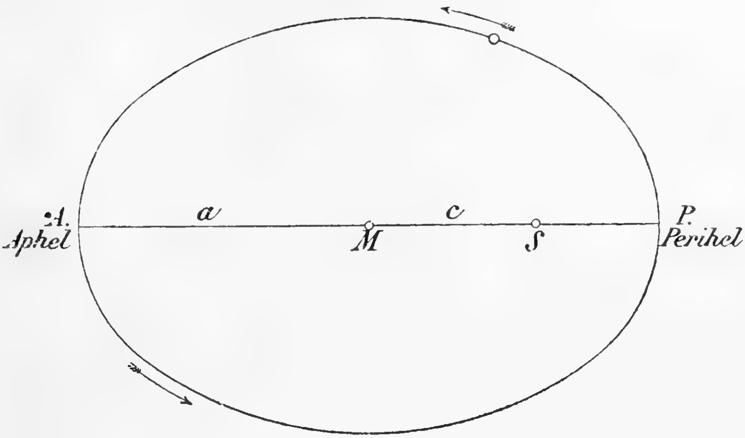
Asteroiden Nro.	Heller als 8	8	9	10	11	12	Schwächer als 12
1— 50	2	7	17	15	7	2	—
51—100	—	—	2	19	23	5	1
101—150	—	—	—	15	27	8	—
151—200	—	—	1	4	20	20	5
201—250	—	—	—	3	18	17	12
251—300	—	—	—	1	7	13	29
301—350	—	—	2	2	8	21	17
351—400	—	—	—	2	4	13	31
Summe	2	7	22	61	114	99	95

Die beiden hellsten Planetoiden sind Vesta von der 6,5. und Ceres von der 7,4. Grössenklasse.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der *Bahnen der Planetoiden.*

Nach dem ersten Kepler'schen Gesetz sind die Bahnen aller Planeten *Ellipsen*, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Bezeichnet in nebenstehender Figur M den Mittelpunkt, S den einen Brennpunkt, in dem die Sonne steht und PA die grosse Axe der Ellipse, so heisst $MP = MA = a$ die *halbe grosse Bahnaxe* oder die *mittlere Entfernung* des Planeten von der Sonne; $MS = c$ die *lineare Excentricität* und der Bruch $\frac{c}{a} = e$; das *Excentricitätsverhältniss*, die *numerische Excentricität* oder kurz die *Excentricität* der Bahnellipse.

[1]) Astronomischer Kalender 1896, Wien.



Im Scheitel P der grossen Axe befindet sich der Planet der Sonne am nächsten, im Scheitel A am weitesten von ihr entfernt, diese beiden Punkte heissen die *Sonnennähe* oder das *Perihel*, bezüglich *Sonnenferne* oder *Aphel* des Planeten, die zugehörigen Entfernungen, die *Perihel-* bezüglich *Apheldistanz*, sie sind a — c und a + c.

Für eine Kreisbahn ist die Excentricität e = o für die Parabel e = 1, dazwischen für e < 1 liegen die Ellipsen, diese weichen um so stärker vom Kreise ab, sind um so langgestreckter, je mehr sich e der 1 nähert.

Von den grossen Planeten hat *Venus* die kleinste Excentricität e = 0,007, weitaus die grösste der *Merkur* e = 0,2; die übrigen liegen zwischen 0,01 und 0,09; für die Erde ist e = 0,0167.

Die Excentricität der Bahnellipsen der *Kometen* ist bedeutend grösser. Für den periodischen *Tempel'schen Kometen* 1 (1867 II), Umlaufszeit 3,295 Jahre, ist e = 0,46239, für den *Halley'schen Kometen*, mit einer Umlaufszeit von 76,3 Jahren, ist e = 0,967; der erstere besitzt die kleinste, der letztere die grösste bei periodischen Kometen beobachtete Excentricität. Bei nicht periodischen Kometen nähert sich e der Einheit und ihre Bahn der Parabel.

Bei den Planetoiden treten grössere Differenzen auf zwischen den Excentricitäten als bei den grossen Planeten. Von den bis jetzt bekannten Asteroiden besitzt

die kleinste Exentricität (280) (Iclea) mit e = 0,0127,
» grösste » (353) » e = 0,35

Die letzere kommt der bei periodischen Kometen vorkommenden ziemlich nahe. Die Form der Bahnellipsen der Planetoiden ist daher sehr verschieden, von der beinahe kreisförmigen Bahn, bis zur lang gestreckten Ellipse.

Infolge der grossen Excentricität ist der Abstand eines solchen Himmelskörpers von der Sonne sehr veränderlich, für den oben erwähnten (353) z. B. beträgt

die Periheldistanz 36 Millionen Meilen,
die Apheldistanz 75 » »

also mehr als das doppelte der ersteren.

Die *kleinste* Periheldistanz besitzt die (301), nämlich 1,61 Erdbahnhalbmesser oder 32,2 Millionen Meilen, diese kommt der Sonne von allen Planetoiden am nächsten. Die Apheldistanz des Mars beträgt 1,666 Erdbahnhalbmesser oder 33,2 Millionen Meilen, es reicht also die Bahn dieses Planetoiden und damit der Asteroidengürtel auf der inneren Grenze beinahe *bis zur Apheldistanz des Planeten Mars.*

Auch die äussere Grenze des Gürtels wurde durch einen der neuen Planetoiden, (301), um etwas hinausgeschoben, er entfernt sich in seiner Sonnenferne bis auf 4,772 Erdbahnradien, oder 95 Millionen Meilen von der Sonne, also noch weiter als *Thule* (279), deren Apheldistanz 4,613 = 92 Millionen Meilen beträgt. Man kennt bereits 4 Asteroiden, welche nahezu dieselbe grösste Entfernung von der Sonne erreichen, nämlich ausser den 2 genannten noch (153) *Hilda* und (190) *Ismene.*

Es scheint dies darauf hinzudeuten, dass die *äusserste Grenze des Asteroidenringes* beiläufig bei 4,75 Erdbahnhalbmessern, oder bei 95 Millionen Meilen Abstand von der Sonne liegt, welche Grenze schon nahe an die *Jupiterbahn* reicht, deren Entfernung im Perihel von der Sonne 4,95 oder 99 Millionen Meilen beträgt.

Hieraus folgt, dass der Asteroidenring beinahe *die ganze Zone zwischen der Mars- und Jupiterbahn* erfüllt, somit eine Breite von 3,1 Erdbahnradien oder von 62 Millionen Meilen einnimmt; eine Zone, die doppelt so breit ist als die mittlere Entfernung des Planeten Mars von der Sonne.

Die *halben grossen Bahnaxen* oder die *mittleren Entfernungen* der verschiedenen Planetoiden von der Sonne liegen zwischen

a = 2,15 Erdbahnhalbmessern oder 43 Mill. Meilen: *Brucia* (323)
und a = 4,26 » » 85 » » *Thule* (279).

Die Differenz beträgt 2,1 Erdbahnradien oder 42 Millionen Meilen.

Der letztere Planetoid, *Thule,* kreist einsam, weit von den übrigen entfernt, um die Sonne.

Infolge dieser grossen Verschiedenheit der Bahnaxen, weichen auch die *Umlaufszeiten* der Planetoiden stark von einander ab. Während der innerste, die *Brucia*, die Sonne in 3,17 Jahren einmal umkreist, braucht der äusserste bis jetzt bekannte Asteroid, die *Thule,* 8,8 Jahre um einmal ihre Bahn zu durchlaufen.

Nach dem Gesetz von Titius beträgt die mittlere Entfernung des in der Lücke zwischen Mars und Jupiter fehlenden Planeten:

$$a = 0,4 + 2^3 \,.\, 0,3 = 2,8 \text{ Erdbahnhalbmesser.}$$

Die Differenz zwischen diesem Werth und den oben angegebenen Grenzwerthen des innersten und äussersten bekannten Planetoiden beträgt somit — 0,65, bezüglich + 1,46 Erdbahnhalbmesser. Die Abweichung vom *Titius-Bode'schen Gesetz* ist also sehr gross. Noch grösser wird diese Abweichung, wenn man den im Jahre 1846 entdeckten Planeten *Neptun*, den äussersten unseres Sonnensystems, in Betracht zieht. Nach der Titius'schen Reihe ergibt sich nämlich sein mittlerer Abstand von der Sonne:

$$a = 0,4 + 2^7 \,.\, 0,3 = 38,8 = 776 \text{ Millionen Meilen,}$$

während seine wirkliche mittlere Entfernung nur 30,056 Erdbahnradien, oder 601 Mill. Meilen beträgt. Die Differenz beträgt somit — 8,744 Erdbahnradien.

Von einer allgemeinen Gültigkeit des Titius'schen Gesetzes kann also keine Rede sein. Vielleicht mag dieses oder ein ähnliches Gesetz bei der Bildung des Planetensytems vorgewaltet haben, allein entweder ist der ursprüngliche Zustand nicht mehr der jetzige, oder es muss eine Formel aufgestellt werden, welche auf die Massen der Planeten und auf die Excentricitäten und Neigungen ihrer Bahnen Rücksicht nimmt.

Die Bahnellipsen der verschiedenen Asteroiden liegen in Ebenen, welche gegen die Ebene der Erdbahn, die *Ekliptik*, sehr verschiedene *Neigung* haben. Für die grossen Planeten ist diese Neigung gering, am grössten für Merkur, mit 7°0′ 7″,7, am kleinsten für Uranus, mit 0°46′ 20″,9. Alle grossen Planeten bewegen sich in der Nähe der Ekliptik, *innerhalb des Thierkreisgürtels,* der eine Zone von der Breite von je 8° zu beiden Seiten der Ekliptik rings um den Himmel bildet.

Bei den Asteroiden dagegen herrschen grosse Verschiedenheiten in den Neigungen der Bahnebenen; ein Theil derselben schweift weit über den Thierkreisgürtel hinaus. Die *grösste* Neigung besitzt (2), *Pallas* mit 34° 44′, dann folgen (265), *Anna*, mit 25° 47′, (372) mit 26° 34′ u. s. w. Die *kleinste* Neigung besitzt (20), *Massilia*, mit 0° 41′, dazwischen sind alle möglichen Neigungen vertreten, doch so, dass ganz kleine und ganz grosse Neigungen nur wenige vorkommen. *Newton* hat 1895 gezeigt, dass die *mittlere Bahnebene* der jetzt bekannten 400 Planetoiden zur Ebene der Jupiterbahn eine sehr geringe Neigung hat, nur 0°,43. Der Grund hierfür liegt in den säkulären Störungen Jupiters. Infolge dieser starken Neigungen hat die Zone, welche der Asteroidenring zu beiden Seiten der Ekliptik einnimmt, eine Breite von etwa 60 Millionen Meilen.

Die *aufsteigenden Knoten* der Planetoidenbahnen, d. h. die Punkte, in denen die Asteroiden die Ebene der Erdbahn, die Ekliptik durchsetzen, wenn sie von der südlichen auf die nördliche Halbkugel des Himmels übergehen, vertheilen sich rings um die Ekliptik herum, wenn auch nicht gleichförmig, ohne dass ein bestimmtes Gesetz erkennbar ist.

Die Bahnen der Asteroiden sind gegenseitig stark in einander verschlungen. In seiner Abhandlung «Ueber das System der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. Leipzig 1851», sprach *d'Arrest* das bestimmte Gesetz aus, dass die Bahn jedes der Asteroiden in andere Bahnen eingreife, oder also die verschiedenen Bahnen förmlich miteinander verkettet seien. Würde man diese Bahnen als körperliches Modell in Form von Drahtreifen darstellen, so würde die ganze Gruppe herausgehoben, wenn man einen dieser Reife herausheben wollte.

Der gewaltige Planet Jupiter, der sowohl dem Volumen als der Masse nach alle andern Planeten des Sonnensystems zusammengenommen überwiegt, übt auf die Bahnen der Planetoiden starke *Störungen* aus. Diese Störungen werden besonders gross für diejenigen Planetoiden, deren Umlaufszeit um die Sonne mit derjenigen Jupiters annähernd in einem einfachen Zahlverhältniss stehen, weil dann je nach einer bestimmten Anzahl von Umläufen, der Planetoid immer wieder in dieselbe Stellung zu Jupiter kommt, so dass die Störung längere Zeit hindurch immer in demselben Sinne erfolgt, worauf sie dann in den entgegengesetzten Sinn übergeht. Die Störungen sind um so stärker, je grösser die Neigung und die Excentricität der Bahn des gestärkten Körpers ist, der Betrag derselben kann unter Umständen so gross werden, dass sich ein Himmelskörper der Wahrnehmung lange Zeit entziehen kann, weil man ihn an einem Punkt des Himmels vermuthet, der von seiner wirklichen Stellung ziemlich weit entfernt ist.

Ein Beispiel hierfür bietet der am 1. Oktober 1877 von Watson entdeckte Planetoid (175) *Andromache*. Seine Umlaufszeit steht zu derjenigen Jupiters sehr nahe im Verhältniss 5 zu 9. Infolge der stark excentrischen Bahn muss dieser beträchtliche Störungen vom Jupiter erfahren, die etwa 200 Jahre lang sich immer in derselben Richtung summiren müssen und erst dann wieder in die umgekehrte Richtung übergehen. Die Folge davon war, dass dieser Planetoid verloren ging und erst durch die Photographie wieder aufgefunden wurde. *Berberich* konnte nachweisen, dass inzwischen beträchtliche Veränderungen in seinen Bahnelementen vorgegangen sein müssen.

Die Kleinheit der Planetoiden hat kaum bei einigen derselben direkte, bis auf die neueste Zeit sehr unsichere Messungen gestattet; so fand *Schröter* für den Durchmesser der Pallas 300, dagegen *W. Herschel* kaum 40 geographische Meilen. Von Beobachtungen der physischen Beschaffenheit ihrer Oberfläche ist keine Rede.

Infolge der Unsicherheit der direkten Messung bieten die *photometrischen* oder *Helligkeitsmessungen* die einzigen Anhaltspunkte zur Beurtheilung ihrer wahren Grösse. Die Idee, das Grössenverhältniss der Asteroiden aus ihrem scheinbaren Glanz abzuleiten, ging von *Olbers* aus und wurde von *Simon Stampfer* in seiner Abhandlung «Ueber die kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. Wien. Sitz. 7 v. 1851», weiter ausgeführt und sein Verfahren wird seither allgemein mit dem besten Erfolge angewendet.

Bei dieser Methode wird angenommen, dass alle Planeten annähernd dieselbe mittlere *Reflexionsfähigkeit* für das Sonnenlicht, dieselbe sog. *Albedo* besitzen. Dass diese Methode zu mehr oder wenigen falschen Resultaten führen musste, liegt auf der Hand und man war sich dessen auch bewusst.

Auf diese Weise fand man den Durchmesser von:

(1)	Ceres	382 km.	(6)	Hebe	167 km.
(2)	Pallas	304 »	(7)	Iris	167 »
(3)	Juno	192 »	(8)	Flora	105 »
(4)	Vesta	382 »	(9)	Metis	133 »
(5)	Asträa	101 »	(10)	Hygiea	201 » u. s. w.

Die 4 zuerst gefundenen Planetoiden sind weitaus die grössten. Erst im Jahr 1894 gelang es *Barnard* mit dem Riesenfernrohr der Lick-Sternwarte auf dem Mount Hamilton in Californien, dessen Objektivlinse einen Durchmesser von 92 cm. besitzt, durch direkte mikrometrische Messungen die Durchmesser der drei zuerst entdeckten Planetoiden zu bestimmen. Die definitiven Resultate sind:

Durchmesser	der	Ceres:	804 km.
»	»	Pallas:	486 km.
»	»	Vesta:	385 km.

Vesta ist also, obgleich um eine Grössenklasse heller als die 2 andern und überhaupt der hellste aller Asteroiden, bedeutend kleiner als Ceres und Pallas. Der aus diesen Messungen folgende Durchmesser der Vesta harmonirt vollkommen mit dem durch Helligkeitsmessungen gefundenen, dagegen weichen Pallas und besonders Ceres bedeutend davon ab. Hieraus folgt, dass die Reflexionsfähigkeit für das Licht bei den verschiedenen Planeten nicht nahezu gleich ist, wie man bisher anzunehmen geneigt war, sondern sehr verschieden, so dass der Schluss von ihrer Helligkeit zur Grösse stets als nur eine erste, meist sehr unsichere Näherung betrachtet werden kann.

Nebenbei sei hier bemerkt, dass die grössten Fernrohre, Refraktoren, der Neuzeit sich in Nordamerika befinden. Nebst dem oben erwähnten Refraktor auf der Lick-Sternwarte befindet sich, im Jahre 1895 aufgestellt, noch ein solcher auf dem Jerkes Observatorium in Wisconsin, dessen Objektivlinse 40 Zoll = 102 cm. Durchmesser besitzt, und ein ebenso grosser Refraktor soll auf dem Wilson Peak in Süd-Californien aufgestellt werden. Alle diese Riesenfernrohre verdanken ihr Dasein grossartigen Privatschenkungen. Der grösste Refraktor Europas befindet sich in Nizza mit 76 cm., Pulkowa und Greenwich mit je 75 cm., Wien mit 68 cm. Objektiv-Durchmesser u. s.w.

Eine Reihe von Asteroiden besitzen nach Helligkeitsschätzungen einen Durchmesser von 100 bis 200 km., aber weitaus der grösste Theil hat weniger als 100 km. Durchmesser. Die Oberfläche des Planetoiden *Kalypso*, (53), z. B., dessen Durchmesser etwa 50 km. beträgt, enthält nur 7850 Quadratkilometer, hat also nur etwa $^1/_5$ des Flächeninhaltes der Schweiz; ein Eisenbahnzug, der in einer Stunde 50 km. zurücklegt, würde dort in 3 Stunden die Reise um die Welt machen. Aus der Erde liessen sich mehr als 16 Millionen Kugeln von der Grösse der Kalypso bilden.

Die kleinsten bekannten Planetoiden von der 13.—15. Grösse besitzen Durchmesser, die wahrscheinlich nicht grösser sind als 10 bis 20 km. Bei weiterem Wachsen der optischen Instrumente müsste man fast auf Körner kosmischen Staubes stossen.

Die *Masse* der Asteroiden ist noch nicht bestimmbar gewesen, aber nach Schätzungen so gering, dass die Gesammtmasse aller überhaupt vorhandenen Planetoiden wahrscheinlich nicht $\frac{1}{3000}$ der Erdmasse ausmacht. Nach *Roszls* Schätzung (1895), der die Albedo der Vesta als mittlere Reflexionsfähigkeit, und die mittlere Dichte des Mars als Einheit annimmt, beträgt die Gesammtmasse der bis jetzt gefundenen Planetoiden $\frac{1}{40}$ der Masse unseres Mondes, die selbst nur $\frac{1}{80}$ der Erdmasse ist.

Wir kommen nun zu der Frage nach dem *Ursprung der Planetoiden.*

Wie schon erwähnt, stellte *Olbers in Bremen* bald nach der Entdeckung der ersten Asteroiden die Hypothese auf, diese kleinen Himmelskörper seien durch eine explosionsartige Zertrümmerung eines grösseren Planeten entstanden, dessen Bruchtheile nun als sehr kleine Planeten gesonderte Bahnen beschreiben.

Schon am 1. Juni 1802 schrieb nämlich Olbers an Bode (Berl. Jahrbuch 1805), man könne sich fragen, ob Ceres und Pallas immer so getrennt in friedlicher Nachbarschaft ihre jetzigen Bahnen durchlaufen haben, oder ob beide nur Trümmer eines ehemaligen grösseren Planeten seien, den irgend eine grosse Katastrophe zersprengte. Im September desselben Jahres sprach *J. Sigm. Gottfr. Huth,* Professor in Dorpat, dagegen die Ansicht aus (Berl. Jahrb. 1807), es komme ihm wahrscheinlicher vor, «dass diese Planetchen ebenso alt als alle übrigen seien, und dass die Planeten-Materie in der Schicht zwischen Mars und Jupiter, zur Zeit jener allgemeinen Abscheidung aus dem Himmels-Fluido, dort in viele kleinere Kugeln coagulirt sei, ja er würde sich gar nicht verwundern, wenn Ceres und Pallas mindestens noch 10 Mitplaneten erhielten.[1]) Zur Zeit fand die Hypothese von Olbers, welche ebenfalls noch weitere Trümmer vermuthen liess, mehr Anhänger, und er selbst, sowie einige Astronomen, liessen sich, wie früher schon erwähnt, bei ihrem weitern Suchen nach Planeten leiten

[1]) Wolf. Handbuch der Astronomie. 1893.

Als dann bei diesem systematischen Suchen Harding 1804 die *Juno* und Olbers 1807 die *Vesta* auffand, schien die Richtigkeit der Olbers'schen Hypothese erwiesen.

Olbers selbst äussert sich über seine Hypothese in einem an Bode gerichteten Brief vom 3. April 1807 u. a. folgenderweise: «Nach meiner Hypothese über die Asteroiden, deren Wahrheit oder Falschheit ich übrigens dahin gestellt sein lasse, und die ich nur dazu benutze, wozu Hypothesen überhaupt nützlich sein können, nämlich uns bei Beobachtungen zu leiten, habe ich, wie Ihnen bekannt ist, gefolgert, dass alle Asteroiden, deren es noch sehr viele geben mag, den nordwestlichen Theil des Gestirns der Jungfrau und den westlichen des Wallfisches passiren müssen. Regelmässig durchmustere ich also jeden Monat einmal einen mir mit allen seinen Sternen sehr bekannt gewordenen Theil desjenigen dieser beiden Gestirne, der gerade seiner Opposition am nächsten ist.» [1])

Noch *Lagrange* sprach sich im Jahre 1812 zu Gunsten der Olbers'schen Hypothese aus; als sich aber von der Mitte des Jahrhunderts an die Zahl der neuentdeckten Planetoiden rasch vermehrten, häuften sich die Gründe, die gegen die Olbers'sche Hypothese sprachen und auch die Rechnungen von Encke, Newcomb u. a. zeigten ihre Unhaltbarkeit; so dass dann allgemein die von *Huth* geäusserte Hypothese der Entstehung der Asteroiden im Sinne *Kants* zur Geltung kam.

Nach der *Kant-Laplace'schen Theorie von der Entstehung unseres Sonnensystems* befand sich im Urzustande an Stelle desselben ein ungeheurer Gasball, der weit über die Bahn des äussersten Planeten Neptun hinausreichte. Diese Gasmassen verdichteten sich im Innern und kamen durch irgend eine Ursache in Rotation; bei zunehmender Verdichtung wurde die Rotation des Kerns immer rascher, so dass infolge der Centrifugalkraft des rotirenden Balles einzelne Nebelringe sich von der Hauptmasse loslösten und nach und nach zu Planeten verdichteten, auf diese Weise entstanden zunächst die äussern, grossen Planeten. Man muss sich nun vorstellen, dass, nachdem der Planet Jupiter sich aus einem Nebelring durch Verdichtung desselben gebildet hatte, sich bei weiterem Zusammenziehen des Centralnebels ein Nebelring von geringer Masse von der Urmasse abtrennte und die Stelle des heutigen Asteroidenringes einnahm. Dieser zerfiel unter der mächtigen Anziehung des Jupiters in viele einzelne Stücke, die sich

[1]) Mädler. Der Wunderbau des Weltalls.

in der Folge verdichteten und welche wir jetzt in verdichtetem Zustand als Planetoiden wieder finden.

Diese Erklärung hat nichts den Naturgesetzen Widersprechendes und setzt keine so ungeheure Kraft voraus, wie sie die Zertrümmerung eines fertigen grösseren Planeten erfordern würde. Wir haben es also bei der Bildung der Asteroiden mit keinem Zerspringen, keiner Katastrophe eines fertigen Weltkörpers zu thun, sondern mit einer langsamen, gesetzmässigen Entwicklung aus dem Urnebel, wie bei den übrigen Planeten.

Es möge nun noch die Frage nach der *Bewohnbarkeit* der Asteroiden durch lebende Wesen betrachtet werden.

Die Bedingungen, unter denen ein Planet von lebenden Organismen bewohnt sein kann, ähnlich wie unsere Erde, und von derselben chemischen Zusammensetzung, nämlich vorherrschend aus *Kohlenstoffverbindungen*, sind im Wesentlichen folgende:

1) Eine Atmosphäre von hinreichender Dichte, die Sauerstoff oder Kohlensäure enthält.

2) An der Oberfläche flüssiges Wasser und Kohlenstoff.

3) Eine Temperatur die etwa zwischen 0° und 50° C. liegt.

4) Eine Oberflächendichte, welche gleich der 2—3fachen Dichte des Wassers ist.

Nun gehören die Planetoiden einer viel älteren Bildungsperiode an als unsere Erde, ausserdem sind sie viel kleiner als diese, sie haber daher die einzelnen Entwicklungsstufen der Planeten viel schneller durchgemacht als die Erde, mit andern Worten, sie haben viel schneller gelebt als ein grosser Planet. Die Asteroiden werden daher wohl schon längst auf jener Entwicklungsstufe angelangt sein, wo die Atmosphäre und alles Wasser sich ins Innere dieser Körper zurückgezogen und sich dort chemisch mit den Gesteinsmassen verbunden haben, so dass diese für die Oberfläche verloren sind, sie besitzen daher kein Wasser und keine merkliche Atmosphäre, wie dies auch bei unserem Mond der Fall ist. Wegen ihrer Kleinheit und geringen Atmosphäre haben die Planetoiden ferner wohl längst durch Strahlung in den kalten Weltraum ihre Eigenwärme verloren und da sie ausserdem von der Sonne nur eine geringe Wärmemenge erhalten, so sind sie jedenfalls schon längst bis tief unter den Gefrierpunkt erkaltet, so dass aus allen diesen Gründen ein organisches Leben in unserem Sinne auf denselben nicht möglich ist.

Die Asteroiden kreisen als todte, starre Gesteinsmassen, ohne jedes organische Leben an ihrer Oberfläche um die Sonne, ebenso wie unser Erdmond und wie es auch in sehr später Zukunft einst mit unserer Erde der Fall sein wird.

Auf die Frage nach dem Zweck der Entdeckung weiterer neuer Planetoiden lässt sich Folgendes erwidern:

Der Entdeckung der Asteroiden verdankt die Astronomie, besonders die physische, bemerkenswerthe Fortschritte. Infolge der beträchtlichen Störungen durch Jupiter haben einige derselben so eigenthümliche Bahnen erhalten, dass sie vorzüglich geeignet sind, zur genauern Bestimmung der *Jupitermasse*.

Es gilt dies vor allen für den schon früher in diesem Sinne erwähnten Planetoiden (175), Andromache, dessen Umlaufszeit zu derjenigen Jupiters nahe im Verhältniss von 5 zu 9 steht. Infolge dieser Einwirkung ist die Umlaufszeit desselben in den letzten 20 Jahren um volle 18 Tage länger geworden und wird noch eine Zeit lang wachsen, um dann wieder abzunehmen. Dieser kleine Planet hat also ein veränderliches Jahr.

Gegenwärtig ist die Jupitermasse etwa auf ihren 10,000. Theil genau bekannt, nämlich gleich $\frac{1}{1047.9}$ Sonnenmassen oder 308 Erdmassen. Sie spielt aber in den Berechnungen, besonders der *periodischen Kometen*, die wegen ihren äusserst geringen Massen besonders starke Störungen erleiden, eine so bedeutende Rolle, dass man jede Gelegenheit ergreifen muss, durch die man sie noch schärfer bestimmen kann.

Die Berechnung der Asteroidenbahnen boten auch der Theorie neue und verschiedenartige Probleme dar und dienten gleichzeitig auch wieder als Prüfstein für die mathematischen Entwicklungen. Auch die praktische Astronomie verdankt ihnen vielfach neue Ideen.

Die Entdeckung weiterer Glieder dieser Gruppe von kleinen Himmelskörpern, welche den Asteroidenring bilden, dient zur genauern Kenntniss unseres Sonnensystems.

B e r n, im Januar 1896.

C. Wagner.

Eingereicht den 5. August 1895.

Ueber die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen.

(Fortsetzung.)

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich die beiden folgenden allgemeinen Formeln gegeben:

$$\text{I.}\quad \int_0^\pi \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \overset{0}{J}(nx) + \binom{n}{1} \overset{0}{J}((n-2)x) + \binom{n}{2} . \overset{0}{J}((n-4)x) + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \overset{0}{J}(x) \right\}$$

für jedes positive ganze ungerade n;

$$\text{II.}\quad \int_0^\pi \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \overset{0}{J}(o) + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \overset{0}{J}(2x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2} \overset{0}{J}(4x) + \cdots + \binom{n}{o} \overset{0}{J}(nx) \right\}$$

für jedes positive ganze gerade n.

Alle in diesen beiden Relationen vorkommenden Bessel'schen J-Funktionen haben denselben Index Null, dagegen sind ihre Argumente ungleich, wenn auch stets Vielfache desselben x. Es handelt sich nun darum, Funktionen mit verschiedenen Indices, aber mit gleichen Argumenten in vorstehende Gleichungen I und II einzuführen.

[1]) Berner Mittheilungen 1895. Seite 115.

Bessel hat für die Addition der Argumente bei der J-Funktion folgende allgemeine Formel gegeben: [1])

$$\overset{m}{J}(u+v)=\left(1+\frac{v}{u}\right)^m\left[\overset{m}{J}(u)-v\left(1+\frac{v}{2u}\right)\frac{\overset{m+1}{J}(u)}{1!}+v^2\left(1+\frac{v}{2u}\right)^2\frac{2\overset{m+2}{J}(u)}{2!}+\cdots\right];$$

für den Spezialfall $m=o$ lautet dieselbe

$$\overset{0}{J}(u+v)=\left[\overset{0}{J}(u)-v\left(1+\frac{v}{2u}\right)\frac{\overset{1}{J}(u)}{1!}+v^2\left(1+\frac{v}{2u}\right)^2\frac{\overset{2}{J}(u)}{2!}+\cdots\right],$$

welche wir nun benutzen wollen.

Mit Berücksichtigung derselben ergibt sich folgendes:

$$\overset{0}{J}(nx)=\overset{0}{J}(x+(n-1)x)=\overset{0}{J}(x)-(n-1)x\left(1+\frac{(n-1)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}+$$
$$\left\{(n-1)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-1)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}+\cdots$$
$$=\overset{0}{J}(x)-\frac{(n+1)(n-1)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}+\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^2x^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}+\cdots$$

$$\overset{0}{J}((n-2)x)=\overset{0}{J}(x+(n-3)x)=\overset{0}{J}(x)-(n-3)x\left(1+\frac{(n-3)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}$$
$$+\left\{(n-3)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-3)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}+\cdots$$
$$=\overset{0}{J}(x)-\frac{(n-1)(n-3)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}+\left\{\frac{(n-1)(n-3)}{2}\right\}^2x^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}+\cdots$$

$$\overset{0}{J}((n-4)x)=\overset{0}{J}(x+(n-5)x)=\overset{0}{J}(x)-(n-5)x\left(1+\frac{(n-5)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}$$
$$+\left\{(n-5)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-5)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}+\cdots$$
$$=\overset{0}{J}(x)-\frac{(n-3)(n-5)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}+\left\{\frac{(n-3)(n-5)}{2}\right\}^2x^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}+\cdots$$

. . . .
. . . .

[1]) Bessel: Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1824.

$$\overset{0}{J}(5\,x) = \overset{0}{J}(x + 4x) = \overset{0}{J}(x) - 4\,x\left(1 + \frac{4\,x}{2\,x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1\,!} + (4\,x)^2\left(1 + \frac{4\,x}{2\,x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2\,!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{6 \cdot 4 \cdot x}{2}\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1\,!} + \left(\frac{6 \cdot 4 \cdot x}{2}\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2\,!} \mp \ldots.$$

$$\overset{0}{J}(4\,x) = \overset{0}{J}(x + 3x) = \overset{0}{J}(x) - 3x\left(1 + \frac{3\,x}{2\,x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1\,!} + (3\,x)^2\left(1 + \frac{3\,x}{2\,x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2\,!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{5 \cdot 3}{2}\,x\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1\,!} + \left(\frac{5 \cdot 3}{2}\,x\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$\overset{0}{J}(3\,x) = \overset{0}{J}(x + 2x) = \overset{0}{J}(x) - 2x\left(1 + \frac{2\,x}{2\,x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1\,!} + (2\,x)^2\left(1 + \frac{2\,x}{2\,x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2\,!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{4 \cdot 2}{2}\,x\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1\,!} + \left(\frac{4 \cdot 2\,x}{2}\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2\,!} \mp \ldots.$$

$$\overset{0}{J}\,(2\,x) = \overset{0}{J}\,(x + x) = \overset{0}{J}(x) - x\left(1 + \frac{x}{2\,x}\right)\frac{\overset{1}{J}\,(x)}{1\,!} + x^2\left(1 + \frac{x}{2\,x}\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2\,!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \left(\frac{3 \cdot 1}{2}\,x\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1\,!} + \left(\frac{3 \cdot 1}{2}\,x\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2\,!} \mp \ldots.$$

$$\overset{0}{J}(x) = \overset{0}{J}(x).$$

Unter der Voraussetzung

$$n = \text{einer pos. ganzen ungeraden Zahl}$$

erhält man somit für das verlangte Integral den Werth:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I^a.}\quad \int_0^{\pi} \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \Bigg(& \left[1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right] \overset{0}{J}(x) \\
& - \left[\frac{(n+1)(n-1)}{2} + \binom{n}{1} \frac{(n-1)(n-3)}{2} + \binom{n}{2} \frac{(n-3)(n-5)}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}-1} \frac{4 \cdot 2}{2} \right] x \, \frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} \\
& + \left[\left\{ \frac{(n+1)(n-1)}{2} \right\}^2 + \binom{n}{1} \left\{ \frac{(n-1)(n-3)}{2} \right\}^2 + \binom{n}{2} \left\{ \frac{(n-3)(n-5)}{2} \right\}^2 + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}-1} \left(\frac{4 \cdot 2}{2} \right)^2 \right] x^2 \, \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \\
& \mp \cdots\cdots\cdots \\
& + (-1)^r \left[\left\{ \frac{(n+1)(n-1)}{2} \right\}^r + \binom{n}{1} \left\{ \frac{(n-1)(n-3)}{2} \right\}^r + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}-1} \left(\frac{4 \cdot 2}{2} \right)^r \right] x^r \, \frac{\overset{r}{J}(x)}{r!} \\
& \pm \cdots\cdots \Bigg).
\end{aligned}
$$

Hiernach wird z. B. für $n = 9$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos^9 (x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{256} \Big\{ & (1 + 9 + 36 + 84 + 126)\, \overset{0}{J}(x) \\
& - (40 + 9 \cdot 24 + 36 \cdot 12 + 84 \cdot 4)\, x \, \frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + ((40)^2 + 9 \cdot (24)^2 + 36\,(12)^2 + 84 \cdot (4^2))\, x^2 \, \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots \Big\}.
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung

$n =$ einer positiven ganzen geraden Zahl

entsteht in gleicher Weise:

$$\text{II}^{a.}\quad \int_0^\pi \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}}\left\{\left[\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right] + \right.$$

$$+\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}+\binom{n}{\frac{n}{2}-2}+\cdots+\binom{n}{0}\right]\overset{0}{J}(x) -$$

$$-\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}\frac{3\cdot 1}{2}+\binom{n}{\frac{n}{2}-2}\frac{5\cdot 3}{2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\binom{n}{0}\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right] x\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}$$

$$+\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^2+\binom{n}{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\binom{n}{0}\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^2\right] x^2\,\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}$$

$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^r\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^r+\binom{n}{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^r+\right.$$

$$\left.\cdots+\binom{n}{0}\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^r\right] x^r\,\frac{\overset{r}{J}(x)}{r!}$$

$$\left.\mp\;\cdots\cdots\cdots\right\},$$

so z. B. für $n = 6$:

$$\int_0^\pi \cos^6(x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{32}\left\{10 + \left[15+6+1\right]\overset{0}{J}(x) - \left[15\cdot\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + 6\cdot\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right) + 1\cdot\left(\frac{7\cdot 5}{2}\right)\right] x\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} +$$

$$\left.+\left[15\cdot\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{7\cdot 5}{2}\right)^2\right] x^2\,\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} + \cdots\right\}.$$

Unsere weitere Aufgabe ist nun, die in den Relationen Iª und IIª vorkommenden J-Funktionen sämmtlich durch die $\overset{0}{J}$- und $\overset{1}{J}$-Funktion zu ersetzen.

Der Einfachheit wegen schreiben wir die Gleichungen Iª und IIª in der Form:

$$\text{I}^{\text{b}}.\quad \int_0^\pi \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \Big\{ \alpha_0 \overset{0}{J}(x) - \alpha_1 \frac{x}{1!} \overset{1}{J}(x) + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} \overset{2}{J}(x) \mp \cdots + (-1)^r \alpha_r \frac{x^r}{r!} \overset{r}{J}(x) \pm \cdots \Big\}$$

$$\text{II}^{\text{b}}.\quad \int_0^\pi \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \Big\{ \beta + \beta_0 \overset{0}{J}(x) - \beta_1 \frac{x}{1!} \overset{1}{J}(x) + \beta_2 \frac{x^2}{2!} \overset{2}{J}(x) \mp \cdots + (-1)^r \beta_r \frac{x^r}{r!} \overset{r}{J}(x) \pm \cdots \Big\},$$

wobei die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots$ die entsprechenden in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke ersetzen sollen.

Bekanntlich kann man durch zwei gegebene J-Funktionen alle übrigen ausdrücken, analog der bereits von Bessel gefundenen Reduktionsformel[1])

$$\overset{v}{J}(x) = \frac{2(v-1)}{x} \overset{v-1}{J}(x) - \overset{v-2}{J}(x),$$

oder auch, wenn man statt v die Grösse v + 1 einführt

$$\frac{2v}{x} \overset{v}{J}(x) = \overset{v-1}{J}(x) + \overset{v+1}{J}(x).$$

Mit Hilfe ersterer kann $\overset{v}{J}(x)$ auf $\overset{v-1}{J}(x)$ und $\overset{v-2}{J}(x)$ reduzirt werden. Drückt man alsdann mittelst der gleichen Formel $\overset{v-1}{J}(x)$ durch $\overset{v-2}{J}(x)$ und $\overset{v-3}{J}(x)$ aus, und setzt diesen Werth in obige Gleichung ein, so erscheint $\overset{v}{J}(x)$ durch $\overset{v-2}{J}(x)$ und $\overset{v-3}{J}(x)$ bestimmt. Durch m-malige Wiederholung

[1]) Ebendaselbst.

dieses Verfahrens kann schliesslich $\overset{v}{J}(x)$ durch $\overset{v-m}{J}(x)$ und $\overset{v-m-1}{J}(x)$ ausgedrückt werden, was zuerst Lommel bekannt gab. Seine Formel lautet[1]):

$$\overset{v}{J}(x) = \overset{v-m}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2v-2m+2p)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}} -$$

$$- \overset{v-m-1}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2v-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{x^{m-1-2p}}.$$

Setzt man hierin $v = m + 1$,

so entsteht:

$$\overset{m+1}{J}(x) = \overset{1}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}} -$$

$$- \overset{0}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{m-1-2p|2}}{x^{m-1-2p}},$$

wo die Ausdrücke hinter den Summenzeichen die allgemeinen Glieder zweier endlichen Reihen vorstellen, deren einzelne Glieder daraus hervorgehen, wenn man statt p der Reihe nach 0, 1, 2 . . . . und alle positiven ganzen Zahlen einsetzt; in der ersten Reihe braucht man p nicht grösser als $\frac{m}{2}$ zu nehmen, weil für grössere Werthe von p der Faktor $(m-p)^{p|-1}$ und damit alle folgenden Glieder der Reihe Null werden; ebenso ist der grösste Werth für p in der zweiten Reihe gleich $\frac{m-1}{2}$. Setzt man in dieser Gleichung nach und nach $m = 1, 2, 3, \ldots . (r-1) \ldots$, so erhält man die einzelnen Funktionen $\overset{2}{J}(x), \overset{3}{J}(x), \overset{4}{J}(x) \ldots \overset{r}{J}(x) \ldots$ ausgedrückt durch die Funktionen $\overset{0}{J}(x)$ und $\overset{1}{J}(x)$.

Wir schreiben:

$$\overset{2}{J}(x) = A_1 \overset{1}{J}(x) - B_1 \overset{0}{J}(x)$$

$$\overset{3}{J}(x) = A_2 \overset{1}{J}(x) - B_2 \overset{0}{J}(x)$$

. . . .

$$\overset{r}{J}(x) = A_{r-1} \overset{1}{J}(x) - B_{r-1} \overset{0}{J}(x),$$

wo:

$$A_1 = \sum (-1)^p \frac{(1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{1-2p|2}}{x^{1-2p}};$$

$$A_2 = \sum (-1)^p \frac{(2-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{2-2p|2}}{x^{2-2p}}$$

. . . .

[1]) Lommel: «Studien über die Bessel'schen Funktionen.» Leipzig, 1868. Seite 3.

$$A_{r-1} = \sum (-1)^p \frac{(r-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{r-1-2p|2}}{x^{r-1-2p}} \ldots\ldots$$

und

$$B_1 = \sum (-1)^p \frac{(1-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{1-1-2p|2}}{x^{1-1-2p}},$$

$$B_2 = \sum (-1)^p \frac{(2-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{2-1-2p|2}}{x^{2-1-2p}}$$

. . . .

$$B_{r-1} = \sum (-1)^p \frac{(r-1-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{r-1-1-2p|2}}{x^{r-1-1-2p}} \ldots\ldots \text{ ist.}$$

Mit Berücksichtigung dieser Substitutionen erhalten wir für unsere beiden Integrale, wenn wir die in Gleichung I^b und II^b angegebenen Coeffizienten gehörig beobachten, schliesslich die Formeln:

$$I^c. \int_0^\pi \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \Bigg\{ \Bigg[\alpha_0 - \alpha_2 B_1 \frac{x^2}{2!} + \alpha_3 B_2 \frac{x^3}{3!} \mp \ldots + (-1)^{r+1} \alpha_r B_{r-1} \frac{x^r}{r!} \mp \ldots \Bigg] \overset{0}{J}(x) + \Bigg[-\alpha_1 \frac{x}{1!} + \alpha_2 A_1 \frac{x^2}{2!} - \alpha_3 A_2 \frac{x^3}{3!} \pm \ldots + (-1)^r \alpha_r A_{r-1} \frac{x^r}{r!} \mp \ldots \Bigg] \overset{1}{J}(x) \Bigg\};$$

$$II^c. \int_0^\pi \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \Bigg\{ \beta + \Bigg[\beta^0 - \beta_2 B_1 \frac{x^2}{2!} + \beta_3 B_2 \frac{x^3}{3!} \mp \ldots + (-1)^{r+1} \beta_r B_{r-1} \frac{x^r}{r!} \pm \ldots \Bigg] \overset{0}{J}(x) + \Bigg[-\beta_1 \frac{x}{1!} + \beta_2 A_1 \frac{x^2}{2!} - \beta_3 A_2 \frac{x^3}{3!} \pm \ldots + (-1)^r \beta_r A_{r-1} \frac{x^r}{r!} + \ldots \Bigg] \overset{1}{J}(x) \Bigg\}.$$

J. H. Graf.

Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli.

Festgabe der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft an die Zürcherische Naturforschende Gesellschaft anlässlich der Feier des 150-jährigen Bestehens der Letzteren im August 1896.

Der Briefwechsel der beiden grossen Mathematiker wurde eingeleitet nach dem Besuche Steiner's in Bern 1843 und beginnt mit einem Brief Steiner's an den gemeinschaftlichen Freund Steiner's und Schläfli's, den Professor der Philosophie *Ris* in Bern. Der Brief ist ohne Datum, aber sehr wahrscheinlich vom August 1848 [1]) und geschrieben aus Rippoldsau, wo Steiner zum Kurgebrauch sich aufhielt. Der Brief ist nur im Concept von Steiner's Hand vorhanden und wurde von mir aus drei andern Concepten zum einheitlichen Ganzen zusammengefasst.

1848. Steiner an Ris (Schläfli).

Verehrter Freund!

«Das ist e *seltsame* Brief; es ist seit länger als Jahr und Tag «der 3te den ich schreibe, aber vor meiner Abreise von Berlin nahm «ich mir vor, von hier aus einige Zeilen an Sie zu richten — ich «eile mein Gelübde zu halten, ehe ich ganz matt gewässert bin.

«Aus Ihren Berichten — für deren freundliche Zusendung ich «Ihnen bestens danke — habe ich ersehen, dass Sie in fortgesetzter «Thätigkeit für die Wissenschaft sind und dass Sie auch Schläfli zu ani«miren wissen. Er hat einige nette Sachen gemacht, aber mit seiner «grossen Kraft könnte er noch weit mehr leisten, wenn er bei guter

[1]) Siehe eine bezügliche Stelle in Steiner's Brief vom 31. Juli 1851.

«Stimmung wäre. Seine Versetzung an die Universität ist wohl nicht «erfolgt, weil die Zeitumstände zu ungünstig waren. Es thut mir «leid! —

«Mein Anliegen an Sie wär' öppe das: Den Thuner Mathematiker «zu veranlassen (wofern Sie es für geeignet erachten), sich mit nach«stehenden Sätzen und Aufgaben zu befassen, welche mir von meinen «letzten Bemühungen (während des Revolutions-Gewühls) noch halb «unverdaut im Magen sitzen.

«Eine Curve 4ten Grads C^4 und ein Kegelschnitt K^2 können ein«ander in 4 Punkten berühren.

«1. «Wird in einer Curve C^4 ein Punkt a angenommen, so «gibt es im Allgemeinen **63** Kegelschnitte K^2, welche dieselbe in «a und ausserdem in noch irgend drei andern Punkten berühren.» «(Mein Beweis ist schwach und unsicher.)

«Im weitern Verfolg dieses Satzes wurde ich auf folgende Dio«phantische Aufg. geführt:

«2. «Man denke sich beliebig liegende Punkte; ihre unbestimmte «Anzahl sei $=$ x. Von welcher Form muss die Zahl x sein, damit «die Punkte den Forderungen genügen:

«*a)* dass sie sich zu 3 und **3** so zu Dreiecken E_3 verbinden «lassen, dass je 2 Punkte, die man beliebig wählt, allemal «Ecken *eines*, aber *nur eines einzigen* Dreiecks E_3 sind;

«*b)* dass je 3 Punkte, die man wählt, Ecken eines, aber nur «eines Vierecks E_4 sind, wobei jedoch von den 4 Ecken «jedes E_4 keine drei die Ecken eines der vorigen (a) Drei«ecke E_3 sein dürfen;

«*c)* dass wenn man 4 Punkte wählt, dieselben Ecken eines Fünf«ecks E_5 sind, und dessen fünfte Ecke nothwendig bestim«men, aber es sollen von den fünf Ecken jedes E_5 weder 4 «die Ecken eines der vorigen E_4, noch 3 die Ecken eines «der vorigen E_3 sein;

«*d)* dass sie sich ebenso zu Sechsecken E_6 verbinden lassen, «aber dass je fünf Ecken jedes E_6 nur zu einem einzigen «E_6 gehören, und dass keine 5, 4, 3 Ecken eines dieser «E_6 zugleich die Ecken eines der vorhergehenden E_5, E_4, «E_3 sein dürfen, und eben so für E_7, E_8 . . . .

«Wie gross ist dabei die Anzahl der E_3, E_4, E_5, E_6, ... ?»

«Ich fand: Für die Anzahl der Dreiecke $E_3 = \frac{x\,(x-1)}{2 \cdot 3}$. Ein «natürlicher Grund bedingt, dass x ungerad, und daher eine Zahl von «einer der zwei Formen

«$6n + 1$ oder $6n + 3$ sein muss.

«Die Zahl der E_4 ist $= \frac{x(x-1)(x-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Dies verbunden mit dem «Vorigen, bedingt für x die vier Formen:

«$12n + 1$; $12n + 3$; $12n + 7$; $12n + 9$.

«Die kleinste Anzahl Punkte, welche diesen beiden Fällen genügt, «ist $x = 7$, und giebt 7 E_3 und 7 E_4.

«Ich hoffe und erwarte, Herr Schläfli werde das weitere, das «allgemeine Gesetz, allein bewältigen.

«Beide Sätze (1.) und (2.) haben Bezug auf die 28 Doppeltan-«genten dt der Curve C_4. Diese 28 dt gruppiren sich zu 12 und 12 «in 63 Systeme, wovon jedes die nämlichen bestimmten Eigenschaften «hat. — Wenn es Herrn Schläfli gelingt, diesen 28 dt mit der Rech-«nung beizukommen, so wird er auch finden, dass ihre 56 Berührungs-«punkte zu 4 und 4 in Geraden liegen; — wie oft? und welche Lage «haben diese Geraden gegen einander?[1])

«Wenn der begabte Mathematiker aufgelegt ist, so kann er sich «auch an nachfolgenden Sätzen üben, mit deren Anfang wir uns in «Rom gemeinschaftlich beschäftigt haben.

«Erklärung: Legt man aus einem beliebigen Punkte P Tan-«genten an eine Curve n^{ten} Grads C^n, so liegen die $n(n-1)$ Berührungs-«punkte in einer Curve von $n-1^{ten}$ Grads C^{n-1}; an diese aus P wie-«derum Tangenten, liegen die $(n-1)(n-2)$ Berührungspunkte in einer «Curve C^{n-2}, an diese wieder Tangenten, giebt C^{n-3}; u. s. w. Diese «neuen Curven C^{n-1}, C^{n-2}, ... C^{n-x}, ..., C^2, C^1 heissen (bei «mir) nach der Reihe die 1^{te}, 2^{te} . . . . . x^{te}, ..., $n-2^{te}$, $n-1^{te}$ «Polare des Punktes P in Bezug auf die Basis C^n.

I. «Bewegt sich der Pol P in einer gegebenen Curve C^r, so ist «die Enveloppe seiner x^{ten} Polare, C^{n-x}, eine Curve vom

«$r(r + 2x-3)(n-x)^{ten}$ Grad.»

---

[1]) Die Aufgabe wurde von Schläfli nicht gelöst, vergl. Brief Steiner an Schläfli vom 15. Dezember 1850. Nach der gleichen Quelle besuchte Steiner Schläfli in Bern im Herbst 1850 anlässlich einer Reise nach Wien.

Der Satz, dass die 56 Berührungspunkte der dt zu 4 und 4 in Geraden liegen, ist falsch. Immerhin ist es möglich, dass Steiner, als er den Brief schrieb, an seine Richtigkeit glaubte. Er fehlt in der gedruckten Arbeit über die dt der C_4. (Bemerkung von H. Prof. Dr. C. F. Geiser.)

II. «Hat die x^{te} Polare eines Punktes P einen Doppelpunkt Q, «so hat umgekehrt die $n-x-1^{te}$ Polare von Q jenen Punkt P zum «Doppelpunkt.»

III. «Der Ort des Punktes P, dessen 1^{te} Polare, C^{n-1}, einen Dop-«pelpunkt Q hat, ist eine Curve 𝔓 vom $3\,(n-2)^2{}_{ten}$ Grad; und der «Ort von Q ist eine Curve 𝔔 vom $3\,(n-2)^{ten}$ Grad; der Ort der Geraden «PQ ist eine Curve 𝔎 von der 3 (n—1) (n—2) Klasse und von der-«selben Klasse ist auch die Curve 𝔓.»[1])

In einem 2^{ten} Concept spricht Steiner die Absicht aus, nach Beendigung seiner Cur in Rippoldsau, wohin er Ende Juli 1848 gekommen ist, nach der Schweiz zu reisen, wenn nicht sein Bruder *Hans Steiner* der aus Amerika in Utzenstorf zu Besuch sei, schon früher zurückkehre und ihn in Rippoldsau besuche. —

1850. Schläfli an Steiner.

Herr Professor!

Sie werden sich wohl mit mir freuen, dass ich jetzt etwas gearbeitet habe, das zu publiciren ich mich nicht schäme. Es ist die Theorie der Elimination zwischen algebraischen Gleichungen im allgemeinsten Sinne. Zum gegebenen System von n höhern Gleichungen mit n Unbekannten nehme ich noch eine lineare Gleichung mit litteralen [unbestimmten] Coefficienten a, b, c... hinzu und zeige, wie man auf diesem Wege, ohne je mit fremden Faktoren die Rechnung zu belästigen, zur ächten Resultante gelangen kann. Ist alles Uebrige numerisch gegeben, so muss diese Resultante in Faktoren zerlegbar sein, welche alle in Beziehung auf a, b, c,... linear sind. In jedem einzelnen dieser linearen Polynome sind dann die Coefficienten von a, b, c... die zu *einer* Lösung gehörenden Werte der Unbekannten.

Ich beleuchte dann die von *Hesse* in seiner bekannten Abhandlung über die Resultante dreier quadratischer Gleichungen gegebene Bedeutung über ein allgemeines Eliminationsverfahren und zeige, dass dieses nicht zum Ziele führen kann. Ich untersuche ferner die Eigenschaften der Resultante eines Systems algebraischer Gleichungen überhaupt und finde eine Reihe von Sätzen, von denen die bekannten Sätze *Jakobi's* über die Determinante sich als spezielle Fälle ergeben. Ich gehe in mehrere besondere Fälle ein, die immer noch von beträchtlicher relativer Allgemeinheit sind, und unterwerfe namentlich die Resultante der acht abgeleiteten Gleichungen eines vierschichtig

[1]) Schläfli hat es Steiner etwas entgelten lassen, dass er die Aufgaben nicht ihm direkt zugesandt hat.

linearen Polynoms mit je zwei Variabeln in jeder Schicht und mit 16 Coefficienten einer genauen und ausführlichen Untersuchung, wobei mehrere schon an sich interessante Hülfssätze gebraucht werden. Diese Resultante erreicht den 24. Grad und wird zuletzt als ein Aggregat von Produkten von vier vollständigen Hyperdeterminanten dargestellt, welche resp. vom 2., 6., 8. und 12. Grade sind. *Cayley* hatte [Crelle XXX] die Resultante als vom 6. Grade angegeben. Ich zeige aufs Bestimmteste, dass sie nothwendig rom 24. Grade ist. Endlich behandle ich die Construction der *reciproken* oder *Classengleichung* zu einer ihrem Grade nach freigegebenen algebraischen Gleichung im allgemeinsten Sinne, und zeige, wie die Coefficienten der Classengleichung durch eine Art von Differentiation aus einander abgeleitet werden können, so dass der schwierigste Teil der Aufgabe nur auf die Berechnung eines einzigen Coefficienten in Funktion der ursprünglichen Elemente zurückgeführt ist, was auf die Berechnung der Resultante der abgeleiteten Gleichungen des ursprünglichen Polynoms, nachdem man darin eine Variable gleich Null gesetzt hat, hinauskömmt. Hievon mache ich eine Anwendung auf Flächen und Curven und insbesondere auf die Curve dritten Grades. Als Anhang teile ich noch jenen zur Determinantentheorie gehörenden allgemeinen Satz mit, von dem ich Ihnen schon gesprochen habe. Das Manuscript zählt 16 Bogen und mag etwa 6 Druckbogen geben. Ich war bereits im Begriffe dasselbe abzusenden, und erkundigte mich noch bei *Bernhard Studer*[1]) über die Art, wie dieses geschehen könnte. Er hielt es für gewagt, beim gegenwärtigen Kriegslärm eine Arbeit an die Wiener Academie zu schicken: die würde wahrscheinlich unbeachtet liegen bleiben. Es sei auch noch ungewiss, ob die Akademie sich nicht auflösen werde. Anfangs erbötig, an Herrn *Boué*[2]) in Wien, ein ihm befreundetes Mitglied der Akademie, welcher zugleich Burger von Burgdorf ist, zu schreiben und gesonnen, die Antwort, die etwa in 14 Tagen erfolgen würde, abzuwarten, fand er bald einen anderen Weg für besser, den ich aber lieber nicht befolge, weil er mich nach einer Seite hin verpflichten würde, wo ich durchaus keine Verbindlichkeit eingehen mag, Bevor ich nun das Manuscript absende, möchte ich vor allem aus

[1]) Der bekannte Geologe, von welchem wir leider immer noch keine Biographie besitzen.

[2]) Boué, Ami (16. III. 1794 † 21. XI. 1881 in Wien), studirte in Genf, Paris, Edinburg und Berlin, Geologe, Dr. med. und war Mitglied der K. Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vgl. geolog. Jahrbuch Vol. 32. 1882.)

Ihren Rat hören. Sie können vielleicht an einen Ihrer Freunde in Wien schreiben, um meiner Arbeit eine günstige Aufnahme zu verschaffen, und mir dann Jemanden bezeichnen, an den ich die Zusendung zu adressiren hätte. In meinem Briefe würde ich auch jedenfalls erwähnen, dass Sie mir Aussicht auf ein Honorar gegeben hätten, und versprechen, im Falle der Zusicherung eines solchen die Eingabe fortzusetzen. Doch möchte ich Sie noch fragen, ob ich wirklich ein Honorar verlangen, und wie viel ich verlangen, oder ob ich den Betrag desselben der Akademie überlassen soll.

Da mir nun noch Zeit übrig bleibt, so werde ich meiner Arbeit noch einen die Theorie der Curven dritten Grades betreffenden Satz beifügen, den mir *Hesse*[1]) und *Aronhold*[2]) übersehen zu haben scheinen. Die Hauptsache darin macht eine Curve dritter Classe [Ψ (p, q, r) = o] aus, welche die 9 Wendungstangenten der ursprünglichen Curve dritten Grades V (x y z) = o berührt. Das Polynom Ψ jener Curven spielt eine doppelte Rolle, einesteils bei der Darstellung der Classengleichung, andererseits in der analytischen Lösung der Aufgabe, die Wendungspunkte einer C_3 zu finden.

Ist nämlich 216 W die Funktionaldeterminante des ursprünglichen Polynoms V und wiederum w die Funktionaldeterminante von W, so ist nach *Hesse*:

$$\frac{1}{2} w = 4\, \alpha^2\, V + \beta\, W \quad [1]$$

der Faktor λ, der $W + \lambda V$ in drei lineare Faktoren zerlegbar macht, ist durch die biquadratische Gleichung

$$27\, \lambda^4 + 18\, \alpha\, \lambda^2 + \beta\, \lambda - \alpha^2 = o$$

bestimmt. Nun hat freilich Aronhold die Funktionen α und β unmittelbar aus den ursprünglichen Elementen von V construirt. Für die numerische Anwendung wird es aber leichter sein, α und β aus [1] herzuleiten. Nur schade, dass da α^2 vorkömmt, weshalb das Vorzeichen von α ungewiss bleibt. Durch meine Formel wird diese Ungewissheit beseitigt. Sie ist

$$\Psi = \alpha\, V^2 + W^2 \quad [2]$$

wenn in Ψ [p, q, r] für die reciproken Variabeln p, q, r die durch 3 dividirten Differentialcoefficienten des ursprünglichen Polynoms V substituirt werden. Wenn

[1]) Hesse, Ludwig Otto, geb. 22. IV. 1811, Professor in Königsberg, Halle Heidelberg und München, † 4. VIII. 1874.

[2]) Aronhold, Siegfried Heinrich, geb. 16. VII. 1819, Prof. in Berlin, † 13. III. 1884.

$$V = ax^3 + 3d\,x^2 y + 3e\,x^2 z + 3g\,x y^2 + 6\,k\,x y z + 3h\,x z^2 + b\,y^3 + 3f\,y^2 z + 3j\,y z^2 + c\,z^3$$

das Polynom der C_3 ist, so ist

$$\Psi = p^3 e^{\frac{-9\mathfrak{M} + r\mathfrak{N}}{p}} \begin{vmatrix} g & k & h \\ b & f & j \\ f & j & e \end{vmatrix}$$

nach abgekürzter Schreibweise der Taylor'schen Formel, wo $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ resp. die ableitenden Operationen bezeichnen, wo die Differentiale der Elemente

$$\begin{array}{cccc} a & & & \\ d & e & & \\ g & k & h & \\ b & f & j & c \end{array} \quad \text{resp. in} \quad \begin{array}{cccc} o & & & \\ a & o & & \\ 2d & e & o & \\ 3g & 2k & h & o \end{array} \quad \text{und in} \quad \begin{array}{cccc} o & & & \\ o & a & & \\ o & d & 2e & \\ o & g & 2k & 3h \end{array}$$

umgesetzt werden.

Es würde mir lieb sein, wenn Sie mir sagen könnten, ob die Relation [2] schon gegeben worden ist. Verzeihen Sie mir übrigens, dass ich für einen Augenblick solchen Gräuel[1]) vorgeführt habe.

Ist die Correspondenz mit der Wiener Akademie einmal eingeleitet, so hoffe ich, werde es mir wenigstens in der nächsten Zeit an Stoff zu interessanten Arbeiten nicht fehlen.

Doch die Zeit verfliegt rasch, und es gilt zu verhüten, dass einem Andere nicht vorkommen. Ich kann Ihnen schliesslich nicht genug danken für die Aufmunterung und die wohlwollende Sorge für mein Auskommen, womit Sie als ein Mann, der für die Förderung der Wissenschaft so kräftig gewirkt hat, mich beehrt haben, und erkläre mich Ihnen zu steter treuer Freundschaft für verpflichtet.

In der Erwartung, dass Sie diese Zeilen in bestem Wohlsein empfangen werden, grüsst Sie von ganzem Herzen.

Bern, den 4. Dez. 1850.

Länggasse No. 214. Ihr Freund und Verehrer,

Ludwig Schläfli, Docent.

Steiner an Schläfli.

«*Mein lieber Freund!*

«Gewiss freue ich mich mit Ihnen, wenn Sie wirklich was Stich-«haltiges gemacht haben. In meinem trägen Zustande bin ich indess «unfähig, die Sache gehörig zu beurtheilen. Ich glaube jedoch fest, dass

[1]) Die analytischen Auseinandersetzungen bezeichnete Steiner vorzugsweise mit «Greuel».

«etwas dran sein wird. Aronhold, mit dem allein ich näher verkehre, «durfte ich Ihre Resultate nicht mittheilen. weil er sich selbst mit «der Elimination beschäftigt hat und stets auf Determinanten herum-«reitet. Er würde Ihre Sachen rasch verstehen, aber auch eben so «flux für sich benutzen, sie zu den seinigen machen, wie es vielfach «mit meinen Resultaten über algebraische Curven, etc., geschehen ist. «So habe ich auch jene Curve 3. Klasse, K^3, welche die Wendungs-«tangenten der C^3 berührt, schon 1847 u. 48 betrachtet u. ihm Vieles «darüber mitgetheilt; trotzdem werde ich überall sorgfältig ignorirt[1]).

«Unsere Verabredung scheinen Sie ganz vergessen zu haben. «Sie sollten sich ja an die Gesandtschaft wenden. Honorar hat man «nicht zu fordern, sondern es bekommt jeder, dessen Arbeit aufge-«nommen wird, und zwar alle gleich viel, nämlich 40 fl. Münze für «den Druckbogen (1 fl. Mz = 3 Zwanziger = 18 Batzen; in Bank-«scheinen jetzt viel schlechter, aber hoffentlich werden Ausländer in «Silber bezahlt). Ich will Ihnen meine Ansicht auf's Neue kund thun «und Ihnen etwa wie folgt rathen :

«Sie sagen im Begleitschreiben: Sie hätten mir, als ich diesen «Herbst auf einer Reise über Wien, Sie in Bern besuchte, einige «Ihrer Resultate mitgetheilt und mir dieselben für das Crelle'sche «Journal nach Berlin mitgeben wollen, worauf ich erwiedert: «ich «hielte dieselben für würdig, in die Schriften der K. K. Akademie zu «Wien aufgenommen zu werden, was für Sie, ausser der Ehre, noch «den Vortheil eines sehr anständigen Honorars gewähren würde.» «Durch dieses günstige Urtheil ermuthigt beehren Sie sich nun einer «Hochpreisslichen K. K. Akademie Ihre Arbeit ergebenst zu über-«reichen. Im Falle dieselbe zur Aufnahme nicht geeignet erachtet «würde, so erbitten Sie sich das Manuscript zu anderer Verwendung «zurück[2]). Sie können auch bemerken, dass bereits kleinere Aufsätze «von Ihnen im Crelle'schen Journal (?) so wie in den Berichten der «naturf. Gesellschaft in Bern gedruckt sind. Im Begleitschreiben geben «Sie auch eine gedrängte Uebersicht vom Inhalte Ihrer Arbeit, in «der Weise, wie Sie es in meinem Briefe gethan haben, citiren Sie «die andern Helden (*Jacobi, Cayley, Hesse,...*) und lassen Ihre That «darüber stehen, wie es sich in der Abhandlung selbst herausstellt. «Denn solcher Brief liest sich leichter und wird lieber gelesen, als «der Gräuel in 16 Bogen, und die Herrn sehen sogleich, woran sie

---

[1]) Vergl. die Note S. 74.

[2]) Von hier an existirt ein Concept.

«sind. — Wollen Sie (als Cima bue[1]) an Ihren Burgdorfer (Secunda) «*Boué* adressiren, so habe ich nichts dagegen; sonst brauchen Sie «nur «an die Kaiserlich-Königliche Hochpreissliche Akademie der «Wissenschaften in Wien» zu adressiren, auch selbst in dem Falle, «wenn Sie sich in einem einliegenden Briefe an Boué wenden. Spedirt «die Gesandtschaft Ihr Paquet nicht, so können Sie dasselbe unfrankirt «an die Akademie schicken; (es wird nicht nöthig sein, darauf zu «schreiben: «Wissenschaftliche Abhandlungen» oder «zum Druck be-«stimmt», ich glaube nicht, fragen Sie auch darüber die Gesandtschaft).

«Mag auch die Freiheit in Oestreich einen starken Stoss er-«halten, so wird doch die Akademie bleiben, da sie ja vor 1848 ge-«gründet worden; der Patrizier Studer ist kein Politiker. Also frisch «gewagt, aber doch nicht übereilt, ich hoffe und wünsche, dass es «gehe. Amen.

«Leider bin ich nicht der Mann, der sagen kann, ob Ihre «Gleichung neu ist. Wenn Sie übrigens Crelle's (u. Liouvilles) Journal «ganz gefressen haben, so wird keine Gefahr sein. Wohl schreiben «Cayley und ein anderer Engländer noch in englischen Journalen «(Transaktionen, etc.), aber was sie publicirt haben, kann ich Ihnen «auch nicht verrathen. — In den «Monats-Berichten» der Berl. Akad. «August-Heft 1848 finden sich einige Andeutungen über mein Treiben «in Rücksicht auf algeb. Curven, was Sie später auch einmal ansehen «können. Hr. *Aronhold*, dem die einzelnen Sätze schon zuvor mitge-«theilt worden, hat seine Rechnungen daran vervollkommnet und er-«weitert u. ergänzt.

«Von jener Aufgabe, die Sie vor 2 Jahren lösen sollten, die «Zahl x der Punkte zu bestimmen, damit sie sich zu 3 Ecken, 4 «Ecken, etc. verbinden lassen, hat jetzt H. *Eisenstein*[2]) den ersten «Fall, bloss die 3 Ecken betreffend, gelöst. Er zieht daraus schon Schlüsse «für die Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

---

[1]) Titel, mit dem Steiner Schläfli oft, wenn er in guter Laune war, regalirte.

[2]) Gotthold Eisenstein, geb. 16. IV. 1823 zu Berlin, wurde als Student im 3. Semester von der philosophischen Fakultät der Breslauer Hochschule zum Doctor phil. honoris causa promovirt und zwar wegen seiner ausgezeichneten mathematischen Arbeiten, Mitglied der K. Akademie zu Berlin, starb leider 29-jährig am 11. X. 1852. Vergleiche die Arbeit von Prof. Dr. *F. Rudio* «Eine Autobiographie von Gotth. Eisenstein» und «Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern» herausgegeben von *A. Hurwitz* und *F. Rudio*. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. VII, S. 145 u. ff.

«Sollte Ihre Sache in Wien nicht sogleich gehen, so sinken Sie «nicht sofort zusammen, sondern thun es mir zu wissen, damit wir «dem Schicksal Trotz bieten.

«Und der *Blösch!* [1]) hat der noch nichts gethan? Gehn Sie doch «selbst einmal zu ihm und erinnern Sie ihn mit einem Gruss von «mir, sind Sie nicht blöde, er stösst ja nicht. Sie können ihm so «nebenher auch erzählen, ich hätte Sie getrieben einige Arbeiten der «Wiener Akad. zu überreichen, deren Schriften auch Fremden geöffnet «(die der Berliner nicht); aber von Honorar brauchen Sie nicht zu «sprechen.

«Hier ist die Witterung bis jetzt mild, immer noch 1°—3° «Wärme, dagegen die Politik ist erschrecklich tief unter Null.

«Vorwärts für Freiheit und Wissenschaft! es wird schon gehen.

«Berlin, 15. Decemb. 1850.

«Ihr Freund,

«*J. Steiner.*»

1851. Schläfli an Steiner.

Mein lieber Freund!

Ich kann nicht anders, als Ihnen die freudige Nachricht mitteilen, die ich am 31. Jan. von Wien erhalten habe, dass nämlich auf den günstigen Bericht der Beurteilungskommission hin die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe beschlossen habe, meine Abhandlung in ihre Denkschriften aufzunehmen und dass das festgesetzte Honorar für den Druckbogen 40 fl. Conk. Münze betrage. Der Brief ist vom 18. Januar datirt, und meine Einsendung ist am 7. Jan. in Wien eingetroffen. Sie sehen hieraus, wie schnell die Beurtheilung erfolgt ist. Es wird mir dann ferner mitgetheilt, dass meine Arbeit nicht vor drei Monaten zum Drucke gelangen könne, weil die chronologische Ordnung beobachtet werden müsse, und ich werde daher angefragt, ob ich unter dieser Bedingung mein Manuscript der Akademie überlassen wolle.

Die diese Frage wie natürlich bejahende Antwort habe ich nun vorgestern zugleich mit einer Fortsetzung der Abhandlung über die Classengleichung der Curve dritten Grades abgeschickt. Ich fand nämlich seither, dass die Polynome F [p, q, r] und Ψ [p, q, r] resp. vom 6. und 4. Grade, welche gleich Null gesetzt die ursprüngliche

[1]) Regierungspräsident, damals Leiter des bern. Erziehungsdepartements. Vergl. auch die bezügliche spätere Bemerkung.

Curve dritten Grades und die ihren Wendungstangenten eingeschriebene Curve dritter Classe in Liniencoordinaten p, q, r ausdrücken, in sehr einfacher Beziehung zu den in meinem letzten Briefe mit α, β, von *Aronhold* mit S und T bezeichneten Superdeterminanten 4. und 6. Grades der 10 ursprünglichen Constanten stehen. Die Coefficienten von Ψ sind nämlich die 10 ersten Differentialcoefficienten von S, also Ψ erster Derivat von S; und in diesem Sinne ist dann F zweiter Derivat von T. Mich wundert nur, dass *Aronhold* diese Sätze in seiner Abhandlung nicht ausgesprochen hat.

Ich habe dieselbe seither mit grossem Vergnügen gelesen, und es ist mir auch gelungen, alle darin enthaltenen Sätze, wie ich glaube, möglichst direct zu beweisen. Doch bin ich immer noch begierig, aus der ausführlichern Schrift Aronhold's zu vernehmen, wie *er* diese Sachen angegriffen hat. Jedenfalls bilden seine Resultate eine wichtige Ergänzung der *Hesse*'schen Arbeit.

Ich kann Ihnen nicht genug dafür danken, dass Sie mir eine so lukrative Gelegenheit zu litterarischer Thätigkeit verschafft haben, und wünsche nur, dass mir der Himmel genug Kraft und Besonnenheit verleihe, um mich Ihrer Empfehlung würdig vorzeigen zu können.

Den *Blösch* habe ich immer noch nicht besucht und weiss nicht, ob ich es noch thun werde. Sie werden schon vernommen haben, dass unsere Regierung bald links bald rechts Straftruppen ausschickt, um die immergrünen Sinnbilder der Freiheit zu vertilgen, und den Leuten das Absingen von zin zin ratamplan zu verleiden. Da kann es einem Regierungspräsidenten nicht von ferne einfallen, für einen armen Docenten einen Schritt zu thun.

Indem ich Ihnen meine Glückwünsche darbringe, habe ich die Ehre zu sein

Ihr Freund

Bern, den 7. Feb. 1851. *L. Schläfli.*

Steiner an Schläfli.

Marienbad, den 31. Juli 1851.
(in Böhmen)

Lieber Freund!

«Ich wollte Ihnen gleich nach Empfang Ihres freudigen Briefes «vom 7. Februar antworten, wenn meine Schlaffheit es zugelassen hätte. «Es schien mir damals nöthig einige Warnungen und Rathschläge an «Sie zu richten, damit die eröffneten schönen Hülfsquellen nicht etwa «karger werden oder gar versiegen. Die verschiedenen Punkte, die «ich damals im Kopfe hatte, sind mir jetzt nicht mehr genau erinner- «lich, nur weiss ich, dass ich Sie warnen wollte, nicht zu geringe «Sachen nach Wien zu schicken, nicht zu *breit*, nicht zu *hastig*, kein «unreifes Zeug, mit einem Wort in keiner Art so zu schreiben, woran «zu merken, dass es bloss des Honorars wegen geschieht. Denn wenn «Sie jährlich 10—15 Bogen liefern, so ist es genug, und diese können «Sie dann wohl sorgfältig, gründlich und bündig durcharbeiten. Dies «ist desshalb nöthig, damit Sie nicht später durch Andere verdrängt «werden. Um Ihrentwillen habe ich bisher absichtlich die Verhältnisse «keinem mitgetheilt, weil sonst bald Jeder Aufsätze liefern würde. So «verrieth ich selbst kürzlich nichts, als *H. Borchard*[1]) mir erzählte: «H. «Dr. *Rosenhein*[2]) habe aus Wien geschrieben, dass die dortige Akademie «seine Abhandlung drucken und ihm 40 fl. Mz. pro Bogen zahlen würde.» «Dieser Jüd Rosenhein stellte die Sache so dar, als wenn es eine be- «sondere Auszeichnung für ihn wäre. Derselbe war seit Jahren Privat- «docent in Breslau, gewann im letzten Jahr den grossen Preis in der «Pariser Akademie[3]), wollte darauf angestellt sein (was ihm vom früheren «Minister versprochen war), und als es nicht geschah, so gieng er zu «Ostern nach Wien, wo er aber aus religiösen Gründen auch nicht an- «kommt. Aber um so mehr wird er nun wohl ein Concurent von Ihnen «werden. Darum hören Sie auf Botanik und Granit zu fressen, wobei «Sie verhungern können, sondern nehmen Sie einen doppelten Anlauf «auf die Mathematik; dann werden Sie darin auch bald Nagelneues «schaffen. Uebrigens versteht es sich, dass wenn Sie ausgezeichnete «Gegenstände haben, dann beliebig viel übersandt und der Akademie die «Sorge überlassen werden kann, *wie* und *wann* sie es publicirt; dabei «stehn Sie dann immer felsenfest, werden gut fahren und keiner wird «Sie ausstechen.

«Am 26. Mai hielt ich in der Klasse unserer Akad. einen Vortrag «*über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben und*

---

[1]) C. W. Borchardt, geb. 22. II. 1817, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Nachfolger Crelle's in der Redaktion seines Journals für reine Mathematik, von der Romreise her (1843) mit Schläfli bekannt, späterer Freund Schläfli's, † 17. VI. 1880 auf dem Rittergute Rüdersdorf bei Berlin (siehe Biographie Schläfli's, Berner Mittheilungen 1895, S. 148).

[2]) Rosenhain, J. G., geb. 10. Juni 1816 zu Königsberg, 1857 Professor daselbst, † 14. III. 1887.

[3]) Hier irrt sich Steiner, Rosenhain erhielt diesen Preis schon 1846, nicht 1850.

«*über andere damit in Beziehung stehende Eigenschaften allgemeiner* «*Curven.*» Im Monatsbericht findet sich eine nähere Angabe des In«halts. Ein Auszug, den ich Crelle übergeben wollte, ist leider nicht «fertig geworden; jede Kleinigkeit hielt mich Tagelang auf, weil ich «nicht mehr arbeiten kann, besonders des abends geht es nicht mehr, «was doch früher meine beste Zeit war; ich werde bei der Rückkunft «versuchen die Arbeit zu beendigen. Ich sties dabei mitunter auf «Sätze, welche ich nicht streng zu beweisen vermochte, wie z. B. «folgende:

«1. Wenn eine C^3 (Curve 3ten Grads) durch gegebene 6 Punkte «p gehen, einen Doppelpunkt $\mathfrak{P}_2$ haben, und wenn die beiden Tan«genten a und b in dem letztern, durch gegebene Punkte A und B «gehen sollen, so ist sie 25deutig bestimmt, d. h., so giebt es 25 ver«schiedene Curven C^3, welche der Forderung genügen. Daher

«2. Wenn eine C^3 durch gegebene 6 p gehen, einen $\mathfrak{P}_2$ haben, «und die eine Tangente a in diesem $\mathfrak{P}_2$ durch einen siebenten gege«benen Punkt A gehen soll, so ist der Ort des Doppelpunkts $\mathfrak{P}_2$ eine «Curve 7ten Grads, $= \mathfrak{P}_2{}^7$, und der Ort der andern Tangente b in «demselben ist eine Curve 25ster Klasse, $= b^{25}$. U. s. w.

«Im Monatsbericht (Mai, d. Jahres) werden Sie noch einige Sätze «finden, an denen Sie sich üben können. Der kleine Jüd (Aronhold) «hat sie alle bewiesen, nebst andern, die nicht angegeben sind. Fol«gender Satz war nicht leicht vollständig zu discutiren. Wenn eine «gerade S eine Curve C^4 in 4 solchen Punkten schneidet, welche paar«weise a und a_1, b und b_1 gleichweit von einem 5ten Punkte m in S «abstehen ($am = ma_1$, $bm = mb_1$), so heisst sie *Doppelsehne* und wird «durch S_2 bezeichnet, und m heisst ihr Mittelpunkt.

«3. «*Der Ort aller Doppelsehnen S_2 einer Curve C^4 ist eine Curve* «*9ter Klasse, $S_2{}^9$, und der Ort ihrer Mittelpunkte m ist eine Curve* «*10ten Grads, m^{10}.*» Dabei sind die 108 gemeinschaftlichen Tangenten «von C^4 und $S_2{}^9$ anzugeben interessant; die 40 Schnitte von C^4 und «m^{10}, sie haben eigenthümliche Bedeutung. Man lernt daraus: dass «es bei einer C^4 im Allgemeinen 32 solche Tangenten ($= S_2$) giebt, «deren Berührungspunkt (bb_1) in der Mitte zwischen den beiden «Schnitten (a und a_1) liegt. U. s. w. — Für alle C^3, welche durch ge«gebene 6 p gehen und Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ haben, ist der Ort dieser $\mathfrak{M}$ «eine Curve 5ten Grads $= \mathfrak{M}^5$. Die analoge Aufgabe für die Schaar C^4, «welche durch gegebene 9 p gehen und Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ haben. Des«gleichen für Schaar C^5, etc. Ich bin damit nicht bis zum allgemeinen

«Satz durchgedrungen, Aronhold auch nicht; daher wird der feige «Thuner gar nicht anbeissen[1]). — Wenn ich hoffen könnte, Sie würden «wirklich auch mit Ernst an Aufgaben gehen, welche noch nicht von «mir oder einem Andern gelöst sind, so würde ich Sie künftig gern «mit dergleichen überhäufen. In der That wäre es auch besser, als «wenn Sie, wie im vorigen Herbst, *Kiltblumen*[2]) mit sammt den Wurzeln «auffressen. Ich kann leider nicht mehr wie früher arbeiten; die Phan«tasie ist fast ganz erloschen, das erschlaffte Gangliensystem wirkt auf «das Gehirn, so dass ich beim besten Willen, etwas zu thun, immer «einschlafe, sobald ich die Augen zumache, um die Gegenstände anzu«schauen. Der kleine Jüd stände mir wohl zur Hand, aber was habe «ich davon; was sich durch Rechnung von selbst Weiteres einstellt, «theilt er mir nicht mit, und was von mir stammet, wird mir wenig «verdankt, wird als aus der Rechnung hervorgehend benützt, ohne des «Urhebers zu gedenken. So hielt ich es nicht für rathsam, ihm Ihre «Bemerkungen mitzutheilen, weil ich weiss, wie viel er durch meine «Untersuchungen im letzten Winter und besonders 1848—49 profitirt «hat, die ihm meist zum controliren überliefert worden. Er hat haupt«sächlich dadurch seine Methode ausgebildet (Euch alle überflügelt), «räumt aber ungern ein, dass er meinen mühsamen Forschungen viel «zu verdanken habe[3]). Die Art, wie er die Gegenstände behandelt, kann «ich nicht genau angeben, weil ich mich zu wenig darum kümmere. «Er benutzt theils die von mir aufgestellten geometrischen Grundprin«zipien, theils muss er analoge neue aufstellen, wie sie die Rechnung «erheischt. Um z. B. die Klassengleichung einer Curve 3^{ten} Grads C^3 «zu finden, ist das Verfahren, wie ich glaube, ohngefähr so: Man be«stimmt von einer geraden G, in Bezug auf C^3, die zweite Polarenve«loppe E^2 (1. Monatsber. August 1848), verlangt sodann, dass diese E^2 «die C^3 berühren soll, wobei nothwendig auch G beide im nämlichen «Punkte berühren muss, und wodurch man sodann, durch Wechslung «der Veränderlichen, zur Gleichung von G oder der Klassengleichung «gelangt. — Für die Curve C^4 werden zwei (ich weiss nicht auf welche «Weise bestimmte) Curven 4^{ter} und 6^{ter} Klasse, $\mathfrak{A}^4$ und $\mathfrak{B}^6$, zu Hülfe

[1]) Mit dieser kräftigen Aeusserung wollte Steiner Schläfli, wie man sagt, «guslen», d. h. seinen Ehrgeiz wecken.

[2]) Damit sind gemeint entweder Orchis morio (Knabenkraut) oder Colchicum autumnale (Herbstzeitlose) oder Lychnis vespertina.

[3]) Hier bemerkt Herr Prof. Dr. Geiser: Das Urtheil Steiner's über Aronhold ist bei aller Anerkennung, die er ihm wiederfahren lässt, ungerecht. Aronhold hat gerade Steiner's Verdienst um die C_3 und K_3 (oder ψ) bei passender Gelegenheit hervorgehoben.

«genommen, wobei alsdann $\alpha. (\mathfrak{A}^4)^3 + \beta. (\mathfrak{B}^6)^2 = o$ die Klassengleich-«ung von C^4 giebt. — Näheres weiss ich nicht. Sie werden sich aber «schon zu helfen wissen.

«Diesen Winter besuchte mich einmal *Eisenstein*, wollte mich «für einen Privatzweck dadurch zu seinen Gunsten kirren, dass er an-«gab, er habe den ersten Fall meiner Aufgabe (welche ich Ihnen 1848 «von Rippoldsau aus mittheilte, und wovon er durch Aronhold Kenntniss «erhielt) gelöst, nämlich er könne die Zahl der Punkte angeben, welche «sich unter den gestellten Bedingungen zu Dreiecken verbinden lassen; «(dass die Gerade, welche je zwei Punkte verbindet, Seite eines, aber «nur eines Dreiecks ist). Auch sprach er von interessanten Anwend-«ungen, die er davon auf Fälle der Wahrscheinlichkeitsrechnung ge-«macht habe. Vielleicht hat er seitdem die Aufgabe auch für die Vier-«ecke, Fünfecke, etc. gelöst: Ich habe ihn nicht wieder gesprochen, «er wohnt auf dem Lande und ist kränklich.

«Ich bin froh, dass der Brief zu Ende ist; hier wird mir das «Schreiben noch saurer, als zu Hause; der Kreuzbrunnen greift an, man «soll gar nichts thun, nur ein Schlaraffenleben führen. — Bis zum «20. August werde ich noch hier verweilen müssen; wo es von da «hingeht, weiss ich noch nicht; nach London ist wohl weit und zu «kostspielig; also nur nach Regenspurg, München etc. und Ende Sept. «oder Anfangs October wieder heim.

«Was macht der junge *Henzi* [1])? Grüssen Sie ihn. Grüssen Sie «auch: «Nous vivons entre nous!» [2])

«Von Wien ist diesmal niemand hier von dem ich erfahren konnte, «ob Ihre Abhandlung schon gedruckt.

«Dieses Frühjahr hat Aronhold einmal Riesen-Rechnungen ausge-«führt, die 10 Constanten (wahrscheinlich dieselbe, von denen Sie mir «schrieben, einer Gleichung 3ten Grads) numerisch zu berechnen.

«Leben Sie mehr von Gräuel, als von Pflanzen und aller Art Gesteine!

«Es grüsst Sie Ihr ergebener *J. Steiner.*»

---

[1]) Friedrich Henzi v. Bern, Schüler Wolf's, damals Student der Astronomie, geb. 28. I. 1827 in Dorpat, wo sein Vater Professor der orientalischen Sprachen war. Henzi studirte unter Argelander in Bonn, wurde dann Bergwerksingenieur, 1861—68 Direktor des Eisenwerks in Mels, kehrte nach Bern zurück und starb am 1. V. 1884.

[2]) *Bernhard Gerwer*, 1835 Docent, 1856 a. Professor an der bernischen Hochschule; 1843—1856 Lehrer der Mathematik und der math. Geographie am Höhern Gymnasium, 1856—1868 Lehrer der darstellenden und der praktischen Geometrie an der Kantonsschule, † Dec. 1868.

1852. Schläfli an Steiner.

Mein lieber Lehrer und Freund!

Ihr letzter Brief vom 31. Juli 1851 hat mich herzlich gefreut; nur muss ich jetzt zu meiner Beschämung gestehen, dass ich an den darin angeregten schweren und schönen Sachen bis jetzt noch nicht gearbeitet habe, dass ich aber nun bald Fleiss darauf verwenden werde, darf ich jetzt um so mehr versprechen, weil ich unlängst (November) einen der für mich seltenen glücklichen Augenblicke im Studium der Mathematik erlebt habe. Entschuldigen Sie es mit meiner armseligen Lage, dem fast gänzlichen Mangel an geselligem Verkehr und der daraus hervorgehenden gedrückten Stimmung, dass ich fast den ganzen Sommer der morphologischen Botanik widmete. Wenn ich nur wüsste, die reine Mathematik mit objektiver Wirklichkeit zu verbinden! Es war früher mein Wunsch, mathematische Physik zu studiren; aber wenn man nicht die Mittel hat, um eigene Versuche (zu machen), so ist da kaum etwas zu leisten.

Nachdem ich meine Theorie der Elimination der Wiener Akademie übergeben hatte, war mein nächster Vorsatz, die Theorie der vielfachen Continuität so auszuarbeiten, dass sie mit Recht in den Wiener-Denkschriften erscheinen durfte. Nun war ich aber an der Verallgemeinerung der Theorie der orthogonalen Flächen stecken geblieben, immer glaubend, es müsse hier ein grosses Wunder verborgen sein, ohne jedoch dazu durchdringen zu können. Für drei Dimensionen nämlich giebt es eine einzige Bedingung, welcher die eine erste Flächenschaar darstellende Funktion der Coordinaten [f [x y z] = const.] genügen muss, damit diese Flächenschaar mit noch zweien andern Schaaren ein orthogonales System bilden können, wo in jedem Punkte des Raumes alle drei durchgehenden Flächen sich rechtwinklig durchschneiden; und diese einzige Bedingungsgleichung hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sie in Beziehung auf die partiellen Differentialcoefficienten dritter Ordnung [es sind die höchsten] jener Funktion f *linear* ist. Ich vermuthete nun lange, diese Eigenschaft gelte auch für n Dimensionen überhaupt; und die $\frac{[n-1][n-2]}{2}$ wesentlichen Bedingungsgleichungen, denen eine einzige Funktion genügen muss, müssten auch in Beziehung auf die höchsten Differentialcoefficienten linear erscheinen. Erst nachdem ich von einem Herbstferienaufenthalt in Lausanne nach Bern zurückgekehrt war, gelang es mir, die Sache für drei Dimensionen so durchsichtig zu machen, dass ich nun begriff, warum hier jene Bedingungsgleichung linear wird, und dass diese Eigenschaft für mehr Dimensionen höchst wahrscheinlich nicht mehr besteht. Wie einmal dieser schwer auf meinem Herzen liegende Alp weggewälzt war, so wendete ich mich andern Partien der Continuitätstheorie zu und fand überraschende Sätze. Einen davon treibt es mich, Ihnen hier mitzutheilen, und es wird mich freuen, Ihr Urtheil darüber zu vernehmen.

Wenn das n-fache Integral

$$\int^{n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = S \text{ durch Bedingungen}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2 < 1 \quad p_1 > o \quad p_2 > o \ldots, p_n > o$$

begränzt wird, wo p_1, p_2, ... p_n unter sich unabhängige lineare und homogene Polynome bezeichnen, so kann seine Berechnung für ein gerades n auf $\frac{n-2}{2}$ und für ein ungerades auf $\frac{n-3}{2}$ Integrationen zurückgeführt werden[1]).

Um den Satz näher auszusprechen, muss ich mich einer der geometrischen ähnlichen Sprache bedienen. Die Gesammtheit aller Lösungen der Ungleichheit

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2 < a^2$$

nenne ich eine Polysphäre, a ihren Radius; diese Polysphäre ist also ein geschlossenes Stück des totalen n-fachen Continuums. Die Gesammtheit aller Lösungen einer linearen Gleichung nenne ich lineares [n—1] faches Continuum. Das Integral S ist ein Stück der Polysphäre, begränzt von n-linearen Continuen, die durchs Centrum gelegt sind, — *eine polysphärische Pyramide,* welche das Centrum zur Spitze hat, und deren Basis das entsprechende Stück des polysphärischen [n—1] fachen Gränzcontinuums ist. [Diese Pyramide ist gleich $\frac{1}{n}$ Radius $\times$ Basis.] Hat man die linearen Polynome p_1, p_2, ... so eingerichtet, dass in jedem die Summe der Quadrate der Coefficienten der Variabeln gleich 1 ist, so nenne ich die negative Summe der Produkte der gleichnamigen Coefficienten in zwei Polynomen p_1, p_2 den Cosinus des *Winkels* zwischen den entsprechenden linearen Continuen. Da nun die Funktion S oder der Inhalt der polysphärischen Pyramide nur von

[1]) Siehe die Bemerkung am Schluss dieses Briefes, welche die vorliegend Darstellung noch näher beleuchtet.

den $\frac{n\,[n-1]}{2}$ Winkeln zwischen je zweien linearen Continuen abhängt, so nenne ich ferner diese Winkel die *Argumente* von S. Der auf das Argument $\measuredangle\,[p_1\,p_2] = [12]$ bezügliche z. B. ist der n^{te} Theil der $[n-2]$ sphärischen Pyramide, welche durch den Durchschnitt der linearen Continuen $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ gebildet wird, also eine mit S ganz ähnliche Funktion von $\frac{[n-2]\,[n-3]}{2}$ Argumenten, welche aus den ursprünglichen Argumenten durch die bekannten Relationen der sphärischen Trigonometrie gefunden werden. Denkt man sich z. B. die ursprünglichen Argumente [23], [13], [12] als Winkel eines gewöhnlichen Kugeldreiecks und bezeichnet die entsprechenden Seiten mit $[\overline{1},\ 23]$ $[\overline{2},\ 13]$ $[\overline{3},\ 12]$, fasst dann wiederum z. B. $[\overline{1},\ 34]$ $[\overline{1},\ 24]$ $[\overline{1},\ 34]$ als Winkel und $[\overline{12},\ 34]$, $[13,\ 24]$ $[14,\ 23]$ als entsprechende Seiten eines neuen Kugeldreiecks auf, so ist $[\overline{12},\ 34]$ z. B. das Argument $\measuredangle\,(p_3\,p_4)$ der $(n-2) =$ sphärischen Pyramide, deren n^{ter} Theil dem auf das ursprüngliche Argument (12) bezüglichen Differentialcoefficienten von S gleich war.

Für $n = 2$ ist S ein Kreisausschnitt vom Radius 1, sein Argument ist der Mittelpunktswinkel α und $\frac{dS}{d\alpha}$ die Hälfte des Inhalts des nullfachen Continuums, welches die zwei Radien gemein haben, oder des Centrums. Da nun die analytische Consequenz es erfordert, dass als Inhalt eines Punktes immer die Einheit angenommen werde, so ist $\frac{dS}{d\alpha} = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1}{2}\,\alpha$ und die Basis des Ausschnitts, der Kreisbogen $= \alpha$.

Für $n = 3$ ist S eine Kugelpyramide, ihre Argumente α, β, γ sind die Winkel zwischen den begränzenden Ebenen oder die Winkel des Kugeldreiecks [der Basis]; die drei Differentialcoefficienten sind $\frac{1}{3}$ der bezüglichen Kanten oder Radien, welche je zweien Ebenen gemein sind; also $dS = \frac{1}{3}\,[d\alpha + d\beta + d\gamma]$, und wenn man die Integrationskonstante richtig bestimmt, $S = \frac{1}{3}\,[\alpha + \beta + \gamma - \pi]$, die Basis oder das Kugeldreieck also $= \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Da ich die den regulären Polyedern entsprechende Untersuchung für n-Dimensionen durchgeführt habe — für $n = 4$ giebt es nämlich 6 einfache reguläre Polyscheme und 2 überschlagene, die ich durch folgende leicht verständliche Charaktere kurz bezeichnen kann (3, 3, 3) (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 4, 3), (4, 3, 3), (5, 3, 3) resp. umschlossen von 5, 16, 600 Tetraedern, 24 Oktaedern, 8 Hexaedern, 120 Dodekaedern; endlich noch $(3, 3, \frac{5}{2})$ von 600 Tetraedern, $(\frac{5}{2}, 3, 3)$ von 120 überschlagenen Dodekaedern umschlossen, beide mit 191 mal umgeschlungener Begränzung; für $n \gtrless 5$ immer nur drei, welche dem Tetraeder, Oktaeder und Hexaeder entsprechen, und bei denen die Begränzung resp. aus $n+1$, 2^n, $2n$ Stücken besteht — so kenne ich auch alle möglichen symmetrischen Theilungen der Tetrasphäre, Pentasphäre etc. und gelange dadurch zu merkwürdigen bestimmten Integralformeln, unter denen mich diese zwei

$$\int_{\sin x = \sqrt{\frac{1}{3}}}^{x=\frac{\pi}{5}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}} \,.\, dx = \frac{\pi^2}{3600};$$

$$\int^{x=\frac{2\pi}{5}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{191\,\pi^2}{3600}$$

die meiste Arbeit gekostet. [1])

Der Beweis jenes allgemeinen Satzes ist sehr einfach. Er beruht auf einem Hülfssatz, der auf $n = 3$ beschränkt so lautet:

«In einem Kugeldreieck ist eine Seite als *Basis* angenommen und darauf aus dem entsprechenden Eck ein grösster Kreisbogen senkrecht gezogen, welcher *Höhe* heissen soll. Wird nun jedes Element des Kugeldreiecks mit dem Cosinus seines sphärischen Abstandes von der Spitze multiplizirt, so erhält man als Summe aller solchen Produkte das halbe Produkt der Basis und des Sinus der Höhe.»

Es hat mich sehr befremdet, dass ich bis jetzt noch gar keine Nachricht aus Wien erhalten habe.

---

[1]) In einem Concept führt Schläfli noch folgende Formeln an:

$$\int^{x=\frac{\pi}{4}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{\pi^2}{96}, \qquad \int^{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{30},$$

$$\int^{x=\frac{\pi}{2}} \arccos \frac{\sin x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

Gegen das Ende Dezember habe ich dorthin geschrieben,[1]) um Auskunft über das Schicksal meiner eingesandten Arbeit bittend und die Vermuthung aussprechend, dass mein letzter Brief, worin ich meine Einwilligung zu den gestellten Bedingungen ausspreche, nicht an den Ort seiner Bestimmung gelangt sein möchte; zugleich habe ich um Aufnahme einer neuen Arbeit über die Theorie der vielfachen Continuität angefragt, indem ich Bedeutung und Wichtigkeit einer solchen Theorie durch Andeutung einiger Resultate und des Umfangs der Untersuchungen, über welche sie sich erstreckt, hervorzuheben suchte. Den schönen Satz, denn ich Ihnen hier mittheile und den Sie einstweilen für sich behalten mögen, habe ich nicht eröffnet, sondern nur davon gesprochen, wohl aber die bestimmten Integrale, welche daraus herfliessen, hingestellt. Es nimmt mich nun Wunder, ob das Stillschweigen brechen wird.

$$\int_{\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}}^{x = \frac{\pi}{3}} \arccos\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x - 1}}\right) dx = \frac{\pi^2}{288};$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\pi^2}{120}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{3}}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{\cos x}{1 - 2\cos x}\right) \cdot \arccos\left(\frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right) \cdot dx = \frac{7\,\pi^3}{360}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos\left(\frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right) \cdot \left(\arccos\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\pi^3}{252}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \arccos\frac{1}{1 + 2\cos x} \cdot \left(\arccos\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) \cdot dx = \frac{\pi^3}{720}.$$

[1]) Siehe den nachfolgenden Brief.

Wenn man meine Continuitätstheorie in Wien nicht annimmt, so möchte ich sie als Privatschrift publiciren, und da Sie mir schon so viel Wohlwollen und Freundschaft bewiesen haben, so möchte ich Sie vorläufig anfragen, ob Sie mir etwa in Berlin einen Verleger wüssten, von dem ich ein Honorar bekäme.

Grüssen Sie mir *Dirichlet, Borchard, Crelle, Aronhold.* Ueber den jungen *Henzi* kann ich Ihnen nichts Weiteres sagen, als dass ich ihn bisweilen in den Versammlungen der naturf. Gesellschaft sehe, und dass mir seine ganze Erscheinung wohl gefällt, weil sie geistige Lebendigkeit ausdrückt. Mit *Gerber* habe ich leider so wenig Verkehr als mit *Wolf.*

Wenn Sie mir bald antworten, so wird es mich sehr freuen. Ich hoffe, Ihnen etwa auch bald wieder schreiben zu können.

Ihnen für das angetretene Jahr viel Glück und gute Gesundheit wünschend, grüsst Sie herzlich

Ihr dankbarer Schüler und Freund,

Bern, den 3. Jan. 1852. *L. Schläfli, Docent.*

Bemerkung. In einem unter Schäfli's Papieren gefundenen Concept zu diesem Briefe findet sich an oben angemerkter Stelle noch folgender Abschnitt eingeschaltet, der dem Briefe fehlt:

«Um die Art, wie dies geschieht näher zu erklären, bedarf ich einer kleinen Vorbereitung. Wenn z. B. $n = 4$ ist, und es kommen nur Werthe der Variabeln w, x, y, z in Betracht, welche die Polynome

$$p = aw + bx + cy + dz, \quad p' = a'w + b'x + c'y + d'z$$

positiv machen, so nenne ich die konstante Grösse

$$-\frac{aa' + bb' + cc' + dd'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}}$$

den Cosinus des Winkels der beiden Polynome p, p' [cos $\measuredangle$ (pp')], wo die Quadratwurzeln immer positiv zu verstehen sind. Im obigen allgemeinen Falle kommen also $\frac{n\,[n-1]}{2}$ *Winkel* zwischen je zweien der gegebenen Gränzpolynome $p_1, p_2 \ldots p_n$ in Betracht; ich nenne sie die *Argumente* der Funktion S, weil der Werth des durch S bezeichneten n-fachen Integrals in der That nur von diesen Argumenten abhängt.

Nun sind die ersten in Beziehung auf diese unter sich unabhängigen Argumente genommenen Differentialcoefficienten der Funktion S selbst wiederum solche Funktionen, wo die Dimensionszahl n auf n — 2 herunter gesunken ist. Das n-fache des auf $\measuredangle (p_1\ p_2)$ bezüglichen Differentialcoefficienten z. B. wird erhalten, indem man zuerst die alten Variabeln $x_1 \dots x_n$ durch solche homogene und lineare Funktionen der neuen Variabeln $y_1 \dots y_n$ ersetzt, dass

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \dots + x_n{}^2 = y_1{}^2 + y_2{}^2 + \dots y_n{}^2$$

und die Polynome p_1, p_2 nur die zwei neuen Variabeln y_1, y_2 enthalten, dann zweitens das [n — 2]-fache Intregal

$$\int^{n-2} dy_3,\ dy_4 \dots dy_n$$

für die Gränzbedingungen

$$y_3{}^2 + y_4{}^2 + \dots + y_n{}^2 < 1 \quad p_3 > 0 \quad p_4 > 0 \dots p_n > 0$$

berechnet, nachdem in diesen Polynomen $y_1 = y_2 = 0$ gesetzt worden ist.

Für $n = 2$ ist S der Inhalt eines Kreisausschnittes vom Radius 1, $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ sind die Gleichungen der Radien, welche diesen Ausschnitt begränzen, und das einzige Argument der Funktion S ist der Winkel α, den diese zwei Radien einschliessen. Eine Transformation der Variabeln ist nicht nöthig, weil deren nur zwei sind. Der doppelte Differentialcoefficient von S in Beziehung auf S ist der Inhalt des Centrum, in welchem die zwei Radien sich schneiden. Da nun als Inhalt eines Punktes im Gebiete von 0 Dimensionen nur die Einheit gelten kann, so ist $2 \dfrac{dS}{d\alpha} = 1$, also $S = \dfrac{1}{2} \alpha$.

Für $n = 3$ ist S der Inhalt einer Kugelpyramide vom Radius 1, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ sind die Gleichungen der diametralen Elemente, welche dieselben begränzen, und die drei Argumente

$$\alpha = \measuredangle (p_2\ p_3),\ \beta = \measuredangle (p_1\ p_3)\quad \gamma = \measuredangle (p_1\ p_2)$$

sind die Winkel des Kugeldreiecks, der Basis der Pyramide S. Um $3 \dfrac{dS}{d\alpha}$ zu erhalten, muss man zuerst rechtwinklige Coordinaten so in neue rechtwinklige transformiren, dass p_2, p_3 nur y, z enthalten, d. h. dass die durch diese Polynome dargestellten Ebenen in der Axe der x sich schneiden.

Setzt man dann $y = 0$, $z = 0$, so reduzirt sich die Gränzbedingung $p_1 > 0$ auf $x > 0$ und man hat das Integral $\int dx$ für die Gränze $x^2 < 1$, $x > 0$ zu berechnen, was

$$3 \frac{dS}{d\alpha} = 1, \text{ also } S = \frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \text{ giebt.}$$

Concept des Briefes Schläfli's an den Secretär der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien vom Dez. 1851.

«Es ist nun ein Jahr verflossen, seit ich der kaiserl. Akademie «der Wissenschaften eine Abhandlung «über die Resultante eines Systems «mehrerer algebr. Gleichungen» zugeschickt habe. Ich erhielt unterm «18. Jan. 1851 die Zusicherung, dass die Abhandlung in die Denk«schriften würde aufgenommen werden, wenn ich mein Manuscript unter «der Bedingung überlassen wollte, dass es erst nach drei Monaten ge«druckt würde. Hierauf antwortete ich sogleich, dass ich zufrieden sei, «wenn meine Abhandlung so bald unter die Presse komme, und dass ich «sie unter dieser Bedingung überlasse. Da ich nun nach Verfluss eines «Jahres noch gar keine Nachricht über das Schicksal dieser Frucht «meiner Arbeit erhalten habe, so fürchte ich fast, mein letzter Brief «möchte nicht an seine Bestimmung gelangt sein. Ich muss daher «dringend bitten, mir über diese Sache Aufschluss zu geben.

«Ich ergreife diese Gelegenheit, um wegen der Aufnahme einer «neuen Arbeit anzufragen, von der ich glaube, dass sie den Denk«schriften nicht zur Unehre gereichen wird. Sie behandelt einen «Gegenstand, der meines Wissens bis jetzt nur nach einzelnen unter«geordneten Momenten ist berührt worden, dessen Begriff man aber «noch nirgends offen ausgesprochen u. möglichst allzeitig zu entwickeln «gestrebt hat, ich meine die *Theorie der vielfachen Continuität.* Ich «will versuchen, mit einigen Worten dieses neue Feld der Analysis «näher zu bezeichnen. Unstreitig gewährt die geometrische Anschauung «der Analysis, in manchen Fällen, wo nur zwei oder drei Variabeln in «Betracht kommen, wesentliche Dienste, denn sie ist gleichsam eine «schon fertige im Gefühl ruhende Analysis. Wollen wir uns nun ähn«liche Vortheile für analytische Gegenstände, bei denen mehr als drei «Variabeln auftreten, verschaffen, so müssen wir den Begriff eines durch «diese Variabeln dargestellten vielfachen Continuums in ähnlicher Weise «entwickeln, wie es mit dem Begriff des zwei- und dreifachen Conti«nuums in der Geometrie geschieht.

«Wenn man will, kann man schon in Laplace's Mécanique céleste «eine in die Theorie der vielfachen Continuität gehörende Aufgabe behan-«delt finden; nämlich die Theorie der seculären Störungen kömmt, analy-«tisch betrachtet, auf die Aufgabe zurück, im totalen nfachen Conti-«nuum die Hauptaxen eines durch seine allgemeine Gleichung gegebenen «(n—1) fachen Continuums zweiten Grades zu bestimmen. Hieher «gehört es auch, wenn man n fache Integrale so behandelt hat, wie es «dem Uebergang vom Ellipsoid zur Kugel und von rechtwinkligen zu «Polarcoordinaten entspricht; wie denn überhaupt die Verwandlung «vielfacher Integrale eine leichte Consequenz der diesem Gebiete eigen-«thümlichen Betrachtungen ist. Dieses Feld muss aber noch reichlichere «Früchte tragen, wenn man es nicht nur gelegentlich und zufällig, sondern «mit der eigentlichen Absicht bearbeitet, auf rein analytischem Gebiete «etwas der Geometrie Vergleichbares, und worin diese vollkommen «aufgeht, zu leisten. Ich hoffe nun durch das Wenige, was meinen «schwachen Kräften hier gelungen ist, wenn anders die kais. Akad. «es in ihre Denkschriften aufzunehmen geneigt ist, dem mathematischen «Publicum eine günstige Ansicht von der Fruchtbarkeit dieses Zweiges «beizubringen. Damit die hochpreisl. Akad. im Voraus darüber urtheilen «könne, führe ich einige Resultate an.

«Ich unterscheide lineare und höhere Gebilde, je nachdem zu «ihrer Definition lineare Gleichungen hinreichen oder nicht. Hat nun das «totale Continuum n Dimensionen, so nenne ich (n—m) faches lineares «Continuum die Gesammtheit aller Lösungen eines Systems vom m «linearen und unter sich unabhängigen Gleichungen mit n Variabeln. «Sind nun in jenem totalen Continuum zwei partielle lineare Continua, «ein pfaches und ein qfaches beliebig gegeben, so entsteht die Auf-«gabe, ihre gegenseitige Lage auf die kleinste Zahl von Daten zurück-«zuführen. Ich zeige nun, dass wenn $p + q > n$, diese Aufgabe auf «eine andere zurückkömmt, wo die beiden partiellen Continua resp. «nur $n - q$ und $n - p$ Dimensionen zählen, oder, wenn wir wieder «p, q als Dimensionszahlen gebrauchen, auf den Fall, wo $p + q < n$. «[In diesem Falle sind aber, wie ich ferner zeige, aus dem totalen «Continuum $n - (p + q)$ Dimensionen wegzulassen, wodurch die «Aufgabe auf $p + q = n$ zurückgeführt ist.] Ist $p \leqq q$, so «[kann man im totalen Continuum wieder $q - p$ Dimensionen unter-«drücken, und] kömmt die Aufgabe endlich dahin zurück, dass man die «gegenseitige Lage zweier p-fachen linearen Continua im 2pfachen «totalen Continuum durch das Minimum von Bestimmungsstücken an-

«geben soll. Dieses geschieht durch eine algebraische Gleichung p^{ten} «Grades, deren Wurzeln immer sämmtlich reell sind. Darf man sich «der geom. Sprache bedienen, so sind jetzt in jedem der zwei linearen «Continua p unter sich senkrechte Axen gefunden, und die Wurzeln «jener algebr. Gleichung sind die Cosinus der Winkel, welche jede «Axe des einen Continuums mit der gleichnamigen des andern bildet, «während sie auf allen übrigen dieses letzten Continuums senkrecht steht. «Im wirklichen Raume kann p nur 1 sein, d. h. die gegenseitige Lage «irgend zweier linearen Continua ist immer durch einen einzigen «Winkel bestimmt, wie in der Ebene.

«Wenn im wirklichen Raume eine beliebige Zahl von Ebenen «frei gegeben sind, so kann man nach der Zahl der geschlossenen «und offenen Stücken des Raumes fragen. Ich habe diese Aufgabe für «das nfache Continuum gelöst.

«Ich habe ferner dem *Euler'schen Satze über Polyeder*, dass «nämlich die Zahlen der Ecken sammt der Zahl der Flächen diejenige «der Kanten immer um 2 übertreffe, eine Form gegeben, worin er «auch für n Dimensionen gilt.

«Ich habe die der Frage nach der Existenz regulärer, convexer «Polyeder analoge Frage für alle Dimensionen gelöst. Für 4 Dimen- «sonen existiren nämlich deren 6, für alle folgenden Dimensionen «immer nur drei.

«Zu sphärischen Gebilden übergehend, habe ich nicht nur «das Maass

$$\int^n dx_1\ dx_2\ .\ .\ .\ dx_n$$

«des von der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2$ umschlossenen «n fachen Continuums und des durch diese Gleichung dargestellten «(n — 1) fachen Continuums bestimmt, was wahrscheinlich unter der «Form eines bestimmten nfachen Integrals bereits geschehen ist, «sondern ich habe die der Kugelpyramide oder, was auf eins hinaus- «kömmt, dem Kugeldreieck analoge Aufgabe allgemein gelöst. Wenn «nämlich $p_1, p_2, \ldots p_n$ homogene lineare Polynome der Variabeln «$x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen, und das Integral

$$\int^n dx_1,\ dx_2\ .\ .\ .\ dx_n$$

«durch die Bedingungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < 1,\quad p_1 > 0,\quad p_2 > 0, \ldots p_n > 0$$

«begränzt ist, so habe ich die Zahl der nothwendigen Integrationen auf $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-3}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, herunter-«gebracht, wobei Kreisbogen, deren Cosinus bekannt sind, nicht als Integra-«tionen gezählt werden. Wir werden dadurch mit einer neuen Art trans-«cendenter Functionen von $\frac{n(n-1)}{2}$ Argumenten bekannt, welche «durch Integralformeln ausgedrückt sind, in denen lauter Kreisbogen «erscheinen, deren Sinus oder Cosinus gegenseitig in algebraischer «Relation stehen. In einzelnen Fällen können die Werthe dieser «Integrale in finiter Form angegeben werden. Für

$$n = 4 \text{ z. B. sei } \cos y = \frac{\cos\alpha \sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2\beta}}$$

«so ist

$$S = \int_{y=0}^{x=\gamma} y \, dx$$

«eine der besprochenen Funktionen, welche jetzt nur drei explicite Argu-«mente α, β, γ zeigt, indem man jedes den drei übrigen gleich $\frac{\pi}{2}$ gesetzt «hat. Man wird sich leicht überzeugen, dass diese Funktion ihren Werth «nicht ändert, wenn man auch die Argumente α und γ vertauscht. «Sind nun m, n, p, ganze positive Zahlen und setzt man

$$\alpha = \frac{\pi}{m}, \quad \beta = \frac{\pi}{n}, \quad \gamma = \frac{\pi}{p}, \quad S = \frac{\pi^2}{f(m, n, p)},$$

«so habe ich gefunden:

$$f(3, 3, 3) = 30, \quad f(3, 3, 4) = 96, \quad f(3, 3, 5) = 3600,$$
$$f(3, 4, 3) = 288.$$

«Für ein beliebiges n kann man 6 finite Werthe bestimmter «Intregrale angeben, wovon ich nur eines anführen will. Wenn

$$\cos x_m = \frac{\cos x}{1 - 2m\cos x}$$

«gesetzt wird, so ist

$$\int_{\cos x = \frac{1}{2n-1}}^{x = \frac{\pi}{2}} dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_{n-1} =$$

$$\frac{\pi^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n-1) \cdot 2n}$$

«Ich glaube den erwähnten allgemeinen Satz nicht zu überschätzen, «wenn ich ihn dem Schönsten, was in der Geometrie geleistet worden «ist, an die Seite stelle.

«Wenn ich ferner die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit «n Variabeln betrachte, so ergeben sich leicht alle die Eigenschaften «wieder, die aus der Geom. von den Flächen zweiten Grades bekannt «sind; nur in der verallgemeinerten Theorie der confocalen Flächen «glaube ich etwas anführen zu können, das auch für n = 3 neu ist. «Diese Theorie giebt mir dann auch ein Mittel zu einer sehr allge- «meinen Form der Darstellung arbiträrer Funktionen von n Variabeln, «was mit den Laplace'schen Coefficienten Aehnlichkeit hat. — Auch «die Theorie der orthogonalen Flächen überhaupt kann auf n Dimensio- «nen übertragen werden; nur ist für n > 3 die Zahl der Bedingungen «grösser als die Zahl der Funktionen, über die man verfügen kann. «Für n = 3 dagegen hat man nur eine partielle Differentialgleichung «dritter Ordnung und ersten Grades in Beziehung auf die höchsten «Differential-Coefficienten zu erfüllen. — Der Begriff der Krümmung, auf «beliebige Gleichungen mit n Variabeln angewandt, führt auf gleiche Resul- «tate wie in der Geometrie. — Durch Verallgemeinerung des Begriffs des «Potentials habe ich merkwürdige Transformationen vielfacher Integrale «bekommen.

«Diese Andeutungen mögen zeigen, dass jene Arbeit reichhaltig «genug ist, um für sich allein im Buchhandel zu erscheinen; und wenn «die hochpreisl. Akad. für die Ehre in ihren Denkschriften aufgenom- «men zu werden, versagen würde, wäre ich Willens, sie als Privat- «schrift zu veröffentlichen.

«Obschon nun einzelne geometrische Theorien schon längst in diesem «Sinne verallgemeinert worden sind — man denke z. B. an gewisse «allgemeine Transformationen vielfacher Integrale, welche dem Ueber- «gang vom Ellipsoid zur Kugel oder von rechtwinkligen zu Polar- «coordinaten analog sind, an die Theorie der seculären Störungen, «welche in ihren letzten Ergebnissen als verallgemeinerte Aufgabe, die «Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades zu bestimmen, erscheint «u. s. w. — so muss dieses Feld doch noch . . .[1])

«Verehrter Herr Secretär, ich bitte Sie noch einmal, mir recht «bald mitzutheilen, was aus meinem vor einem Jahr eingesandten «Manuscripte geworden ist, und ob man meine neue Abhandlung unter «ähnlichen Bedingungen annehmen wird.

«Hochachtungsvoll verharrt «Ihr ergebenster

[1]) Hier bricht das Concept ab und es folgt bloss noch der Schlusssatz.

Im Juni 1852 machte Steiner einen Aufenthalt in Bönigen am Brienzersee und in Interlaken.

1852. Schläfli an Steiner.

Lieber Freund!

Ich habe versucht den Grad der Aufgabe zu bestimmen, wenn eine C^3 durch 6 gegebene Punkte gehen, einen Doppelpunkt haben und die zwei Tangenten a, b in diesem Punkte durch zwei gegebene Punkte A, B gehen sollen (a durch A, b durch B). Ich kann nun algebraisch hievon den Fall nicht trennen, wenn beide Punkte A, B auf derselben Tangente a liegen. So aufgefasst führt die Aufgabe auf 6 doppelschichtige Gleichungen, alle homogen und linear in Bezug auf die 3 Variablen der 2^{ten} Schichte (die Coordinaten des Doppelpunkts). Combinirt man je 5 Gleichungen, um die Variablen der ersten Schichte zu eliminiren, so ergeben sich für die 3 Variablen der 2^{ten} Schichte wieder homogene Gleichungen, eine 5^{ten} und fünf 6^{ten} Grades. Da nun 2 Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten des Doppelpunktes hinreichen, so ist diese Aufgabe höchstens vom 30^{sten} Grade. Ob sie noch niedriger ist, kann ich nicht beurtheilen, da ich nicht im Stande bin, den Grad der Resultante mehrerer doppelschichtiger Polynome anzugeben, wenn jedes mehr als 2 Variabeln enthält. — Nun ist die in der vorigen eingeschlossene Aufgabe, durch 6 gegebene Punkte eine C^3 zu legen, welche einen Doppelpunkt hat, dessen eine Tangente a ebenfalls gegeben ist, sicher vom 5^{ten} Grade. Es giebt daher *höchstens* $30 - 5 = 25$ C^3, welche Ihrer Forderung genügen.

Vor einer Woche habe ich aus Wien eine Anweisung auf 370 Gulden CM[1]) an die Hauptcasse des Ministeriums des Innern erhalten, wofür ich die Quittung durch den Banquier Marcuard übersandte. Man sagte mir, dieser Gulden sei Papiergeld und wäre eigentlich in neuem Gelde 2 Fr. 50 Cts., habe aber nur den Kurs von etwa 2 Fr.

Wenn ich wüsste, Sie noch sicher anzutreffen, würde ich Ihnen gerne in Bönigen einen Besuch machen. Ich hoffe immerhin, Sie noch in Bern wiederzusehen.

Wenn Sie mir nicht selbst schreiben wollen, können Sie mir ja durch einen andern einige Zeilen über Ihr Befinden und die Dauer Ihres Aufenthaltes zukommen lassen.

Sie freundschaftlich grüssend

Ihr dankbarer und ergebener

Bern, den 14. Juni 1852. *L. Schläfli.*

[1]) Conkord.-Münze.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Schläfli !*

«Gott sei Dank, dass die Wiener Sache endlich so weit gekommen «ist! Dass das Honorar in Bankscheinen bezahlt wird, war mir be-«kannt; der gegenwärtige niedrige Curs derselben und der hohe Curs «des französischen Geldes bringen Ihnen viel Verlust, circa 22—23 «Prozent.

«Da ich in meiner Pension in Bönigen allein war, zudem die «Wege schmutzig sind, so bin ich nach Interlaken, in's Hotel d'Inter-«laken gezogen. Es wohnt hier auch ein Berliner Stadtrath, der, wie «Sie, alle Berge abgrast, nebenbei auch Käfer und Steine frisst, aber «nicht Kenner ist, sondern nur für Freunde sammelt. Er steigt rings «herum auf die höchsten Schöpf (Cima); auf die niedrigen begleite «ich ihn zuweilen. Ich habe ihm von Ihnen gesprochen, er freut sich «auf Ihre Bekanntschaft und Ihre Hülfe. Also brechen Sie auf und «kommen Sie auf 8 oder 14 Tage her, das donnstigs Wetter wird fortan «besser werden.

«Grüssen Sie Frau und Herrn Professor Ries, und dann marsch! «hieher zu Ihrem

J. Steiner.»

Interlaken, 20. Juni 1852.

Auf der Rückseite des Steiner'schen Briefes stehen folgende Notizen Schläfli's, die sich auf die Arbeit über die vielfache Continuität [1]) beziehen:

«Es ist bekannt, mit welchem Erfolg in der Statik die Begriffe «des Differentialparameters und Potentials von Gauss, Lamé, Liouville «u. a. eingeführt und angewandt worden sind. Die meisten hier ein-«schlagenden Sätze sind aber durchaus nicht auf den Raum beschränkt, «sondern gelten für jede beliebige Totalität. Dieses nachzuweisen, ist «der Zweck der folgenden §§. Ein Satz oder eine Methode, in «spezieller Fassung vorgetragen, erscheint zwar oft schon in seiner «ganzen Schönheit und Trefflichkeit und gewinnt durch Verallge-«meinerung kaum noch etwas. Ich bin daher weit davon entfernt «von den folgenden §§ mir ein Verdienst beizulegen, allein erstens «glaube ich die Verallgemeinerung jener Begriffe in einer Theorie «der vielfachen Continuität nicht übergehen zu dürfen und zweitens «wird auch das Interesse daran wachsen, wenn gegen das Ende dieses

[1]) Biographie pag. 57, No. 243.

«Abschnittes Schwierigkeiten sich lösen werden, welche die beim «Raum vorkommenden beträchtlich übersteigen.

«Wenn darin auch das meiste bloss als generalisirende Nach-«ahmung der genialen Arbeiten der erwähnten Analysten erscheinen «muss, so wird sich doch am Ende dieses Abschnitts eine sehr allge-«meine Form der Entwicklung arbiträrer Functionen von beliebig «vielen Variablen in Reihen von periodischer Natur finden und über-«dies glaube ich Dinge, die mit der Theorie der vielfachen Continuität «in so engem Zusammenhang stehen, hier nicht übergehen zu sollen.» ——

Schläfli an Steiner.

Mein hochgeschätzter Freund!

Obschon die Lösung der bekannten Aufgabe, die Curven vierten Grades betreffend, noch nicht weit gediehen ist, so erlaube mir doch die Bemerkung, dass dieselbe in einer noch allgemeinern Aufgabe enthalten ist, welche ganz dieselben combinatorischen Beziehungen zwischen ihren Lösungen darbietet. Nämlich, wenn eine Curve $2n^{ten}$ Grades als Basis gegeben ist, wie viele $[n-1]$ fachen Schaaren von Curven $(2n-2)^{ten}$ Grades giebt es, welche jene in $2n(n-1)$ Punkten berühren? Oder, wenn auf der Basis $n-1$ Punkte gegeben sind, wie viele Curven $(2n-2)^{ten}$ Grades berühren jene in den gegebenen Punkten und ausserdem noch in $(2n-1)(n-1)$ Punkten? Aus combinatorischen Gründen folgt, dass die verlangte Zahl eine um 1 verminderte Potenz von 2 sein muss. Um zum Ziele zu gelangen, scheint es mir vor der Hand das Rathsamste, die Bedingungen zu studiren, unter denen die Resultante zum vollständigen Quadrat wird, und bin gesonnen, mit einigen speziellen Fällen anzufangen, wie z. B. wenn ein Kegelschnitt durch 3 gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt zweimal berühren soll, was 4 Lösungen giebt.

Unglücklicher Weise liess ich mich durch das noch am Montag Morgen regnerisch aussehende Wetter abhalten, nach Sitten zu gehen. Wenn Sie die Güte haben wollen, mit einigen Zeilen mir zu antworten, so wird es mich freuen.

Sie freundschaftlich grüssend

Ihr dankbarer Schüler

Bern, den 18. Aug. 1852.

L. Schläfli, Docent.

Interessante Notizen über den Aufenthalt in Vichy, August 1853 sowie Briefe Steiner's an Schläfli.

Im Jahr 1853 musste Steiner zum Kurgebrauch nach Vichy reisen. Er hatte sich vorher bei *Terquem* orientirt, um die Adressen der französischen Mathematiker zu erhalten. Terquem schrieb ihm unter dem 15. Juli 1853:

«*Mon cher géomètre !*

«Voici les adresses:

«Bertrand, rue d'Enfer 13;

«Sturm, place du Panthéon 9;

«Wertheim, cité d'Antin 4;

«Chasles, passage Ste-Marie 3;

«Lamé, rue Madame 48;

«Poncelet, rue Vaugirard, vis-à-vis la porte du Luxembourg.

«Je crois que ce sont les seuls personnes, que vous désirez voir.

«Votre tout affectionné

O. Terquem,
rue d'Enfer 48.»

Anschliessend folgen einige Notizen Steiner's, bei denen zugleich das Datum und der Ort notirt ist, wann er sie niedergeschrieben hat.

Paris. Juli 1853. Notizen.

«1. *Von Silvester.* Ein Engländer (Cayley) soll gefunden haben: «*dass f^3, im Allgemeinen, 27 G. enthält.* Nachzusehen wie viele ich «bei den schwierigen Polar-Betrachtungen gefunden habe. Bei einer «bestimmten $f_1{}^3$ zeigten sich früher nur 6 G; bei der Panpolare F^3 auf «$B(f^2)$ nur 11 G.

«2. *Serret jun. Mittels des Cirkels allein* auf der Zylinderfläche «einen Strahl zu finden?

«Ich frage: Wie findet man auf der Kugel den Hauptkreis, der «durch 2 gegebene p geht? d. h. irgend einen 3ten Punkt desselben. — «Wie zu p dessen Gegenpunkt p_1? — Sind $2p = a, b$, so finden sich «leicht 2 Punkte c, d, wo $ac = ad$, $bc = bd$ und sodann Punkte x, «wo $xc = xd$, also x im Hauptkreis durch a und b liegt, der die Orts-«linie für c und d ist. D. h. um a, b mit Radien α, β Kreise; ihre Schnitte «$= c, d$; um diese mit gleichem r Kreise, liegen die je 2 Schnitte «x, x in Hauptkreis ab.

«3. *Silvester* hat gefunden: «*Die f^3 hat 5 Grundebenen, der* «*Schnittpunkt P je 3er und die Schnittlinie L der je 2 übrigen sind* «*der Art conjugirt, dass die B. C. des Kegels aus P aus 2 ebenen* «*Curven C^3 besteht, deren Ebenen durch L gehen, und zu den Grund-* «*ebenen harmonisch sind.*»

«Dieser Satz muss in dem meinigen enthalten sein, wonach der «Ort des Pols P, dessen 1te Polare f^2, in Bezug auf die gegebene f^3 «ein Kegel f^2_k ist, eine bestimmte F^4 ist. Denn die Silvester'schen «10 Punkte P_0 sind diejenigen, für welche f^2_k in $2\,f^1 = 2\,e$ zerfällt. « — In jeder L liegen 3 Punkte P_1 und diesen entsprechen $3\,L_1$, die «durch P gehen (der jener L entspricht).

«Da die 2te Polare f^1 von P ebenfalls durch L geht, so muss von «jedem P in L sowohl die erste als 2te Polare durch P gehen, also «die erste stets ein Kegel sein. Danach hätten also die 10 L eigen- «thümliche Bedeutung; sie lägen in jener Ortsfläche F^4; diese wird «von jeder der 5 Grundebenen E in 4 L geschnitten, welche eine «spezielle C^4 sind.

«Bewegt sich P in 1 freien E, so entspricht ihm eine $SS(f^2)$ mit «8 p (wovon der *eine nothwendig*) und sein Ort in dieser E, wo ihm «f^2_k oder dessen Scheitel Q entspricht, ist eine Curve C^4, welche durch «die 10 Schnitte π von E mit den 10 L geht; der Ort von Q aber «ist (nach Älterem) eine C^6_d, die durch die 10 P_0 geht. Einer 2ten «E_1 entspricht eine andere Curve doppelter Krümmung C^6_{d1}, die mit «C^6_d, ausser den 10 P_0, noch 4 Q gemein hat, entsprechend der Schnitt- «linie G von E und E_1. Also gehen alle C^6_d durch die 10 P_0.

«Vorhin, bei P_1 in L_1 *bilden die Polaren f^2 einen solchen speziellen* «*Büschel $B(f^2) = B(f^2_k)$, dessen gemeins. Schnitt C^4_d aus 4 durch P* «*gehenden Geraden λ besteht*: nämlich die Schnittlinien der 3 Paar «Ebenen $f^2_k = 2\,e$, die durch die Kanten (3 L) der Ecke P gehen «und zu den Flächen derselben harmonisch sind.

Ueber die gegenseitige Beziehung der Doppeltangenten der Curve 4ten Grads.

Für M. *Terquem*. (Paris 1. Aug. 53.)

«1. Ist ein Kegelschnitt A^2 einer Curve 4ten Grads C^4 einge- «schrieben, d. h. berührt er diese in 4 Punkten a, so kann A^2 sich «stetig bewegen und so ändern, dass er stets die Curve C^4 in 4 «Punkten berührt, und zwar liegen die neuen Berührungspunkte $4a_1$, «stets mit den anfänglichen 4a in irgend einem Kegelschnitte C^2, so «dass umgekehrt jeder durch die 4 Punkte a gelegte Kegelschnitt C^2 «die Curve C^4 in 4 solchen Punkten a_1 schneidet, in welchem sie von «einem zweiten Kegelschnitte A_1^2 berührt wird, der durch stetige Be-«wegung und Aenderung in den ersten Kegelschnitt A^2 übergehen «kann. Dabei erscheint die Curve C^4 als Enveloppe der Schaar Kegel-«schnitte A^2, A_1^2, . . . , die wir durch S (A^2) bezeichnen wollen.

«*Eine beliebige Curve 4ten Grads, C^4, ist im Allgemeinen, als «Enveloppe von 63 verschiedenen Schaaren Kegelschnitte, $S(A^2)$, an-«zusehen.*» Oder: «*Soll die gegebene Curve C^4 in einem auf ihr ge-«gebenen Punkte a_0 und nebstdem in irgend drei andern Punkten a «von irgend einem Kegelschnitte berührt werden, so giebt es 63 Lös-«ungen.*»

Besser: «*Soll ein Kegelschnitt A^2 gefunden werden, welcher die «gegebene Curve C^4 in einem auf ihr gegebenen Punkte a_0 und nebst-«dem in noch irgend drei andern Punkten a berührt, so finden 63 «Lösungen statt.*»

Vichy, Freit. 12. Aug. 1853.
(Ankunft in Vichy 5. August wahrscheinlich.)

«1. H. *Schläfli hat den Satz über die conjug. Durchmesser der «C^3 zu kontrolliren.*

«2. H. *Terquem* die geeigneten Sätze in der von Dr. Hirst über-«setzten 2 Abhandl. zuzustellen. Auch andere, im Crelle'schen Journ. «gegebene Sätze, damit zu verbinden. Auch neue Sätze beizufügen.

«3. *Schläfli.* Die Lamé'sche Untersuchung der Wellenfläche, in «Rücksicht eines Systems mit ihr concentrischer Kugeln und Ellipsoide «(mit proportionalen Axen) — zu erzählen und darauf zu hetzen. «Desgleichen auf die Sätze von *Sylvester* und *Cayley* über f^3: dass «diese 27 Gerade und 5 Grundebenen enthält.[1])

«4. *Liouville* oder *Terquem* die Sätze und Aufgaben über höhere «Berührung der Curven, welche schon im vorigen Jahre in Bern «Schläfli mitgetheilt worden, und wozu die 63 Schaaren $S(C^2)$ in C^4 «ein schönes Beispiel sind.

«Desgl. die Bestimmung der Curven im Raum (Doppel-Krüm-«mung), als Schnitte von Flächen, wobei von diesen ein Theil des Schnitts «gegeben ist. Cayley hat schon drein gepfuscht; zu citiren.»

«*Was im Winter 1853/4 auszuarbeiten ist.* (Paris 3. August 1853.)

«I. *Im Grossen*: *Entweder*: 1) die Abhandlung von 1848; oder «2) die populären Kegelschnitte: oder 3) 2ter Theil der Gestalten.

---

[1]) Hier bemerkt Steiner: «Gethan».

«II. *Im Kleinen, für Liouville:* 1) Gauss-Jacobischen Satz, Rück- «sicht auf Schumachers Astronomische Nachrichten. Ueber die Evolut- «Fläche, die Monge'schen Sätze, die 1837 gemacht (und vielleicht durch das «Stadtvogtei-Mensch zerstört worden sind); sie entstanden, weil Nudel «mich täuschte. 2) Den Satz wie zu zwei gegebenen C^2 die Basis zu «finden ist; was schon im Dez. 1845, vor Ausbruch der Nudelei ge- «macht worden und 1846 in der Akademie bereits angeführt. 3) Der «2 bis n Sprung bei A_1 auf A, und B_1 auf B; und der famöse 3 Sprung «bei E_1 auf E. 4) Aufwärmen der Polyeder-Sätze, um *Brin* und *August* «zu eliminiren. 5) Die statischen Sätze (Joggeli Schweins), ...; Vir- «tuelle Geschwindigkeit. — Ferner: 6) Das Trippel-Strahlsystem, wenn «der Scheitel in f^2 (Römer-Notizen); 7) Die Polarität auf f^2 und auf «$B(f^2)$. Bei (6.) das System Trippel-Netze von $B(f^2)$, und B B (f^2).

«III. Avec M. P o l q u é s eine Géométrie déscriptive».

Vichy, Sonntag 21. Aug. 53.

«*Betrachtung der f^3* [1]*); 1. Die 2^{te} Polare einer E ist eine φ^3(Fläche);* «denn sie wird von jeder G in 3 Punkten geschnitten, weil für P in «G ein Büschel $B(f^2)$ entsteht, wovon nur 3 die E berühren. Also «ist auch die Enveloppe aller Durchmesser-Ebenen der gegebenen f^3 «eine $\varphi_0{}^3$. Ist sie auch der Asymptotenfläche der f^3 eingeschrieben, «und wo berührt sie dieselbe? Ist auch $\varphi_0{}^3$ der Ort aller P_0, deren «innere Polaren $f_i{}^2$ oder $J_f{}^2$ Zylinder sind? Es scheint. — Wenn für «P in f^3 auch $J_f{}^2 = K^2$ (Kegel) wird: so muss die Schnittcurve $C_\varphi{}^9$ «von f^3 und $\varphi_0{}^3$ ausgezeichnete $P_0 = Q_\varphi$ enthalten; deren $J_f{}^2$ sich auf «ein Gerade ab $= S_t$, 2 E in ab ihr Schnitt reduciren. Giebt es P, «für welche $J_f{}^2$ aus E $\overset{\shortmid\shortmid}{\underset{\shortmid\shortmid}{}}$ E [2]) besteht? Die Sylvesterschen 10 P_0.

«2. Der aus jedem P an f^3 gehende Kegel ist 6^{ten} Grads, aber «wievielter 12^{ter} Klasse? d. h. wieviele Berührungs-Ebenen der f^3 «gehen durch eine G? 12.

«3. Die $\varphi_0{}^3$ ist 4^{ter} Klasse, durch jede G gehen vier Berührungs- «Ebenen; denn die Polaren $B(f^2)$ von P in G haben eine $C_d{}^4$, welche «E in 4p trifft, deren 2^{te} Polaren jene 4 Berührungs-Ebenen sind.

[1]) Steiner würde wohl sehr unzufrieden sein, wenn er wüsste, dass diese seine Notiz über die f^3 gedruckt wird. Es geht daraus nämlich unzweifelhaft hervor, dass er die Hauptresultate von Cayley und Sylvester kannte, die er doch in seiner Arbeit vom Jahr 1854 nicht citirt. Herr Geiser fügt dieser Bemerkung noch bei, dass ihm dieses eigenthümliche Verschweigen schon längst bekannt gewesen sei.

[2]) Sollte vielleicht E + E geschrieben sein, da diese Steiner'sche Bezeichnung ein Ebenenpaar bedeutet.

«4. So ist die Enveloppe φ_0 der Durchmesser-Ebenen der f^4 «vom 12ten Grad und von der 9ten Klasse. — Von f^n ist $\varphi_0 = 3(n-2)^2{}_{ten}$ «Grad und $(n-1)^2{}_{ter}$ Klasse. — —»

Steiner reiste dann über Genf nach Bern (siehe nachfolgenden Brief) und hat daselbst die Notizen fortgesetzt.

Bern, 11. Sept. (Fortsetzung von Vichy.)

«5. *Schläfli.* 1) Ob bei f^3 (u. f^n) auch $A_f{}^2$ und $J_f{}^2$ jedes Punktes «P die E_∞ in derselben Curve $C^2{}_\infty$ schneiden? *Ja! Ja!* 2) *Von «wievielter Klasse ist f^3? oder ihr Berührungs-Kegel $P_k{}^6$, in Rück«sicht jeder durch den Pol P gehenden Geraden?* 12ten Ist 1) ja: so «ist für P in $\varphi_0{}^3$ richtig $J_f{}^2$ ein Zylinder. *Ja.*

«6. Auch bei f^n haben $A_f{}^{n-1}$ und $J_f{}^{n-1}$ mit E_∞ die Schnittcurve «gemein. Denn für jede Ebene durch P haben ihre 3 Schnitte C^n, «A^{n-1} und J^{n-1} mit jenen 3 Flächen die Eigenschaft, dass A^{n-1} und J^{n-1} «mit G_∞ die Schnitte gemein haben, daher auch die Flächen $A_f{}^{n-1}$ und «$J_f{}^{n-1}$. Bei f^3 schneiden sich also $A_f{}^2$ und $J_f{}^2$ in einer andern ebenen «Curve R^2 $(= C^2)$, die in der Vertreterin R_c liegt (in der die 3ten «Schnitte c aller durch P gehenden Sehnen ab liegen.)

«*Zu 5. Die f^n und ihr Berührungs-Kegel $K^{n(n-1)}$ sind von der «$n(n-1)^2{}_{ten}$ Klasse.* Weil die Polaren A^{n-1} und A_1^{n-1} von P und P_1 sich «mit f^n in $(n-1)^2 . n$ Punkten schneiden, in denen f^n von solchen «Ebenen berührt wird, die durch die Gerade PP_1 gehen. Die Klasse «von $K^{n(n-1)}$ könnte sein: $= n(n-1)\,[n(n-1)-1]$, so ist sie um «$n(n-1)\,[n(n-1)-1-(n-1)] = n^2(n-1)(n-2)$ verringert, was «anzeigt, dass der Kegel Doppel- und Rückkehrstrahlen, ds und rs, hat, «die wohl eigenthümliche Tangenten aus P an f^n sind. Bei f^3 ist die «Verringerung $= 9 \cdot 2 \cdot 1 = 18$, und daher kann es geben 1.) 9 ds; «2.) 6 ds und 2 rs; 3.) 3 ds und 4 rs; oder 4.) 6 rs. Die Sylvester«schen 10 P_0 zeigen die Wirklichkeit der ds, wenn auch nur 3 reelle; «giebt es noch 4 rs, oder noch imaginäre 6 ds? [1])

1853. Steiner an Schläfli.

«*Lieber Schläfli!*

«Morgen Abend gegen 5 Uhr werde ich mit der Freiburger «Post in Bern eintreffen; gehen Sie also nicht grasen,[2]) sondern

[1]) Herr Geiser bemerkt, dass nicht die 9ds, sondern die 6rs eintreten.

[2]) Botanisiren.

«kommen Sie und fragen Sie unterwegs im Adler[1]) (wo ein neuer «Wirth sein soll) ob ein ordentliches Zimmer zu haben sei. In Genf «musste ich die erste Nacht auf dem Boden liegen. — Ich komme «diesmal von Paris, Vichy (Cur gemacht), Genf, Lausanne, Vivis. Das «Nähere morgen mündlich.

«In Eile. Ihr

J. Steiner.»

Freitag 2. Sept. 53.

Steiner blieb dann mit Schläfli in Bern zusammen und besuchte auch seine Verwandten in Utzenstorf, Bätterkinden und Kirchberg.

Steiner an Schläfli.

Baden, Samstag 15. Octob. 1853.

Lieber Freund!

«Wie Sie am Sonntag, reiste ich erst am Mittwoch von «Bätterkinden ab. Auch hier hat sich meine Cur in die Länge ge-«zogen. In Aarau traf ich mit Ihrem Freund *Steinegger* zusammen «und hier logiren wir im gleichen Haus, wo seit letzten Mittwoch «(12ten) auch *Raabe* bei uns ist, den ich zuvor in Zürich besuchte; «*Moosbrugger* aber ist nicht gekommen. Dass der Marquis[2]) Sie besucht «hat, weiss ich durch Raabe. Letzterer freute sich sehr über Ihre «Beförderung, aber vorgestern auch darüber: dass Blösch[3]) durch Studer «gekalbert hat; nach allen Vorgängen war ich weniger entzückt. «Aber potz Donnerwetter! wer hat nun die Kraft, die höhere Stufe, «die Cima, zu erklimmen?! Würden meine Rathschläge nicht immer «so leicht vergessen, so wäre der Sieg nicht zweifelhaft. Vor-«wärts, vorwärts! der Starke weicht nicht zurück. Sacre nome «de dieu! Die Abhandlungen sind noch nicht versandt, *Raabe*[4]) hat «noch keine, aber ist gespannt darauf. *Aus Gründen*, die ich Ihnen «mündlich sagen werde, schicken Sie auch *Anton Müller*[5]) und *Mousson*[6])

[1]) Altbekannter Gasthof in Bern.

[2]) So wurde Dirichlet von Steiner zubenannt.

[3]) «Blösch» ist im bernischen Dialekt die Bezeichnung für eine «gefleckte», d. h. mehrfarbige Kuh. Die Bemerkung gilt auch für S. 70, wo Steiner Schläfli auffordert zu Blösch zu gehen, «er stösst ja nicht!»

[4]) Raabe, Jos. Ludw., geb. 15. V. 1801 zu Brody, Galizien, Professor der Mathematik am eidgen. Polytechnikum und an der Hochschule in Zürich. † 22. I. 1859.

[5]) Prof. der Mathematik an der Universität Zürich geb. 1799, † 11. VIII. 1857.

[6]) Mousson, Joh. Rud. Albert, geb. 17. III. 1805, Prof. der Physik am eidgen. Polytechnikum, demissionirte 1878, † 6. Nov. 1890.

«jedem ein Exemplar, *vergessen Sie es nicht.*[1]) Von Raabe können Sie «aus der Zürcher-Bibliothek jedes Buch haben, gegen ein kleines «jährliches Geschenk für den Packer, wie er sagt. *Valentin*[2]) be«zieht auch.

«Mittwoch (19ten Oct.) Nachmittag etwa 5 oder 6 Uhr werde «ich in Basel im *Storchen* eintreffen und hoffe Sie da zu treffen; «Ihre Vorlesungen und Zuhörer können kein Hinderniss sein. Bringen «Sie die verlangte Uebersicht des Buchs über die «*Geometrie mit n Dimen«sionen*» endlich mit. Können Sie oder wollen Sie nicht kommen, so «denken Sie an das, was ich Ihnen so oft gesagt habe: einen Auszug von «4—6 Bogen nach Wien, meinetwegen an *Herrn von Ettingshausen*. «sich auf mich berufen, mit einem Gruss; oder nach Paris.

«Auf baldiges Sehen

Ihr

J. Steiner.»

1854. Steiner an Schläfli.

Der nachfolgende Brief Steiner's vom 10. März 1854 ist im 1. Theil an Schläfli, im 2. an Professor Ris gerichtet[3]).

Berlin, den 10. März 1854.

«*Mein lieber selbstmörderischer Freund!*

«Die mir mitgetheilten Sätze waren mir sehr willkommen, «besonders der eine, den ich falsch hatte und bald nach Paris an «*Terquem* geschickt hätte. Nämlich ich hatte: dass die Fläche f^m von «$B(f^n)$ in $m[3(n-1)^2 + 3(n-1)(m-1) + (m-1)(m-2)]$ Punkten «berührt werde, wo Sie, gewiss richtig, nur $m[3(n-1)^2 + 2(n-1)$ «$(m-1) + (m-1)^2]$ angeben. Aber damit kann ich in den speziellen «Fällen nicht zu Recht kommen, wo die f^m in Theile, Ebenen, etc. «zerfällt. In dem Betracht entsteht die Frage: a) Wenn f^m einen «Hornpunkt δ hat, für wie viele Berührungen zählt denn die durch «denselben gehende f^n, etwa für 3 oder 6? und b) für wie viele «Berührungen zählt es, wenn eine f^n die Doppellinie l_2 der f^m berührt? «Z. B. die f^4 wird von $B(f^3)$ in 132 Punkten berührt; besteht nun «f^4 aus 4 Ebenen E, so hat sie 4 δ und 6 l_2; jede E wird 12 mal

[1]) Raabe gedachte der philosoph. Fakultät der Hochschule Zürich Schläfli zur Ehrenpromotion vorzuschlagen. (Siehe Biogr. Bern. Mitth. S. 131, 132.)

[2]) Professor der Physiologie an der Hochschule Bern. † 23. V. 1883.

[3]) Dieser wichtige Brief ist nach den Poststempeln erst am 11. April 1854 von Berlin ab und am 14. in Bern angekommen.

«berührt, macht =48; jede l_2 wird 4 mal berührt, zählt 6.4×x, und «die 4 δ zählen 4×y; also 24x+4y=132—48=84. — Dabei hätte «ich sehr nöthig zu wissen: «*In welcher Curve R^x die Punkte liegen, «in denen f^m von einer $SS(f^n)$*, d. h. von den durch irgend 3 ge«gebene f^n bestimmten Schaar-Schaar (was ich ein «*Halbnetz*» «$=HN(f^n)$ nenne) *berührt wird*». Oder mein Zweck wird auch da«durch erreicht: «*Wenn 4 beliebige f^n gegeben, so giebt es solche «Pole P, deren 4 erste Polaren f^{n-1} sich in irgend einem Punkte «Q treffen: den Ort dieses Punktes Q anzugeben, die Fläche Q^x?*» «Der Ort von P ist eine Fläche $P^{4(n-1)^3}$. — Wenn oben der $B(f^n)$, «oder insbesondere nur $B(f^2)$ sich in einer C^2 berührt, statt in R^4 «schneidet, so ist die doppelt gedachte Ebene der C^2 als eine spe«zielle Fläche f^2 anzusehen, und es ist die Frage, *wie viele von den* «$m[3+2(m-1)+(m-1)^2]$ *Berührungspunkten auf ihren Schnitt C^m «mit der f^m kommen?* Ich glaube 2 m. Ist es so, so ist eine weitere «Folge: «*Dass aus jedem Punkte P, im Allgemeinen, m^3 Normalen «auf die f^m möglich sind.*» Nun schwebt mir vor, dass *Terquem* «irgendwo bewiesen habe: dass aus P auf f^2 nur 6 Normalen gehen, «statt nach meinem Satze $2^3=8$. Wer hat recht? Durch eine «andere Betrachtung kam ich auch auf m^3.

«Als ich vor 6 Wochen wieder auf die f^3 kam, schien mir, wie «schon in Bern, dass ich die 27 Geraden g schon früher müsse be«obachtet haben. Nach wiederholtem Durchstöbern meiner Papiere «fand ich endlich, dass ich schon im J. 1846 und nachträglich 1850 «dieselben ziemlich ausführlich behandelt habe, jedoch nicht mit dem «Bewusstsein, dass es die allgemeine f^3 sei. Die 45 Dreiecke werden «da schon aufgezählt, und ihnen entsprechend 45 Systeme Flächen «f^2, 45 $\Sigma(f^2)$, welche die f^3 in je 3 ebenen Curven C^2 schneiden. «Unter jedem System $\Sigma(f^2)$ soll sich eine Schaar Kegel, f_0^2, befinden, «mit der unbewiesenen Angabe: «*Dass ihre Scheitel in einer f^4 liegen.*» «Ferner wird da bemerkt: «*Dass die f^3 durch die 5 Seiten a, b, c, «d, e eines schiefen 5 Ecks* (keine 3 Seiten in einer Ebene) *und durch «irgend eine 6^te^ Gerade f bestimmt sei.*» Nämlich jede Ebene E durch «f schneidet die Seiten in 5 p, die eine C^2 bestimmen, welche die f^3 «beschreibt. Auch sind die 5 Paar Geraden g (von den 27 g), welche «die f schneiden, sehr einfach bestimmt; nämlich die Seite a schneide «die Ebene (cd) in α, und die durch α und f gelegte Ebene schneide «b, c, d, e in β, γ, δ, ε, so sind $\alpha\gamma\delta$ und $\beta\varepsilon$ eins der genannten «5 Paare. 2 g. Es wird ferner behauptet: «*Die der Geraden f gegen-*

«*überstehenden 16 Geraden g sollen unter sich 192 schiefe 5 Ecke*
«*bilden, und im Ganzen sollen die 27 g 2592 solche 5 Ecke bilden.*»
«Ich bitte dies zu controliren und systematisiren, es fehlt mir jetzt «die Kraft dazu. Im Manuscript von 1850 stehen auch die Sylvester' «schen 5 Grundebenen E_0, aber ohne klares Bewusstsein. Die 10 «Schnittlinien l derselben liegen in der Kernfläche f_0^4 und «*ihre 10* «*Schnittpunkte p sind Hornpunkte derselben*»; ist das Letzte wahr? «Nicht wahr: es giebt nur Ein System von 5 *reellen* Grundebenen E_0, «trotz der 19 Gleichungen dritten Grads, aus denen sie folgen? — «Der Schnitt der Basis f^3 mit der Kernfläche f_0^4 ist eine R^{12}, mit der «ich mich schon ehemals sehr gequält habe; sie geht durch die 54 «Asymptotenpunkte π der 27 g. Die Pole, deren Polaren Kegel f_0^2 «sind, sind sich conjugirt, reciprok, P und Q. *Liegt nun P im Schnitt* «*R^{12}, so ist die Frage, welchen Ort Q habe, und wie sich die beiden* «*Polarkegel f_0^2 (von P und Q) zu einander und gegen die Basis f^3* «*verhalten?* Ich komme dabei immer auf Widersprüche. Es muss in «R^{12} eine bestimmte Anzahl ausgezeichnete Punkte P_0 geben, ausser «jenen 54 π. —

«Ueber die Flächen und Raumcurven seufze ich nicht minder «als Sie, und zwar schon seit Jahren; doch: «Ich seh', dass Du zu «einer Last, noch sehr gesunde Schultern hast; entschlossen bist, «mich hochzutragen, drum werd' ich Dir die Wege sagen.» Ihre «Raumcurve $R^m \times n$ ist sehr speziell und die allgemeine R^p, kann nur «sehr künstlich erzeugt werden; daher rührt all' unser Elend. Schon «die R^3 entsteht künstlich; durch 2 Hyperboloide (oder Kegel), die «eine g gemein haben. Die R^4 ist frei, entsteht durch 2 f^2. Die «R^5 künstlich, nämlich sie entsteht: a) durch f^3 und f^2, die nebstdem «eine g gemein haben; b) durch f^3 und f_1^3, die nebstdem entweder «1) eine R^4; oder 2) $R^3 + g$; oder 3) $C^2 + C_1^2$; 4) $C^2 + 2g$; oder «5) 4g gemein haben. Von diesen sechs R^5 ist die erste (a) die «beschränkteste und (b, 1) die freieste; durch die 5 unter (b) be- «griffenen R^5 kann keine f^2 gehen. Vergleichen Sie alle sechs. *Wie* «*viele solche Gerade γ giebt es, welche die R^5 (b) in 3 Punkten schnei-* «*den?* Aber noch mehr: selbst die in f^3 liegenden R^4 hat man viel- «leicht dabei auch noch zu unterscheiden, danach nämlich, ob die durch «R^4 gehende f^2 die Basis f^3 nebstdem noch α) in einer C^2 (deren «Ebene durch eine der 27 g geht) oder β) in 2 nicht in einer Ebene «liegenden g schneidet. Ferner: «*Ist durch R^5 und irgend eine Ge-* «*rade f die f^3 bestimmt?*» d. h. jede E durch f schneidet R^5 in 5 p, «die eine C^2 bestimmen, deren Ort die f^3 ist. Oder muss zu diesem «Zwecke f gegen R^5 eine bestimmte Lage haben? glaube nicht. — «Die R^6 ist a) als Schnitt von f^3 und f^2 beschränkt $= R^{3\times2}$; allge«meiner, aber künstlich wird sie erzeugt b) durch f^3 und $f_1{}^3$, wenn «diese nebstdem 1) eine R^3; 2) $C^2 + g$; 3) 3g; oder 4) C^3 (ebene) «gemein haben. In den 4 Fällen (b) geht keine f^2 durch die R^6. «Bei 2) und 3) giebt es noch Nüancen, je nachdem C^2 und g oder «die 3 g sich schneiden oder nicht. Frage: «*Liegen in der freien f^4 «solche allgemeinere R^6 (b)?*» Dann könnte ich die f^4 erzeugen; sie «würde x-Systeme von R^6 enthalten. Es wird keine allgemeine R^6, «als die unter (b, 1) geben!? — Bei einer R^6 (es wird wohl die «allgemeinste oder freieste sein) fand ich: «*Dass durch jeden Punkt «π in ihr drei solche Gerade γ gehen, wovon jede sie noch in irgend «2 andern Punkten π trifft*»; *so dass es also drei Schaaren von drei«mal schneidenden Geraden γ giebt; aber von allen diesen Geraden «können sich keine zwei ausserhalb der Curve R^6 treffen; keine Ge«rade γ kann die R^6 in 4 π treffen, und keine E kann sie in 6 π «schneiden, die in einer C^2 liegen.* [1]) — So fahren Sie nun fort, mit «R^7, . . . etc. — Aber dazu die Frage: «*Durch wie viele Punkte ist «die freie R^n bestimmt?*» In Rom habe ich mich damit befasst, kann «mich aber nicht erinnern und heute die Papiere nicht finden; mich «dünkt, ich schwankte damals zwischen 2 Antworten, nach der einen «war R^n durch 2 n Punkte bestimmt, wie dies bei R^3 und R^4 der «Fall ist.

«Ihre drei Sätze über die $R^{m\times n}$ sind sehr schön; der vierte «dazu betrifft die Klasse dieser Curve, d. h. die Zahl ihrer Schmieg«ungsebenen, welche durch irgend einen Punkt im Raume gehen; sie «ist $= 3mn(m+n-3)$.

«Wird f^n von beliebiger Ebene E in C^n geschnitten und werden «längs dieser die Berührungsebenen an jene gelegt, die eine ab«wickelbare Fläche bilden, «*so ist diese vom $n(3n-5)^{ten}$ Grad und «von der $n(n-1)^{ten}$ Klasse, und ihre Knotenlinie ist vom $3n(n-2)^{ten}$ «Grad.*» Ich bitte zu controliren, es ist wesentlich, weil es zugleich «der Charakter der Asymptotenfläche jeder f^m ist.

«Bei der freien f^4 giebt es doppelt berührende Ebenen E_2, die «sie in 2 Punkten a und b berühren. Der Ort der E_2 ist eine ab«wickelbare Fläche; den Grad und die Klasse, sowie den Grad der

---

[1]) *In welcher Fläche liegen die dreieinige Schaar Geraden γ?*

«Knotenlinie dieser Fläche zu finden; desgleichen den Ort der Berühr-«ungspunkte a und b.

«Der C^3 können Schaaren vollständige Vierseit eingeschrieben «werden. «*Können der freien C^4 auch vollständige Fünfseit einge-«schrieben werden? giebt es eine Schaar oder nur eine bestimmte An-«zahl?*» Desgleichen der C^5 vollständige Sechsseit, etc.

«Ueber die nothwendigen Punkte 1) bei Flächen, 2) bei Curven «R^n und Flächen f^m, die sich schneiden, und 3) bei Curven R^n und «R^m, die in derselben Fläche liegen, habe ich auch noch nichts Er-«hebliches gefunden, und in diesem Moment ist mir gar nichts gegen-«wärtig, ich hoffe aber nächstens daran zu kommen. In Crelle's Journ. «hat Jacobi lateinisch darüber geschrieben, d. h. über die Flächen (1), «aber es wird nur das Einfachste, Allgemeine sein, was sich von selbst «versteht.

«Ihre Angabe: «dass die Doppellinie einer f^ν vom $\frac{1}{2}\nu(\nu-4)^{\text{ten}}$ «Grad sei», macht mich stutzen, da sie also bei f^5 vom $2^1/_2$ Grad sein «müsste.

«Es thut mir leid Ihren Herzenswunsch in Rücksicht der Rela-«tion zwischen den Abständen der Brennpunkte nicht genügend be-«friedigen zu können. Denn Einmal ist der Satz mehr durch Divi-«nation entdeckt, als streng bewiesen, und zum Andern entsprang er «aus sehr complicirten Betrachtungen über die Curven 3^{ten} Grads, be-«treffend involutorische Eigenschaften, eingeschriebene vollständige «Vierseit und dazu noch — mich fast erdrückende — Schaaren und «Netze von Kegelschnitten. Dies waren bisher theils noch Staatsge-«heimnisse, aber in diesem Augenblicke sind sie mir selbst fast un-«bekannt. An Bekanntes anknüpfend, kann ich Ihnen kurz folgendes «andeuten. Sie wissen die Trippelcurve C^3 (und somit jede C^3 über-«haupt) hat conjugirte Punkte p und q; «*alle Paare p und q be-«stimmen mit jedem Punkt a in C^3 ein (Involutions-) Strahlsystem.*» «Nun liegen die Brennpunkte der dem vollständigen 4Seit eingeschrie-«benen C^2 in einer *besondern* C_0^3, bei welcher eine bestimmte Gerade «im Unendlichen liegt, und bei welcher die Brennpunktenpaare gerade «jene conjugirten Punkte p und q sind; was dann den Satz zur Folge «hat. Er muss demnach in allgemeinerer Form bei jeder C^3 statt-«finden, rücksichtlich je 3^{er} Paare conj. Punkte p und q und vielleicht «eines Paars conj. Geraden. Das können wir einmal mündlich ver-«handeln; lassen Sie es für jetzt. — Von Ihrer «Aussage, die Sie «einst über die Brennpunkte gethan haben wollen», weiss ich leider «nichts, und verstehe auch nicht, was Sie dabei weiter behaupten. — «Ihr Satz über die Zahl der E, welche $R^m \times^n$ 4punktig berühren, ist «mir neu, ich werde ihn kaum beweisen können. Aber wie steht «es mit R^p?

«Noch ein Sätzchen: «*Bei der freien C^n ist die Evolute von «der n^{2ten} Klasse und vom $3\,n(n-1)^{ten}$* Grad; sie hat $3\,n\,(2\,n-3)$ «Rückkehrpunkte, wovon n auf G_∞ liegen, und zwar G_∞ die Rück-«kehrtangente in jedem ist. Es giebt $2n\,(3\,n-5)$ Kreise, welche die «C^n 4punktig osculiren etc.» «Bei B (C^n) ist der Ort aller Doppel-«tangenten eine Curve $2n\,(n-2)\,(n-3)^{ter}$ Klasse, und der Ort ihrer «Berührungspunkte ist vom $(n-3)\,(2\,n^2+5\,n-6)^{ten}$ Grad.

«Sie haben mich kühn herausgefordert — ich habe 3 Tage «hieran geschrieben — nun mangen Sie alles! Besonders bitte ich «Sie, die am Rande durch Vertikalstriche markirten Sachen [1]) bald zu «machen, weil ich dieselben nach Paris senden will; ich hoffe die f^3 «mit den 27 g nebst Anhang wird Beifall finden; ich habe *Poncelet* «schon davon geschrieben, er freut sich. Da die Correspondenz mehr «in meinem als Ihrem Interesse geschieht, so brauchen Sie nicht zu «frankiren.

Ihr

Steiner.

«Herr Professor Ris! Wenn Ihnen Urias diese Zeilen über-«bringt, so stellen Sie ihn nicht gerade an die Spitze, wo der Kampf «am heissesten ist, damit er umkomme, wohl aber mögen Sie auf «ihn Acht haben (wie Jehova's Meisterknecht auf Hiob) und etwa alle «8 Tage bei ihm nachfragen, ob Folgendes geschehen sei:

«1. Die Exemplare der Wiener Abhandlung zu versenden, be-«sonders an die ihm einst in meinem Zimmer (im Adler) diktirten «54 Adressen, und andere die er selbst wählen sollte. Die Exemplare «für Frankreich können in ein Paket gepackt, darauf geschrieben: «A Monsieur le Président de l'académie de Sciences à Paris, und der «Gesandtschaft übergeben werden. Auf jedes Exemplar ist zu schrei-«ben: A Monsieur N. Hommage de l'auteur, desgleichen auf das für «die Akademie: A l'académie des sciences, Hommage de la part de «l'auteur. Ebenso für England an die Société Royale à Londres durch «Gesandtschaft oder Buchhändler.

[1]) Es sind dies die hier Cursiv gestellten Sätze.

«2. Kleine Aufsätze von einer, 2, 3 oder x Seiten gross, die «irgend ein bemerkenswerthes Resultat enthalten, neu oder ein pi«quanter Satz aus der Wiener- oder einer Crelle'schen Abhandlung «entnommen, französisch an Liouville zu schicken, damit sein Name «(Schläfli's) erst in Umlauf kommt.

«3. Sodann aus der Weltüberstürmenden, aus der Erdewälzenden «Abhandlung[1]) einen verständlichen Auszug, der alle Hauptresultate ent«hält — möge derselbe 4 oder 12 Bogen stark werden — an Liou«ville zur Vorlegung der Akademie, oder unmittelbar an diese schicken.

«Das sind Dinge, die ich auf jedem Spaziergang, gewiss 30 Mal «gepredigt habe; aber er ist ein Ziegel[2]) — ein Selbstmörder aus Fahr«lässigkeit — er will sein Licht nicht leuchten lassen. Den Zürcher «Doctorhut vertrödelt: Er soll die Exemplare nach Zürich spediren, «vielleicht geht es noch.

«In der Hoffnung, dass Sie trotz der Maiwahlen hierfür sorgen «werden, grüsse ich Sie freundlichst.

J. Steiner.»

NB. Nach einem Beschluss der Wiener Akademie vor 1 oder $1^1/_2$ Jahren zahlt dieselbe an Auswärtige kein Honorar mehr.

Das Nachfolgende ist ein unvollständiges Conzept eines Briefes **Steiners** an **Professor Ris** vom 25. III. 1854; wir vermuthen, es ist dies der Anfang eines Conceptes zum vorigen Brief, der allerdings vom 10. März datirt ist, aber erst den 11. April von Berlin abgegangen und am 14. in Schläfli's Hände gelangt.

Berlin, 25. März 1854.

Veehrter Herr Professor und Freund!

«Ich habe Veranlassung, etwas seltenes zu thun, nämlich mich «zu zwingen, ein paar Zeilen zu schreiben. Wenn ich nicht irre, so «waren Sie so freundlich, zu verlangen, dass wenn ein gewisses Er«eigniss eintreten sollte, Ihnen davon Nachricht zu geben. Demzufolge «beehre ich mich nun, Ihnen anbei eine Copie der erhaltenen freudi«gen Botschaft zuzustellen. Vielleicht haben Sie die Sache schon aus «den gestrigen Berliner Zeitungen erfahren. Das fast einstimmige Votum «hat mich sehr frappirt. Falls Sie von dieser Mittheilung Gebrauch

---

[1]) Ueber das vielfache Continuum.

[2]) Uebername, den Steiner Schläfli gab, weil der letztere auf äussere Formen nicht viel Gewicht legte.

«machen, verlasse ich mich auf Ihre umsichtige Klugheit, dass ich «nicht als Helfer erscheine. Die Mathematische Section hat im Ganzen (für die ganze Welt ausser Paris) nur 6 Correspondenten; die «ganze Akademie der Wissensch. bestehend aus 11 Sectionen, nur 100.

«Ueber Politik schreibe ich nicht, die deutsche ist zum K . . «Brechen; das hiesige Kraut-Junkerthum hat vorläufig gesiegt — aber «das Ende vermag kein Sterblicher zu weissagen, und der Bölima — «ich wollte sagen die Vorsehung verkündet es nicht zuvor.

«Das Muggerparteisystem hat es hier soweit gebracht, dass *Vatke* «und *Benari*, die sonst volle Auditorien hatten, im letzten Semester «theils gar keine Vorlesungen hielten, theils nur vor 3—5 Zuhörern. «Denn die bei ihnen hören, kommen schon beim Examen und später «bei der Anstellung übel weg.

«Unserm Freunde Schläfli sagen Sie gefälligt: «*ich hätte ihn* «*ganz verworfen*». Denn alles Reden, Bitten, Donnern, Flehen hilft «nichts. Gewiss hat er die 100 Exemplare noch nicht versendet. «Nach Basel ist er nicht gekommen und hat mir nicht einmal geantwortet; auch nicht den vollständigen Titel seines schönen Werks (die «23 bogige Abhandlung) geschickt. So weiss ich nicht, was ihm in «Kopf gefahren, ob er mir etwas übel genommen und mich plötzlich «verworfen hat. Die Sache ist mir sehr fatal, weil er auf seine Beförderung doch etwas loslassen musste. Raabe hatte die Absicht, ihm in «Zürich den Dr. hon. caus. zu erwirken (als Gegenehre von W.) [1]), dess«halb forderte ich ihn auf, auch an *Mousson* und *A. Müller* Exempl. «zu schicken — aber — —

«Es ist nicht genug, dass er mit ungeheurer Kraftanstrengung «mir behilflich ist, sondern er muss auch für sich selbst bedacht sein, «und meine Behauptungen über seine wissenschaftlichen Leistungen, die «ich höhern Ortes aufstellte, rechtfertigen, um seine Stellung ferner zu «bessern. — Vielleicht hat er mir übel genommen, dass ich darauf drang, «er soll sich mit Mareli vereinen, damit er in Ordnung gehalten und stets «an das erinnert würde, was er zu arbeiten hätte. Unter fremden «Leuten ist es ein Jammer, besonders wenn er erst noch älter ist.

«Mit meiner Gesundheit geht es so ziemlich; nur fehlt die «Jugendkraft und die Phantasie. Ich habe mich diesen Winter viel «mit Arbeiten abgemüht, bin aber nicht auf geeignete Probleme gestossen, welche ich Schläfli zur Lösung senden konnte. Nur etwa «folgende, wenn er mich nicht «verworfen» hat.

---

[1]) Von Wolf, der von Bern den Doctorhut erhielt.

«Hoffentlich wird es Herr Schläfli nicht übel nehmen (wie 1848), «aus Ihrer Hand folgende Aufgaben zu erhalten:

«1. Wenn in einer Ebene 6 beliebige Kegelschnitte C^2 gegeben «sind, so können im Allgemeinen, nicht 6 Flächen 2^{ten} Grads, f^2, durch «dieselben so gelegt werden, dass sie irgend 6 Punkte, p, im Raum «gemein haben.

«2. Dass die allgemeine f^4 keine Gerade g enthält, haben Sie, «wenn ich nicht irre, schon in Bolligen verificirt. Aber zu meinem «grossen Leidwesen kann dieselbe f^4 auch keine Raumcurve 4^{ten} Grads, «R^4, (d. h. Schnitt zweier f^2) enthalten, und demzufolge auch keine R^8, «durch welche eine f^3 gehen kann. — Noch weniger wird also die «allgemeine f^5 solche R^4 enthalten können. Dadurch bin ich leider «ausser Stand gesetzt, diese allgemeinen f^4, f^5, ... auf synthetischem «Wege, nämlich durch niedrigere Flächenbüschel, zu erzeugen. Es «wäre fatal, wenn hier die Geometrie ein Ende hätte.

«Es schwebte mir in Bern und seither immer vor, als habe ich «die 27 g und die 5 Grundebenen in f^3 schon früher gehabt. Vor «3 Wochen stöberte ich endlich meine Papiere durch und fand dann «in Untersuchungen v. J. 1850 alles vor, jedoch schien das Bewusst«sein zu fehlen, dass es die allgemeine f^3 sei. Auch die 45 Ebenen, «in denen die 27 g zu 3 liegen, sind angezeigt, aber nicht die Eigen«schaften der Trieder, welche Sie hinzugefügt haben. Dagegen wieder «andere Eigenschaften von f^3 u. s. w.»

Die **Notizen**, welche sich hier anschliessen, sind Concepte von Fragen Steiner's an Schläfli vom 28. März und 31. März 1854 und beziehen sich auf Sätze, die Steiner vor Terquem entdeckt hatte.

28. März 1854.

f^3.

«Endlich die A_s-fläche der f^3.

«Werde f^3 von E in C^3 geschnitten; längs E die B. E.[1] A. an f^3, «umhüllen einen f_0^x, enthaltend eine Knotenlinie α^z und Schaar «Gerade a, = Schnittlinien der sich folgenden A und = Tangenten «der α^z, und Fläche y^{ten} Grads bildend, $a^y = f^x$; wo also x die «Klasse, nämlich die Zahl der durch jeden beliebigen Punkt π gehenden «B. E. A. bezeichnet.

[1]) B. E. = Berührungsebene.

«Da alle B. E., die durch π gehen, die f^3 längs einer R^6 be-
«rühren, und diese die C^3 (weil ihre E) in 6 Punkten β schneidet,
«so gehen 6 A durch π, und folglich ist

$$x = 6\,;\; f^x = f^6.$$

«Rücken 2β sich näher, bis sie sich vereinen in β_0, so werden
«die zugehörigen 2 A sich entsprechend, und ihre a geht durch π.
«In diesem Falle aber schneidet die Polare f^2 von π (auf f^3) die E
«in einer C^2, welche die C^3 in β_0 berührt; und umgekehrt, findet
«diese Berührung statt, so geht die dem β_0 entsprechende a durch π.

«Bewegt sich π in einer beliebigen Geraden g, so bilden seine
«Polaren einen $B(f^2)$, der die E in einem $B(C^2)$ schneidet, unter denen
«sich 12 solche $C_0{}^2$ befinden, welche die C^3 in 12 β_0 berühren; und
«die diesen β_0 zugehörigen a treffen die ihnen entsprechenden π in
«g; folglich begegnet jede g im Ganzen 12 a, und folglich ist

$$y = 12\,;\; a^y = a^{12} = f^6.$$

«Läge π in der Knotenlinie α^z, wäre es eine α, so müsste die
«entsprechende $C_0{}^2$ die C^3 osculiren, d. h. in einem Punkte β_3 3-
«punktig berühren. Um den Grad z zu finden, hat man demnach wie
«folgt zu verfahren: «*Bewegt sich π in einer beliebigen Ebene g, so
«bilden seine Polaren f^2 auf f^3 ein HN (f^2), welches die E in einem
«$N(C^2)$ schneidet; so viele $C_3{}^2$ sich in dem letztern befinden, welche
«die C^3 in irgend einem Punkte β_3 3-punktig berühren, in ebenso vielen
«Punkten α schneidet g die α^z, und ebenso gross ist folglich z.*» Die
«Beziehung der C^3 und $HN(f^2)$ zu f^3, bringt wohl nicht C^3 und $N(C^2)$
«in gegenseitige Abhängigkeit? sondern sie sind als frei anzusehen.
«Dies bleibt also noch zu lösen.

«*So ist also auch die $(A_s F)$ der $f^3 = A_s{}^6 = a_s{}^{12}$, d. h. von
«der 6^ten^ Klasse und vom 12^ten^ Grad.*» — Die α^z ist mindestens 9^ten^
«Grads, $z =$ oder >9. Denn fällt g auf E, so gelten die wp der
«C^3 für α, also $9\,\alpha$ in E. Es wäre schön, wenn $(A_s F) = A_s{}^6 =$
«$\alpha^9 = a_s{}^{12}$. Da a^{12} von jeder Ebene g in einer γ^{12} geschnitten wird,
«so muss bei E zu der C^3 noch eine γ^9 kommen, sind es die 9 wt
«der C^3? wahrscheinlich.

«Ebenso folgt bei f^4, wenn sie von E in C^4 geschnitten und
«längs dieser alle B. E. A. gelegt werden, dass die

$$«(AF) = A^{12} = a^{28} = \alpha^z;\; z = 24\,?$$

«Und für f^n:

«(AF) $= A^{(n-1)n} = a^{n[n+2(n-1)-3]} = a^{n(3n-5)} = \alpha^{z=3n(n-2)}$?
«wobei immer $a^{n(3n-5)}$ von der E in $C^n + 3n(n-2)$ wt geschnitten
«wird.

«Umgekehrt, von R^n ausgehend. Es ist $R^3 = \alpha^3 = A^3 = a^4$; «$R^4 = \alpha^4 = A^{12} = a^8$; wie weiter? Wie wird R^5 erzeugt?

«*Le lieu de tous les points P_0, dont la première polaire est un* «*cône S_0^2, est une surface du 4me degré*, P_0^4.» L'intersection des deux «surfaces f^3 et P_0^4 est une courbe à double courbure du 12me degré «qui joue de propriétés intéressantes.

«II. La surface générale du 3me degré, S^3, contient en tout 27 «droites d, propriété qui est déjà énoncée, comme on m'a dit par «M. Cayley. Ces 27 droites jouissent des propriétés suivantes:

«1. La surface S^3 contient 27 systèmes de sections coniques; «car chaque plan qui passe par une des droites d coupe la «surface en outre dans une conique C^2. Donc, les plans des «27 systèmes de coniques, $S(C^2)$, passent respectivement par «les 27 droites d.

«2. Chacune des 27 droites d est coupé par 10 autres, qui se «trouvent deux à deux dans un même plan et se coupent «par conséquent elles mêmes et forment avec la première «un triangle. Il y a en tout 45 fois 3 droites d qui forment «un triangle ou qui sont situées dans un même plan, E, et «chaque droite appartient à 5 plans ou est côté de 5 triangles. «Désignons la première droite par d_1, les 5 paires qui la cou-«pent par d_2, il reste encore 16 droites d, que nous appel-«lerons «*les 16 droites opposées à la première d_1*. La droite «d_1 est coupée par les 5 paires.

31. März 1854.

«1. Haben f^3 und H_1^2 eine g gemein, so haben sie noch R^5, «aber diese ist nicht die allgemeine R^5.

«2. Haben f^3 und f_1^3 eine R^4 gemein, so schneiden sie sich «noch in einer R^5; durch diese geht keine f^2; — warum «soll nicht ein H_1^2 durchgehen und noch durch g und g_1? «Weil für R^5 wenigstens 10 p willkürlich anzunehmen sind; «für f^2 nur 9. — Auch wenn f^3 und f_1^3 eine $R^3 + g$ oder «$C^3 + g$ gemein hat.

«3. Der Schnitt von f^3 und f^2, oder von f^3 und f_1^3 die C^3 gemein «haben, ist nicht die allgemeine R^6; ist der Schnitt von f^3

«und f_1^3, die R^3 (oder 3g, oder C^2 und g, die nicht in E) «gemein haben, die allgemeine R^6? — Können f^3 und f_1^3 «auch $2 R^4 + g$ gemein haben? oder $3 R^3$? — Müssen sich «$2 R^4$, die in f^3 liegen, nothwendig schneiden? wenn sie zu «gleicher Schaar gehören, oder nicht? Dito R^6 und R^3 in f^3?

«4. *Giebt es R^6 in der allgemeinen f^4?* Durch eine R^6 wären «∞ viele bedingt; vorausgesetzt, dass durch die allgemeine «R^6 immer f^3, oder $SS(f^3)$ gehen; denn diese schnitten die «f^4 in neuen $SS(R_1{}^6)$, und durch jede $R_1{}^6$ ginge $SS(f_1{}^3)$ und «gäbe $SS(R^6)$, zu der jene R^6 gehörte. Gehen $3 f^3$ durch «R^6, so haben sie paarweise noch $3 R^3$: wie viele gp haben «diese $3 R^3$? — Daraus zu schliessen, wie viele gp die R^6 «zählt, da die $3 f^3$ nur 27 gp haben.

«5. Die f^2 wird vom $B(f_1{}^2)$ 12 mal berührt. Wenn $f^2 = K^2$, «wieviel zählt dann die durch den M des K^2 gehende $f_1{}^2$? «für 2, 3, 4 etc.? Wenn $f^2 = 2 f^1 = 2E$, so wird jede «E von $3 f_1{}^2$, ist $= 6$; die Schnittlinie l wird von $2 f_1{}^2$ «berührt, muss $2 \times 3 = 6$ zählen. Der $B(f^2)$ berührt «die f^3 $27 + x$ mal. Für f^3 und $3 E_1$ jede E 3 mal, $=$ «9; jede l 2 mal, $= 3 \cdot 2 \times 3 = 18$; die durch p gehende «$f^2$ zählt x; macht $27 + x$. Bei $f^3 = f^2 + E$; die f^2 «$= 12$ mal, $E = 3$ mal, $= 15$; Schnitt $C^2 = 12 + x$ mal, (bricht hier ab) — — — — — — — — —

«nämlich der Schnitt von $B(f^2)$ und E ist $B(C_1{}^2)$ und dieser berührt «C^2 6 mal, zählt je 3fach, so ist $x = 6$. Dann zählt also auch vor- «hin die Ecke p 6 mal.

«Also berührte $B(f^2)$ den K^2 6 mal und die durch den Mittel- «punkt M gehende f^2 zählte für 6 mal. Und $B(f^2)$ berührte die f^3 «$27 + x = 33$ mal. Danach würde weiter folgen, dass:

«$B(f^2)$ die $f^4 = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 72$ mal berührt, «abgezählt nach dem speziellen Falle, wo $f^4 = 4 E$.

— «Wenn $f^4 = f^3 + E$, so kommen auf $f^3 = 33$; auf $E = 3$; «ihr Schnitt C^3 wird von Schnitt $B(C^2)$ 12 mal berührt macht, als «3fach zählend $= 36$; zusammen $33 + 3 + 36 = 72$, richtig.

— «Wenn $f^4 = f_1{}^2 + f_2{}^2$; für $f_1{}^2 = 12$ und $f_2{}^2 = 12$; für «Schnitt $R^4 = 48$, wonach er von $B(f^2)$ wohl 16 mal berührt werden «müsste; wenn aber $R^4 = 2 C^2 = R^2 + R_1{}^2$, so werden diese von «$B(C^2)$ und $B(C_1{}^2)$ in $2 \cdot 6$ Punkten berührt $= 12$, aber die Schnitte «2δ von R^2 und $R_1{}^2$ zählen dazu noch doppelt, was 16 giebt; und

«die durch δ gehende f^2 zählt dann für 6. Also: *R^4 wird von $B(f^2)$*
«*16 mal berührt.*

— «Wenn $f^4 = f_1^2 + 2E$, so wird $f_1^2 = 12$, die $2E = 6$ mal, «die $2C_1^2$ (deren Schnitte) $= 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$; die l der 2 E wird «2 mal berührt, zählt $= 2 \cdot 3 = 6$; die 2δ (der l und f_1^2) zählen «$2 \cdot 6 = 12$ mal, also $12 + 6 + 36 + 6 + 12 = 72$.

«So würde folgen; dass f^n von $B(f^2)$ im Allgemeinen:

$$\begin{array}{ccc} n\,E & \frac{1}{2}n(n-1)\,l & \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\,\delta \end{array}$$

$$3n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6$$

$= n[(n-1)(n-2) + 3(n-1) + 3] = n(n^2 + 2)$ mal be- «rührt wird.

«6. Nun haben wir zu sehen, wie oft $B(f^3)$ eine f^n berührt. Der «Schnitt mit E ist $B(C^3)$ mit 12δ, was anzeigt, das 12 f^3 die E be- «rühren.

— «Daher wird f^2 $2 \cdot 12 + x = 24 + x$ mal berührt, nämlich «für $f^2 = 2E$ zählt die l für x mal; in der That wird l 4 mal be- «rührt, zählt jede für y (vorhin $= 3$), so ist $x = 4y$ ($= 4 \cdot 3 = 12$?).

— «Ein f_1^3 würde danach $3 \cdot 12 + 3 \cdot 4y + z$ mal berührt $=$ «$36 + 36 + z = 72 + z$ mal; wobei für $f_1^3 = 3E$, die z mal auf δ «kommen. Für $f_1^3 = f^2 + E$, hat man $24 + 12 = 36$ (in f^2), 12 «(in E), $= 48$ und im Schnitt C^2 durch $B(C^3) = 10$ Berührungen «jede zu 3 gezählt, $= 30$, also $48 + 30 = 72 + z$, folglich auch «hier $z = 6$, d. h. die durch δ gehende f^3 zählt für 6 Berührungen, «so dass $B(f^3)$ eine f_1^3 im Allgemeinen

78 mal berührt.

— «Danach wird f^4 von $B(f^3) = \overset{4E}{4 \cdot 12} + \overset{6\,l}{6 \cdot 12} + \overset{4\,\delta}{4 \cdot 6}$
$= 144$ mal berührt.

— «Und ebenso f^n von $B(f^3) = n \cdot 12 + \frac{n(n-1)}{1\ 2} \cdot 12 + \frac{6n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$= n[(n-1)(n-2) + 6(n-1) + 12]$
$= n(n^2 + 3n + 8)$ mal berührt.

«7. Der $B(f^n)$ berührt eine $E = 3(n-1)^2$ mal; eine $g = 2(n-1)$ «mal. Daher wird eine f^2, als 2 E mit l, $= 2 \cdot 3(n-1)^2 + 2(n-1)$ «$\times\ 3 = 6\,n(n-1)$ mal berührt.

— «Eine f^3 oder 3 E mit 3 l und δ wird
«$3 \cdot 3(n-1)^2 + 3 \cdot (2n-2) \times 3 + 6$ mal berührt.

— «Die f^4 oder 4 E mit 6 l und 4 δ wird
«$4 \cdot 3(n-1)^2 + 6 \cdot (2n-2) \cdot 3 + 4 \cdot 6$ mal berührt.

— «Und eine f^m oder $mE + \frac{1}{2} m(m-1) l + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta$

wird $m \times 3(n-1)^2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \times 2(n-1) \cdot 3 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 6$,

$= m\,[3(n-1)^2 + 3(m-1)(n-1) + (m-1)(m-2)]$,

$= m\,[(m-1)(m-2) + 3(n-1)(m+n-2)]$ mal berührt.

$\| = m[3(n-1)^2 + 2(n-1)(m-1) + (m-1)^2]$ nach «Cima Bue (Schläfli).

«Für $m = n$ kommt:

$= 6\,n(n-1)^2$

«dass $f_1{}^n$ von $B(f^n) = n(n-1)(7n-8)$ mal berührt wird.

«*Daraus ist zu schliessen, dass im HN (f^n) der Ort der B. P. «oder der Hornpunkte*[1]) *δ eine R^x ist, wo*

$$«n \cdot x = 6\,n(n-1)^2, \text{ also}$$

$$«x = 6(n-1)^2, \text{ folglich}$$

«*eine $R^{6(n-1)^2}$ ist.*

«Auch ist nun zu finden, wie oft eine R^y von $B(f^n)$ berührt wird.

«Der $HB(f^n)$ hat nothwendige n^3 Grundpunkte q; durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3$ derselben ist der Büschel bestimmt, und «damit auch die übrigen

$$n^3 - \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) + 3 = \frac{n-1}{6}(5n^2 - n - 12)$$

«Punkte q. Oder man hat den Satz (analog, wie Curve in E):

«*Durch $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 3$ beliebig gegebene Punkte q «geht eine $S(f^n)$, welche Hornpunkte δ haben, und der Ort der letztern «ist eine Raumcurve $6(n-1)^{2\text{ten}}$ Grads, $R_1{}^{6n}$*, (— aber sie geht «nicht durch die q und hat sie zu dp, wie ich anfangs glaubte). Erst «bei $N(f^n)$, wenn es $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 4$ Grundpunkt q hat, «und der Ort der δ eine Fläche δ^z ist, *hat diese die q zu Horn-«punkten, weil zur Bestimmung einer f^n der angenommene hp für 4 «bestimmende Punkte zählt, also jeder jener q als hp angenommen «werden kann und dadurch die f^n gerade bestimmt ist.*

---

[1]) Siehe Brief von 30. April 1854. Hornpunkte = Knotenpunkte.

«8. Welche Modificationen treten ein, wenn der $B(f^n)$ ein besonderer wird? z. B. wenn, für $n = 2\nu$, er sich in einer $R^{\frac{1}{2}n^2}$ berührt, statt in R^{n^2} schneidet? wobei eine Doppel-f^ν durch $R^{\frac{1}{2}n^2}$ geht und zu $B(f^n)$ gehört. Diess ist dadurch bestimmt, dass man eine f^n und $f^\nu = \frac{1}{2}n$ annimmt; ihr Schnitt ist $R^{\frac{1}{2}n^2} = 2\nu^2$. «*Ist dabei der ganze Schnitt von f^{ν}_{2} mit der f^m als Berührung anzusehen? oder nur diejenigen Punkte, in welchen $R^{\frac{1}{2}n^2}$ die f^m schneidet?*» Das wären «$m \cdot \frac{1}{2}n^2$ Punkte δ, und die übrigen f^n in $B(f^n)$ berührt, dann die «f^m nur noch

$$m[(m-1)(m-2) + 3(n-1)(m+n-2)] - \frac{1}{2}mn^2 \text{ mal.}$$

$$= m(m-1)(m-2) + 3m(m-1)(n-1) + 3m(n-1)^2 - \frac{1}{2}mn^2$$

$$+ \frac{1}{2}m(5n^2-12n+6).$$

«Für $B(f^2)$ insbesondere wird $f^\nu_2 = E$ und $R^{\frac{1}{2}n^2} = C^2$ in E «Schnitt von E mit $f^m = C^m$, und von C^2 mit f^m d. i. bloss mit C^m, «$= 2 \cdot m$ Punkte δ_1, so dass, wenn diese allein zählen, noch «$m[(m-1)(m-2) + 3m] - 2m = m(m^2+2) - 2m = m^3$ Punkte δ «bleiben.

«Daraus würde folgen, wenn $B(f^2)$ concentrische Kugeln sind «(also nach Poncelet E à l'infini und C^2 imaginär), «*dass jeder Punkt p der Mittelpunkt von m^3 Kugeln ist, welche eine gegebene f^m berühren*»; Oder: «*Dass aus jedem Punkte p m^3 Normalen auf die Fläche m^{ten} Grads gehen.*»

«Dies stimmt mit dem andern Prinzip überein, wenn f^m um 2 «Axen durch p unendlich kleine Drehungen macht; sie schneidet sich «selbst in 2 R. C., R^{m^2} und $R_1^{m^2}$, und diese schneiden einander in «dem m^3 Punkte δ. Also Terquem geirrt.

Schläfli an Steiner.

Mein theurer Freund!

Aus einem Brief von Ihnen an Ris bekomme ich zwei Aufgaben, an deren Stelle ich theils Schwereres, theils Mittheilungen erwartet hätte:

Ad 1° Flächen zweiten Grades, welche 6 Punkte gemein haben, sind ein spezieller Fall einer dreifachen Schaar; eine solche ist durch 4 willkürlich gegebene Flächen bestimmt. Wird die dreifache Schaar durch irgend eine Ebene geschnitten, so sind auch die entstandenen Kegelschnitte eine dreifache Schaar, d. h. wenn vier derselben bekannt sind, so ist die Gesammtheit aller übrigen schon bestimmt, und wenn von irgend einem fünften z. B. drei Punkte gegeben sind, so ist er schon bestimmt. Wenn demnach in einer Ebene auch nur 5 Kegelschnitte beliebig gegeben sind, so gehen keine 5 Flächen zweiten Grades durch, welche einer dreifachen Schaar angehören, also in specie keine, welche 6 Punkte gemein haben. Sind aber in der Ebene nur 4 Kegelschnitte gegeben und von den 6 Punkten, welche die durchgelegten Flächen zweiten Grades gemein haben sollen nur drei beliebig gegeben, so durchlaufen die drei übrigen eine Curve.

Ad 2° Es kömmt hier Alles auf die Richtigkeit dieses Axioms an: «Wenn V das Polynom einer algebraischen Fläche bedeutet, welche den Durchschnitt zweier Flächen, deren Polynome F, f sein mögen, ganz enthält, so ist $V = F\varphi + f\Phi$, wo Φ und φ wieder zwei Polynome bedeuten.» Besteht dieses Axiom, so seien die vier Hülfspolynome, in fallender Reihe geordnet, Φ, φ, F, f von den Graden $m - p$, $m - n$, n, p. Man setze $S = \frac{1}{2} p\,(p^2 + 11) - (m - n)\,n p - 1$.

Nehmen wir jetzt die Fläche V als beliebig gegeben an und verlangen von ihrem Polynom die obige Form, so ist die Zahl der nach Abzug aller Bedingungen noch übrigen verfügbaren Grössen

1° S, wenn $m - p > m - n \gtreqless n > p$.

2° $S - 1$, wenn $n = p$ $m > 2p$.

3° $S - 2$, wenn $n = p$ $m = 2p$.

Im ersten Fall hat S immer einen negativen Werth, die Fläche V ist also immer bornirt; z. B. für $m = 4$, $n = 2$, $p = 1$ ist $S = -1$, d. h. die Fläche vierten Grades ist einfach bornirt, wenn sie von einer Ebene in 4 Punkten berührt werden kann (wo dann die Ebene die Fläche in 2 Kegelschnitten schneidet). Im zweiten Fall ist $S - 1$ immer negativ, sobald $p \gtreqless 2$ genommen wird; für $p = 1$ ist die einzig mögliche freie Fläche diejenige dritten Grades, d. h. sie enthält die bekannten 27 Geraden. Die Fläche vierten Grades wird für $p = 1$ schon einfach bornirt; für $p = 2$ ist schon die Fläche 5. Grades vierfach bornirt, d. h. wenn sie eine $C^2 \times ^2$ enthalten soll. Im dritten Fall ist $S - 2 = o$ für $p = 1$, die Fläche zweiten Grades also frei, wenn sie Geraden enthalten soll; aber schon für $p = 2$ wird $S - 2 = - 1$, d. h. die Fläche 4. Grades ist einfach bornirt, wenn sie Durchschnitte zweier Flächen zweiten Grades ($C^{2 \times 2}$) enthalten soll; die Fläche 6. Grades wird 10 fach bornirt, wenn sie $C^{3 \times 3}$ enthalten soll u. s. f.

Dass ich das erwähnte Axiom und andere ähnliche nicht beweisen kann, erschwert mir die Aufgabe, für Flächen und räumliche Curven etwas aufzustellen, was der Theorie der nothwendigen Punkte bei den ebenen Curven entspräche. Unter vielen zum Theil verwickelten Sätzen lege ich Ihnen folgenden zur Beurtheilung vor:

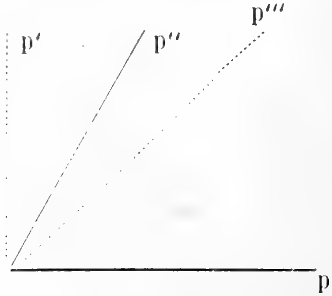
«Wenn durch die $n\,p\,q$ Durchschnittspunkte von drei Flächen n^{ten}, p^{ten}, q^{ten} Grades eine Fläche m^{ten} Grades, die keiner der vorigen an Grad nachsteht, gelegt werden soll, so findet man die Zahl der nothwendigen Punkte auf folgendem Wege. Man entwickle den Ausdruck

$$y^{-m-1}(y^n - 1)(y^p - 1)(y^q - 1),$$

lasse die Potenzen von y, welche negative Exponenten haben daraus weg, setze dann $y = 1 + x$ und entwickle nach den Potenzen von x; dann ist der Coefficient von x^3 die Zahl der nothwendigen Punkte.»

Vielleicht interessirt Sie folgender Satz über die Punkte einer freien Curve $m \times n^{ten}$ Grades, in denen sie von einer Ebene vierpunktig berührt wird. Sie liegen auf einer Fläche $[6(m + n) - 20]^{ten}$ Grades, so dass ihre Zahl $mn\,[6(m + n) - 20]$ beträgt; dieses ist ein Satz, weil dadurch unter den genannten Punkten $\frac{mn}{2}(m + n - 4) + 1$ nothwendig werden.

Es ist aber auch klar, dass die Fläche bei weitem nicht bestimmt ist. Unter den unzähligen möglichen Flächen kann man eine durch folgende Bedingungen angeben. Es seien A, B zwei Flächen m^{ten} und n^{ten} Grades, die sich in jener Curve schneiden, μ ein noch zu bestimmender Punkt. Seine in Beziehung auf A, B genommene Polarebenen a, b, die Polarflächen zweiten Grades α, β. Es sei ferner in Bezug auf die Basis B, wenn man α als Direktrix annimmt, P, die erste Polarenveloppe, dagegen P′ die zweite Polarenveloppe für die Basis A und die Ebene b als Direktrix; endlich sei P″ der Ort jedes Pols, dessen in Bezug auf B genommene Polarebene seine in Bezug auf A genommene Polarfläche zweiten Grades berührt. Nimmt man nun in Bezug auf alle drei Flächen P, P′, P″ als Basen die Polarebenen des Punktes μ, nämlich p, p′, p″, so werden sich diese in einer und derselben Geraden schneiden. Man lege eine vierte Ebene p''' so durch, dass



$$\frac{\sin \sphericalangle\, [p\, p''']}{\sin < (p'''\, p'')} = 2\, \frac{\sin < (p\, p')}{\sin < (p''\, p')}$$

wird.

Wenn man dieselbe Construktion mit Vertauschung der Flächen A, B wiederholt, so erhalte man die Ebene q'''. Verlangt man nun, dass alle vier Ebenen a, b, p''', q''' einen Punkt gemein haben, so ergiebt sich als Ort des Punktes μ eine Fläche $[6\,(m + n) - 20]^{\text{ten}}$ Grades, welche die ursprüngliche Curve in den Punkten schneidet, wo sie von einer Ebene vierpunktig berührt wird. [Für $C^{2 \times 2}$ sind es die Quadrupelebenen.]

Wenn eine Fläche m^{ten} und ein Flächenbüschel n^{ten} Grades gegeben sind, so enthält dieses

$$m\ [3\,(n - 1)^2 + 2\,(n - 1)\,(m - 1) + (m - 1)^2]$$

Flächen, welche jene berühren. Es mögen sich zwei Flächen F und f berühren, so schneiden sie sich in einer räumlichen Curve, welche den Berührungspunkt zum Doppelpunkt hat; man ziehe hier die zwei Tangenten an die Curve. Legt man nun noch eine Berührungsebene an derselben Stelle, so erhält man als Durchschnitte F und f zwei ebene Curven, welche hier auch jede einen Doppelpunkt haben, dem je ein Tangentenpaar zugehört. Alle drei Tangentenpaare sind in Involution.

Alle Tangenten einer $C^{m \times n}$ bilden eine abwickelbare Fläche D, deren Grad $m\, n\, [m + n - 2]$ ist; alle Ebenen, welche die Curve in zwei verschiedenen Punkten berühren, erzeugen ebenfalls eine abwickelbare Fläche E. Ist r der Grad der Fläche D, so wird ihre Doppellinie von einer beliebigen Ebene in $\frac{1}{2}\, r\, [r - 4]$ Punkten geschnitten. An die Fläche E gehen durch irgend einen gegebenen Punkt

$$\frac{mn}{2}\,[mn\,(m+n-2)^2-10\,(m+n)+28]$$

Berührungsebenen.

Ihr Satz über Distanzen der Brennpunkte von drei, einem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitten hat mich sehr gequält; ich habe ihn noch nicht gefunden und ersuche Sie daher, mir ihn sobald wie möglich zu schreiben. Von den Aussagen, die ich früher einmal über die Brennpunkte gethan, kann ich nicht zurückgehen. Es sind zwei Gegeneckenpaare eines umschriebenen Vierseits, deren drittes Gegeneckenpaar die zwei, allen Kreisen gemeinschaftlichen Punkte sind (haben Sie einen kurzen Namen für dieselben?); ist der Kegelschnitt gegeben, so ist das Vierseit durchaus bestimmt, wenngleich jede Seite mit sich selbst jeden beliebigen Winkel bildet und daher ihre Lage in der Ebene nicht ändert, wenn auch der Kegelschnitt um einen Brennpunkt herum gedreht wird.

Von meiner Wiener Abhandlung habe ich schon seit längerer Zeit einen Haufen dem Buchhändler zum Versenden übergeben, nach Zürich und Basel habe ich freilich noch keine geschickt, weil ich dazu einige Zeilen schreiben muss. Da keine Aussicht auf Abnahme der ungedruckten Abhandlung vorhanden ist, so will ich sie dem *Crelle* schicken, muss Sie aber ersuchen, dafür zu sorgen, dass er sie nicht unter das Eis fallen lässt. Die erste Begeisterung für diese n Dimensionen ist bei mir schon verflogen, obschon die Untersuchungen über Flächen mir auch nach jener Seite neue Wege aufzuschliessen scheinen; daher die Zögerung mich wieder in diese hirnverrückenden Vorstellungen hinein zu arbeiten, was doch geschehen muss, wenn ich einen Auszug dem *Liouville* zuschicken soll.

Ich gratulire Ihnen zu Ihrer wohlverdienten Auszeichnung und zu der gerechten Anerkennung, die Ihnen selbst Ihr Fachgenosse *Chasles* in so unumwundenen Ausdrücken ausspricht.

Erfüllen Sie mir den Wunsch und schreiben (Sie) mir recht bald einige Zeilen, namentlich über die Brennpunkte; auch Aufgaben; denn die zugesandten zähle ich Ihnen nicht. Die Frühlingsferien sind mir weggenommen, weil ich theils mit Examen, theils mit der Nationalvorsichtskasse zu thun habe.

Bern, den 2. April 1854.

L. Schläfli.

Steiner an Schläfli.

Berlin, 30. April 1854.

Mein lieber kräftiger Freund!

«Er hat andern geholfen, aber
«hilft sich selber nicht.»
«Der brave Mann denkt an sich
«selbt zuletzt.» *Tell.*

«Dass ich Ihnen etwas über die Brennpunkte, der einem 3 Seit «eingeschriebenen Kegelschnitte gesagt haben soll, kann ich mir nicht «denken, denn ich weiss von nichts. In beiden Briefen sprechen Sie «von den 2 Grundpunkten eines Kreisbüschels, wovon ich auch keine «Silbe verstehe; wie kann ich behalten, was Sie mir je einst ge«sagt haben, da ich nicht einmal das weiss, was ich selbst ge«schrieben habe.

«Was Sie «*Untercurve*» nennen wollen, habe ich bereits früher «*Theilcurve*» genannt; sie ist ein Theil des ganzen Schnitts, der «Ganz- oder «Vollcurve». «Unter» harmonirt mit «Ober», nicht mit «Voll».

«Den Namen «Hornpunkt» habe ich irgendwo aufgeschnappt, jetzt «finde ich ihn unpassend, und halte «*Knotenpunkt*» für angemessener, «natürlicher. Demgemäss hätte man weiter den «*Knotenkegel* K^2», der «in Extreme übergehen kann: 1) sich auf eine Gerade K_0 redu«ziren, = «*Rückkehr-Knoten-Kante* (*Tangente*)», im «*Rückkehr-Knoten*«*punkt*», oder «*Rückkehrkante*» im «*Rückkehrknoten*»; 2) in zwei «Ebenen 2 K^1 zerfallen, deren Schnittlinie eigentlich eine «*Knotenkante*» «wäre; 3) die 2 Ebenen fallen zusammen 2 (K^1), = *ebener* oder «*platter Knotenpunkt* mit *dreispitziger Knotenebene* 

«(auf diese kam ich auch schon früher, weiss im Augenblick nicht wobei, «aber ich konnte sie nicht recht überwältigen). Zudem giebt es auch noch «*Doppel-Rückkehrknoten* = *Selbstberührungsknoten*», z. B. bei der Ring«fläche, die entsteht, wenn sich die Ebene eines Kreises (oder einer C^2 «oder C^n) um eine Tangente desselben herumbewegt. Weiter *3 facher*, «*n facher Knoten*, wenn er in jedem durchgehenden Schnitt ein 3- «oder nfacher Punkt bewirkt. Ferner wäre danach auch die

«*Doppellinie* füglich «*Knotenlinie*» zu nennen; dagegen müsste der «arête de rebroussement, welche ich bisher so genannt habe, der Name «Bindelinie», «*Bindecurve*» oder «*Selbstschnittscurve*» aller die Fläche «bildenden Geraden, gegeben werden. — Sie sind Sprachkenner, machen «Sie bessere Vorschläge. Bei Einführung neuer Namen ist Umsicht «nöthig, sie müssen sachgemäss sein. Man sollte wissen, welche in «deutschen Büchern bereits gebraucht worden sind.

«Mit der famosen R^{12} kann ich mich noch nicht beruhigen, viel- «mehr soll's erst recht drauf losgehen. Liege ich auch wie ein Halb- «todter im Schneegestöber — so fasse ich meinen treuen, starken «Bernhardiner beim Schwanz und er wird mich aus der dustern Kluft «herausreissen. Der Schnitt der Basis f^3 mit ihrer Kernfläche f_0^4, «*muss* allerlei schöne Eigenschaften haben, die meine Nase schon 1846 «und 1850 witterte, aber nicht klar zu erkennen vermochte; Sie «werden jetzt leicht triumphiren, selbst wenn mein Phantasie-Gebilde «grossentheils falsch wäre. — Liegt ein Pol Q in R^{12}, so ist seine «erste Polare ein Kegel P^2, dessen Scheitel der conjugirte Pol P ist, «und die zweite Polare ist die Ebene E, welche die f^3 in Q und «den Kegel P^2 längs des Strahls $QP = t$ berührt. Dieser Strahl t «hat die wesentliche Eigenschaft: 1) dass die erste Polare, f^2, jedes in «ihm liegenden Pols die f^3 in Q berührt; 2) dass er die Rückkehr- «tangente (?) des Schnitts E^3, von E und f^3 im Punkt Q ist; 3) dass «er die f_0^4 in P zwei- und die f^3 in Q dreipunktig berührt; und «4) dass sein Ort eine Fläche 30^{ten} Grads, $= t^{30}$, ist, welche die «27 g zu Doppellinien hat, so dass der Schnitt von t^{30} mit f^3 aus «$3\ R^{12} + 2 \cdot 27\ g = R^{90}$ besteht. Nun kann ich aber mit blossen «Augen nicht erkennen: ob t Selbstschnitt der Ebene E und ob P «Selbstschnitt des Strahls t sei? Der Ort des Punkts P, $= P^x$, geht «durch die 54 Asymptotenpunkte π der 27 g, oder er berührt diese «g in den π, so dass er also mit der f^3 im Ganzen 54 oder 108 «Punkte gemein hat, und daher $x = 18$ oder $= 36$ sein muss (nach «Ihrer Angabe, dass eine f^7 durch P^x gehe, wäre $x = 28$). Die «P^x geht durch jeden der 10 Sylvester'schen Punkte dreimal. Da t die «f_0^4 in P berührt und in Q schneidet, so muss sie noch in einem 4^{ten} «Punkte S schneiden, so dass der Schnitt von t^{30} mit f_0^4 aus «$R^{12} + 2\ P^x + S^y$ besteht und $12 + 2x + y = 4 \cdot 30$, also «wenn $x = 36$ auch $y = 36$ ist. Diese S^y muss auch durch die «54 π gehen, was aber nicht gut passt. — Dass t die f_0^4 in P 3punktig «berührt, scheint auch nicht zu gehen? *Oder sind t und E = Tangente* «*und Schmiegungsebene der* R^{12} *im Punkte* Q*? und haben nicht die* «*Polarkegel* P^2 *u.* Q^2 *von* Q *und* P *den Strahl* t *gemein?* so dass t «eine Doppeltangente der $f_0{}^4$ ist. Zum donnstig! es muss so was sein! «Die R^{12} ist charakteristisch für die Basis f^3; sie muss diejenigen Punkte «Q enthalten, welche in Rücksicht auf den Schnitt E^3 der Berührungs- «ebene E einzig sind in ihrer Art, also Rückkehrpunkte, und in wel- «chen allein die Polare f^2 eines nicht in f^3 selbst liegenden Pols die «letztere berühren kann. Denn in diesem Betracht ist die R^{12} für «die f^3 das, was für die C^3 ihre 9 Wendepunkte sind. — (Wie steht es «mit der Berührungsebene E_0 der $f_0{}^4$ in Q?) **Der Ort von t** «**ist** $= t^{30}$.

«Eben so muss es sich bei Basis f^m verhalten. Sie wird von «der Kernfläche $Q^{4\,(m-2)}$ in einer charakteristischen $R^{4\,m\,(m-2)}$ ge- «schnitten; für jeden Punkt Q in dieser muss die berührende Ebene «E eine absonderliche sein; ihr Schnitt E^m muss Q zum rp und den «Strahl $QP = t$ zur rt haben; für jeden in t liegenden Pol muss «die erste Polare f^{m-1} die Basis f^m in Q berühren, so dass daher «der Ort von t eine Fläche $m\,[3\,(m-2)^2 + 2\,(m-2)\,(m-1)$ «$+ (m-1)^2] - m = 2\,m\,(m-2)\,(3\,m-4)^{\text{ten}}$ Grads sein muss, «welche die f^m längs $R^{4\,m\,(m-2)}$ dreipunktig und die andere (erste) «Kernfläche $P^{4\,(m-2)^3}$ längs der Curve P^x zwei- (oder drei-) punktig «berührt u. s. w. Auf die Mensur! Los!

«Bei f^3 fallen in jede der 45 Ebenen △ 16 Trieder-Scheitel P, «die in einer C^4 liegen, welche die 3 g zu d t hat und sie in den «6 π berührt; die den 16 P conjugirten 16 Q liegen in einer R^6, «welche durch die 6 π geht (der ganzen C^4 ist die R^6 conjugirt). «Die 6 π liegen zu 3 in 4 Geraden l und sind die Berührungspunkte «je dreier solcher Schnitte C^2 der f^3, durch welche ein Kegel L^2 geht, «der die Ebene △ längs l berührt; liegen die Scheitel der 4 Kegel «L^2 in einer Geraden?

«Ich unterscheide die Punktensysteme (wie die Strahlsysteme) «in hyperbolische und elliptische, nachdem die Asymptotenzahlen[1]) π reell «oder imaginär sind. — Von den 3 g in jeder △ sind entweder 1) alle «3 hyperb., oder 2) nur eine hyperb. und die andern elliptisch. Wenn «alle 27 g reell: wie viele sind von jeder Art? ist die Anzahl jeder «Art nothwendig bestimmt, oder kann sie variren? und nach welcher «Regel? Können alle hyperbolisch sein? — Wie viele g werden zu- «gleich imaginär? giebt es dafür ein Gesetz?

---

[1]) Soll wohl heissen: Asymptotenpunkte.

«Die 6 Normalen N aus einem Punkte p auf f^2 liegen in einem «Kegel p^2, welcher auch durch den Mittelpunkt der f^2 geht. Wie «verhält es sich mit den m $(m^2 - m + 1)$ N aus p auf f^m?

«Da Sie nun die Polaren so tüchtig verschlungen haben, so «können Sie gelegentlich die weitern reciproken Kerncurven bestimmen, «d. h. den Ort des Pols P, dessen x^{te} Polare in Bezug auf die Basis «C^m einen Doppelpunkt Q hat, und den Ort dieses Q, dessen $(m - x - 1)^{te}$ «Polare jenen P zum d p hat. So viel ich mich im Augenblick er«innere, ist es mir nicht gelungen. Ebenso sind die reciproken Kern«flächen P^x und Q^y für die Fläche f^m aufzufinden. — *Die Kerncurven «und Kernflächen haben grosse Bedeutung: Denn sie sind Enveloppen «der Polar-Enveloppen andern Ranges für beliebige Directricen.* Z. B. «die Trippel- oder Kerncurve Co^3 der Basis C^3 wird von der 2^{ten} «Polare Ao^2 jeder Geraden A in drei Punkten α berührt; ebenso von «der 2^{ten} Polare Do^y der gegebenen Directrix D^r in 3 r Punkten α etc. «Da haben Sie wieder ein Staatsgeheimniss. — Daher ursprünglich «der Name «Kern», weil sich Alles um sie versammelt, sich an sie «anlehnt.

«Haben Sie den Urias-Zettel Herrn Prof. Ries gezeigt? was ich im «Vertrauen auf Ihre grosse Gewissenhaftigkeit getrost erwartete. Sie «schweigen darüber und Ries hat auch kein «Ja» unter Ihren Brief «gesetzt.

«Ich bin wieder für diesen Sommer um Urlaub eingekommen, «weiss aber selbst noch nicht recht, wo ich herumbummeln werde; «der Arzt hat mir nochmals Ems vorgeschlagen.

«Mit freundlichem Gruss

«Ihr

«*Steiner.*»

Schläfli an Steiner.[1])

«Um die Absendung dieses Briefs nicht zu lange zu verzögern, «will ich Ihnen nur kurz meine Ansichten über die *Untercurven* mit«theilen, und die schwierige Ergründung Ihrer Fragen mit der erfor«derlichen Zeit und Reife für einen späteren Brief vorbereiten. Es «seien A, B, C drei Polynome resp. von den Graden a, b, c; und A^1, «B^1, C^1 drei Polynome von den Graden $a+h$, $b+h$, $c+h$, so stellen «die Proportionen $A:B:C = A^1:B^1:C^1$ eine Untercurve vom Grade

[1]) Der Eingang fehlt.

$h^2 + (a + b + c)h + bc + ca + ab$ dar. Hier ist freilich nur das niedrigste Polynom fest, die übrigen bilden vielfache Schaaren. Dasselbe kann auch dadurch ausgedrückt werden, dass man verlangt, dass alle im Schema $\left\| \begin{matrix} A & \cdot & B & \cdot & C \\ A^1 & \cdot & B^1 & \cdot & C^1 \end{matrix} \right\|$ enthaltenen Determinanten, $BC^1 - B^1C$, $CA^1 - C^1A$, $AB^1 - A^1B$, verschwinden. Dieses scheint aber nur der leichteste Fall einer allgemeinen Darstellungsweise von Untercurven zu sein. Man kann sich nämlich ein Schema denken, wo jede Verticalzeile n Polynome und jede Horizontalzeile deren $n + 1$ enthält, indem zugleich die Grade der Polynome äquidifferente Zeilen bilden, und dann verlangen, dass alle $n + 1$ Determinanten, welche durch das Weglassen je einer Verticalzeile entstehen, zugleich verschwinden: eine Untercurve wird diesen Bedingungen genügen. Man kann zwar diese Darstellung auf die vorige einfachere zurückführen, aber nicht ohne bedeutende Erhöhung der Grade der Ausdrücke und daherige Verdunklung der Natur der Untercurve. Mit andern Worten: durch eine Untercurve A gehen zwei Flächen p, q, und der übrige Theil B ihres vollständigen Durchschnitts ist auch wieder nur eine Untercurve, die sich ähnlich verhält, u. s. f., bis man erst die n^{te} Curve als Vollcurve antrifft. Will man aber das Ganze in zwei Tempo abthun, so muss man jede der Flächen p, q mit einer passenden Fläche zusammensetzen, so dass dann B durch die neu hinzutretenden Durchschnitte zur Vollcurve ergänzt wird, durch deren einmalige Wegnahme aus dem vollständigen Durchschnitt der durch Zusammensetzung verstärkten Flächen p und q sogleich die ursprüngliche Untercurve A erhalten wird. Bei einer solchen Reduction zieht man aber wohl den Knoten nur stärker zusammen, statt ihn zu lösen. — Ob die erwähnte allgemeinere Darstellungsweise einer Untercurve wirklich die allgemeinste ist, wage ich nicht zu entscheiden; und wenn sie es auch wäre, so hätte man dann bei der Classifikation der Untercurven immer noch artige zahlentheoretische Schwierigkeiten zu überwinden.

Die Frage über die abwickelbare Fläche S, welche eine freie Fläche f^n längs eines ebenen Schnitts C^n berührt, habe ich noch nicht ganz zweifellos entscheiden können. Der Grad $g = n\,(3n - 5)$ und die Classe $K = n\,(n - 1)$ sind richtig. Wenn Sie unter Knotenlinie die arête de rebroussement verstehen, wo jede freie Ebene die S mit Rückkehrpunkt schneidet, so können wir ihren Grad mit r be-

«zeichnen, und haben $r = w + 3\,(g - K)$. Ist nun $w = o$, d. h. hat «ein ebener Schnitt der S keine Wendepunkte, so folgt $r = 6\,n\,(n - 2)$. «Dieses scheint richtig, weil für jeden der $3\,n\,(n - 2)$ Wendepunkte «von C die erzeugende Gerade von S in die Ebene von C fällt und «daher diese Ebene die *Knotenlinie berührt.* (Die Ebene der C be-«rührt die Knotenlinie in den Wendepunkten der C; daher wird die «S hier mit Wendepunkt sammt Wendungstangente geschnitten.) Die «Formel $g\,(g - 1) = K + 2d + 3r$ giebt nun

$$d = \frac{3}{2}\,n\,(n - 2)\,(n + 1)\,(3n - 7)$$

«als Grad der *Doppellinie* von S. Zieht man hievon die

$$\frac{3}{2}\;n\;(n - 2)\;(3n^2 - 6\,n - 1)$$

«Durchschnitte der Wendungstangenten von C ab, durch welche offen-«bar die Doppellinie geht, so bleiben noch

$$3n\;(n - 2)\;(n - 3)$$

«Punkte übrig, in denen die Ebene der C die Doppellinie schneidet. «Dieses sind die übrigen Punkte, in denen C von den Wendungs-«tangenten geschnitten wird.

«Ihre Sätze über die Evolute der C^n sind richtig. Der Satz «über den Ort der Doppeltangenten eines B (C^n) ist mir noch zu «schwer. Die Ortscurve der Brennpunkte der einem Dreiseit einge-«schriebenen Kegelschnitte war mir bekannt; aber das Involutions-«strahlensystem haben Sie mir endlich verrathen. Den Satz über «Brennpunktsdistanzen haben Sie in ihren gedruckten Schriften für «das Vierseit ausgesprochen; aber ich meine von Ihnen mündlich ge-«hört zu haben, dass er für drei einem Dreiseit eingeschriebene «Kegelschnitte in allgemeinerer Form gelte. Zur Darstellung von «Distanzen gebrauche ich ein Produkt von zwei dreizähligen [1]) Deter-«minanten, worin die Coordinaten der gegebenen Punkte und «überdiess noch diejenigen der zwei Grundpunkte aller Kreise «vorkommen; aber selbst mit diesem Hülfsmittel konnte ich an «den Brennpunktsdistanzen keine Relation herausbringen. — Sie «haben gut gethan, einige der schwersten Aufgaben in Ihrem «Briefe nicht anzustreichen, da sie wohl noch beträchtliche Zeit «erfordern werden. — Wenn meine Angabe über eine gewisse «Doppellinie Sie stutzig macht, so beruht dieses auf einem Missver-

[1]) Soll wohl heissen: dreizeiligen.

«ständniss, nämlich: alle Tangenten einer Vollcurve $C^{m \times n}$ bilden «eine abwickelbare Fläche vom Grade $r = mn\ (m + n - 2)$; und «diese hat eine Doppellinie vom Grade $\frac{1}{2} r\ (r - 4)$.

«Ich benutze den Raum des Papiers noch für einige Sätzchen.

«Wenn 3 Flächen m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Grades eine Vollcurve $C^{\alpha \times \beta}$ «gemein haben, so haben sie ausserdem noch «$m\,n\,p - \alpha\beta\ (m + n + p - \alpha - \beta)$ Durchschnittspunkte gemein.

«Wenn $m \geqq n \geqq p$, und es soll eine ebene Curve m^{ten} Grades «durch die $n\,p$ Durchschnittspunkte einer Curve n^{ten} und einer p^{ten} Gra- «des gelegt werden, so sind für jene höchste Curve von diesen Durch- «schnittspunkten $\frac{1}{2} (n + p - m - 1)\ (n + p - m - 2)$ nothwendig, «vorausgesetzt, dass $m \leqq n + p - 3$ ist; sonst ist *keiner* nothwendig.

«Wenn $m \geqq n$, so dürfen auf einer Fläche F^n nur

$$«\ \frac{1}{2} m\,n\,(m - n + 4) + \frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{2 \cdot 3}$$

«beliebige Punkte gegeben werden, wenn eine freie f^m durchgehen soll.

«Wenn der Grad m nicht niedriger ist, als einer der Grade n «und p, und es soll durch Punkte einer Vollcurve $C^{n \times p}$, eine «Fläche F^m gelegt werden, so sind unter den Durchschnittspunkten «$\frac{1}{2} n\,p\ (n + p - 4) + 1$ nothwendig, wenn $m > n + p - 4$ ist; aber

$$«\text{nur } \frac{1}{2} n\,p\ (n + p - 4) + 1 - \binom{n + p - m - 1}{3}, \text{ wenn}$$

«$m \leqq n + p - 4$ ist.

«Durch jede $C^{2 \times 2}$ kann eine F^4 gelegt werden, deren Polynom «als Summe von vier Biquadraten darstellbar ist.

«Wird eine $C^{m \times n}$ von einem beliebigen Punkte aus auf eine «beliebige Ebene projicirt, so ist für die Projection $g = m\,n$, «$k = m\,n\ (m + n - 2)$, $r = o$, $w = 3\,m\,n\ (m + n - 3)$, «$d = \frac{1}{2} m\,n\ (m - 1)\ (n - 1)$. Wenn aber der Mittelpunkt des «projicirenden Strahlenkegels der C^{mn} angehört, so gehen an g. k, «w, d, t resp. 1, 2, 3, $m\,n - 2$, $2\,m\,n\ (m + n - 2) - 8$ Einheiten «verloren.

«Jede Tangente der $C^{m \times n}$ wird von $m\,n\ (m + n - 2) - 4$ «andern Tangenten geschnitten.

«Die Mahnungen am Schlusse Ihres Briefes will ich bald be-«folgen und danke Ihnen für die näheren Anweisungen. Da es be-«quemer ist, die Briefe nicht zu frankiren, so unterlasse ich es jetzt, «aber dann dürfen auch Sie es nicht thun. Vom 19.—21. Apr. war «ich an den Examen in Biel, vom 26.—29. muss ich an denen in Thun «sein; Sie müssen sich daraus erklären, dass ich etwas unvollständig «geantwortet habe, um bei den Arbeiten, die mir wegen der Examen «obliegen, Sie nicht zu lange auf eine Antwort warten zu lassen. Ich «bin diesen Augenblick ziemlich abgespannt und weiss Ihnen daher «nichts zu berichten, als dass sich bis jetzt noch keine Studenten zu «meinen Vorlesungen gemeldet haben.

«Unterlassen Sie es nicht, mir bald wieder zu schreiben, und «genehmigen Sie die Versicherung der Hochachtung von

«Bern, den 23. April 1854. Ihrem dankbaren Schüler

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Da es Ihnen vielleicht dienlich ist, so beeile ich mich, Ihnen «einige nähere Angaben über die Beziehung sämmtlicher *Cayley*'scher «Strahlen zu Ihrem Fünfseit zuzusenden.

«Ich habe das Fünfseit sammt Axe auch analytisch behandelt und «die Reduction bis zur Gleichung 3^ten^ Grades fortgeführt, ungeachtet «anfänglich die Fläche vom 8^ten^ Grade zu sein scheint, weil die durch «die Axe und jedes Eck des Fünfseits gelegten Ebenen noch dazu «kommen.

«Ich bezeichne die fünf Seiten der Ordnung nach mit $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$, «die Axe mit e. Durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_3\ a_4)$ von «den Strahlen a_1, e geschnitten wird, geht der Strahl b_1; durch die «Punkte, in denen die Ebene $(a_1\ b_1)$ von b_5, b_2 geschnitten wird, geht «c_1, u. s. f. Dann wird c_1 von c_3, c_4 geschnitten (ein *Satz !*), so dass «$c_1\ c_3\ c_5\ c_2\ c_4$ ein neues Fünfseit ist. Durch die Punkte, wo die Ebene «$(b_1\ e)$ von a_5, a_2, c_3, c_4 geschnitten wird, geht der Strahl d_1, u. s. f.; «durch die Punkte, wo die Ebene $(a_2\ d_3)$ von a_5, c_3, c_4, d_5, d_2, d_4 ge-«schnitten wird, geht $d_1{}^1$, u. s. f.; durch die Punkte endlich, wo die «Ebene $(b_1\ d_1{}^1)$ von den übrigen Strahlen b und d^1 geschnitten wird, «geht e^1. Also fünf a, fünf b, fünf c, zehn d oder d^1, zwei e, e^1, «zusammen 27 Strahlen. Die Dreiseite sind: fünf $(a_3\ a_4\ b_1)$, fünf $(a_1$

«b_1 c_1), fünf (b_1 c_5 c_2), zehn (a_1 d_5 d^1_2), zehn (c_1 d_3 d^1_4), zehn (b_1 d_1 e) oder (b_1 d_1^1 e^1), zusammen 45. — Alle 12 zum Paar e_1 e^1 gehörenden Fünfseite ergeben sich durch Permutation der fünf Strahlen b; ist z. B. b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 die gewählte Permutation, so geht durch b_1, b_3, b_4 die Seite a_1, durch b_2 b_4 b_5 die Seite a_2, u. s. f. (b_2 b_3 b_1 b_4 b_5) giebt a_4 c_4 c_1 c_3 a_3 (fünf solche) (b_2 b_1 b_3 b_4 b_5) giebt c_3 c_5 a_5 a_4 a_3 (fünf solche); endlich giebt (b_1 b_3 b_5 b_2 b_4) das einzige Fünfseit c_1 c_3 c_5 c_2 c_4.

«Mit der F^3 hängt auch folgender Satz zusammen, von dem ich vergeblich einen elementaren Beweis gesucht habe.

«Durch einen Strahl a_1 gehen fünf beliebige Strahlen b_2, b_3, b_4, b_5, b_6. Lässt man nun von diesen der Ordnung nach je einen weg, so geht durch die 4 übrigen ausser a_1 immer noch ein Strahl, und man erhält so die fünf Strahlen a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Nun kann durch a_3, a_4, a_5, a_6 ausser b_2 noch ein Strahl gelegt werden; dann wird dieser (b_1) von selbst auch durch a_2 gehen.

«Werden nämlich auf a_1 vier beliebige Punkte, und auf jedem der durchgehenden Strahlen b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 deren beliebige drei gegeben, so ist durch alle 19 Punkte eine F^3 bestimmt, und man erkennt sogleich, dass alle sechs Strahlen ganz darein fallen, u. s. f. Ich nenne dieses System von 2×6 *Cayley*'sche Strahlen, wo je einer der einen Hälfte den gleichnamigen der andern nicht, aber alle fünf übrigen schneidet, während die sechs Strahlen derselben Hälfte sich nicht schneiden, — einen *Doppelsechser*. Die F^3 hat deren 36. — Der gemeinschaftliche dritte Strahl der Ebenen (a_1 b_2) und (a_2 b_1) heisse c_{12}. Man hat dann 30 Dreiseite (a_1 b_2 c_{12}) und 15 (c_{12} c_{34} c_{56}). Von den übrigen Doppelsechsern haben 20 die Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{46} & c_{45} \\ c_{23} & c_{13} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} \text{ und 15 die Form } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ a_2 & b_2 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \end{pmatrix}$$

«Jeder Doppelsechser enthält 20 Hyperboloide (Doppeldreier), und jedes Hyperboloid ist zweien Doppelsechsern gemein.

«Die 40 Gruppen von je drei Triederpaaren theilen sich in Beziehung auf den gegebenen Doppelsechser in zwei Haufen.

«Der erste Haufen enthält 10 Gruppen wie

c_{12}	b_2	a_1
a_2	c_{23}	b_3
b_1	a_3	c_{13}

c_{45}	b_5	a_4
a_5	c_{56}	b_6
b_4	a_6	c_{46}

c_{14}	c_{25}	c_{36}
c_{26}	c_{34}	c_{15}
c_{35}	c_{16}	c_{24}

«und 30 Gruppen wie

a_3	b_5	c_{35}
b_6	a_4	c_{46}
c_{36}	c_{45}	c_{12}

a_5	b_1	c_{15}
b_2	a_6	c_{26}
c_{25}	c_{16}	c_{34}

a_1	b_3	c_{13}
b_4	a_2	c_{24}
c_{14}	c_{23}	c_{56}

«Jede Gruppe des ersten Haufens entspricht einer Theilung der «sechs Zeiger in zwei Hälften wie (123, 456); und je zwei Gruppen «des zweiten Haufens (die sich nur durch Perm. von a, b unter- «scheiden) einer Theilung in drei Paare wie (12, 34, 56). — Die «Fünfseite ordnen sich so: Zu a_1 b_1 gehören 12 wie c_{24} c_{35} c_{16} c_{52} «c_{63}, zu a_1 a_2 12 wie c_{35} a_5 c_{45} a_4 c_{46}, zu a_1 c_{23} sechs wie a_5 c_{35} c_{26} «c_{34} c_{25} und sechs wie c_{35} a_5 b_1 a_6 c_{24}; zu c_{12} c_{13} sechs wie c_{15} a_5 «b_4 a_6 b_5 und sechs wie b_4 a_5 c_{15} c_{23} c_{14}.

«Wie gefällt Ihnen dieser Doppelsechser? 12 Strahlen bilden «ein an 6 Stellen schadhaftes Gitter, jeder der 15 übrigen entspricht «zweien Maschen derselben.

«Haben Sie so etwas unter dem Systematisiren verstanden? In «der Hoffnung einer baldigen Antwort bezeugt Ihnen hiemit seine «Hochachtung

Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, den 2. Mai 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Hochgeschätzter Freund und Lehrer!*

«Was jene bornirte Curve vierten Grades mit drei Doppel- «punkten betrifft, wo zugleich jeder von einem Doppelpunkt aus- «gehende Strahl von der Gegenseite des Doppelpunktendreiecks in «Beziehung auf die zwei übrigen Durchschnittspunkte der Curve har- «monisch getheilt wird, so folgt daraus nothwendig, dass jede Doppel- «punktstangente zugleich Wendungstangente ist, dass also hier jeder «Doppelpunkt *acht* Wendepunkte verschlingt, was die volle Zahl 24 «giebt. Diese auf der Hand liegende Bemerkung habe ich das letzte «Mal zu machen vergessen.

«In Betreff der *Cayley'schen* Geraden auf der Fläche dritten «Grades habe ich einstweilen Folgendes gefunden. Denkt man sich «einen durch zwei Ebenendreier bestimmten Flächenbüschel dritten «Grades, und wählt eine einzelne Fläche $f = xyz + \lambda tuv$ heraus, so «zählen die 6 Ebenen x, y, z, t, u, v für 18 Data und der Coefficient λ für eines, zusammen 19. Folglich kann jede freie Fläche «dritten Grades auf diese Weise erzeugt werden. (Man hat freilich «so erst 9 in der Fläche liegende Geraden). Wird der Scheitel des «einen Ebenendreiers als Pol genommen, so ist seine Polarfläche ein «Kegel zweiten Grades, der durch die Kanten des andern Ebenen«dreiers geht. Die in der Fläche liegende Gerade (xt) z. B. werde «von den Ebenen y, z in B, C und von den Ebenen u, v in E, F ge«schnitten; dann seien P, Q die Asymptotenpunkte des von jenen «zwei Punktpaaren bestimmten involutorischen Systems (oder B C P Q «und E F P Q harmonisch); so wird die Kernfläche (vierten Grades) die «Gerade (xt) in P und in Q berühren. Wird P als Pol genommen, so «ist Q der Scheitel des Polarkegels; dieser geht durch die Gerade «(xt) und durch die Gerade, welche von Q ausgehend die Kanten (yz) «und (uv) schneidet. — Liegt ausser den erwähnten 9 Geraden noch «irgend eine Gerade auf der Fläche, so muss sie durch drei von den «schon bekannten Geraden, wie z. B. durch (xt), (yu), (zv), gehen, «also auf der durch (xt), (yu), (zv) bestimmten Fläche zweiten Grades «liegen. Die Rechnung zeigt nun wirklich, dass diese Fläche die $f^{(3)}$ «noch in 3 neuen Geraden schneidet. Da es aber im Ganzen 6 solche «Combinationen, wie (xt), (yu), (zv), giebt, so bekömmt man $6 \times 3 =$ «18 neue Geraden; im Ganzen $9 + 18 = 27$.

«Die freie Fläche dritten Grades enthält also 27 Geraden. Wird «eine Transversalebene um eine solche Gerade herumgedreht, so «schneidet sie die $f^{(3)}$ im Allgemeinen noch in einem Kegelschnitt; «dieser erscheint aber im Besondern *fünfmal* als Geradenpaar. Es «giebt also 45 ebene Schnitte, welche Dreiseite sind. Die zwei «Punkte, welche jene Gerade mit dem Kegelschnitt der um sie sich «drehenden Schnittebene gemein hat, bilden ein *Involutionssystem*, «in dessen Asymptotenpunkten P, Q die Kernfläche $^{(4)}$ von jener Ge«den berührt wird [1]).

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Um den Briefwechsel nicht zu lange zu unterbrechen, schreibe «ich Ihnen hier nur über einige wenige Fragen Ihres letzten Briefs,

[1]) Hier bricht der Brief ab, die Unterschrift fehlt.

«deren Beantwortung aber mehr Arbeit gekostet hat, als Sie wohl ge-«dacht haben werden. Wie ich hintenher erkenne, hätte ich frei-«lich durch etwas mehr synthetische Ueberlegung an Zeit ersparen «können.

«Was vorerst die Frage auf dem kleinen Papierstreifen betrifft, «so liegen die sechs Scheitel je dreier zusammengehöriger Triederpaare «n i c h t in einer Ebene. Dieser D r e i e r veranlasst mich zu einer «Bemerkung: wenn man nämlich aus jedem Paare nur ein Trieder «nimmt, so hat man eine Gruppe von 9 Ebenen, welche die F^3 in «den 27 Geraden schneidet; es giebt also 320 solche Gruppen; zur wirk-«lichen Bestimmung der Cayley'schen Geraden käme aber alles darauf «an, eine durchgehende Fläche neunten Grades zu finden, d. h. die «220 Coefficienten ihrer Gleichung aus den 20 Coefficienten der ge-«gebenen Gleichung der F^3 auf rationalem Wege herzuleiten. So «lange dieses nicht gethan ist, sind auch die 27 Geraden nicht ge-«funden.

«Die Bedingungen für die hyperbolische Eigenschaft einer jeden «reellen Geraden der F^3 können zwar, wenn schon ein Triederpaar «bekannt ist, ziemlich einfach ausgedrückt werden, sind aber unter «sich verschieden; und ich erkenne einstweilen zwischen denselben «keinen andern Zusammenhang, als den, welchen Sie selbst schon ausge-«sprochen haben. Die Frage hängt mit derjenigen nach der Realität der «Geraden nicht zusammen. Ich werde übrigens auf diesen Gegen-«stand noch ferner Acht geben.

«Die Classification hingegen der reellen Flächen dritten Grades «in Beziehung auf die Anzahl ihrer reellen Geraden ist mir vollständig «gelungen, und ich freue mich Ihnen hierüber sichern Bericht geben «zu können. Die Gränzfälle, in denen die Fläche aufhört frei zu sein, «sind hier ausgeschlossen; nach dem gleichen Eintheilungsgrunde «würde ich z. B. nur z w e i Gattungen von Flächen zweiten Grades «annehmen. — Die Fläche dritten Grades zählt nur f ü n f Gattungen.

«A. Alle 27 Geraden und 45 Ebenen sind reell. (27 G, 45 E.)

«B. 15 G, 15 E. Die 12 imaginären Geraden bilden einen «Doppelsechser

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

«wo je eine Gerade der einen Reihe der Zugeordneten der andern «Reihe conjugirt ist, wesshalb keine der imaginären Geraden einen «reellen Punkt haben kann. Durch je zwei Paare zugeordneter Strahlen «(wie $a_1\ b_2$, $a_2\ b_1$) geht ein reeller (c_{12}), und so oft sich die 6 «Zeiger in drei Paare abtheilen lassen, hat man ein reelles Dreiseit «(wie c_{12}, c_{34}, c_{56}), ihre Zahl daher 15. Durch jede reelle Gerade «gehen 3 reelle und zwei imaginäre Ebenen.

«C. 7 G, 5 E. Durch eine bestimmte reelle Gerade gehen 5 «reelle Ebenen, von denen aber nur 3 auch vollkommene Dreiseite ent- «halten; die 2 andern haben mit der Fläche ausser jener Geraden jede «nur noch einen isolirten Berührungspunkt gemein, wo sich zwei «conjugirte Seiten schneiden.

«D. 3 G, 13 E. Ein einziges reelles Dreiseit, durch dessen jede «Seite noch vier reelle Ebenen gehen, also 12 Paare conjugirter Ge- «raden, die sich schneiden.

«E. 3 G, 7 E. Ein einziges reelles Dreiseit, durch dessen jede «Seite nur noch zwei reelle Ebenen gehen, also 6 Paare conjugirter «Geraden, die sich schneiden.

«Diese Aufzählung erschöpft. Vielleicht interessirt es Sie, zu «sehen, wie diese Gattungen mit den Formen der Triederpaare zu- «sammenhängen. Es seien u, v, w die Polynome des einen, x, y, z die «des andern Trieders; sie zählen für 18 Data; giebt man das 19te Datum, «den Factor, der beide Trieder verbindet, einem der Polynome, so kann «die F^3 durch die Gleichung $u\,v\,w + x\,y\,z = 0$ dargestellt werden. «Die Polynome können aber reell oder imaginär sein; und es frägt «sich, welche Formen dieser Gleichung sind unter der Voraussetzung «einer reellen Fläche überhaupt möglich. Die Antwort auf diese Frage, «die auf den ersten Blick ebenso schwierig erscheint, als die Be- «stimmung der 27 Geraden selbst, ist in folgender erschöpfender Auf- «zählung enthalten.

I. u, v, w, x, y, z reell.

II. u mit x, v mit y, w mit z conjugirt.

III. u, v, w, x reell, y mit z conjugirt.

IV. u, x reell, v mit w, y mit z conjugirt.

V. u, x reell; die imaginären Ebenen v, w haben jede ihren reellen Strahl in x, ebenso haben die imaginären y, z ihre reellen Strahlen in u.

VI. u, x reell; nur u wird von y, z in reellen Strahlen geschnitten; x von v, w bloss in conjugirten.

VII. u, x reell; aber weder u noch x haben ein reelles Dreiseit.

VIII. u mit x conjugirt; v hat mit y, w mit z einen reellen Punkt gemein.

IX. Nur u ist reell und schneidet x in einem reellen, y, z in conjugirten Strahlen; und nur y hat auch noch mit jeder der Ebenen v, w einen reellen Punkt gemein.

X. Keine Ebene reell und keine zwei conjugirt (wie bei allen folgenden Formen); u hat mit x einen reellen Punkt, v mit y einen reellen Strahl, und w mit z einen reellen Strahl gemein.

XI. Jede Ebene des einen Trieders hat mit jeder des andern einen reellen Punkt gemein.

XII. u hat mit x einen reellen Punkt gemein, überdiess u mit y, u mit z, x mit v, x mit w.

XIII. u hat mit x einen reellen Punkt gemein, v mit y und w mit z.

Ich nenne zwei Formen aequivalent, wenn jede in die andere «transformirt werden kann. So sind II, V äquivalent und finden sich «in den Gattungen B und C; IV, VI, VIII in C und E; III, VII in D und «E; IX, XII, XIII nur in E. Isolirt sind die Formen I in A und B; «X in C, XI in D. — Diese Formen von Triederpaaren kommen zu «Dreiern vereinigt in den verschiedenen Flächengattungen in folgender «Weise vor:

A hat 40 Dreier (I. I. I);
B hat 10 (I. II. II) und 30 (V. V. V);
C hat 4 (II. II. IV), 12 (V, VIII. VIII) und 24 (VI. X. X);
D hat 16 (III. XI. XI) und 24 (VII. VII. VII);
E hat 2 (IV. IV. IV), 4 (III. XIII. XIII), 6 (VII. VIII. VIII), 12 (VI. XII. XII) und 16 (IX. IX. IX).

«Die Triederpaarformen X bis XIII hätten, wie ich eben einsehe, «etwas schärfer definirt werden sollen, es hätte angegeben werden «sollen, wenn drei reelle Punkte in einer Geraden liegen.

«Was Sie über den Durchschnitt R der Basis f^m mit ihrer zwei«ten Kernfläche $Q^{4(m-2)}$ anführen, ist alles richtig. Wenn Q die «Curve R durchläuft, so beschreibt P eine Curve $6\,m\,(m-2)^2$ten «Grades. Dass t die Fläche $P^{4(m-2)^3}$ zweipunktig berührt, ist ganz «natürlich, weil die Berührungsebene der f^m in Q zugleich die Fläche «P in P berührt; aber ich glaube durchaus nicht, dass sie die Curve «$P^{6\,m\,(m-2)^2}$ berührt. Wenn dieses für $m=3$ eintreffen sollte, so «müsste die Tangente der R in Q eine erzeugende Gerade des Polar«kegels von P sein, was ich nicht glaube. Die Fläche $t^{2\,m\,(m-2)\,(3\,m-4)}$ «ist eine *abwickelbare;* aber ihre Bindecurve ist mir auch für $m=3$ «noch unbekannt. Wenn auf der f^n ein Punkt R^1 unendlich nahe bei «dem in R befindlichen Punkt Q liegt, so schneiden sich die Be-

«rührungsebenen der f in Q und Q^1 immer in der Rückkehrtangente t, «nach welcher Richtung auch Q^1 abweichen mag. Für $m = 3$ hat «der Polarkegel von P nichts mit t zu thun; jener kann diesen «Strahl t nur dann enthalten, wenn P in die Fläche f^3 fällt. Die t «kann im Allgemeinen nicht Tangente der R sein, sie wird es nur «für die 54 Asymptotenpunkte. Die P^{18} geht einfach durch die 54 «Asymptotenpunkte. Ich denke, der Schnitt von t^{30} mit q^4 besteht «aus $R^{12} + 2\ P^{18} + S^{72}$, und diese S muss allerdings durch die 54 π «gehen. Die Schmiegungsebene der R^{12} ist kein leichter Frass! — (Basis «f^m) Q beliebig auf der zweiten Kernfläche $q^{4\,(m\,-\,2)}$. Die Berührungs- «ebene der Kernfläche q in Q ist zugleich Berührungsebene der zweiten «Polarfläche von P in diesem Punkt Q. — Ich erstaune, dass Sie «mittelst der abwickelbaren Fläche t^{30} die 27 Geraden wirklich con- «struirt haben. Denn es ist klar, dass die Gleichung der t^{30} auf rationalem «Wege gefunden werden kann; wenn man dann aus (f^3, t^{30}) und «(f^3, q^4) eine Coordinate eliminirt, so ist jene Resultante durch den «Cubus von dieser theilbar, und der Quotient das Quadrat des Productes «aller 27 Geraden. Ob man vielleicht von hier aus zu der sehnlich «gewünschten Gleichung des 9^{ten} Grades gelangen kann. — Was ich «von einer f^7 geschwatzt habe, weiss ich nicht mehr; von zwei Grund- «punkten eines Kreis*büschels* habe ich nie gesprochen, wohl aber von «den zwei festen allen Kreisen gemeinschaftlichen Punkten. Ich werde «trachten, mit den rückständigen Sachen aus Ihren beiden Briefen «noch vollends aufzuräumen.

«Uriaszettel gezeigt. *Ris* bei Anfang des Semesters als Rector «mit Geschäften beladen, trägt mir den Gruss auf und verspricht Ihnen «etwas später zu schreiben. Sende an Crelle tom. I der ∞^n und «bitte Sie allenfalls bei ihm zu speichen[1]). Wenn Sie aber Berlin ver- «lassen, wünsche Ihre Adresse zu wissen und bitte überhaupt recht «bald zu antworten. — Nach Wien etwas zu schicken (über Resultante «u. nothwendige P^n bei Flächen) wird wohl vergeblich sein; dem «Liouville werde schicken, sobald der Bernhardiner etwas frei ge- «worden. $113 - 113 = 0$.

«Mit freundlichem Gruss

«*L. Schläfli.*

«Muzzopoli il 23 Majo 1854.»

[1]) Zu sorgen, dass Crelle vorwärts macht!

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Es thut mir leid, dass Sie sich die vergebliche Mühe genom-«men haben, zweimal über denselben Gegenstand zu schreiben. Bei «der grossen Eile, die mich drängte, Ihnen zu antworten, habe ich «einiges unbeantwortet gelassen, was ich jetzt nachholen will. (Bei «Ihrem Brief vom 30. April war es die Frage, ob vielleicht die 6 «Scheitel des Triederpaardreiers in einer Ebene liegen, die mir zu-«erst auffiel und mich fast rasend machte (7.—13. Mai), weil die al-«gebraische Entwicklung in's Aschgraue gieng, bis ich mich endlich «zu einer numerischen Untersuchung entschloss, welche entschieden «negativ ausfiel. Dann sprach mich die Eintheilung der F^3 nach Gat-«tungen hinsichtlich der Realität ihrer Geraden besonders an und «dauerte 14.—21. Mai; mein anfänglicher Plan war zu weit angelegt «weil ich sicher sein wollte, alles zu erschöpfen; ich habe jetzt frei-«lich einige Andeutungen, dass einfache synthetische Betrachtungen «hinreichen mögen, um sich zu überzeugen, dass es nur die erwähn-«ten fünf Gattungen giebt; aber bei meinem Verfahren machten mir «z. B. quadratische Gleichungen mit imaginären Coefficienten viel zu «schaffen, wie auch, da ich nur mit Triederpaaren operieren konnte, «die grosse Mannigfaltigkeit ihrer denkbaren Formen, bis endlich die «bemerkte Aequivalenz einiger derselben mir aus der Noth half.) — «In Zukunft möge es als Bestätigung gelten, wenn ich eine Ihrer «Aussagen nicht wiederhole; aber das, was ich noch nicht untersucht «habe, werde ich erwähnen. — Hinsichtlich der $R^{4(n-2)n}$ zeigt, wie «ich glaube, die Anschauung, dass, da wo die hyperboloidische Be-«schaffenheit der f^n in die ellipsoidische übergeht, also conisch oder «wenn man will cylindrisch wird, einmal die Rückkehrkante t (gleich-«sam erzeugende Gerade des Cylinders) eine abwickelbare Fläche be-«schreibt, zweitens im Allgemeinen nicht mit der Tangente der R «zusammenfällt, dass vielmehr wenn dieses geschieht, der Rückkehr-«punkt in einen Selbstberührungspunkt ausartet; ist Q ein solcher «Punkt, so geht dann die *dritte* Polarfläche des conjugirten Pols P «durch diesen Q; und es giebt $2n(n-2)(11\,n-24)$ solche Punkte «auf der f^n. Wie die Fläche f^n aussieht, da wo beide Zweige des «Selbstberührungspunkts conjugirt imaginär sind und sich nur in einem «reellen Punkt berühren, weiss ich nicht anzugeben. — $Fl.^4$, einem «Dreiseitsschnitt der f^3 zugeordnet, Ort des Scheitels L eines Kegels ^{2}, «der die f^3 in drei Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Seiten «des Λ gehen, schneidet, schneidet diese Ebene Λ in derselben C^4 «wie die Kernfläche. Da nun diese C^4 die Diagonalen (Seiten des Λ) «eines Vierseits in dessen 6 Ecken berührt, so müssen die 4 übrigen «Durchschnitte der C^4 und des Vierseits in einer *Geraden* liegen. «Fällt L in einen solchen Durchschnitt, so berührt der Kegel die «Ebene Λ längs der Seite des Vierseits. Fällt aber L in ein Vierseits-«eck π, so degenerirt der Kegel in die Ebene Λ und die Ebene, «welche f^3 in π berührt; heisst a die Λseite, worauf die Zugeord-«neten π, π^1, b, c die zwei übrigen, so ist der durch a gehende «Kegelschnitt der, welcher a in π berührt; der durch b gehende ist «$a + c$, der durch c gehende $a + b$, und der Durchschnitt ihrer (mit «Λ zusammenfallenden) Ebenen ist die vom Eck (bc) nach π gehende «Gerade. — Wenn Q diese C^4 durchläuft, so beschreibt der conjugirte «P eine Theilcurve R^6, welche die Ebene Λ in den 6 π schneidet. «— Vielleicht ist der Grad der mit $R^{4n(n-2)}$ conjugirten Curve im «letzten Brief unter die Oblate[1]) gekommen; sie ist eine $P^{6n(n-2)^2}$.

«— *Normalen aus A auf die f^n.* R^{n^2-n+1} Ort des Pols P, dessen «Polarebene auf der Geraden AP senkrecht steht. Durch diese geht «eine Doppelschaar von Flächen n^{ten} Grades, worunter eine A zum «Knotenpunkt hat und durch die $(n-1)^3$ ersten Grundpolarpunkte «der unendlich entfernten Ebene geht. Bei der f^2 geht durch die R^3 «unter anderm auch ein Kegel ^{2}, worin die drei Hauptaxen der f^2 «liegen. Die R^3 hat drei den Hauptaxen parallele Asymptoten; es «seien A, B, C die Längen der Hauptaxen des Ellipsoids, a, b, c die «auf diese bezogenen Coordinaten des Punkts A, von wo die Normalen «ausgehen; dann sind die Gleichungen der mit der Axe A (oder x) «parallelen Asymptote:

$$y = \frac{B^2}{B^2 - A^2}\, b, \qquad z = \frac{C^2}{C^2 - A^2}\, c.$$

«(Dass die R^{n^2-n+1} durch A geht und ihre Tangente hier auf «der Polarebene von A senkrecht ist, versteht sich von selbst.) Beim «Paraboloid geht die R^3 einfach durch den Berührungspunkt der un-«endlich entfernten Ebene, die entsprechende Asymptote ist die Haupt-«axe selbst. Ueber die zwei andern Asymptoten bin ich im Unklaren; «wenn $2x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q}$ die Gleichung der Fläche ist, so bekomme ich

[1]) D. h. Schläfli hat ihn nicht lesen können.

«für die mit der Axe der y parallelen Asymptote nur eine Gleichung, «nämlich x=a—p, und für die mit der Axe der z parallele: x=a—q; «wo die Abscisse a des Punkts A sich auf den Scheitel des Parabo-«loids bezieht. (Doch wahrscheinlich für jene noch $z = \frac{qc}{q-p}$ und «für diese noch $y = \frac{pb}{p-q}$.) Für die Umdrehungsfläche [2] reducirt «sich die R^3 auf einen in der Meridianebene von A befindlichen Kegel-«schnitt und die unendlich entfernte Gerade einer zur Axe senkrechten «Ebene, für die Kugel auf die von A nach dem Centrum gehende «Gerade, der Rest unbestimmt in der unendlich entfernten Ebene. — «Die Projectionen der R^3 auf die Hauptebenen der f^2 sind gleichseitige «Hyperbeln.

«*Eine räumliche Curve* scheint mir am allgemeinsten dargestellt «zu werden, wenn man n Gleichungen von allerlei Graden, homogen «in Beziehung auf n—1 zu eliminirende Grössen λ, μ etc. setzt, dann «erst jeder von diesen einen beliebigen impliciten Dimensionswerth «beilegt und nun statt der Coefficienten allerlei homogene Polynome «in x, y, z, w (räumlichen Coordinaten) von allerlei Graden, doch so, «dass wenn neben diesen dem angenommenen impliciten Dimensions-«werth einer jeden der $\lambda, \mu, \ldots$ auch Rechnung getragen wird, alle «Glieder einer und derselben Gleichung neuerdings dieselbe Dimen-«sion erhalten. Wäre z. B. $[x^2 + 5xy + \text{etc.}]\, \lambda^p \mu^q$ ein Glied einer «Gleichung, so wäre diese in Beziehung $\lambda, \mu, \ldots$ allein homogen und «vom Grade p + q, aber, wenn man $\lambda, \mu, \ldots$ die impliciten Dimen-«sionen $\alpha, \beta, \ldots$ beigelegt hat, in Beziehung auf $x, y, \ldots \lambda, \ldots$ «zusammen von der Dimension $2 + \alpha p + \beta q$, und diese Zahl müsste «für alle Glieder der Gleichung dieselbe sein. Lässt man aus dem «System eine Gleichung weg, so entspricht der Resultante der übrigen «eine Fläche. Da aber nicht jede Lösung, welche zwei solche Re-«sultanten annullirt, eo ipso auch dem ganzen Systeme genügt, so wird «der Durchschnitt der ihnen entsprechenden Flächen mehr als die «wahre Theilcurve R des Systems enthalten. Am durchsichtigsten «wird die Sache, wenn wir alle Gleichungen in Beziehung auf $\lambda, \mu, \ldots$ «linear annehmen; ich schreibe in diesem Falle die Polynome = Co-«efficienten von $\lambda, \mu, \ldots$ in einer und derselben Gleichung in eine «Verticalzeile und erhalte ein rechteckiges Schema mit n Verticalzeilen «(Zahl der Gleichungen) und n—1 Horizontalzeilen (Zahl der $\lambda, \mu, \ldots$ «deren Verhältnisse zu eliminiren sind). Wenn ich nun im Schema statt der Polynome in x, y, z, w bloss ihre Grade hinschreibe und so das Schema

$$\left\|\begin{matrix} a_1+b_1 \,.\, a_2+b_1 \,.\, a_3+b_1 \,\ldots\ldots\, a_n+b_1 \\ a_1+b_2 \,.\, a_2+b_2 \,.\, a_3+b_2 \,\ldots\ldots\, a_n+b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1+b_{n-1} \,.\, a_2+b_{n-1} \,.\, a_3+b_{n-1} \ldots a_n+b_{n-1} \end{matrix}\right\|$$

erhalte, dann die Summe der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ mit A_n, der $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ mit B_{n-1} und die Summe der binären Produkte mit $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_{n-1}$ bezeichne, so ist der Grad der Curve R: $\mathfrak{A}_n + A_nB_{n-1} + B^2{}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-1}$. Wenn im Schema eine Constante statt eines Polynoms vorkommt, so ist dieses so viel, als wenn man die betreffende Horizontal- und Verticalzeile durchstriche; denn so kann dann das Schema reducirt werden. Lücken scheinen Beschränkungen mitzubringen, z. B. Zerfallen der Curve in zwei. Für die paar ersten Grade hat man folgende Schemate:

$$R^3 \left\|\begin{matrix}1\,.\,1\,.\,1\\1\,.\,1\,.\,1\end{matrix}\right\| ;\quad R^4 \left\|\,2\,.\,2\,\right\| ;\quad R^5 \left\|\begin{matrix}1\,.\,1\,.\,2\\1\,.\,1\,.\,2\end{matrix}\right\| ;\quad R^6 \left\|\,2\,.\,3\,\right\| \text{ u. } \left\|\begin{matrix}1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\\1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\\1\,.\,1\,.\,1\,.\,1\end{matrix}\right\| ;$$

$$R^7 \left\|\begin{matrix}1\,.\,1\,.\,3\\1\,.\,1\,.\,3\end{matrix}\right\| \text{ u. } \left\|\begin{matrix}1\,.\,1\,.\,1\\2\,.\,2\,.\,2\end{matrix}\right\| ;\quad R^8 \left\|\,2\,.\,4\,\right\| \text{ u. } \left\|\begin{matrix}1\,.\,2\,.\,2\\1\,.\,2\,.\,2\end{matrix}\right\| .$$

Lassen Sie mich Ihren fünf geometrischen Grundgebilden als VI[tes] die Fläche erster Classe, den Punkt mit allen durchgehenden Ebenen, als *Ebenenbusch* hinzufügen und zwei solche Büsche *perspectivisch* nennen, wenn sie irgend eine feste Ebene in denselben Geraden schneiden, *projectivisch* wenn sie aus dieser gegenseitigen Lage verrückt sind. Dann sagt das Schema der R^3, 1^0 dass sie durch drei projectivische Ebenenbüschel erzeugt wird, 2^0 dass wenn durch zwei feste Punkte A, B der R^3 und jeweilen durch dieselbe veränderliche Sehne der R^3 die zwei Ebenen a, b gelegt werden (a durch A und die Sehne), die so gebildeten Ebenenbüsche A und B projectivisch sind; jeder Punkt der R^3 ist Scheitel eines Kegels ^{2}, der durch sie geht. — Die R^5 entsteht nach dem Schema aus projectivischen zwei Ebenenbüscheln und einem Flächenbüschel ^{2}; sie kann daher sowohl als Durchschnitt einer f^2 und f^3 mit Weglassung einer Geraden, wie auch als Durchschnitt zweier f^3 mit Weglassung einer $R^4 \,\|\, 2\,.\,2 \,\|$ gefasst werden; das Zerfallen dieser letzten scheint mir etwas Spezielles. Wie Sie eine R^5 construiren, durch die keine f^2 geht, vermag ich nicht zu errathen. Die durch meine R^5 gehende f^2 ist einzig, nämlich die durch die zwei projectivischen Ebenenbüschel bestimmte, und alle ihre Geraden γ, welche mit den Axen dieser Büschel zur gleichen

«Schaar gehören, schneiden die R^5 in drei Punkten; durch jeden «Punkt der R^5 scheinen aber noch andere Geraden von dieser Eigen- «schaft zu gehen (vielleicht 4 ?). — $(f^2, f^3) = g + R^5$; die R^5 soll «feststehen, so ist auch f^2 fest; g kann diese durchlaufen: aber ich «halte für jetzt g fest, nehme zu f^2 eine beliebige Ebene E hinzu, «um mit der f^3 einen Büschel ³ zu bestimmen; wenn ich nun aus «dem Büschel eine f_1^3 herausnehme, so habe ich sie mit 4-facher «Freiheit gewählt; eine *Cayley*'sche Gerade, die g nicht schneidet, «bewegt sich also mit 4-facher Freiheit, d. h. kann mit jeder beliebig «gegebenen Geraden zusammenfallen; da die g selbst eine einfache «Bewegung hat, so ist die durch R^5 gehende f^3 *fünffach* unbestimmt. «Sie können also zu der R^5 jede Gerade l, welche Sie wollen, hinzu- «nehmen, und dann auf die angegebene Weise eine f^3 erzeugen. — «Dass mein ganzer hier angelegter Plan noch Stümperei ist, ersehe «ich aus Ihrer R^4, in welcher die f^3 von jedem durch zwei sich nicht «schneidende *Cayley*'schen Geraden gelegten Hyperboloid geschnitten «wird; sie passt nicht in die Form $\| 2 \,.\, 2 \|$, weil kein anderes Hyper- «boloid durchgeht; Sie sehen dieses aus dem speziellen Falle, wo «diese R^4 sich in eine *Cayley*'sche Gerade verwandelt, die von drei «andern unter sich freien *Cayley*'schen Geraden geschnitten wird. Ich «kann bis jetzt diese R^4 nur als eine R^5, aus der vermöge einer be- «sondern Abhängigkeit der Hülfspolynome eine Gerade sich ablöst, «darstellen. — Auf mein Schema der Theilcurve R^6 passt nur (f^3, f_1^3) «$= R_1^3 + R^6$. Sie wird erzeugt durch 4 projectivische Ebenenbüsche, «wenn man dieselben durch die Bedingung, dass je 4 entsprechende «Ebenen einen Punkt P gemein haben, zu einfachen Schaaren de- «gradirt; der Punkt P beschreibt dann die R^6. Was Sie von den «Geraden anführen, welche die R^6 in drei Punkten schneiden, habe «ich noch begriffen; für meine R^6 halte ich es im Allgemeinen für «unstatthaft; denn wenn der erste Durchschnittspunkt A gegeben ist, «erhalte ich als Ort des zweiten eine von A ausgehende Gerade, von «der ich nicht einzusehen vermag, dass sie die R^6 noch einmal trifft.

«Die R^3 $\begin{vmatrix} 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \\ 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \end{vmatrix}$ ist durch 12, die R^4 $| 2 \,.\, 2 |$ durch 16, die «R^5 $\begin{vmatrix} 1 \,.\, 1 \,.\, 2 \\ 1 \,.\, 1 \,.\, 2 \end{vmatrix}$ durch 21, die R^6 $| 2 \,.\, 3 |$ durch 24, die R^6 $\begin{vmatrix} 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \\ 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \\ 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \end{vmatrix}$ «durch 27 Data, die R^7 $\begin{vmatrix} 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \\ 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \end{vmatrix}$ durch 28, die R^7 $\begin{vmatrix} 1 \,.\, 1 \,.\, 3 \\ 1 \,.\, 1 \,.\, 3 \end{vmatrix}$ durch 32

Data bestimmt. Ein einfaches Datum wäre etwa eine Gerade, die von der R geschnitten werden soll; ein gegebener Punkt zählt für 2 Data; aber es dürfen im Allgemeinen nicht lauter Punkte gegeben werden.

Die f^3 kann durch das Schema $\begin{vmatrix} 1.1.1 \\ 1.1.1 \\ 1.1.1 \end{vmatrix}$ dargestellt werden und enthält vermöge desselben eine Doppelschaar von R^3 und noch eine davon geschiedene; die f^3 wird demnach erzeugt durch 3 projectivische Ebenenbüsche. Da das Schema mit Rücksicht auf Transformation nur 19 Data zählt, so ist seine f^3 die allgemeine. Es seien auf der f^3 die Punkte A, B, C, P, P^1, P^{11}, P^{111} und noch 12 andere gegeben: man beabsichtigt A, B, C zu Centren projectivischer Büsche zu machen. Die 4 durch AP, AP^1, AP^{11}, AP^{111} gehenden Ebenen des Busches A ermangeln noch jede einer Bestimmung, u. s. f.; es sind also im Ganzen noch 12 Data unbekannt; diese werden durch die 12 übrigen Punkte just bestimmt. Da nun die Projectivität zweier Büsche durch 4 Ebenen in jedem festgesetzt wird, so kann man von jetzt an so viele Punkte der f^3 construiren als man will. Das Triederpaar $uvw + xyz = o$ ist in diesem Schema begriffen, nämlich als $\begin{vmatrix} \cdot & u & x \\ y & \cdot & v \\ w & z & \cdot \end{vmatrix}$. Das Schema $\begin{vmatrix} 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \end{vmatrix}$, welches die f^4 geben sollte, zählt leider nur 33 Data statt 34; dieses Schema enthält aber eine dreifache Schaar von R^6 und noch eine solche; die freie f^4 aber wahrscheinlich nicht.

Es sei P ein Pol, dessen x^{te} Polare in Beziehung auf C^m einen Doppelpunkt Q hat, so sind die Grade der Orte von P und Q resp. $3x(m-1-x)^2$ und $3x^2(m-1-x)$; für Flächen $4x(m-1-x)^3$ und $4x^3(m-1-x)$. — Die Orts$\left.\begin{matrix}\text{curve}\\\text{fläche}\end{matrix}\right\}$Q hat mit der $(x+1)^{ten}$ Polare von P Punkt und $\left.\begin{matrix}\text{Tangente}\\\text{Ber. Eb.}\end{matrix}\right\}$gemein, diejenige von P mit der $(m-x)^{ten}$ Polare von Q. — Das Geheimniss der Kerncurven und -Flächen war mir schon bekannt.

Ich glaube nun so ziemlich mit den schuldigen Antworten aufgeräumt zu haben; nur etwas über Evoluten und Doppeltangenten ist noch übrig geblieben.

«Mir schwebt die Frage vor: welche Curve auf der f^n enthält die «Berührungspunkte der Ebenen, welche die f^n in zwei gesonderten «Punkten berühren? — Die P^{18} bei der f^3 trifft jede *Sylvester'sche* «Ebene mit 6 dreifachen Punkten, was ja sehr gut zu dem ohnehin «sichern Grad passt. — Helfen Sie mir zu einer f^3, welche durch die «27g geht!

«Ich habe möglichst geeilt, Ihnen zu antworten, damit dieser «Brief Sie noch vor Ihrer Abreise in Berlin erreiche; und wünsche, «dass Sie mir dann Ihre Adresse geben. In Ems sind Sie näher bei «der Schweiz; vielleicht könnte ich in den Herbstferien Sie dort «besuchen.

«Prof. *Rettig* hat mir einen freundlichen Gruss an Sie aufge-«tragen, nehmen Sie auch einen von Ihrem diesen Augenblick Cay-«lisch-Sylvestrisch-polarisch-schwabblig-verrückten

«Bern, den 27. Mai 1854. *L. Schläfli.*

«Abends gegen 6 Uhr.

«Ihren Brief vom 22. Mai erhielt ich gestern den 26. Abends «um 4 Uhr!»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«(7. Juni.) Täglich und stündlich Ihrer Antwort entgegensehend, «ergreife ich schon jetzt die Feder, um sogleich nach Kennt-«niss Ihrer Adresse Ihnen meine Bemerkungen zusenden zu «können. Wie es mir nämlich fast immer geht, so habe ich auch «dieses Mal meinen letzten Brief zu ergänzen und theilweise zu «berichtigen.

«Ich sprach von *projectivischen Ebenenbüschen*, — ich will sie «fortan lieber *collinear* nennen, — und gab die Definition, dass sie «in eine solche (*perspectivische*) Lage versetzt werden können, dass «alle Durchschnitte je zweier entsprechender Ebenen in eine und die-«selbe Ebene fallen. Es fragte sich aber noch, ob dieses immer aus-«führbar sei, wenn zwei Ebenenbüsche nach meiner analytischen Vor-«stellung collinear sind. Vorerst war klar, dass sie in der perspec-«tivischen Lage einen gleichen und gemeinschaftlichen Ebenenbüschel «enthalten, dessen Lage ihre Mittelpunkte verbindet; und umgekehrt, «wenn zwei collineare Büsche auch nur einen in beiden gleichen «Ebenenbüschel enthalten, so war leicht zu zeigen, dass man nur «diese zwei Büschsel zur Congruenz bringen darf, indem man die «Mittelpunkte der Büsche getrennt erhält, um diese in die perspec«tivische Lage zu versetzen. Es fragte sich also nur noch: enthalten «zwei (in analytischem Sinne) collineare Ebenenbüsche immer wenig«stens *einen* gleichen Ebenenbüschel? Die Antwort war: es giebt immer «6 Axen gleicher Ebenenbüschel; und diese werden so construirt: «Es seien h, k die Asymptotenkegel aller um die Mittelpunkte A, B «der zwei gegebenen collinearen Ebenenbüsche beschriebenen Kugeln «(d. h. Kugeln mit nullem Halbmesser); k^1 sei der Kegel, welcher im «Busche A dem Kegel k des Busches B entspricht. Nun lege man «an h, k^1 die 4 gemeinschaftlichen Berührungsebenen, so sind die 6 «Kanten dieses vierflächigen Ecks die Axen derjenigen Ebenenbüschel «in A, denen gleiche Ebenenbüschel in B entsprechen. Ist die col«lineare Verwandtschaft beider Büsche eine reelle, so haben auch die «Gleichungen beider Kegel h, k^1 lauter reelle Coefficienten; daher «sind ihre 4 gemeinschaftlichen Berührungsebenen *conjugirt*-imaginär; «folglich immer *zwei* Gegenkanten *reell*, die 4 übrigen Kanten imaginär.

«Ich war erstaunt zu finden, dass die Erzeugung der f^3 mittelst «dreier collinearen Ebenenbüsche jeweilen mit einem bestimmten «Doppelsechser *Cayley'scher* Geraden zusammenhängt, so dass von «dieser Seite her keine Hoffnung übrig ist, zu 19 gegebenen Punk«ten einen beliebigen 20^{sten} zu finden. Denn wenn wir auch unter den «19 gegebenen Punkten drei A, A^1, A^{11}, als Mittelpunkte collinearer «Büsche setzen, und dann vier andere Punkte K, L, M, N hinzunehmen, «so drehen sich die 3×4 Ebenen, mit denen wir die collineare «Verwandtschaft anfangen wollen, um die 3×4 Strahlen AK, AL, «AM, AN, etc.; und um die 12 Unbekannten, die ihre Lage fixiren, «zu finden, müssen wir schon 4 sich nicht schneidende *Cayley'sche* «Gerade kennen. — Sind mit Bezug auf das Schema der 3×3 an«fänglichen Ebenen

	K	L	M
A	x	y	z
A^1	x^1	y^1	z^1
A^{11}	x^{11}	y^{11}	z^{11}

«(wo wenigstens 4 Buchstaben, wie z. B. y^1, z^1, y^{11}, z^{11}, nicht reine «Perpendikel bedeuten, sondern noch gewisse Factoren mit sich führen),

$$\left|\begin{array}{l} \alpha x + \alpha^1 x^1 + \alpha^{11} x^{11} = 0 \\ \alpha y + \alpha^1 y^1 + \alpha^{11} y^{11} = 0 \\ \alpha z + \alpha^1 z^1 + \alpha^{11} z^{11} = 0 \end{array}\right|$$

«drei entsprechende Ebenen, welche in B sich schneiden, so dürfen «ihre Polynome unverändert, wie sie hier stehen, z. B. mit der «Horizontalzeile A vertauscht werden; u. s. f., was ich nur andeuten will, «um nicht weitläufig zu werden. D. h. wie, wenn A, A^1, A^{11} als Mittel-«punkte collinearer Büsche feststehen, die auf f^3 liegenden Punkte K, L, M, «welche die 3×3 anfänglichen Ebenen des Schemas bestimmen, durch «irgend drei andere N, P, Q ersetzt werden können, so können auch um-«gekehrt irgend drei unter allen mittelst der collinearen Büsche A, A^1, «A^{11} bestimmten Punkte, z. B. K, L, M als Mittelpunkte collinearer «Büsche gebraucht werden, um die Punkte A, A^1, A^{11} in Fluss zu «bringen, und z. B. die Punkte B, B^1, B^{11} an ihre Stelle zu setzen. «Wir haben jetzt ein neues Schema der f^3, wo die Verticalzeilen den «Punkten N, P, Q, die Horizontalzeilen den Punkten B, B^1, B^{11} entsprechen, «und zwar haben wir es mittelst 12 unbestimmter Substitutionscoeffi-«cienten erhalten. Aber trotz der 12fachen Variabilität umfasst der «Haufe von Schematen, welche durch lineare Transformation, sowohl «der Horizontal- als der Verticalzeilen aus einem anfänglichen Schema «hervorgehen, noch nicht alle Schemate der f^3; sondern es giebt 36 «getrennte solche Haufen, wo kein Uebergang aus einem in einen «andern durch lineare Transformationen möglich ist; und jeder Haufe «ist an einen Doppelsechser *Cayley*'scher Geraden gebunden. — Halten «wir nämlich wieder A, A^1, A^{11} als Mittelpunkte collinearer Büsche «fest und verlangen zwei Verhältnisse $\varkappa : \lambda : \mu$, für welche die drei «entsprechenden Ebenen

$$«p = \varkappa x + \lambda y + \mu z = 0,$$
$$«p^1 = \varkappa x^1 + \lambda y^1 + \mu z^1 = 0,$$
$$«p^{11} = \varkappa x^{11} + \lambda y^{11} + \mu z^{11} = 0,$$

«welche den Punkt N bestimmen sollten, sich in *einer* Geraden B «schneiden, so ist die Aufgabe vom 6^{ten} Grade, wir erhalten daher «eine Sechserreihe sich nicht schneidender Geraden b_1, b_2, b_3, b_4, «b_5, b_6; und können das anfängliche Schema

$$\begin{vmatrix} p \;.\; y \;.\; z \\ p^1 \;.\; y^1 \;.\; z^1 \\ p^{11} \;.\; y^{11} \;.\; z^{11} \end{vmatrix}$$

«durch = o ersetzen. Weil aber die Polynome p, p^1, p^{11} nicht mehr «unter sich unabhängig sind, so giebt es eine identische Relation

$$«\alpha p + \alpha^1 p^1 + \alpha^{11} p^{11} = 0,$$

«und diese geht, wenn wir $\alpha x + \alpha^1 x^1 + \alpha^{11} x^{11} = t$,

$$«\alpha y + \alpha^1 y^1 + \alpha^{11} y^{11} = u,$$
$$«\alpha z + \alpha^1 z^1 + \alpha^{11} z^{11} = v \text{ setzen,}$$

«in $\varkappa t + \lambda u + \mu v = 0$ über.

«Daher schneiden sich auch die drei entsprechenden Ebenen t, «u, v der Büsche K, L, M in einer und derselben Geraden a, «welche der vorigen b conjugirt ist und sie nicht schneidet. Wenn «also die der vorigen ähnliche Aufgabe, welche der Vertauschung «von Horizontal und Vertical entspricht, die 6 Geraden a_1, a_2, a_3, «a_4, a_5, a_6 liefert, so dürfen wir annehmen, dass jede von diesen «mit der gleichvielten der Sechserreihe b conjugirtr sei; und es «ist klar, dass man nicht wieder eine Gleichung 6^{ten} Gades auf«zulösen braucht, sondern dass alle Geraden der zweiten Aufgabe auf «linearem Wege aus denen der ersten erhalten werden. Es ist ferner «leicht zu zeigen, dass z. B. a_1 von den 5 nicht conjugirten Geraden «b_2, . . . b_6 der andern Reihe geschnitten wird. Ich nenne die Sechser«reihe a *den Horizontalzeilen* des Schemas *entsprechend*, weil z. B. «im äquivalenten Schema die obige Gerade die erste Horizontalzeile

$$\begin{vmatrix} t\ .\ u\ .\ v \\ x^1\ y^1\ z^1 \\ x^{11}\ y^{11}\ z^{11} \end{vmatrix}$$

«annullirt; die conjugirte Reihe b entspricht den Verticalzeilen. Das «einfachste Merkmal, dass zwei Gerade beider Reihen, wie a_1 und b_1 «conjugirt sind, besteht darin, dass, wenn man so transformirt, dass «eine Horizontalzeile des Schemas durch a_1 und eine Verticalzeile «durch b_1 annullirt wird, im Kreuzungspunkt beider Zeilen eine *Lücke* «(Null statt eines Polynoms) entsteht. Transformirt man das Schema «so, dass seine drei Horizontalzeilen der Reihe nach von den Geraden «a_1. a_2, a_3 und seine drei Verticalzeilen von b_1, b_2, b_3 annullirt werden, «so fallen auf die Diagonale des Schemas drei Lücken; die Deter«minante verwandelt sich in die Summe *zweier* Produkte, und man «hat ein *Triederpaar*.

«Mit dieser Anschauung hängt die Anordnung der auf f^3 liegen«den Curven R^3 innig zusammen. Heben wir nämlich aus den colli«nearen Büschen A, A^1, A^{11} irgend drei projectivische Ebenenbüschel «heraus, so erzeugen diese eine R^3; sie bildet eine Doppelschaar, die «ich der horizontalen Richtung des Schemas oder der Sechserreihe a «entsprechend nenne. Von K, L, M aus erhalten wir die conjugirte «Doppelschaar. — Jene R^3 schneidet keine der 6 Geraden der ent«sprechenden Reihe a; sie schneidet jede Gerade der conjugirten «Reihe b zweimal, endlich jede der 15 übrigen Geraden c_{12}, etc. nur «einmal. Irgend zwei R^3 aus conjugirten Doppelschaaren schneiden «sich in 5 Punkten und liegen zusammen auf einem Hyperboloid;

«zwei R^3, deren entsprechende Sechserreihen keine Gerade gemein «haben ohne jedoch conjugirt zu sein, schneiden sich in 4 Punkten; «in 3, wenn die Sechserreihen *eine;* in 2, wenn dieselben *drei* Ge- «rade gemein haben; endlich zwei R^3 derselben Doppelschaar schnei- «den sich nur in einem Punkt. Durch 2 beliebige Punkte auf der «Fläche ist die R^3 bestimmt; aber es gehen deren 72 durch.

«Die R^3 ist eine sehr hübsche Curve; sie hat einmal gar keinen «ausgezeichneten Punkt; sodann spielt die Schaar ihrer Schmiegungs- «ebenen als *Abwickelbare* ganz dieselbe Rolle wie die Schaar ihrer «Punkte als Raumcurve. Durch einen freien Punkt gehen 3 Schmieg- «ungsebenen. Durch irgend zwei Durchschnitte von je zwei Schmieg- «ungsebenen geht eine der Abwickelbaren eingeschriebene Fläche «zweiten Grades; u. s. w. Folgende Aufgaben, 1. wenn 6 Punkte, «2. wenn 5 Punkte und 1 Sehne, 3. wenn 3 Punkte und 3 Sehnen, «4. wenn 2 Punkte und 4 Sehnen gegeben sind, die R^3 zu construiren, «sind leicht zu lösen. Durch 4 Punkte und 2 Sehnen wird keine «ächte R^3 bestimmt, sondern nur etwa ein Kegelschnitt und eine Ge- «rade, die aber jenen *nicht* schneidet, und daher keine R^3 mit ihm «ausmacht. Die übrigen Aufgaben, 5. durch 1 Punkt und 5 Sehnen; «6. durch 6 Sehnen eine R^3 zu legen, konnte ich nicht lösen.

«Unter den 12 Punkten, in denen die Vollcurve $R^4 \| 2 \,.\, 2 \|$ von «einer f^3 geschnitten wird, ist einer nothwendig.» Können Sie diesen «Satz beweisen? Wenn doch diese fundamentale Schwierigkeit nur «erst in einem speziellen Falle überwunden wäre! Dann Hoffnung «auf Verallgemeinerung.

«Durch irgend 4 auf der f^3 gegebene Punkte gehen 27 Curven «$R^4 \| 2 \,.\, 2 \|$, welche den 27 Geraden entsprechen. Alle auf der f^3 «gezogenen Vollcurven R^4 zerfallen also in 27 geschiedene Haufen. «Zwei Curven desselben Haufens schneiden sich auch in 4 Punkten, «diese liegen in einer Ebene, und der vierte ist nothwendig, es geht «nämlich ein schon durch die drei Punkte bestimmter Büschel durch. «Wird aber der vierte Punkt beliebig auf der durch die drei ersten «gelegten ebenen C^3 gesetzt, so zerfällt die R^4 in die entsprechende «*Cayley*'sche Gerade und diese C^3. Zwei Curven R^4 aus verschiedenen «Haufen schneiden sich entweder in 6 oder in 5 Punkten, je nachdem «die entsprechenden *Cayley*'schen Geraden sich schneiden oder nicht; «im ersten Falle geht die durch die 6 Punkte bestimmte R^3 durch «den Schnittpunkt der zwei *Cayley*'schen Geraden und hat die dritte «das Dreiseit ergänzende Gerade zur Sehne. Da die Gerade a, welche «den Haufen der R^4 bestimmt, in 16 Sechserreihen vorkömmt, so «kann die R^4 dieses Haufens auf 16 Arten in eine R^3 und diejenige «Sehne derselben, welche mit a in Beziehung auf die entsprechende «Sechserreihe conjugirt ist, sich auflösen. Sie kann ferner auf 5 «Arten sich in zwei Kegelschnitte, die zwei Punkte gemein haben, «auflösen. U. s. w. 16 Schnittpunkte der 4 Trippelebenen [1]) ausge«zeichnet. Durch irgend einen gegebenen Punkt gehen 2 Sehnen. «Alle Ebenen, welche in zwei getrennten Punkten die R^4 berühren, «bilden eine Abwickelbare (A^8) achter Classe, welche in 4 Kegel K^2 «zerfällt, deren Scheitel die Tripelpunkte [1]) sind. Die von den Tan«genten gebildete Abwickelbare ist eine A^{12} achten Grades. In einer «beliebigen Ebene liegen 38 Durchschnitte von je zwei Schmiegungs«ebenen der R^4.

«Die famose Theilcurve R^4 [(2 . 3)—(1 . 1)—(1 . 1)] ist nicht «so spröd, wie ich anfangs glaubte; sie zählt nur 16 Data, wie die «vorige (*nicht* 18!) und ist daher durch 8 Punkte bestimmt, nur «weiss ich nicht, wie viele Lösungen es dann giebt. Für ihre ebene «Projection ist $k = 6$, $d = 3$, $w = 6$, $t = 4$. Diese R^4 hat nur 4 «Punkte, wo sie von einer Ebene 4punktig berührt wird. Ihre Ab«wickelbare A^6 ist zugleich vom 6^{ten} Grade und hat eine Doppellinie «6^{ten} Grades. In jeder beliebigen Ebene liegen nur 6 Durchschnitte «je zweier Schmiegungsebenen der R^4. Ich vermuthe, dass die ge«nannte Doppellinie R^6 ihrem Charakter nach von der A^6 sich nur «durch Vertauschung von Grad und Classe unterscheide; sicher ist, «dass sie von jeder Tangente der R^4 nur zweimal geschnitten wird. «Legen wir hingegen an die R^4 alle Berührungsebenen, welche die«selbe in zwei verschiedenen Punkten berühren, so machen diese eine «Abwickelbare $A^{4\,2}$, welche die R^4 zur Doppellinie hat und als Ebenen«schaar wahrscheinlich dasselbe ist, wie diese R^4 als Punktschaar; «sie wäre demnach vom 6^{ten} Grade; ich kann dieses aber nicht be«weisen. — Von einem gewissen Gesichtspunkt aus erscheint diese «R^4 als Glied einer Progression, welche mit der Geraden, dem Kegel«schnitt und der R^3 anfängt. Setzt man nämlich die vier räumlichen «Coordinaten gleich ganzen Functionen einer einzigen Variabeln und «erhöht ihren Grad nach und nach von 1 bis 4, so erhält man die «schon genannten Linien und zuletzt die Theilcurve R^4 und zwar «ohne Beschränkung ihrer Natur. Sie passt auch in die allgemeine

---

[1]) Soll wohl heissen Quadrupelebenen.

«Darstellungsform freier Raumcurven, über die ich Ihnen früher ge-
«schrieben habe. Wenn nämlich t bis z lineare Polynome der 4
«räumlichen Coordinaten bedeuten, so wird die Curve rein durch das
«System $[t\lambda^2 + u\lambda\mu + v\mu^2 = o, w\lambda + x\mu = o, y\lambda + z\mu = o]$ dar-
«gestellt, wo das Verhältniss $\lambda : \mu$ zu eliminiren ist, ohne dass man
«etwas auszuschliessen braucht. Das System kann immer so trans-
«formirt werden, dass die Polynome w, x, y, z einem beliebigen
«schiefen Vierseit des festen Hyperboloids auf dem die R^4 liegt, ent-
«sprechen und dass zugleich u wegfällt, die erste Gleichung also bloss
«$t\lambda^2 + v\mu^2 = o$ ist. Man kann daher die Curve auch als das Er-
«zeugniss dreier Ebenenbüschel betrachten, von denen aber nur zwei
«unter sich projectivisch sind, beim dritten hingegen das projecti-
«vische Verhältniss die Reihe der Quadrate durchläuft, wenn es bei
«den übrigen nach einer arithmetischen Reihe erster Ordnung variirt.
«— Um die Curve R^4 auf dem festen Hyperboloid zu bestimmen,
«reichen 7 Punkte hin, und die Aufgabe hat nur 2 Lösungen je nach
«der Geradenschaar, auf welche man die Curve bezieht. Sie schneidet
«nämlich alle Geraden der einen Schaar dreimal, diejenigen der an-
«dern nur einmal. Irgend zwei Curven R^4 auf dem Hyperboloid haben
«6 oder 10 Punkte gemein, je nachdem sie zum gleichen oder zu
«verschiedenen Haufen gehören. Die durchgehende f^3 ist 6fach un-
«bestimmt, sie kann durch je zwei beliebige Gerade derselben Schaar
«des Hyperboloids gelegt werden oder kann auch eine allein zur
«Doppelgeraden haben.

«(6. Juli.) Ich habe mich schauderhaft lang mit den Raumcurven
«gequält und desshalb mit der Antwort gezögert, weil ich wenigstens
«noch mit den Curven 6^{ten} Grades aufräumen wollte. Ich bin zwar
«noch nicht sicher, dass ich alle R^6 vollständig habe.

«Ich schicke einige allgemeine Bemerkungen voraus. — Bei
«allen bis jetzt betrachteten auf der f^2 oder f^3 liegenden Curven habe
«ich immer gefunden, dass sie die durchgehende f^3 beschränken; es ist
«daher keine Hoffnung vorhanden, von dieser Seite her etwas für
«die f^3 zu leisten, was der Entdeckung der 27 Geraden auf der f^3
«einigermassen ähnlich wäre. Wenn ich lauter Polynome zweiten
«Grades anwenden will, so brauche ich deren f ü n f, um die allgemeine
«f^3 zu construiren, und dann ist das System viel zu beweglich, als
«dass man etwas Vernünftiges daran sehen könnte. Kurz, die f^3 ist
«eine sehr harte Nuss. — Ich bezeichne die Raumcurven nach Grad
«(oben) und Classe (unten); es giebt aber solche von gleichem Grad

«und gleicher Classe, die dennoch streng geschieden sind. Wenn «für die Flächen f^m, f^n, welche die Vollcurve bilden, keine Längs-«berührungen stattfinden, und die Vollcurve in mehrere bekannte Theil-«curven und eine unbekannte R_λ^α zerfällt, so finde ich die Classe λ «auf folgendem Wege. Es sei Θ die Zahl der Knoten dieser R^α, d. h. «der Punkte, in denen sie von den übrigen Theilcurven geschnitten «wird (leicht zu ermitteln), so ist $\lambda + \Theta = \alpha\ (m + n - 2)$. «Wenn die R_λ^n keinen ausserordentlichen Punkt (d p oder r p) hat, «so ist λ immer gerade. Durch irgend einen Punkt gehen «$\frac{n\,(n-1)}{2} - \frac{\lambda}{2}$ Sehnen; von jedem Punkt der Curve aus gehen «$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \frac{\lambda}{2} - 1$ Strahlen, welche die Curve im «Ganzen in drei Punkten scheiden. Durch irgend einen Punkt gehen «$3\ (\lambda - n)$ Schmiegungsebenen und $4\ n + \frac{1}{2}\ \lambda\ (\lambda - 10)$ «Doppelberührungsebenen; die von diesen umhüllte Abwickelbare «hat die R_λ^n zur $(\lambda - 4)$ fachen Linie. Die Doppellinie, der von «den Schmiegungsebenen umhüllten Abwickelbaren ist vom Grade «$\frac{1}{2}\lambda\ (\lambda - 4)$. Die Curve R_λ^n hat $6\ \lambda - 8\ n$ *Planpunkte* (wo eine Ebene «4 punktig berührt). — Die Zahl der *nothwendigen Punkte* einer Theil-«curve wird durch folgenden Satz bestimmt: «Wenn eine Vollcurve «in i Theilcurven zerfällt, so ist die Summe der diesen entsprechen-«den Zahlen nothwendiger Punkte sammt der Anzahl aller Knoten um «$i - 1$ grösser als die der Vollcurve entsprechende Zahl nothwendi-«ger Punkte.» Diese letzte Zahl wird durch die Formel

$$\frac{1}{2}\ np\ (n + p - 4) + 1 - \varepsilon \left(\frac{n + p - m - 1}{3}\right)$$

«ausgedrückt mit Bezug auf Vollcurve $C^{n \cdot p}$ und Fläche f^m ($m \geqq n \geqq p$); «$\varepsilon = 0$, wenn $m > n + p - 4$, und $= 1$, wenn $m \leqq n + p - 4$.

«Dieser Satz lässt mich aber bei Längsberührungen im Stich. — «Unter den wenigen Gattungen von Raumcurven, die ich jetzt aufzählen «will, sind manche, die ich nicht durch ein geschlossenes System von «Gleichungen, worin zu eliminirende Hülfsgrössen vorkommen, so «darzustellen vermag, dass das System der Theilcurve äquivalent ist, «ohne dass man von der Gesammtheit seiner Lösungen etwas auszu-«schliessen braucht. Es bleibt daher nichts anders übrig, als sie nach «den niedrigsten durchgehenden Flächen zu ordnen, was doch be- «denklich ist. Auch scheint uns die f^3 für die Fortsetzung dieser «angefangenen Betrachtung der Raumcurven ein unübersteigliches «Hinderniss in den Weg zu legen. In folgender Uebersicht bezeichnet «e die Zahl der Elemente oder Bestimmungsstücke, p die Zahl der noth- «wendigen Punkte, wenn es nöthig ist, mit einem untern Zeiger, der «den Grad der schneidenden Fläche anzeigt.

«R_4^3 ($e = 12$, $p = o$); R_6^4 ($e = 16$, $p = 0$); R_8^4 ($e = 16$, $p = 1$);

«R_8^5 ($e = 20$, $p = 0$) entsteht, wenn zwei f^3 eine R_4^3 und eine «diese nicht treffende Gerade gemein haben. Die R_8^5 ($e = 18$), «welche entsteht, wenn eine f^4 mit einer f^2 drei Gerade derselben «Schaar gemein hat, betrachte ich als speziellen Fall der vorigen

«R_{10}^5 ($e = 20$, $p = 1$) entsteht, wenn zwei f^3 eine R_6^4 gemein «haben. (Kein System!)

«R_{12}^5 ($e = 20$, $p = 2$) entsteht, wenn eine f^2 und eine f^3 eine Ge- «rade gemein haben.

«R_{10}^6 ($e = 24$, $p = 0$); eine einzige f^3 geht durch (als Basis); die «Curve schneidet alle Geraden des entsprechenden Sechsers «4 mal, die des conjugirten nicht, und jede der 15 übrigen Ge- «raden 2 mal; sie ist durch 5 Punkte auf der Basis bestimmt. «Die durchgelegte f^4 schneidet die Basis in einer conjugirten S_{10}^6. «Zwei R_4^3 desselben Haufens können zusammen für eine solche «Curve gelten.

«Diesen untergeordnet R_{10}^6 ($e = 23$), wenn eine f^3 und eine «f^4 eine Gerade gemein haben, die in jener Doppelgerade, in dieser «dreifache Gerade ist; R_{10}^6 ($e = 20$), wenn eine f^5 durch «4 Gerade derselben Schaar einer f^2 geht; ist auf der f^2 durch «11 Punkte bestimmt und trifft alle Geraden der einen Schaar «5 mal, die der andern 1 mal.

«R_{10}^6 ($e = 23$, $p_3 = 1$, $p_4, \ldots = 0$), wenn zwei f^3 sich längs «einer Geraden berühren und eine freie Gerade (einfach) gemein «haben. Legt man eine f^4 durch die R, so enthält sie noth- «wendig die erste Gerade und schneidet jede f^3 in einer R_{10}^5 «die das Geradenpaar nicht trifft. (Kein System!)

«R_{12}^6 ($e = 24$, $p = 1$), wenn zwei f^3 drei freie Gerade a, a′, a″ «gemein haben. Die eine f^3 sei Basis, und werde von der «durch a, a′, a″ gehenden f^2 in b, b′, b″ geschnitten. Geht «nun eine f^4 durch die R_{12}^6, so schneidet sie die Basis noch in «einer S^6_{12}, die zu b, b′, b″ gehört und mit der vorigen «Curve 18 Punkte gemein hat.

«R^6_{14} (e = 24, p = 2), wenn zwei f^3 einen Kegelschnitt und eine «freie Gerade gemein haben. (Kein System!)

«R^6_{16} (e = 24, p = 3), wenn zwei f^3 eine R^3_4 gemein haben; ist «durch 8 Punkte auf der Basis f^3 bestimmt, trifft alle Geraden «eines Sechsers 3 mal, die des conjugirten Sechsers nur 1 mal, «die 15 übrigen Geraden 2 mal; und wird durch vier collineare «Ebenenbüsche erzeugt.

«R^6_{16} (e = 23, p = 3), wenn eine f^2 und eine f^4 zwei freie Ge-«rade gemein haben.

«R^6_{18} (e = 24, p = 4) = $C^{2 \cdot 3}$ Vollcurve.

«Wie tief kann die Classe einer R^n hinabgehen, wenn diese «ausserordentliche Punkte hat? Ohne solche scheint 2(n—1) die «niedrigste Classe zu sein. Diese $R^n_{2(n-1)}$ entsteht immer, wenn man «alle 4 Coordinaten als ganze Functionen n^{ten} Grades einer Variabeln «setzt, und hat 4n Elemente; sie verläuft in einem einzigen reellen «Zuge und kehrt in sich zurück; was ich von den höhern Classen «nicht glaube, obschon ich es nicht beweisen kann. Von der R^4_8 ist «leicht nachzuweisen, dass sie aus zwei getrennten Zügen bestehen «kann, ebenso von der ebenen C^3; wie ist es bei der ebenen C^4? — «Ich habe auch das Zerfallen der einzelnen Raumcurven studirt, weil «ich es für den Uebergang zu höhern Curven nothwendig finde; doch «darüber einzutreten, ist zu weitläufig; ich will nur erwähnen, dass «eine R^4_8 auf der Basis f^3 allmählig übergehen kann in eine C^3 und «eine einmal schneidende Gerade; ferner dass nicht jede Gruppe durch «Knoten vereinigter Raumcurven als specieller Fall einer untheilbaren «Raumcurve angesehen werden darf; denn z. B. eine C^4 sammt einer «einmal schneidenden Geraden wäre eine R^5_{14}, und doch glaube ich «nicht, dass es eine untheilbare R^5_{14} gebe.

«*Satz.* Wenn $m \gtreqless n$ und die Basis f^n enthält eine Gerade g, «und man verlangt, dass eine f^m die Basis längs g berühre, so zählt «dieses der f^m für 2m + n gegebene Punkte.

«Im Café du Mont ist das Erdgeschoss frei; Sie können 8 Tage «vor Ihrer Ankunft das Logis bestellen, und ich ersuche Sie mir dar-«über zu schreiben. Wenn Sie unerwartet ankämen, könnten Sie «nicht schon am ersten Tage hier logiren. Es freut mich sehr, Sie «wieder zu sehen; nur muss ich Ihnen mittheilen, dass ich der Na-«tionalvorsichtscasse die Uebernahme einer mir wahrscheinlich zu-

«fallenden Arbeit, die vielleicht 3 Wochen, Ende Juli bis in den «August hinein, ansprechen wird, zugesagt habe; doch, bevor ich sie «definitiv erhalte, soll darüber geschwiegen werden. Es bleibt mir «also nichts andres übrig, als diese Arbeit Hals über Kopf zu been«digen, damit ich etwa am Ende August mit ungetheiltem Interesse «Ihrem Umgang und den von Ihnen in Aussicht gestellten mathema«tischen Bemühungen leben kann. — Die Vorsicht wegen Einsendung «einer Abhandlung über Flächen an *Liouville* ist mir schon vor Ihrem «Briefe in den Sinn gekommen, und ich werde mich vorher mit Ihnen «darüber besprechen. Meine Ansicht ist, dass wir die Anfänge einer «Theorie der ganzen Functionen vor uns haben, so wie die Zahlen«lehre eine Theorie der ganzen Zahlen ist, und dass jene ein starkes «Bedürfniss ist, weil es in allen Zweigen der Analyse doch zuletzt «immer auf geschickte Behandlung der ganzen Functionen ankömmt.

«In der letzten Zeit befinde ich mich etwas leidend und weniger «lebendig als im Mai und Juni; ich wollte, ich könnte etwa am Fusse «des Ochsen[1]) eine Milchkur machen; doch wird nun kaum etwas daraus «werden. — *Crelle* hat mir den Empfang meiner Zusendung noch «immer nicht angezeigt; vielleicht wäre es gut, wenn Sie ihn mahnten.

«Ich wünsche, dass die Kur Ihnen gut zuschlage; und verzeihen «Sie, dass ich erst so spät schreibe und Ihnen zumuthe, während der «Cur einen so lang schwatzenden Brief zu lesen.

«Sie freundlich grüssend

Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Café du Mont, den 7. Juli 1854.

Steiner an Schläfli.

Vom hohen Olymp[2]) 1ter August 1854.

«*Lieber Freund!*

«Seit dem 20ten vorigen Monats bin ich hier. Nach Homburg hielt «ich mich je einen Tag in Baden-Baden, Freiburg (bei *Oettinger*)[3]) und «Basel auf, leider war *Rudolf Merian* zur Zeit in Bern. Ihren furcht«baren Brief habe ich in Homburg nicht gelesen; hier bin ich auch «noch nicht dazu gekommen; es fehlt mir an Comfort, die Zimmer

[1]) Ein Berg der Stockhorn-Kette.

[2]) Rigi-Scheideck.

[3]) Oettinger Ludwig geboren 7. V. 1767 Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau.

«sind zu klein, ohne Sopha und Tisch, im Gastzimmer kann ich «nicht nachdenken, wie Sie. Diesen Brief schreibe ich in der Nähe «des Getümmels im grossen Saal. Hätten Sie Zeit und den Rigi «nicht schon abgegrast, so könnten Sie auf 2 Tage herkommen. Es «ist keiner hier, der was vom Grasen versteht. Ich werde wenigstens «noch bis zum 10^{ten} hier bleiben, vielleicht bis zum 17^{ten}, nach«dem ich gute Wirkung spüre. Etwas Stärkung fühle ich schon. «Heute ist straub[1]) Wetter, dass man bis jetzt, 11 Uhr, noch nicht «aus dem Haus gehen kann. Ob ich über Luzern direct nach Bern «komme oder durch Unterwalden (was ich noch nicht gesehen) über «den Brünig, Interlaken, Thun gehen werde, weiss noch nicht; zum «Letztern fehlt mir ein kleines Ränzel und gutes Wetter. Die Pen«sion ist hier billig, ich bezahle nur 4 Fränkli per Tag. Wenn das «schlechte Wetter anhält, so werde ich wohl anfangen müssen, mir «etwas Geometrie in Erinnerung zu bringen. Ich habe einige Manu«scripte und Notizen mitgenommen. — Ist die Wohnung, die im du «Mont[2]) zu haben wäre, für mich geeignet? 1) gegen Morgen oder «Mittag; 2) ruhig und ohne Tabakrauch; 3) mit Sopha! — Da Sie «keine Bedürfnisse und daher kein Urtheil haben, so wird es wohl «besser sein, wenn ich erst im Adler absteige und selbst sehe.

«Wenn Sie nichts zu thun haben, so können Sie über Thun und «die beiden Seen in anderthalb Tagen hier sein; von Gersau steigen «Sie in 2 Stunden hinauf. Sind Ihnen die Vorsichts-Kassen-Rech«nungen schon zugestellt, so rechnen Sie wie der Tüfel, dass Sie «bis zum 18^{ten} oder 20^{ten} August fertig sind. Indessen reiben Sie «sich nicht auf, damit Sie nicht auch matt werden, wie Ihr entkräf«teter Freund

Steiner.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Es dauert mich, dass Sie in meinem letzten Brief die Auf«zählung der Raumcurven bis zum 6^{ten} Grad inclusive und den «schlechten Trost, den ich für höhere Curven beifüge, nicht ange«sehen haben.

---

[1]) Straub = schlechtes.

[2]) Ein Café bei Bern, wo Schläfli wohnte.

«Wenn Sie lange genug auf dem Rigi blieben, so wäre es mög-«lich, dass ich hinkäme; aber zuvor muss ich die fatale Bürde ab-«geworfen haben, und wenn diess bis zum 20^{ten} geschieht, bin ich «daher froh. Doch ich denke, Sie seien früher in Bern als ich auf «dem Rigi. Wenn Sie aber den Rigi verlassen, möchte ich Sie «bitten, es mir zu schreiben, damit nicht etwa mein Brief oder ich «selbst Sie verfehle.

«Ihr Logis hier auf dem Mont hat alle Eigenschaften, die Sie «von ihm verlangen; es ist das grosse Zimmer ebener Erde gegen «den Garten hin gerichtet; ein Sopha kömmt hinein; Stille und «Rauchlosigkeit non plus ultra. Wenn Sie wenige Tage vorher be-«stellen, brauchen Sie nicht im Adler abzusteigen.

«Ich vermuthe, dass Sie Herrn *Crelle* wegen seines Stillschwei-«gens über den Empfang meiner Abhandlung geschrieben haben; ich «wollte gerne, Sie hätten mir dieses angezeigt. Denn nun erhalte ich «einen Brief von *Crelle*, datirt vom 28. Juli, nach welchem alles in «Ordnung ist, kurz nach dem ich am 31. Juli einen frankirten Mahn-«brief hatte abgehen lassen. Wird indess nicht viel schaden!

«Meine für *Liouville* bestimmte Abhandlung über intégrales «sphériques d'ordre n ist am 1. August durch Gefälligkeit direct nach «Strassburg abgegangen und wird von dort nach Paris spedirt wer-«den, wird aber Herrn *Liouville* kaum mehr dort antreffen. Das «Ding ist etwa 35 starke Quartseiten lang geworden und hat mich die «Redaction saure Mühe gekostet. Musste wiederholt umgegossen wer-«den, weil ich die Darstellung immer wieder zu schwerfällig fand. «Jetzt hoffe ich, wird es ein Franzose leidlich lesen können. Wegen «der Unterdrückung der Beweise habe ich mich bei *Liouville* durch «deren unvermeidliche Weitläufigkeit entschuldigt, ungeachtet sie an «sich leicht und rein constructiv seien. Mich dünkt, die Sache sollte «den *Liouville* um so mehr interessiren, da er selbst schon so Man-«ches auf n Dimensionen übergetragen hat. Bin begierig, was er da-«rauf antworten wird. Ich habe noch allerlei, worüber ich ihm gerne «schreiben möchte, z. B. über orthog. Flächen, wo ich sehe, dass «*Serret* in einem Irrthum steckt, ungeachtet er schöne Sachen darüber «geliefert hat. Ich hoffe, Sie werden es nicht missbilligen, dass ich «*Liouville* ganz kurz gefragt habe, wo *Cayley* seine 27 Geraden publi-«cirt habe.

«Mit herzlichem Gruss

Ihr dankbarer Schüler

«Bern, den 4. August 1854. *L. Schläfli.*»

Steiner an Schläfli.

Sonntag, 20. August.

«Herr Schläfli wird bis zum 23^{ten} oder 24^{ten} hier erwartet, in-«dem ich meinen Aufenthalt bis dahin verlängere, weil mir ätherische «Luft gut anschlägt.

«Rechnung weg! Dienstag abgereisst!

J. St.»

Rigi-Scheideck. Gersau, 20. VIII. 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Wenn die Liquidationsrechnung nächsten Freitag den 25^{ten} fertig «ist, bin ich froh; eher will ich sterben, als dieses Geschäft unbe-«endigt verlassen. Leider schreiben Sie mir nicht, wie lange Sie Ihren «Aufenthalt auf dem Rigi noch fortsetzen wollen. In Erwartung einer «baldigen Antwort grüsst Sie

Ihr

L. Schläfli.»

Bern, den 21. August 1854.
Montag Abends.

Schläfli ist dann auf den Rigi zum Besuch, *Borchardt* war auch da. (Siehe Brief 21. Febr. 1855, Steiner an Schläfli.)

Schläfli an Steiner.

«Sie haben vermuthlich eine fortgesetzte Redaction des Ganzen «von mir erwartet; aber leider bin ich an Einzelnem stecken ge-«blieben. Uebrigens würde ich kaum im Stande sein, in der Dis-«kussion der Flächen dritten Grades fortzuschreiten. Später vielleicht «Mehreres. Den Auftrag an Chelini und andere Sachen mehr werde «nächstens besorgen; Ihre Ernennung zum Lynkeus in Bund und In-«telligenz gelesen.

«Mit meinen Vorlesungen steht es nicht so übel als Sie glaub-«ten; 4 Zuhörer in den Elementen, 1 in der anal. Geometrie, 1 in «der Mechanik; wöchentlich 12 Stunden, aufgeweckte Jünglinge, die «Freude an der Sache haben.

«Fast hätte ich vergessen, Sie vor dem Pentaeder beim Flächen-«netz zweiten Grades zu *warnen* (im gewöhnlichen Sinne!); die 10 «Ebenenpaare hingegen will ich Ihnen gerne zugeben. — Ich habe «endlich eine Definition des geraden Kegels gefunden; er berührt «den mit ihm concentrischen Asymptotenkegel einer Kugel längs zweier «Strahlen.

«Was macht Boreas bei Ihnen? uns hat er einen frühen Winter «gebracht; gegenwärtig ist Alles weiss mit Ausnahme der sonnigen «Halden; am 25. Oct. Abends hatten wir einen heftigen Sturm, der «zwar die Bäume stehen liess; wohl nur local. — Die drei Hefte von «Crelle 48 habe ich hier auch gesehen.

«Ich wünsche recht bald wieder von Ihren schätzbaren Nach-«richten zu erhalten.

«Mit herzlichem Gruss

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, den 15. November 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Sie werden denken, ich befolge das Beispiel *Goldbach's* dass «ich schon wieder eine kecke Behauptung meines letzten Briefes «zurücknehmen muss. Indess enthält doch auch wieder das dort Ge-«sagte die Mittel in sich, den Irrthum aufzudecken. „*Ein beliebiges «Flächengebüsch zweiten Grades kann nicht als im Netze erster «Polaren einer Basis dritten Grades enthalten gedacht werden*“; seiner «Knotencurve R^6 kömmt daher im Allgemeinen *kein* Pentaeder zu; «und wenn im Besondern ein solches existirt, so ist es nicht fest.

«Es ist nämlich klar, dass wenn die Ebene, in der die Pole des «Gebüsches sich bewegen, dreifach gezählt, mit der Basis 3^{ten} Grades «einen Büschel bestimmt, dann auch jede beliebige Fläche dieses «Büschels gebraucht werden kann als Basis zur Darstellung des Ge-«büsches ^{2}, ohne dass die Pole sich ändern. Nimmt man nun die in «meinem letzten Briefe beschriebene Bewegung der Pole und der «Basis hinzu, so erscheint im Ganzen diese Basis als beliebige Fläche «einer Doppelschaar; man kann sie z. B. nöthigen, durch zwei ge-«gebene Punkte zu gehen. Die Basis darf daher nur 17 Unbekannte «zählen, die 3 Pole zählen 9, und die Bedingungen sind 3 . 9; also «übertreffen die Bedingungen die Zahl der Unbekannten um 1; d. h. «drei Flächen zweiten Grades unterliegen *einer* Bedingung, wenn sie «erste Polaren einer Basis sein sollen. — Die Sache wird auch von «anderer Seite her bestätigt. Gebraucht man nur die Coordinaten «eines Pols als Unbekannte, so erhält man mittelst des Kreuzfeuers «leicht diejenigen der zwei andern Pole als lineare Functionen jener «ersten; und wenn man nun auf diese zwei Pole das Kreuzfeuer an-«wendet, so erhält man schliesslich 4 lineare Gleichungen für 3 Un-«bekannte, also zu viel. Ist aber die Bedingungsgleichung zwischen «den Constanten der drei gegebenen Flächen zweiten Grades erfüllt, «so reduziren sich diese 4 Gleichungen, vermöge ihrer eigenthüm-«lichen Beschaffenheit, sogleich auf 2 (statt auf 3); und jener erste «Pol wird nun doch nicht bestimmt, sondern bewegt sich auf einer «Geraden. Die Sache ist analytisch mir jetzt sehr klar; aber geo-«metrisch kann ich es so leicht darstellen.

«Ich glaubte mit dieser Rücknahme eilen zu müssen, weil ein «so massiver Irrthum Ihre ganze Redaction verderben könnte.

«Leben Sie wohl!

«Ihr treuer

L. Schläfli.»

Bern, den 18. Nov. 1854.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Ich glaube Ihnen noch meine Ansichten über Ihre 5 Er-«zeugungsarten der Flächen dritten Grades mittheilen zu sollen. Ich «habe mich schon früher dahin geäussert, dass nur die IV (Fünfseit «mit Axe) ganz abgesondert sei; die zwei andern allgemeinern hin-«gegen, — nämlich II, Construction mittelst zwei projectivischer «Büschel 1ten und 2ten Grades, und die in Ihrem damaligen Manuscript nicht «ausdrücklich hervorgehobene Construction mittelst dreier projektivi-«scher Ebenengebüsche, — sich in der Construction V mittelst des Doppel-«trieders, als der beiderseitigen grössten Specialisirung vereinigen. «Ist nämlich $u v w + x y z = o$ die Gleichung der Fläche in Beziehung «auf ein Doppeltrieder und bedeuten α, β, γ arbiträre Factoren, so «kann dieselbe Fläche 1° als Erzeugniss der Büschel $u - \alpha x = o$, «$y z + \alpha v w = o$, und 2° als solches den Ebenenbüsche $\beta u + \gamma x = o$, «$\alpha y + \gamma v = o$, $\alpha w + \beta z = o$ dargestellt werden. Von den letztern «ist freilich jedes Gebüsch in einen Ebenenbüschel ausgeartet, aber «ihre gegenseitige Beziehung ist doch diejenige dreier projectivischen «Ebenengebüsche; und diese Beziehung erscheint sogleich in ihrer «gewöhnlichen Weise, sobald wir die drei Gleichungen mit drei Fac-

«torenreihen λ, μ, ν; λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν'' multipliciren und addiren;
«denn wir erhalten so die drei projectivischen Ebenengebüsche:

$$«\alpha(\mu\ y + \nu\ w) + \beta(\lambda\ u + \nu\ z) + \gamma(\lambda\ x + \mu\ v) = o,$$
$$«\alpha(\mu'\ y + \nu'\ w) + \beta(\lambda'\ u + \nu'\ z) + \gamma(\lambda'\ x + \mu'\ v) = o,$$
$$«\alpha(\mu'' y + \nu'' w) + \beta(\lambda'' u + \nu'' z) + \gamma(\lambda'' x + \mu'' v) = o.$$

«Sie fragen nun bei II, wie die 16 übrigen Geraden gefunden «werden können. Die Antwort ist einfach die, dass man zuerst die «Construction II auf die I (Fläche als Pampolare) zurückführen muss. — «Es seien e, e', e'' drei Ebenen des einen Büschels, h, h', h'' die «drei entsprechenden Hyperboloide des andern Büschels; eine beliebige «feste Ebene d wird hinzugenommen und irgend ein Punkt P auf «der erzeugten f^3 fixirt. Nun legt man durch die zwei Kegelschnitte, «in denen h von d und e geschnitten wird, und durch P ein neues «Hyperboloid K, durch die Kegelschnitte (h', d), (h', e') und P ein «zweites K' und endlich ebenso ein drittes K''; dann werden die «zwei projectivischen Büschel (e, e', e'') und (K, K', K'') wieder die«selbe f^3 erzeugen. Für die Zurückführung von II auf I kömmt es «jetzt darauf an, der Hülfsebene d eine bestimmte Lage anzuweisen. «Man wähle im Ebenenbüschel eine der fünf, z. B. e, welche ihr zu«gehöriges Hyperboloid h im Punkte A berührt. Dann bilden die in «Beziehung auf h, h', h'' genommenen Polaren von A, nämlich e, «p' p'' einen mit dem Ebenenbüschel (e, e', e'') nicht nur projec«tivischen, sondern perspectivischen Büschel; daher erzeugen beide «Büschel eine Ebene; diese ist die verlangte d. Jetzt verursacht «nur noch die Wahl des Punkts P auf der f^3 einige Schwierigkeit. «Wenn auch e' das zugehörige h' im Punkte B berührt, so lege man «durch den Kegelschnitt (d, h') aus dem Scheitel B einen Kegel; dann «wird dieser auch das Geradenpaar (e', h') enthalten und das ge«suchte K' sein. Wiederholt sich dasselbe für e'', h'', so findet man «wieder einen Kegel K''; und nun ist durch K', K'' die Grundcurve «des neuen Büschels (K, K', K'') zweiten Grades bestimmt. Jetzt «sind e, e', e'' Polaren von **A** in Beziehung auf K, K', K'' gewor«den; die 4 übrigen Berührungspunkte einer Ebene e''' mit dem zu«gehörigen Hyperboloid h''', ausser A, bilden das Quadrupel des «neuen Büschels (K, K', K''), und seine Grundcurve R^4 geht nun «durch die 8 neuen Ecken der durch jede Gerade des Paars (e, h) «geführten Dreiseitsschnitte. Bei der analytischen Behandlung bedarf «man des Punkts P zur nähern Bestimmung des neuen Hyperboloids«büschels nicht, und daher genügt es für die beabsichtigte Zurück-

«führung, nur eine Ebene e, welche ihr Hyperboloid in A berührt, «zu kennen. Diese Einfachheit weiss ich aber auf synthetischem «Wege nicht zu erreichen.

«Der eigentliche Gegenstand, der mir interessant genug schien, «um diesen Brief zu veranlassen, ist die Zurückführung der Construc- «tion mittelst dreier projectivischer Ebenengebüsche auf Ihre Er- «zeugungsart III mittelst einer Polebene und eines Hyperboloidge- «büsches. Man wählt in den drei projectivischen Gebüschen drei mal «drei Ebenen, die sich entsprechen, und sucht für diese die drei «Pole; diese zählen analytisch für 3×4 Coordinaten; da es aber nur «auf ihre Verhältnisse ankömmt, so sind bloss 11 Unbekannte zu zählen. «Die Umwendung des Kreuzfeuers giebt zwischen diesen bloss lineare «Gleichungen; also bleiben 2 Unbekannte frei, und die durch die «drei Pole gelegte Ebene bekömmt *doppelte* Beweglichkeit, sie um- «hüllt also eine Fläche Φ. Die Constanten in der Gleichung der Pol- «ebene sind in Beziehung auf die 2 freien Unbekannten vom dritten «Grade. Daher ist die Fläche Φ von der 9^ten^ Klasse und vom 12^ten^ «Grade. Obschon in den Ausdrücken dritten Grades, welche in der «Gleichung der Ebene vorkommen, bei einer passenden Darstellung «die Cuben fehlen, und daher Besonderheiten eintreten, welche die «Elimination erleichtern, so zeigt doch die nahe bis zur völligen Ent- «wicklung des Polynoms Φ (nach Grad) fortgeführte Rechnung, dass «diese Fläche wirklich vom 12^ten^ Grade ist. Sie bezieht sich natür- «lich nur auf den einen Sechser des *Gitters* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$ «und hat die 15 Geraden, welche je zwei Ecken, wie $(a_1\ b_2)$ und «$(a_2\ b_1)$ verbinden (also keine *Cayley*'schen), zu Doppelgeraden. Sie «mag aber sonst noch Doppellinien haben, die ich nicht kenne??? «Die nähere Untersuchung scheint mir der Arbeit nicht werth.

«Hat man einmal die Polebene fixirt, so ist darum das Hyperbo- «loid, welches dem ersten Ebenengebüsch als Basis entspricht, doch «noch nicht völlig bestimmt; man bekömmt nämlich statt eines Hyper- «boloids einen ganzen Büschel von solchen, welche sich alle längs «eines in der Polebene befindlichen Kegelschnitts berühren (einander «umschrieben sind). Ebenso verhält es sich mit dem zweiten und mit «dem dritten Hyperboloid; jedes kann in seinem Büschel nach Belieben «gewählt werden, auf eine von der Wahl der zwei übrigen durchaus «unabhängige Weise. Von den 8 Grundpunkten der drei Basen kann «also einer ganz frei im Raume gelöst werde. Somit figuriren in der «besprochenen Zurückführung auf III im Ganzen 5 willkürliche Grössen, «wovon 2 der Polebene und je eine jedem Hyperboloid zufallen. «Hieraus ist es zu erklären, warum die Construktion der f^3 als Pam-«polare scheinbar zu viele Constanten (Elemente) mit sich führt; «nämlich die Polebene zählt deren 3, und die 7 Grundpunkte, welche «hinreichen um das Hyperboloidgebüsch zu bestimmen, $7 \cdot 3 = 21$, «zusammen 24. Zieht man aber hievon die 5 willkürlichen Elemente «ab, so bleibt die richtige Zahl 19; und nun erst ist es sicher be-«wiesen dass die fraglichen Pampolare die allgemeine Fläche dritten «Grades ist.

«Ich füge noch einiges bei, wo ich nicht mehr weiss, ob in «Ihrem Manuscript x, y standen oder nicht. § 4. II. Der Ort der «Berührungspunkte des B^m und B^n ist eine Curve vom Grade

$$3\,m^2 + 4\,m\,n + 3\,n^2 - 6\,m - 6\,n + 2.$$

«III. f^m und Geb.^{n}. Die Berührungspunkte liegen da, wo die f^m «von einer Fläche $(m + 3\,n - 4)^{\text{ten}}$ Grades geschnitten wird; «IV. B^m, Geb.^{n} Ortsfläche vom Grade $2\,m + 3\,n - 4$.

«Beim Flächennetz zweiten Grades weiss ich über die gegen-«seitige Lage der 10 Ebenenpaare durchaus nichts anzugeben. Ich «glaube wenigstens, dass irgend 2 von den 10 Durchschnittsgeraden «(die also auf der Knotenfläche f^4 liegen) sich treffen. Das ist gewiss, «wenn 6 Gerade nach Belieben im Raume angenommen sind, so sind «die 4 übrigen durch sie bestimmt.

«Ich verwundere mich, noch keinen Brief von Ihnen erhalten «zu haben. Seit heute Vormittag ist die Temperatur gestiegen, und «wir haben heftigen Westwind mit Regen.

«Ich hoffe, dass diese Zeilen Sie in guter Gesundheit antreffen. «Leben Sie wohl und schreiben Sie auch einmal wieder.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, Mittwoch den 29. Nov. 1854.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Dienstag Abends um 8 Uhr reiste ich von Uzistorf ab und kam «Donnerstag morgens um $10^1/_2$ Uhr in Berlin an. Ich war erstaunt «zu sehen, wie gröblich mich mein schlechtes Gedächtniss getäuscht «hatte; denn statt dem 27ten war schon am 2ten November die Reihe «an mir. Deshalb ging ich selben Tags 4 Uhr Nachmittags in die «Sitzung und war so glücklich, den grossen Anatomen *Müller* bereit «zu finden, den 2ten November an meiner Stelle zu lesen, so dass ich «nun erst am 14ten December den *Donnstigs* Vortrag zu halten brauche. «Bis dahin werden Sie nun noch gute Launen und helle Blicke in «Rücksicht der Resultanten und Determinanten haben, besonders wenn «Sie endlich warm sitzen. Die Hauptsachen wünschte ich aber doch «bis 15. — 18. November zu erhalten; Nachträge können bis zum «8ten December von Bern *abgehen*. — Mit der Arbeit habe ich selbst «noch nicht begonnen, weil allerlei häusliche und andere Geschäfte «mich hinderten. Den Anfang meiner Vorlesungen habe ich auf den «6ten November hinaus geschoben.

«Von *Crelle*'s Journ. fand ich das 2te, 3te und 4te Heft des 48ten «Bandes vor; das 2te enthält acht Aufsätze von *Raabe*, das 3te zwei «von *Heine* (ersten Ranges). 1. «Untersuchungen über ganze Func«tionen,» 2. «Fernere Untersuchungen über ganze Functionen».

«Bei meiner Ankunft fand ich ferner auch ein Schreiben nebst «Diplom und Statuten der Accademia Romana Pontificia de' nuove «Lincei vor, was besagt, dass dieselbe mich schon am 22ten September «1853 zu ihrem correspondirenden Mitgliede ernannt hat. Diese Ehre «werde ich vornehmlich unserm Freunde *Chelini*[1]) zu danken haben, «da er *ordentliches Mitglied* ist, wie das Verzeichniss zeigt. Sie «könnten demselben gelegentlich wieder einmal schreiben, ihm meine «Freude und Dank melden, und ihm erzählen, dass ich Sie diesen «Sommer (Herbst) besucht habe, was Sie und was wir zusammen «treiben, etc. Es wird mir schwer werden, das Dankschreiben an «die Akademie anfertigen zu lassen; doch es hat noch Zeit. Leider «weiss ich nicht, ob die Akademie bedeutend ist, oder nur wie die «Naturforschende Gesellschaft in der Schweiz; sie beschäftigt sich «mit «lo studio, il progresso e la propagazione delle scienze», also «exakten Wissenschaften. *Böckh* sagt: «Lincei» käme von Linkeus, «der durch ein Eichenbrett sehen konnte. Ist die Akademie nicht «ganz ohne, so könnte das Faktum in einer Bernerzeitung erwähnt «werden, nicht gerade aus Eitelkeit, sondern mehr aus Thierquälerei, «nämlich der Thiere des Museums, die uns schnöde behandelten. «Sprechen Sie mit *Rettig* oder *Ries*.

«Gruss an *Mutz*, *Ries*, *Rettig*, Herr und Frau *Leuenberger*.[2]) etc.

---

[1]) Steiner schreibt «Chilini».

[2]) Leuenberger, † Mai 1871, war Professor der Rechte in Bern. Rettig war Professor der Philologie in Bern, lebt jetzt noch daselbst.

«Beim Redigiren wird sich wohl Anlass finden, Ihnen bald wie-
«der zu schreiben. Indessen leben Sie wohl, d. h. gehen Sie fleissig
«zu Ihrer geliebten Gräfin [1]).

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Berlin, 30. November 1854.

1855.

Die nachfolgenden Fragen Steiner's sind undatirt [2]):

Fragen an den Cima-Rüssel.

«1. Hat der aus einem Punkt in einer Fläche dieser umschriebene «Kegel die zugehörige Berührungsebene zur *Doppelebene* und berührt «er dieselbe längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve? Und «wenn nun die Ebene mit *Rückkehrpunkten* berührt: ist sie dann eine «*Wendeebene* des Kegels (oder Rückkehrebene?); oder wenn sie mit «*Selbstberührung* schneidet, ist sie dann eine *Selbstberührungsebene* «des Kegels?

«2. Wenn sich zwei f in 1 Punkt berühren, so hat die ihnen «gemeinsam umschriebene Abweichung die Berührungsebene zur «Doppelebene und berührt sie längs der beiden Tangenten der Schnitt-«curve der Flächen —? Sie wird *Wende-* (?) *und Selbstberührungs-«ebene*, wenn der Punkt ein *Rückkehr-* oder *Selbstberührungspunkt* «der Curve ist? Die Rückkehrtangente ist dann eine Asymptote in «der Involution; ist es die Selbstberührungs-Tangente auch?

«3. Der Knotenkegel n^{ten} Grads = K sendet n (n + 1) Zweige «durch den Knotenpunkt, deren Tangenten, T, in K fallen; berührt «eine E den K längs einer T, so hat ihre Schnittcurve mit der f^m «diese T zum Selbstberührungspunkt; und für die vorhergehenden «und noch folgenden, den K berührenden Ebenen, wechselt (ändert «sich) die Richtung der Rückkehrtangente ihres Schnittes. Geht E frei «durch T, so hat ihr Schnitt (ein Zweig desselben) die T zur wt im Kp; «geht E durch zwei T eben so beide.

«4. Sie sagen bloss; «Bei einer Doppelschaar von Flächen giebt «es etc.», müsste da nicht beigefügt werden «bei einer Doppelschaar «von Flächen *gleichen Grads oder gleicher Klasse* giebt es etc. oder liegt «*gleichen Grads* oder *gleicher Klasse* schon im Begriff der Schaar? —

[1]) Gemeint ist das Café Gräf, wo Schläfli jahrelang, d. h. bis 1876, in Pension war.

[2]) Sie beziehen sich zum Teil auf den Brief Steiners vom 25. Febr. 1855.

«Kann man bei einer Doppelschaar von «drei successiven Flächen» «sprechen, da jede gleichsam von einer Schaar umgeben ist?

«5. Wenn der Knotenkegel 2ten Grads reell oder imaginär sein «kann, so muss es doch zwischen beiden einen Uebergangsfall geben, «wo der Knotenpunkt *paraboloidisch* oder ein *Rückkehrknotenpunkt* «wird, indem der Kegel sich auf eine einzige Gerade reducirt, die «Rückkehrtangente des Schnitts jeder durch sie gehenden Ebene ist. «Besteht der Kegel aus 2 Ebenen, die *reell* oder *imaginär* sind, und «dem entsprechend der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*, und «beim Uebergang, wo die Ebenen zusammenfallen, *parabolisch*, so «muss zwischen diesem dem hiesigen elliptischen und dem vorigen «*paraboloidischen* Knotenpunkt wohl noch ein Unterschied obwalten.

«Wenn Ihr Phantasiegebilde über den in 2 E zerfallenen Knoten-«kegel Realität haben soll, so muss folgendes unterschieden werden. «Beim wirklichen Kegel: *hyperboloidischer* und *ellipsoidischer* Knoten-«punkt, und bei den donnstigs 2 Ebenen: *hyperbolischer* und *ellipti-«scher*. Der Uebergangsfall zwischen erstern muss dann ein *paraboloi-«discher* oder Rückkehrknotenpunkt sein, indem der . . . .

«6. Braucht man «*Schaar*» nicht zu definiren? Wenn Sie sagen «eine Doppelschaar von Flächen» muss da nicht zugesetzt werden «*gleichen Grads*» oder «*gleicher Klasse*»; liegt dies schon drin? « Steht schon oben 4·

«7. Da die *Klasse* der doppelt umschriebenen Abwickelbaren bei «f^m bekannt, so muss auch der *Grad* ihrer Berührungscurve daraus «zu finden sein. Denn gehen durch $P\mu$ Doppelebenen, so schneidet «seine Polare f^{m-1} jene B. C R^x in 2μ Punkten, so dass also «$(m-1)x = 2\mu$, oder $x = \dfrac{2\mu}{m-1}$ ist. Aber nun ist die Frage: ob R^x «nicht in *Theilcurven* zerfalle? wie z. B. bei $n = 3$, wo $R^x = R^{27}$ aus «27 Geraden besteht, was die Formel aber nicht anzuzeigen vermag, «sondern nur, da $\mu = 27$ ist, auch $x = \dfrac{2 \cdot 27}{3-1} = 27$ giebt.

«8. *Bei gegebenen f^m und f^n ist die gemeinschaftlich-umschriebene* «*Abwickelbare* von der $m(m-1)^2 \times n(n-1)^{2\text{ten}}$ Klasse (weil «die beiden aus P den Flächen umschriebenen Kegel beziehlich von «der $m(m-1)^2$ und $n(n-1)^{2\text{ten}}$ Klasse sind, und daher «$mn(m-1)^2(m-1)^2$ gemeinsam berührende Ebenen haben); ihre «Berührungscurven $M\mu$, $N\nu$ mit den Flächen werden daher von den «Polaren f^{m-1}, f^{n-1} beziehlich in $n(n-1)^2$ $m(m-1)^2$

«m (m — 1)^2 n (n — 1)^2 Punkten geschnitten, so dass

«μ = m (m — 1) n (n — 1)^2,

«ν = m (m — 1)^2 n (n — 1)

«sein muss. Wären die gegebenen Flächen von der m$^{\text{ten}}$ und n$^{\text{ten}}$ Klasse, «so wäre die Abwickelbare nur von der m n$^{\text{ten}}$ Klasse und für ihre beiden «Berührungscurven [1]) gilt folgendes: Ist die Klasse = m, so ist ihr Grade «= m (m = 1)^2; also Grad der ersten Polare = m (m — 1)^2 — 1; «daher $\mu = \dfrac{m\ n}{m\ (m-1)^2-1}$ und $\nu = \dfrac{m\ n}{n\ (n-1)^2-1}$; was «auch richtig sein kann, weils für m = n = 2 stimmt; aber für «m = 3 und n = 2 schon Unsinn giebt.

«9. Den Berührungscurven der gemeinschaftlich umschriebenen «Abwickelbaren entsprechen die längs der Schnittcurve zweier Flächen «f^m und f^n diesen umschriebenen Abwickelbaren. Da die Curve vom «m nten Grad ist, so wird sie von den Polaren f^{m-1} und f^{n-1} jedes «Pols in m n · (m — 1) und m n · (n — 1) Punkten geschnitten und «daher sind die Abwickelbaren beziehlich von der m n (m — 1)$^{\text{ten}}$ «und m n (n — 1)$^{\text{ten}}$ Klasse. Daher müssen auch bei zwei Flächen «m$^{\text{ter}}$ und n$^{\text{ter}}$ Klasse, die Berührungscurven der gemeinschaftlich um«schriebenen Abwickelbaren, vom beziehlich m n (m — 1)$^{\text{ten}}$ und «m n (n — 1)$^{\text{ten}}$ Grad sein. — Da nun durch P nur m n gemeinsame «Ebenen der f^m und f^n (Klasse) gehen und die erste Polare von P «auf f^m eine $f^{m(m-1)^2-1}$ ist, also die Berührungscurve $M\mu$ = «$M^{n\,m\,(m-1)}$ in [m (m — 1)^2 — 1] $\times$ n m (m — 1) Punkten schneiden «sollte statt nur in m n: so müssen die übrigen durch die *Doppel-* und «*Rückkehrlinie* der f^m absorbirt werden; also d l und r l absorbiren «= m n [(m — 1) [m (m — 1)^2 — 1] — 1] = m n [m (m — 1)^3 «— (m — 1) — 1] = n m^2 [(m — 1)^3 — 1] Punkte; und daraus «sollte folgen, wie vielfach d L und r l oder L_d und L_r für die Polare «$f^{m(m-1)^2-1}$ zählen.

$$«\frac{n\,m^2\,[(m-1)^3-1)}{n\,m\,(m-1)} = x\,L_d + y\,L_r = \frac{m\,[(m-1)^3-1]}{m-1}$$

«Nimmt man 2 Polaren $f^{m(m-1)^2-1}$ von 2 P auf f_k^m, so haben «ihre Schnittcurven mit f_k^m nur m freie Punkte, statt

«m (m — 1)^2 $\times$ [m (m — 1)^2 — 1]^2,

«so dass durch L_d und L_r absorbirt werden = m [(m — 1)^2 «[m (m— 1)^2 — 1] — 1] = m [m (m — 1)^4 —(m — 1)^2 1].

[1]) Das Concept ist hier unklar.

«10. Hat f^m einen KK $= K^n$, so zerfällt der aus dem Kp ihr «umschriebene $K^{m(m-1)}$ in den $(n+1)$ fachen K^n und in einen $K_0^{m(m-1)-n(n+1)}$. Beim Maximum für n, bei $n = m - \mathbf{1}$, wird also $K_0 = 0$, sowie auch 1^2 Polare $f^{m-1} = K^n = K^{m-1}$.»

Schläfli an Steiner (undatirt).

«*Lieber Freund!*

«Ich beeile mich, einige Irrthümer zu zerstören, in denen wir beide «befangen waren.

«I. In Beziehung auf eine f^3 sei A ein *Sylvester*'scher Punkt, «durch den die Kanten b, c, d gehen; a seine Gegenkante, auf ihr die «Punkte B, C, D. Die Polarebene von A berührt die Kernfläche längs «der ganzen a. Also berührt die letzte Polarenveloppe von a (der «Knotenkegel A der Kernfläche) die Kernfläche längs den drei Geraden «b, c, d und schneidet sie daher in einem *Kegelschnitt*, dessen Ebene «durch a geht.

«Auf der Kernfläche Q einer freien Basis f^n liegen $10\,(n-2)^3$ «Knotenpunkte A, deren vorletzte Polaren in zwei Ebenen zerfallen, «deren Kante a heissen soll; die Polarebene von A berührt die Kern«fläche P längs der Kante a. Die Classe der Kernfläche Q ist somit «$4\,(n-2)\,(11\,n^2 - 52\,n + 61)$ und die Classe ihres ebenen Schnitts «$4\,(n-2)\,(4n-9)$. Die Kernfläche P ist von der Classe $4\,(n-1)^2\,(n-2)$, «ihr ebener Schnitt von der Classe $6\,(n-1)\,(n-2)^2$. — Es «giebt eine Schaar erster Polaren, deren Knotenkegel in zwei Ebenen «zerfällt; der entsprechende Pol durchläuft die Rückkehrlinie der Kern«fläche P, für deren Grad ich $30\,(n-2)^2\,(n-3)$ gefunden habe(?). Es «giebt ferner eine Schaar erster Polaren mit zwei Knotenpunkten; der «Pol durchläuft also die *Doppellinie* der Kernfläche P; wenn der an«gegebene Grad der Rückkehrlinie richtig ist, so muss diese Doppel«linie vom Grade

$$2\,(n-2)^2\,(n-3)\,(4\,n^3 - 20\,n^2 + 36\,n - 45)$$

«sein. Für eine Basis f^4 hätte also die Kernfläche P eine Doppellinie «280^{ten} Grades und eine Rückkehrlinie 120^{ten} Grades. Bei der Unter«suchung des Verhaltens dieser singulären Curven der Kernfläche P «zu ihrer Geraden a verwickelte ich mich aber in schreiende Wider«sprüche. Ich bediente mich dazu des folgenden Satzes, den ich im «Allgemeinen für unzweifelhaft halte. «Ein Flächenbüschel n^{ten} Grades, «dessen sämmtliche Flächen einen Knotenpunkt K gemein haben, zählt

«4 $(n-1)^3$ — 11 Flächen, welche noch einen zweiten Knotenpunkt «haben, und 3 Flächen, deren Knotenkegel in K ein Ebenenpaar ist.»

«III. Jedem Gebüsch zweiten Grades entspricht ein *festes* Pentaeder; «in Beziehung auf jede Fläche des Gebüschs geht die Polare eines «Ecks A von den 10 des Pentaeders durch die Gegenkante a. In «Beziehung auf den Gebüschs-Kegel, dessen Scheitel A ist, sind die «von hier ausgehenden Kanten b, c, d ein harmonisches Tripel.

«Alle 10 Ecken des Pentaeders liegen auf der R^6 (Tangenten-«fläche vom 16^{ten} Grade und von der 30^{sten} Classe), der Knotencurve «des Gebüschs; aber sonst giebt es kein Pentaeder von dieser Eigen-«schaft. Die Basen dritten Grades, deren jede das gegebene Gebüsch «in ihrem Netze erster Polaren enthält, bilden eine Schaar, von der «durch jeden Punkt des Raums 4 Flächen gehen, und haben jenes «Pentaeder als *Sylvester*'sches gemein. Ist λ ein Faktor, der von Fläche «zu Fläche sich ändert, und sind v, w, x, y, z die Polynome des Pentaeders, «so ist die Gleichung irgend einer Fläche der Schaar

$$\frac{v^3}{\lambda A + A'} + \frac{w^3}{\lambda B + B'} + \frac{x^3}{\lambda C + C'} + \frac{y^3}{\lambda D + D'} + \frac{z^3}{\lambda E + E'} = 0;$$

«der Pol irgend einer bestimmten Fläche des Gebüschs bewegt sich «in einer Geraden, wenn die Base sich ändert. Die entsprechenden Kern-«flächen bilden einen Büschel, dessen Grundcurve aus jener R^6 und den «10 Kanten des Pentaeders besteht. Die Umhüllungsfläche der Schaar «von Basen dritten Grades ist vom 18^{ten} Grade und der 216^{ten} Classe, «hat eine Doppellinie 45^{ten} Grades und als Umhüllte ihrer erzeugenden «Curven 9^{ten} Grades eine R^{27}, welche jede Pentaederebene in 9 Punkten «dreipunktig passirt und als die charakterische *Rückkehrlinie* bezeichnet «werden kann; ausserdem aber hat die Umhüllungsfläche in jeder Pen-«taederebene eine C^3 als Rückkehrlinie, welche dreimal gezählt als er-«zeugende Curve auftritt, und im Schnitt der Pentaederebene mit der «Umhüllungsfläche nur zweimal zählt; dieser Schnitt besteht nämlich «noch aus einer C^{12}, die jene 9 Punkte zu Rückkehrpunkten hat, in «denen sie von der C^3 berührt wird.

«So viel in Beziehung auf jene zwei Irrthümer, die R^5, in der «die Kernfläche der f^3 von einem ihrer Knotenkegel geschnitten werden «sollte — und das längs der Knotencurve eines Büschels zweiten Grades «fortrückende Pentaeder. — Ich lege Ihnen nun hier zur Beurtheilung «vor die Art, wie ich ein Flächennetz n^{ten} Grades zu behandeln ge-«dächte.

«Wenn ein Netz von Flächen n^{ten} Grades gegeben ist, so kann «man irgend 5 desselben auswählen, von denen keine 4 einem und «demselben Gebüsch angehören. Dann lasse man in einem räumlichen «System von Punkten irgend 5 Punkte, von denen keine 4 in einer «Ebene liegen, jenen 5 Flächen entsprechen. Verlangt man nun, dass «jeder Fläche des Netzes ein Punkt des räumlichen Systems in der «Weise entspreche, dass die Punkte in einer Geraden liegen, so oft «die Flächen einen Büschel bilden, so ist diese Aufgabe möglich und völlig bestimmt; und zugleich werden je 4 Flächen eines Büschels «dasselbe perspectivische Doppelverhältniss haben, wie die 4 ent-«sprechenden in einer Geraden liegenden Punkte. Der einer Fläche «des Netzes entsprechende Punkt soll ihr *reciproker* Punkt heissen.

«Für irgend einen Pol P bilden nun die ersten Polaren (und da-«her überhaupt die irgendwievielten) aller Flächen des Netzes wieder «ein Netz, welchem genau das vorige räumliche Punktsystem entspricht. «Verlangt man jetzt, dass das Netz der ersten Polaren einen Grund-«punkt X habe, so wird der Pol P genöthigt, sich auf einer Fläche «$4(n-1)^3$ten Grades (*Polfläche*) zu bewegen, während der Grundpunkt X «eine Fläche $4\,(n-1)$ ten Grades (*Knotenfläche*) durchläuft. Die letztere «ist zugleich der Ort aller Punkte X, deren Polarebenen in Beziehung «auf sämmtliche Flächen des Netzes durch einen und denselben Punkt «P gehen.

«Verlangt man ferner, dass eine Fläche φ des Netzes einen «Knotenpunkt habe, so bewegt sich ihr reciproker Punkt A auf einer «Fläche $4\,(n-1)^3$ten Grades (*reciproke Fläche*), und der Knotenpunkt «X liegt nothwendig auf der schon erwähnten Knotenfläche. Man könnte «noch denjenigen zu X und P reciproken Punkt B anzeichnen, für des-«sen Netzfläche φ (ohne Knotenpunkt und nicht durch X gehend) die «erste Polare von P den Grundpunkt X zum Knotenpunkt hat.

«Ich will nun der Reihe nach an die reciproke Fläche in A, «an die Knotenfläche in X und an die Polfläche in P *Berührungsebenen* «legen. 1⁰ Alle Flächen des Netzes, welche durch X gehen, bilden «ein Gebüsch und haben den Strahl XP zur gemeinschaftlichen Tan-«gente; ihre reciproken Punkte liegen also in einer Ebene, und diese «berührt die reciproke Fläche in A. Wenn insbesondere die reciproken «Punkte in einer durch A gehenden Tangente der reciproken Fläche «liegen, so bilden die zugehörigen Flächen des Netzes einen Büschel «und berühren sich alle in X. Umgekehrt: je zwei Flächen des Netzes «können sich nirgends berühren, als auf der Knotenfläche, z. B. in X, «und der Strahl, welcher ihre reciproken Punkte verbindet, wird dann «die reciproke Fläche im zugeordneten Punkte A berühren. 2° Die «erste Polare von P in Beziehung auf die Fläche des Netzes, welche «den zugeordneten Punkt X zum Knotenpunkt hat, berührt die Polfläche «in X; oder, was auf dasselbe hinauskömmt, die Polarebene von P «in Beziehung auf den Knotenkegel der genannten Fläche φ ist die Be-«rührungsebene der Knotenfläche in X. 3° Die letzte Polare des Punkts «X in Beziehung auf die Fläche φ des Netzes, für welche die erste «Polare von P den Knotenpunkt X hat, ist die Berührungsebene der «Polfläche in P.

«Hat *im Besondern* das ursprüngliche Netz einen Grundpunkt X, «so geht die Knotenfläche durch diesen und hat ihn zum Knotenpunkt; «ebenso die Polfläche, indem dann P und X zusammenfallen; endlich «hat auch die reciproke Fläche den reciproken Punkt A zum Knoten-«punkt. Bei der Knotenfläche und der Polfläche fällt der Knotenkegel «mit demjenigen der entsprechenden Fläche φ des Netzes zusammen; «und wenn X und P sich unendlich wenig vom Grundpunkt entfernen, «so liegen sie in einem und demselben Strahl des Knotenkegels. Legt «man nun durch einen solchen eine Berührungsebene an den Knoten-«kegel, so bilden alle Flächen des Netzes, welche diese Ebene im «Grundpunkt berühren, einen Büschel, dessen reciproke Punkte den «entsprechenden Strahl des Knotenkegels der reciproken Fläche in A «bilden.

«Verlangt man, dass die letzten Polaren eines Punkts X in Be-«ziehung auf alle Flächen des Netzes sich in einer Geraden schneiden, «so unterwirft man den Punkt X vier unter sich unabhängigen Bedin-«gungen; es wird also im Allgemeinen keinen solchen Punkt X geben, «dessen zugehöriger Pol sich in einer Geraden bewegen kann, und «daher kann die Knotenfläche keinen Knotenpunkt haben.

«Beim Flächengebüsch n^{ten} Grades will ich ähnliche Zeichen ge-«brauchen, wie beim Netz; nur haben wir jetzt statt des Poles P einen «Polstrahl p, in dem alle Polarebenen des Punktes X sich schneiden; «ein einzelner Punkt auf p möge P heissen. Die von p beschriebene «geradlinige Fläche heisse *Polfläche*. Die von X beschriebene *Knoten-«curve* ist vom $6\,(n-1)^{2\text{ten}}$ Grade, ihre Tangentenfläche ist vom Grad «$4\,(n-1)^2\,(7n-10)$ und von der Classe $6\,(n-1)^2\,(14n-23)$. Die «Tangente der Knotencurve in X ist der Polstrahl der Ebene (Xp) in «Beziehung auf den Knotenkegel der Gebüschfläche in X, d. h. die «Grundcurve des Büschels erster Polaren von p in Beziehung auf die «Fläche des Gebüschs, welche X zum Knotenpunkt hat, berührt die

«Knotencurve in X. Ist ein Punkt P auf p gegeben, durch den man «eine Berührungsebene an die Polfläche legen soll, so wird das gegebene Flächengebüsch einen Büschel enthalten, in Beziehung auf welche «die ersten Polaren von P die Knotencurve in X berühren; dann ist «die gemeinschaftliche letzte Polare von X in Beziehung auf alle ur- «sprünglichen Flächen des genannten Büschels die verlangte Berührungs- «ebene. Die reciproken Punkte aller durch X gehenden Gebüschflächen «liegen auf der Tangente der *reciproken Curve* in A; diese ebene Curve «ist vom Grade 4 $(n-1)^3$. — Die geradlinige Polfläche ist von Grad «und Classe 8 $(n-1)^3$.

«Mittelst des schiefen Fünfseits $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ und der Axe e können «also Geraden, wie folgt, linear construirt werden. b_1 geht durch die «Punkte, in denen die Ebene $(a_3\, a_4)$ von a_1 und e geschnitten wird; «c_1 durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_1\, b_1)$ von b_5, b_2 geschnitten «wird; d_1 durch die Punkte, in denen die Ebene $(b_1\, e)$ von a_5, a_2, c_3, «c_4 geschnitten wird; d_1' ist Durchschnitt der Ebenen $(a_2\, d_3)$, $(a_5\, d_4)$, «$(c_3\, d_5)$, $(c_4\, d_2)$; endlich e' Durchschnitt der Ebenen $(b_1\, d_1')$, $(b_2\, d_2')$, «etc. Resultat: 5 Dreiseite $(a_3\, a_4\, b_1)$, 5 $(a_1\, b_1\, c_1)$, 5 $(b_1\, c_5\, c_2)$, 10 $(a_1\, d_5\, d_2')$, «10 $(c_1\, d_3\, d_4')$, 5 $(b_1\, d_1\, e)$, 5 $(b_1\, d_1'\, e')$.»

Steiner an Schläfli.

«*Monsignore, treuer Freund!* (28. Januar 55.)

«Dass Sie denken, ich sei böse, geschieht Ihnen ganz recht. «Ich möchte es sein, über mich und Sie. Die schöne Hoffnung mit «der ich nach Bern kam, ist nun dahin; ich habe auch im Dezember «keine Abhandlung vorgelegt. Hätten Sie doch damals nur meine «aphoristischen Sätze revidirt, worum ich Sie bat, so war die Sache «abgethan. Jetzt sehe ich nicht wo ein wo aus. Geistige Kraftlosig- «keit und körperliche Leiden machen die Vollendung der Arbeit fast «unmöglich, zumal da ich auf den Zopf anbiss, den Gegenstand nach «Ihren Andeutungen vollständiger zu behandeln. Länger als 2 Monate «quälte ich mich mit leidigen Spezialitäten ab, ohne Sie zu bewäl- «tigen und ohne sie los zu werden; diese Bemühungen wechseln ab «oder werden unterbrochen durch Schmerzen, Einschlafen, Luft- «schlösser über Crimm, Donau und ganze Türkei. Schon in Bern «— wie Sie wissen — hatte ich etwas Rheumatismen (durch das Ge- «mäuer — oder Beaujolais?), der auf der Reise und hier steigend «fortdauerte und gleich am folgenden Tage, wo ich Ihnen schrieb, «in heftiges Podagra ausartete, das mich 12 Tage zu Hause bannte. «Nachdem ich 9 Tage wieder aushinkte, kam ein noch stärkerer Anfall, der mich einmal vor Schmerz brüllen machte und wieder 10 «Tage ins Zimmer bannte; und so gieng es fort, dass ich bis jetzt in «5 *Stören* das Zimmer hüten und die Vorlesungen aussetzen musste. «Da ich die letztern, der Leiden wegen, erst am 15. November be-«gann und auch gleich wieder unterbrach, so habe ich wenig Zu-«hörer, nur 6—8, wovon nur 4 regelmässig kommen. Wenn oft «auch die Schmerzen vorüber, so kann ich doch tagelang nicht aus-«gehen, weil die Füsse so geschwollen sind, dass sie nicht in die «Stiefel gehen. — Dabei hat mich etwas frappirt: welches ist das «*Einzige* Mittel, das diese Art Schmerzen lindert?! — Ihre Lieblings-«blume — die Kiltblume!

«Was ich Ihnen vor 2 Monaten schreiben wollte, ist halb ver-«gessen oder liegt verworren in meinem Kopf, wiewohl ich stets an «derselben Sache geknabert habe (darob auch die Redaction ausge-«setzt — seit 8. November — soll aber nächstens wieder beginnen). «Da ich schwer dazu komme meine früheren Manuscripte oder Ihre «Briefe gehörig nachzulesen, so wäre es möglich, dass ich hier Fragen «aufwerfe, die einfältig sind, oder die Sie schon erledigt, oder gar «allgemeiner beantwortet haben. Schad't nichts.

«1. Der Name «*Gebüsch*» geht nicht, denn es ist ein Netz, «gleich dem in der Ebene, ein *Plannetz*, oder ein *einfaches* Netz «entgegen dem *vollständigen*. Oder kann man es *Netzbasis* nennen? «wie 3 Punkte A, B, C die Basis des Tetraeders A B C D bestimmen. «Aber dann fordert die Bezeichnung 2 Buchstaben = N b (f^n). Das Wort «*Netz* sollte aber vorkommen: als *Netzbasis*, he?

«2. Die singuläre Ebene, die eine Fläche längs einer Curve be-«rührt, ist fast nicht zu benennen; kann man sie *Dehnebene* heissen «da sie das Widerspiel des Knotenpunkts ist? dann hiesse jene Curve «die *Dehncurve*, *Dehnkegelschnitt*.

«3. Wo Sie sagen: «Der *Knotenkegel* zerfalle in zwei *Ebenen*», «schien mir, er reducire sich auf die *Schnittlinie* der Ebenen auf «die Knotenkante, ohne dass der Scheitel des Kegels seine Existenz «aufgiebt. Dass der Schnitt jeder dieser zwei Ebenen mit der f^n «drei freie Zweige durch den Knotenpunkt sendet, vermag ich nicht «anzuschauen, vielmehr kommen mir die Ebenen als diejenigen vor, «deren Schnitt sich im Knotenpunkt *selbst berührt*, die Knotenkante «zur *Selbstberührungstangente* hat. Die zwei Ebenen sind gewisser-

«massen *Wendeebenen* der f^n, daher der Wechsel von dem einen Paar «ihrer Scheitelwinkel in das andere. — (Der Schnitt C^n jeder 3^{ten} durch «den Knotenpunkt gehenden Ebene mit f^n hat ihre Schnitte mit den «zwei Ebenen zu Tangenten im Knotenpunkt. Wollte was sagen, aber «ist nichts.)

«Den einen der zwei Irrthümer, die Sie im Brief vom 15. November zerstören, hatte ich bereits selbst bemerkt, nämlich: «dass «der *Sylvester*'sche Knotenkegel die Kernfläche P^4 längs dreier Geraden «berührt.» Ich (komme) bei Betrachtung der 2^{ten} Polar-Enveloppe einer «Ebene in Bezug auf Basis f^3, die 3^{ten} Grads und 4. Klasse ist und «4 Kp hat, darauf, wo ebenfalls jeder Knotenkegel längs der 3 «Strahlen die nach den übrigen 3 Kp gehen, berührt. — Den Plan «zur Behandlung des Netzes $N(f^n)$, habe ich schon früher entworfen, «und werde seiner Zeit Ihrem gewaltigen Rüssel das Nöthige unter- «breiten.

«4. Zu den Flächen gehört wohl auch noch das: Eine einfache «Schaar gerader Linien liegen in einer speziellen Fläche, die *geradlinig* «heissen soll (surface réglée); die Doppelschaar der sie berührenden «Ebenen, besteht aus der Schaar Ebenenbüschel, die jene Geraden «zu Axen haben. Diese Fläche hat ferner die Eigenthümlichkeit: 1) «dass ihr Grad und ihre Klasse gleich sind; 2) dass auch ihre Polar- «figur (auf Basis f^2) ihr an Grad und Klasse gleich ist. Es giebt nur «eine Fläche, die zwei Schaaren Gerade hat (Hyperboloid), die andern «können nur höchstens zwei Gerade haben, die nicht zur Schaar ge- «hören.

«5. Ich wollte synthetisch die Zahl der Punkte finden, durch die «C^n und f^n bestimmt sind, nach Art der unbestimmten Cofficienten; «sagen Sie, ob ich den folgenden Beweis geben darf, ohne mich lächer- «lich zu machen, indem doch ein analytischer Grund dahinter steckt. «Gesetzt jede C^n werde durch dieselbe Zahl $= N$ gegebenen Punkte «a bestimmt. Liegen von denselben $n+1$ in einer Geraden C', so «muss die Curve zerfallen in $C'+C^{n-1}$, und es muss C^{n-1} durch die «übrigen $N-n-1$ Punkte a bestimmt sein; folglich erfordert die um «*einen* Grad höhere Curve zu ihrer Bestimmung so viele Punkte mehr, «als der Grad der niedrigern $+2$ beträgt. Da nun die Linie 1^{ten} «Grads durch 2 Punkte bestimmt ist: so erfordert die 2^{ten} Grads um «$1+2=3$ mehr, $=5$, die 3^{ten} Grads wieder um $2+2$ mehr «u. s. w., folglich ist C^n durch $2+3+4+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot+n+1=$ «$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ Punkte bestimmt. — Jede f^n werde durch «eine gleiche Zahl N Punkte bestimmt. Liegen von denselben «$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ in einer Ebene f^1, so muss f^n aus $f^1 + f^{n-1}$ bestehen, «und somit f^{n-1} durch die $N - \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ übrigen Punkte «bestimmt sein; d. h. eine f^{x+1} erfordert zu ihrer Bestimmung «$\frac{1}{2}(x+2)(x+3)$ Punkte mehr als eine f^x; nun erfordert f^1 nur 3 «Punkte, die f^2 mehr $\frac{1}{2}(1+2)(1+3)$, u. s. w., so dass also f^n «durch $3+6+\cdots+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=$

$$«\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1$$

«Punkte bestimmt ist, $= \frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-1$. *Schweins*[1]) und Consorten «schreiben eine Facultät $(a+u)(a+2u)\cdots$ «$(a+nu)$ kurz $(a+u)^{n|u}$ und ebenso $(a-u)(a-2u)\cdots(a-nu)=$ «$(a-u)^{n|-u}$; $\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{1\cdot 2\cdots n}=\frac{(a+1)^{n|1}}{1^{n|1}}$, etc.

«6. Daraus (5.) entsprang folgendes Verfahren um Ihre zwei «Sätze (nebst andern analogen) zu beweisen. Die zu bestimmende Fläche «f^n zerfällt in 2 Theile, etwa $f^\alpha + f^\beta$ $(\alpha+\beta=n)$, sobald die ge- «gebenen $\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-1$ Punkte a sämmtlich in diesen zwei Flä- «chen liegen, jedoch dürfen auf keiner weniger Punkte liegen, als ihre «Bestimmung erheischt, also beziehlich nicht weniger als

$$«\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}-1 \text{ und } \frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1}-1; \text{ daher bleiben}$$

$$«\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-1-\left[\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}-1+\frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1}-1\right]=$$

$$\frac{1}{2}\alpha\beta(n+4)=\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)$$

«Punkte frei, d. h. nach Belieben auf die beiden Flächen f^α, f^β zu «vertheilen, und es ist ihre Zahl zugleich *die Zahl der Bedingungen*, «*damit f^n in diese zwei Flächen zerfällt.* Diese Zahl ist also um

[1]) Schweins, Franz Ferdinand, geb. 24. III. 1780 † 15. VII. 1856 Professor der Mathematik in Heidelberg, Lehrer Steiners.

«so grösser, je mehr α und β sich $\frac{1}{2}$n nähern, oder je kleiner ihr «Unterschied. — Wie geht's nun weiter? — Soll f^n in $f^\alpha + f^\beta + f^\gamma$ «zerfallen, so ist die Zahl der Bedingungen

$$=(\alpha+\beta+\gamma+4)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma;$$

«und soll f^n in n Ebenen zerfallen, so ist die Zahl der Bedingungen,

$$«= \frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-1-3n=\frac{1}{6}n(n-1)(n-7).\ ^{1)}$$

«Von den f^n bestimmenden Punkten dürfen also auf einer ge- «gegebenen Fläche f^α höchstens nur

$$«\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-\frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1}=\frac{1}{2}\alpha\beta(n+4)+\frac{1}{6}(\alpha-1)^{3|1}-1$$

$$«=\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-1+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$$

«frei gewählt werden; (denn nähme man darauf nur einen Punkt «mehr an, so wäre durch die übrigen die andere Theilfläche f^3 nicht «mehr bestimmt, also auch die ganze f^n $(= f^\alpha + f^\beta)$ nicht). Lässt man «nun von dieser höchsten Zahl Punkte auf f^α einen Punkt ganz weg, «so ist f^n nicht mehr bestimmt, sondern es findet ein $B(f^n)$ statt, «worin $f^\alpha + f^\beta$ ein spezielles Glied ist, so dass die Grundcurve des- «selben aus zwei Theilen $R^{\alpha n} + R^{\beta n}$ besteht, die auf f^α und f^β liegen, «durch die auf diesen befindlichen gegebenen respective

$$«\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}-2 \text{ Punkte a und}$$

«$\frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1}-1$ Punkte b gehen. Wird nun einer der Punkte b im «beliebig versetzt, so ändert sich die Fläche f^β und es entsteht ein Raume «neuer Flächenbüschel, $(B_1 f^n)$, sowie auch eine neue Curve $R_1^{\beta n}$, statt «$R^{\beta n}$, aber wohin auch jener Punkt gerückt werden mag, immer bleibt «er in irgend einer Fläche des vorigen Büschels, so dass also beide «Büschel diese Fläche gemein haben, und folglich auch deren Schnitt «mit der Fläche f^α, jene $R^{\alpha n}$, ein gemeinschaftlicher Theil der Grund- «curven beider Büschel ist. Da man aus der neuen Fläche f^β aufs «Neue einen Punkt versetzen kann und dadurch zu einem neuen «Büschel $B_2(f^n)$ gelangt, der durch die nämliche Curve $R^{\alpha n}$ auf f^α «geht, so ist dadurch Ihr Satz erwiesen: «*dass auf einer Fläche f^α nur*

[1]) Hier hatte Steiner im Concept noch folgende bezeichnende Stelle: «Mangen Sie das und geben's mir gut gekaut wieder, auch das «folgende; denn sowie Formeln kommen, bin ich blödsinnig.»

«$\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-2+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$ *Punkte a gewählt werden dürfen,* «*wenn eine f^n durchgehen soll*»; und «*dass alle durchgehenden f^n, die* «$\left[\frac{1}{6}(n-\alpha+1)^{3|1}-2\right]$*fache Schaar f^n, die f^α in der nämlichen* «*Vollkurve $R^{\alpha n}$ schneiden, die somit durch jene Punkte bestimmt ist.*» «— Wird ferner einer der Punkte α aus der Fläche f^α beliebig in «Raum versetzt und nachher ganz weggelassen, so entsteht ein $G(f^n)$, «und werden sodann die Punkte b (auf f^β) einer nach der andern ver-«setzt, so schliesst man weiter: «dass alle f^n, die durch gegebene «$\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-3+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$ Punkte a auf einer f^α gehen «auch noch durch $\frac{1}{2}\alpha n(n+\alpha-4)+1-\frac{1}{6}(\alpha-1)^{3|-1}$ noth-«wendige Punkte a auf dieser Fläche f^α gehen»; oder «dass jede Voll-«curve R^{n^2}, die durch jene Punkte a geht, die Fläche f^α auch noch in «diesen nothwendigen Punkten a_0 durchbohrt.»

«7. Ich glaube früher bei ebenen Curven gefunden zu haben: «dass «wenn C^n durch die $\alpha\beta$ Schnittpunkte a von C^α und C^β gehen soll, «$n>\alpha>\beta$, dann die Zahl der Nothwendigen

«$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)$ sei; d. h. geht C^n durch

$$«\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)$$

«der $\alpha\beta$ Punkte a, so geht sie auch durch die übrigen. Die C^n ist daher «bestimmt, wenn sie, ausser durch die $\alpha\beta$ Punkte a, noch durch andere «gegebene

$$«\frac{1}{2}n(n+3)+\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)-\alpha\beta=$$

$$(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(2n+3)+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)-1$$

«Punkte b gehen soll; also bei $\alpha=\beta$, durch

«$(n+1)(n+2)-\alpha(2n+3)+\alpha^2-1$, und bei $\alpha=\beta=n-1$ «durch 5 Punkte b gehen soll, was nur für $n=2$ nicht stimmt. — «Um die analogen Sätze für die Flächen zu finden, habe ich mich «wochenlang verrechnet, darob die Besinnung verloren, dass ich nicht «weiss, was wahr oder falsch ist. Im Folgenden einige Proben, und «dann wenden Sie den Entwurzler an.

«8. Enthält ein Flächenbüschel $B(f^n)$ zwei zerfallene Glieder

«$f^n = f^a + f^\alpha$ und $f^n = f^b + f^\beta$, so besteht seine Grundcurve aus «vier Theilen $= R^{ab} + R^{a\beta} + R^{\alpha b} + R^{\alpha\beta}$. Daher: «*Eine Fläche f^n «erleidet denselben Zwang — wofern ihre freie Natur dadurch be-«schränkt wird — ob sie durch die gegebene Vollcurve R^{ab} oder $R^{a\beta}$ «oder $R^{\alpha b}$ oder $R^{\alpha\beta}$ gehen soll; denn enthält eine dieser Curven, so «sind auch die drei andern auf ihr möglich.*» (Dabei ist $a + \beta =$ «$b + \beta = n$, und fortan sei $a > b > \beta > \alpha$.)

«Gehen durch die Vollcurve R^{ab} zweier gegebenen Flächen f^a, f^b «irgend zwei (höhere) Flächen f^m und f^n, $m > n$, *so schneiden sich «diese noch in einer R^{mn-ab}, durch die allemal eine Fläche $f^{m+n-a-b}$ «geht,* die zugleich auch noch durch die auf vorige Weise durch f^a und «f^b auf f^m und f^n bestimmten Curven $R^{(m-a)(m-b)=\alpha\beta}$ und $R^{(n-a)(n-b)}$ «geht. — Daraus viele Sätzli, wenn $m = n$ und $a = b$, oder $m = n$ «$= a + 1 = b + 1$.

«Geht f^n durch die R^{ab}, so schneidet sie die gegebene f^a noch «in $R^{a(n-b)=\alpha\beta}$, durch die eine f^{n-b} geht und (mehr als) bestimmt «ist; für sich ist sie durch $\frac{1}{6}(n-b+1)^{3|1}-1$ auf der f^a beliebig «gewählte Punkte q bestimmt; da nun durch $R^{ab} + R^{a(n-b)}$ eine $S^2(f^n)$ «gehen, der Gesammtschnitt von f^n mit f^a aber durch

$$«\frac{1}{2}a(n-a)(n+4)-2+\frac{1}{6}(a+1)^{3|1} \text{ Punkte}$$

«bestimmt ist (6), so zählt die Bedingung, dass f^n durch R^{ab} gehen «muss, für

$$«\frac{1}{2}a(n-a)(n+4)-2+\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}-\left[\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}-1\right]$$

$$«=\frac{1}{2}an(n-a+4)+1+\frac{1}{6}(a-1)^{3|-1}-\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}$$

«bestimmende Punkte p; und werden auf der R^{ab} so viele «Punkte p frei gewählt, so enthält jede durch dieselben «gehende f^n die R^{ab} ganz. Oder auch so: Die f^a und f^b haben «Schnitt R^{ab}. Auf f^a nehme beliebige $\frac{1}{6}(n-b+1)^{3|1}-1$ Punkte q, so «bestimmen sie die f^{n-b}, und diese mit f^a die $R^{a(n-b)}$. Auf f^{n-b} be-«liebig gewählte $\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}-1$ Punkte r bestimmen eine f^{n-a}, und «diese mit f^{n-b} eine $R^{(n-a)(n-b)}$ und mit f^b eine $R^{(n-a)b}$. Nun ist «durch (die ganze) R^{ab} und durch alle Punkte q und r ein $B(f^n)$ be-«stimmt, folglich ist die Zahl bestimmender Punkte p, die durch R^{ab} «vertreten werden .

$$\frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 2 - \left[\frac{1}{6}(n-b+1)^{3|1} - 1 + \frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1} - 1\right]$$

$$= nab + \frac{1}{6}(a+b-n-1)^{3|-1} - \frac{1}{2}ab(a+b-4)\ldots = P,$$

«*so dass durch so viele auf ihr frei gewählte Punkte p jede durch-* «*gehende f^n die ganze R^{ab} enthalten muss.* Lässt man einen dieser «Punkte p ganz weg, so entsteht ein $G(f^n)$, das die R^{ab} (ausser in «den übrigen Punkten p) in

$$\frac{1}{2}ab(a+b-4)+1-\frac{1}{6}(a+b-n-1)^{3-1}\ldots = P_0$$

«nothwendigen Punkten p_0 schneidet (was Ihr zweiter Donnstigs- «Satz ist).

«9. Enthält ein $G(f^n)$ eine *partielle Grundcurve* R^{ab}, so zählt sie «ebenfalls für P bestimmende Punkte p; aber wieviele von den «$n^3+3-\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}$ *nothwendigen* Punkte p fallen dann in R^{ab}, «etwa $ab(2n-a-b)$?, und wieviele liegen auswärts, im Freien?

«10. Durch wieviele der abc-Schnitte dreier Flächen f^a, f^b «u. f^c muss eine f^n gehen, damit sie *nothwendig* auch durch alle «übrigen geht? — Gehen drei Flächen f^m, f^n und f^p durch eine «gegebene *Vollcurve* R^{ab}, so schneiden sie sich auswärts noch in «$mnp - ab(m+n+p-a-b)$ Punkten (?). Gehen aber die drei Flächen «durch eine *Theilcurve* R^r — wie dann?

«11. Schon vor Jahren fand ich, dass ein $N(C^n)$ im Besondern «höchstens n^2-n+1 Grundpunkte haben kann, und zwar wird ein «solches Netz z. B. bestimmt 1) durch zwei C^n, von deren Schnitten «$n-1$ in einer Geraden liegen, durch die n^2-n+1 übrigen geht «dann $N(C^n)$; 2) die gesammten Pampolaren in Bezug auf $B(C^r)$ bilden «ein $N(C^{2r-1})$ mit $(2r-1)^2-(2r-1)+1$ Grundpunkten. — Dem «analog sind $G(f^n)$ und $N(f^n)$ hervorzubringen, die ziemlich hohe «*partielle Grundcurven* haben, nebst andern possirlichen Eigen- «schaften. Als z. B.

1. «Gehen 2 Flächen n^{ten} Grads f^n und $f_1{}^n$ durch eine gegebene «C^{n-1}, deren Ebene E heissen soll, so schneiden sie sich «noch in einer R^{n^2-n+1}, durch die ein $G(f^n)$ geht. Durch «$C^{n-1}+R^{n^2-n+1}$ geht ein $B(f^n)$, der von der E (ausser der «C^{n-1}) in einem Strahlbüschel $B(g)$ geschnitten wird, dessen «Mittelpunkt g_0 (nicht in C^{n-1} sondern) in R^{n^2-n+1} liegt, «derjenige der n^2-n+1 Schnitte der E und R^{n^2-n+1} ist, der

«nicht in C^{n-1} liegt. Jedes Glied f^n des $G(f^n)$ wird von allen «andern in ebenen Curven C^{n-1} geschnitten, deren Ebenen E «sämmtlich durch die derselben angehörige Gerade g gehen; «und umgekehrt: legt man durch irgend eine, durch den «ausgezeichneten Punkt g_0 gehende Gerade g einen B(E), «so schneidet jede E die R^{n^2-n+1}, ausser in g_0, in $n(n-1)$ «Punkten, die in einer C^{n-1} liegen und die $S(C^{n-1})$ liegen «in einem Glied f^n des $G(f^n)$, so dass also $G(f^n)$ durch R^{n^2-n+1} «und G(g) um g_0 sich Glied gegen Glied entsprechen. Der«jenigen Geraden $t (= g)$, welche Tangente der R^{n^2-n+1} in «g_0 ist, entspricht eine $f_0^n (= f^n)$, die g_0 zum Knotenpunkt «hat; die Schmiegungsebene der R^{n^2-n+1} berührt den Kno«tenkegel längs t. Durch zwei frei gewählte Punkte ist eine «f^n bestimmt; drei f^n können ausser R^{n^2-n+1} keinen Punkt «gemein haben (wohl eine C^{n-1}). — Was folgt, wenn die «bestimmenden Flächen f^n und f_1^n durch eine R^{n-1} statt C^{n-1} «gehen? oder nur durch C^{n-2}? etc. — Soll eine f^n durch «$\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-3$ beliebig gewählte Punkte in R^{n^2-n+1} gehen, «so enthält sie diese ganz und ist Glied des $G(f^n)$; ist ein «Punkt weniger gegeben, so geht sie durch «$\frac{1}{6}(n^2-1)(5n-12)+1$ nothwendige Punkte auf R^{n^2-n+1}. (?)

II. «*Gegeben* $B(f^n)$. Für jeden Pol p ist die Pampolare eine «Fläche p^{2n-1} die durch die Grundcurve R^{n^2} und durch die «$4(n-1)^3$ Knotenpunkte π des $B(f^n)$ geht, sowie auch durch «die Grundcurve $R^{(n-1)^2}$ des $B(f^{n-1})$ erste Polaren von p auf «$B(f^n)$, und auch durch p selbst. Die erste Polare von p auf «seine Pampolare p^{2n-1} ist eine Fläche $p^{2(n-1)}$, die auch durch «jene R^{n^2} und p geht; der aus p seiner Pampolare p^{2n-1} um«schriebene Kegel K zerfällt in 3 Theile: 1) in die Berühr«ungsebene in p, zählt für 2 Grade; 2) in den durch die «R^{n^2} gehenden Kegel $K_1^{n^2}$, der in R^{n^2} selbst berührt; und «3) in einen andern Kegel t^x (dessen Grad x bestimmt ist «und die t-Tangenten im Doppelpampolare der durch p gehen«den in Glieder des $B(f^n)$ berührenden Ebenen sind). *Liegt «p insbesondere in der Grundcurve R^{n^2}, so ist er ein d r e i- «f a c h e r Knotenpunkt seiner Pamporalen p^{2n-1}.* Die allen p «des Raumes entsprechenden Pamporalen bilden eine $N(p^{2n-1})$, «das die R^{n^2} zur *partiellen Grundcurve* und jene $4(n-1)^3$ «Knotenpunkt π zu Grundpunkten hat. Die Kernfläche P^x «des $N(p^{2n-1})$ hat die R^{n^2} zur zwei- (oder drei-) fachen Linie, «und die π zu Knotenpunkten. Allen p in einer gegebenen «Ebene E entspricht ein $G(p^{2n-1})$, dessen *Kerncurve* R^y (Ort «der Knotenpunkte) aus R^{n^2} + einer durch die $4(n-1)^3$ «π gehenden Curve R^{y-n^2} besteht; dieses $G(p^{2n-1})$ hat, ausser «der R^{n^2} und den $4(n-1)^3 \cdot \pi$, auch noch die $3(n-1)^2$ Punkte «zu Grundpunkten, in welchen die E von Gliedern des $B(f^n)$ «berührt wird. Die R^{n^2} vertritt daher $(2n-1)^2 - 4(n-1)^3$ «$-3(n-1)^2 = (4n-3)n^2$ Grundpunkte des $G(p^{2n-1})$. — Zum «$B(f^n)$ gehören eine Schaar Kernflächen $P^{4(n-2)^3}$; sie erfüllen «den Raum $4(n-2)^3$-fach, d. h. durch jeden p gehen so viele «derselben; jede $P^{4(n-2)^3}$ schneidet ihre f^n in einer $R^{4n\,(n-2)^3}$ «$= R_0$; liegt p insbesondere in der R^{n^2}, so gehen auch «$4(n-2)^3$ solche R_0 durch ihn und deren zugehörige Rück«kehrtangenten t_0 (nicht Tangenten der R_0) liegen sämmtlich «im Knotenkegel der zugehörigen Pampolare p_0^{2n-1}. Ist der «Ort aller R_0 eine Fläche f^z? und hat dieselbe die R^{n^2} zur «4-fachen Linie? $[z = 4n + 4(n-2)^3$?]. — Wie viele Rück«kehrtangenten t_0 aller Glieder des $B(f^n)$ gehen durch einen «freien Pol p? — Wenn f^m durch die R^{n^2} des $B(f^n)$ geht, «wie viele f^n berührt sie dann in R^{n^2} selbst, und wie viele «auswärts? $m > n$.

«12. Auch sehr viel an Folgendem abgemüht: «Wie viele Glieder «können bei $B(f^n)$ oder $G(f^n)$ oder $N(f^n)$ in Theile zerfallen und wie «mannichfacher Art können die Theile sein?» «Kann bei $B(f^n)$ die «R^{n^2} in Theile zerfallen, ohne dass auch Glieder f^n zerfallen, und «wie?» Näheres:

I. «*Vom $B(f^n)$.* Soll dieser zerfallene Glieder enthalten, so sind «es im Allgemeinen nur zwei, $f^a + f^\alpha$, $f^b + f^\beta$, wobei dann «die R^{n^2} aus 4 Theilen besteht (8). Im Besondern kann aber «$B(f^n)$ mehr zerfallene Glieder enthalten, namentlich wenn «$n = \nu \,.\, \alpha$ ist. Nämlich 1) ist $n = 2\alpha$, so kann $B(f^n)$ drei «Glieder von der Form $f^\alpha + f_1^\alpha$ haben, wobei die Grundcurve «R^{n^2} aus vier Curven R^{α^2} besteht (die wie die Ecken eines «Vierecks und jene drei Glieder wie die 3 Paar Gegenseiten «desselben anzusehen sind). 2) ist $n = 3\alpha$, so kann der «$B(f^n)$ vier Glieder von der Form $f^{2\alpha} + f^\alpha$ haben (durch drei «ist das 4te bestimmt); die vier Theilflächen f^α gehen alle durch «dieselbe Curve R^{α^2}, und die vier $f^{2\alpha}$ schneiden sich zu 3 und «3 in vier Curven $R^{2\alpha^2}$, jede geht durch drei der letztern, «und durch jede $R^{2\alpha^2}$ geht auch je eine f^α; so besteht also «R^{n^2} aus 5 Theilen, $= R^{\alpha^2} + 4\, R^{2\alpha^2}$. 3) ist $n = 4\, \alpha$, so «kann es 5 Glieder $f^{3\alpha} + f^\alpha$ geben, wobei alle fünf f^α durch «eine R^{α^2} gehen, u. s. w. Und ist $n = x\, \alpha$, so kann es $x + 1$ «Glieder $f^{(x-1)\alpha} + f^\alpha$ geben, wobei die $x + 1$ Theilflächen «f^α durch eine und dieselbe R^{α^2} gehen und jede f^α sich mit «den ihr nicht zugehörigen x Flächen $f^{(x-1)\alpha}$ in einer und «derselben $R^{(x-1)\alpha^2}$ schneidet, so dass

$$R^{n^2} = R^{\alpha^2} + (x + 1)\, R^{(x-1)\alpha^2}$$

«ist. So kann der $B(f^n)$ insbesondere auch $n + 1$ Glieder «von der Form $f^{n-1} + f^1$ haben, wobei dann die $n + 1$ «Ebenen f^1 durch dieselbe Gerade R^1 gehen, und die Grund- «curve R^{n^2} aus diesen Geraden R^1 und aus $n + 1$ ebenen «Curven C^{n-1} besteht. — Durch wie viele dieser $n + 1$ Glieder «werden die übrigen *nothwendig?*

«Der $B(f^n)$ kann aber auch in der Art drei zerfallene «Glieder $f^a + f^\alpha$, $f^b + f^\beta$ und $f^c + f^\gamma$ enthalten, dass sich die «Theilflächen, wie etwa f^a und f^b, nicht in *ganzen* sondern in «*zerfallenen* Curven schneiden, also etwa in zwei Curven A «und B, so dass Schnitt $(f^a\, f^b) = A + B$, oder was wir kurz «so bezeichnen wollen: $a\, b = A + B$. Besteht dergestalt der «Schnitt je zweier nicht zusammgehöriger Theilflächen aus *zwei* «Theilen, so stellt sich die Verbindung wie folgt dar:

$a\, b = A + B$	$a\, c = A + D$	$b\, c = A + H$
$a\, \beta = C + D$	$a\, \gamma = B + C$	$b\, \gamma = B + G$
$\alpha\, \beta = E + F$	$\alpha\, c = E + H$	$\beta\, c = D + E$
$\alpha\, b = G + H$	$\alpha\, \gamma = F + G$	$\beta\, \gamma = C + G$

«Dabei besteht R^{n^2} aus den 8 Curven A, B, C, ... H; «durch jede von diesen gehen 3 Theilflächen der 3 zerfallenen «Glieder, wie f^a, f^β und f^c durch D. Sind die Grade a, α, b, «β, c, γ einzeln gegeben und man nimmt den Grad einer der «8 Curven A, B, ... H beliebig an, so sind die Grade der «7 andern bestimmt.

«Wenn ferner die Schnittcurve je zweier Theilflächen in «3 Theile zerfällt, also $(f^a\, f^b)$ oder $a\, b = A + B + C\ (= R^{ab})$ «ist, wobei dann die zwei Glieder $f^a + f^\alpha$ und $f^b + f^\beta$ zwölf

«solche Partialcurven bewirken, die zusammen die R^{n^2} aus-
«machen, so scheinen mir noch zwei andere zerfallene Glieder «$f^c + f^\gamma$ und $f^d + f^\delta$ möglich zu sein, so dass dann durch «jede der 12 Curven vier Theilflächen gehen, und in jeder «von diesen 6 von jenen liegen. — Welches ist der niedrigste «Grad n, bei dem dieser Fall eintreten kann? Geht's bei $n = 4$, «für 4 Paar Flächen $f^2 + f_1{}^2$, wenn sich jede zwei, die nicht «zu einem Paar gehören, in $C^2 + 2$ g schneiden? Oder giebt «es bei $n = 6$ vier Paar Flächen $f^3 + f_1{}^3$, wovon je zwei «Paar einander in 12 Partialcurven 3^{ten} Grads (R^3 oder C^3) «schneiden, und wobei durch jede dieser Curven vier Theil-«flächen gehen und jede der letztern durch 6 von jenen geht? «— Ferner ebenso wenn die Schnitte der Theilflächen in 4 «Theile zerfallen, $ab = A + B + C + D$; oder wenn einzelne «Glieder des $B(f^n)$ aus 3 oder mehr Theilflächen bestehen; «und s. w. kurz das Zerfallen der Glieder und der Grund-«curve R^{n^2} des $B(f^n)$ vollständig zu berüsseln; ich kann nicht «Alles schreiben, was ich versucht habe.

II. «*Vom $G(f^n)$.* Dieses hat, im Allgemeinen, keine zerfallene «Glieder. Nimmt man aber zwei Glieder an, wovon das eine «aus α und das andere aus β Theilflächen besteht, so ordnen «sich demgemäss die n^3 Grundpunkte in $\alpha \,.\, \beta$ Gruppen. Sind «die $\frac{1}{2}\,\alpha\,(\alpha-1)$ Curven, in denen die α Theilflächen einander «schneiden, nicht Bestandtheile der *Kerncurve* $R_0{}^x$ (Ort der «Knotenpunkte) des $G(f^n)$? — Wie viele zerfallene Glieder «kann das $G(f^n)$ haben unter den mannichfaltigsten Bedingungen, «wie z. B., dass jedes zerfallene Glied nur 2, oder 3, 4, . . . «Theile haben soll? — Es giebt solche bornirte $G(f^n)$, wo jedes «Glied zerfällt, alle Glieder eine Theilfläche f^a gemein haben; «auch solche, die partielle Grundcurven haben. — Zur Er-«leichterung kann man zur Bestimmung des $G(f^n)$ einen solchen «$B(f^n)$ annehmen, der nach dem Vorigen (I.) schon viele zer-«fallene Glieder enthält. Ist R^{n^2-n+1} die höchste *Grund-«curve* die ein $G(f^n)$ haben kann?

«Das Gebüsch 2^{ten} Grads $G(f^2)$ kann im Besondern 6 «Glieder haben, die aus Ebenenpaaren bestehen, wobei dann «die *Kerncurve* $R^6 = 6$ g ist. Wenn beim $G(f^2)$ drei Glieder «aus Ebenenpaaren bestehen, ist dann nicht ein 4^{tes} solches «Glied *nothwendig*, und bei fünfen das 6^{te}?

III. «*Vom* $N(f^n)$. Enthält es nothwendig zerfallene Glieder? wie«viele und von welcher Art? Die Selbstschnitte der zerfallenen «Glieder (wie $(f^a f^{\alpha}) = R^{a\alpha}$) liegen in der Kernfläche $P^{4(n-1)^3}$ «des Gebüschs; dieselbe ist überhaupt der Ort aller Selbst«schnitte, wozu ja auch die Knotenpunkte und vielfachen Linien «gehören. Enthält $N(f^n)$ immer solche Glieder die *vielfache* «*Linien* haben? und wieviele? — Wieviele Grundpunkte kann «$N(f^n)$ höchstens haben? und welches ist seine höchste par«tielle Grundcurve R^x?

«Wählt man in einem $N(f^n)$ drei solche $B(f^n)$, wovon «keine zwei ein gemeinschaftliches Glied f^n haben, so werden «ihre 3 Grundcurven R^{n^2} von einer Schaar andern Grund«curven, $S(R_1{}^{n^2})$, geschnitten, d. h. jede $R_1{}^{n^2}$ schneidet jede «R^{n^2} in n^3 Punkten, und dann werden diese $S(R_1{}^{n^2})$ nicht allein «von jenen dreien, sondern von einer $S(R^{n^2})$ geschnitten, und «beide Schaaren liegen in einer Fläche f^{2n} (wie beim Hyper«boloid, das für $n = 1$ eintritt).

«H. *Borchardt,* dem ich angab, dass beim $N(f^2)$ 10 Glieder «aus $f' + f_1'$ beständen, war erst ganz enchantirt und glaubte «es leicht beweisen zu können; jetzt aber verzweifelt er, weil «er auf 27 kommt und nicht reduciren kann. Er wollte etwas «Spezielles haben, was ich nach meiner Weise so übersetze:

«Wenn zwei in derselben Ebene liegende Kegelschnitte «$N(A^2)$ und $N(B^2)$ einen Büschel $B(C^2)$ gemein haben, giebt «es dann solche Gliederpaare A^2 und B^2, die sich in zwei «Punkten berühren? und wieviele?»

«Eben war *Borchardt* wieder bei mir; er hat die Eli«mination gemacht, 10 gefunden, und für diese spezielle Frage «4. Musste Brief aufweisen.

«Derselbe überbrachte mir vorgestern 2 Abhandlungen «von *Hesse* (aus *Crelle* Bd. 49., was ich noch nicht erhalten) «über die Doppeltangenten der C^4, datirt 1853; er hat endlich «auch die 63 Systeme eingeschriebene C^2 gefunden; bei den «315 C^2 citirt er *Salmons* Werk: «Treatise on the higher «plane curves by George Salmon, M. A., Dublin 1852.» — «Meiner wird nicht erwähnt, durch meine Trödelei, seit 1846 «soll ich leer ausgehen.

«Ich wünsche und hoffe, dass Sie gesunder sind, als ich; «dann haben Sie an dem Vorstehenden auf 14 Tage Futter «genug, und wenn auch wenig Grünes darunter ist, schmeckt «es Ihnen doch, da Sie *Alles* bewältigen und *verschlingen* «*wollen*.

«Leben Sie wohl, d. h. *flott* beir Gräfin und *rennend* «über das Wylerfeld.

«Die üblichen Grüsse an *Rettig*, *Mutz*, *Leuenberger* und «*Frau*, (Fr. und H. *Walter*), etc. Ihr hinfälliger

«Berlin 24.—27. Januar 1855. Steiner.»

«N.B. Übersehen Sie nicht den beiliegenden Zettel und «gehen Sie gleich zu *Leuenberger*, bitte!» [1])

1855. Steiner an Schläfli.[2])

Wahrscheinlich 1855, Anfang Januar.

«*Lieber Freund!*

«*Rache ist süss*» sagt ein Sprüchwort. Sie wollen mich wohl «fühlen lassen, wie peinlich einem zu Muthe ist, wenn man keine «Antwort erhält. Desshalb muss ich ein *ernstes Wort* mit Ihnen «sprechen.

«Wer in der Schweiz — wie auch in Preussen — ein *unehe-* «*liches* Kind erzeugt, muss Alimente bezahlen *von Rechts wegen*. Auf «diesen *Rechts-Grund* gestützt, dränge ich Sie hierdurch zum dritten «Mal, für die Erziehung und Ausbildung Ihres Bankerts, den Sie mir «so lieblos halb nackt ins Haus geschoben, väterlich zu bezahlen. Dass «es obendrein noch ein Zwillingspaar ist, will ich nicht einmal in «Rechnung bringen. Aber in seinen alten Tagen noch fremde Kinder, «ja Kinder des *Leichtsinns* — um nicht zu sagen der *Unkeuschheit* — «aufpäppeln zu sollen, ist erschrecklich. Schon wochenlang quäle ich «mich mit den Wechselbälgern ab, und kann sie weder zur Ruhe noch «ins Reine bringen.

«Die vornehmsten Grenzfälle, in die meines Erachtens der (Kno- «ten-) Kegel zweiten Grads, sowie die (Streif-) Curve zweiter Klasse «übergehen kann, sind folgende.

«1⁰ Der Kegel kann sich α) auf seine *erste* oder *Hauptaxen-* «*ebene* reduciren, wobei seine Fläche die Winkel-Axe, d. h. die Winkel- «fläche zwischen den Scheitelkanten dieser Axenebenen doppelt bedeckt,

[1]) Derselbe ist natürlich nicht mehr vorhanden.

[2]) Hiezu existirt ein Concept.

«oder β) er kann sich in die *dritte ideelle Axenebene* ausbreiten und «dieselbe doppelt bedecken; oder γ) sich auf die Hauptaxe zusammen-«ziehen (Knotenaxe).

«2⁰ Ferner kann er sich in zwei Ebenen ausbreiten (*Knoten-«ebenen*, ihr Schnitt *Knotenkante*), wobei dann alle Berührungsebenen «durch die Kante der zwei Ebenen gehen, letztere können α) *reell* «sein, β) *aufeinanderfallen*, γ) *imaginär* sein; nun scheint mir syn-«thetisch der Fall (β) mit dem vorigen ($1^0\beta$), sowie (γ) mit ($1^0\gamma$) iden-«tisch zu sein, aber (γ) kann vernünftig nur so, wie in (1^0) angegeben, «entstehen. Das Polare davon ist:

«I. Der Kegelschnitt (Streifcurve) kann in zwei Gerade über-«gehen, deren Schnitt der Mittelpunkt ist; die Geraden können a) «*reell* (Hyperbel) oder b) *imaginär* (Ellipse, die sich auf ihren Mittel-«punkt zusammengezogen) sein, oder c) *zusammenfallen* (doppelte «Gerade).

«II. Ferner kann sich der Kegelschnitt auf zwei Arten auf eine «doppelte Gerade reduciren; a) auf die doppelte *erste Axe*, oder sich «b) auf den Mittelpunkt oder c) als Hyperbel auf die doppelte *zweite* «*ideelle Axe* reduciren. Die Tangenten des Kegelschnitts bilden zwei «Strahlbüschel, welche die Scheitel der Axe zu Mittelpunkten haben; «im Falle (c) sind sie sämmtlich imaginär, bis auf die Axe selbst, «die reell wird.

«Nun die Schwierigkeiten (für die blosse synthetische Anschau-«ung). Im Fall (II a) finden zwei Kegelschnitte zugleich statt: Die «*Doppelstrecke zwischen den Scheiteln* ist Ellipse, und die äussere *Dop-«pelstrecke,* die durchs Unendliche geht, ist Hyperbel. Wenn nun vor «der Reduction die Streifcurve Ellipse war, so könnte man wähnen, «es wäre nur die *elliptische Strecke* der Streifaxe *reell* und die *hyper-«bolische* ideell oder imaginär. Nun gesetzt, Sie haben Recht, beim «Uebergang der Streifellipse in ihre Axe trete nun auch die Hyperbel «in ihrer Strecke in Evidenz (wie *Plücker* sagt), so hat der aus jedem «Punkt der Axe (Streifaxe) der Fläche umschriebene Kegel die Ebene «zur *Wendeebene* und die Axe zum *Wendestrahl*, und wenn der Punkt «aus der Ellipsenstrecke in die Hyperbelstrecke übergeht, so soll der «Kegel seine Lage gegen die Streifebene ändern; daher wäre also die «letztere eine Art *Wendeebene* der Fläche, aber mit Wechsel von der «einen Strecke zur andern, — was aber findet an den Grenzen, in «den beiden Scheiteln statt? muss hier der Kegel sich nicht *selbst* «*berühren* und die Axe zum Selbstberührungsstrahl und die Ebene «zur Selbstberührungsebene haben? oder was geht vor? — Dieselbe «Ungewissheit quält mich beim entsprechenden Fall ($2^0\alpha$), wo ich auch «nicht weiss, ob die durch die Knotenkante gelegte Ebene in beiden «Paar Scheitelwinkel der Knotenebenen *reell* schneidet oder vielleicht «nur im einen; und ob die Knotenebene selbst nicht mit *Selbstberührungspunkt* (oder etwa mit *zweimaligem* Selbstberührungspunkt) schneidet? Etwas anders, als Sie es angegeben haben, muss es sein, ich «möchte drauf wetten.

«So quälen mich alle obigen Fälle, z. B. der Fall (I a oder b, c). «Wird aus irgend einem Punkte in der Streifebene der Fläche ein «Kegel umschrieben, so hat er die Ebene zur *Wendeebene* und den «aus dem Punkt durch den Mittelpunkt (Schnitt der beiden Streif-«geraden) gehenden Strahl zum *Wendestrahl;* was Besonderes tritt «nun aber ein, wenn jener Punkt der Mittelpunkt selbst ist? Oder «andererseits, wie schneiden die Axenebenen in ($1^0\alpha$ und β) die Fläche? «nur mit *schlichtem* dreifachem Punkt, wie Sie sagen, oder anders, «etwa mit dreimaligem Wendepunkt etc.? — Ich bin darüber ganz in «Verwirrung, es ist synthetisch zu schwer oder ich bin zu schwach «und stumpf; ich corrigire und streiche wieder, weil ich nicht weiss, «was wahr oder falsch ist. Setzen Sie an! und geben Sie mir die «Resultate mit der Ihnen sonst *eigenen* Zuverlässigkeit.

«Bei der Definition der Polarflächen möchte ich auch die Eigen-«schaften des der Basis f^m umschriebenen Kegels angeben, nämlich «Grad $= m\ (m - 1)$, Klasse $= m\ (m - 1)^2$, Zahl der Doppel-«ebenen $= \frac{1}{2}\ m\ (m - 1)\ (m - 2)\ (m^3 - m^2 + m - 12)$, Zahl «der Wendeebenen $= w$ (?), Zahl der Doppelstrahlen $= d$ (?) und Zahl «der Rückkehrstrahlen $= r$ (?). Ich glaube Sie sagten es sei $w = 4\ r$, «also werden Sie alle 3 Fragen leicht *richtig* beantworten können. — «Einst theilte ich Ihnen die Eigenschaften der Abwickelbaren mit, welche «der Fläche *m^ten^ Grads* längs des ebenen Schnittes umschrieben «ist: Grad, Klasse und Grad der Rückkehrlinie, im Augenblick weiss «ich sie nicht, werde sie aber wohl notirt haben; Sie haben dieselben «bestätigt und wie mich dünkt noch erweitert. Fasst man die Fläche «nach *Klasse* auf, wird der Fläche *m^ter^ Klasse* längs des Schnitts mit «irgend einer Ebene E die Abwickelbare umschrieben, so ist dieser «eine Fläche $(m - 1)^{\text{ten}}$ Grads eingeschrieben, die erste Polare der «Ebene E in Bezug auf die Basis; die letzte Polare ist ein Punkt, «*Polarpunkt* der E in Bezug auf die Basis. Versetzt man E ins Un «endliche, so ist ihr Polarpunkt eine Art *Mittelpunkt* (Schwerpunkt, «Punkt mittlerer Entfernung), *nämlich die Summe der aus ihm auf «je ein System vom m parallelen Berührungsebenen der Basis ist alle-«mal gleich Null* (ist es wahr?). Die Schnittcurve der E mit der «Basis stimmt mit dem vorigen Kegel in den 6 Eigenschaften überein; «die Abwickelbare mit der Berührungscurve des Kegels u. s. w.

«Da ich nicht weiss, ob Sie mich *verworfen* haben, darf ich «nicht weiter schreiben, hoffe aber, dass Sie mich bald aus dieser pein-«lichen Ungewissheit erlösen werden. Ich war damals krank und «ganz unthätig, — Sie sind über solche Zustände Zeitlebens er-«haben, wie Sie selbst meinten.

«Ihr treuer

Steiner.»

«Grüssen Sie Prof. *Vogt*[1]) und sagen ihm, ich hätte mich über «seinen *wackern Carl*[2]) bei Lesung der «*Bilder aus dem Thierreich*» «sehr gefreut, theils aus *collegialischem* Anlass. Unterlassen Sie «es nicht.

«Ein hiesiger Gymnasiums-Professor der Mathematik, *Müller*, «meinte, ich sollte *Geflecht* statt *Gebüsch* oder *Netzbasis* sagen, es «drücke gerade etwas *Räumliches* aus. Was sagen Sie dazu?

«Die gewöhnlichen Grüsse. — Haben Sie Chelini (in den Statuten «steht Ch*i*lini) geschrieben? — Denken Sie, ich habe mich noch nicht «bedankt! es ist schändlich.

«Lassen Sie mich nicht im Stich, damit ich in den, nächste «Woche eintretenden, Ferien die Redaction fortsetzen kann. Ich «werde auch bald mich umsehen, wie ich es anzufangen habe, um «auf Jahr und Tag Urlaub zu erhalten.

«Mein kleiner Aufsatz ist in Liouville's Journal noch nicht er-«schienen, Dr. *Wöpke*[3]) scheint ihn nicht übersetzt zu haben; ich sollte «an *Poncelet* schreiben — aber es geschieht nicht. Auch von Ihren «Sachen scheint noch nichts aufgenommen zu sein. *Crelle* sehe ich «nie. Bei ihm ziehen sich die Sachen lange hin. Ich werde näch-«stens nach der Druckerei gehen und mich beim Setzer erkundigen.

«Zum *Donnstig!* bald Antwort und sollte es eine *Kriegserklärung*

---

[1]) Seit 1835 Professor der Medizin in Bern.

[2]) Bezieht sich auf Carl Vogt, Professor in Genf † 1895.

[3]) Wöpke Franz, geb. 6. Mai 1826, Lehrer der Mathematik, lebte abwechselnd in Berlin und Paris; † 1864.

«sein, nur nicht eine so *tiefdurchdachte Stellung* eingenommen, wie «Preussen; heraus aus der neutralen Passivität, ehe Sebastopol «fällt.»

Steiner an Schläfli.

Berlin, 25. Febr. 1855.

«*Lieber und getreuer Freund!*

«Holloboh! wo hängt's? Sind Sie böse, oder grasen Sie, oder «mangen Sie Vorsichtskasse [1]), oder waren meine Aufgaben zu schwer, «dass in drei Wochen noch keine Antwort kommt?

«Ich habe die Redaction wieder begonnen. Es geht erbärmlich «langsam. Ihre Definitionen machen mir viel zu schaffen. Es giebt «mehrere Dinge, die ich nicht klar anschauen kann, — und sicher «habe ich schon Falsches geschrieben. Wenn ich Ihren Entwurf lese, «ist es mir gerade wie beim Spazieren: diese *Selbstsucht*, die sich «nicht um den schwächeren Begleiter kümmert! Nun begreife ich «*Borchardt's* Urtheil auf dem Rigi! Um Sie jedoch nicht, wie «früher, zu ärgern, gebe ich mir Mühe, Ihrem Concepte treulich zu «folgen; aber etwas Schulmeisterei wird doch eingeflochten, was Ihnen «unlieb sein mag, da Sie dafür kein Organ haben, wie für schönen «Weg und humane Ruhe auf Ausflügen, worüber *Walter*, *Rettig* [2]), ich «und Alle zu *weinen und klagen* haben. — Ich sitze gegenwärtig die «8$^{\text{te}}$ Leidens-Stör zu Hause ab. Das Alter macht sich schon stark gel«tend, die frühere Allgewalt der Phantasie ist halb erloschen; ich «kann nicht mehr klar anschauen, und nur mit saurer Mühe. Ich «bitte Sie daher mir folgende Sachen (die mir ehemals leicht ge«wesen wären) *sicher zu entscheiden*.

«1. Der aus jedem Punkte P in einer f$^{\text{m}}$ dieser umschriebene «Kegel hat die zugehörige Berührungsebene E zur Doppelebene und «*berührt sie längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve in P.* (?) «Wenn nun die E mit *Rückkehrpunkt* schneidet, so ist sie eine *Wende«ebene* (nicht Rückkehrebene?) des Kegels; und wenn sie mit *Selbst«berührungspunkt* schneidet, so ist sie eine *Selbstberührungsebene* des «Kegels.

«2. Wenn 2 Flächen sich in P berühren, so hat die ihnen ge-

---

1) Schläfli war ca. 5 Jahre lang Liquidationsrechner der National-Vorsichts-Kasse.

2) Prof. der Philologie in Bern, jetzt noch lebend.

«meinsam umschriebene Abwickelbare die zugehörige E zur Doppel-«ebene und berührt sie längs *der beiden Tangenten der Schnittcurve «der Flächen;* die E wird *Wende-* oder Selbstberührungsebene der Ab-«wickelbaren, wenn P ein *Rückkehr-* oder Selbstberührungspunkt der «Curve ist; dabei ist die Rückkehrtangente eine *Asymptote* in der «Involution, welche durch die zwei Tangentenpaare der Schnittcurven «von E mit den 2 Flächen bestimmt ist; ebenso die *Selbstberührungs-«tangente.*

«3. Die Schnittcurve des Knotenkegels n^{ten} Grads K^n mit der «Fläche f^m sendet $n(n+1)$ Zweige durch den Knotenpunkt P, deren «Tangenten t (in P) *alle in den K* fallen; berührt eine E den K längs «einer dieser t, so ist diese eine *Selbstberührungstangente ihres «Schnittes* (so verstand ich Ihren rücksichtslos-dunkeln Satz), und für «die vorhergehenden und nachfolgenden, den K berührenden Ebenen «ändert deren Schnittcurve die positive Seite ihrer Rückkehrtangente. «Geht aber eine E frei durch solche t, so hat ihr Schnitt dieselbe «zur *Wendetangente* (?).

«Ich muss hierbei nochmals vom Knotenpunkt 2^{ter} Ordnung «sprechen, der mich sehr würgt, weil ich ihn nicht ganz zu fres-«sen vermag, und sicher Falsches darüber ins Reine geschrieben «habe, wie ich jetzt einsehe. Er heisst *hyperpoloidisch* (nicht hyper-«polisch) oder *ellipsoidisch,* nachdem der K^2 reell oder imaginär ist. «Nun kann ich mich damit nicht zufrieden geben, obschon Sie mich «in Bern abschnauzten und wiewohl ich bereits ins Reine schrieb, «dass der Uebergangsfall zwischen beiden der *paraboloidische* Knoten-«punkt sei — was offenbar Unsinn ist. Mit träger Vorstellung sah «ich Folgendes, was Sie controlliren und sicher begründen wollen.

«Der hyperb. Knotenpunkt hat zwei *Grenzfälle:* 1^0) wo K^2 sich «auf eine einzige Gerade = Knotenkante, reducirt, welche dann *Selbst-«berührungs-* oder *Rückkehrtangente* des Schnittes jeder durch sie «gehenden Ebene ist, so dass also die Fläche einen Selbstberührungs-«Knotenpunkt oder Rückkehr-Knotenpunkt (eine Spitze, die im Kno-«tenpunkt endet) hat (Beispiele an Umdrehungsflächen); 2^0) wo «K^2 sich in eine Ebene=Knotenebene ausbreitet, welche von jeder «durch den Knotenpunkt gehenden Ebene in einer *Rückkehrtangente* «oder Selbstberührungstangente (?) geschnitten wird, und insbesondere «drei durch den Knotenpunkt gehende solche Gerade enthält, welche «für jede durchgehende Ebene Selbstberührungstangenten sind, so dass «die Fläche drei glatte Spitzen hat, die im Knotenpunkt enden (wie «unten, bei Ihrem Fall). Oder wird hier die von jeder durch den «Knotenpunkt gehenden andern E in einer Selbstberührungstangente «(statt rt) geschnitten? Beispiel: wenn man eine Curve und die Nor-«male in einem Wende- (oder Selbstberührungs-) Punkt herumbewegt. «— Zerfällt K^2 in 2 Ebenen, die *reell* oder *imaginär* sind, so heisst «jetzt der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*. Ist nun dieser «elliptische Fall mit dem vorigen (1°) identisch? oder wodurch unter-«scheiden sie sich? Und ist ebenso der hiesige hyperbolische Grenz-«fall, wo beide Knotenebenen zusammenfallen, mit dem vorigen (2°) «*identisch* oder *verschieden?* Wie schwer es mir wird einzusehen, «dass in jeder der beiden Ebenen drei famöse t liegen, habe ich «Ihnen bereits im vorigen Brief unterbreitet und erwarte bald sichere «Auskunft. — Statt *Dehnebene* bin ich jetzt auf den Namen *Streifebene* «gekommen; *Streifcurve*. Ihre *Umschreibungsebene* wäre auch sach-«gemäss.

«Hat die f^3 einen Kp=P, so wird sie vom K^2 längs dreien Strah-«len t berührt (?); daher hat f^3 die sie längs diesen t berührenden «drei Ebenen zu *Streifebenen*. — Hat f^3 vier Knotenpunkte (wie z. B. «die 2^{te} Polarenveloppe eine E in Bezug auf Basis F^3), die ein Te-«traeder T bestimmen, so berührt jeder Knotenkegel längs der drei «anliegenden Kanten, und je zwei Knotenkegel berühren sich längs «der ihnen gemeinsamen Kante und haben daher noch einen (durch «die beiden anderen Knotenpunkte gehenden) ebenen Schnitt C^2. Die «Ebenen der sechs C^2 gehen durch *einen* Punkt. Die 4 Knotenkegel «sind irgend einer f^2 umschrieben, welche alle 6 Kanten des T be-«rührt; endlich hat f^3 sechs Streifebenen, die sie längs der 6 Kanten «streifen und die respectiven Ecken des T zu Mittelpunkten der donn-«stigs Strahlbüschel haben. — Für die F^3 (3^{te} Klasse) alles analog. «Was daran Wahres ist, werden Sie bald erkennen; gleich nach der «Ankunft in hier habe ich so was angeschaut; jetzt sehe ich nichts «deutlich.

«4. Der einer f^m aus freiem P umschriebene Kegel K ist vom «m $(m-1)^{ten}$ Grad. Ist P insbesondere ein Kp n^{ter} Ordnung von f^m, «so besteht $K^{m\,(m-1)}$ aus $(n+1)\ K^n + K^{m\,(m-1)\,-\,n\,(n+1)}$ d. h. aus «dem $(n+1)$fachen Knotenkegel K^n und aus einem andern Kegel «$[m\,(m-1) - n\,(n+1)]^{ten}$ Grads, der für das Maximum von n, für «$n = m - 1$, verschwindet.

«5. Braucht man *Schaar* nicht zu definiren? — Wenn Sie sagen, «*eine Doppelschaar von Flächen*» muss da nicht hinzugesetzt werden *gleichen Grads*» oder «*gleicher Klasse*», oder liegt dies schon drin?

«Kann man bei einer Doppelschaar Flächen «*von drei successiven Flächen*» sprechen, da ja jede gleichsam von einer Schaar nächstfolgender umgeben ist?

«6. Da wir die Klasse der einer gegebenen f^m doppelt umschriebenen Abwickelbaren kennen, so muss auch der Grad ihrer Berührungscurve R^x zu finden sein. Dann ist jene Klasse $=\mu$, so gehen durch jeden P μ Doppelebenen der f^m, und daher schneidet die erste Polare von P, f^{m-1}, die R^x in 24 Punkten, so dass $(m-1) \times x = 2\mu$, also $x = \frac{2\mu}{m-1}$ ist. (?) — Von welchem Grad ist die Abwickelbare? und von welchem ihre Rückkehrlinie? Muss zu finden sein.

«Sind f^m und f^n gegeben, so ist die ihnen gemeinsam umschriebene Abwickelbare von der $m\,(m-1)^2 \times n\,(n-1)^{2\text{ten}}$ Klasse; ihre Berührungscurven R^μ und R^ν mit f^m und f^n werden also von den ersten Polaren f^{m-1} und f^{n-1} jedes P in $m\,(m-1)^2\, n\,(n-1)^2$ Punkten geschnitten, so dass danach $\mu = m\,(m-1).\ n\,(n-1)^2$ und

«$\nu = m\,(m-1)^2.\ n\,(n-1)$ wäre. (?)

«Die den Flächen f^m und f^n längs ihrer Schnittcurve R^{mn} umschriebenen Abwickelbaren sind beziehlich von der $m\,n\,(m-1)^{\text{ten}}$ und $m\,n\,(n-1)^{\text{ten}}$ Klasse. Daher müssen bei zwei Flächen m^{ter} und n^{ter} Klasse F^m und F^n die Berührungscurven R^μ und R^ν der ihnen gemeinsam umschriebenen Abwickelbaren vom $m\,n\,(m-1)^{\text{ten}}$ und $m\,n\,(n-1)^{\text{ten}}$ Grad sein. (?) — Ich wollte von da aus weiter gehen und finden, *um wieviel die Doppel- und Rückkehrlinie einer* F *deren Klasse erniedrigen*, aber ich bin zu sehr abattu und confus, vielleicht gelingt es ein andermal.

«Wenn Ihr Stillschweigen keinen andern Grund hat, als dass Sie sich an einigen schwierigern Fragen verbissen haben, so bitte ich recht sehr, mir vorerst die leichteren bald zu beantworten, damit ich mit der Redaction vorwärts komme.

«*Fetscherin's* Tod hat mich frappirt; er war noch so rüstig und kaum oder nur wenig älter als ich; 96er. Woran starb er?

«Sollten den Herren *Rettig*, *Leuenberger*, *Dr. Schneider* oder *Vogt*, *Ries*, Signore etc. Dissertationen in ihren respectiven Fächern genehm sein, so würde ich durch Buchhändler Ihnen ein Pack zuschicken und Sie könnten das Porto repartiren nach Stückzahl und Inhalt. Einst gab ich *Schlatter* (=Post-Heiri) in Solothurn circa 30 Stück.

«Leben Sie wohl, bleiben Sie *ewig gesund, jung und rüstig* — wie Sie selbst meinten — und *antworten* Sie bald

Ihrem dankbaren *J. Steiner*.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich nehme herzlichen Antheil an Ihren Leiden und bewundere «die Selbstüberwindung und den Heroismus, mit dem Sie, denselben «trotzend, die schwersten Fragen der Geometrie angreifen, von denen «es mir fast unmöglich scheint, dass sie in der Anschauung allein «sollten abgethan werden können.

«*Ad 1°*. Der aus einem beliebigen Punkte P einer *nach Grad* «*freien* Fläche f dieser umschriebene Kegel K hat die zu P gehörende «Berührungsebene E der f zur Doppeltangentialebene, und die zwei «Berührungsstrahlen derselben sind die Tangenten im Doppelpunkt P «des Berührungsschnitts der E. — Fällt aber P in den Durchschnitt «der Kernfläche und wird daher zum Rückkehrpunkt des Schnitts E, «so zählt die Rückkehrtangente für *vier vereinigte Strahlen*, welche «K mit E gemein hat (analytisch sicher!). — Ist endlich P einer der «Punkte π, wo die Curve (E, f) diesen zum Selbstberührungspunkt «hat, so sendet K durch die Selbstberührungstangente *zwei* Lappen, «welche beide längs derselben von der E oskulirt werden. (Analytisch «ist dieses wenigstens das Mindeste, was geschehen muss; ich glaube «aber nicht, dass es im Allgemeinen noch höher gehe. Den Ueber- «gang vom vorigen Falle zu diesem speziellsten vermag ich freilich «in der Anschauung nicht zu verfolgen. Doch! denn in π wird die «Curve R d. h. (Q, f) von der Berührungscurve S der doppelt um- «schriebenen Abwickelbaren berührt.) — Fällt der Punkt P irgendwo «in die S, so ist die E dreifache Berührungsebene des Kegels K; zu «den zwei sonst bekannten Berührungsstrahlen kömmt nämlich als «dritter noch der Strahl hinzu, welcher beide Berührungspunkte der «E (mit f) verbindet.

«*Ad 3°*. Wenn eine Fläche f (m^{ten} Grades) einen Knotenkegel «N (n^{ten} Grades) hat, und man wählt den Scheitel desselben zum Eck «(x, y, z) des Fundamentaltetraeders und nennt w die gegenüberliegende «Ebene, so bekömmt das Polynom der Fläche, nach den fallenden «Potenzen von w geordnet, die Form: $f = Nw^{m-n} + Pw^{m-n-1} +$ etc. «Dann ist also P ein Kegel $(n+1)^{ten}$ Grades, der mit dem Knoten- «kegel den Scheitel gemein hat, aber sonst von ihm durchaus unab- «hängig ist. Von den $n(n+1)$ gemeinschaftlichen Strahlen beider «können also bis auf die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nothwendigen alle übrigen «beliebig auf N angenommen werden; wenn demnach dieser N nur «vom zweiten Grade ist, so giebt es *keinen* nothwendigen Strahl, «sondern alle 6 können beliebig auf den N gesetzt werden, selbst «noch wenn dieser ein *Ebenenpaar* ist; nur wenn N aus zwei *ver-«einigten* Ebenen besteht, und dem P keine Gewalt angethan werden «soll, können in der Ebene N nur 3 Strahlen beliebig gesetzt wer-«den, deren jeder für zwei vereinigte Strahlen gilt. Frägt man nun «(im allgemeinen Fall), wie die Curve aussieht, in welcher die Basis «f vom Knotenkegel N geschnitten wird, so hat man für dieselbe das «System ($N = o$, $Pw^{m-n-1} + Qw^{m-n-2} +$ etc. $= o$), also mit erster «Annäherung ($N = o$, $P = o$), d. h. die erwähnten $n(n+1)$ Strahlen «sind Tangenten der Zweige, welche die Curve durch den Knoten-«punkt sendet. Wählt man die Fundamentalebene x so, dass sie den «N berührt, und lässt die y durch den Berührungsstrahl gehen, so «bekömmt man $N = xz^{n-1} + pz^{n-2} +$ etc., wo p ein homogenes «Polynom zweiten Grades in x, y bedeutet. Ist nun Q ganz frei, so «ist sein niedrigstes Glied z^{n+1}; in der Gleichung des Schnitts $x = o$ «sind also die niedrigsten Glieder $y^2z^{n-2}w^{m-n-1}$, $z^{n+1}w^{m-n-2}$ (mit «Weglassung der constanten Coefficienten), oder gekürzt: y^2w, z^3, d. «h. der Berührungsstrahl (x, y) ist Rückkehrtangente des ebenen Be-«rührungsschnitts (x) der Basis f. Geht aber der Kegel P durch «diesen Strahl (x, y), so ist sein niedrigstes Glied yz^n; aber das nied-«rigste Glied von Q im Allgemeinen immer noch z^{n+2}; man hat dann «im Ganzen drei Glieder von derselben niedrigsten Ordnung, in ge-«kürzter Form: y^2w^2, yz^2w, z^4, welche zusammen in die Gestalt des «Products $(yw + \alpha z^2)(yw + \beta z^2)$ gebracht werden können, d. h. die «Gleichung des ebenen Schnitts zerfällt in erster Annäherung in die «zwei Curven $yw + \alpha z^2 = o$, $yw + \beta z^2 = o$, mit andern Worten, «der Schnitt hat hier einen Selbstberührungspunkt, dessen Tangente «der Strahl (x, y) ist. — Geht eine schneidende Ebene frei durch «einen der $n(n+1)$ Strahlen (N, P), und nehmen wir sie als Ebene «x an und lassen auch noch die Ebene y durch diesen Strahl gehen, «so fällt in N das Glied z^n und in P das z^{n+1} weg; aber Q wird ein «Glied z^{n+2} haben; die auf die niedrigsten Glieder beschränkte (und «gekürzte) Gleichung der Basis f wird demnach für $x = o$ zu $yw^2 +$ «$z^3 = o$; d. h. der Strahl (x, y) ist eine Wendetangente der Schnitt-«curve. — Für das Mass eines Briefs konnte ich diese Sache nicht «wohl ausführlicher erörtern; aber ich hoffe, dieses reiche hin, um «die Dunkelheit zu verscheuchen.

«Ist ein *Knotenpunkt* (zweiten Grades) K *reell* und geschieht «ihm weiter keine Gewalt, so ist nur zweierlei möglich: 1⁰ entweder «ist der Knotenkegel N *reell,* indem z. B. $N = x^2 + y^2 - z^2$; also «der Knotenpunkt *reell verbunden* (hyperboloidisch); 2⁰ oder der Knoten-«kegel N ist *imaginär*, indem z. B. $N = x^2 + y^2 + z^2$; also der «Knotenpunkt *isolirt* (ellipsoidisch). Der vermittelnde Gränzfall zwischen «beiden kann offenbar *nur* der sein, wo $N = x^2 + y^2$ wird, d. h. wo «der Knotenkegel aus zwei *conjugirten imaginären* Ebenen besteht; «consequent müssten Sie ihn einen *elliptisch-paraboloidischen* Knoten-«punkt nennen; ein solcher entsteht z. B. wenn man die *Neil*'sche «Parabel um ihre Rückkehrtangente herumdreht (man kann dann «nachträglich die auf der Umdrehungsaxe senkrechten kreisförmigen «Querschnitte zu Ellipsen ausstrecken). Der Uebergang ist leicht in «der Anschauung zu verfolgen. Setzt man nämlich $N = x^2 + y^2 - \alpha z^2$, «wo α einen *sehr kleinen* pos. Coefficienten bedeutet, so werden in «der Nähe des K die Verhältnisse $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ sehr klein, der Knotenkegel «wird also sehr spitz und zieht sich gleichsam auf seine Axe (x, y) «zusammen; für eine erste Annäherung braucht man daher in P nur «das niedrigste Glied z^3 zu berücksichtigen (für dessen Coefficient ich «kurz 1 setze); man bekömmt so für die Basis annähernd

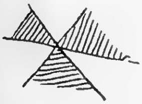
$$-\alpha\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \left(\frac{z}{w}\right)^3 = o, \text{ d. h. } \frac{z}{w} = \alpha,$$

«der *eine* Lappen oder Trichter der Basis bildet einen sehr kleinen «geschlossenen Sack, dessen Länge in der Richtung der Axe von «der Ordnung α, die Querdimensionen hingegen von der Ordnung «$\frac{z}{w}\sqrt{\alpha}$ sind. Setzt man hingegen

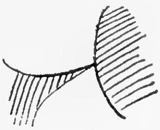
«$N = x^2 + y^2 + \alpha z^2$, $P = - z^3 +$ etc., so erhält man für die Basis «annähernd: $-\left(\frac{z}{w}\right)^3 + \alpha\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \frac{x^2+y^2}{w^2} +$ etc. $= o$, d. h. für «$o < \frac{z}{w} < \alpha$ ist in unmittelbarer Nähe des Strahls oder der Axe (x, y) «die Fläche unterbrochen, während sie jenseits, für $\frac{z}{w} > \alpha$, reelle Aus-«dehnung erhält, sie kömmt also mit einem stark gekrümmten Buckel «dem isolirten Knotenpunkt (x, y, z) entgegen, ohne ihn wirklich zu «erreichen.

«Nehmen wir jetzt den Fall, wo der Knotenkegel N in zwei ver-«schiedene Ebenen zerfällt, so sind nur zwei Arten möglich. *Ent-«weder* ist $N = x^2 + y^2$, der schon besprochene Gränzfall, wo die «zwei Ebenen conjugirt imaginär sind, *elliptischer* Kantenknotenpunkt; «ein ebener Schnitt in der Nähe von K giebt immer eine Ellipse; «ein frei durch K gehender Schnitt bekömmt den Punkt K zum *isolirten* «Doppelpunkt; jeder durch die Kante geführte ebene Schnitt hat K «zum Rückkehrpunkt, dessen Oeffnung die Richtung nie wechselt. «Einen ebenen Schnitt mit Selbstberührungspunkt kann es ohne «höhern Zwang nicht geben. (Dieser Zwang bestände nämlich in «der einzigen Bedingung, dass in P das Glied z^3 wegfiele, d. h. dass «der Kegel P dritten Grades durch die Knotenpunkte selbst gienge. «Dann sind allerdings für $x = o$ die niedrigsten Glieder $y^2 w^2$, $y z^2 w$, «z^4; und jede durch die Kante gelegte Ebene schneidet die Basis mit «Selbstberührungspunkt.) — Oder es ist $N = x^2 - y^2$, die zwei «Ebenen ($x + y = o$, $x - y = o$) sind reell, *hyperbolischer* Kanten-«knotenpunkt; ein ebener Schnitt in der Nähe von K giebt eine Curve, «die in der Nähe mit einer Hyperbel übereinkömmt; ein frei durch «K gehender ebener Schnitt bekömmt ihn zum *verbundenen* Doppel-«punkt; ein frei durch die Knotenkante geführter ebener Schnitt «hat diese Kante zur Rückkehrtangente in K, und zwar ist in zwei «Scheitelkeilen die Oeffnung des Rückkehrpunktes nach der einen «Seite, in den zwei andern nach der andern Seite der Kante ge-«wendet. Jede Ebene des Knotenkegels endlich schneidet die Basis «in einer Curve, welche die Zweige frei durch K sendet; die Tangenten «derselben sind die drei Strahlen, welche diese Ebene mit dem Kegel «P dritten Grades gemein hat.

«Als Gränzfall zwischen dem elliptischen und hyperbolischen «Kantenknotenpunkt steht der Planknotenpunkt in der Mitte; der «Knotenkegel reducirt sich auf zwei vereinigte Ebenen, es ist $N = x^2$; «jeder frei durch K geführte ebene Schnitt hat K zum Rückkehr-«punkt, dessen Tangente in die Knotenebene fällt; diese Ebene selbst «schneidet in einer Curve, welche drei freie Zweige durch K sendet, «von denen wenigstens einer reell ist; ihre Tangenten sind durch «$x = o$, $P = o$ bestimmt. Geht eine Schnittebene frei durch eine dieser «Tangenten, so hat der Schnitt K zum Selbstberührungspunkt. — Will «man ohne Ausübung von Zwang hier noch Arten unterscheiden, so «kann es nur zwei geben. Das System $x = o$, $P = o$ giebt näm-«lich für das Verhältniss $y : z$ drei verschiedene reelle Werthe *oder* nur «einen reellen; dem ersten Fall entsprechen die drei platten Spitzen

, dem zweiten eine platte Schneide,  in K völ-

«lig scharf, weiter davon weg immer mehr abgestumpft. Der zwischen-
«liegende Gränzfall ist der, wo zwei Lösungen von $x = o$, $P = o$
«zusammenfallen; dann ist der Schnitt der Knotenebene eine Curve,
«welche in K einen Rückkehrpunkt hat, durch den noch ein Zweig
«frei durchgeht; also entweder

 oder 

«Fallen alle drei Lösungen zusammen, so wird die Gleichung «des Schnitts der Knotenebene in erster Annäherung von der Form «$y^3w + z^4 = o$, ein $\left(\frac{3}{4}\right)$punkt, der jeder frei durchgehenden Ge- «raden für drei, aber die ächten Tangente ($y = o$) für vier ver- «einigte Punkte zählt. — Um mich den von Ihnen angeführten sehr «starken Specialitäten zu nähern, muss ich annehmen, dass der Kegel «P dritten Grades zerfalle in die Knotenebene x selbst und einen «Kegel zweiten Grades, d. h. dass P durch x theilbar sei. Die Basis «erscheint dann in der Nähe von K wie *zwei sich in K berührende* «*Flächen zweiten Grades.* Doch halte ich es für rathsam, sich hier «nicht zu tief in Specialitäten einzulassen.

«Obgleich ich durch das bisherige Ihre Fragen über Identität «oder Verschiedenheit gewisser Fälle hinreichend beantwortet glaube, «will ich doch noch ausdrücklich bemerken, dass der *hyperbolische* «*Knotenpunkt* (hyperbolisch - paraboloidischer Knotenpunkt) nur ein «Gränzfall ist zwischen zwei verschiedenen Lagen des hyperboloidischen «(reell verbundenen) Knotenpunkts. Halbiren wir die Winkel des «reellen Ebenenpaars durch zwei Ebenen, nennen diese x, y und «legen durch K senkrecht auf die vorigen noch eine Ebene z, so «können wir uns den Uebergang in einen ächten Kegel auf doppelte «Weise vorstellen, entweder so, dass die Ebene x den Kegel elliptisch «(d. i. nur in einem reellen Punkt) schneidet, oder dass die Ebene y «es thut.

«Um kein Missverständniss übrig zu lassen, gebe ich noch folgende Uebersicht: *Knotenpunkt*; I. im Allgemeinen (Knotenkegel «ächt vom 2^{ten} Grade, d. h. untheilbar) entweder α) reell verbunden, «oder β) isolirt; II. im Besondern: Kantenknotenpunkt (der Knoten«kegel zerfällt in zwei Ebenen): 1^0 im Allgemeinen, die zwei Ebenen «sind verschieden und entweder α) beide reell, oder β) beide con«jugirt-imaginär; 2^0 im Besondern: Planknotenpunkt (der Knotenkegel «besteht aus zwei vereinigten Ebenen); A. im Allgemeinen entweder «α) Dreispitzpunkt, β) Messerschneidepunkt; B. im Besondern, die «Knotenebene schneidet die Basis mit Rückkehrpunkt, durch den ein «freier Curvenzweig geht, und zwar entweder α) der Rückkehrpunkt «hat eine volle, oder β) leere Höhlung.

«Ueber die Fläche dritten Grades, welche *einen* Knotenpunkt hat, «sind Sie im Irrthum. Der Knotenkegel schneidet die Basis (im All«gemeinen) in *sechs* verschiedenen Geraden; jede von diesen zählt «für *zwei sich nicht schneidende Cayley*'sche Gerade; alle 6 Paare ver«einigter Geraden bilden einen Doppelsechser (Gitter) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$ «wo immer je zwei entsprechende (sich also nicht schneidende) «Strahlen wie a_1 und b_1 zusammenfallen. Die 15 übrigen Geraden «c_{12}, etc. hingegen sind sämmtlich verschieden. Durch den Knoten«punkt gehen 30 *Caylay*'sche Ebenen, welche paarweise zusammen«halten, wie (a_1 b_2 c_{12}) und (a_2 b_1 c_{12}); hingegegen die 15 übrigen «Ebenen wie (c_{12} c_{34} c_{56}) sind sämmtlich verschieden.

«Was Sie über die Fläche dritten Grades mit *vier* Knotenpunk«ten sagen, erkenne ich alles als richtig an, nur dass ich noch nicht «merke, was Sie mit den Strahlbüscheln meinen. Im Knotenpunkt«tetraeder zählt jede Kante für 4 *Cayley*'sche Gerade. Nimmt man die «Polarebenen der Knotenpunkte in Bezug auf die den 4 Knotenkegeln «eingeschriebene Fläche zweiten Grades, so sind diese 4 *Sylvester*'«sche Ebenen; und die 4 Geraden, in denen sie die entsprechenden «Tetraederebenen schneiden, liegen in der fünften *Sylvester*'schen «Ebene, und bilden hier ein Vierseit, dessen Diagonalen die drei «noch übrigen (einzelnen) *Cayley*'schen Geraden sind; durch jede von «diesen gehen zwei durch Gegenkanten gelegte Streifebenen der Basis. «Mich dünkt aber fast, ich habe Ihnen dieses schon geschrieben.

«*Ad 1.* Dass im Knotenpunkt n^{ten} Grades den Grad des von ihm «aus der Basis umschriebenen Kegels um n (n + 1) erniedrigt, hat «seine volle Richtigkeit; aber zu der Erklärung, die Sie beifügen, «dass nämlich der Knotenkegel selbst n + 1 mal dazu zu zählen sei, «kann ich nicht beistimmen, weil die Elimination nichts davon an-«zeigt. Wollten Sie denn auch bei einer ebenen Curve, die einen «n fachen Punkt hat, behaupten, wenn man sie als Schaar ihrer Tan-«genten auffasst, so sei jede der n Tangenten des Knotens n + 1 «mal zu zählen? Sie würden eher sagen, der Knoten sei ein n (n + 1) «mal zu zählender Strahlbüschel.

«*Ad 5.* Sie haben selbst das Wort *Schaar* in den Sprachge-«brauch eingeführt und wollen nun, nachdem Sie es unzählig oft ge-«braucht haben, erst noch definiren! Verstehen Sie denn unter *Schaar* «nicht eine unzählige Menge unendlich nahe auf einander folgender «geometrischer Gebilde, die des *allmäligen* Uebergangs in einander «fähig sind? In analytischer Sprache würde ich sagen: wenn in einer «Gleichung oder einem Systeme von Gleichungen, welches ein geo-«metrisches Gebilde darstellt, eine Constante variirt wird, so entsteht «eine Schaar, wenn deren 2, 3 . . . unter sich unabhängige variirt «werden, so entsteht eine Doppel-, dreifache, . . . Schaar. Dass Cur-«ven oder Flächen, die des allmäligen Uebergangs in einander fähig «sind, von gleichem Grade sein müssen, versteht sich dann von selbst. «— Die Franzosen gebrauchen das Wort successif, wenn ich nicht irre, «im Sinne vo *unendlich nahe auf einander folgend;* ich habe nun das «kurze Wort dem ellenlangen vorgezogen. Ich weiss nicht bestimmt, «ob sie im Gegenssatze dazu das Wort consécutif im Sinne von *durch* «*Zwischenräume getrennt auf einander folgend* gebrauchen. Es wäre «aber bequem, wenn man zwei einfache Wörter hätte, um diesen «Unterschied zu bezeichnen. — Ich kann mich nicht mehr erinnern, «wo ich von *drei successiven Flächen einer Doppelschaar* gesprochen «habe; doch denke ich, ich werde den schleppenden Beisatz, dass «der Ausdruck *im Allgemeinen* zu verstehen sei, weggelassen haben; «wäre hingegen die *Bedingung* hinzugekommen, dass die drei succes-«siven Flächen einer und derselben einfachen Schaar angehören soll-«ten, so würde ich dieses wohl ausdrücklich gesagt haben.

«*Ad 6.* Ich bin erstaunt darüber, dass Ihre einfache Betrach-«tung über den Grad x der Berührungscurve der doppelt umschriebenen «Abwickelbaren einer Basis n^{ten} Grades mir nicht eingefallen ist. Ich «habe das System von Gleichungen, welches diese Berührungscurve «darstellt, durch Nachahmung des *Jacobi*'schen Verfahrens für die

«Doppeltangenten einer ebenen Curve erhalten — die Discussion ist «freilich viel schwieriger als bei den Curven — und habe genau den «Grad gefunden, den Sie so leicht geschlossen haben, ohne nur den «Zusammenhang mit der Classe der Abwickelbaren zu bemerken. Es «folgt dann ferner daraus, dass die Anzahl der Ebenen, welche die «Basis in einer Curve schneiden, die zugleich einen Rückkehrpunkt «und einen Doppelpunkt hat, $4\,n\,(n-2)\,(n-3)\,(n^3+3\,n-16)$ ist, al«so 1920 für die f^4. — Wenn α den *Grad* der doppelt umschriebenen «Abwickelbaren und β die Anzahl der dreifach berührenden Ebenen be«zeichnen, so ist demnach

$$2\,\alpha+3\,\beta=\frac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n^7-4n^6+7n^5-45\,n^4+118\,n^3-115\,n^2+508\,n-912).$$

«Für $n=4$ sehe ich die Möglichkeit vor, α zu bestimmen; aber ich bin «noch nicht im Stande gewesen, die Discussion der betreffenden Systems«gleichungen befriedigend abzuschliessen. Für $n>4$ verzweifle ich «daran, α oder β je finden zu können. — Wenn in meinem Schlüssen «nicht irgendwo ein Trug untergelaufen ist, so hat jene Berührungscurve «der doppelt umschriebenen Abwickelbaren die merkwürdige Eigenschaft, «dass sie eine *Vollcurve* ist, und mein Verfahren, dieselbe darzustellen, «führt, auf die Fläche dritten Grades angewandt, direct zur Auffindung «einer (aus einer vielfachen Schaar) Fläche 9^{ten} Grades, welche durch «die 27 *Cayley*'schen Geraden geht.

«Ihren Schluss auf die Grade der zwei Berührungscurven der «zweien Flächen umschriebenen Abwickelbaren muss ich als richtig «anerkennen.

«Ist n der Grad der Basis (nach Classe frei), g, k Grad und Classe «einer Doppellinie oder Rückkehrlinie desselben, so erniedrigt jene «an sich die Classe der Basis um $g\,n+2\,k$, diese an sich um $2\,g\,n+3\,k$, «d. h. abgesehen von singulären Punkten einer jeden. — Jede Stelle, «wo drei Lappen der Fläche sich frei durchschneiden, an sich erniedrigt «die Classe um 3. Die Berührungsebene π, die mit Selbstberührungs«punkt schneidet, sieht polarisirt so sonderbar aus, dass ich keine Be«schreibung wage; mit grosser Mühe habe ich bewiesen, dass dieser «complicirte Punkt die Classe um 6 erniedrigt. — Jeder Punkt endlich, «wo ein Lappen der Fläche ihre Rückkehrlinie frei durchschneidet, «ihre Doppellinie also einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt hat, erniedrigt «die Classe der Fläche um 4.

«*Ad 2°* Ich werde Ihnen über die gemeinsam umschriebene «Abwickelbare zweier Flächen, die sich berühren, später antworten. «Ich hatte sogleich nach Empfang Ihres zweiten Briefes angefangen, «diese Abwickelbare für zwei sich berührende Flächen zweiten Grades «aufzusuchen; da ich aber nicht weiss, wie lange mich noch die Ent«wicklung einer 5-stelligen Determinante, die erst nach Entfernung «eines jetzt noch nicht sichtbaren linearen Factors das Gradespolynom «jener Abwickelbaren geben wird, aufgehalten hätte, so beeile ich mich «Ihnen endlich einmal zu antworten. Für jetzt nur so viel, dass mir «die Wendeebene der Abwickelbaren, die einem Rückkehrpunkt der «Durchschnittscurve entsprechen soll, spanisch vorkömmt!

«Nun sollte ich auf Ihren ersten Brief antworten. Es sind aber «darin theils Sachen, die kaum einer Bestätigung bedürfen, oder die «ich Ihrer freien Willkür überlassen muss, theils Betrachtungen, in «denen ich keine grössere logische Kraft zu erkennen vermag, als in «den entsprechenden eigenen, theils Betrachtungen, denen ich noch nicht «habe folgen können. Ich werde später im Einzelnen zu antworten «suchen. — Ihren Auftrag an *Leuenberger* habe ich besorgt. — Die «versprochenen Berliner-Dissertationen nehme ich recht gerne an und «werde sie an die betreffenden Herren vertheilen.

«Ihnen Glück, Kraft und gute Gesundheit wünschend

«Bern, den 7. März 1855. Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich vermuthe zwar, dass Sie meinen Brief, den ich wahrschein«lich am 6. März Morgens um 9 Uhr auf die Post gethan habe, so«gleich nach dem Abgang des Ihrigen werden erhalten haben. Da er «aber auch verloren sein könnte, so muss ich Sie nun bitten, mir so «zu sagen mit umgehender Post anzuzeigen, ob Sie ihn erhalten haben. «Ich habe mich darin bemüht, vorzüglich die auf den Grad bezüglichen «Eigenschaften des Knotenpunkts einer sonst *nach Grad möglichst* «*freien* Fläche, und seiner nächsten Degenerationen in den *Kanten*«*knotenpunkt* und (noch spezieller) in den *Planknotenpunkt* deutlich «und in logischer Ordnung anzugeben. Ihr letzter Brief offenbart mir «aber eine so tiefe Verschiedenheit unserer Auffassungen dieses Gegen«standes, dass ich mich bewogen fühle, noch einige Worte beizufügen.

«Wenn wir einer (als Doppelschaar von *Punkten* gefassten) Fläche die «geringste Beschränkung auflegen, so ist es die Existenz eines Kno-«tenpunkts. Halten wir nun diesen fest und setzen ihm irgend eine «feste Ebene gegenüber, so wird diese vom Knotenkegel in irgend «einem Kegelschnitt geschnitten. Da wir aber die Fläche nach *Grad* «aufgefasst haben, so müssen wir konsequenter Weise den Knotenkegel «als Schaar von Strahlen, den Kegelschnitt also als Schaar von Punkten «auffassen. Nun möchte ich fragen, ob denn da nicht die nächste, mit «einer einzigen neuen Bedingung zu erreichende Degeneration die «eines Paares verschiedener Gerader sei, und ob nicht erst zuletzt «die ärgste, weil drei Bedingungen erfordernde, Degeneration in zwei «vereinigte Gerade zu setzen sei. Im letzten Falle ist es der Punkt-«oder Gradesauffassung völlig fremd, den Punkt auf der, durch Vereini-«gung zweier, entstandenen Geraden irgendwo anhalten zu wollen, «mag nun das Gebilde aus der Ellipse oder aus der Hyperbel degene-«rirt sein. Ein Paar geschiedener Punkte, also ein Gebilde *nullten* «Grades, dürfen wir gewiss nicht an die Stelle einer Curve zweiten «Grades setzen! — Die Sache verhielte sich freilich anders, wenn wir «den Kegelschnitt als Schaar seiner Tangenten (nach Klasse) auffassten; «dann wäre die nächste Degeneration ein Paar geschiedener Strahl-«büschel, und erst die letzte ein Paar vereinigter Strahlbüschel; aber «auch bei diesem würden Sie doch gewiss nicht die Strahlen auf die «zwei leeren Scheitelwinkel der Hyperbel beschränken wollen; sondern «wenn Sie einmal den Strahlbüschel gesetzt haben, so dreht sich der «Strahl ohne Aufenthalt ringsum; ein Paar verschiedener Geraden, «als Gebilde *nullter* Klasse, an die Stelle eines Kegelschnittes gesetzt, «wäre nun bei der Klassenauffassung eben solcher Unsinn, wie das «Punktenpaar bei der Gradesauffassung. — Ich halte daher an dieser «Rangordnung fest: Zuerst der Knotenpunkt schlechthin (zweiten Gra-«des), 1 Bedingung für die Fläche; dann der Kantenknotenpunkt, «2 Bedingungen (im Ganzen); zuletzt der Planknotenpunkt, 4 Bedin-«gungen. Der erste erniedrigt die Klasse der Fläche um 2, der zweite «um 3, der letzte um 6. — Die Scheidung zwischen Reellem und Ima-«ginärem ist untergeordneter Natur, und darf daher nicht die Haupt-«eintheilung abgeben.

«Das Polare, Streifebene einer nach Klasse möglichst freien Flä-«che, ist entweder reine Uebersetzung alles für die Gradesauffassung «Gesagten; oder aber, wenn wir diese neuen Gebilde nun auch nach «Grad anschauen wollen, so müssen wir vorher am Knotenpunkt der

«Gradesfläche die von ihm oder sehr nahen Punkten aus umschriebe-
«nen Kegel gehörig studirt haben; dieses ist aber gar nicht leicht;
«und ich bin jetzt noch nicht im Stande, darüber zergliederte Aus-
«kunft zu geben.

«Bei dem einer Gradesfläche n^{ten} Grades umschriebenen Kegel
«ist $r=n(n-1)(n-2)$; denn der Rückkehrstrahl berührt die Basis
«da, wo die erste und zweite Polare des Kegelscheitels durchgehen;
«$w=4n(n-1)(n-2)$; denn die Wendestrahlen berühren die Basis
«da, wo erste Polare und Kernfläche Q durchgehen;

$$d=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

«Wird diese Fläche von einer Ebene geschnitten und werden
«längs des Schnitts Berührungsebenen an sie gelegt, so bilden diese
«eine Abwickelbare $n(n-1)$ ter Klasse und $n(3n-5)$ ten Grades;
«ihre Rückkehrlinie scheint nur vom $6n(n-2)$ ten Grade zu sein;
«denn sie berührt die Ebene in den Wendepunkten des Schnitts, und
«ich wüsste nicht, wo sie ihr sonst begegnen könnte.

«Wenn bei der Klassenauffassung eine Ebene die Rolle des Pols
«übernimmt, dürfte man ihr vielleicht einen andern Namen, etwa *Po-
«lane* geben. Ihr Satz über den (letzten) Polarpunkt der unendlich
«entfernten Ebene ist richtig; nur sind die Worte «gefällten Perpendikel»
«aus Versehen weggelassen.

«Ihren Auftrag an Prof. *Vogt* werde ich sogleich besorgen. Herrn
«*Chelini* habe ich leider noch nicht geschrieben. Bleiben Sie nun
«einmal bei *Büschel, Gebüsch, Netz* stehen; denn *Geflecht* ist um kein
«Haar besser als Gebüsch; sonst entsteht zwischen uns zweien baby-
«lonische Sprachverwirrung.

«Wenn eine f^3 einen Kantenknotenpunkt hat, so enthält jede
«Knotenebene drei vom Knotenpunkt ausgehende Gerade (von freier
«Lage), deren jede *drei* sich nicht schneidende Cayley'sche Gerade in
«sich vereinigt. Die übrigen 9 Cayley'schen Geraden sind vereinzelt
«und werden von einem Triederpaar gebildet. Jede Knotenebene
«vereinigt in sich 6 Dreiseite. Legt man durch je eine Gerade der
«einen und irgend eine der andern Knotenebene eine Ebene (was 9
«mal geschieht), so vereinigt diese Ebene 3 Dreiseite in sich. Es
«bleiben nur noch 6 vereinzelte Dreiseite übrig, die vom Triederpaar
«gebildet werden und nicht durch den Knotenpunkt gehen. — Beim
«Planknotenpunkt vereinigt jede der drei in der Knotenebene befind-
«lichen Geraden in sich 4 Paare sich schneidender Cayley'scher Ge-
«raden, so dass nur noch 3 vereinzelte Cayley'sche Gerade übrig bleiben,

«welche ein getrenntes Dreiseit bilden. Durch jene 3 ersten Geraden «gehen 3 Streifebenen der Fläche. In die Knotenebene fallen 32 Dreiseite «(von den 3 Streifstrahlen gebildet, also nullen Inhalts); in jede Streif-«ebene fallen 4 Dreiseite (schmal und lang); 1 Dreiseit ist vernünftig. «— Sie herzlich grüssend

«Bern, den 13. März 1855, Abends 7 Uhr.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

18. März 1855. [1])

«*Treuer Freund!*

«Kaum hatte meine Dienstbare das Haus mit meinem Brief ver-«lassen, als mich der Briefträger mit dem Ihrigen herausklingelte. «Ich danke sehr für die schätzbaren und willkommenen Aufschlüsse.

«Dass Sie aber seit zwei Monaten meinen ersten Brief unbe-«achtet gelassen — *müht* mich sehr. Ueber den zweiten machen «Sie mir den Kopf gross, dagegen den ersten erklären Sie am Ende «Ihres vorletzten Briefes — wenn auch nur indirect für Blödsinn. «Dennoch hat mir der erste ungleich mehr Mühe gemacht; er ist «aus einem Wust von 9 Bogen Manuscript ausgezogen, und schwellte «meine Brust mit froher Hoffnung: Sie würden schöne Ergänzungen «und Erweiterungen darauf bauen! Er muss Sie bei reichem anderm «Lieblingsfutter getroffen haben. Beweist er nicht die zwei Sätze, «welche Sie im Entwurf in Klammern ( ) nur *als wahrscheinlich* an-«gaben? Zudem enthält er den Stoff zur reichhaltigen, eines Schul-«meisters würdigen Erweiterung und Ausstaffirung des „§ *über die* «*Bestimmbarkeit der Flächen durch Punkte*“. Da ich eben mit Redi-«giren daran komme, so bitte ich sehr auch diesem Plunder einige «Theilnahme zu schenken. Lassen Sie für kurze Zeit andere Partien «des Universums fahren, um mir recht bald das Ergebniss der Ver-«besserung zuzusenden. Die analytischen Deductionen können Sie «meist sparen, und nur die *sichern Resultate* angeben, da ich — im «Bewusstsein meines hocherhabenen synthetischen Standpunkts — doch «nirgends davon Gebrauch machen darf. Daher beurtheilen Sie mich «auch falsch, wenn Sie oft wähnen, ich schaue die Gegenstände eben-«falls in ihren analytischen Gründen an.

[1]) Dazu existirt ein Concept vom 17.—19. März 1855.

«Diesmal habe ich keine neue Fragen vorzulegen; nur sah ich «beim Vorbeifliegen den folgenden Satz:

«Wird einer f^3 aus beliebigem Pol P ein Kegel umschrieben, «der sie in einer R^6 berührt und nebstdem in einer R_1^6 schneidet, «so gehen durch diese zwei Curven beziehlich zwei Flächen f^2 und «f_1^2, welche einander umschrieben sind, und zwar liegt ihre Berühr-«ungscurve in der allen drei Flächen f^3, f^2 und f_1^2 gemeinsamen «Polarebene des Pols P in Bezug auf dieselben, so dass also der den «Flächen f^2 und f_1^2, längs der Berührungscurve gemeinsam umschrie-«bene Kegel seinen Scheitel im Pol P hat.

«Allerdings zählt jede der n-Tangenten im n-fachen Punkt einer «C^m für $n+1$ Tangenten, wofern man die C^m als von der $m(m-1)$ «Klasse ansehen will, was häufig erforderlich ist. Die von Ihnen ge-«machte Unterscheidung ist mir nicht recht klar, vielleicht wird es «nachträglich noch kommen.

«Morgen werde ich meine Vorlesungen schliessen. Es harrten «nur 3 Zuhörer bis an's Ende aus; davon sind zwei Eidgenossen: der «Sohn des alten *Sidler*[1]) (Zug-Zürich, Commissär in Mailand) und der «Sohn meines Universitätsgenossen Prof. *Hagenbach*[2]) in Basel; sie sind «die einzigen bezahlenden, alle übrigen gestundet. Ich stand also in «diesem Semester pekuniär nicht viel besser als Sie.

«Heute früh fiel hier starker warmer Regen, von Süd und Süd-«west her; der Schnee schmolz mit Macht; jetzt um 12 Uhr scheint «die Sonne schön, wie über Lord *Raglan's* Lager vor Sebastopol. — «Indem ich Ihnen das Wylerfeld[3]) auch schneefrei wünsche, grüsse ich «dankbarlich und herzlich

«Ihr

J. Steiner.»

«Berlin, den 18. März 1855.

«Wer am 18. März 1796 geboren, verlebt heute seinen 60^{ten} Ge-«burtstag. — Es ist erschrecklich die Arbeiten und Pläne noch un-«vollendet herumliegen zu haben! Die Unfähigkeit nimmt zu — wie

---

[1]) Professor Dr. G. Sidler, mein verehrter Lehrer und Kollege.

[2]) Professor E. Hagenbach-Bischoff in Basel.

[3]) Bevorzugter Spaziergang Schläfli's.

«lange wird's noch dauern bis der *jüngste* Tag — die *Auflösung* «eintritt!

«Lese ich recht, proponiren Sie für die Ebene, welche die Rolle «des Pols übernimmt, den Namen *Polane* und nicht *Polare?*

«Oh Gedächtniss! Oh Schafskopf!»

4ter Brief[1]). März 17—19. Cima's vom 13. erst 17. 2 Uhr erhalten.

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

«Wenn z. B. eine Curve sammt ihrer Ebene sich um eine «ihrer Tangenten herumbewegt (auch eine Raumcurve mit dem «ganzen Raume sich um eine ihrer Tangenten, als feste Axe.) «Der andere Fall könnte so erzeugt werden, dass die Curve um die «Normalen in einem ihrer Wendepunkte oder in einem Selbstberüh-«rungspunkt herumbewegt wird. — Es sind nicht Übergangsfälle, «sondern Grenzfälle des hyperboloidischen Knotenpunkts, und daher «habe ich gefehlt, dass ich in der Reinschrift den ersten Fall *para-«boloidisch* genannt habe.

«Zerfällt der Knotenkegel in 2 Ebenen die *reell* oder *imaginär* «sind, so heisst jetzt der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*. Wie «schwer es mir wird einzusehen, dass dabei in jeder der beiden Ebenen «drei t liegen, habe ich Ihnen schon unterbreitet und erwarte *sichere* «Auskunft.

«Hat die f^3 einen kp, so wird sie vom Kk längs dreien Strahlen «s berührt; und daher hat f^3 die längs diesen s berührenden 3 Ebenen «zu *Dehn-Streifebene* (oder Voll- oder wie man sie heissen soll) Ebenen. «Hat f^3 vier Knotenpunkte, die ein Tetraeder T bestimmen, so berührt «jeder Knotenkegel längs der 3 anliegenden Kanten, und je zwei be-«rühren sich längs einer Kante und haben daher noch einen durch «die zwei andern kp gehenden ebenen Schnitt C^2. Die Ebene der sechs «C^2 gehen durch einen Punkt Q. Die 4 Knotenkegel sind einer f^2 «umschrieben, welche die 6 Kanten des T berührt; und die f^3 hat 6 «Dehnebenen, die sie längs der 6 Kanten von T berühren und die «Ecken zu Grenzpunkt haben. — Für die Fläche *dritter Klasse* ist alles «analog.

[1]) Zum Teil ein Concept zum Brief vom 18. März 1855 wenigstens bis zum Ausdruck «analytischen Gründen an».

4. «Braucht(man) *Schaar* nicht zu definiren? — Wenn Sie sagen «*eine* «*Doppelschaar von Flächen*» muss da nicht hinzugesetzt worden «gleichen «Grads» oder «gleicher Klasse»? oder liegt dies schon drin? Kann «man bei einer Doppelschaar Fläche «von drei successiven Flächen» «sprechen, da doch jede gleichsam von einer Schaar nächstfolgenden «umgeben ist?

5. «Da wir die Klasse der einer f^m doppeltumschriebenen Ab-«wickelbaren kennen, so muss auch der Grad ihrer Berührungscurve «R^x zu finden sein. Denn ist jene Klasse $= \mu$, so gehen durch jeden «P μ-Doppelebenen und daher schneidet die erste Polare f^{m-1} von P «die R^x in $2 \times \mu$ Punkten, so dass $(m - 1) \times x = 2\mu$, also «$x = \frac{2\mu}{m-1}$ ist.

«Bei zwei gegebenen Flächen f^m und f^n ist die ihnen gemeinsam «umschriebene Abwickelbare von der $m(m-1)^2 \times n(n-1)^{2\text{ten}}$ «Klasse; ihre B. C. M^μ und N^ν mit den Flächen werden also von

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

Schläfli an Steiner.

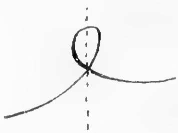
Lieber Freund!

«(18. März.) Ich fühle mich veranlasst, eine falsche Vorstellung «über die *Streifebene* wegzuräumen, die sich voriges Jahr in Bern uns «im Gespräch über diesen Gegenstand aufgedrungen hatte, als ob «nämlich ihr Berührungs- oder Streifkegelschnitt als *dreifacher* (!) «Bestandtheil ihres ganzen Schnitts mit der Basis zu zählen wäre. «Um die Sache zu entscheiden, ziehen wir in der Streifebene eine «beliebige Gerade und fragen uns, wie oft jeder der zwei Punkte «zählt, in denen sie den Streifkegelschnitt schneidet. Ist die Basis «von der nten Classe und rücksichtlich dieser möglichst wenig be-«schränkt, so muss die vom Grade $n(n-1)^2 - 2$ sein; die Gerade «schneidet also die Basis im Ganzen nur in soviel Punkten.

«Polarisiren wir nun zurück, so heisst die Frage: Wie viele «Berührungsebenen können an eine Basis nten Grades, die einen «Knotenpunkt hat, durch einen von diesen ausgehenden Strahl gelegt «werden? Die Analysis antwortet: Nur $n(n-1)^2 - 6$, deren Be-«rührungspunkte nicht mit dem Knotenpunkt zusammenfallen. Es «gehen also nur 4 Berührungsebenen verloren, nicht 6; denn die

Classe der Fläche ist nur n $(n-1)^2-2$. Diese 4 verlorenen Ebenen sind wohl in den zwei durch jenen Strahl an den Knotenkegel gelegten Umschreibungsebenen wieder zu finden, wenn jede doppelt gezählt wird. — Demnach schneidet die Streifebene einer Basis nter Classe dieselbe in dem *doppelt* zu zählenden Streifkegelschnitt und ausserdem noch in einer Curve vom Grade $n(n-1)^2-6$ und der Classe $n(n-1)-6$. Ist die Basis von dritter Classe, so besteht diese Curve nur aus den 6 ausgezeichneten Tangenten des Streifkegelschnitts.

«Gradesauffassung: Der aus dem Knotenpunkt einer Fläche dritten Grades dieser umschriebene Kegel besteht aus dem doppelt zu zählenden Knotenkegel und denjenigen 6 Ebenenbüscheln, in deren Axen sich je zwei entsprechende (also sich nicht schneidende) Strahlen des durch den Knotenpunkt gehenden Doppelsechsers vereinigen. — Mich dünkt, diese Ansicht sei auch durch geometrische Betrachtung zu rechtfertigen. Denken wir uns eine Curve mit Knotenpunkt, welche von einem durch diesen gehenden Strahl symmetrisch getheilt wird,



nehmen auf diesen Strahl nahe beim Knotenpunkt (auf der convexen Seite der Zweige) einen Punkt an und ziehen von da aus die 4 gewöhnlichen Tangenten, deren Berührungspunkte in der Nähe liegen. Indem wir jetzt die Figur um die Axe der Symmetrie herumdrehen, erhalten wir auch zugleich *zwei* umschriebene Kegel, die beim Zusammenfallen ihres Scheitels mit dem Knotenpunkt sich endlich im Knotenkegel vereinigen.

«(23. März.) Da ich fürchte, es möchte zu lange dauern, bis ich alle die *Streifebene* betreffenden Einzelheiten erledigt habe, so fange ich an, das sicher gewordene niederzuschreiben.

«1°. Die *gemeine Streifebene berührt* die Fläche nter Classe längs eines Kegelschnitts und zwar in 6 Intervallen abwechselnd von oben und von unten. Diese Intervalle sind durch die Berührungspunkte der 6 *ausgezeichneten Tangenten* getrennt, längs denen 6 Lappen der gemeinsamen Abwickelbaren des Kegelschnitts und der Basis die Streifebene berühren. Diese 6 t haben dieselbe Eigenschaft in Beziehung auf die der Basis längs ihrer Rückkehrlinie umschriebenen

«Abwickelbaren, und sind zugleich höchst wahrscheinlich Tangenten «dieser Rückkehrlinie. — Die Streifebene schneidet die Basis ausser- «dem in einer Curve Grades n (n — 1)^2 — 6 und Classe «n (n — 1) — 6.

«2^0. Die *Gerad-Streifebene* (mit reellem Punktpaar A, B) *osculirt* «die Basis längs der Streifgeraden A, B und schneidet sie ausserdem «in einer Curve Grades n (n — 1)^2 — 6 und Classe n (n — 1) — 6. «(Der Gerad der Fläche ist nämlich nur n (n — 1)^2 — 3). Denkt «man sich A B vorwärts gerichtet, und ist zwischen A und B der «Sinn der Wendung von links unten nach rechts hinauf, so ist er ausser- «halb von links oben nach rechts hinunter. Von den 6t gehen drei durch «A, drei durch B (sonst ihre Lage frei). Verbindet man je eine von «jenen mit einer von diesen, so erhält man ein Dreieck F G U (auf 6 «Arten; ich spreche aber nur von irgend einer aus diesen), so dass nun «A F, A G, A U; B F, B G, B U die sechs ausgezeichneten Strahlen «(Tangenten) sind. Man betrachte die Streifgerade A B als Transver- «sale des Dreiecks F G U, und nehme den zugeordneten Punkt F «(Schwerpunkt, wenn A B unendlich entfernt). Die *Classen-Kernfläche* «hat dann das Dreieck A B F zur *Dreipunkt-Streifebene* (dritter Classe). «Man zeichne nun eine Curve u dritten Grades, welche F zum Doppel- «punkt und die Seiten des Dreiecks F G U zu Wendungstangenten «hat, deren Punkte auf der Streifgeraden A B liegen und ziehe end- «lich aus A und B an die u die *acht gewöhnlichen Tangenten* τ. «(Diese werden immer dieselben Geraden sein, welches von den 6 «möglichen Dreiecken F G U man auch gewählt haben mag.) Nun, die «der Basis längs ihrer Rückkehrlinie umschriebene Abwickelbare sendet «8 Lappen hin, um die Streifebene längs den 8 soeben construirten «τ zu berühren. Wie die Rückkehrlinie in A und B selbst aussieht «und was sie da für Tangenten hat, wage ich noch nicht zu ent- «scheiden. Es wird unten (Kernflächen!) etwas kommen, das Sie «hieher beziehen können.

«3^0. Die *Punkt-Streifebene* (mit zwei vereinigten Punkten O) «hat 3 ausgezeichnete Punkte F, G, U (eine noch unklare Art von «Knotenpunkten), *berührt* die Fläche längs der Strahlen O F, O G, O U «und schneidet sie ausserdem in einer Curve Grades n (n — 1)^2 — 12 «und Classe n (n — 1) — 6; (denn der Grad der Fläche ist nur «n (n — 1)^2 — 6.) Man umschreibe dem Dreieck F G H einen «Kegelschnitt K harmonisch zum Streifpunkt O, (d. h. wenn O der «Schwerpunkt ist, so sind die Tangenten des Kegelschnitts in den

«Ecken parallel mit den Seiten). Die Classen-Kernfläche hat dann die «Streifebene zu einer solchen 4ter Classe, indem die Streifcurve aus K «und dem doppelten Punkte O besteht. Die der Basis längs ihrer «Rückkehrlinie umschriebene Abwickelbare *osculirt* die Streifebene «längs der von O aus an K gehenden zwei Tangenten und *berührt «sie zweilappig* längs jeder der Geraden O F, O G, O H; jede von «diesen (eigentlich ein t paar) ist Selbstberührungsstrahl der Ab- «wickelbaren.

«Sie sehen aus dem Bisherigen, dass ich die Kernfläche einer «Fläche nten *Grades* für den gemeinen, den Kanten- und den Plan- «knotenpunkt untersucht habe. Da bei der Classenauffassung manches «nicht deutlich vorgestellt werden kann, was für die Gradesauffassung «leicht ist, so suche ich das Vorige noch durch einige *vom Grad aus* «gemachte Bemerkungen zu ergänzen. Sie erinnern sich vielleicht «aus dem perhorrescirten analytischen Beweise für die *freie* Lage der «6 ausgezeichneten Strahlen des Knotenkegels, selbst wenn dieser «in ein Ebenenpaar übergeht, (den ich, unschuldig genug, in der «guten Absicht anbrachte, um Sie von der Richtigkeit meiner An- «schauung zu überzeugen), dass ich ausser dem Knotenkegel N noch «einen Kegel P dritten Grades mit gleichem Scheitel gebrauchte, um «die 6 ausgezeichneten Strahlen jenes N darzustellen. Nun dieser P «ist in allen drei Fällen vollkommen frei, hat aber an sich keine Be- «deutung; sondern wenn man zu N noch irgend eine durch den «Knotenpunkt gehende Ebene hinzunimmt, um einen Kegel dritten «Grades zu haben, der mit P einen Büschel bestimmt, so *darf* P durch «jeden Kegel dieses Büschels ersetzt werden. Ist N ächt, so sind in «diesem Büschel 15 Trieder; 6 wenn N ein Paar getrennter Ebenen «ist; endlich nur 1 Trieder, wenn N eine doppelte Ebene ist. Im «letzten Falle bekömmt das Trieder wesentliche Bedeutung; der Schnitt «einer Ebene desselben wird (im Unendlichkleinen betrachtet) von «der Selbstberührungstangente (in der Knotenebene) symmetrisch ge- «theilt, so dass die Krümmungshalbmesser der sich berührenden Zweige «der Schnittcurve gleich und entgegengesetzt sind: während jeder «andere durch denselben ausgezeichneten Strahl geführte ebene Schnitt «zwar auch noch den Knotenpunkt zum Selbstberührungspunkt hat, «aber auf allgemeine Weise. Ich schreibe nun diesem Trieder einen «Kegel zweiten Grades ein, so dass jeder Berührungsstrahl mit dem «entsprechenden ausgezeichneten Strahl der Knotenebene harmonisch «ist in Bezug auf die zwei betreffenden Kanten des Trieders. Dieser

«Kegel J möge die Knotenebene in den zwei Strahlen i schneiden. «Dann hat die *Kernfläche* hier einen Knotenpunkt 4^{ten} Grades, be-«stehend aus der doppelten Knotenebene und dem Kegel J; und ihr «Schnitt mit der Basis sendet 1. zwei Paare von Zweigen in den «Knotenpunkt, welche die Strahlen i zu Rückkehrtangenten haben, «aber den Kegel J auf gewöhnliche Weise berühren; 2. drei Paare «von Zweigen, welche die drei ausgezeichneten Strahlen (in denen «das Trieder die Knotenebene schneidet) zu Selbstberührungstangenten «haben, aber die Triederebenen auf gewöhnliche Weise berühren.

«Beim Kantenknotenpunkt will ich, was den Schnitt der Kern-«fläche und Basis betrifft, nicht das schon Gesagte zurück polarisiren; «es ist bei der Classenauffassung wohl deutlich genug ausgedrückt.

«Nun etwas, was für die Classenaufführung auch von Wichtig-«keit wäre, indem es die Stellen der Rückkehrlinie betrifft, wo ihre «Tangente zusammenfällt mit dem Strahl der längs ihr der Basis um-«schriebenen Abwickelbaren. Sie wissen, dass eine freie Fläche n^{ten} «Grades $2n(n-2)(11n-24)$ Stellen π hat, wo sie von der Be-«rührungsebene mit Selbstberührungspunkt geschnitten wird. Ich «habe nun analytisch sicher bewiesen, dass ein gemeiner Knotenpunkt «24 solche π verschlingt, ein Kantenkontenpunkt 36; für den Plan-«knotenpunkt ist mir die Discussion des verwickelten Systems von «Gleichungen noch nicht gelungen; aber, wenn man von der Fläche «3^{ten} Grades aus schliessen darf, so muss er 48 π verschlingen.

«Beim gemeinen Knotenpunkt bekömmt wohl jeder der 6 Curven-«zweige, welche die Kernfläche mit der Basis gemein hat, 4 solche «verschlungene π; aber beim *Kantenknotenpunkt* entsteht die wun-«derliche Frage, wie man die 36 π auf die 8 Curvenzweige ver-«theilen soll.

«Ich habe die Classengleichung einer Fläche 3^{ten} Grades mit «Planknotenpunkt (die also durch 15 gegebene Punkte bestimmt wird) «entwickelt und mittelst derselben eine klare Anschauung gewonnen, «wie eine Fläche 6^{ten} Grades und 3^{ter} Classe mit einer Punkt-Streif-«ebene in der Nachbarschaft des zweieinigen Streifpunkts aussieht. «Um schulmeisterlich zu reden, denke ich mir ein reguläres Tetraeder «FGHZ und fälle aus der Spitze Z auf die Basis FGH die senkrechte «ZO. Dann soll die Basis die Streifebene, O der zweieinige Streif-«punkt, und OF, OG, OH, die drei ausgezeichneten (zweieinigen) «Strahlen sein. In der Basis brauche ich Polarcoordinaten, wo der «Leitstrahl (radius vector) r von O ausgeht und mit dem ersten Strahl

«OF den Winkel $180^{\circ} + \varphi$ bildet; die dritte Coordinate z sei der «senkrechte Abstand eines Punkts der Fläche von der Basis. Be«deutet nun a eine constante Linie, und ist $\frac{r}{a}$ unendlich klein, so «hat die Fläche hier einen obern und einen untern Lappen (wenig«stens wenn man nur positive Werthe von r betrachtet), deren «Gleichungen

$$«2\,a^2 z = -\,r^3 \cos^2 \frac{3\,\varphi}{2} \quad \text{und} \quad 2\,a^2 z = +\,r^3 \sin^2 \frac{3\,\varphi}{2}$$

«sind. Die Streifebene wird also ringsum von der Fläche doppelt oscu«lirt, vom obern Lappen längs der positiven Strahlhälften OF, OG, OH «gestreift, vom untern längs den negativen Hälften. Ich muss aber «zwischen hinein etwas corrigiren. Nur die Basis FGH soll ein regu«läres Dreieck sein, die Wände FGZ, GHZ, FHZ soll darauf senkrecht «stehen und um a von O entfernt sein; der Scheitel Z liegt also un«endlich weit weg; er ist der einzige freie Triederknoten der Fläche, «welche die Geraden ZF, ZG, ZH enthält. Die Classen-Kernfläche «reducirt sich auf den doppelt zu zählenden Streifpunkt O und den «aus diesem Centrum durch F, G, H gelegten Kreis. Die ihr und der «Basis gemeinschaftliche Abwickelbare ist der letztern längs ihrer «Rückkehrlinie umschrieben, welche eigentlich vom 24sten Grade sein «sollte; ihr ächtes untheilbares Stück ist aber nur vom 6ten Grade; «es gehen nämlich durch eine Fläche dritten Grades und eine Um«drehungsfläche zweiten Grades, deren Gleichungen

$$«(6\,a - z)\; r \cos 3\,\varphi + 9\,a^2 + 4\,a\,z - z^2 = 0,$$

$$«9\,r^2 + 4\,z^2 - 24\,a\,z = 0$$

«sind. Der Verlust ist zum Theil zu erklären, durch die drei Geraden «OF, OG, OH, deren jede 4 mal zählt; aber das fehlende 6 weiss ich «nicht herauszubringen. Aus der Gradesauffassung durch Polari«sirung hinüber zu schliessen, müssten die vom Centrum O an den «Kreis gehenden zwei Tangenten eine Rolle spielen, indem jede die «Zahl 3 verschlänge; aber diese liegen gar nicht in der Basis, son«dern schneiden sie nur im Centrum 6-punktig. — So weit die Schul«meisterei. Verwandeln Sie nun perspectivisch nach Belieben, und Sie «haben den wahren Begriff von der Sache.

«Ich habe auch die Polarisirung der Fläche dritten Grades mit «Kantenknotenpunkt (also 9ter Classe) unternommen. Merkwürdiger «Weise gelingt sie mittelst der *Steiner-Hesse-Aronhold*'schen Theorie «der Wendepunkte der Curve dritten Grades. Aber die hiezu nöthigen «Entwicklungen werden noch längere Zeit in Anspruch nehmen.

«(25. März.) Um nichts zu unterlassen, was bei den classischen «Flächen mit Streifebene zur Veranschaulichung beitragen kann, habe «ich die Gegend des Punkts untersucht, wo der Streifkegelschnitt «von einer seiner 6 ausgezeichneten Tangenten t berührt wird, also «die Längsberührungs- oder Streifungsweise der Basis aus einer obern «(über der horizontal gedachten Streifebene) in eine untere übergeht. «Der Punkt ist ein sehr specialisirter Planknotenpunkt P der Basis, «wo nämlich alle drei ausgezeichneten Strahlen der Knotenebene mit «t zusammenfallen. Ein durch P frei geführter ebener Schnitt schnei«det die Basis mit Rückkehrpunkt; aber ein durch t geführter ebener «Schnitt sendet zwei horizontale Zweige durch P, welche beide hier «einen Wendepunkt haben. Will man die Gegend der Fläche um P «herum im unendlich kleinen in erster Annäherung ausdrücken, so «bedarf man hiezu einer Fläche 6$^{\text{ten}}$ Grades. Nehmen wir die t als «erste Axe, senkrecht darauf in der Streifebene eine zweite, und senk«recht auf diese Ebene eine dritte Axe des Coordinatensystems an, «und setzen dann die der ersten Axeparallele Abmessung als unend«lich klein erster Ordnung, so sind die zwei folgenden Abmessungen «oder Coordinaten resp. zweiter und dritter Ordnung. Hebt man «durch Dehnung der zweiten und dritten Axe das Missverhältniss auf, «so dass die Fläche nach allen Richtungen von gleicher Ordnung er«scheint, so zeigt sie eine Doppellinie, welche in P die Axe t und «die Streifebene berührt, und durch eine Art enger in P sich zu«spitzender Röhre entsteht, aus welchem Vorgang, wie ich glaube, Sie «sich das Umschlagen der Streifungsweise aus oben in unten werden «veranschaulichen können. Da hier 4 π zu Grunde gehen, so muss «ausser der Rückkehrlinie auch noch die Doppellinie hieher gelangen, «aber ihr beiderseitiges Verhalten vermag ich mir nicht recht klar «zu machen. Vielleicht später! Sie mögen hieraus entnehmen, welche «Arbeit es kosten wird, auch bei der Geradstreifebene die Gegend «um einen der zwei Streifpunkte aufzuklären.

«Ich glaube mit diesen Mittheilungen wenigstens einem Theile «Ihrer Wünsche zu entsprechen, und nehmen Sie es mir nicht übel, «dass ich nicht mit allem auf einmal fertig werden kann. Ich bin die «verflossene Woche mit Examen beschäftigt gewesen, und auch diese «noch werde ich es sein; dazu werden meine Vorlesungen bis Mai «fortdauern. Ihren ersten Brief werde ich noch, soweit es mir mög«lich ist, beantworten; nur werden Sie mir nicht zumuthen, dass ich «so schwierige Vorstellungen im ersten Anlauf zu durchdringen ver-

«möge. Ihren letzten Satz habe leider noch nicht geprüft. Unter-«brechen Sie die Correspondenz nicht zu lange.

«Vergessen Sie die Zusendung der Dissertationen nicht.

«*Polane* mit n habe ich mit Fleiss geschrieben, weil das Ding «dem *Pol* und nicht der Polare entsprechen soll.

«Ich sollte mich noch gegen eine Masse von Vorwürfen ver-«theidigen; aber der Raum fehlt dazu. Seien Sie herzlich gegrüsst «und halten mich immer für

«Ihren treuen Schüler

«Bern, den 25. März, Abends. *L. Schläfli.*»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(27. März.) Endlich versuche ich, auf Ihren werthen Brief vom «28. Jan. zu antworten. Sie werden wohl kaum eine Abschrift des-«selben haben; aber ich muss mich doch der Kürze wegen auf die Num-«mern desselben beziehen, um nicht Ihre eigenen Worte wiederholen «zu müssen. Es mag mir auch manchmal begegnen, dass ich Ihnen «dieselben Dinge zweimal schreibe, weil ich mich nicht daran erin-«nere, sie Ihnen schon geschrieben zu haben. Zur Sache!

«*Ad 4.* Stimme bei.

«*Ad 5.* An Ihrer Stelle liesse ich diese künstliche, nicht über-«zeugende Ableitung fahren. Wenn Sie einmal eine f^n dadurch, dass «Sie $\binom{n+2}{2}$ Punkte derselben in einer Ebene annehmen, gezwungen «haben, diese Ebene zu enthalten, so dünkt mich, seien Sie auf rein «anschaulichem Boden nicht befugt zu wissen, ob nun die Aufgabe «bestimmt oder unbestimmt oder unmöglich sei. Da ich keine Vor-«stellung davon habe, wie man eine algebraische Fläche anders defi-«niren kann als durch ihr Polynom, so dünkt mich hier das einzig «Natürliche, sich an die Zahl der Glieder des Polynoms zu halten; «diese liegt aber ganz klar vor als Zahl der Combinationen mit Wie-«derholung von 4 Elementen zu je n, also $\binom{n+3}{n} = \binom{n+3}{3}$; «folglich ist $\binom{n+3}{3} - 1$ die Zahl der Bedingungen, durch welche «die f^n bestimmt wird.

«*Ad 6.* Sie setzen die Zahl der Bedingungen, damit eine Fläche «in drei von den Graden α, β, γ zerfalle, doppelt an; sie ist bloss

$$«\frac{1}{2}\left\{\left(\sum\alpha+4\right)\sum\beta\gamma-\alpha\beta\gamma\right\}.$$

«Alle Flächen nten Grades, die durch eine Vollcurve $\alpha \times n^{\text{ten}}$ «Grades gehen, bilden eine $\binom{n-\alpha+3}{3}$ fache Schaar, nicht eine «$\left\{\binom{n-\alpha+3}{3}-2\right\}$ fache.

«*Ad 7.* Der von Ihnen bemerkte Widerspruch rührt nur daher, «dass Sie den Satz über nothwendige Punkte nicht vollständig aus- «sprechen. Er muss heissen: «Wenn die Zahl n von keiner der Zahlen «α, β übertroffen wird, und es soll eine C^n durch die $\alpha\beta$ Schnittpunkte «einer C^α und C^β gehen, so ist unter diesen *keiner* nothwendig, wenn «$n > \alpha+\beta-3$; aber $\binom{\alpha+\beta-n-1}{2}$, wenn $n < \alpha+\beta$ ist.» Für $\alpha=\beta$ «$=1$, $n=2$ giebt es daher *keinen* nothwendigen Punkt. — Der ähn- «liche Satz über Flächen heisst so:

«Wenn die Zahl n von keiner der Zahlen α, β, γ übertroffen «wird, und es soll eine f^n durch die $\alpha\beta\gamma$ Schnittpunkte einer f^α, f^β, «f^γ gelegt werden, so kann es unter diesen nothwendige geben. Um «deren Anzahl zu bestimmen, lasse man im Aggregat

$$«1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-n-1}-(1+x)^{\alpha+\beta-n-1}-(1+x)^{\alpha+\gamma-n-1}$$
$$-(1+x)^{\beta+\gamma-n-1}$$

«diejenigen Glieder weg, deren Exponenten *negativ* sind, und ent- «wickle den Rest nach den Potenzen von x, dann ist der Coefficient «von x^3 die gesuchte Anzahl.»

«Mich dünkt, ich habe Ihnen diesen Satz schon geschrieben. «Er ist eine nothwendige Folge aus der freilich noch unbewiesenen «einzigen Hypothese, auf der unsere ganze Raumcurventheorie etc. «beruht.

«*Ad 8.* Anfang; stimme bei. — Aber: mein Satz über die «Zahl der nothwendigen unter den nab Punkten, in denen eine f^n «eine Vollcurve (f^a, f^b) schneidet, ist nicht unbedingt so, wie Sie ihn «aussprechen, sondern: Diese Zahl ist $\frac{1}{2}$ ab $(a+b-4)+1$, wenn «$n > a+b-4$ ist; hingegen $\frac{1}{2}$ ab $(a+b-4)+1-\binom{a+b-n-1}{3}$.

«wenn $n < a+b$ ist. Der Binomialcoefficient ist nur dann abzuzie-«hen, wenn der Exponent $a+b-n-1$ positiv ist, was wiederum für «dessen Werthe 0, 1, 2 unnöthig wird, weil dann der Binomial-«coefficient verschwindet. Aber für einen negativen Werth von «$a+b-n-1$ verschwindet der Binomialcoefficient nicht, und die For-«mel ist falsch, wenn sie ihn dann noch enthält.

«*Ad 10.* Muss vor Nr. 9 beantwortet werden. — Es sei ϱ «eine Raumcurve g^{ten} Grades und k^{ter} Classe; durch diese mögen «drei Flächen M, N, P resp. m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Grades gehen. Dann «schneiden sich M, N ausser ϱ noch in einer R Raumcurve $(mn-g)^{ten}$ «Grades. Um zu wissen, wie viele nicht in der ϱ liegende Punkte «diese R mit der Fläche P gemein hat, müssen wir zuvor die Zahl $\varkappa$ «der gemeinschaftlichen Punkte von R und ϱ kennen. Denken wir uns «nun eine beliebige Gerade l gegeben, so wird der Ort eines Punkts «X, dessen auf M, N bezüglichen Polarebenen mit l einen Punkt gemein «haben, eine Fläche $(m+n-2)^{ten}$ Grades sein und 1^0 die ϱ in allen «k Punkten schneiden, in denen sie von einer durch l gelegten Ebene «berührt wird, 2^0 durch alle $\varkappa$ Punkte, in denen ϱ und R sich begeg-«nen, also die Flächen M, N sich berühren. Folglich ist

$$«k+\varkappa=g\,(m+n-2).$$

Es war aber $p\,(mn-g)-\varkappa$ die Zahl der freien Punkte, in denen «die Curve R von der Fläche P geschnitten wird, mit andern Worten, «die Zahl der freien Schnittpunkte der Flächen M, N, P; diese ist also

$$mnp+k-g\,(m+n+p-2).$$

«Da für eine Vollcurve $\varrho^{a\times b}$ die Classe $k = ab\,(a+b-2)$ «ist, so ist Ihre Formel trotz des Fragezeichens richtig. Im Allgemeinen «muss ich noch bemerken, dass wenn die ϱ gewöhnliche Doppel-«punkte hat, in der Zahl k jeder derselben mit dem Betrage 2 mit-«gezählt werden muss; oder, wenn k die reine Classe darstellt, so «muss man zu der vorliegenden Formel noch die doppelte Anzahl der «Doppelpunkte der ϱ addiren. — Nebenbei gesagt: wenn Sie die «Zahl der Punkte, in denen eine *Abwickelbare* von einer Geraden ge-«schnitten wird, den *Grad* derselben nennen, so müssen Sie conse-«quenter Weise unter *Classe* einer Raumcurve dasselbe verstehen «wie ich, nämlich die Zahl ihrer Berührungsebenen, welche durch «eine Gerade gehen. Die Zahl der Schmiegungsebenen hingegen, «welche durch einen gegebenen Punkt gehen, ist im Allgemeinen ein «hohes Ding, das wegen der Schwierigkeiten, denen seine Betrach-«tung unterliegt, einen so vertraulichen Namen, wie *Classe*, nicht «verdient; es implicirt ja schon die Abgeleiteten dritter Ordnung.

«*Ad 9.* Wenn ein Flächengebüsch n^{ten} Grades eine Grundcurve «R enthält, deren Grad g, die Classe k ist, und welche unter den gn «Schnittpunkten irgend einer f^n Θ nothwendige zählt, so beträgt die «Anzahl der im Freien liegenden nothwendigen Grundpunkte des «Gebüschs

$$n^3 + 3 - \binom{n+3}{3} - \left\{ 2\,g\,(n-1) + \Theta - k - 1 \right\},$$

«also für eine Vollcurve $a \times b^{ten}$ Grades

$$n^3 + 3 - \binom{n+3}{3} - \frac{1}{2}\,a\,b\,(4\,n - a - b - 4),$$

«wenn $n > a + b - 4$ ist; aber um $\binom{a+b-n-1}{3}$ mehr, wenn «$n < a + b$ ist.

«Ich erinnere übrigens daran, dass die Zahl Θ durch g, k, n «noch nicht bestimmt ist; ich habe früher Beispiele geliefert ver-«schiedener Arten von Raumcurven desselben Grades und derselben «Classe, welche sich durch die Zahl der nothwendigen Punkte unter-«schieden.

«(28. März) *Ad 11.* Dass ein ebenes Curvennetz n^{ten} Grades «nicht mehr als $n^2 - n + 1$ Grundpunkte haben kann, vermag ich «nicht einzusehen; obgleich ich leicht deren bilden kann, welche «$n^2 - \alpha\,n + \alpha^2$ Grundpunkte haben. — *Absatz I.* Stimme vollständig «bei. Ich verwundere mich nur, dass Sie nicht gleich die Sache etwas «allgemeiner gefasst haben. Sie konnten in ähnlicher Weise eine «Theilcurve Grades $n^2 - n\,\alpha + \alpha^2$ construiren von der Eigenschaft, «dass alle durchgelegten Flächen n^{ten} Grades bloss ein Gebüsch bilden, «und dass je zwei derselben sich in einer Vollcurve $(n - \alpha) \times \alpha^{ten}$ «Grades schneiden, und dass irgend drei keinen *freien* Schnittpunkt «haben. Bei der Zahl der nothwendigen Punkte Ihrer $R^{n^2 - n + 1}$ können «Sie das Fragzeichen weglassen.

«*Absatz II.* Bei dem aus Pol p seiner Pampolare umschriebenen «Kegel K würde ich die Berührungsebene in p ganz weglassen; der «Theilkegel t^x hat den Grad $3\,n\,(n - 2)$ und geht durch die Theil-«curve des $(3\,(n-1)^2 - 1)^{ten}$ Grades, in der die Pampolare von ihrer «ersten Polare aus p geschnitten wird. Was bezeichnen Sie mit der «Kernfläche P^x des $N\,(p^{2n-1})$? Wohl dasselbe, was Sie sonst mit «dem Q bezeichneten, den Ort der Knotenpunkte aller Pampolaren; «dann ist ja der Grad $x = 8\,(n - 1)$! Ist diese gemeint, so kann «sie die Grundcurve des Büschels nicht zur Doppellinie haben, sondern «wenigstens zur dreifachen.

«Ich muss hier abbrechen, da der schwieriger werdende Rest «mich noch längere Zeit beschäftigen könnte, und andere dringende «Arbeiten mich abrufen. In der Meinung, dass Sie dieses Wenige viel-«leicht schon benutzen können, und um Sie nicht zu lange warten zu «lassen, sende ich Ihnen diese Zeilen schon jetzt.

«In der Hoffnung, Sie werden mich immer für Ihren treuen Freund «halten, grüsse ich Sie herzlich Ihr

«Bern, den 28. März, Abends spät. *L. Schläfli.*»

Steiner an Schläfli. 6. IV. 1855.

«*Treuer Freund!*

«Indem ich Ihnen für die Correctionen und die aufopfernden ge-«waltigen Anstrengungen herzlich danke, muss ich daneben bedauern, «dass Sie stellenweise meinem Gedächtniss zu viel zumutheten. Weiss «ich ja oft nicht, was ich vor 3 Tagen geschrieben habe — geschweige «denn vor 3 Monaten. Jener erste Brief ist die Quint-Essenz aus «einem confusen Brouillion von 9 Bogen; aber was darin ad 4., ad «11. Absatz I., etc. steht, weiss ich nicht; desgleichen ad 10. «*Die* «*Formel mit Fragezeichen.*» Leider weiss ich auch nicht mehr genau «wie ich Ihren zweiten Satz bewiesen habe. Kurz ich bin weit «dümmer, als Sie wähnen. Daher geht die Redaction erbärmlich lang-«sam, nur des Vormittags und da noch matt — ohne Kraft, ohne Ge-«dächtniss und ohne Phantasie; am Abend fast ganz stumpf.

«Neue Fragen fallen mir im Augenblick nicht ein, nur folgendes «altes Spiel mit Büscheln.

«1. Bekanntlich schneidet der $B(C^2)$ jede Gerade G in einem «Punkt-System (Involution). Ein guter Oekonom verfolgt nun alle «speziellen Fälle, die zahlreich sind. Hier nur der: Wenn die 4 «Grundpunkte in *einen* P zusammenfallen, wird dann aus $B(C^2)$ noth-«wendig ein Strahl-System? oder wenn der $B(C^2)$ durch zwei «spezielle Glieder die Doppelgerade $(A)^2$ und $(B)^2$ sind, bestimmt «wird, folgt dann nothwendig, dass jedes andere Glied C^2 aus einem «Paar Geraden $C + C_1$ besteht, die zu jenen (als den Asymptoten) «harmonisch sind?

«2. Ebenso schneidet nun $B(C^3)$ jede G in einem Dreipunkt-«System, welches 4 Asymptotentenpunkte hat. Ist dasselbe durch zwei

«Trippel von Punkten bestimmt? und welche Relation findet zwischen «drei Trippeln statt (entsprechend der Involution in 1.)? — Die Spe«zialisirung der zwei Glieder, durch welche B (C^3) bestimmt wird, «gewährt noch mehr Fälle, als vorhin (1.), und jeder fast giebt ein «Sätzchen. Einst war dieser Gedanke dem *Schmützer* (Aronhold) will«kommen und half ihm zu Etwas. Jene Glieder lässt man aus C^2 und «aus einfachen, doppelten und dreifachen G bestehen. Für Sie das: «Wenn die 9 Grundpunkte sich in Einen P vereinen, geht dann B (C^3) «in ein Dreistrahlsystem um P über? mit wie viel Asymptoten (4?) «und welcher metrischen Relation? so dass, wenn umgekehrt zwei «Trippel durch P gehende Strahlen A, A_1, A_2 und B, B_1, B_2 als be«stimmende Glieder aus $A + (A_1)^2$ und $B + (B_1)^2$ oder aus 3-fachen «Geraden $(A)^3$ und $(B)^3$ bestehen? Ihr Mächtiger wird dies leicht ent«wurzeln, selbst für B (C^n).

«3. Ist $n = \alpha\beta$ und wird der B (C^n) insbesondere durch zwei «Glieder $(A^\alpha)^\beta$ und $(B^\beta)^\alpha$ bestimmt, so ist von deren $\alpha\beta$ Schnitten «P jeder nur ein Doppelpunkt (?) jedes andern Gliedes C^n. Nun bilden «jene 2 Glieder in jedem P ein unendlich kleines Gitter mit $\alpha\beta$ «Schnitten p, und durch diese müssen die zwei Zweige jeder C^n gehen «— davon berührt der eine die einfache A^α α-punktig der andern «(einfache) B^β β-punktig: aber nun weiss ich nicht, wie viel punktig «sich die entsprechenden Zweige zweier Glieder C^n daselbst berühren!?.

«Ist $n = 2\alpha$ und man bestimmt den B (C^n) durch zwei Glieder «$(A^\alpha)^2$ und $(B^\alpha)^2$, so ist jeder der α^2 Schnitte P ein Doppelpunkt «von jedem Glied C^n; aber muss dabei jedes Glied nothwendig in C^α «$+ C_1^\alpha$ zerfallen ? und sind diese Paare so bestimmt, dass sie zu «A^α und B^α harmonisch sind? oder waltet eine höhere Relation ob, so «dass es ausser A^α und B^α noch mehr Asymptoten giebt?

«Wie stehts, wenn $n = 3\alpha$ und B (C^n) durch $(A^\alpha)^3$ und $(B^\alpha)^3$ «bestimmt wird? etc.

«Bei den Flächen kann man ähnlicherweise schulmeistern, aber «ich drang noch weniger durch. Hier nur ein Fall. Wird der B(f^n) «durch n Ebenen A und n Ebenen B bestimmt, die sämmtlich durch «einen Punkt P gehen, so müssen wohl alle Glieder f^n Kegel sein; «der Schnitt einer durch P gehenden Ebene E ist ein n-Strahl«System, in welches ein B (C^n) übergeht, wenn die n^2 Grundpunkte «sich in P vereinen; daraus ist klar, wie das System durch zwei «n tupel bestimmt ist. Machen Sie es, ich verstehe doch nichts davon, «es ist mir wie im Traum.

«Es kam mir der Gedanke, statt einer Abhandlung, lieber eine «kleine selbstständige Schrift zu verfassen, darin vor den Flächen zu«erst alle meine Witze über ebene Curven aufzutischen; dazu müsste «ich aber eben so schriftstellerisch vorwärts kommen und arbeiten «können, wie Sie. Wenn wir nur gemeinschaftlich arbeiten könnten, «so dass Sie immer auf der Stelle oder doch am selben Tag meiner «Unbehülflichkeit im Ausdruck Worte verliehen — dann würde es «schnell gehen. Freilich blieb die letztjährige Probe hinter meiner «Erwartung zurück. Wenn durch Friedensschluss die Zeiten günstiger «werden, so dürfte ein Verleger zu finden und ein Honorar zu er«halten sein, durch welches Sie fast so knapp, wie von der Vorsichts«kasse entschädigt würden. Zudem könnten Sie den Gegenstand ana«lytisch ordnen, mit weitern Zuthaten versehen und darauf beim «*selben* oder einem andern Verleger herausgeben. Ein Buch hat «immer mehr Gewicht und macht mehr bekannt, als einzelne zer«streute Abhandlungen.

«Ob ich auf Jahre fortbleiben kann, weiss ich nicht, da der «Urlaub, ohne den König, nur für ein Semester bewilligt werden kann; «im Herbst würde die Verlängerung hoffentlich gewährt werden, ob «aber übers Jahr weiter — wer weiss das! Zumal wenn indessen «keine Arbeit zu Stande käme. Desshalb bin ich auch in Verlegen«heit, ob ich meine Wohnung aufgeben, oder unnütz jährlich 600 Fr. «bezahlen soll. Welche Curen ich machen werde, weiss ich nicht; «der Arzt wird im Attest von *Teplitz*, Gastei und Pfeffers sprechen. «Sollte ich Paris sehen und es günstig finden, d. h. *Liouville* etc. da «treffen, so müssen Sie nachkommen, das Honorar in spe muss die «Kosten decken.

«Da Sie mit Arbeiten überhäuft und nur glücklich sind, wenn «Sie recht überladen: so möchte ich bitten, mit einigen kurzen Wor«ten das im Nachfolgenden verlangte Attest zu verfassen, was mir un«möglich ist. Dasselbe kann deutsch oder französisch sein. Es kann «etwa gesagt werden: die mir von ihm bekannten Arbeiten in *Crelle's* «und *Liouville's* Journal zeugten von mathematischem Genie (ich habe «wenig davon gelesen), die englischen verstände ich leider nicht. — «Er kann uns später auch nützlich sein.

«*Monsieur!*

«Je prends la liberté de vous adresser cette lettre — «je viens de m'offrir comme candidat pour une des Exa-

«minerships in Mathematics for civil Appointments in India. Cela me serait un grand honneur et je serais on «ne peut plus obligé si vous voudriez bien me donner «une attestation par rapport à mon caractère de géométre «et ma capacité pour remplir cet office.

«Je suis Monsieur

«votre très humble serviteur

2 Stone Buildgs Londres *A. Cayley.*

28 mars 1855.

«Unermüdlicher Signore baldige Antwort.

«Herzlichen Gruss

«von Ihrem dankbaren

«Berlin, 6ten April 1855. *J. Steiner.*

«NB. Die Dissertationen habe ich nicht vergessen, aber noch «nicht zusammengesucht, soll nächstens geschehen.»

Berliner Poststation 6. April. Bern erhalten den 9. April, Mittags[1]).

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(8. April.) Es thut mir leid, inzwischen keine Nachricht von «Ihnen erhalten zu haben. Sind Sie vielleicht mir etwas gram, weil «ich mit der Beantwortung Ihres Briefes vom 28. Januar so lange zu «thun habe? Ich kann Sie aber versichern, dass mir diese Dinge «immer wie eine schwere Last auf dem Herzen gelegen haben. Hier «erhalten Sie endlich den vollständigen Rest meiner Antworten.

«*Ad 4.* Sie können zu der geradlinigen Fläche nten Grades «(also auch nter Classe) noch bemerken, dass sie nothwendig eine «*Doppellinie* (welches Grades?) hat, die von jeder erzeugenden Geraden «in 1— 2 Punkten getroffen wird; Aehnliches gilt von ihrer doppelt «umschriebenen Abwickelbaren.

«*Ad 11.* Meine Versuche, Ihren Satz, «dass drei unter sich «unabhängige ebene Curven nten Grades nicht mehr als $n^2 - n + 1$ «Punkte gemein haben können,» zu beweisen, sind vergeblich gewesen. Es würde mich sehr freuen, wenn Sie mir Ihren Beweis «mittheilten. Können Sie vielleicht auch drei verschiedene C^n durch «$n^2 - n$ gemeinschaftliche Punkte legen, welche nicht auf einer

[1]) Notiz von L. Schläfli.

«C^{n-1} liegen? — Sie sollten übrigens hier nicht zwei Fälle unter-«scheiden, da das Netz der Pampolaren, schon als sehr spezieller Fall «im ersten allgemeinen Falle enthalten ist.

«*Ad 11, I.* Wenn Sie Ihr Gebüsch nten Grades in der Weise «verallgemeinern, dass je zwei Flächen desselben sich in einer Voll-«curve $(n - \alpha) \times \alpha^{\text{ten}}$ Grades und überdiess in der festen Theil-«curve (Grundcurve) R vom Grade $n^2 - \alpha n + \alpha^2$ schneiden, so «werden die Flächen $(n - \alpha)^{\text{ten}}$ und α^{ten} Grades, welche jene Vollcurve «bestimmen, entsprechende Glieder zweier quasi perspektivischer Ge-«büsche sein. Für $n - \alpha > \alpha$ ist das niedrigere Gebüsch unver-«änderlich; das höhere hingegen kann natürlich auf mannigfaltige Arten «mittelst des niedern umgewandelt werden.

«Ist nun l der Grad irgend einer die R schneidenden Fläche, «so sind unter den $l\,(n^2 - n\alpha + \alpha^2)$ Schnittpunkte

$$(n-1)\,(n^2-n-1) - \frac{1}{2}\,\alpha\,(n-\alpha)\,(3n-4) - ?$$

$$\binom{2n-\alpha-1-1}{3} - ?\binom{n+\alpha-1-0}{3}$$

«nothwendige. Die Fragezeichen vor den zwei Binomialcoefficienten sollen «bedeuten, dass dieselben wegzulassen sind, sobald ihre oberen Zahlen «negativ sind, d. h. wenn der Exponent des Binoms negativ ausfällt.

«Sie haben bei Ihrem Gebüsch von einer einzigen Gebüschfläche «gesprochen, die ihren Knotenpunkt auf der R^{n^2-n+1} in jenem «Grundpunkt g_0 des auxiliären Ebenengebüsches hat, und bemerken «dazu, dass der betreffende Knotenkegel von der Schmiegungsebene «der R längs ihrer Tangente berührt wird. Dasselbe gilt aber über-«haupt für jeden Punkt der R, weil das andere auxiliäre Gebüsch «$(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades seinen $(n - 1)^3$ Grundpunkten auf der R freien «Lauf lässt. Ich will aber diese Sache sogleich allgemein für meine «$R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$ aussprechen.

«Wenn ein Gebüsch von Flächen nten Grades eine Grundcurve «rten Grades hat, so kann man im Allgemeinen nur zeigen, dass seine «Knotencurve $6\,(n - 1)^2$ten Grades $r\,(3n - 4)$ Punkte mit jener «Grundcurve gemein hat. Aber bei meinem erwähnten speziellen «Gebüsch gehört die ganze $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$ der Knotencurve an; und «in jedem Punkte der R berührt die Schmiegungsebene derselben den «Knotenkegel der betreffenden Gebüschfläche längs der Tangente «der R.

«*Ad 11, II.* Wegen des von Ihnen betrachteten Netzes aller

«Pampolaren eines Flächenbüschels muss ich zum voraus einen allge-
«meinen Satz aussprechen.

«Wenn ein Netz algebraischer Flächen eine Grundcurve hat, «mag diese nun eine Vollcurve oder Theilcurve sein, so ist die-«selbe eine *dreifache Linie* der Knotenfläche des Netzes.»

«Ich habe diesen Satz streng bewiesen; die vielfache Linie ist «im Allgemeinen sicher nicht höher. Ausser diesem kann ich von «der Knotenfläche $(Q^{8\,(n-1)})$ Ihres Pampolarennetzes nichts Eigen-«thümliches aussagen.

«Sie nehmen einen Punkt X der R als Pol der Pampolare an, «und dann bekömmt diese in X einen Knotenkegel dritten Grades K. «Nun, die Strahlen dieses K sind die Doppelpunktstangenten der hier «geführten ebenen Berührungsschnitte aller Flächen des ursprüng-«lichen Büschels. Fällt die eine dieser Doppelpunktstangenten mit der «Tangente t der R zusammen, so wird die betreffende Büschelfläche «von der Schmiegungsebene berührt.

«Rücken Sie jetzt den Pol A der Pampolare auf der t fort, so «hat sie in X einen unveränderlichen Knotenkegel *zweiten* Grades, «nämlich den Polarkegel der Tangente t (XA) in Bezug auf jenen K.

«Wenn der Pol der Pampolare an eine Ebene gebannt ist, so zählt «die Grundcurve R als *doppelter* Bestandtheil der Knotencurve des Pam-«polarengebüsches. Der freie Rest dieser Knotencurve ist also vom «Grade $24\,(n-1)^2 - 2\,n^2$, geht aber *nicht* durch die $4\,(n-1)^3$ «Knotenpunkte π des Büschels. — Was Sie hingegen von den (freien) «Grundpunkten dieses Pampolarengebüsches sagen, ist richtig.

«Sie lassen die *Po*lkernfläche P einer Fläche des urprünglichen «Büschels diese in einer R_0 schneiden und betrachten die Ortsfläche «dieser R_0; hier kann ich nicht folgen. Wenn ich auch den Kernpol «P in die Grundcurve R rücke, so giebt es wenigstens *keine* Büschel-«fläche, für die dann P mit dem Knotenpunkt X seiner auf jene be-«zogenen ersten Polare zusammenfiele; so lange aber P und X geschieden «sind, ist es mir unmöglich, etwas auszusagen. Daher ist mir auch die «Bedeutung der Rückkehrtangenten t_0 unverständlich.

«Es ist ein Flächenbüschel n^{ten} Grades gegeben. Bei jeder Fläche «nehmen Sie die osculirend umschriebene Abwickelbare und fragen «nun, wie oft diese nun einen gegebenen Punkt passire. Die Antwort ist

$$4\,n^3 - 19\,n^2 + 25\,n - 8$$

«mal, also für $n = 3$ z. B. 4 mal.

«Wenn durch die Grundcurve R des vorigen Büschels eine feste «f^m geht, so wird sie auf der R von *jeder* Hälfte des Büschels in $(m-n)\,n^2$ «Punkten berührt. Die Anzahl der einzelnen Büschelflächen, welche «sie überdiess noch ausserhalb berühren, ist

$$(m+2)\,(m-2)^2+2\,(m-4)\,(n-1)\,(m-n-1)$$
$$=(m-4)\,(m^2+2\,m\,n-2\,n^2)+6\,m.$$

«Die Formel gilt aber nur für $m > n$; für $m = n$ wird sie un-«sinnig, was Sie aber nicht als Argument gegen ihre Richtigkeit an-«sehen dürfen. Setzen Sie z. B. $n = 1$, $m = 3$, so bekommen Sie «die richtige Zahl 5.

«*Ad 12.* Sie wissen es gewiss ganz gut, dass die Grundcurve «eines Flächenbüschels in zwei Theilcurven oder eine Theilcurve und «eine Vollcurve zerfallen kann, und dass es in diesem Falle eine reine «Unmöglichkeit ist, dass ein Glied des Büschels zerfalle.

«Wenn ich auch in einem Flächenbüschel zwei zerfallene Glieder «annehme, so ist doch das Zerfallen eines dritten Gliedes eine so «furchtbare Grausamkeit, dass der Schreck meinen analytischen Ver-«stand lähmt. Sie sagen in Ihrem Briefe kein Wort über das leitende «Princip, nach dem Sie diese gewiss höchst speciellen Büschel con-«struiren.

«Wenn in einem Gebüsch eine Fläche zerfällt, so versteht es sich «ja von selbst, dass die Schnittcurve ihrer Bestandtheile der Knoten-«curve des Gebüschs angehört.

«Die Frage nach der höchsten Grundcurve eines $G(f^n)$ ist mir «zu schwer.

«Wenn beim $G(f^2)$ drei Glieder Ebenenpaare sind, so vermag ich «die Nothwendigkeit eines vierten solchen durchaus nicht einzusehen.

«Dass ein $N(f^n)$ *nothwendig* zerfallene Glieder enthalten sollte, «ist für $n > 2$ entschieden zu verneinen. Ebenso wenig kann von «Doppellinien die Rede sein.

«Der Satz über die drei in einem Netz enthaltenen Büschel, deren «keine zwei ein Glied gemein haben, ist hübsch und analytisch leicht «zu verificiren.

«Ich möchte Sie ersuchen, künftig bei Flächennetzen die Pol-«kernfläche P und die Knotenkernfläche (oder: Knotenfläche) Q deutlich «zu unterscheiden. Jene wäre der Ort des Punkts, in welchem die «Polarebenen eines Knotens Q in Bezug auf sämmtliche Netzflächen sich «schneiden. Ueberdiess wäre dann noch eine dritte Fläche zu be-«trachten, die ich *reciproke Fläche* genannt habe, nämlich der Ort des «Punkts, welcher die 4 arbiträren Constanten, deren drei Verhältnisse «die Netzfläche bestimmen, zu Coordinaten hat. Beim Pampolarennetz «ist diese reciproke Fläche der Ort derjenigen Pole A, deren Pampo-«laren einen Knotenpunkt X (oder Q) haben. Beim Netze der ersten «Polaren einer gegebenen Basis fällt sie hingegen mit der Polkern-«fläche P zusammen.

«Darf ich nun hoffen, Sie werden mit diesen freilich sparsamen «Resultaten einer mühsamen Arbeit zufrieden sein und mich bald mit «einer Antwort erfreuen? Oder soll morgen die quälende Ungewiss-«heit mein Stück Krautkuchen vergällen? — Mit freundschaftlichem «Gruss Ihr treuer und dankbarer Schüler

«Bern, den 8. April 1855. *L. Schläfli.*»

«Abends 11 Uhr geschlossen.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(11. April.) Ihren werthen Brief vom 6ten habe am 9ten Mit-«tags erhalten, nachdem ich am Morgen meinen auf die Post gegeben «hatte. Ich beeile mich auf die darin enthaltenen Fragen zu ant-«worten.

«1. Wenn die 4 Grundpunkte eines Büschels von Kegelschnitten «sich in einen Punkt vereinigen, so sind nur zwei Fälle möglich. «A. Der Büschel ist bestimmt durch einen Kegelschnitt und eine «doppelt gezählte Tangente desselben; alle Curven haben also hier «eine vierpunktige Berührung und schneiden eine freie Gerade wie «gewöhnlich.

«B. Der Büschel ist bestimmt durch zwei Doppelgeraden, besteht «also aus lauter Geradenpaaren, die ein involutorisches Strahlensystem «bilden, dessen Asymptoten jene Doppelgeraden sind.

«2. Für das Punktdreiersystem einer Geraden ist es ganz gleich-«gültig, ob es von einem schneidenden Curvenbüschel dritten Grades, «oder von dessen Ausartung in ein System von je drei Strahlen, die «alle von den in einen vereinigten 9 Grundpunkten ausgehen, hervor-«gebracht werde. Indess kann die Vereinigung auch geschehen, in-«dem man den Büschel bestimmt durch eine freie Curve und eine «dreifach gezählte Wendungstangente derselben; er besteht dann aus

«Curven, die sich alle hier 9-punktig berühren. Das Punktsystem auf «der freien Transversale ist natürlich durch zwei beliebig zu setzende «Dreier vollständig bestimmt. Die metrischen Relationen zwischen den «Punkten dreier Dreier sind zwar algebraisch sehr einfach; aber ich «weiss noch keinen passenden geometrischen Ausdruck dafür. Da«gegen wird Sie interessiren, was ich vor der Hand über die gegen«seitige Lage derjenigen 4 Punktdreier AAA′, BBB′, CCC′, DDD′, in «deren jedem je zwei Punkte zusammenfallen, angeben kann. Es «giebt zwei (nicht zum System gehörende) Punkte M, M′, für welche «alle 4 Paare AB, A′B′, CD, C′D′, harmonisch sind, ebenso zwei Punkte «N, N′ für die Paare AC, A′C′ BD, B′D′ und endlich zwei Asymp«toten-Punkte P, P′ für die Paare AD, A′D′, BC, B′C′; und von den «Punktpaaren MM′, NN′, PP′ ist jedes in Beziehung auf jedes har«monisch. Hieraus ist sofort klar, dass, wenn alle 4 Berührungs«punkte des Büschels A, B, C, D reell sind, dann von den drei letzten «Paaren zwei reell und eines conjugirt-imaginär ist. Wird ein Punkt «aller Dreier dadurch festgebannt, dass man die Transversale durch «einen Grundpunkt sendet, so bleiben natürlich ausserdem nur invo«lutorische Punktpaare übrig. Ein dem dritten Grad eigenthümlicher «spezieller Zustand des Punktsystems tritt nur dann ein, wenn die «Transversale an einer oder an zwei Stellen osculirt wird; im letzten «Falle ist aus jedem Dreier immer nur ein Punkt reell, und die Lage «jedes der zwei übrigen gegen den vorigen und jene zwei dreifachen «Punkte ist durch ein perspectivisches Doppelverhältniss bestimmt, «welches der einen oder andern imaginären Cubikwurzel aus 1 «gleich ist.

«3. Wenn $n = \alpha\beta$ und α, β keinen gemeinschaftlichen Faktor «haben, so sei ein Büschel bestimmt durch eine β fache C^α und eine «α fache C^β. Wenn $\alpha < \beta$, so ist jeder Grundpunkt ein spezieller «α facher Punkt der freien Büschelcurve, insofern diese hier von «einer frei durchgehenden Geraden in α vereinigten Punkten ge«schnitten wird; aber mit der einfachen C^β hat sie hier mehr, näm«lich β vereinigte Punkte gemein; und irgend zwei Büschelcurven «haben natürlich hier $\alpha\beta$ Punkte gemein. Die α Zweige einer und «derselben Büschelcurve sehen so aus, als hätten sie hier alle die «Tangente der C^β gemein: aber die Krümmung ist eine ungewöhn«liche und hängt von der Natur des Bruchs $\frac{\beta}{\alpha}$ ab; der *Taylor*'sche «Satz ist en défaut. — Wenn hingegen α, β den grössten gemein-

«schaftlichen Faktor ε haben, so zerfällt jede Büschelcurve in ε ver-
«schiedene Curven $\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}^{\text{ten}}$ Grades.

«Wenn Sie den Büschel durch zwei Paare vereinigter Curven «bestimmen, so zerfällt Ihnen jedes andere Glied desselben nothwen- «dig in zwei verschiedene Curven $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades; und wenn Sie in «einem Grundpunkte die Tangenten ziehen, so haben Sie ein involu- «torisches Strahlensystem. — Wenn n einen Factor α hat, und Sie «setzen zwei Curven p, q vom $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grade, nehmen jede α fach und «bestimmen damit einen Büschel, so zerfällt jedes andere Glied in «α verschiedene Curven $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades; die Tangenten in einem Grund- «punkt bilden ein höchst spezielles Strahlensystem α^{ten} Grades. Für «ein ungerades α ist immer eine der Curven, aus denen das Glied «besteht, reell, alle übrigen sind imaginär; für ein gerades α sind «zwei Curven reell, die $\alpha-2$ übrigen imaginär. In einem Grundpunkt «bilden die Tangenten der zwei reellen Punkte ein Strahlensystem «zweiten Grades (eine Involution). — Ich möchte Ihnen aber ab- «rathen, solche Dinge zu publiziren, denn es dreht sich hier alles nur «um die elementarsten Begriffe von der Gleichung $x^{\alpha} - 1 = 0$ herum. «Zudem müssten Sie die Sache etwas allgemeiner angreifen, z. B. aus «dem Büschel (p, q) irgend α verschiedene Curven herausnehmen und «daraus eine Curve A vom n^{ten} Grade zusammensetzen, ferner ebenso «eine Curve B, und nun einen Büschel (A, B) bilden; jedes Glied «dieses wird dann wieder in α verschiedene Curven $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades «zerfallen; aber $2(\alpha-1)$ Male wird es begegnen, dass zwei von den «α Componenten eines Gliedes sich vereinigen; auch kann es jetzt «geschehen, dass alle α Componenten zugleich reell sind. Die Tan- «genten in einem Grundpunkt bilden ein Strahlensystem α^{ten} Grades; «und das Punktsystem auf einer Transversalen ist zwar vom n^{ten} Grade, «aber so spezialisirt, dass es in α Systeme $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades zerfällt.

«Wenn Sie durch einen und denselben Punkt O zuerst n Ebenen «legen, deren Gesammtheit A heissen soll, dann wieder so eine Ge- «sammtheit B, so ist der Büschel (A, B) ein ungeheurer spezialisirter «Kegelbüschel. Hier ist weiter nichts zu machen; denn die Sache «spielt eigentlich nicht im Raume, sondern ist nur so, wie wenn Sie «auf einer beliebigen Transversalebene einen Curvenbüschel durch «zwei n seite bestimmen.

«Wenn ich es wagen darf, zu Ihren Entschliessungen mit meinem «Rath etwas beizutragen, so möchte ich Sie wirklich bewegen, gegen «die Akademie Ihre Pflicht zu erfüllen. Ich hätte es in Ihrem In-«teresse sehr gerne gesehen, wenn Sie die projectirte Abhandlung «bereits im Dezember vorgelegt hätten; und es thut mir leid, wenn «die Unvollständigkeit meiner Verifikationen an dem Aufschub Schuld «gewesen ist. Wenn Sie nun einen nahen Termin vor sich haben, «so thun Sie das Mögliche, um die Abhandlung bis dahin vorzulegen, «drängen Sie darin alles auf die einfachen und schönen Resultate zu-«sammen, die uns nun seit langem schon gut bekannt sind, und «lassen complicirtere, für Laien unfassliche Sachen bei Seite. In der «Einleitung lassen Sie den Begriff der algebraischen Fläche auf die «natürlichste Weise von der Welt sich selbst entwickeln. Zwei Auf-«fassungen: als Doppelschaar von Punkten, und als solche von Ebenen. «In jenem Sinn ist die Fläche frei, wenn jeder sehr kleine Theil als «Ebene (verlängert: Berührungsebene) annähernd sich darstellt; in «diesem, wenn alle unendlich wenig von einander abweichenden «Ebenen annähernd durch einen einzigen Punkt (Berührungspunkt) «gehen, oder vervollständigt als Ebenengebüsch gefasst werden dürfen. «Dann wird gezeigt, wie über dem zweiten Grade beide Freiheits-«begriffe sich nothwendig widersprechen.

«I. *Gradesauffassung.* Die Berührungsebene schneidet die Fläche «in einer C^n mit Doppelpunkt; die zwei Tangenten desselben sind «entweder reell oder conjugirt-imaginär. Daher theilt sich die Fläche «in zwei Regionen: eine hyperboloidische (Krümmungsmaass negativ) «und eine ellipsoidische (Krümmungsmaass positiv), geschieden durch «die $R^{4n(n-2)}$, über deren Construction mittelst der Kernfläche später. «Längs der R *cylindrische* Natur; Berührungsschnitt mit Rückkehrpunkt «(als natürlicher Uebergang zwischen beiden Arten von Doppelpunkt); «also *osculirende Abwickelbare*; erster Widerspruch gegen den Klassen-«freiheitsbegriff, da die Osculation in der Drehbarkeit der Ebene einen «Halt verursacht. — Die Berührungsebene hat doppelte Beweglichkeit, «ein zweiter Doppelpunkt ihres Schnitts ist nur eine Bedingung: also «eine Schaar Doppelberührungsebenen; *doppelt umschriebene Abwickel-«bare* und darunter eine bestimmte Zahl dreifach berührender Ebenen;

«zweiter Widerspruch; denn successive Ebenen können sich in mehr «als einem Punkte schneiden. Die Berührungscurve S der doppelt «umschriebenen Abwickelbaren berührt die R in einer gewissen An- «zahl Punkte π und schneidet sie in noch andern Punkten ϱ. Der «Berührungsebeneschnitt in π hat einen Selbstberührungspunkt, dessen «Tangente diejenige der R. Die Berührungsebene in ϱ schneidet hier «mit Rückkehrpunkt und anderswo noch mit Doppelpunkt. Hiemit «sind alle singulären Zustände, in welche die Berührungsebene einer «nach Grad freien Fläche kommen kann, erschöpft.

II. *Klassenauffassung.* Rückkehrlinie; Doppellinie; triedrische «Knoten; Stellen, wo die Rückkehrlinie und Doppellinie so zusammen- «treffen, dass die zwei Berührungsebenen der letztern sich mit der- «jenigen der erstern vereinigen; Knoten, wo die Rückkehrlinie frei «von einem Lappen der Fläche geschnitten wird. — Jetzt über ein- «fachen Zwang bei Gradesfreiheit; gewöhnlicher oder gemeiner Knoten- «punkt; doppelter Zwang: Kantenknotenpunkt; vierfacher Zwang: «Planknotenpunkt. Dann für Klassenfreiheit: gemeine Streifebene; «Strahlstreifebene (Zweipunktstreifebene, Osculationsstreifebene); Ein- «punktstreifebene. — Nur erste Polaren (bloss für Gradesauffassung); «ihr Verhalten zu Knotenpunkten; Knotenfläche derselben (Kernfläche «Q); entsprechende Polfläche (Polkernfläche P). — Begriff des Büschels, «Gebüschs, Netzes; nothwendige Punkte. — Pampolaren. Jetzt in «specie die Fläche dritten Grades. Voran jene Berührungscurve S, «dessen Grad schon zum Voraus für f^n bestimmt ist, muss in lauter «Gerade zerfallen, weil eine C^n die zwei Doppelpunkte hat, nothwen- «dig in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Darauf mannig- «faltige Constructionen der f^3 gebaut, welche das Vorhandensein der «Geraden schon voraussetzen. Für das übrige reiche Material weiss «ich selbst nicht Rath. Nur thäte es mir leid, wenn Sie die mühsam «errungenen 5 Gattungen der freien f^3 wegliessen: 1. 27 Strahlen, «45 Ebenen reell; 2. 15 Strahlen, 15 Ebenen reell (gegründet auf «ein imaginäres Gitter, wo je zwei entsprechende [sich nicht schnei- «dende] Strahlen conjugirt sind; 3. 7 Strahlen, 5 Ebenen reell «(nämlich 1 Strahl, durch den 3 reelle Dreiseite und 2 imaginäre, «deren Ebenen reell sind, gehen); 4. 3 Strahlen, 13 Ebenen reell «(ein einziges reelles Dreiseit, und durch jede Seite noch 4 reelle «Ebenen); 5. 3 reelle Strahlen und 7 reelle Ebenen (ein reelles Drei- «seit, und durch jede Seite nur noch zwei reelle Ebenen). — Machen «Sie von meinen Sachen freien Gebrauch und denken Sie mehr an «die sachgemässe Abrundung des Stoffs, als dass Sie ängstlich fragen. «wo er hergekommen ist. Seien Sie nicht ein Baumeister, der ein «Haus nicht zusammenfügen will, weil er nicht alle Steine dazu selbst «gehauen hat. — Doch es ist wohl Zeit, dass ich mit dieser langen «Predigt aufhöre. In den Abhandlungen der Berlinerakademie ist «die Mathematik so spärlich vertreten. Es wäre gut, wenn wieder «einmal ein tüchtiger Aufsatz hineinkäme und sich keck neben hotten-«tottische Sprachstudien, *Ehrenberg*'sches unsichtbares Leben und Be-«richte über alte Mährchen hinstellte.

«Wenn Sie der Akademie ihren Tribut entrichtet haben, so «bleibt es uns ja noch unbenommen, einen ausführlichen Tractat über «die alg. Flächen en compagnie zu schreiben. Nur bauen Sie nicht «auf den Friedensschluss.

«Bis Ende Sept. muss ich mit der Liquidationsrechnung der vor-«sichtigen Gesellschaft pro 1854 zu Ende sein. Wie das mit dem «Abstecher nach Paris zusammengeht, weiss ich nicht; er müsste sich «etwa auf 14 Tage beschränken; am sichersten im Anfang Oct., wenn «man *Liouville* in den Ferien besuchen kann.

«*Attest.* «Ich rechne es mir zur Ehre an, einem so wackern «Geometer, wie Herrn C.[1]), ein Zeugniss ausstellen zu können. Seine «mir zugänglichen Arbeiten in den Journalen von *Crelle* und *Liouville* «beurkunden eine grosse Gewandtheit in Handhabung der Analysis «für geometrische Zwecke und eine vollkommene Bekanntschaft mit «den gegenwärtigen Methoden der Geometrie, zu deren Förderung «Herr C. selbst wesentlich beigetragen hat. Seine in englischen Jour-«nalen erschienenen Arbeiten kann ich leider der Sprache wegen nicht «lesen; aber was mir davon durch Mittheilung Anderer bekannt ge-«worden ist, sind zum Theil geniale Entdeckungen, die in der Ge-«schichte der Geometrie Epoche machen. Nach meiner Ueberzeugung «ist demnach dieser ehrenwerthe Mann wohl befähigt, um als Exami-«nator in der Mathematik für bürgerliche Anstellungen in Indien ge-«wählt zu werden.»

«Was wollen Sie aber zu seinen übereilten Behauptungen, z. B. «in Betreff seiner wirklich genialen Theorie der Hyperdéterminants, «und dazu sagen, dass im Dublin Math. Journal ganze Seiten mit fal-«schen Formeln angefüllt sind?

«Sie haben zu meiner Beschreibung der Streifebene kein Wort

---

[1]) Cayley.

«gesagt; ich glaube doch nun die gröbsten Schwierigkeiten für die «Anschauung, namentlich bei der Strahlstreifebene, die uns voriges «Jahr während unseres Umgangs so sehr zu schaffen machte, beseitigt «zu haben. Ich habe wirklich hier etwas überwunden, was ich an«fangs meine Kräfte zu übersteigen glaubte.

«Die Ernennungen an das eidg. Polytechnikum werden Ihnen «bekannt geworden sein. Ich habe mir von Anfang gedacht, dass «*Raabe* darauf aspiriren werde.

«Warten Sie nicht zu lange mit der Correspondenz, und lassen «Sie mich es wissen, wann Sie wieder vorzutragen haben. Schreiben «Sie mir jedenfalls noch, bevor Sie Berlin verlassen.

«Sie herzlich grüssend

«Bern, den 12. Apr. 1855.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

«*Treuer Freund!*

«(13. April.) 1. Die alte Windhundsnase freut sich, dem Gewalts«Rüssel auch einmal helfen zu können. Das $N(C^n)$ mit n^2-n+1 «Grundpunkten wird unter andern einfach dadurch bestimmt, dass «durch $n-1$ Punkte, die in einer Geraden liegen, zwei beliebige C^n «gelegt werden; ihre übrigen Schnitte sind alsdann jene Grundpunkte. «Dass umgekehrt bei einem Netz mit n^2-n+1 Grundpunkten je zwei «Glieder sich noch in $n-1$ Punkten auf einer Geraden schneiden, «folgt leicht. Sei $n=4$. Gehen drei Curven A^4, B^4 und C^4 durch 13p «und wird A^4 nebstdem von B^4 in q, r, s und von C^4 in t, u, v ge«schnitten, und man zieht die Geraden $qr=C$, $tu=B$, so sind B^4+B «und C^4+C zwei Curven 5^{ten} Grads, B^5 und C^5, welche die A^4 in den«selben 17 Punkten, nämlich $13p+q+r+t+u$, schneiden, folglich «müssen auch beide durch dieselben 3 nothwendigen Punkte gehen, «daher muss C durch s, B durch v gehen, und B und C müssen ihren «Schnitt, etwa a, auf der A^4 haben. Alle Geraden, welche die A^4 auf «diese Weise mit sämmtlichen übrigen Curven bestimmt, gehen durch «denselben Punkt a, den ich bei einer andern Betrachtung den *Leibpol* «der A^4 genannt habe; die Betrachtung ist mir im Augenblick nicht «gegenwärtig; aber die gesammten Leibpole spielten dabei eine Rolle, «auch eine der beiden Kerncurven des Netzes, welche die 13 p zu dp «hat. — Für n beliebig verfährt man ebenso; die Geraden $qr=C$ und «$tu=B$ bilden mit C^n und B^n Curven C^{n+1} und B^{n+1}, welche die A^n «in denselben (n^2-n+1) $p+q+r+t+u=n^2-n+5$ Punkten schnei-«den; jede hat mit A^n noch $n(n+1)-(n^2-n+5)=2n-5$ Schnitte, «was für $n>4$ weniger als die Zahl der nothwendigen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ «ist, nämlich um $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ weniger, also müssen umsomehr «C^{n+1} und B^{n+1} die $2n-5$ Schnitte als *nothwendige* gemein haben, und «zwar sind sie Schnitte der Geraden C und B mit A^n. — Jetzt disku-«tiren Sie und ergänzen was oberflächlich ist. Danach kann $G(C^n)$ «nicht mehr als n^2-n+1 Grundpunkte haben.

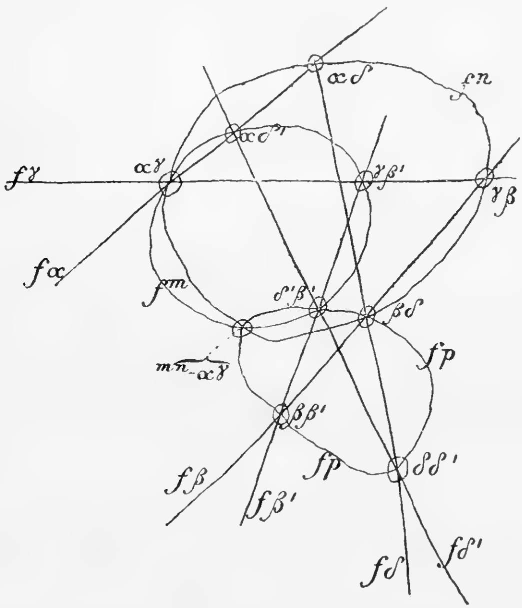
«Daraus folgt nun auch (mittels ebener Schnitte), dass wenn ein «$N(f^n)$ eine partielle Grundc. R^{n^2-n+1} hat, dann jedes Glied A^n von «jedem andern noch in einer ebenen Curve C^{n-1} geschnitten wird, «deren Ebene stets durch eine in A^n liegende Gerade a geht. Die «Grundcurve kann auch nicht höher sein.

«2. Wenn $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, und $\alpha\geqq\gamma\geqq\delta\geqq\beta$ und man bestimmt durch «die Glieder $f^\alpha+f^\beta$ und $f^\gamma+f^\delta$ ein $B(f^n)$, so dass dessen Grundc. «$R^{n^2}=R^{\alpha\gamma}+R^{\alpha\gamma}+R^{\beta\gamma}+R^{\beta\delta}$, so ist für ein freies Glied f^n des Büschels «die niedrigste Curve $R^{\beta\delta}$ (so wie auch $R^{\beta\gamma}$), im Allgemeinen, wohl «eine einzige ihrer Art, d. h. f^n enthält keine andere ihrer Art, und «sie ist wohl auch überhaupt die niedrigste Vollcurve auf f^n; dagegen «finden von den höheren Curven $R^{\alpha\gamma}$ und $R^{\alpha\beta}$ Schaaren statt. Wann «findet nur eine einzige $R^{\beta\delta}$ statt? und wann eine bestimmte Anzahl? «wie z. B. 27, wenn $n=3$ und $\beta=\delta=1$ ist.

«Legt man durch die gegebene Vollc. $(f^\alpha f^\gamma)=R^{\alpha\gamma}$ eine beliebige «f^n, so schneidet sie f^α und f^γ noch in neuen Curven $R^{\alpha(m-\gamma)=\alpha\delta}$ «und $R^{\gamma\beta}$, durch welche neue (mehr als bestimmte) Flächen f^δ «und f^β gehen und deren Schnitt $(f^\delta f^\beta)=R^{\beta\gamma}$ *nothwendig* auf der «f^n liegt. Sei ferner $m=\alpha+\beta_1=\gamma+\delta_1$ und $\gamma\geqq\delta_1\geqq\beta_1$, und man legt «durch dieselbe $R^{\alpha\gamma}$ eine beliebige f^m, so schneidet sie f^α und f^γ eben-«so in neuen Curven $R^{\alpha\delta_1}$ und $R^{\gamma\beta_1}$, durch welche neue Flächen f^{δ_1} «und f^{β_1} bestimmt sind, deren Schnitt $(f^{\delta_1} f^{\beta_1})=R^{\beta_1\delta_1}$ nothwendig in «f^m fällt; und f^n und f^m schneiden sich noch in einer neuen Curve «$R^{mn-\alpha\gamma}$, *welche mit* $R^{\beta\delta}$ *und* $R^{\beta_1\delta_1}$ *zusammen in einer Fläche* f^p «$(p=m+n-\alpha-\gamma=\beta+\delta_1=\beta_1+\delta)$ *liegt*. Aber noch mehr: *auf diese* «*Fläche* f^p *fällt auch der Schnitt* $(f^\beta f^{\beta_1})=R^{\beta\beta_1}$, *sowie der Schnitt*

«$(f^{\delta}\ f^{\delta_1}) = R^{\delta\delta_1}$. [Beweis: die drei Flächen $f^n + f^{\delta}$, $f^m + f^{\delta_1}$, $f^p + f^{\alpha}$, «sind von gleichem Grad und haben $R^{\alpha\gamma} + R^{\alpha\delta_1} + R^{\beta_1\delta_1} + R^{mn-\alpha\gamma} + R^{\alpha\delta}$ «$+ B^{\beta\delta}$ gemein, und daher müssen sie auch noch $R^{\delta\delta_1}$ gemein haben, «d. h. diese muss auf f^p liegen.] Ferner. Während $R^{\alpha\gamma}$, f^{α} sowie f^m, «f^n fest bleiben, kann sich f^{α} unendlichfach ändern, und dann ändern «sich auch f^{δ} und f^{δ_1}; aber diese gehen stets durch die festen Curven «$R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ und ihr Schnitt $R^{\delta\delta_1}$ bewegt sich auf der festen Fläche «f^p, so dass also f^p eine vielfache Schaar Curven $R^{\delta\delta_1}$ enthält, oder «durch zwei quasi projektivische Gebüsche G (f^{δ}) und G (f^{δ_1}) um die «festen partiellen Grundcurven $R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ erzeugt wird. — Was folgt «noch weiter daraus? Wenn eine blinde Sau eine Eichel findet, so «weiss sie dieselbe zu fressen — ich nicht recht. Machen Sie weitere «Verse daraus, wenn's geht. (Für m=n wird die Sache interessant, «f^p wird wie ein einfaches Hyperboloid, etc.)

«Zur Anschauung, wenn Sie solche nöthig haben.



«3. Wenn in n Ebenen in jeder eine Curve n^{ten} Grads gegeben, «und wenn je zwei Curven auf der Kante ihrer Ebenen sich in n «Punkten schneiden, *so sind die n Curven zusammen die Grundcurve* «R^{n^2} *eines Büschels B* (f^n). Versteht sich dieser Satz analytisch von «selbst? Synthetisch habe ich ihn bewiesen. Umgekehrt ist klar, dass «durch n Ebenen und durch eine f^n ein B (f^n) bestimmt und $R^{n^2} =$ «n C^n ist.

«Lässt man eine C^n weg, so bestimmen die $n-1$ übrigen ein «G (f^n) (oder N (f^n)?), von dessen Gliedern sich je zwei in noch einer «C^n schneiden.

«4. Aus alter Zeit. Spezielle Flächen f^n, die projectivisch er-«zeugt werden. Werden B (f^α) und B (f_β) projectivisch bezogen, so «erzeugen sie eine $f^{\alpha+\beta=n}$, welche durch die Grundcurven R^{α^2} und «R_{β^2} geht, eine einfache S ($R^{\alpha\beta}$) und, wofern $\alpha > \beta$, eine SS (R^{α^2}) [oder «nur S (R^{α^2})?], aber im Allgemeinen nur die einzige R_{β^2} enthält. Was «spielt weiter? — Wenn $\alpha = \beta = \frac{1}{2}n$, so sind dabei drei Nüancen zu «unterscheiden, nämlich

I. «die B (f^α) und B ($f_{\beta=\alpha}$) haben kein gemeinschaftliches Glied «sind in *allgemein schiefer Lage;* oder

II. «sie haben ein gemeinschaftliches Glied $f^\alpha{}_2$, welchem be-«ziehlich zwei andere $f_1{}^\alpha$ und $f_1{}^\beta$ entsprechen, sind noch in «*beschränkter schiefer Lage;* oder

III. «sie haben ein gemeinschaftliches Glied $f_2{}^\alpha$, welches *sich selbst* «*entspricht* und sind in *perspectivischer Lage.*

«Bei (I.) ist f^n wie das Hyperboloid beschaffen, sie enthält 2 «Curvenschaaren α^2 Grads, S ($R^{\alpha\,2}$, $R_{\beta\,2}$) und S ($R^{\alpha\beta}$), in welche eine «Schaar-Schaar von Flächen f^α und f_β wechselweise einhacken, oder «es finden zwei Schaaren von Büscheln statt, S [B (f^α), B (f_β)] und «S [B (f^α f_β)], von denen je zwei aus *gleicher* Schaar allgemein «projectivisch sind; je zwei aus verschiedenen Schaaren dagegen wohl «ein gemeinschaftliches Glied haben, aber nicht projectivisch bezogen «sind?

«Bei (II.) wird f^n von den Gliedern $f_1{}^\alpha$ und $f_{1\beta}$ (bei dem $f_2{}^\alpha$ ent-«sprechen) beziehlich in den Grundcurven $R^{\alpha\,2}$ und $R_{\beta\,2}$ der gegebenen «Büschel berührt; die zwei Curvenschaaren S (R^{α^2}, R_{β^2}) und S ($R^{\alpha\beta}$) «fliessen in einander, in jeder wird f^n von einem Gliede $f_1{}^\alpha$ (oder «$f_{1\beta}$) berührt, so dass f^n für diese Schaar S ($f_1{}^\alpha$, $f_{1\beta}$) die *Umschrei-«bungsfläche* ist; (aber wie kann man diese Schaar für sich be-«stimmen?).

«Bei (III.) zerfällt die f^n in $f_2{}^\alpha$ und in einen *perspectivischen «Durchschnitt* $= f^{\frac{1}{2}n}$, in welchem die S ($R^{\alpha\beta}$) liegen, und deren ge-«meinsames Glied aller Büschel B (f^α f_β) ist. — Sonst noch was?

«Mit der kurzen Abfertigung der Flächenbüschel Ad 12 bin ich «nicht so sehr zufrieden, denn gerade darüber hoffte ich viel von «Ihrem Witz, weil ich im Moment wähnte, Sie könnten auch das «Unmögliche möglich machen; nun soll ich glauben, es sei nicht so. «Sie verlangen mein leitendes Prinzip zu wissen: Windhundsnase, «unmittelbare Anschauung, Formenlehre. Es sollte gezeigt werden, «dass die angegebenen Fälle (die ich als möglich anschaute) in der «That möglich sind, wenn die Grade der Theilflächen, so wie die «Grade der Theile, in welche ihre Schnittcurven zerfallen, von ge- «wisser Grösse sind. Z. B. wird verlangt, es soll der durch $f^\alpha + f^\beta$ «und $f^\gamma + f^\delta$ besimmte $B(f^n)$ noch ein drittes Glied $f^\varepsilon + f^\varphi$ ent- «halten (wo $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = n$), ohne dass die Voll- «curven $R^{\alpha\gamma}$, $R^{\alpha\delta}$, $R^{\beta\gamma}$, $R^{\beta\delta}$ (aus denen die R^{n^2} besteht) selbst in «weitere Theile zerfallen, so ist der Fall nur möglich, wenn $\alpha = \beta =$ «$\gamma = \delta = \varepsilon = \varphi$ ist. Wird dagegen gestattet (oder verlangt), dass jede «der genannten vier Vollcurven in zwei Theile zerfalle, etwa in «$R^{\alpha\gamma-u} + R^u$, $R^{\alpha\delta-x} + R^x$, $R^{\alpha\gamma-y} + R^y$, $R^{\alpha\delta-z} + R^z$, ohne dass «die Flächen f^α, f^β, f^δ, f^γ selbst auch zerfallen, so ist die Frage, «ob das dritte Glied $f^\varepsilon + f^\varphi$ auch nur dann möglich sei, wenn $\alpha = \gamma = \varepsilon$ «und $u = x = y = z$ und dazu noch $x = \frac{1}{2}\alpha^2$? Für $n = 4$ sind z. B. «leicht 3 Paar Flächen zweiten Grads $f^\alpha + f^\beta$, $f^\gamma + f^\delta$, $f^\varepsilon + f^\varphi$ «($\alpha = \gamma = \varepsilon = 2$) anzuschauen, die sich in 8 Kegelschnitten C^2 schneiden, «welche die Grundcurve R^{16} des $B(f^4)$ bilden. Erlaubt man, dass «jede der vier Vollcurven der Glieder $f^\alpha + f^\beta$ und $f^\gamma + f^\delta$ in drei «Theile zerfallen darf, so schien mir, es müssen noch zwei der glei- «chen Glieder möglich sein $f^\varepsilon + f^\varphi$ und $f^\eta + f^\lambda$, und es ist die «Frage, wie sich dabei die Grade (α, γ, . . . λ) der Theilflächen und «die Grade der 12 Curven (aus denen die genannten 4 oder die R^{n^2} «bestehen) zu einander verhalten. U. s. w. — Ein tappen. Es ist wie «die Entdeckung von besondern Polyedern, regelmässigen und halb- «regelmässigen.

«Dass, wenn $n = \mu\alpha$, dann ein $B(f^n)$ mit $\mu + 1$ Gliedern «von der Form $f^{(\mu-1)\alpha} + f^\alpha$ möglich ist, dessen R^{n^2} aus einer R^{α^2} «und $\mu + 1$ Curven $R^{(\mu-1)\alpha^2}$ besteht, ist von mir angeschaut und «wird von Signore nicht bestritten — sondern bewiesen werden. «Durch μ Glieder ist das letzte nothwendig.

«Mit tiefstem Bedauern Ihnen das schöne Stück Krautkuchen «hiedurch zu vergällen — grüsst Sie

«Ihr dankbarer schrecklich aufgeblähter

«15. April 55, Abends. *J. Steiner.*

«NB. Setzen Sie fortan auf meine Adresse «Kronenstrasse 55», «dann erhalte ich die Briefe schneller, auf der Post schreibt man es «immer erst darauf, weil die Briefträger ihre Tour stets wechseln.

«(16ten April.) Das Trödeln hilft; heut Morgen 8 Uhr erhielt «ich Ihren Brief, wofür meinen besten Dank.

«In diesem Jahr komme ich in der Akademie nicht an die «Ramme, weder im Plenum noch in der Klasse; indessen wäre das «kein Hinderniss, wenn die Abhandlung fertig wäre, — davon bin «ich aber weiter entfernt, als vor einem Jahr. Die Streifebenen (wo-«rauf Sie *mit Recht* stolz sind) und Knotenpunkte sind *sehr schön* ins «Reine geschrieben — aber falsch, — und nun soll es geändert wer-«den, was für mich besonders schwer ist, von je her.

«Vor Juni werde ich kaum von hier abreisen, wo soll ich hin, «da Sie wieder an der verfluchten Vorsichtskasse zu fressen haben «um $\frac{1}{3}$ Löhnung? nach Paris? ist auch nicht viel zu machen. — Im «October ist *Liouville* noch in Toul, man müsste ihn da besuchen; «die Curse beginnen glaube erst Ende Octoder oder Anfang November.

«Nicht wahr wenn f^3 nur zwei Knotenpunkte p und q hat, so «berühren sich die Knotenkegel p^2 und q^2 schon längs der Geraden «pq und für die längs diese berührende Streifebene reducirt sich der «Schnitt auf die dreifache pq, oder diese zählt für 3 *Cayley*'sche G. Os-«culirt die Streifebene dabei die f^3?»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Ihren werthen Brief vom 10. April habe am 14ten erhalten und «freue mich, daraus Ihr Wohlsein zu vernehmen. Indem ich sogleich «anfange, Ihre Fragen zu beantworten, möchte ich zuerst einige Namen «und Definitionen Ihrem Urtheil vorlegen. Eine ebene Curve hat einen «*Selbstberührungspunkt* (eine *Autapse*), wenn zwei Zweige derselben «sich auf gewöhnliche Weise berühren; er erniedrigt die Classe um «4 und verschlingt 12 Wendepunkte. Eine Fläche hat einen *Horn-«punkt*, wenn jede frei durchgehende Ebene die Fläche mit *Doppel-«punkt* schneidet, und alle mit *Rückkehrpunkt* schneidenden Ebenen «einen freien Kegel zweiten Grades umhüllen; unter diesen Ebenen «können immerhin einige bestimmte mit *Autapse* schneiden. Wenn «aber insbesondere die mit *Rückkehrpunkt* schneidenden Ebenen alle «dieselbe *Gerade* gemein haben, so heisse der singuläre Punkt *Kanten-«punkt*, und die Gerade seine *Kante*; es gehen dann zwei Ebenen «durch diese Kante, welche die Fläche mit *dreifachem Punkte* schneiden; «sind diese imaginär, so hat hier die Fläche eine fadendünne Stelle. «Schneidet endlich jede durch den Punkt gehende Ebene die Fläche «mit *Rückkehrpunkt*, so liegen alle Rückkehrtangenten in einer Ebene «welche selbst die Fläche mit *dreifachem Punkte* schneidet  ; «wenn alle drei Tangenten des dreifachen Punkts reell sind, so treffen «hier drei platte Spitzen der Fläche zusammen, und jeder liegt eine «entsprechende Lücke gegenüber; darf man ihn wohl *Dreispitzpunkt* «und die Ebene, welche die Fläche eigentlich zweimal mit dreifachem «Punkte schneidet, dessen *Platte*? — Wenn eine algebraische Curve «nie als vollständiger Durchschnitt zweier Flächen dargestellt werden «kann, so nenne ich sie *Untercurve*, im Gegentheil *Vollcurve*; wenn «aus dieser oder jener keine Curve niedrigern Grades herausgenommen «werden kann, so heise sie *untheilbar*.

«Verlangt man die Punkte, in denen eine Fläche F^m von einem «$B(f^n)$ berührt wird, so sind diese identisch mit den Durchschnitts-«punkten der F und einer gewissen Untercurve $\{3(n-1)^2 + 2(m-1)$ «$(n-1) + (m-1)^2\}$ ten Grades, des Orts eines Pols, dessen auf F be-«zügliche Polarebene durch die Axe des auf B(f) bezüglichen Polar-«ebenenbüschels geht. Hat F einen *Hornpunkt*, einen *Kantenpunkt*, «einen *Dreispitzpunkt*, so geht die Untercurve durch resp. 1° mit freier «Tangente, 2° die Kante berührend, 3° mit Doppelpunkt, dessen Ebene «die Platte ist; also zählt der singuläre Punkt resp. für 2, 3, 6 Lö-«sungen der Aufgabe. — Hat F eine *Doppellinie*, so zerfällt jene Unter-«curve: 1° in diese Doppellinie, einfach gezählt, 2° in eine untheilbare «Untercurve, welche die Doppellinie in allen (u. nur in diesen) Punkten «schneidet, wo sie von B(f) berührt wird, wobei jeder dieser Punkte «für zwei Lösungen der Aufgabe zählt, und endlich ausserdem die F «in den übrigen Punkten, wo B(f) auf gewöhnliche Weise berührt. — «Zerfällt F in m Ebenen, so sind vorerst aus der vollständigen Unter-«curve die $\frac{m(m-1)}{2}$ Durchschnittsgeraden wegzulassen, die übrige «untheilbare Untercurve ist dann nur vom $\{3(n-1)^2 + 2(m-1)$

«$(n-1) + \left.\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right\}$ten Grade und geht frei durch jeden der «$\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$ Durchschnittspunkte (also je 3 Lösungen der Auf«gabe; denn hier ist mehr als Hornpunkt!), schneidet ausserdem jede «Gerade noch in den $2(n-1)$ Punkten, wo sie von $B(f)$ berührt wird «(je 2 Lösungen, für die Gerade im Ganzen $4(n-1)$) und endlich «ausserdem jede Ebene in den $3(n-1)^2$ Punkten, in denen sie allein «von $B(f)$ berührt wird. — Wenn eine Fläche aus $B(f)$ in eine Doppel«ebene von $(e)^2$ und eine g^{n-2} zerfällt, so wird auch jene die Aufgabe «lösende Untercurve theilbar, 1° in eine völlig unbestimmte, der e an«gehörige Curve $(m + 3n - 5)^{ten}$ Grades, 2° in die ebene Curve «$(e, g)^{n-2}$, 3° in eine untheilbare Untercurve vom Grade

$$3n^2 - 10n + g + (2n - 3)(m - 1) + (m - 1)^2.$$

«Für $n = 2$ reducirt sich diese Zahl auf $m^2 - m + 1$. Wenn also «ein $B(f^2)$ eine Doppelebene enthält, so berührt er eine F^m nur in «$m(m^2 - m + 1)$ Punkten auf gewöhnliche Weise.

«Von einem gegebenen Punkt A gehen an eine F^m nur

$$m(m^2 - m + 1)$$

«Normalen. Ihre Fusspunkte liegen nämlich auf einer Untercurve «$(m^2 - m + 1)^{ten}$ Grades, dem Orte eines Pols P, dessen auf F be«zügliche Polarebene auf dem Strahl AP senkrecht steht.

«Eine freie Vollcurve $(F^p, G^q) = C^{p \times q}$ wird von einem $B(f^n)$ «in $pq(2n + p + q - 4)$ Punkten berührt. Denn diese liegen auf «einer Untercurve $(2n + p + q - 4)^{ten}$ Grades, dem Orte des Poles, «für welchen die zwei Polarebenen von F und G sich auf der Axe des «Polarebenenbüschels von $B(f)$ schneiden. Die Untersuchung für den «Fall einer beliebigen Untercurve C soll etwa später einmal vorge«nommen werden.

«Wenn eine Fläche F^m und ein Halbnetz $(f, f', f'')^n$ gegeben sind, «so ist der Ort des Pols, dessen auf F, f, f', f'' bezüglichen Polarebenen «einen Punkt gemein haben, eine Fläche $H^{m-1+3(n-1)}$; und in jedem «Punkte der Vollcurve (F, H) oder $R^{m(m+3n-4)}$ wird F von einer «Fläche des Halbnetzes berührt.

«Wenn vier beliebige f^n gegeben sind, und P ist ein Pol, für «den die ersten Polarflächen aller vier f einen Punkt Q gemein haben, «so ist der Ort von Q eine Fläche $4(n-1)^{ten}$ Grades.

«Werden durch die drei Seiten eines der 45 Dreiecke der Fläche «dritten Grades Ebenen gelegt, so geht durch die drei Kegelschnitte «immer eine Fläche zweiten Grades. Soll diese ein Kegel sein, so ist «wirklich der Ort seines Scheitels eine Fläche *vierten* Grades, was mir «höchst merkwürdig erscheint. — Was Sie über die schiefen Fünfecke «aussagen, ist Alles richtig. Wird nämlich aus den 27 Geraden eine «f herausgehoben, so giebt es 16 welche sie nicht schneiden; eine «von diesen sei a. Dann giebt es nur fünf Geraden, welche wohl a, «aber f nicht schneiden; eine von diesen sei b, so giebt es nur vier «Geraden, welche b, aber weder a noch f, schneiden. Eine von diesen «sei c, so giebt es noch 3 Geraden, welche c, aber keine der übrigen «schneiden. Eine darunter sei d, dann giebt es nur noch zwei Geraden, «welche a und d, aber keine der übrigen schneiden. Eine von diesen sei e, «so hat man ein schiefes Fünfeck a b c d e. Wird f festgehalten, so hat man also «16 . 5 . 4 . 3 . 2 solche Fünfecke. Da man aber mit jeder der fünf Seiten «anfangen, und von derselben aus sowohl rechts als links fortgehen «kann, so ist soeben jedes Fünfeck 10 mal gezählt worden; folglich ist «die Zahl aller verschiedenen zur Geraden f gehörenden Fünfecke «$16 \cdot 4 \cdot 3 = 192$. Ist umgekehrt das Fünfeck a b c d e gegeben, so «giebt es nur noch zwei Geraden, welche keine Seite desselben «schneiden; ja — das Fünfeck kömmt also in zwei Systemen (f, abcde) «vor und im Ganzen giebt es $27 \cdot 192$ solche Systeme; folglich giebt «es nur $27 \cdot 96 = 2592$ Fünfecke.

«Da es 216 Paare sich nicht schneidender Geraden giebt, «so entsprechen jedem Paare 12 Fünfecke, welche aus den 10 «Geraden, die keine das Paar schneiden, gebildet werden können. «In der That wird die erste Seite des Fünfecks nur von drei «dieser 10 Geraden, die zweite nur von 2 übrigen, die dritte «auch nur von 2 übrigen geschnitten und wenn aus diesen die vierte «gewählt ist, so ist die fünfte Seite nothwendig; also muss die «Zahl der verschiedenen Fünfecke $\frac{10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{10} = 12$ sein. «Wenn von jenen 10 Geraden 5 zu einem Fünfeck verwendet wor«den sind, so bilden die 5 übrigen auch wieder ein Fünfeck. Ich «weiss vor der Hand diese Fünfecke nicht weiter zu systematisiren, «wie Sie sagen; ich sehe keine Beziehung derselben, weder zu den 40 «Gruppen von je drei Triederpaaren, noch zu den 360 Flächen zwei«ten Grades, deren jede die cubische Fläche in 6 Geraden schneidet. «Ich glaube, Ihnen einmal ein Verzeichniss der 45 Dreiecke, wo die

«27 Geraden mit Ziffern bezeichnet sind, gegeben zu haben. Tabellen «der Fünfecke, etc. in ähnlichem Sinne würden ganze Bogen anfüllen; «wenn Sie etwas der Art verlangen, so bitte ich Sie, es mir näher «zu bezeichnen; ich würde es Ihnen dann ungesäumt ausfertigen und «zuschicken.

«Wenn Sie von Einem Systeme der Sylvester'schen 5 Grund-«ebenen sprechen, so müssen Sie das Prädicat *reell* weglassen; denn «es giebt überhaupt nur *ein* System; und wenn die 19 Gleichungen «dritten Grades mehrere Lösungen haben, so können sie sich nur «durch *Permutation* der 5 Grundebenen unterscheiden. Die 10 Schnitt-«punkte der Grundebene sind allerdings gewöhnliche Hornpunkte. «Nimmt man zu dem Berührungskegel zweiten Grades eines solchen Horn-«punkts seinen in Beziehung auf das entsprechende Trieder harmonischen «Strahl, so bekömmt man 10 Strahlen; je 4 von diesen, welche einem «Tetraeder entsprechen, treffen in einem Punkt zusammen; es «giebt also 5 solche Punkte. Wenn nämlich ein Kegelschnitt einem «Dreieck umschrieben ist, so entspricht jedem Punkt des Kegelschnitts «in Beziehung auf das Dreieck eine harmonische Transversale, und «während jener Punkt sich auf der Curve bewegt, dreht sich die «Transversale um einen festen Punkt. Diesen nenne ich den har-«monischen Punkt für den Kegelschnitt in Beziehung auf das Dreiseit. «Aehnlich für das Trieder und den umschriebenen quadratischen Kegel. «Analytisch dargestellt wird dieses

«Nimmt man die Polynome v, w, x, y, z der Grundebenen so an, dass

$$v^3 + w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

«die Gleichung der Fläche wird und ist dann

$$av + bw + cx + dy + ez = 0$$

«die identische Relation zwischen den fünf Polynomen, so ist

$$vwxyz\left(\frac{a^2}{v} + \frac{b^2}{w} + \frac{c^2}{x} + \frac{d^2}{y} + \frac{e^2}{z}\right) = 0$$

«die Gleichung der Kernfläche; folglich

$$c^2yz + d^2xz + e^2xy = 0$$

«z. B. die Gleichung des quadratischen Berührungskegels im Horn-«punkt (x y z) und

$$x : y : z = c^2 : d^2 : e^2$$

«sind die Gleichungen des harmonischen Strahls. — Der Schnitt R^{12} oder

$$\left(\sum v^3 = 0,\quad \sum a^2wxyz = 0\right)$$

«*geht* nicht bloss *durch* die zwei Asymptotenpunkte jeder der 27 «Cayley'schen Geraden, sondern *berührt* sie in denselben, die Curve «R hat also die 27 Geraden zu *Doppeltangenten.* Die Curve 4ten «Grades, in welcher jede der 45 Cayley'schen Ebenen die Kernfläche «schneidet, gehört einem Büschel an, der einerseits vom Vierseit, «dessen 6 Ecken jene Asymptotenpunkte sind, anderseits vom Cayley'- «schen (Diagonalen-) Dreiseit und noch einer vierten Geraden bestimmt «ist. Die Kernfläche geht überdies durch die 240 Scheitel der 120 «Cayley'schen Triederpaare. Das Cayley'sche System liefert also im «Ganzen 348 Punkte der Kernfläche; das Sylvester'sche System liefert «ihre 10 Geraden und die Berührungskegel in ihren 10 Hornpunkten. — «Wenn P, Q auf der Kernfläche befindliche conjugirte reciproke Pole «der ursprünglichen Fläche sind, und P bewegt sich auf der Curve «R, so durchläuft Q eine Curve S, durch die ich bis jetzt keine «niedrige Fläche als siebenten Grades habe legen können, deren «Gleichung

$$\sum a\,b\,c\,(v^3 + w^3 + x^3)\,y^2\,z^2 = 0.$$

«Wenn P und Q je zusammenfallen sollten, so würde die ursprüngliche «Fläche bornirt; in den Durchschnitten von R und S vereinigen sich «daher nicht conjugirte P und Q. Ueber die Lage der Polarkegel «von P und Q gegen einander weiss ich nichts besonderes anzugeben. — «Die Curve R kann wenigstens keine Doppelpunkte, etc. haben; denn, «wenn man verlangt, dass die ursprüngliche Fläche von ihrer Kern- «fläche berührt werde, so kann dieser Forderung *unter Anderem* «durch die sehr einfache Bedingung

$$a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2} + d^{3/2} + e^{3/2} = 0$$

«entsprochen werden; aber immer wird dadurch die ursprüngliche «Fläche bornirt [1]).

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Sie haben leider Ihren Beweis für den Satz, dass drei ebene Cur- «ven n^{ten} Grades, welche nicht n^2 Punkte gemein haben, nicht mehr als «n^2-n+1 Punkte gemein haben können, nicht in strengen Formen «ausgeführt; und was Sie davon mittheilen, vermag mich nicht zu

[1]) Unterschrift fehlt.

«überzeugen. Der Mangel liegt darin, dass Sie vom Satze über die «nothwendigen Punkte eine unerlaubte Anwendung machen. Dieser «Satz darf nämlich nur so ausgesprochen werden:

«Wenn $m \geqq n$, so sind *unter* den mn Punkten, welche eine C^m «mit einer C^n gemein hat, $\binom{n-1}{2}$ nothwendig.» Daraus folgt aber «noch nicht, dass, wenn von den gemeinschaftlichen Punkten $mn - \binom{n-1}{2}$ oder sogar mehr fixirt sind, dann alle übrigen nothwendig «sind. Der Schluss würde nur gelten, wenn die $mn - \binom{n-1}{2}$ «Punkte *frei* auf der C^n gewählt werden. Wenn aber diese schon «gegenseitig bedingt sind, so können im Besondern unter ihnen so «viele nothwendige Punkte vorkommen, dass immer noch von den «übrigen einige *nach Belieben* auf der C^n gesetzt werden dürfen. «Den Gedankengang, den Sie mir an die Hand geben, hatte ich schon «vorher durchlaufen, aber eben die erwähnte Schwierigkeit veranlasste «mich zu der Klage, dass ich für Ihren Satz keinen Beweis habe fin- «den können. Zum Ueberfluss füge ich noch hinzu, dass für $n>4$ «stets $\binom{n-1}{2} > n-1$ ist, und dass also, wenn Ihre Fassung des «Satzes von den nothwendigen Punkten richtig wäre, und drei Curven «n^{ten} Grades A, B, C schon n^2-n+1 Punkte gemein haben, dann die «$n-1$ übrigen nothwendig wären, also alle drei A, B, C zum selben «Büschel gehören müssten. — Sie sagen kein Wort zu dem von mir «zur Sprache gebrachten Falle, wo A, B, C nur $n^2-n\alpha+\alpha^2$ Punkte «gemein haben $\left(\alpha < \frac{n}{2}\right)$; ungeachtet die Construction der Ihrigen «ganz ähnlich ist; nämlich je zwei Glieder des Netzes schneiden sich «ausser jenen Grundpunkten noch in $n-\alpha$ auf einer C^α liegenden «Punkten. Wenn man nun versucht, durch zwei von diesen Punkten «eine Gerade zu legen und mittelst dieser eine C^{n+1} zu bilden, so «kann man wiederum mittelst Ihrer weiten Fassung des Satzes von «den nothwendigen Punkten den schönsten Unsinn herausbringen. «Also noch einmal: Haben Sie die Güte, für Ihren interessanten Satz «einen logisch gegliederten Beweis zu geben, zu dem ich von ganzem «Herzen Ja und Amen sagen kann. Wenn das Netz mehr als $\binom{n+2}{2} - 3$

«Grundpunkte hat, so sind diese gewiss gegenseitig bedingt, und «es wäre nun wichtig zu wissen, ob alle Zahlen von hier an bis «n^2-n+1 möglich sind, oder nur einige derselben, wie z. B. alle von «der Form $n^2-n\alpha+\alpha^2$.

«Wenn A, C, D, B vier Flächen sind, deren fallende Grade eine «arithmetische Proportion bilden, und man bildet aus den zwei zusam- «mengesetzten Gliedern n^{ten} Grades AB und CD einen Flächenbüschel, «so ist wirklich auf einem freien Gliede dieses Büschels (B, D) die «niedrigste Vollcurve und unbeweglich (also einzig). Auch (C, B) ist «unbeweglich und einzig; hingegen (A, C) bildet eine $\binom{\alpha-\delta+3}{3}$ «fache Schaar, und (A, D) eine $\binom{\alpha-\gamma+3}{3}$ fache. *Ausnahmen:* Wenn «$\alpha=\gamma$, $\delta=\beta$, aber $\alpha>\delta$, so ist immer noch die Vollcurve (B, D) einzig «und (A, C) bildet eine $\binom{\alpha-\delta+3}{3}$ fache Schaar; aber (A, D) und (C, B) «sind Glieder einer und derselben einfachen Schaar. Wenn endlich «$\alpha=\gamma=\delta=\beta$, so sind auch (A, C) und (D, B) Glieder einer einfachen «Schaar. — Wenn $n>3$, so sind die unbeweglichen Vollcurven nur in «der Anzahl 1 vorhanden; um deren mehrere zu haben, müsste man «Gewalt brauchen.

«Mit Ihrem Schema $\left\| \begin{matrix} A\,.\,D\,.\,D_1 \\ C\,.\,B\,.\,B_1 \end{matrix} \right\|$ einer Theilcurve haben Sie die «R^3 im Allgemeinen nachgeahmt. Wenn Sie meine frühern Briefe «nachsehen, werden Sie finden, dass ich schon von solchen Schema- «ten von Theilcurven mit mehr als zwei Horizontalzeilen gesprochen, «aber dann auch alle diese Darstellungsweisen als unzureichend für «eine möglichst allgemeine Classification der Theilcurven erkannt habe.

«Es sind n Ebenen gegeben, und in jeder soll eine Curve n^{ten} «Grades so gezeichnet werden, dass je zwei Curven die Kante ihrer «Ebenen in denselben n Punkten schneiden. Diese Aufgabe bietet «eine sonderbare Schwierigkeit dar. Giebt man nämlich zuerst in «jeder Ebene $\binom{n+2}{2}-1$ Punkte zur Bestimmung der Curve, so sind «dann wegen der Bedingung auf jeder Kante n Punkte abzuziehen. «Es bleiben so nur $2\,n^2$ Punkte übrig, welche zur Bestimmung des «ganzen Curvensystems hinzureichen scheinen. Aber dann würde nicht «bloss ein *Büschel* von Flächen n^{ten} Grades durchgehen. Das Umge-

«kehrte hingegen, dass eine f^n und eine Gruppe von n Ebenen einen «Büschel bestimmen, ist vollkommen klar.

«Eine f^n und eine Gruppe von $n-1$ Ebenen bestimmen nicht «ein Netz, sondern eine *vierfache* Schaar.

«Wenn Sie zwei Büschel B (f^α), B (f^β) projectivisch auf einander «beziehen, und es ist $\alpha > \beta$, so erzeugen sie eine $\binom{\alpha-\beta+3}{3}$ fache «Schaar von Vollcurven $\alpha^{2\text{ten}}$ Grades.

«Es sei F die Fläche $(\alpha+\beta)^{\text{ten}}$ Grades, Ort des Durchschnitts «je einer Fläche des einen Büschels mit der entsprechenden des «andern; schneiden Sie F mit einer beliebigen Fläche $(\alpha-\beta)^{\text{ten}}$ Grades «und nehmen diese Vollcurve zu der Grundcurve des B (f^β) hinzu, «so haben Sie eine zusammengesetzte Curve $\alpha^{2\text{ten}}$ Grades, welche der «erwähnten vielfachen Schaar angehört. Nehmen Sie aus dieser viel«fachen Schaar irgend zwei Vollcurven frei heraus, so schneiden sich «dieselben in $\alpha^2(\alpha-\beta)$ Punkten, welche alle auf derselben Fläche «$(\alpha-\beta)^{\text{ten}}$ Grades liegen. Jede solche Vollcurve wird von jeder «$R^{\alpha\times\beta}$ in $\alpha^2\beta$ Punkten geschnitten; aber keine zwei $R^{\alpha\times\beta}$ haben «einen Punkt gemein. — Es seien A, A′, A″ irgend drei Glieder «des höhern, B, B′, B″, die entsprechenden des niedrigern Büschels. «Sie setzen auf der F nach Belieben $\binom{\alpha-\beta+3}{3}$ Punkte und legen «durch diese und jeweilen durch eine der Vollcurven (A, B), (A′, B′), «(A″, B″) resp. die Flächen α^{ten} Grades 𝔄, 𝔄′, 𝔄″, so bestimmen diese «einen neuen Büschel α^{ten} Grades, der mit dem unveränderlichen Büschel «β^{ten} Grades projectivisch ist und zwar so, dass 𝔄, B; 𝔄′, B′; 𝔄″, B″ «sich paarweise entsprechen; durch drei Paare ist aber hinreichend «bestimmt, welche Fläche des Büschels (𝔄, 𝔄′) jeder Fläche des un«veränderlichen Büschels (B, B′) entspricht. — Doch ich bin hier«über wohl weitläufiger als nöthig ist. Sie haben es durch Ihre «Frage, *was weiter spiele*, veranlasst. Die Fläche F ist jämmerlich be«schränkt; und diese Vorstellung ist bei unsern frühern Unter«suchungen schon häufig benutzt worden. Ich kann daher nicht recht «begreifen, warum Sie wieder darauf zurückkommen; Sie repetiren «damit nur die einfachsten analytischen Hülfsmittel, die für andere «Untersuchungen dienen mögen, aber an sich nicht werth sind, viel «besprochen zu werden.

«Sie setzen nun $\alpha=\beta$ und specialisiren stufenweise. I. Die «projectivischen Büschel (A, A′, A″) und (B, B′, B″) haben kein ge-

«meinschaftliches Glied. Die von ihnen erzeugte F Fläche $2\alpha^{\text{ten}}$ «Grades enthält zwei geschiedene Schaaren (A, A′) und (A, B) von «Curven $\alpha^{2\text{ten}}$ Grades; je zwei Curven derselben Schaar können «durchaus keinen Punkt gemein haben; aber jede Curve der einen «Schaar wird von jeder der andern in α^3 Punkten geschnitten; und «durch diese zwei Curven geht immer eine Fläche C‴, welche sowohl «dem Büschel (C, C′, C″, . . .) als auch dem Büschel (A‴, B‴, C‴, . . .) «angehört.

«II. Die projectivischen Büschel (p, q) und (q, r) haben ein ge-«meinschaftliches nicht entsprechendes Glied q. Dann enthält die F eine «einzige Schaar von Curven $\alpha^{2\text{ten}}$ Grades, welche sämmtlich durch die «α^3 (festen) Knotenpunkte der F gehen. Daher bilden alle Flächen «der Büschelschaar zusammen ein *Gebüsch*, und jede solche Fläche «geht durch *zwei* Curven $R\alpha^2$ und ist durch diese bestimmt, ausge-«nommen, wenn sie die F längs einer $R\alpha^2$ berührt. Alle solche «Flächen P (α^{ten} Grades), welche die F längs einer R berühren, bilden «natürlich eine einfache Schaar von der zunächst auf den *Büschel* fol-«genden Ordnung, indem durch irgend einen im Raume gegebenen «Punkt nicht nur eine (wie beim Büschel), sondern *zwei* Flächen P «gehen. Man könnte also diese Schaar einen quadratischen Büschel «nennen, wenn man den gewöhnlichen Büschel mit Grundcurve einen «*linearen Büschel* nennen wollte. Ich kann nicht umhin, die an sich «sehr klare Sache analytisch auszudrücken. Wir haben $F = pr - q^2$ «als Polynom der erzeugten Fläche $2\alpha^{\text{ten}}$ Grades. Sind nun λ, μ «irgend zwei Projectivitätsfactoren, und setzt man

«$P = p + 2\lambda q + \lambda^2 r$, $Q = p + (\lambda + \mu)q + \lambda\mu r$, $R = p + 2\mu q + \mu^2 r$,

«so ist auch

$$(\lambda - \mu)^2\, F = PR - Q^2.$$

«D. h. die Fläche F wird von der Fläche P längs der Curve $(p + \lambda q,$ «$q + \lambda r)$ und von der Fläche R längs der Curve $(p + \mu q,\ q + \mu r)$ be-«rührt, und die Fläche Q geht durch diese zwei Curven. Da $\lambda + \mu$, «$\lambda\mu$ jede beliebigen zwei Zahlen sein können, so ist Q jede Fläche «des Gebüschs (p, q, r); hingegen P bildet eine einfache Schaar, dar-«gestellt durch die Gleichung $p + 2\lambda q + \lambda^2 r = o$.

«III. Wenn die Büschel (p, q) (p, r) projectivisch sind und das «Glied p gemein haben, so ist $F = p(q - r)$, und was noch klarer «als diese Formel sein kann, weiss ich nicht.

«Wenn die zusammengesetzten Flächen AB, CD einen Büschel bil-«den sollen, der wieder ein zusammengesetztes Glied EF enthält, so ist «dieses freilich, wenn (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) lauter Vollcurven «sein sollen, nur möglich, indem alle 6 Polynomen A, B, C, D, E, F «vom gleichen Grade sind und alle 6 Flächen demselben Gebüsch «angehören.

«Antwort verspätet wegen Examenreisen, und daherigen beim «Witterungsumschlag vom 20. April zugezogenen Katarrh. Leider nur «aus Pflicht geschrieben, sonst unfähig in diese verhexten Zer«fällungen einzutreten, bei denen ich kein treibendes Interesse «verspüre. Ihr treuer

«Bern, den 1. Mai 1855.

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

7.—12. V. 1855.

«*Gestrenger Signore!*

«Ihr ungnädiges Gripp-Schreiben nimmt mir fast den Muth neue «Fragen zu stellen. Sie haben keinen Massstab für die Verstandes«und Gedächtnissschwäche Anderer, urtheilen bloss nach sich, da«her keine Nachsicht. Bei meiner Erschlaffung kann ich nicht «immer mit hohen Sätzen rumpeln; zudem besteht meine *Grösse* ja «nur im *Kleinen*, im sorgfältigen allseitigen Erforschen desselben; und «wahrlich ich sage Euch», wer nur Grosses fressen will, sieht das «Gras nicht wachsen, kann die Welt nicht unmittelbar belehren. «Die meisten Menschen steigen vom Kleinen aufwärts; es giebt wenige «Bevorzugte, die Alles auf einmal und von Oben herab verschlingen, «es sind Elephanten, mehr als der alte Mezzo-Elefanti in Rom war.

«Ob Sie mir alle Fragen beantwortet haben, weiss ich nicht. «Von Ihren Katarrh-Formeln kann ich keinen Gebrauch machen, wie «schon früher bemerkt worden, glücklicherweise hatte ich mich schon «zuvor erinnert, wie sich die Sache verhält. — Einiges scheinen Sie «zu flüchtig angesehen zu haben, wie ich zeigen werde. Halten Sie «zu Gnaden, wenn ich dabei vielleicht Dinge vorbringe, die schon in «Früherem enthalten; in meinen Manuscripten kommt manches 3 bis «7 Mal vor. Uebrigens macht mich dies Kapitel über die nothwendi«gen Punkte und Curven bei Flächen halb verrückt, ich drehe und «wende mich fortwährend noch darin, ohne zu Ende zu kommen.

«1. «Warum ich zu den $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Punkten dreier C^n nichts «sage?» weil ich sie schon zuvor betrachtet habe, sammt dem ana-

«logen Fall bei Flächen, worüber, wie mich dünkt, auch Andeutungen «in meinen Briefen enthalten; da ich aber vom Maximum sprach, so «war dieses $n^2 - n + 1$.

«Wenn Sie aus meinem angegebenen Verfahren «den schönsten «Unsinn» herleiten, so erinnere ich an das Echo: «Wie man in den «Wald hineinschreit, so schallt es zurück». Bei $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ darf «man nicht durch *zwei* der übrigen Punkte eine Gerade legen wollen, «sondern sachgemäss durch $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ Punkte eine «Curve C^α, dann sind die Schlüsse gleich und führen zum richtigen «Resultat. Dass Sie dies übersahen, bezeugt Ihre Krankheit und Miss«muth. Wenn Sie von Ihrer gestrengen Forderung abstehen wollen «*einen logisch gegliederten Beweis zu geben*, — was ja doch nicht «eigentlich Sache meiner Nase ist — so werde ich es noch einmal «versuchen, Ihnen das Verfahren ausführlicher anzudeuten. Das Ganze «ist ein Spiel mit Curvenbüscheln und Netzen, theils mit zerfallenen «Gliedern, ähnlich demjenigen, welches Sie am Ende Ihres Briefes «so sehr ennüirt, dass Sie es mit Formeln in die Luft sprengen, als «wäre es Sebastopol. Die *übergrosse Zahl Grundpunkte* des Netzes «fand ich schon in den 30er Jahren; sie brachten mich erst in grosse «Verwirrung; in Rom wurde darüber mit Rex [1]) verhandelt; 1846—49 «stiess ich von verschiedenen Seiten wieder darauf, theilte auch einiges «dem Schmützer [2]) mit. Indessen kam die Frage nicht vor, auf welche «Signore jetzt sehr drängt: *alle Ueberzahlen anzugeben*. Zur Sache.

«Der Hauptfall entsteht einfach so: Legt man durch die α^2 Grund«punkte p eines B ($B^\alpha\ C^\alpha\ D^\alpha \ldots$) eine beliebige Curve A^n, $n > \alpha$, «so schneidet sie jedes Glied des Büschels, wie etwa B^α, noch in «$n\alpha - \alpha^2$ Punkten b, und wird durch diese Punkte b eine beliebige «Curve B^n gelegt, so schneidet sie die A^n noch in den *donnstigs* «($n^2 - n\alpha + \alpha^2$) Punkten q, durch welche ein G (C^n) gehen, wo«von jede das Mitglied A^n in *gleicher* Gruppe von $n\alpha - \alpha^2$ Punkten «(b, oder c, oder d, ...) schneidet, wie je ein Glied B^α, C^α, D^α, ... «des gegebenen Büschels, [und durch die q, und durch jede dieser «Gruppen geht je ein B (C^n)].

«Haben nun irgend drei Curven n^{ten} Grads A^n, B^n, D^n eine «solche Zahl m Punkte q gemein, die

$$«> \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 \text{ und } < n^2,$$

«so hat A^n mit B^n, D^n noch $n^2 - m$ Schnitte, beziehlich b, d; man «suche dasjenige α, für welches

[1]) Jakobi. — [2]) Aronhold.

«$m > n^2 - n(\alpha - 1) + (\alpha + 1)^2$ und $m < n^2 - n\alpha + \alpha^2$, etwa $m = n^2 - n\alpha + \alpha^2 + x$, (wo $x = +$ und ganz),
«und lege sodann durch $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ der Punkte b sowie
«d beziehlich die Curven B^α und D^α: so sind $B^n + D^\alpha$ und $D^n + B^\alpha$
«zwei Curven $B^{n+\alpha}$ und $D^{n+\alpha}$, welche die A^n in denselben
«m Punkten q und $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ Punkten b sowie d
«schneiden, zusammen in $m + (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2$ Punkten,
«also in mehr als

$$\text{«}\frac{1}{2}(n + 1)(n + 3) - 3 + (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2$$

«und auch, wie leicht zu zeigen in mehr als

$$\text{«}n(n + \alpha) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

«Punkten, daher haben sie auch noch ihre übrigen Schnitte mit der
«A^n gemein, im Ganzen $n(n + \alpha)$ Schnitte; diese weiteren Schnitte
«bestehen aus solchen, welche 1) B^n und B^α, 2) D^n und D^α, 3) B^α
«und D^α jeweilen mit A^n gemein haben; es können aber B^n und B^α
«höchstens nur die $n^2 - m$ Punkte b mit A^n gemein haben (da B^n
«nicht mehr hat), und D^n und D^α nicht mehr als die $n^2 - m$ Punkte
«d, daher müssen B^α und D^α die noch übrigen

$$n(n + \alpha) - m - 2 \times (n^2 - m) = m + n\alpha - n^2 = \alpha^2 + x$$

«Punkte mit A^n gemein haben, allein da B^α und D^α nicht mehr als
«α^2 Schnitte haben können, so muss $x = o$ sein. «*Folglich giebt es,
«wenn kein Glied zerfallen darf, keine andere übergrosse Zahl m von
«Grundpunkten q des G (C^n), als von der Form $n^2 - n\alpha + \alpha^2$*».
«Dies ist das Verfahren; sollte demselben oder der Logik des Be-
«weises, oder der Rechnung was fehlen, so ergänzen Sie es; meine
«Nase ist zum Spüren — wozu haben Sie den Entwurzler? Signore,
«c'est à vous d'y mettre la main!

«Bei Theilcurven stellt es sich z. B. so. Eine C^β hat (für sie
«schneidende höhere Curven) $\frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$ nothwendige Punkte
«r; nehmen *in ihr* $n\beta - \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$ beliebige Punkte p,
«und *ausser ihr* noch

$$\text{«}\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 - n\beta + \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$$

«willkürliche Punkte q an: so geht durch beide (p und q) ein G (C^n), «welches *nothwendig* auch noch jenen Punkt r gemein hat, also im «Ganzen

$$«\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-3+\frac{1}{2}(\beta-1)(\beta-2)=M$$

«Grundpunkte hat. Je zwei Glieder desselben, etwa A^n und B^n, «schneiden sich ausserdem noch in $n^2 - M$ Punkten q_1, welche jedes«mal mit jenen festen Punkten q in einer $C^{n-\beta}$ liegen, so dass «stets $C^\beta + C^{n-\beta}$ ein Glied des durch A^n und B^n bestimmten «Büschels ist, (wobei also nur $C^{n-\beta}$ veränderlich, dagegen C^β «stereotyp ist). — Auch hier ist das Maximum der Ueberzahl «$M = n^2 - n + 1$, und tritt ein, wenn $\beta = n - 1$. Ein ande«rer Fall, wo beide Ueberzahlen m und M gleich werden, ist der, «wo $\alpha = 2$ und $\beta = n - 2$. Das Weitere — c'est encore à «vous . . . !

«Darüber noch *Eins* aus den höhern Staatsgeheimnissen. Ein «Prozess, wobei das G (C^n) mit $m = n^2 - n\alpha + \alpha^2$ q in Evidenz «tritt, fällt mir aus alter Zeit ein. Werden zwei Netze (= Gebüsch) «in einer Ebene N (C^n) und N (C^α), mit irgend einem dritten ebe«nen Netze N (C^α) [auch N (g) oder N (p), d. i. Gerade oder Punkt] «projektivisch bezogen, so sind sie dadurch auch unter sich projek«tivisch, so dass je zwei sich entsprechende Büschel B (C^n) und «B (C^α) eine Curve $C^{n+\alpha}$ erzeugen und die gesammten $C^{n+\alpha}$ «bilden ein N ($C^{n+\alpha}$) mit $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Grundpunkten q. «(Quatsch! Die zwei Netze werden einfach unter sich projektivisch «bezogen, die Vermittlung ist nicht nöthig).

«Für diesen Hochverrath wird mich Signore durch gütige Aus«führung der analogen Betrachtung über Flächen belohnen, was, wie «ich glaube, mir nicht ganz gelungen ist. Bei G (f^n) und G (f^α) «entsteht, wenn ich nicht irre, ein G ($f^{n+\alpha}$) mit übergrosser Grund«curve $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$. — Dann: Werden zwei Netze N (f^n) und N (f^α) «mittels [unter sich] eines dritten N (f^n) projektivisch bezogen, so «erzeugen je zwei entsprechende Büschel B (f^n) und B (f^α) eine bor«nirte Fläche $f^{n+\alpha}$; je zwei entsprechende G (f^n) und G (f^α) ein «G ($f^{n+\alpha}$) mit $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$: und diese Gesammten R (sowie auch «alle $f^{n+\alpha}$) gehen durch eine bestimmte Anzahl N fester Grund«punkte. *Diese Zahl N zu finden.* Wahrscheinlich steht sie schon «in einem Ihrer Briefe, da je zwei $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$ in einer $f^{n+\alpha}$

«liegen, — aber Sie können sie doch wiederholen. Bei N (f^2) und «N $(f_1{}^2)$ ist N = 4, das bekannte Quadrupel.

«*Zweiter Theil des Geheimnisses,* dem Ersten analytisch wohl «gleich, synthetisch durch die Farbe verschieden und speziell. — *Sind «zwei Basen* $f^n + 1$ *und* $f^\alpha + 1$ *gegeben, so giebt es dieselbe Zahl N «von solchen Polen P, deren Polarebenen (letzte Polaren) zusammen-«fallen.*

«*Zugabe.* Ort von P, dessen Polarebenen 1) in Bezug auf drei «gegebene Basen f^α, f^β, f^γ sich in einer Geraden g schneiden, und «Ort dieser g? oder 2) in Bezug auf 4 gegebene Basen sich in einem «Punkte Q schneiden und Ort des letzteren? Auch: wieviele g giebt «es noch bei 4 Basen? keine! — So noch Anderes, was ich im «Augenblick nicht weiss.

«2. Die Nase kann nochmals helfen. Dass durch n gegebene C^n, «die in n Ebenen E liegen und sich auf den Kanten in je n Punkten q «schneiden, ein B (f^n) geht und bestimmt ist, folgt so:

«In der ersten Ebene E_1 ist C^n_1 bestimmt durch

«$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1$ = N Punkte p;

«In E_2 ist C^n_2, ausser den n Punkten q in der «(E_1, E_2), bestimmt durch = N — n » p;

«In E_3 ist C^n_3, ausser den $2 \times n \cdot q$ in zwei Kan-«ten, bestimmt durch = N — 2 n » p;

«In E_4 ist von den $3 \times n$ q *einer nothwendig,* also die C^n_4 bestimmt durch = N — 3 n + 1 » p;

«In E sind von den $(n-1) \times n$ q nothwendige «$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$, also C^n_n betimmt durch =

«$N - (n-1)\,n + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Punkte p;

«Also die Gesammtzahl der bestimmenden Punkte

«$p = nN - \frac{1}{2}(n-1)\,n^2 + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 2,$

«wodurch gerade der B (f^n) bestimmt wird. — (Legt man durch die n Cur-«ven C^n eine f^{n+1}, so schneidet sie jede E noch in einer Geraden g und «alle n g liegen in einer Ebene; also die f^{n+1} sehr bornirt; des-«gleichen $f^{n+\alpha}$.) Sind in n + 1 Ebenen *gleicherweise* n + 1 Curven «C^n gegeben, so liegen sie in *einer bestimmten* f^n.

«3. *Warnung:* Sind im Raume 4 Punkte und eine f^2 gegeben, «so giebt es 8 solche f_1^2, welche durch die Punkte gehen und der «f^2 umschrieben sind; auch bilden die 8 Berührungsebenen mit den «4 Flächen des durch die 4 Punkte bestimmten Tetraeders eine nette «Configuration. — Von unten herauf folgt dies leicht — analytisch «schwer — daher setzen Sie lieber an den folgenden Sätzen an, die «für Sie leicht und für mich nöthiger sind.

«4. Wenn von 3 Flächen $2\,n^{\text{ten}}$ Grads A^{2n}, B^{2n}, C^{2n} je zwei sich «in zwei Theilcurven gleichen (also $2\,n^{2\text{ten}}$) Grads schneiden, etwa (AB) «in $\gamma^{2n^2} + \gamma_1{}^{2n^2}$, (AC) in $\beta^{2n^2} + \beta_1{}^{2n^2}$, (BC) in $\alpha^{2n^2} + \alpha_1{}^{2n^2}$, so dass «also durch diese Curven 3 Flächenpaare n^{ten} Grades gehen, c^n und $c_1{}^n$, «b^n und $b_1{}^n$, a^n und $a_1{}^n$, die Glieder des durch jene 3 Flächen be«stimmten $G\,(f^{2n})$ sind, so gehören diese 3 Paare zu *einem Büschel* «dieses Gebüsches, d. h. von den 6 Theilflächen schneiden sich 4 mal «3 in einer Vollcurve R^{n^2}, und alle 6 Flächen gehören zu einem kleinen «$G\,(f^n)$, in dessen n^3 Grundpunkten q sich alle 4 Curven R^{n^2} schnei«den (?). Die $(2\,n)^3$ Grundpunkte p des grossen $G\,(f^{2n})$ zerfallen in «8 Gruppen zu je n^3 p, in jeder R^{n^2} liegen Gruppen. Die 3 Flächen«paare a und a_1, b und b_1, c und c_1 im $G\,(f^n)$, sind wie die Gegen«flächen eines vollständigen *Vierkants*.

«Fallen nun die Curven γ und γ_1 in *eine* γ_0 zusammen, so sind «die Flächen A und B sich längs derselben umschrieben und die durch «dieselbe gehende Fläche $c_0{}^n$ ist als Doppelfläche (c^n und $c_1{}^n$ vereint) «anzusehen; ebenso vereinigen sich die 4 Curven R^{n^2} paarweise, etc. «Vereinigen sich ferner auch β und β_1 in eine β_0, längs der sich A «und C berühren und durch die eine doppelt gedachte Fläche $b_0{}^n$ «geht, so vereinigen sich die 4 R^{n^2} in eine einzige $R_0{}^{n^2}$, Schnitt ($b_0{}^n$ «$c_0{}^n$), und alsdann ist das Flächenpaar a^n und $a_1{}^n$ zu den Berührungs«flächen $c_0{}^n$ und $b_0{}^n$ zugeordnet harmonisch (alle 4 gehören zu einem «Büschel um R_0). Also: „*Wird eine gegebene Fläche A^{2n} von beliebigen* «*zwei Flächen $b_0{}^n$ und $c_0{}^n$ in zwei Curven* $\beta_0{}^{2n\cdot n}$ und $\gamma_0{}^{2n\cdot n}$ *ge*«*schnitten, und werden ihr längs diesen Curven irgend zwei Flächen* «*B^{2n} und C^{2n} umschrieben, so schneiden sich diese allemal p l a n,* «*d. h. in 2 Theilcurven α^{2n^2} und $\alpha_1{}^{2n^2}$, durch welche zwei (mehr als* «*bestimmte) Flächen a^n und $a_1{}^n$ gehen, die sich allemal mit jenen* «*Flächen b_0 und c_0 in derselben Curve R_0 schneiden und zu ihnen har*«*monisch sind.*“ Alle Paare a^n und $a_1{}^n$ bilden also ein Involutions«System, welches $b_0{}^n$ und $c_0{}^n$ zu Asymptoten hat. — Darf man um«kehren? und sagen: Wenn zwei Flächen $2n^{\text{ten}}$ Grads A^{2n} und B^{2n} «einander *voll umschrieben* sind, so geht durch die Berührungscurve «immer eine Fläche n^{ten} Grads, c_0^n. und wenn zwei Flächen B^{2n} und «C^{2n} einer dritten A^{2n} voll umschrieben sind, so schneiden sie sich «*plan*, und die beiden Planflächen a^n und a_1^n gehen durch den Schnitt «R_0 der Berührungsflächen b_0^n und c_0^n, und sind zu diesen harmo-«nisch. He! ? für $n = 1$ ist es so. Folgende Umkehrung ist er-«laubt: „*Schneiden sich zwei Flächen B^{2n} und C^{2n} plan und man legt «durch den Schnitt $R_0{}^{n^2}$ ihrer Planflächen a^n und a_1^n, irgend ein Paar «zu diesen harmonischen Flächen c_0^n und b_0^n, so schneiden letztere jene «ersten Flächen B^{2n} und C^{2n} (oder auch C^{2n} und B^{2n}) in solchen Curven «γ_0 und β_0, längs denen ihnen eine und dieselbe Fläche A^{2n} umschrie-«ben ist.*“ Also giebt es eine $S(A^{2n})$, welche den 2 gegebenen B^{2n} «und C^{2n} gemeinsam und vollumschrieben sind, und die Schaar Paare «Berührungsflächen c_0^n und b_0^n haben die Planflächen a^n und a_1^n zu «Asymptoten. Fixirt man aus der Schaar $S(A^{2n})$ irgend zwei Glieder «A^{2n} und A_1^{2n}, bezeichnet die Berührungsflächen von A_1^{2n} mit B^{2n} und «C^{2n} beziehlich durch c_1^n und b_1^n, so müssen sich auch A^{2n} und A_1^{2n} «plan schneiden und ihre Planflächen, etwa d^n und d_1^n, müssen (mit «c_0^n, b_0^n, a^n, a_1^n) durch dieselbe $R_0{}^{n^2}$ gehen, und sowohl zu c_0^n und «c_1^n, als b_0^n und b_1^n, als a^n und a_1^n harmonisch sein. Also: «Ist ein «Flächenpaar B^{2n} und C^{2n} einem andern A^{2n} und A_1^{2n} voll umschrie-«ben, so schneidet sich jedes Paar plan, und die Planflächen, a^n u. a_1^n, «des einen Paars, sind zu denen des andern, d^n u. d_1^n, harmonisch.» Etc. «— Haben Sie die Güte dies bald ergänzend zu verifiziren; mir wird's «sauer — Ihnen ist es Erholung, oder wie man sagt «ein gefundenes «Fressen». Stossen Sie sich nicht an «*plan*», hab' es bloss hier zur «Kürzung gebraucht. Schon vor 30 Jahren, in meiner ersten Ab-«handlung, habe ich vom ersten Satze den Anfang gegeben, s. *Crelle*'s «Journ. Bd. I. S. 46, Satz VI.

«Ferner noch die vielleicht unsinnige Frage: Wenn sich f^m und «f^n längs einer Curve R_1 berühren und längs R_2 schneiden, sind dann «diese Curven selbständige (organische) Theile der $R^{m \times n}$, d. h. «sind sie solche R_1^x und R_2^y, wo $2x + y = mn$, und durch welche «etwa solche Flächen f^α und f^β gehen, wo $2\alpha + \beta = m > n$ ist? «— Können von 3 Flächen A^{2n}, B^{2n}, C^{2n} je zwei einander voll um-«schrieben sein? scheint nicht; geht es für 3 Curven $2\,n^{ten}$ Grads? «Für Kegelschnitte schon vor 30 Jahren ausgebeutet.

«5. Durch drei beliebige Curven C^2 ist das $N(C^2)$ bestimmt; «zunächst die Trippelcurve C_0^3 und durch diese die Basis C^3. Wenn «nun aber von den gegebenen drei C^2 1) zwei einander *doppelt* be-

«rühren, oder 2) wenn zwei die dritte *doppelt berühren*, oder 3) wenn «je zwei sich *doppelt berühren*, wie ist dann die Basis C^3 und die «Trippelcurve $C_0{}^3$ beschaffen? — Von drei f^2 können zwei der dritten «voll umschrieben sein und *einander* selbst in zweien Punkten be-«rühren. Wie müsste f^3 beschaffen sein, wenn sie dieselben zu Po-«laren haben sollte?

«Oder welche besondere Eigenschaft hat dort das $N(C^2)$ und «hier das $G(f^2)$?

«6. Wenn ein Kegel K^2 durch 5 feste Punkte p gehen und eine «feste Ebene E *streifen* soll, welches ist dann der Ort seines Scheitels «(eine Curve in der Ebene E)? Oder: Wenn eine Curve C^2 fünf «feste E berühren und durch einen festen p gehen soll, welchen Ort «hat dann ihre Ebene? (einen Kegel, dessen Scheitel in p), und in «welcher Fläche liegen alle C^2?

«7. Welche Enveloppe hat die $S(K^2)$, die durch 5 feste p gehen «und ihre Scheitel in einer festen Geraden g haben? Oder: zu welcher «Fläche liegt die $S(C^2)$, welche 5 gegebene E berühren und deren «Ebenen sämmtlich durch eine feste g gehen?

«Aus Furcht, dass diese Fragen (6 u. 7) schwierig sind und ich «die Antwort im Augenblick nicht gerade nöthig habe, darf ich nicht «weiter gehen.

«Die grössten Mathematiker werden erkannt und berufen: *Wolf*, «*Lazarus* und *Marquis*; ich grüsse und gratulire dem «Nous vivons «entre nous», dass er einen ihm widerlichen Anblick los wird.

«Sie haben mir nie gesagt, was aus der Schuster-Forderung ge-«worden ist!

«Ueber meine Reise habe ich noch keinen definitiven Plan ge-«fasst. Nichts lockt mich an; Urlaub noch nicht durch die Kanzlei «angelangt (natürlich habe ich die Vorlesungen nicht begonnen); Gastei «ist mir verordnet, kann auch nichts helfen, ganze Darmkanal ist «futsch; Paris wird unverschämt theuer sein, müsste zuvor an Jemand «schreiben, aber geschieht nicht; Bern ist auch nichts, giebt Rheu-«matismen und Gicht und Signore taglöhnert: also wohin? was «machen? Hier komme ich mit der Arbeit auch nicht vorwärts, kann «nur ein paar Stunden täglich arbeiten, ohne Kraft, Gedächtniss und «Phantasie, am Abend, was sonst die beste Zeit war, gar nicht mehr. «Es ist schade, dass der fromme Wunsch, den ich schon voriges Jahr «hegte, nicht zu realisiren ist, nämlich meine Redaction gewisser-«massen unter Ihren Augen auszuführen, unter Ihrer plötzlichen (täg-«lichen) Hülfe im Ausdruck, in der Anordnung und Combination, in «der Richtigkeit der Formeln (Gedächtniss), wobei aber doch meine «Schulmeister-Methode befolgt würde, was ohne Zweifel später auch «Ihre eigenen Arbeiten etwas *herablassender* gestalten und sie dem «Publikum leichter und zugänglicher machen müsste (denn selbst «*Nudel* bezeugte, dass er sehr viel von meinem *Spinnen* gelernt). «Aber wenn diess auch nur je in einer Stunde geschehe, etwa spät «Abends, und Sie sonst mit allem Spazieren verschont blieben, da «mir rasches Gehen immer saurer wird, so würden Sie sich doch «schwer darein finden, weil es oft mehr Kleinliches, Ihnen werthlos «Scheinendes zu ordnen, als Stämmiges zu entwurzeln gäbe. Sonst «scheint mir, müsste auf diese Weise etwas zu Stande kommen.

«Mit einem andern Wunsch, dass diese Lieferung Sie ohne «Katarrh und Grippe, in guter Laune treffen möge, grüsst Sie und «die Andern

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

«Berlin, vom 7.—12. Mai 55.

(Das Ende von Nr. 1 und Nr. 4. 5 bald.)

Steiner an Schläfli.

12. Juni 1855.

«*Lieber Freund!*

«Diesmal ist mir Ihr Schweigen unerklärlich. Auf Ihren Brief «vom 1. Mai antwortete ich am 12. Mai, gab Ihnen ausführliche Aus-«kunft über das beanstandete $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ und über die n C^n in n E, «nebst andere Dinge, und fügte neue (für Sie leichte) Fragen bei mit «der dringenden Bitte, sie nach wenig Tagen zu *bejahen*, weil ich sie «im Augenblick nöthig brauche. Umsonst harre ich seitdem auf Be-«scheid; weiss nicht, ob Sie krank sind, oder Launen haben, oder den «Brief nicht erhalten. Was es auch sein mag, werde ich hoffentlich «mit umgehender Post aus dieser Nichtwissens-Qual befreit werden.

«Schon am 18. und 19. Mai wollte ich Ihnen meinen Triumph «über die 10 Glieder $f^2 = 2$ E im allgemeinen $N(f^2)$ nebst vielen andern «Eigenschaften des letztern melden; allein da ich täglich Ihrer Antwort «gewärtig war, so schob ich es auf; jetzt muss ich es lassen, bis mir «kund wird, wie es steht. —

«Seitdem habe ich mich in's Gebüsch verloren und schrecklich «gequält um mich darin zurecht zu finden und wieder herauszukommen; «nämlich ich habe das allgemeine $G(f^2)$ und seine R^6 *secirt* und *anatomirt*: «es ergaben sich dabei fast gespensterhafte geradlinige (theils abwickel- «bare) Flächen, die einander längs charakteristischer Curven umschrieben «sind; die Schaar Quintupel, $S(Q_5)$, habe ich so ziemlich aufgefressen, «sie spielen eine Hauptrolle; jedes Q_5 hat 10 Diagonalebenen und allen «insgesammt ist von der Natur eine sehr tiefdurchdachte Stellung an- «gewiesen. — Jedoch Eins, was vielleicht ganz leicht, macht mich seit «5 Tagen halb verrückt, nämlich folgendes. Die Pole Q einer E in «Bezug auf die einzelnen Glieder eines $G(f^2)$ liegen in einer f^3; und «bewegt sich ein Pol P in derselben E, so schneiden sich seine ge- «sammten Polarebenen stets in je einem Punkte Q, dessen Ort die «nämliche f^3 ist; so dass also jeder Punkt Q einerseits der Pol eines «bestimmten Gliedes f^2 ist und andererseits einem bestimmten Pol P «in der E entspricht, und damit auch P und f^2 sich entsprechen und «projectivisch sind; *zudem berührt die Polarebene von P in Bezug auf* «*f^2 die Fläche f^3 in Q.* Nun folgt leicht, dass wenn sich P längs einer «Geraden G (in E) bewegt, dann sein conjugirter Q eine R^3 (auf f^3) durch- «läuft; und dass die Pole Q jedes in dem $G(f^2)$ enthaltenen Büschels «$B(f^2)$ ebenfalls in einer R^3 liegen; *aber nun vermag ich nicht zu be-* «*weisen: «dass die diesem $B(f^2)$ entsprechenden Punkte P in einer G* «*liegen; oder dass im ersten Falle die den Punkten P in der gegebenen* «*G entsprechenden f^2 einen Büschel bilden.*» Meine Bemühungen darum «lieferten viele curiose Schulmeister-Sätze.

«Mein Aufsatz über Normalen aus P auf C oder f^n ist endlich «im Februarheft des *Liouville* Journals erschienen, übersetzt von einem «Preussischen premier Lieutenant *v. Horn*, bei den schwereren Stellen, «wie er mir schreibt, mit Dr. *Wöpke's* Hülfe. Kürzlich ersuchte ich «den Hauptsetzer des hiesigen Journals, den Redacteur desselben ge- «legentlich an Ihre Abhandlung zu erinnern; er versprach mir es zu «thun, obschon *Crelle* nur bei ihm imponirenden Persönlichkeiten von «der chronologischen Folge abweiche.

«Prof. *Schönemann*,[1]) der Ende Mai einige Tage hier war, meinte «ich sollte versuchen, Sie hieher zu bringen. Es ist schwer, weil «Sie zu wenig bekannt sind, und doch wären Sie in vieler Hinsicht «der geeignetste (z. B. über Arbeiten Anderer zu berichten). Ich werde «Morgen oder Uebermorgen bei einem Ministerialrath auf den Busch «schlagen. Von solchen, die bisher im Ministerium genannt worden

[1]) Schönemann, Theodor, geb. 4. IV. 1812. Prof. der Mathematik.

«sein sollen, wären *Kummer* (Breslau), *Weierstrass* (in Braunsberg), «der grosse *Heine* (in Bonn). — *Schönemann*, der sich selbst mit Eli«mination beschäftigt hat, klagt, dass Sie ihm kein Exemplar Ihrer «Wiener-Abhandlung geschickt haben. Was soll man da sagen? — «Ziegel!

«In *Crelle* finden sich Aufsätze vom besagten *Weierstrass;* eli«miniren Sie ihn!

«Im vorigen Brief habe ich Ihnen über mein Befinden, über «meine Unschlüssigkeit, etc. gemüthlich geklagt; Ihr Schweigen hat «diesen Jammer noch vermehrt, jetzt weiss ich erst recht nicht, was «ich *thun* oder *lassen* soll. Am 22. oder 23. d. Monats muss ich wohl «endlich nach Gastein abreissen, zuvor erwartet Antwort

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Schläfli an Steiner.

«Bern, den 17. Juni 1855.

«Mein Unwohlsein hat einen entsetzlichen Schlendrian nach sich «gezogen. Da ich nicht *sogleich* die Antwort auf Ihren Brief vom 12. «Mai in Angriff nahm, so ist durch stetes Aufschieben diese lange «Verzögerung entstanden. Um mich einigermassen zu entschuldigen, «will ich anführen, dass ich an den 4 ersten Wochentagen Morgens «von 6—8 und von 10—12 Unterricht habe, dass der Nachmittag «durch die grosse Hitze die ernste Arbeit erschwert, und dass in «die letzte Zeit auch allerlei Commissionsgeschäfte gefallen sind. «Mein Schnupfen hat auch auffallender Weise während der grossen «Hitze fortgedauert und mir den Schlaf gestört. Ich hoffe nun, die «jetzige Abkühlung werde zu meiner Erholung beitragen; aber leider «kommt nun die Vorsichtsrechnung.

«Da ich die Antwort nicht länger aufschieben kann, so ant«worte ich für jetzt nur auf Ihren letzten Brief vom 12. Juni. — «Sie betrachten da die Pole Q einer Ebene E in Bezug auf die Glieder «f eines Gebüsches zweiten Grades; jedem Punkt Q entspricht in «der Ebene E ein Punkt P, dessen sämmtliche Polarebenen sich in Q «schneiden. Es ist *richtig*, dass die Polarebene von P in Bezug auf «die entsprechende Gebüschfläche f die Ortsfläche Q dritten Grades «im entsprechenden Punkt Q *berührt.* Aber, wenn Sie aus dem «Gebüsch einen Büschel herausnehmen, so liegen die entsprechenden

«P nicht in einer Geraden, sondern in einer Curve *fünften* Grades. «Setzen Sie nämlich als Ort von P zuerst eine Gerade, so durchläuft «Q eine auf jener Fläche^3 liegende R^3; setzen Sie dann irgend einen «Büschel aus dem Gebüsch der f, so durchläuft der Punkt Q wieder «eine auf derselben Fläche^3 liegende Curve S^3. Beide R^3 und S^3 «liegen auf einer und derselben Fläche zweiten Grades, gehören aber «hier zu verschiedenen Schaaren und schneiden sich daher in 5 Punkten «Q; diesen entsprechen also 5 auf jener Geraden befindlichen Punkte «P; folglich entspricht dem Büschel f eine in E liegende Ortscurve «P 5$^{\text{ten}}$ Grades. Ich würde es nicht wagen, die Punkte P und die «ihnen entsprechenden Gebüschflächen f *projectirisch* zu nennen, weil «keine *Proportionalität* der beide Doppelschaaren characterisirenden «Constanten stattfindet.

«Sie gehen gar nicht auf die Mängel ein, die ich mit vollem «Recht an dem Beweise für das Maximum $n^2 - n + 1$ gerügt habe. «Es frägt sich ja eben, wie wir in den Wald hineinschreien sollen. «Wenn die logische Kette nicht geschlossen ist, so giebt es keinen «electrischen Strom.

«Die Sachen sind immer noch zu schwer und zu bunt, und ich «jetzt durchaus nicht fähig, sie zu bewältigen. — Gastein liegt im «Salzburgischen; wenn ich einmal Ihre Adresse weiss, so werde ich «dorthin schreiben können. — Wenn Sie bereit sind, später einmal «einen Aufsatz von mir der Berliner-Akademie vorzulegen, so arbeite «ich gerne für diesen Zweck etwas aus.

«Ich danke Herrn *Schönemann* für sein Wohlwollen und lasse «ihn grüssen.

«Die Schusterforderung ist als verjährt anerkannt, wie mir «*Leuenberger* gesagt hat.

«Sie wegen meiner Schläfrigkeit in der Correspondenz um Nach- «sicht bittend, und Sie herzlich grüssend

«Ihr treuer und dankbarer

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Diesmal dauerte es lange bis ich Berlin verliess, bis 5. Juli, «wiewohl ich schon am 18. Mai im Besitz des Urlaubs war. Ohn- «mächtig quälte ich mich mit theils schon früher behandelten Be-

«trachtungen ab, bis ich zuletzt gar nichts mehr davon verstand und «nicht mehr wusste, was ich eigentlich wollte. Dann kramte ich 8 «Tage herum mit Ordnen und Einpacken, und ebenso lange trödelte «ich auf der Reise bis hieher, in Leipzig, München und Salzburg. «Durch Ihren Missmuth ist meine Arbeit sehr ins Stocken gerathen; «Sie verschmähten die Kleinigkeiten, wollen immer nur Neues und «Grosses fressen, während ich nicht umhin kann, an kleinlicher Ab-«rundung und möglicher Vollständigkeit zu knabern. Eigentlich bin «ich jetzt fast weiter zurück, als voriges Jahr; an die Flächen 3$^{\text{ten}}$ «Grads bin ich noch gar nicht gekommen, und die Ausstellung war-«tete nicht auf mich.

«Heute nahm ich das 11$^{\text{te}}$ Bad; verspüre noch keinen grossen «Erfolg; die ersten Bäder bewirkten den Buckel voll Rheumatismus, «der noch nicht ganz weg ist. Die Flora kommt mir hier einfältig «vor; einige Cimen, von der Höhe des Ochsen, wären hübsch, wenn «man erst oben wäre; aber meine Kraft langt nicht. Am 5$^{\text{ten}}$ August «werde ich wohl das 21$^{\text{ste}}$ und letzte Bad nehmen und am 6$^{\text{ten}}$ oder «7$^{\text{ten}}$ von dannen ziehen. An der Dauer dieses Briefes ist zu ermes-«sen, ob Zeit genug ist, falls Sie mir hieher etwas melden wollen.

«Es war mein Plan, von hier nach dem Engadin und Chur zu «gehen, aber die ersten 8 Stunden müssen zu Fuss oder à cheval und «theils über Schnee gemacht werden, was mir nicht ansteht. Will «ich nach der Schweiz kommen, so muss ich also über Salzburg nach «München zurück. Was habe ich aber davon, wenn ich schon wieder «nach Bern komme? Die gräulichste Langeweile! Signore taglöhnert «um schnöden Sold, macht Hausknechts-Rechnungen, bis ihm Kopf und «Herz bricht; bleibt mir nur übrig, mit *Rettig* Klaglieder zu singen, «oder mit Mutz auf die St. Petersinsel zu gehen. Wo bekäme ich «ein gesundes Sonnseitzimmer? Ist der Stern nicht zu ordinär? Spre-«chen Sie mit *Leuenberger*. — Wenn ich komme, werde ich mich «wohl in St. Gallen, Zürich, Aarau, Langenthal, Burgdorf oder Kirch-«berg je 1—3 Tage aufhalten.

«Am 2$^{\text{ten}}$ Juli der *Reimer*'schen Buchhandlung das versprochene «Päckli Dissertationen übergeben: es enthält nebst Gutem auch Schund; «was für Sie und Andere spezifisch ist, können Sie gleich ausschei-«den und vertheilen; das Uebrige ordnen und sich *auch einmal ob-«jectiv verhalten* und *klug überlegen*, für wen jedes Stück am besten «passe, damit wir dann zusammen berathen, wem es angeboten wer-«den soll; meine Grossmutter, eine Elsässerin, pflegte zu sagen: «es

«giebt der Nasen zwoo, was die eine nicht will, ist die ander' froh.»
«Die Medicinischen werde ich selbst theilen oder loosen lassen.

«Einige Aufgaben, die ich in Berlin noch hatte, weiss ich im «Augenblick nicht mehr, Ihre Laune lähmte mich noch mehr; viel«leicht liegen sie unten in der Koffer — in Bern werde ich aus«packen.

«Frisch! täglich gerechnet bis Sie sturm werden, dann mag am «Abend die Gräfin ergötzen.

«Seien Sie freundlichst gegrüsst und desgleichen Rettig, Schni«der, Mutz, Leuenberger *und Frau*, etc.

«*Bad Gastein*, den 25ten Juli 1855.

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

«N. B. Bei der Abgabe der Dissertationen sprach ich Reimer «selbst, erzählte ihm eine $^1/_2$ Stunde von Monsignore und klagte, dass «Ihre Abhandlung — die doch wichtiger als Vieles des Erschienenen «sei — noch nicht gedruckt worden sei. Er interessirte sich dafür «und versprach die Aufnahme zu beschleunigen. Da immer 2—3 «Hefte in Arbeit sind, ehe sie ausgegeben werden, so kann es also «doch noch 6 Monat dauern, bis Ihre höchste Arbeit erscheint.

«Bei meiner Abreise war Dr. *Borchart* zum Mitglied der Akade«mie vorgeschlagen.»

Schläfli an Steiner.

«*Herr Professor!*

«Ich habe früher einmal gegen Sie Zweifel geäussert, über den «Satz von den Brennpunkten dreier einem Vierseit eingeschriebener «Kegelschnitte (*Crelle* 45. Mai 1852). Was einen stutzig machen kann, «ist, dass man auf den ersten Blick glaubt, der Satz gelte ausschliess«lich von den Distanzen. Er ist aber dort unvollständig ausgedrückt, «insofern auch von den Projectionen der Distanzen etwas ausgesagt «werden kann.

«Es seien a, α die zwei reellen Brennpunkte des ersten Kegel«schnitts, p die Strecke auf der Mittelpunktsgeraden vom Mittelpunkt «des zweiten bis zum Mittelpunkt des dritten Kegelschnitts; b, β, q «und c, γ, r haben der Reihe nach ähnliche Bedeutung; est ist also «$p + q + r = o$. Den Winkel, den die Distanz (ab) mit der als «positiv angenommenen Richtung der Mittelpunktsgeraden bildet, be-«zeichne ich mit $<$ (ab). Dann ist

$$\begin{aligned} &< (\mathrm{a\,b}) + < (\mathrm{a}\,\beta) + < (\alpha\,\mathrm{c}) + < (\alpha\,\gamma) = < (\alpha\,\mathrm{b}) + < (\alpha\,\beta) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + < (\mathrm{a\,c}) + < (\mathrm{a}\,\gamma) \\ &= < (\mathrm{b\,c}) + < (\mathrm{b}\,\gamma) + < (\beta\,\mathrm{a}) + < (\beta\,\alpha) = < (\beta\,\mathrm{c}) + < (\beta\,\gamma) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + < (\mathrm{b\,a}) + < \mathrm{b}\,\alpha) \\ &= < (\mathrm{c\,a}) + < (\mathrm{c}\,\alpha) + < (\gamma\,\mathrm{b}) + < (\gamma\,\beta) = < (\gamma\,\mathrm{a}) + < (\gamma\,\alpha) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + < (\mathrm{c\,b}) + < (\mathrm{c}\,\beta) \end{aligned}$$

«und die drei Werthe

$$\begin{aligned} «(\mathrm{a\,b})\,(\mathrm{a}\,\beta)\,(\alpha\,\mathrm{c})\,(\alpha\,\gamma) &= (\alpha\,\mathrm{b})\,(\alpha\,\beta)\,(\mathrm{a\,c})\,(\mathrm{a}\,\gamma), \\ «(\mathrm{b\,c})\,(\mathrm{b}\,\gamma)\,(\beta\,\mathrm{a})\,(\beta\,\alpha) &= (\beta\,\mathrm{c})\,(\beta\,\gamma)\,(\mathrm{b\,a})\,(\mathrm{b}\,\alpha), \\ «(\mathrm{c\,a})\,(\mathrm{c}\,\alpha)\,(\beta\,\mathrm{b})\,(\gamma\,\beta) &= (\gamma\,\mathrm{a})\,(\gamma\,\alpha)\,(\mathrm{c\,b})\,(\mathrm{c}(\beta \end{aligned}$$

«sind mit $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ proportional, so dass also die Summe der drei «umgekehrten Werthe gleich Null ist. Die Vorzeichen der Distanzen «sind so einzurichten, dass obige sechs Winkelsummen nach dem Modus «$2\,\pi$ congruiren. Vom Brennpunkt der Parabel gilt nicht nur, dass «das Product seiner Entfernungen von beiden Brennpunkten irgend «eines andern Kegelschnitts constant ist, sondern dass eine feste Ge-«rade den Winkel zwischen diesen Entfernungen halbirt.

«Bern, den 7. Juli 1857.

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich kann nun den Punkt U, wo die bekannte Fusspunktlinie «ihre Umhüllte berührt, bestimmen. Er liegt eben so weit von «dem Scheitel der Parabel als der Berührungspunkt jenes dem Drei-«seit eingeschriebenen Kegelschnitts, welcher die Leitlinie der Parabel «im Höhenpunkt berührt.

«Ich möchte Sie bitten, diesen Abend um 8 Uhr zur Gräfin zu «kommen.

«Mit freundlichem Gruss *L. Schläfli.*»

Bern, 11. September 1855.

Der Briefwechsel stockte den ganzen Winter 1855/56. Zum nachfolgenden Brief finden sich 2 Concepte, eines vom 31. Oktober 1855 und eines vom 20.—23. April 1856. Es bestätigt dies die Behauptung *Steiners*, dass er *Schläfli* stets habe schreiben wollen, aber nichts zu Stande gebracht habe.

1856. Steiner an Schläfli.

Berlin, 20ten April 1856.

«*Lieber Schläfli!*

«So wirkt das Verhängniss! so weit hat uns Ihr vorjähriger «Kathar auseinander gebracht. Es ist nicht Rache für die acht Höllen-«tage in Bern, sondern mein geistiges Beharrungsvermögen (Inertia). «Es liegen sogar freudige Briefanfänge vom 4ten October (Paris) und «November (Berlin) vor mir, auch spätere, aber es wollte nicht gehen, «weil die Kraft, Lust und der Inhalt fehlten, auch das Vertrauen: dass «Sie im eigenen Interesse nicht thun würden, was ich verlange. — «Der seitherige Verlauf ist so:

«In Paris traf ich erst Niemand, Alles verreist, 11 leere Besuche; «nach 8—10 Tagen kamen sie an. Am ersten Mittwoch des October «lud mich *Sturm* mit *Bertrand* und *Catalan* zum Frühstück (11—5 Uhr) «ein. Als ich dabei von Ihrem Schicksal mit *Liouville* (*Crelle* und *Wien*) «sprach, war *Sturm* sehr gerührt und platzte mit dem Urtheil heraus: «dass Ihr Aufsatz über elliptische Transcendenten in *Grunert's* Archiv «das Beste wäre, was er über denselben Gegenstand gelesen habe.» «Potz Donnerwetter! wie zuckte das mir durch die Glieder. Nun hatten «auch die beiden Andern grosses Interesse und drängten, *Sturm* solle «die Abhandlung übersetzen; endlich wollte *Bertrand* sie von einem «seiner Schüler übersetzen lassen und *Sturm* sollte ein Paar Vorworte «machen; doch jener ist *Franzose* und dieser ist leider gestorben. «Als ich von Ihren andern Arbeiten (Wiener Abhandlungen) sprach, «musste ich — zu Ihrem grossen Leid! — auch Ihre *unmenschliche* «Seite berühren, zur Erklärung, warum Sie noch keine Exemplare ge-«schickt haben und meine Befehle fruchtlos blieben. Da baten mich «*Sturm* und *Bertrand*, die Deutsch lesen, Sie nochmals zu *puffen*, was «sogleich (folgenden Tags) ich zu thun versprach; aber es gelang mir «nicht, — auch entmuthigte mich die wahrscheinliche Erfolglosigkeit, «Hätte ich Macht über den Ziegel, so würde ich jetzt noch donnernd «befehlen sogleich Exemplare zu schicken und zwar an: 1) die Akademie, «2) *Poncelet*, 3) *Lamé*, 4) *Liouville*, 5) *Chasles*, 6) *Bienaymé*, 7) *Binet*, «8) *Hermite*, 9) *Bertrand*, 10) *Serret*, 11) Dr. *Wertheim*, 12) Abbé «*Moigno*, 13) Dr. *Wöpcke* (arabisch drauf), 14) *Terquem* (ein Wort «hebräisch drauf), und Andere.

«Wenn dieser Befehl binnen 8 Tagen nicht ausgeführt wird, so «hol Sie . . . .

«Auf ein Exemplar setzen Sie:

A l'Académie des Sciences

hommage de l'auteur.

«oder: hommage de la part de l'auteur

«auf die andern:

A Monsieur N.

Hommage de la part de l'auteur.

«Alle Exemplare in ein Packet und darauf die Adresse

A Monsieur

Monsieur le Président

de l'Académie des Sciences Impériale

à Paris.

«und das Paket der Gesandtschaft übergeben in der Kramgasse N. 48 (?) «höflich ersucht um Beförderung. So mache ich es hier, warum sollt's «in Bern nicht auch gehen? zum Donnstig! Den meisten habe ich «von Ihnen gesprochen und Exemplare versprochen — wird mich der «Ziegel zum Lügner machen?! Erst vor 4 Wochen erhielt Prof. «*Schönemann* endlich ein Exemplar, er freute sich dennoch und dankt.

«Leider sah ich *Liouville* nicht; aber ich habe *Vielen so* ein«dringlich ans Herz gelegt, mit ihm Ihretwegen zu sprechen, dass «es geholfen hat; im einen Heft (glaube November) beginnt Ihr Auf«satz und im folgenden ist er beendet.

«[N. B. zu Oben. Wenn Sie etwa ein kleines Sätzchen «für *Liouville* oder *Terquem* bereit haben, so können Sie «es in dessen Exemplare hineilegen und mit dünnem «Faden zubinden (auch so g'macht); an *Terquem* (-Türk«heim) können sie Deutsch schreiben, von mir sprechen, «und wenn Sie irgend ein Wort hebräisch beisetzen, werden «Sie feurige Kohlen auf seinem Haupte sammeln.]»

«Meine vorjährige Verwendung bei *Reimer* zu Gunsten Ihrer «hiesigen Abhandlung blieb deshalb erfolglos, weil *Crelle* bereits mehr «als 2 Bände zum Voraus hatte drucken lassen; so sagte mir *Reimer*, «als ich nach meiner Rückkunft mich flugs danach erkundigte. Bei «diesem Anlass verlangte *Reimer* von mir Rath über einen neuen Re«dacteur; ich schlug ihm vor und leitete es ein, so dass Dr. *Borchardt* «es wurde; als Unterstützer werden auch *Steiner*, *Schellbach*, *Kummer* «und *Kronecker* genannt. Die noch vorräthigen, dem alten Redacteur «eingesandten Abhandlungen wurden meist den Autoren zurückgeschickt;

«bei der Ihrigen protestirte ich, ob ich sie aber durchbringen werde, «weiss ich noch nicht; Anstand ist: weil Sie etwas von 22 Bogen «darauf schrieben, wovor man Respect hat, siehe Exempel an *Oettinger* «und *Gudermann*. *Borchardt* schlug vor, Ihnen einen Verleger zu suchen, «er wolle helfen; aber die Zeitumstände für solche Werke sind ungünstig; «ich ging desshalb bereits 2 mal zu *Reimer*, aber traf ihn nicht. «Sollte sich ein Verleger finden, so wären Sie wohl auch bereit, das «Werk zu ergänzen (den *Liouville*'schen Brocken einzuverleiben) «und geeignet zu redigiren. Geben Sie darüber Antwort. Ob ich «etwas Honorar erpressen kann, ist zweifelhaft. Findet sich kein Ver-«leger, so *zwenge* ich es durch fürs Journal. —

«Im 4$^{\text{ten}}$ Heft des 50$^{\text{sten}}$ Bandes wird Signore durch *Cayley* «verherrlicht.

«*21. April.* In Paris wollte ich M$^{\text{r}}$ *Terquem* mit Ihrem mira-«ckelösen Satz über die Fusspunktenlinie G beim Dreieck beglücken, «aber ich konnte damit nicht zu Rechte kommen. Hier zurückge-«kehrt sollte es mein erstes Geschäft sein, allein die Verwickelung «ward immer grösser, ich gerieth immer tiefer hinein, endlich fing «es an zu tagen, alles Wunderbare verschwand, so dass zuletzt am «7. Januar ein gerade nöthiger Klassen-Vortrag daraus werden konnte, «wie Sie aus dem Monatsbericht wohl schon ersehen haben. Als ich «am 31. Januar einen Plenum-Vortrag halten musste und nichts wusste, «nahm ich etwas von der f^3, was zu meinem Erstaunen bei Freund «und Feind, bei Geweihten und Laien Furore machte. Den ersten «Vortrag wollte ich mit den zahlreichen Nebensätzchen ausarbeiten «(im Monatsbericht ist das Naivste verheimlicht) und in die Denk-«schriften der Akademie geben, allein bis jetzt kam ich noch nicht «dazu, — immer einschlafen oder alberne Phantastereien. Ebenso «sollte aus einigen lumpigen Sätzchen (wovon ein Theil bereits «*Terquem* übergeben ward) eine Abhandlung werden, freiwillig in der «Akademie vorzutragen, aber auch damit kam ich nicht zu Stande, «gerieth tiefer hinein und stiess auf Schwierigkeiten, die nur Der, «welcher niemals schwach werden wollte, überwinden wird, und dem «ich sie unten mittheile. An die allgemeinen Flächen bin ich noch «nicht wieder rangekommen, seitdem meine schönen Hoffnungen in «Bern an der Knechtsgestalt zerschellten.

«Da ich geistig immer tiefer sinke, und da man mich da oben, «wo Muckerei und «*Umkehr der Wissenschaft*» auf der Fahne steht, «ganz *verworfen*, auf meine vorjährige Eingabe um gebührende Stel-

«lung mich keiner Antwort gewürdigt hat, und in 22 Jahren mir keine «Beförderung angedeihen liess, was, wie vor Jahren Staatsrath *v. «Hermann* in München sagte: «nur zu Preussens nicht zu meiner «Schande gereiche, denn ich habe ja eine geometrische Welt ge«schaffen», so reifte mein Vorsatz, das letzte Mittel zur Herausgabe «meiner Productionen zu benutzen, nämlich mit fremden Kälbern zu «pflügen. Zu diesem Behuf bin ich am 1ten April um einen zwei«jährigen Urlaub eingekommen, motivirt: «durch Annahme der mir «angebotenen Hülfe treuer Schüler, Prof. *Schläfli* in Bern und Dr. «*Sidler* in Zürich, so wie meines Freundes, General *Poncelet* in Paris, «zur Veröffentlichung meiner Forschungen im Gebiete der Geometrie.» «Als ich 3 Wochen zuvor mein Vorhaben dem Geh. Rath *Sch.* «mündlich erzählte, da erinnerte sich der Kerl sogleich, dass ich ihm «vor Jahren Ihretwegen Anträge gemacht habe, obschon er damals «nicht darauf zu hören schien. Nehmen Sie's nicht übel, dass ich Sie «als Schüler nannte, Sie haben es mir ja selbst eingeredet. Sollten «nunmehr weder Sie noch *Sidler* geneigt sein, sich mit mir zu be«fassen, so schadet es meiner Berufung auf euch doch nichts, ich «wende mich dann an Andere, in Pforzheim, Ludwigsburg, etc., oder «gehe nach Paris und mache da, so viel ich vermag. Nach 2 Jahren: «Verlängerung des Urlaubs; wird gewährt, damit ich hier nicht überall «klage und resonnire und zwar mit gutem Grund. Kontrast mit «Ihrer Weise.

«Mein heimlicher Glauben, mit den Flächen einen Preis von «3000 Fr. zu gewinnen und mit Signore zu theilen, war irrig. Es «bleibt nur die Hoffnung auf das Honorar. Bereits sind mir 2 Fried«rich-d'or ($= 41\frac{1}{2}$ Fr.) per Bogen geboten. Etwa 10—12 Bogen «kanns werden.

«Das Beste wird sein, dass ich den *Helfer* adoptire, oder ihm «eine lebenslängliche Rente aussetze, d. h, die Zinsen eines unver«äusserlichen Kapitals, wofür er noch nach meinem Tode fort redigirt «und wenn er stirbt, das Kapital entweder einem meiner Verwandten «zufällt, oder die Zinsen alljährlich für wissenschaftliche Leistungen «oder für andere nützliche Erfindungen als Preis ertheilt werden. «Denn dass ich das durch grosse Sparsamkeit mühsam Erworbene «alles ungeschlachten Verwandten soll zukommen lassen, ist *nicht «möglich, absolut unmöglich, das thue ich nicht.* Bloss einige Schwester«kinder in Koppigen sollen den gebührenden Antheil erhalten. Jene

«Schwester, welche Sie in Utzenstorf sahen, ist am 2ten Februar in «Kirchberg gestorben, und dabei sind Unbilligkeiten vorgefallen, die «mich aufs Aeusserste empört haben. Genug mein Entschluss, den «ich ohne diess schon lange hegte, steht fest: einem Theil meines «Vermögens eine ewig fortdauernde wissenschaftliche Bestimmung zu «geben.

«Da Sie in eigenen Angelegenheiten so verschlossenen Charak-«ters sind, so werden Sie vor der Hand auch Niemand von meinem «Urlaub, etc. sprechen.

«*(22. April.)* Nun sollen Sie auch etwas für den Rüssel haben, «wenn derselbe noch bei Kräften ist. Ich hatte diesen Winter einige «Male so eine einzelne Aufgabe; wo dieselben sind, und was ich jetzt «aufgable, weiss ich nicht. Auf die Ordnung kommt's nicht an, daher «will ich blindlings beginnen.

«Ein Mr. Terquem übergebenes Sätzli heisst:

«Haben drei begrenzte Gerade $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, in einer Ebene, den-«selben Punkt m zur Mitte, so sind sie Durchmesser eines bestimm-«ten Kegelschnitts m^2, und so schneiden sich sowohl die vier Kreise «abc, $a\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$, $c\alpha\beta$ in einem Punkte d, als auch die 4 Kreise $\alpha\beta\gamma$, «αbc, βac, γab in einem Punkte δ, und es ist $d\delta$ ein vierter Durch-«messer des Kegelschnitts m^2.» (Beweis: elementar.)

«Daraus werden durch «*Spinnen und Drehen auf dem Absatz*» «eine Reihe Folgerungen gezogen. Z. B. fixirt man die Kreise abc «und $\alpha\beta\gamma$ und lässt sodann die Durchmesser $b\beta$ und $c\gamma$ dem festen «$a\alpha$ ∞ nahe rücken, so wird der erste Kreis der Krümmungskreis in «a, und ist sehr einfach und elegant durch den zweiten bestimmt. «Eine weitere Folge ist: «Dass wenn m insbesondere der Schwer-«punkt des Dreiecks abc und somit m^2 nothwendig Ellipse ist, als-«dann die drei Krümmungskreise in a, b, c durch einen und denselben «Punkt d in m^2 gehen, und abcd in einem Kreise liegen.» Und umge-«kehrt: «Durch jeden Punkt d der Ellipse gehen 3 Krümmungskreise «und ihre Osculationspunkte a, b, c sind die Ecken eines eingeschrie-«benen Dreiecks von grösstem Inhalte und liegen mit d in einem «Kreise.»

«Dies findet alles *wörtlich gleich* beim sphärischen Kegelschnitt «statt (Schnitt der Kugel mit einem concentrischen Kegel 2ten Grads).

«Nun aber beginnt mein Jammer. Auf der Kugel ist der Satz «*sphärisch polarisirbar*, wobei Kreis in Kreis übergeht, so dass ein «neuer Satz über das dem sphärischen Kegelschnitt umschriebene *Drei-*

«*seit* vom *kleinsten Umfang* entsteht. Danach fühlte ich, dass auch «beim *ebenen* Kegelschnitt m^2 entsprechende Sätze stattfinden müssen, «wenn auch nicht *polare* so doch *duale*, und zwar in folgender dop-«pelter Gestalt.

«I. Sind in 1 Ebene drei Paar ⊐⊏ Gerade $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ von einem «Punkte m gleich weit abstehend (jedes Paar für sich), so berühren «sie einen Kegelschnitt m^2. Dem Dreiseit abc lassen sich 4 Kreise K «einschreiben; ebenso den Dreiseiten $a\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$, $c\alpha\beta$ je 4 Kreise K_1, «K_2, K_3. Von diesen Kreisen müssen nun 4 Mal 4, je von jeder Gruppe «einer, eine gemeinschaftliche Tangente d haben, welche zugleich auch «den Kegelschnitt m^2 berührt. Oder: Jeder der 4 Kreise K muss mit «*einem bestimmten* der 4 Kreise K_1 eine gemeinschaftliche Tangente «d haben, welche auch m^2 berührt (und zwar sind a und d conjugirte «gemeinsame Tangenten der Kreise K und K_1, d. h. entweder beide «*äussere* oder beide *innere*).

«II. Werden drei beliebige Winkel $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, in 1 Ebene, von «derselben Geraden m gehälftet, so sind sie einem bestimmten Kegel-«schnitt m^2 umschrieben, welcher m zur Axe hat. Die den 4 Drei-«seiten abc, $a\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$, $c\alpha\beta$ eingeschriebenen Kreise haben die vorige «Eigenschaft, nämlich zu vier 4 gt=4d, welche auch m^2 berühren. «— Die den 4 Dreiseiseiten $\alpha\beta\gamma$, αbc, βac, γab entsprechenden 4 δ «schneiden ihre correspondirenden 4 d auf der Axe m, und diese hälf-«tet die Winkel dδ.

«Lässt man nun, bei I. oder II., die Geraden b und c der festen a «unendlich nahe rücken, so gehen von den 4 Kreisen K zwei in einen «Punkt über, der dritte wird ∞, und der 4[te] wird Schmiegungskreis «im Berührungspunkt a_0 der a, und hat mit m^2 noch die Tangente d «gemein. Und daher weiter: Ist dem m^2 ein Dreiseit abc von klein-«stem Umfang umschrieben, so haben die drei Krümmungskreise in «den drei Berührungspunkten a_0, b_0, c_0 mit m^2 dieselbe Tangente d «gemein; und umgekehrt: Jede Tangente d des Kegelschnitts m^2 wird «von irgend drei Krümmungskreisen desselben berührt, und die den «Osculationspunkten a_0, b_0, c_0 zugehörigen Tangenten a, b, c bilden ein «umschriebenes Dreieck von kleinstem Umfang, dessen innerer Kreis «(derjenige von den 4 K, der innerhalb des Dreiseits liegt) auch die «d berührt; die drei äussern Kreise berühren m^2 (sowie die Seiten) «gerade in den Punkten a_0, b_0, c_0. (Siehe Ende meiner Abhandlung «Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe» in Crelles Journal «1847.) Wohlan! setzen Sie an, und entscheiden Sie bald, was daran «wahr oder falsch ist, damit ich den Aufsatz beenden kann. — Es «muss gewiss auch projektivisch gehen, wenn ich Kraft hätte. — Beim «sphärischen Kegelschnitt ist alles analog.

«Das Bestreben, etwas Analoges bei der allgemeinen f^2 zu finden, «führte auf einen schönen Satz, den ich Ihnen nicht vorenthalten «darf, obschon Sie ihn v. J. selbst auffinden sollten, aber den Dienst, «als nicht amtlich, verweigerten. Er offenbart eine neue Eigenschaft «eines speziellen $G(f^2)$. Ich leite wie folgt ein.

«Gegeben eine f^2. Bewegt sich Pol P in einer Geraden G, so «dreht sich seine Polarebene um eine andere Gerade H, und umge«kehrt. Ich nenne G und H *reciproke Gerade* in Bezug auf f^2.

«*Zieht man in f^2 irgend drei Sehnen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, welche ein «Paar reziprocke Zwecke G, H schneiden, so gehen die vier Ebenen «abc, $\alpha\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$, $c\alpha\beta$ durch einen Punkte d, sowie die 4 Ebenen $\alpha\beta\gamma$, «abc, βac, γab durch einen Punkt δ, beide Punkte liegen in der Fläche «f^2 und die Sehne $d\delta$ schneidet G und H.*" Die Endpunkte jeder «Sehne und ihre Schnitte mit G, H sind harmonisch. *Die Schnitt«linie, etwa L, je zweier Gegenebenen abc und $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma$ und abc, etc. «schneidet ebenfalls beide Gerade G, H.* (Welche Beziehung haben «diese 4 L zu jenen 4 Sehnen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$? folgen diese rück«wärts aus jenen?).

«Auf dem Absatz gedreht, scheint mir zu folgen:

«Alle f^2, welche durch die 6 Endpunkte $abc\alpha\beta\gamma$ gehen und «G, H zu reziprocken Geraden haben, gehen auch durch die beiden «Schnittpunkte d und δ der zweimal 4 Ebenen und bilden ein $G(f^2)$, «dessen Kerncurve R^6 aus G, H und dem 4 L besteht.»

«Sind G, H und etwa die 3 Endpunkte a, b, c beliebig gegeben, «so sind α, β, γ, als vierte harmonische Punkte, bestimmt; also wird «im Grunde nur verlangt: die f^2 soll durch drei gegebene Punkte «a, b, c gehen und die gegebenen G, H zu reziproken Geraden «haben; folglich zählt ein gegebenes Paar G und H für 4 Beding«ungen, für 4 Punkte.

«Schneiden zwei Gerade G, H irgend 4 begrenzte Gerade $a\alpha$, «$b\beta$, $c\gamma$, $e\varepsilon$ harmonisch, so sind letztere gemeinsame Sehnen eines «$B(f^2)$, von dessen Grundcurve R^4 unendlich viele Punktenpaare d, δ «leicht zu construiren sind; nämlich je drei der 4 Sehnen geben «mittels der durch ihre Endpunkte gelegten 2 mal 4 Ebenen ein «solches Paar, oder eine neue Sehne $d\delta$; und sodann bestimmen «diese 4 neuen Sehnen, unter sich (?) und mit den gegebenen zu je «drei verbunden, wiederum andere neue Sehnen, u. s. w. in infinitum. «Alle sind Sehnen der R^4 und werden von G, H harmonisch ge- «schnitten; aber sie liegen nicht in einem Hyperboloid, sondern in «(?) in f^4; denn eine freie Gerade J bestimmt mit G und H ein Hy- «perboloid J^2, das die R^4 in 8 Punkten, und zwar in 4 Paaren d, δ «schneidet, so dass also J von 4 Sehnen d δ getroffen wird, und folg- «lich der Ort der letztern $= f^4$ ist.

«Sei gegeben $B(f^2)$. In beliebigem Punkte g der R^4 sei G die «Tangente; durch G alle Ebenen E, jede E schneidet die R^4 in zwei «Punkten h und h_1; die Schaar Geraden $hh_1 = H$ liegen in einem «Hyperboloid H^2, und G gehört zu dessen andern Schaar, und H^2 ist «Glied des $B(f^2)$. Kommt der Punkt h_1 in g zu liegen, so berührt «hier E das Hyperboloid H^2 und osculirt die R^4, und der in E durch «h gehende und die G in g berührende Kreis ist Krümmungskreis «der R^4, très beau! auch schneidet dabei die E den $B(f^2)$ in einem «$B(C^2)$, die durch Punkt h gehen und sich im Punkt g osculiren, «jenen Krümmungskreis gemein haben. — Ist alles richtig?

«*23. April.* Gegeben $B(C^n)$. Aus Pol P Normalen auf alle C^n, «so ist der Ort der Fusspunkte Q eine Q^{2n}, welche durch P, durch «die n^2 Grundpunkte p, und durch die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte d des «$B(C^n)$ geht. In jedem Q an die zugehörige C^n die Tangente t, deren «Ort $= t^x$. Dieses x hat mich genarrt; für Determinanten wird es «nicht witzig sein. x ist die Zahl der t, welche durch irgend einen «Punkt A gehen; nun schneidet der Kreis über Durchmesser AP die «Q^{2n} (ausser in P noch) in $4n-1$ Punkten Q, deren zugehörige t «durch A gehen, also sollte $x = 4n-1$ sein. Dagegen ist die Pam- «polare von A in Bezug auf $B(C^n)$ eine Curve Q^{2n-1}, die vom ge- «nannten Kreise, ausser in A, nur in $4n-3$ Punkten Q geschnitten «wird, deren zugehörigen Normalen durch P gehen, so dass $x = 4n-3$ «sein muss. Dies folgt auch daraus, dass die $2n \times (2n-1)$ Schnitte «der Curven Q^{2n} und Q^{2n-1} aus den $n^2 p$, $3(n-1)^2$ d und $(4n-3)$ «Q bestehen. Jene zwei falschen Punkte, welche der Kreis mit Q^{2n} «gemein haben soll, sind wohl die Donnstigs zwei Kreispunkte auf «G_∞! he? Dabei ist noch Eins. Ist P_1 ein anderer Pol und Q_1^{2n} «seine Pamfusspunkten-Curve, so bestehen die $2n \times 2n$ Schnitte der «Q^{2n} und Q_1^{2n} aus den $n^2 p + 3(n-1)^2 d + 2(n-1) Q_1$, diese Q_1 in «der Geraden PP_1, es fehlen also noch $4n-2$ Punkte Q, oder wenn «man die zwei Kreispunkte auf G_∞ annimmt, so fehlen noch 4 (n—1) «Punkte Q. Diese weiss ich nur so zu deuten: *Die G_∞ wird von «2 (n—1) Gliedern C^n des $B(C^n)$ berührt, durch die Berührungspunkte «gehen nothwendig Q^{2n} und Q_1^{2n}, aber sie müssen sich in derselben be-«rühren, so dass sie 2 (n—1) Asymptoten gemein haben, was die «4 (n—1) Q ausmacht.“ He?* Die analogen Betrachtungen bei Flächen, «bei $B(f^n)$ und $G(f^n)$.

«Kann es zwei solche Kegelschnitte geben, wovon jeder durch «ein Triangel conjugirte Punkte (x, y, z) des andern geht? — Des-«gleichen bei den Flächen f^2 rücksichtlich der Quadrupel; hier wird «es gehen, aber wie weit kann man die Forderung steigern?

«An Ihre *Menschlichkeit* möchte ich schliesslich noch die Bitte «wagen: zuerst jene leichten Dinge zu beantworten, die ich zu meinem «Aufsatze gebrauche, und die Andern nachher zu verzehren.

«Es grüsst Sie und die Andern (Leuenberger u. Frau).

Ihr dankbarer *J. Steiner.*»

«Wär's nicht möglich, dass Signore die Antwort mir flugs selbst «überbrächte? Kaum 150 Fr. Kosten; dafür Verleger, Honorar, Ge-«lehrte aller Art, Bibliothek; *A. Braun* [1], so gutmüthig wie Sie, würde «sich freuen, ihm viel erzählt, auch *Klotsch.* Kommen Sie, lassen Sie «die $1\frac{1}{2}$ Zuhörer!»

Steiner an Schläfli. [2]

Berlin, 17. Mai 1856.

«*Lieber Freund!*

«Am 23. vorigen Monats trug ich einen Brief an Sie nach dem «Anhaltischen Bahnhof, derselbe erzählte Ihnen von Paris, von meinem «Vegetiren und meinen Endzwecken, enthielt mehrere Sätze und Auf-«gaben, so wie auch eine wesentliche Frage über Ihre hiesige Ab-«handlung und deren Fortsetzung. Das Ausbleiben Ihrer Antwort ver-«ursacht mir viel Kopfbrechen und setzt mich in *mehrfache* Verlegen-«heit. Denn letzthin besuchte mich *Reimer* (als ich ihn zum 3^{ten} Mal «nicht traf) und erklärte sich bereit, Ihre Arbeit ins Journal aufzu-«nehmen und zugleich, als Buch, 200 Extraabzüge zu veranstalten; auch «liess er sich zu einem kleinen Honorar bewegen, bot 4 Thaler; als

[1]) Direktor des botanischen Gartens in Berlin.
[2]) Ein Concept vorhanden.

«ich sagte, das wäre nur 15 Fr., er solle auf 20 Fr. steigen, lächelte «er und meinte, es käme nicht wieder ein. *Borchardt* ist aber noch «nicht so wohl geneigt, hinter meinem Rücken eher entgegen. Nun «kann ich es aber nicht durchzwengen, bevor ich Ihren Willen kenne. «Kurz ich stecke drinn — weiss nicht, was machen. Dass mein «Brief verloren gegangen, ist unwahrscheinlich. Dass Sie todtkrank, «ebenso; dass Knechtsarbeit eine Antwort unmöglich macht, eben-«so; dass meine Aufgaben unlösbar, ebenso, zudem brauchen sie nicht «absolut gelöst zu werden; dass Sie böse sind, ebenso, denn ich «wüsste nicht wesshalb, auch wäre es kleinlich, unmännlich mir nicht «— wenn auch derb — die Gründe anzugeben. Was daher auch ob-«walten mag, so sind Sie so gut, mich mit umgehender Post aus dieser «peinlichen Ungewissheit zu erlösen. Bisdahin enthalte ich mich jeder «weitern Frage über Dinge, die ich beschliessen muss, z. B. über die «Denkschriften der Akademie und andern Bücher, ob ich sie ver-«kaufen oder mitschleppen soll, etc.; eben so der Sätze und Aufgaben.

«Mit Spannung einer Antwort entgegensehend grüsst Sie «herzlich Ihr dankbarer

J. Steiner.

«NB. *Reimer* war bereit ein Werk von mir über «Algeb. «Curven und Flächen» 20—30 Bogen zu verlegen. Auch lehnte er «nicht ab, denselben Gegenstand von Ihnen analytisch behandelt, oder «eine Analytische Geometrie später noch folgen zu lassen, als ich ihm «versicherte, dass dieselbe reicher und besser sein würde, als alle «bisherigen.»

Schläfli an Steiner.

Bern, den 19. Mai 1856.

«*Lieber Freund!*

«Der längere Aufschub meiner Antwort rührt davon her, dass «ich mich vorbereitete, um ausführlicher auf Ihren letzten Brief zu «antworten. Mit Ihrem ersten Vortrag in der Akademie ist es sonderbar «zugegangen. Sie haben die Hypocycloide mit den drei Rückkehr-«punkten zu betrachten fortgefahren und daran Dinge entdeckt, die ich «nicht ahnte. Und gleich nach Ihrer Abreise habe ich mich auf das «gleichseitige, der gleichseitigen Hypocycloide eingeschriebene, Dreieck «geworfen, und da ebenfalls artige Dinge gefunden, wie unter anderm «eine Umhüllte, die ihre eigene Polare ist (in Bezug auf einen Kegel-

«schnitt). Auf Ihre Fragen kann ich jetzt noch nicht antworten, ich «habe die Zeit gebraucht um die Hypocycloide zu verdauen. In Ihrer «Abhandlung steckt ein Rechnungsfehler. Das Curvendreieck ist *doppelt* «so gross als der eingeschriebene Kreis. Die Rectification ist richtig.

«Sie erwähnen mit keiner Silbe, ob Herr *Crelle* noch unter den «Lebenden weilt. Was meine Abhandlung über n-Dimensionen betrifft, «so bin ich mit 15 Fr. zufrieden; und wenn an dieser Bedingung der «Abdruck scheitern sollte, so abstrahire ich von derselben und ver«lange nur, dass sie nach vielen Jahren endlich einmal veröffentlicht «werde. Die Fortsetzung ist längst geschrieben; ich könnte zwar «manches jetzt anders redigiren; doch ist dieses nicht von grossem «Belang. Es ist durchaus keine Gefahr, dass es damit wie bei *Oettinger* «und *Gudermann* gehe; ich bin nicht so weitschweifig.

«Ich werde fortan die Zeit zu mathematischer Thätigkeit nur «noch stehlen müssen. Denn einmal habe ich für drei Halbjahre den «Unterricht in der reinen Mathematik am hiesigen Vorbereitungscurs «auf das Polytechnikum übernommen, sodann die Liquidation der 18 «Versicherungsgesellschaften, mit der Verbindlichkeit, ungefähr in einem «Monat, je eine Gesellschaft zu spediren. Das letzte ist freilich eine «beschwerliche Last, wird mich aber ein für allemal ökonomisch sicher «stellen.

«Von *Liouville* habe ich nie eine Antwort erhalten, und ver«wunderte mich auch darüber, dass Sie mir nicht von Paris aus «schrieben. Die Abhandlung, die *Liouville* aufgenommen hat, ist ans «Ende des Bandes gerathen, so dass ich nicht ein Druckfehlerverzeichniss «einsenden kann, und doch ist gleich auf der ersten Seite ein sinn«störender Druckfehler und nachher kommen noch mehr. Wie ich «jetzt die Abhandlung ansehe, reut es mich, dass ich keine Beweise «dazu gegeben habe.

«In aller Eile schliessend grüsst Sie herzlich

«Ihr dankbarer Schüler

«Nachmittags 4 Uhr. *L. Schläfli.*»

Von diesem Zeitpunkte an stockt der Briefwechsel, denn *Schläfli* war über *Steiner* sehr ungehalten und die beiden Freunde überwarfen sich, nicht, dass es *Schläfli* äusserlich zeigte, aber er beschränkte den Verkehr mit *Steiner* auf das Nothwendigste, besonders auch dann als *Steiner* ganz sich zurückgezogen hatte und von seiner Pension in Bern oder Utzenstorf lebte. Das Zerwürfniss kam hauptsächlich zum Ausbruch bei Anlass der Abhandlung *Steiners* «Ueber eine besondere Curve 3ter Classe und 4ten Grades» gelesen in der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 7. Januar 1856. (Vergl. den Brief vom 20. April an *Schläfli*.) Die Abhandlung ist in den Monatsberichten der K. Akademie und im *Crelle*'schen Journal, Band LIII (auch Ges. Werke, Werk II p. 640—47) abgedruckt.

Wie aus dem Briefwechsel sich ergiebt, hat *Steiner* das genannte Problem *Schläfli* vorgelegt und letzterem auch eine Reihe der interessantesten Sätze über die fragliche Umhüllungscurve mitgetheilt.

Die Entdeckung aber, dass die Curve eine *Hypocycloide* sei, schrieb *Schläfli* sich selber zu. *Steiner* aber hat in der ganzen Abhandlung den Namen «Hypocycloide» nirgends ausgesprochen, *Schläfli's* erst gegen Schluss der Abhandlung bei Anlass einer andern Ergänzung der Curve genannt (Ges. Werke II. p. 646, Zeile 9 von unten), und dann bloss beigefügt: «Die Curve wird ferner auch durch rollende Bewegung erzeugt.»

Nach einer Photographie im Besitze von Prof. Baltzer, aufgenommen von H. Völlger.

Lichtdruck von Brunner & Hauser.

NEUERE UND ÄLTERE MURGÄNGE DES LAMMBACHES

vom Durre her aufgenommen.

a. Murgang von 1894, *b*. von 1894 und 1896.

H. von Steiger.

Die Ausbrüche des Lammbaches.

Am 26. Mai ds. Js. in den ersten Nachmittagsstunden hörten Bewohner von Schwanden bei Brienz ein fernes Donnern in nördlicher oder nordöstlicher Richtung, ohne jedoch demselben anfänglich irgend welche Bedeutung beizumessen. Erst als im Laufe des Nachmittags die Lamm einige Zeit ausblieb, wurde der Grund des, anfänglich für ein Gewitter gehaltenen, Donnerns erkannt und auch bald darauf die Absturzstelle und Sturzmasse im Lammbachgraben am *Rufisatz*, in der Höhe von Untergummen gefunden. Noch glaubten die Leute in Schwanden fast allgemein, es berge diese abgestürzte Masse keine Gefahr; sie würde nach und nach durch die Lamm dem See zugeführt, meinten die Einen, sie bleibe oben liegen und verfestige sich, glaubten die Andern, bis sie am Sonntag den 31. Mai um 3 Uhr 40 Min. Morgens durch dumpfes Donnern und Rauschen aus dem Schlafe geweckt wurden; es war dies der erste sogenannte «trockene Stoss» des Lammbachausbruches, vom Mai 1896, der sich auf der nordwestlichen Seite des grossen, zwischen Oberschwanden—Hofstetten—Kienholz am Fusse des Rothhorn gelegenen Schuttkegels gegen den letztgenannten Ort heranwälzte, viele Jucharten nutzbaren Landes für Jahrzehnte der Kultur entreissend, mehrere Familien zwingend, ihre Wohnungen zu verlassen.

Die Gesammtlänge dieses Schlammstromes vom Brienzer-See bis an den Fuss der abgestürzten Masse mag ungefähr 3½ km messen, die Breite, am unteren Ende des Ablagerungsgebietes, auf der Strasse bei Kienholz circa 120 m, weiter oben natürlich weit weniger. Die Mächtigkeit dieser Schuttmasse, auf genannter Strasse 2,5—3 m, nimmt nach oben, mit Abnahme der Breite zu, bei Unterschwanden beträgt sie circa 4 m.

Es ist dieser einer der unzähligen Schuttströme, die im Laufe der Zeit, zwischen Hofstetten—Kienholz oder gar Schwanden hin und her pendelnd, den grossen, zwischen den genannten Orten liegenden Schuttkegel[1]) gebildet haben; speziell bewegte er sich zum grösseren Theile auf dem südöstlichen Arme des Stromes von 1894, zum Theile rechts davon, weiter unten zu beiden Seiten der Schwandenbachschale, diese selbst vollständig zudeckend. Er ändert, wider Erwarten, zweimal seine Richtung: nach dem Austritt aus dem Tobel biegt er plötzlich von Süden nach West-Süd-West um und nach circa 800 m nach Süd-West, um nach 1200 m die Bahn und den See zu erreichen.

Im Gegensatz zu anderen Schlammströmen führte dieser letzte Ausbruch wenig Schlamm, auch wenig grosse Blöcke, weniger als frühere Ausbrüche, dagegen auffallend gleichmässiges Material an faust- bis kopfgrossen Trümmern, die ziemlich gleichförmig die ganze Breite des Stromes zusammensetzen, in seinem unteren Drittel mehrere primäre Längswülste bildend.

Von Radial- oder Randspalten war nichts bemerkbar, auch nicht 14 Tage nach dem Ereigniss.

Das Schuttmaterial besteht aus scharfkantigen, rhomboëdrischen bis würfelförmigen, aus den Berriasschiefern und Kieselkalken des Neocom herrührenden Trümmern, die wirr durcheinander liegen, ohne eine Spur von Regelmässigkeit in der Stellung zu zeigen, wie sie hin und wieder bei solchen Schuttströmen wahrgenommen wird, ähnlich der Geschiebestellung in Kiesbänken der Flüsse. Auf diesen Trümmern lagen zum Theil mächtige Stämme, die aber, ihrem Aussehen nach zu schliessen, schon sehr lange Zeit im Schutt des Grabens gelegen haben müssen; grünes Holz führte der Strom nicht.

Die Geschwindigkeit, mit der diese Masse sich vorwärts bewegte, war sehr verschieden. Rückte das untere Ende nur äusserst langsam gegen Kienholz vor, so dass die Bauern das Gras vorweg mähen konnten und die im Stromweg stehenden Bäume stehen blieben, so

---

[1]) Derselbe, sowie überhaupt das nördlich davon gelegene Abrissgebiet, soll Gegenstand einer späteren Arbeit sein.

Fig. 1.

R = Rufisatz, A = Abrissfläche, BBB = ungefähre Lage des Blauen Egg.
S = Sturzmasse im Sammelkanal.

habe ich um $6^1/_2$ Uhr Morgens zwischen Unter- und Oberschwanden,[1]) also noch immer auf der flacheren Strecke, ein Fortschreiten von 24 m in der Minute gemessen, bei einer Breite der Flussmasse von 10—11 m; die abgelagerte Masse mochte hier 50 m breit und 4 m mächtig sein. Bei Oberschwanden, bei einer Breite der beweglichen Masse von 7—8 m, eine Geschwindigkeit von 36 m per Minute; hier hatte der Schlammstrom sein Bett schon erheblich errodirt. Gleich unterhalb des Austrittes aus dem Tobel 2 m per Secunde; hier hatte, es mochte 9 Uhr Morgens sein, der Strom sein Bett schon bis auf den festen Fels, 3 m tief, ausgezogen, nachdem er zuerst, bald nach Beginn der Bewegung, 5,5 m über das Bett der Lamm hinaufgereicht; also ein Sinken der Oberfläche um 8—9 m in 5 Stunden. Die fliessende Masse mochte hier 6 m breit sein. Auch zeitlich war die Geschwindigkeit an gleichen Orten verschieden (abgesehen von den steten momentanen Schwankungen in Geschwindigkeit und Niveau), indem bis $7^1/_2$ Uhr der Strom steiniger, weniger flüssig war.

Die Bewegung selbst war analog derjenigen in Flüssen: Grösste Geschwindigkeit mit dem gröberen Material in der Mitte, Abnahme der Geschwindigkeit und feineres Material gegen die Ränder hin.

All' dieser Schutt stammt nur zum Theil aus der abgestürzten Masse, zum grösseren Theile ist es im Graben der Lamm liegendes, meistens von den Seiten abgestürztes Material, das hier stellenweise eine Mächtigkeit von 60′ hat und mit dem Fortschreiten des Einschneidens in die Schutthalden durch das Nachstürzen der Steilränder dem Strome immer neue Nahrung lieferte.

Es mochte 1 Uhr Mittag sein, als der Strom zum Stehen kam.

Die Sturzmasse hat sich oberhalb der «*Blauen Egg*» von der linken Seite des Baches, vom sogenannten *Rufisatz* (Fig. 1) abgelöst. Nach der Schilderung von *Andreas Mäder* von Unter-Schwanden, bildete sie eine mit Rasen und Tannen besetzte schmale Terrasse mit steilem, «aber nicht gerade felsigem» Abfall gegen den Lammbach. Vor Wasseraustritt aus diesem Terrassenabfall hat *A. M.* nie etwas bemerkt. Schon seit 15—20 Jahren soll unmittelbar oberhalb dieser Terrasse ein Anriss sichtbar gewesen sein, ein Absitzen von circa 4′,

[1]) Auf den älteren Karten 1/50,000 sind die Namen: «Alt- und Neuschwanden» verwechselt. In dortiger Gegend sind neben Alt- und Neuschwanden auch die Namen Unter- und Oberschwanden gebräuchlich.

doch war noch im vorigen Herbste keine Veränderung desselben bemerkbar. Der Lammbach selbst zeigte an dieser Stelle ein Ausweichen nach dem rechtseitigen Grabenrande, verbunden mit einer Gefällsverminderung.

Bei meiner Ankunft war der Raum von der Abrissstelle bis zum untern Ende der Rippe des «*Blaue Egg*», circa 290 m lang und 150 m breit, durch die Sturzmasse vollständig ausgefüllt. Offenbar durch genannte Rippe in ihrer Lage gehalten, konnte nur Material von dem dieselbe allerdings um 100′ überhöhenden Theile der Masse abstürzen. Dieses Retentionsbecken zeigt die Form eines spitzwinkligen sphärischen Dreiecks, dessen lange Seiten von der linken Grabenwand und dem *Blauen Egg*, die kurze von dem hinteren Rande der Sturzmasse, also der Breite des Grabens gebildet wird, und dessen Spitze beim unteren Ende des «*Blauen Egg*» liegt.

Der obere Theil dieser Masse bildet einen mächtigen, bergwärts flach abfallenden Wall, ungefähr in der Mitte von einer Furche durchzogen, entstanden durch das Durchsickern des zu einem Teiche gestauten Wassers des Lamm- und Feitschgrabens. (Fig. 2).

Der am Fusse der Abrissstelle gelegene Theil bildet eine Scholle mit noch fast zusammenhängender Rasendecke und dem Waldbestand; sie zeigt noch den Charakter ihrer ersten Lage. Die Stellung der Tannen allerdings ist eine verschiedene, nicht mehr die ursprüngliche: Im obern Theile wirr durcheinander, im mittleren etwas rückwärts liegend, im untern vorwärtsliegend oder überhängend. Das in dieser Scholle liegende Gestein macht in einzelnen Theilen den Eindruck von Anstehendem, ist äusserst splittrig, schieferig, rautenförmig gebrochen; durchwegs scharfkantig zeigt es doch keine neuen Bruchflächen, sondern überall den Charakter der Verwitterung. Im Ganzen flach gegen die Furche abfallend ist diese Scholle wieder in kleinere Schollen zerlegt mit Steilabfall gegen die Abrissstelle. Von der Mitte gegen die rechte Grabenseite hin steigt die Masse um 10—15 m an, verliert die Rasendecke und geht in nackten Schutt über, untermischt mit grossen Lehmblöcken, aber nur wenigen grossen Felsblöcken. Nahe der rechten Grabenseite wird die Sturzmasse der Länge nach und parallel der Grabenseite von einem Bande oder Walle grosser blauer thoniger oder lehmiger Blöcke durchzogen (Fig. 2), die deutliche Gleit- oder Quetschflächen zeigen und von kleinen und kleinsten scharfkantigen Gesteinstrümmern erfüllt sind. Auch in diesem Theile nahm ich keine Blöcke mit frischen Bruchflächen wahr, dagegen einige von ausgeprägt linsenartiger Form mit auffallenden Gleitflächen.

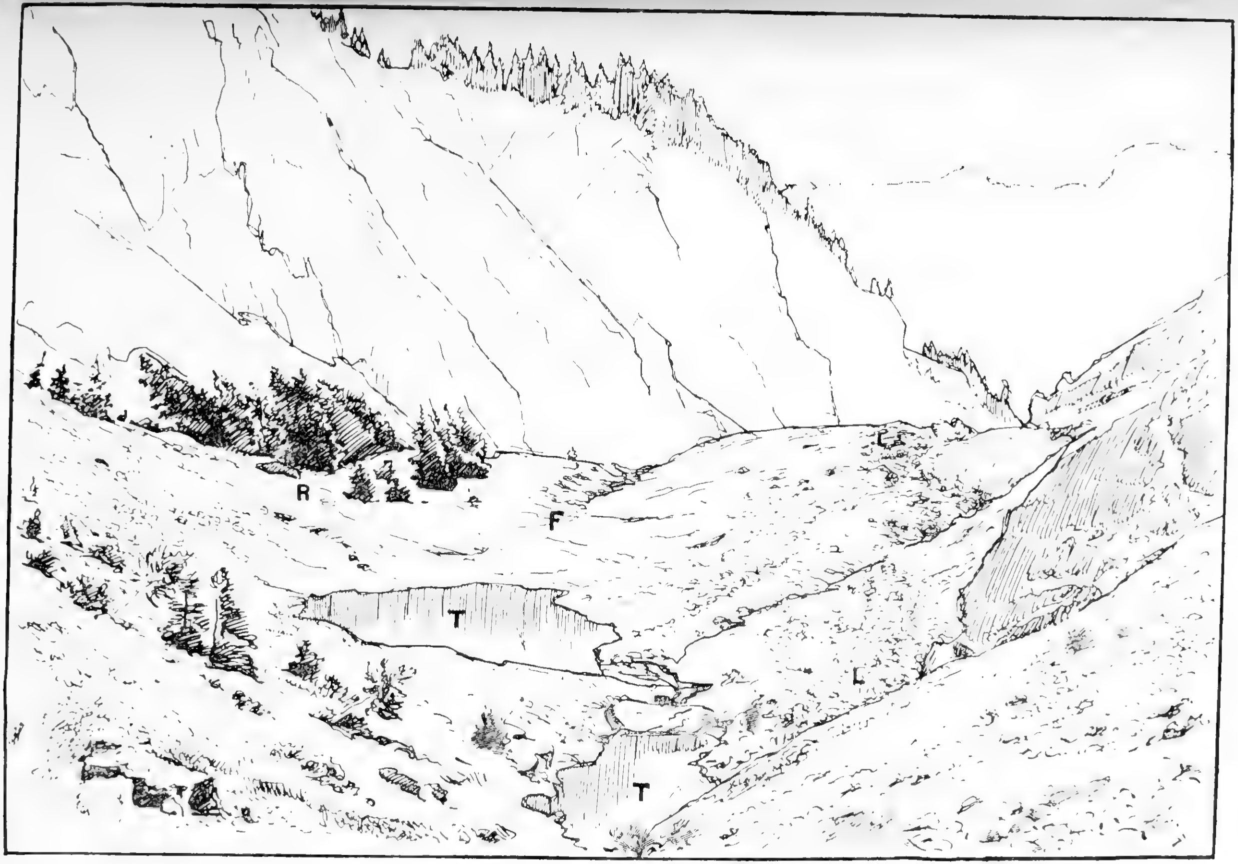


Fig. 2.
R = mit Rasen bedeckte Scholle, F = Wasserrinne, T = Stauteich, LL = Lehmwall.

Nach dem vorderen Rande hin, also über dem «Blauen Egg» ist ein Theil der Masse halbkreisförmig oder dreieckig ausgebrochen, wie an den Spuren an den Platten der rechten Grabenseite noch deutlich zu sehen war. Die Oberfläche dieses Ausbruches, 80 m lang und fast ebenso breit, ist ein wenig nach vorwärts geneigt, hat in ihrer rechten Hälfte stark gefurchtes, in der linken dagegen gestrichenes und gepresstes Ansehen.

Die Abrissfläche selbst fällt mit 49° gegen S. W. (circa), misst an der Basis ungefär 210 m und hat eine Höhe von 140 m. Sie hat in ihrem oberen Theile ungemein erdigen Charakter mit eingelagerten grösseren und kleineren Felstrümmern; im unteren Ende, bachabwärts wird eine schwache, 30° S. fallende Schichtung auf kurze Strecke sichtbar, die 14 Tage nach dem Absturz auch links oben an der Abrissstelle sich vermuthen lässt, aber an beiden Orten einen schon gelockerten Eindruck macht. Der Fuss der Abrissfläche ist durch die Nachstürze und Schuttkegel verdeckt, der mittlere Theil des ununterbrochen fortdauernen Steinschlages wegen nicht untersuchbar, doch fand ich auch frisch gefallene Lehmblöcke von derselben breccienartigen Beschaffenheit, die ich beim Lehmwall auf der gegenüberliegenden Seite beobachtet habe; sie hatten sich von einer, wie mir schien durch die ganze Abrissfläche sich hinziehenden, theils durch Schutt verdeckten Einlagerung losgelöst, über welcher an mehreren Stellen in der Abrisswand Wasser austritt, hier sickernd, dort rieselnd oder gar fliessend; am Tage nach dem Absturz soll der Wasseraustritt stärker gewesen sein.

Ob auch der Fuss der Abrissfläche von derselben Einlagerung gebildet wird, konnte nicht festgestellt werden, da er durch Schutt der Nachstürze verdeckt ist.

Der Charakter der abgestürzten Masse, die lehmige, brecciöse Einlagerung lassen mich annehmen, dass man es mit dem Absturze eines alten Schuttkegels, oder allgemeiner, einer Schuttmasse zu thun hat, über deren Herkunft ich noch nicht ganz sicher bin. Dem allgemeinen Charakter der Abrissstelle nach zu schliessen, vermuthe ich, diese abgestürzte, oben genannte Terrasse habe sich schon in früheren Zeiten einmal gesetzt und durch ihr Absitzen Theile des Anstehenden zum Nachsinken gebracht, die dann die Decke der Terrasse bildeten und nun als «Rasenscholle» am Fuss der Abrissfläche liegen.

Die, die fast senkrechten, 300 m hohen, stellenweise am oberen Rande nur 400 m von einander abstehenden Grabenwände bildenden

Neocomkalke fallen am unteren Ende des Tobels mit circa 25° gegen O. 15° N. in der Nähe der Abrissstelle 30° S. O. (könnte auch Schieferung sein, während Fallen 15° N. sein könnte), doch ändert sich die Lagerung sowohl im Fallen als im Streichen sehr rasch, an vielen Stellen scharfe Windungen und Knickungen zeigend. Die blättrige Schichtung und die fast senkrecht darauf stehende enge Klüftung des Gesteins machen dasselbe sehr bröckelig, verwitterbar und zum Abstürzen geneigt. Ob nicht schon unterhalb der von *Kaufmann* erwähnten Stelle die Berriasschiefer im Graben anstehen, wird eine spätere Prüfung der Localität zeigen.

Eine Begehung des Weges von Gummenalp nach Giebeleggalp im Oktober 1895 lässt mich vermuthen, dass der Rufisatz, von welchem die Masse sich abgelöst, ein früher schon einmal zum Abritzen gelangter Komplex ist. Diese Absitzung lässt sich vom linken Grabenrande in der Höhe der Gummenalp in nördlicher und nordwestlicher Richtung, den Weg nach der Giebeleggalp durchsetzend, nach dem Feitschgraben verfolgen.

Am Rufisatz, oberhalb der Abrissfläche, zeigen sich zwei neue Risse. Der obere zieht sich in N. W. Richtung, Feitsch- und Lammgraben durchsetzend, dann dem «Band» entlang, fast ununterbrochen bis nahe an den Grat und biegt dann nach Süden um; er lässt sich bis etwa 100 m oberhalb der Irtschelenhütten verfolgen. Ein Transversalriss zweigt oberhalb des «Bandes» vom Hauptriss ab und zieht sich in allgemein S. W. Richtung ebenfalls bis nahe an die Hütten von Irtschelen; auf dieser Seite war ein Zusammenhang beider Risse nicht zu finden.

Mehrere kleinere Spalten zeigen sich südlich und östlich der Irtschelenhütten.

Ob all diese neuen Risse sich schon vor dem Absturz vom 31. Mai oder umittelbar nachher gebildet haben, lässt sich nicht feststellen, da diese Alpen in dieser Jahreszeit noch nicht bewohnt und auch nicht begangen waren; sicher ist, dass sie im Spätherbst 1895 noch nicht sichtbar waren.

Der Lammbach erhält sein Wasser nur zum geringeren Theil aus dem obern Lamm- und dem Feitschgraben, da diese bei trockener Jahreszeit trocken sind, zum grössten Theile von einer Quelle, die ungefähr 100 m oberhalb der «*Blauen Egg*» im Graben austritt, nun aber durch die Sturzmasse zugedeckt ist. Diese Quelle liefert Sommer und Winter Wasser genug, um eine kleine Säge zu treiben.

Der im Oktober 1895 ziemlich reichlich gefallene und wieder geschmolzene Schnee, der milde aber nasse Winter 95/96, der gewaltige Schneefall im Frühjahr und der anhaltende Regen im Mai, mögen wohl die letzte, unmittelbare Ursache für den Absturz gewesen sein, indem sie einerseits die Rutschmasse vollständig durchfeuchtet und dadurch deren Gewicht bedeutend erhöht, andererseits durch die angegebenen Risse und Klüftungen die unteren, früher erwähnten thonigen Schichten dermassen aufgeweicht haben, dass sie den Druck nicht mehr aushalten konnten und zum Ausgleiten gebracht wurden. Es war aber kein Stürzen, sondern ein Abritzen (längs einer Kluftfläche oder einer Anrissfläche), die unteren Partien wurden hinaus und an die gegenüberliegende Grabenwand hinaufgequetscht, von wo sie wieder zurückbrandeten; ihr frühere Lagerstätte wird nun von der Decke eingenommen. Diese Bewegung war aber nicht eine einseitige, nicht nur ein Absitzen, sondern auch Abwärtsgleiten nach dem unteren Ende des «*Blauen Egg*» hin.

Das Wasser eines Teiches, am 31. Mai noch circa 45 m lang und 35 m breit, etwa 2 m tief, veranlasst durch die durch den Sturz gestauten Bäche des Lamm- und Feitschgrabens, sowie die obenerwähnte Quelle vermochten nun das schon durchfeuchtete und gelockerte Schuttmaterial der Sturzmasse bis Sonntag früh so aufzuweichen, dass es sich in seiner Lage nicht mehr halten konnte und ausbrach.

Der Druck der so plötzlich ausgebrochenen Masse auf das unter dem Blauen Egg im Bachbett liegende, von schlammigem Wasser durchtränkte alte Schuttmaterial war gross genug, dasselbe in Bewegung zu bringen und abwärts zu schieben.[1])

Ungefähr 800 m. westlich vom Lammbach fliesst der Schwandenbach, mit seinen Sammelbächen gegen die Schwanderfluh, Rothhorn und Giebeleggalp hinaufreichend. Er hat, wie auch der Glyssenbach, beim Aufführen des zwischen Hofstetten und Tracht liegenden Schuttkegels erheblich beigetragen. Der Ausbruch aller 3 Bäche von 1797 veranlasste sogar theilweise Räumung und Auskauf von Unterschwanden und Verlegung dieser Häuser nach Oberschwanden. Er durchschneidet die kieseligen Kalke und Berriaschiefer des Neocom, stürzt in 2 Sprüngen über den Malm hinunter, in demselben prächtige Nischen bildend und verlässt die Schlucht durch das Retentionsbecken unterhalb der sogenannten *Brüche*.

---

[1]) In der Nacht vom 11./12. Juni, ungefähr $2\frac{1}{2}$ Uhr Morgens, erfolgte ein neuer Ausbruch, der seinen Weg über den Strom vom 31. Mai nahm, aber 3—400 m oberhalb Kienholz zum Stehen kam.

Den geologischen Bau zeigt am besten die Schwanderfluh. Zu unterst, bei Schwanden, das schöne, mit dem Südschenkel unter den Schuttkegel des Schwandenbaches untertauchende Malmgewölbe, die nördlich davon gelegene Mulde (tectonische), ausgefüllt durch die scheinbar discordant aufgelagerten Berriaschiefer, diese wiederum von den concordant aufgelagerten kieseligen Kalken des Nercom bedeckt. Die Berriaschiefer und kieseligen Kalke zeigen starke Fältelung und Stauchungen, welche die scheinbare Discordanz ihrer Lagerung bewirken, und auf intensive Faltung und Pressung schliessen lassen.

Die oben genannten «Brüche» liegen am Austritt des Schwandenbaches und sind ebenfalls ein nach Süden sich öffnendes, in nördlicher und östlicher Richtung immer weiter greifendes Absturz- oder Abbruchgebiet. Die westliche Seite wird von dem circa 10° N. N. O. fallenden Malm und den noch gerade hineinragenden Berrriaschiefern gebildet, die Nord- und Ostseite von Berriasschiefern. Während der Malm früher das Retentationsbecken nördlich abschloss, ist er heute durch die von den Brüchen abgestürzten oder abgestossenen Schuttmassen bedeckt und tritt nur zeitweise an einigen Stellen zu Tage.

Diese *Brüche* lieferten das Material für die Ausbrüche des Schwandenbaches, deren Geschichte kurz folgende:

Nach den Abstürzen und Ausbrüchen von 1797 und 1840 bildete sich in den 40er Jahren oberhalb Aegerti ein noch stets sich vergrössernder Riss; um die Jahre 1855—60 versiegte unterhalb dieses Risses auf Aegerti eine Quelle; neuer Ausbruch 1860; 1868, im Juni, löste sich bei normaler Witterung von der Ostseite der Brüche ein Stück ab und gelangte als «trockene Schlammlaui» bis 50 à 100 m. unterhalb des Weges Unterschwanden-Oberschwanden, also ungefähr 700 m. weit. Nach Annahme des eidgenössischen Forstgesetzes 1876 beabsichtigte man die Aufforstung und Bepflanzung der Rutschhalden; es wurde ein 1878 ausgearbeiteter Plan bei Kanton und Bund eingereicht, worauf letzterer vor Anpflanzung die Festlegung der Schutthalden durch Thalsperren unten verlangte; 1881 wurde ein Verbauungsplan gemacht und die Kosten auf 80—84.000 Fr. devisirt. Die interessirten Gemeinden und Besitzer konnten sich nicht zu der sie betreffenden Ausgabe entschliessen und liessen die Sache ruhen, es wurde weder verbaut noch angepflanzt. 1887 wurde dann durch den Hauptsturz vom Brunni her die 1874 3 m. hoch aufgeführte und 1875 auf 6 m. erhöhte Thalsperre am unteren Ende des Retentionsbeckens etwa 9 m. hoch überführt. Dieser Absturz war bedeutend lehmhaltiger als der von 1867 und erfolgte Ende Oktober, der Ausbruch am 5. November, ohne dass der vorhergehende Sommer nass gewesen wäre.

Der in diesem Retentionsbecken liegende, hauptsächlich vom Sturz von 1887 herrührende Schutt ruht auf einer mit 15° gegen Süden abfallenden, wahrscheinlich einem alten, nach und nach abgeführten Schuttkegel angehörenden Fläche und ist am oberen Ende 12—15 m. mächtig. Er besteht aus grössern und kleinern, in blauem oder braunem Lehm oder auch nackt liegenden, scharfkantigen Felstrümmern, aus Lehmblöcken, als solche transportirt und in der Grösse bis 2—3 m³, die ebenfalls scharfkantige Trümmer einschliessen, und mit denjenigen der Sturzmasse beim Rufisatz übereinstimmen könnten.

Die «Brüche» selbst werden vom Schwandenbach nicht direkt berührt, sondern nur von einem «stets kleinen Wässerlein», dem Brüchebächli, einem Sickerwasser, *nahe dem Westrande* durchzogen.

Während der Westrand der Abbruchstelle durch den festen Kalk des Malm gebildet wird, sind die den Nord- und Ostrand bildenden Berriasschiefer, wie im Lammbach, dünnschichtig, schieferig und kurzklüftig und desshalb äusserst bröckelig. Stellenweise sind die von Hand herausbrechbaren Stücke mergelig, zeigen zuweilen deutliche Gleitflächen oder liegen in bis zu Sandkorngrösse zerkleinertem und besonders gegen das Brüchibächli hin aufgeweichtem Gesteinsmaterial.

Hier wie beim Lammbach drängt sich bei Betrachtung des Gesteins die Frage auf: Hat man es mit einem festliegenden, vollständig zerklüfteten, nach und nach abbröckelnden Abschnitt zu thun, oder mit einem in sich zertrümmerten, infolge dieser Zertrümmerung, zu reichlicher Wasseraufnahme und deren Folgen in Bewegung gerathenden und zum Ausgleiten oder Abstürzen geneigten Complexe, und sind desshalb weitere Ausbrüche und Abstürze zu befürchten?

Im kurzen Zeitraum von 100 Jahren sind, nur um die wichtigsten zu nennen, folgende Murgänge zu verzeichnen: [1])

1797	Ausbruch	des	Lamm-, Schwanden- und Glyssenbaches.
1860	»	»	Schwandenbaches.
1867	»	»	Schwandenbaches.
1874	»	»	Lammbaches.
1887	»	»	Schwanden- und Lammbaches.
1894	»	»	Lammbaches.
1896	»	»	Lammbaches.

[1]) 1499 wurde Kienholz verschüttet.

Schon diese kurze Spanne Zeit und die aufmerksame Besichtigung dieser Schuttkegel zeigen, dass letztere in der Hauptsache nicht die Folge einer einmaligen Katastrophe sind, sondern die Arbeit zahlreicher, im Laufe der Zeiten niedergegangenen Murgänge.

Die Gründe für diese Annahme, der Charakter des ganzen Gebietes mit den vielen ältern, neuern und neuesten Absitzungen, die grosse Neigung zu, weiter unten zu besprechenden, Rissbildungen, der besonders oberhalb des Anrissgebietes spärliche, Regen und Schmelzwasser frei circuliren lassende Waldbestand, die moorige Beschaffenheit einiger, gerade im Rissgebiete liegender Terrassen und Mulden, besonders aber das in Frage kommende, im Streichen und Fallen so gequälte und zertrümmerte Gestein, die stellenweise mergelige und durch Einfiltrirung von Wasser lehmige Beschaffenheit desselben, weisen darauf hin, dass diese Bewegungen ihren Abschluss noch nicht gefunden haben, dass noch weitere Murgänge oder Abstürze zu erwarten sind.

Bei Begehung, im Oktober 1895, des, nach Berücksichtigung der Verhältnisse gefährdetsten, nämlich des zwischen Schwandenbach und Lammgraben gelegenen Gebietes, konstatirte ich oberhalb und unterhalb *Aegerti Durre* mehrere vielleicht 20 m. breite, bis 1 m. hohe, aber verwachsene Absitzungen gegen den Lammgraben, parallel demselben, die sich stellenweise zu noch klaffenden Spalten erweitern.

In der Höhe von *Aegerti Durre* zieht sich die sogenannte *Aegertispalte*, ein Anriss vom Lammgraben nach dem Schwandenbach. Von dessen oberer Ecke, etwa 50 m. östlich des Stalles von *Melchior Schilt*, zieht sich der Riss in ost-südöstlicher Richtung, oben genannte verwachsene Längsabsitzungen quer durchsetzend, bis an den Lammgraben, ferner in west-nordwestlicher Richtung gegen Aegerti und den Schwandenbach. Der verticale Betrag des Absitzens mag beim Stall von Melchior Schilt 10′, gegen das westliche Ende hin 1—2′, zwischen beiden Orten stellenweise 6′ betragen. Seit Oktober vorigen Jahres hat sich dieser Riss verlängert und auch der Betrag der Absitzung hat um etwas zugenommen. Eine im Oktober 1895 noch ordentlich fliessende Quelle lieferte am 31. Mai 1896 kein Wasser, Mitte Juni nur spärlich.

Diese Risse und Spalten wiederholen sich gegen den Nord- und Nordost-Rand der Brüche hin und zwar sowohl in west-südwestlicher Richtung gegen den Schwandenbach, als auch in südlicher längs des Lammgrabens hin mit Absitzen gegen die Brüche.

Maasstab -1: 20000   Equidistanz 30m

Kartenskizze nach der topogr. Karte 1: 50000 mit einigen Ergänzungen.

Im Frühjahr 1896 entstandene Risse   + am 26. Mai 1896 verschüttete Quelle

ältere, zum Theil sich vergrössernde Risse.

Auch zeitlich mehren sich diese Risse. So bildet sich seit circa 15 Jahren ein Riss von Aegerti Durre gegen den Ostrand der Brüche hin, ohne ihn noch zu erreichen; ebendaselbst habe ich Mitte Juni einen frischen solchen mit Richtung circa Süd und oberhalb Brunni einen solchen mit Richtung Süd-Südwest gefunden, beide im Oktober 1895 noch nicht sichtbar.

Unmittelbar oberhalb des Nordrandes der Brüche zeigen sich 4 rasch sich folgende Absitzungen von verschiedener Länge und circa 2—4′ Verticalbewegung.

Alle diese Risse sind untrügliche Zeichen einer fortdauernden Bewegung des besprochenen Gebietes.

Ob Schwanden und Kienholz von einem Absturz vom *Durre* her wirklich bedroht sind, hängt von der Raschheit und Energie der Spaltenbildung zwischen Lamm- und Schwandenbach ab. Entweder schreitet das successive Abschuppen, Abstürzen gegen die Brüche hin rascher vorwärts als die Bildung und Erweiterung der Spalten, dann ist die Gefahr eines Absturzes vom Durre her vermindert; oder aber die Spaltenbildung schreitet rascher vor als die Abschuppung gegen die Brüche hin und dann wird eine Katastrophe nicht ausbleiben.

Ist Hilfe möglich, so kann sie nur im Festlegen der Masse des Abrissgebietes liegen und zwar durch Fassen und Ableiten aller Quellen und scharfe Ueberwachung dieser Leitungen, Trockenlegen der moorigen Stellen, Verhindern des übermässigen Eindringens von Regen- und Schmelzwasser durch Aufforstung im und oberhalb des Rissgebietes, Ableiten dieser Regen- und Schmelzwasser aus den Mulden, z. B. derjenigen hinter Brunni, und endlich durch Verbauung.

«Dass der Sturz einmal kommen muss, wissen wir, aber wann er kommen wird, das wissen wir nicht» erklärten mir Leute von Schwanden ganz bestimmt und ruhig, leben aber ebenso ruhig, trotzdem sie die Gefahr erkannt, auf ihrer Scholle weiter.

Th. Studer.

Pleistocaene Knochenreste aus einer palæolithischen Station in den Steinbrüchen von Veyrier am Salève.

Vor einiger Zeit erhielt ich durch Herrn *J. Reber* in Genf, welcher sich durch Erforschung præhistorischer Stationen schon so grosse Verdienste um die Urgeschichte erworben hat, eine Reihe von Knochenresten aus Ablagerungen der palæolithischen Station bei Veyrier am Salève. Die Station von Veyrier wurde schon im Jahre 1834 durch *Taillefer* aufgedeckt. Sie wurde 1868 und 1869 in der Revue Savoisienne von *Thioly*[1]), 1868 von *A. Favre*[2]) in den Archives des Sciences de la Bibliothèque universelle beschrieben. Im VI. Band, Heft I. 1872 des Archivs für Anthropologie gab dann *Rütimeyer*[3]) eine Beschreibung der dort gefundenen Thierreste und knüpfte daran Bemerkungen über Thierverbreitung im Allgemeinen und über das muthmassliche Alter der Station, das er in Parallele mit demjenigen der postglacialen belgischen Höhlen aus der Rennthierperiode[4]) stellt. *Rütimeyer* konnte nach den erhaltenen Knochenfragmenten folgende Thiere konstatiren: Pferd, Rind (nach Beschaffenheit der Knochen wahrscheinlich einer jüngeren Zeit angehörend), Hirsch, eine grosse Form, grösser als der heutige Edelhirsch und die grössten Individuen der Pfahlbauten, Rennthier, Steinbock, Gemse, Schwein (wahrscheinlich aus späterer Zeit), Alpenhase, Kaninchen, Murmelthier, Feldmaus *(Arvicola amphibius)*. Biber, Bär, Dachs, Luchs, Hauskatze (aus späterer Zeit), Marder (ebenso), Iltis (ebenso), Wolf, Fuchs, Schneehuhn, Birkhuhn, Storch, Stockente, Singdrossel (wahrscheinlich jüngeren Ursprungs), Haushuhn, Frosch oder Kröte. Am häufigsten sind vertreten das Rennthier und Schneehuhn, dann Pferd, Hirsch, Steinbock, in dritter Linie Alpenhase und Murmelthier; die übrigen Arten haben nur vereinzelte Knochen geliefert.

Das Auffallendste war, dass sich hier neben den Resten unserer bekannten Alpenthiere noch zahlreich die Ueberbleibsel des unserer Fauna ganz fremd gewordenen Rennthiers und des Wildpferdes vorfanden.

Eine Parallele zu diesen Funden bot die Grotte du Scé etwa 50 Meter oberhalb Villeneuve, wo *H. de Saussure* [5]) neben menschlichen Ueberresten aus der palæolithischen Zeit Thierknochen entdeckte, die nach den Bestimmungen *Rütimeyer's* dem Rennthier, Steinbock, Bären, Fuchs, Alpenhasen, Steinadler und Alpenschneehuhn angehörten. Auch hier waren Rennthierknochen am häufigsten, dann Steinbock, in dritter Linie Alpenhase und Schneehuhn.

Die mir vorliegenden Knochenreste haben vollkommen das Aussehen und die Beschaffenheit derjenigen aus anderen palæolithischen Stationen, z. B. vom Schweizersbild und von Thayngen. Sie sind von hellgelber Farbe, hart und spröde und kleben an der Zunge, ein Zeichen von starkem Verlust an Leimsubstanz. Diejenigen der grösseren Thiere, besonders des Rennthieres, sind stark zerschlagen, zu Längssplittern zertrümmert; bei kleineren Thieren sind die langen Knochen ganz erhalten, ein Beweis, dass der Hund nicht an den Mahlzeiten des Menschen partizipirte.

Folgende Thiere liessen sich nachweisen:

Vulpes vulgaris Gray. Fuchs.

Das Unterkieferfragment mit Reisszahn von einem alten, sehr kräftigen Thier und ein vollständiger Humerus

Meles taxus L. Dachs.

Untere Humerushälfte und Kiefergelenk.

Rangifer tarandus (L.) Rennthier.

Die Geweihstange eines jungen Thieres, Backzähne, Phalangen, Scapula und zahlreiche längsgespaltene Theile langer Knochen, unter denen die für die Art charakteristischen metatarsalia leicht zu unterscheiden sind.

Capra ibex L. Steinbock.

Ein Unterkieferbackzahn und ein Metacarpus.

Rupicapra tragus Gray. Gemse.

Backzähne und der Radius eines jungen Thieres.

Equus caballus L. *Pferd.*

Zwei Backzähne des Oberkiefers, ein Unterkieferfragment mit Pm. 3, einige Skelettknochen. Die Stücke deuten auf ein Thier von den Dimensionen des Pferdes aus der Rennthierstation von Schweizersbild.

Arctomys marmotta L. Murmelthier.

Ein Unterkieferschneidezahn, noch von intensiv gelber Farbe.

Lepus timidus L. Hase.

Zwei Femora, ein Humerus, Tibia und Schädelknochen. Nach der Form des Hinterhauptes und besonders des Hinterhauptloches, das beim Alpenhasen breiter als hoch, beim Feldhasen höher als breit ist, scheinen die vorliegenden Knochen zum Feldhasen zu gehören, und zwar Stücke von grossen Dimensionen.

Lagopus alpinus Nilss. Schneehuhn.

Humerus.

Aquila? Eine Humerusdiaphyse von einem sehr grossen Vogel, von dem zu wenig erhalten ist, um die Art noch zu erkennen.

Wie man sieht, fügt dieses neue Material zu der von *Rütimeyer* gegebenen Liste nichts Neues hinzu, auch hier herrschen die Knochen vom Rennthier vor und aus ihrer Behandlung zu schliessen, scheint dieses Thier die Hauptnahrung des palæolithischen Menschen gebildet zu haben.

Nachdem wir noch andere Stationen der palæolithischen Zeit in der Schweiz kennen gelernt haben, kommt uns die am Salève und bei Villeneuve gefundene Thiergesellschaft nicht mehr so seltsam vor. In der That finden wir alle von Veyrier und von Villeneuve bekannten Arten unter den in der Höhle des Kesslerlochs bei Thayngen [6]) und unter dem Felsen des Schweizersbild bei Schaffhausen [7]) aufgefundenen Knochenresten wieder, nur in etwas anderen Verhältnissen. So ist z. B. der Steinbock unter den bei Schaffhausen gefundenen Thieren selten, während seine Reste bei Villeneuve fast so häufig wie die des Rennthiers vorkommen.

Trotz der Uebereinstimmung dieser Faunen, die sich unter analogen Umständen in Frankreich, Belgien und Süddeutschland wiederholen, glaube ich doch nicht, dass dieselben ein gleiches Alter beanspruchen können.

Machen wir uns zunächst die Verhältnisse klar, so können wir annehmen, dass durch das Vorrücken der Gletscher einestheils von den Alpen im Süden aus, anderentheils vom Norden her die Thiere, soweit sie nicht den veränderten Verhältnissen zum Opfer fielen, nach den eisfreien Stellen zusammen getrieben wurden, wo sie nun untereinander vorkamen. Vom Norden kamen die Rennthiere, gefolgt vom Vielfrass, Moschusochsen, die Schneehasen, Murmelthiere, Lemminge, Schneehühner, vom Süden her Steinböcke und Gemsen.

Die Waldthiere, welche früher wohl die Wälder der Ebene bevölkert hatten, fanden noch Schutz in den kümmerlichen, übriggebliebenen Waldbeständen [8]). Dabei suchte jedes Thier diejenigen Verhältnisse auf, welchen es schon vorher angepasst war: das Rennthier, das Moorschneehuhn die Tundrengebiete, die sich vor den gewaltigen Fronten der Gletscher ausdehnten, das Murmelthier die Sand- und Geröllhalden der Morainen, Gemse und Steinbock die felsigen Gebiete; wo der Boden der Ebene trocken und steppenartig wurde, verbreiteten sich Herden von Wildpferden und Dsiggetais. Sowie nun die Gletscher zurückwichen, verschoben sich die Regionen. Aufspriessender Wald verdrängte die Tundren liebenden Thiere aus ihrem bevorzugten Gebiete, das noch immer der Gletscherfront folgend nach Süden und nach Norden auseinanderwich, ebenso wurden die Steppen- und Felsenthiere nach zwei Richtungen auseinandergedrängt, erstere wichen nach dem trockenen Osten aus, die andern einentheils nach dem Polarkreis, anderntheils nach den Alpenhöhen. Den Felsenthieren war der Weg nach den Alpen geradezu durch die Terrainverhältnisse vorgeschrieben, denn nach Norden verhinderten weite Tiefländer ein weiteres Vordringen. Der Prozess ging aber bei dem langsamen Rückzug der Gletscher, der immer wieder durch partielle Vorstösse unterbrochen wurde, äusserst langsam vor sich. Die Etappen der nach Süden wandernden Thiere können wir nach den in unseren Morainen und Kieslagern gemachten Funden verfolgen [9]). In dem verwaschenen Glacialkies von Rapperswyl im Kanton Bern fanden sich Reste des Pferdes, des Rennthieres und des wollhaarigen Rhinoceros, bei Langenthal Geweihstangen vom Rennthier. Reste von Murmelthieren lieferten eine grosse Zahl der Rückzugsmorainen unseres Landes. Bei Zollikofen lagen die Murmelthierreste in den Aussenseiten des Frontwalles einer Rhonegletschermoraine. Eine der letzten Etappen scheinen nun die Vorkommnisse bei Veyrier und bei Villeneuve darzustellen, wo der Rhonegletscher bereits tief in das obere Rhonethal sich zurückgezogen hatte.

Dem Rennthier und dem Pferde folgte aber auch der palæolithische Mensch, dessen wichtigstes Jagdobjekt diese Thiere waren. So kam auch dieser schliesslich in die höheren Alpenthäler.

Aus diesen Voraussetzungen können wir nun die Ungleichzeitigkeit der palæolithischen Stationen unseres Landes folgern.

Als der Mensch Rennthier und Pferd in der Gegend von Schaffhausen jagte, war wohl noch ein grosser Theil der Schweiz mit Eis bedeckt, so dass die Tundrengebiete vor den Gletscherfronten noch über Schaffhausen hinausragten. Die Gegend des Rhonethales und des Fusses vom Salève waren noch in Eis gehüllt. Erst als der Gletscher schon tief in das engere Rhonethal zurückgezogen war und der Genfersee wieder Wellen warf, konnten sich die nach den Alpen gedrängten Thiere dort ansiedeln und mit ihnen der sie verfolgende Mensch. Vielleicht waren schon neue Völkerzüge mit anderer Kultur in das bewaldete Tiefland eingezogen, als der palæolithische Mensch noch in den Alpen das Rennthier verfolgte. Die grossen mit dem Gletscher zurückgedrängten Thiere fanden aber in den Alpen ein immer mehr sich verkleinerndes Areal, das ihnen Nahrung bot; die Rennthiere konnten am Ende ihre bevorzugten Tundrengebiete erst oberhalb der Baumgrenze antreffen und so musste Nahrungsmangel und Inzucht unter den auf inselartige Gebiete beschränkten Herden bald die Art der Vernichtung preisgeben. So verschwindet das Rennthier schon in früher Zeit in den Alpen, nicht einmal mehr zur Zeit der Pfahlbauten finden wir seine Spur, was aber noch nicht beweist, dass es in den Alpen nicht mehr vorkam; denn Ueberreste von Alpenthieren sind in den Pfahlbauten der Ebene so selten, dass es sehr fraglich ist, ob die damaligen Bewohner ihr Jagdgebiet bis in die Alpen ausgedehnt haben.

Wilde Pferde z. B. scheinen nach dem Speisesegen des Klosters St. Gallen noch im 10. Jahrhundert im Alpengebiete vorgekommen zu sein. In der neolithischen, den Pfahlbauten der älteren Steinperiode synchronischen Schicht am Schweizersbild bei Schaffhausen sind Pferdereste noch häufig und trotzdem finden sich solche in den Pfahlbauten der Steinperiode nur ganz ausnahmsweise vor. Dieselben beschränken sich auf einen Metatarsus von Moosseedorf, einen Zahn von Wangen, ein Naviculare tarsi von Robbenhausen und einen Unterkiefer von Meilen, was neben den Zentnern von Knochenresten des Hirsches, Urstiers, Rehs etc., abgesehen von den Hausthierresten, einen verschwindenden Bruchtheil ausmacht. Ebenso gehören die Funde von Gems- und Steinbockresten zu den grössten Seltenheiten [10]).

Fassen wir also unsere Resultate zusammen, so können wir sagen: Die Polarthiere, welche zur Zeit der grössten Ausdehnung der Gletscher nach den Ebenen Mitteleuropas gedrängt wurden, zogen sich beim Rückzug derselben, diesen folgend, einentheils nach dem Polarkreis, anderntheils nach den höheren Alpen zurück, wo aber die grösseren, anspruchsvolleren Arten bald in Folge Beschränkung des Nahurngsgebietes und der Inzucht ausstarben.

Anmerkungen.

[1]) *Thioly.* L'époque du Renne au pied du Mont Salève. Revue Savoysienne 1868 und Documents sur les époques du Renne et de la Pierre polie dans les environs de Genève 1869.

[2]) *A. Favre.* Station de l'homme de l'age de la pierre. Archives des Sciences de la bibliothèque universelle 1868.

[3]) *Rütimeyer.* Ueber die Rennthier-Station von Veyrier am Salève. Archiv für Anthropologie. Bd. VI. Heft 1.

[4]) In den belgischen Höhlen der Rennthierperiode finden sich: Ziesel, Murmelthier, Biber, Alpenhase, Feldhase, Pfeifhase (Lagomys), Lemming, Höhlenlöwe Luchs, Wildkatze, Vielfrass, Iltis, Hermelin, Bär, Höhlenbär, Fuchs, Polarfuchs, Mammuth, Pferd, Rhinoceros, Ur, Wisent, Steinbock, Gemse, Saiga-Antilope, Wildschwein, Edelhirsch, Reh, Rennthier.

[5]) *H. de Saussure.* La Grotte du Scé près Villeneuve. Station suisse du Renne.

Archives des Sciences de la bibliothèque universelle 1870. Réimprimé sep. 1880. Genève.

[6]) *Merk.* Der Höhlenfund im Kesslerloch bei Thayngen. Zürich 1875. Bestimmung der Thierreste durch *Rütimeyer.*

Rütimeyer. Veränderungen der Thierwelt in der Schweiz, seit Anwesenheit des Menschen. Basel 1875.

[7]) a. *Nuesch.* Korrespondenzblatt der deutschen anthropologischen Gesellschaft 1892. Nr. 10. Bericht der XXIII. allgemeinen Versammlung in Ulm. Band XXXV. *Nuesch.* Das Schweizersbild, eine Niederlassung aus palæolithischer und neolithischer Zeit. *Zürich.*

b. *Nehring.* Die kleineren Wirbelthiere vom Schweizersbild bei Schaffhausen. Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Band XXXV. 1895. Zürich.

c. *Studer Th.* Die Thierreste aus den pleistocænen Ablagerungen des Schweizersbild bei Schaffhausen. Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Band XXXV. 1895. Zürich.

[8]) Während der præglacialen Zeit existiren bereits in Mitteleuropa Pferd, Wildschwein, Edelhirsch, Reh, Antilope sp., Bison, Urstier, Bos primigenius, Biber, Spitzmaus (Sorex vulgaris), Maulwurf (Talpa europæa), Wolf, Fuchs, neben zahlreichen ausgestorbenen Formen, so dass also die charakteristischen Bewohner Mitteleuropas schon vorhanden waren, als die Gletscherperiode eintrat.

Für die Ansicht, dass Gemse und Steinbock nicht polaren, sondern mitteleuropäischen Ursprungs sind, sprechen verschiedene Thatsachen. Für die Gemse die weite Verbreitung der Familie der Rupicaprinen auf den Gebirgen, welche einer gleichzeitigen Faltung in parallelen Breitenkreisen ihren Ursprung verdanken. Die Gemse, *Rupicapra*, bewohnt die Pyrenäen, die Alpen, den Balkan und den Kaukasus. *Nemorhœdus* den östlichen Himalaja bis China und Japan. Nach Süden verbreitet sich von dem Gebirgscentrum Asiens aus der Typus bis auf die malayische Halbinsel und Sumatra in ***Nemorhœdus sumatrensis***, nach Norden bis Ost-Tibet in der eigenthümlichen Gattung ***Budorcas*** mit ***B. taxicolor*** *M. Edw.* Bis in die Felsengebirge Amerikas lassen sich noch Ausläufer der Familie verfolgen in der Rocky Mountain Goat, ***Haploceros montanus***. Aus den polaren Regionen ist dagegen überhaupt keine Antilope bekannt. Antilopen lebten in Mitteleuropa zur miocæn, pliocæn und præglacialen Zeit, so Gazellen, *Gazella anglica*, und eine Antilopenart in der Præglacialzeit. Für die Familie der Ziegen *Caprinæ*, gilt dasselbe. Aechte Ziegen finden sich zuerst in den pliocænen Ablagerungen der Siwalikhügel Indiens. Steinböcke folgen in ihren Verbreitungsgebieten der Gemse, so *Capra pyrenaica* in den Pyrenäen, *Capra* ***ibex*** in den Alpen, im Kaukasus vertritt sie die sehr nahe stehende *Capra* ***caucasica***, im Himalaja die *Capra* ***sibirica***, die noch auf dem Altai verbreitet ist. Nach Süden reicht die Gattung bis in die abessinischen Hochländer in Afrika und in die Nilgherries in Indien. Aus den arktischen Ländern sind dagegen keine Ziegen bekannt.

Ueberhaupt dürften unter den für die Hochalpen charakteristischen Thieren diejenigen einen præglacialen und autochthonen Ursprung beanspruchen, welche in den arktischen Regionen keinen Vertreter besitzen, dafür in den parallel streichenden Gebirgen der alten Welt eine durchgehende Verbreitung haben, so unter den Säugethieren Gemse, Steinbock, unter den Vögeln Lämmergeier, *Gypætus barbatus*, Alpensegler, *Gypselus melba*, Felsenschwalbe, ***Hirundo*** *rupestris*, Alpendohle und Alpenkrähe, ***Pyrrhocorax alpinus*** und ***graculus***, Alpenmauerläufer, ***Tichodroma*** *muraria*, Alpenflühvogel, ***Accentor alpinus***, Steindrossel, ***Monticola saxatilis L.***, Blaudrossel, ***M. cyanea***, Schneefink, ***Montifringilla nivalis***, Steinhuhn und Rothhuhn, ***Perdix saxatilis*** und ***rubra***. Unter den Reptilien die Viper, *Vipera aspis* und die Mauereidechse ***Podarcis muralis***, während als Einwanderer aus den Polarregionen zu betrachten wären, von Säugethieren: ***Vesperugo*** *nilssoni*, Murmelthier? *Arctomys marmotta*, Schneemaus ***Arvicola nivalis***, Alpenhase *Lepus variabilis*. Von Vögeln: Blaufalke ***Hypotriorchis aesalon***, Rauhfussbussard ***Archibuteo lagopus***, Rauhfusskauz ***Nyctale Tengmalmi***, Sperlingseule *Athene passerina*, Nusshäher *Nucifraga caryocatactes*, dreizehiger Specht *Picoides tridactylus*, Polarmeise *Parus borealis*, Wachholderdrossel ***Turdus pilaris***, Leinfink *Linaria alnorum*, Föhren- und Fichtenkreuzschnabel ***Loxia pityopsittacus*** und *curvirostra*, Urhahn *Tetras urogallus*, Birkhahn ***T. tetrix***, Schneehuhn *Lagopus alpinus*, Schnepfe *Scolopax rusticola*. Unter den Reptilien: die Kreuzotter *Pelias perus* und die Bergeidechse ***Lacerta vivipara***, unter den Fischen: die Felchen *Coregonen*.

In der sub 7c zitirten Arbeit über die Thierreste vom Schweizersbild habe ich p. 29 den Steinbock noch als Alpenthier polaren Ursprungs angeführt. Aus den oben angeführten Gründen kann ich dieses nicht mehr annehmen.

[9]) *Studer Th.* «Ueber Säugethierreste aus glacialen Ablagerungen des bernischen Mittellandes» und «Ueber die Arctomysreste aus dem Diluvium der Umgegend von Bern.» Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern 1888.

[10]) *Rütimeyer.* Die Fauna der Pfahlbauten. Neue Denkschriften der allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für Naturwissenschaften. Zürich 1862.

Studer Th. Fauna der Pfahlbauten des Bielersees. Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft. Bern 1883.

Dr. Th. Studer, Professor.

Ueber ein Steinbockgehörn aus der Zeit der Pfahlbauten.

Unter den Knochenresten, welche die schweizerischen Pfahlbauten hinterlassen haben, sind solche von Alpenthieren bis jetzt ausserordentlich selten. Wir kennen nur wenige Reste der Gemse, die vereinzelt unter massenhaftem Material von Hirsch, Reh und Wildschwein in den Pfahlbauten des Bieler-, Moosseedorf- und Pfäffikersees gefunden wurden, noch seltener sind solche vom Steinbock, von dem sich bis jetzt nur ein Hornzapfen bei Ober-Meilen im Zürchersee fand. Derselbe wurde von *Rütimeyer* (Untersuchung der Thierreste aus den Pfahlbauten der Schweiz. Zürich 1860. p. 28 und Fauna der Pfahlbauten. Zürich 1862. p. 28) eingehend beschrieben.

In letzter Zeit erhielt unser naturhistorisches Museum durch gütige Vermittlung von Herrn Dr. *Dick* zwei mächtige noch auf den Stirnbeinen ansitzende Hornzapfen vom Steinbock, die im Murtensee nicht weit von der Pfahlbaustation Greng gefunden worden waren. Leider liess sich über die näheren Umstände des Fundes nichts Genaueres mehr ermitteln, aber die Erhaltung und Färbung der Knochen stimmt ganz mit denen aus dem Pfahlbau von Greng überein. Die Färbung ist ein lichtes Braun, das die ganze Knochensubstanz durchdringt.

Vom Schädel sind beide Stirnbeine erhalten, deren Naht in der vorderen Partie total verstrichen ist.

Die Stirnbeine scheinen mit Gewalt vom Schädel abgeschlagen worden zu sein, wie Schlagmarken, die auf Anwendung eines stumpfen Instrumentes, vielleicht eines Steinbeiles deuten, beweisen. An einzelnen Stellen sind noch kleine Theile des Thränenbeins daran sitzen geblieben. Um die Basis der Hornzapfen sind verschiedene Schnitt-spuren zu erkennen, die nicht tief in den Knochen eindringen. Diese seichten Einschnitte, welche gewöhnlich im Beginn scharf sind und sich dann etwas nach dem anderen Ende verbreitern, dürften eher von einem geschliffenen Steininstrument, als von einem Metallmesser herrühren, sie wurden geführt, um die Haut vom Knochen abzuschälen. Das Ganze macht den Eindruck, wie wenn es sich darum gehandelt hätte, eine Trophäe herzustellen, die zum Schmuck eines Giebels, oder eines andern hervorragenden Gegenstandes dienen sollte.

Der vorliegende Rest deutet auf ein altes, gewaltiges Thier, dessen Gehörn zwar von nicht so bedeutender Länge, wie das des in Meilen gefundenen Exemplars, aber von ebenso mächtiger Dicke war.

Jeder Hornzapfen, dessen Spitze abgebrochen ist, misst über der Krümmung noch 320 mm., dazu darf man noch gut 100 mm. auf die fehlende Spitze rechnen. Der Anteroposteriordurchmesser 81 mm. an der Basis, in der Mitte noch 70 mm., der Querdurchmesser 71 mm. an der Basis. Der Umfang an der Basis 260 mm., in der Mitte 204 mm. Die Entfernung der beiden Hornwurzeln am Aussenrand 149 mm., am Innenrand 33 mm. Divergenz der Hornspitzen 395 mm., doch muss dieselbe viel grösser gewesen sein, da ca. $^1/_3$ des Hornzapfens fehlt. Länge der Stirn, über der Naht gemessen: 160 mm., Breite der Stirn am oberen Augenrand 144 mm., Dicke des Stirnbeins am Hinterrand 6 mm.

Der Hornzapfen von Meilen gehörte nach den Messungen *Rütimeyer's* einem ebenso kräftigen Thier. Die Länge des Hornzapfens über der Krümmuug betrug 500 mm., der Umfang an der Basis 260 mm., wie bei unserem Stück.

Die Länge des Hornes berechnete Rütimeyer dazu auf 30″, also fast 1 Meter.

Bei einem alten, ausgestopften Steinbock unserer Sammlung, der im Jahre 1809 in den Alpen an der Savoyergrenze erlegt wurde, beträgt die Länge der Hornscheiden 785 mm. Die Entfernung der Hornwurzeln über den Augen 124 mm. Die mir vorliegende Hornscheide eines alten Thieres besitzt eine Länge von 810 mm., über der Krümmung gemessen, der innere Umfang der Basis, welcher dem Umfang des Hornzapfens entspricht, beträgt 220 mm. Der Anteroposteriordurchmesser 81 mm., der Querdurchmesser 64 mm. Unter den 41 Steinbockgehörnen der Sammlung von Herrn *Dr. Girtanner* die in der Abtheilung für Jagd und Fischerei an der Landesausstellung in Genf zu sehen war, besitzt das grösste Gehörn eine Bogenlänge von

820 mm. Das von Herrn *Maurer* aus Walchwyl ebenda ausgestelltes Gehörn eines schweizerischen Steinbocks hatte eine Bogenlänge von 800 mm. und einen Basisumfang von 250 mm.

An einem von Rütimeyer gemessenen Steinbockschädel betrug die Länge des Hornzapfens 400 mm., bei 220 mm. Umfang an der Basis, die Hornscheide hat eine Länge von 740 mm.

Ich gebe hier noch die Dimensionen zweier Schädel von alten Steinböcken unserer Sammlung, von denen einer zu einem Skelett gehört, das s. Z. dem Museum von S. M. dem König *Victor Emanuel* zum Geschenk gemacht worden ist. An dem Schädel sind die Zähne schon tief abgekaut. Zum Vergleich setze ich dabei die Maasse des Murtener und des Meilener Steinbocks.

1. Schädel aus dem Museum zum Skelett gehörend.
2. Schädel aus dem Museum.
3. Steinbockgehörn aus dem Murtensee.
4. Steinbockgehörn von Meilen. (Maasse nach *Rütimeyer,* l. c.)

			Murtensee	Meilen
	1.	2.	3.	4.
Länge des Hornzapfens, über der Krümmung gemessen	315	325	420[1])	500
Anteroposterior-Durchmesser an der Basis	65	64	81	
Anteroposterior-Durchmesser in der Mitte	55	54	70	
Umfang an der Basis	195	190	260	260
Distanz der Hornwurzeln über der Augenhöhle	119	119	194	
Divergenz der Hornspitzen	335	334	395[2])	
Länge des Stirnbeines über der Naht .	116	120	160	
Distanz der Oberaugenränder . . .	139	127	144	

Rütimeyer berechnete nach dem oben gefundenen Verhältniss von Hornzapfen zu Hornscheide die Länge der Meilener Hornscheide auf 30″, also fast einen Meter.

Wir haben oben bei einer Hornscheide von 810 mm. Länge gefunden, dass der Umfang des Hornzapfens an der Basis ca. 220 mm. betragen musste. Da nun die beiden Hornzapfen vom Murtense und von Meilen einen Umfang von 260 mm. haben, dürfen wir wohl die Länge der Hornscheiden auf ca. 1 m. und die Dicke als eine sehr bedeutende annehmen. Vielleicht waren beide etwas verschieden darin, dass bei dem Murtener Thier die Hörner etwas kürzer und

[1]) An den 320 mm. betragenden Hornzapfen fehlen mindestens 100 mm.
[2]) Diese Zahl bezieht sich nur auf die vorhandenen Enden.

gedrungener mit starker Divergenz waren, während sie bei dem Meilener länger und dabei etwas schlanker erschienen. Gleiche Verschiedenheiten zeigen sich auch bei unseren Steinbockschädeln vom naturhistorischen Museum, bei dem einen (1) sind die Hornzapfen bei gleicher Dicke kürzer und mehr auswärts gebogen, als bei dem anderen (2), auch der Gesichtsschädel breiter, was sich namentlich in der bedeutenden Breite der Nasenbeine ausspricht. Der ausgestopfte Steinbock des naturhistorischen Museums, sowie die vorerwähnte Hornscheide gehören zu dem schlankeren Typus, während der Kopf eines alten Steinbocks, unseres Museums, der in der Mitte des vorigen Jahrhunderts von Herrn *Steiger*, Syndikator der italienischen Vogteien, am Gotthardt erlegt worden war, sehr dicke, aber kürzere und divergentere Hörner, als der alte ausgestopfte Steinbock von Savoyen zeigt, derselbe dürfte aber nach der Knotenbildung ein gleiches Alter gehabt haben.

Fünf andere ausgestopfte Steinböcke, die unser Museum besitzt, sowie mehrere Schädel und Gehörne [1]) habe ich hier nicht in Betracht gezogen, da bei ihnen das Gehörn noch nicht zur vollen Entwicklung gelangt ist.

Aus dem Vorkommen von Steinbockresten bei Pfahlbaustationen dürfen wir nicht den Schluss ziehen, dass zu jener Zeit noch Steinböcke in der Ebene vorkamen, wie in der ersten Postglacialzeit. Im Gegentheil zeigt die Seltenheit des Vorkommens und die Behandlung des Gehörns aus dem Murtensee, dass es sich um eine seltene Jagdtrophäe handelte, die ein kühner Jäger, der sich bis in das Alpengebiet wagte, erbeutete, oder die vielleicht im Handel durch Tausch in den Besitz der Pfahlbauten kam.

Zugleich sehen wir, dass zu jener Zeit, wo das Steinwild noch nicht durch stete Verfolgung und Konkurrenz von Seiten der zahmen Hausthiere in seinen natürlichen Wohngebieten beeinträchtigt wurde, die Thiere sich noch in voller Kraft und Grösse entwickeln konnten.

---

[1]) Das naturhistorische Museum in Bern besitzt 6 ausgestopfte Exemplare des Steinbockes, zwei erwachsene und zwei junge Böcke und zwei Geissen, zwei Skelette, ein männliches und ein weibliches, drei isolirte Schädel und drei Schädelächte Gehörnpaare, worunter das eines in der Mitte des vorigen Jahrhunderts am Gotthard geschossenen Steinbocks.

J. H. Graf.

Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz.

No. 45. Die Inhaber der ordentlichen Professur für Mathematik an der bernischen Akademie und nachherigen Hochschule sind nun alle eingehend biographisch behandelt worden und zwar

1) *Niklaus Blauner von Bern* 1713—1791, hatte den Lehrstuhl inne von 1749—1784. Vgl. Prof. Dr. J. H. Graf. Niklaus Blauner, der erste Professor der Mathematik an der bernischen Akademie. Bernische Biographien III. Bd. S. 67—89. Ferner Wolf, Rud., Biographien zur Kulturgesch. I, S. 323—340.
2) *Johann Georg Tralles von Hamburg*, helvetischer Bürger, 1763—1822, hatte den Lehrstuhl für Mathematik inne von 1785—1803. Vergl. Graf, J. H., der Mathematiker Johann Georg Tralles, Bernische Biographien I. Band, S. 526—544. Ferner Wolf, Rud., Biogr. z. Kulturgeschichte I, S. 323—340. Wolf, Rud. Gesch. der Vermessungen S. 143—158.
3) *Johann Friedrich Trechsel von Burgdorf* 1776—1849, hatte den Lehrstuhl inne von 1805—1849. Vergl. Wolf, Rud., Biogr. zur Kulturgesch. II, S. 405—434. Bernische Biog. I, S. 141—150. Graf, J. H., Geschichte der Dufour-Karte, Bern 1896 an vielen Orten (s. Register).
4) *Ludwig Schläfli von Burgdorf* 1814—1895, hatte den Lehrstuhl inne von 1853—1892. Vergl. Graf, J. H., Ludwig Schläfli. Mittheilungen 1895 S. 122—203.

Was die Blauner anbetrifft, so bemerken wir, dass diese Familie in Bern nun ausgestorben ist. Am 30. April 1891 starb nämlich in Bern *Fräulein Cäcilia Susanna Marg. Blauner* geb. 1832, Tochter des Bernhard Friedrich Blauner (1803—1853), gewesener Naturalienhändler, die älteste direkte Descendentin. —

No. 46. Anlässlich eines im Anfang Januar in Solothurn gehaltenen Vortrags über die I. Periode der schweiz. Landesvermessung (Geschichte der Dufour-Karte 1832—64) wurde mir von H. Hauptmann *Rust*, Redaktor in Chur eine Notiz gesandt, wonach, wie es schon Wolf in der Gesch. der Vermessungen S. 128 u. 130 andeutet, J. R. Meyer mit seinem Grossvater *Franz Georg Rust* in Verbindung getreten sei. Franz Georg Rust von Lingenau im Vorarlberg besass mit einigen Brüdern zu jener Zeit zu Solothurn, wo er 1816 Bürger wurde, eine weitherum bekannte Stuccaturwerkstätte speziell für Kirchenbauten. Von ihm u. bei ihm wurde 1804 auf Meyer's Auftrag für den damaligen Kaiser Franz von Oesterreich ein Relief der Habsburg und ihrer Umgebung angefertigt. Eine Brochüre darüber besitzt meines Wissens die Berner Stadtbibliothek. Vergl. die Notiz in Graf, J. H., die kartogr. Bestrebungen J. R. Meyer's von Aarau S. 27. Separ. (Arch. des histor. Vereins des Kts. Bern XI. Bd. I. Heft.) Mit diesem Relief ist Franz Georg Rust nach Wien gereist, um es dem Kaiser in Laxenburg bei Wien zu übergeben. Ich finde im Taschen-Notizbuch Vater Meyer's, das in meinen Händen ist, folgende Angabe: «den 25. May 1803 ist H. Georg Rust mit dem Modell und Relief nach «Wien abgereist und den 3. Sept. wieder zurückgekommen. — Den 25. «Juny 1804 ist Er abgereist, den 2. July von Ulm verreist, und den 11. «July Abends 5 Uhr in Wien angelangt. Samstag den 18. August ist Er «hier zurück angelangt.»

Darnach muss also Rust die Reise nach Wien im Auftage Meyer's zweimal gemacht haben. Das Relief nahm den Raum mehrerer umfangreicher Kisten ein. Der Kaiser war ob der Arbeit sehr zufrieden, was auch daraus hervorgeht, dass er dem Rust eine mit seinem Bild gezierte prächtige goldene Uhr sammt schwerer goldener Kette und eine ebenso geschmückte Dose verlieh. Wo diese letztere hingekommen, kann H. Hauptmann Rust nicht angeben; die Uhr ist heute noch im Besitz seiner Cousine, der Frau Schild-Rust, alt Nat.-Raths sel. Wittwe in Grenchen bei Solothurn. — Das im Vorzimmer der Stadtbibliothek in Solothurn aufgestellte Relief des Gotthardmassivs ist auch eine Arbeit des F. G. Rust, der in den dreissiger Jahren auf einer Geschäftsreise in Bern starb und auf dem Monbijoufriedhofe begraben wurde. —

47. Bekanntlich wurde zum Theil mit Unterstützung der Tagsatzung *der Lungernsee* abgeleitet. Nach dem Beispiel ihrer Nachbarn von Gyswyl hatten die Einwohner von Lungern schon 1791 angefangen einen Kanal durch den Felsen zu sprengen, aber als man 1797 noch 31 Klafter vom See entfernt war, fand man, dass die Richtung eine verfehlte sei. Die Arbeit wurde dann 1835 dem Ingenieur *Jakob Sulzberger* aus dem Thurgau übertragen. Aus Briefen an den Oberstquartiermeister und nachmaligen General *G. H. Dufour* vom 15. I. und 5. II. 1836 geht hervor, dass Sulzberger auf Dufour's Rath hin die Ladung der letzten Mine, welche die Sperre heben sollte, auf 950 ℔ vermindert hat. Sulzberger berichtet, dass in den ersten 24 Stunden ca. 70 Mill. C' Wasser ausgeflossen sei. Da der See gefroren war, so konnte man nicht die leiseste Bewegung an der Oberfläche wahrnehmen. Im 2. Briefe hingegen meldet er, dass die Ufer des Sees anfangen einzusinken, und zwar just an einer Stelle, wo sich mehrere der besten Häuser und die Kirche befanden; er befürchte daher, dass grosse Entschädigungen zu zahlen sein werden. Diese unerwarteten Erdbewegungen, mehrere 100' vom Rand des Sees entfernt, erschrecken die Leute. Der Seespiegel hat sich bis jetzt (von Mitte Jan. bis 5. Febr.) um ca. 50' gesenkt. — (Die Briefe sind in der Aktensammlung des eidgen. topogr. Bureaus in Bern.)

No. 48. Ueber einen *wichtigen geograph. Fund,* den *Dr. R. Hotz* in Basel gemacht hat, verweisen wir auf den XVI. Bericht über die Dr. J. M. Ziegler'sche Kartensammlung 1893—94 S. 4, sowie auf die nun leider eingegangenen «Geogr. Nachrichten» XII. Jahrgang No. 11, 12 S. 162. Herr Dr. Hotz referirte am schweiz. Geographentag in Genf in folgender Weise: 1893 fand er in einem Schrank des Museums zu Basel eine Karte vom Algäu und der nächsten Umgebung von

32,8/44,1 cm., mit der Feder gezeichnet datirend von 1534. Eine lateinische auf der Rückseite angebrachte Bemerkung zeigt an, dass sie von Achilles P. Gassarus für Sebastian Münster, den Herausgeber der Cosmographie gezeichnet worden ist und trotzdem scheint sie nicht benutzt worden zu sein, obgleich Münster in seinem Werk 2 Tafeln jener Gegend bringt. Warum Münster dieses Blatt, das als eines der besten seiner Zeit angesehen werden muss, nicht benutzt hat, ist unerfindlich. Das Blatt fasst die Gegend von Schaffhausen nach Füssen, von Memmingen nach dem Vorarlberg im Masstab 1 : 320000 gezeichnet in sich. Der Bodensee und der Lauf der Gewässer sind mit überraschender Sorgfalt dargestellt. Herr Dr. Hotz hat auch den Ursprung einer Karte der Ptolemeusausgabe Strassburg 1513 gefunden. Diese Karte betitelt «Tabula nova Heremi Helvetiorum» ist nichts anderes als eine Kopie der Karte von Dr. Conrad Türst von 1495—97, welcher der Kopist noch eine kleine Beifügung gegeben hat. — (Vergl. Journal de Genève No. 123, 26. V. 1896.)

No. 49. Wir haben den Verlust einiger tüchtiger, für die Naturforschung begeisterter Männer zu beklagen.

1) Am 25. Nov. 1895 verstarb nach kurzer Krankheit Prof. Dr. *Carl Ludwig Rütimeyer* in Basel, geb. 26. Febr. 1825 in Biglen, unser corresp. Mitglied seit 1853. Wir verweisen auf die Publikationen:

a) Zur Erinnerung an H. Professor Ludwig Rütimeyer in Basel, Erinnerungsschrift der Familie, 28 S. 8°, wo nebst Personalien, die anlässlich der Leichenfeier gehaltenen Reden von Prof. J. Kollmann, cand. med. J. Kuhn und Pfarrer E. Iselin sich finden.

b) «Carl Ludwig Rütimeyer» von L. E. Iselin, mit Bildniss, R. Reich'sche Buchhandlung vormals C. Detloff Basel 47 S. 8°, worin Rütimeyer's Leistungen einer Würdigung unterzogen werden.

2) Dr. *Johann Gottfried Glur von Bern*, gewes. Assistent am zoolog. Institut der Hochschule und Prosektor der Anatomie an der Thierarzneischule geb. den 6. April 1870 in Wattenwyl, gestorben an einer rasch sich entwickelnden Meningitis am 4. Febr. 1895. Von ihm rührt her die Arbeit: «Beiträge zur Fauna der schweiz. Pfahlbauten», s. Mittheilungen 1894 S. 1. Für seinen Lebenslauf vergl. den Nachruf, welchen H. Gymnasiallehrer H. Merz in Burgdorf im «Feuille centrale de la Société de Zofingue» 1895 S. 424—430 veröffentlicht hat. —

No. 50. Auf die 6 Briefe von *J. G. Tralles an D. Huber* (siehe Notizen No. 32 u. 36) lassen wir *nun noch drei folgen und zwar vorerst das Antwortschreiben von J. G. Tralles an den gesetzgebenden Rath Helvetiens*, der ihn durch Dekret vom 18. Oktober 1800 in Erwägung der ausgezeichneten «wissenschaftlichen Kenntnisse und bereits für Helvetien geleisteten Dienste» das helvetische Bürgerrecht verliehen hatte.

Dieses Antwortschreiben, Helvet.-Archiv 228, p. 167—169 verdanke ich der gütigen Mittheilung von Herrn Dr. Strickler. Dasselbe lautet:

«1800. 13. Nov. Bern. J. G. Tralles, Professor der Akademie, an den g. g. Rath, Bürger Gesetzgeber! So wie das staatsbürgerliche Verhältniss dem Menschen Rechte sichert, so legt es ihm Pflichten auf, welche ihn ehren, deren Erfüllung ihm Achtung erwerben kann. Zwar hat schon der Weltbürger seine; allein ihre Nichterfüllung ist keiner Nachlässigkeit ahnenden Beurtheilung ausgesetzt. Bei seinem Eintritte im Staate werden jene moralischen Verpflichtungen billige Anforderungen seiner Mitbürger, da seine Aufnahme in demselben unter der Voraussetzung geschieht, dass der unedle Gedanke nur sich und seinem Vortheile zu leben, ferne von ihm sei. Der Staat, welcher alle Handlungen zu seiner Erhaltung und zu der Beförderung seiner Zwecke den Individuen lohnen musste, hätte keine Bürger. Dem Staate anzugehören, in welchem ein Mann lebt, ist mithin eine natürliche Stellung desjenigen, welcher demselben seine Kräfte darbringt, da der Lohn seiner Arbeiten mehr in dem Zutrauen, sie von sich gefordert zu sehen, mehr in dem Verdienste sie zu verrichten als in ihrem Ertrage setzet. — Schon im frühen jugendlichen Alter sehnte ich mich oft nach diesem Lande, welches in der Geschichte der Wissenschaften glänzt, dessen Natur-Grösse und Schönheit damals noch mehr durch Gesang und Sage als durch Beschreibung reizte; dessen Freiheit nach den Kraftäusserungen geschätzt wurde, welche sie errungen hatten; nach diesem Lande, dessen glückliche Lage so vielversprechend ist. Im Mittelpunkt der aufgeklärtesten, der industriereichen Nationen, gleich vortheilhaft für Aufnahme, Verbreitung und Mittheilung der Gaben der Natur, der Kunst und des Geistes, welch eine Lage, Bürger Gesetzgeber! Nach diesem Lande wurde ich berufen, demselben darin einer einem blühenden freien Staate zu verdankenden Erziehung erworbenen Kenntnisse nützlich zu machen. Wenn ich nun schon in dem, was meine geringen Kräfte seit 15 Jahren Helvetien gewidmet geleistet habe, meinen Willen und Wünschen nicht genugsam entsprochen habe, so lassen Sie dennoch dem Willen Gerechtigkeit widerfahren, indem Sie auch dem wenigen Gewirkten Ihren Beifall schenken, welches mir so unvermuthet als angenehm in dem Dekret kund wurde, welches mich auf eine ehrenvolle Weise Helvetiens Bürgern zugesellt. Möge doch meine engere Verbindung mit diesem Staate demselben nützlich, dem Erfolge meiner Arbeiten günstig werden! Jetzt da die Republik vorzügliche Thätigkeit der Bürger fordert; wo die Bildung solcher Männer so dringend nöthig wird, welche mit Einsicht, Kraft und Willen fortarbeiten können, ihr Haltung und Stärke zu sichern. B. B. G. G. Ich verkenne den Bürgersinn nicht, welcher Sie beseelt, mich in der gegenwärtigen Lage unserer Republik für ihren Bürger zu erklären, noch das Zutrauen, dessen Sie mich dadurch würdigen. Ich bitte den g. g. Rath, meinen Dank anzunehmen, sowie die Versicherung, dass ich jenes Zutrauen über alles schätze und demselben stets zu entsprechen meine grösste Sorgfalt werde sein lassen.

Gruss und Hochachtung!»

J. G. Tralles an D. Huber in Basel. [1])

Bern, den 16. September 1797.

Hochzuverehrender Herr!

Ehegestern, erst nachdem ich für ein paar Tage nach Bern kam, fand ich zu meinem grossen Vergnügen Dero geehrte Zuschrift vom 19ten vergangenen Monats. Es war also unmöglich mir früher die Ehre zu geben, Denenselben für die geneigte Mittheilung der Nachricht den Kometen betreffend zu danken. Insbesondere ist mir Ihr gütiges Schreiben desswegen schätzbar, da es mir Dero nähere Bekanntschaft bewirkt; und

[1]) Auch diese 2 Briefe sind im Band Schriften von Prof. Daniel Huber auf der Universitätsbibliothek Basel.

desto unangenehmer war es mir zu vernehmen, dass Sie, hochverehrtester Herr, wirklich in Bern waren, wie mir Ihr Brief vermuthen liess, und meine Abwesenheit mich um das Vergnügen gebracht hat, mit Ihnen mich mündlich unterhalten zu können; eine andere Gelegenheit, die Sie nach Bern oder mich nach Basel bringt, hoffe ich, werde meinen Verlust ersetzen; bis dahin schmeichle ich mir, dass ich schriftlich nicht von Ihnen vergessen werde, wenn ihre Geschäfte es erlauben.

Den Kometen habe ich wie Sie, hochzuverehrender Herr, vielleicht schon vernommen, am 16. August bald nach Sichtbarwerdung der Sterne gesehen. Damals befand ich mich auf dem grossen Moor in der Nähe des Dorfes Walperswyl. Es fehlte mir nichts an Instrumenten ihn genau zu beobachten, als an einer Pendeluhr, die durch eine Sekundentaschenuhr ersetzt werden musste. Allein bevor mein Kreisinstrument — mit zweifüssigen achromatischen Fernröhren — aufgestellt werden konnte, setzte sich ein dicker nasser Nebel stets auf dem Moor, mithin auch an den Gläsern des Fernrohrs ab. Die nothwendig hinzuzusetzende Erleuchtung der Fäden schwächte — sowie der Mangel an Durchsichtigkeit des Objektivs vom abgesetzten Wasser — das Licht des Kometen so sehr, dass es schwer hielt ein paar Beobachtungen auf diesem Wege zu erhalten, den ich bald ganz verlassen musste, um blosse Vergleiche des Kometen mit in der Nähe befindlichen Sternen anzustellen. Ich nahm auch meine Zuflucht zum Spiegelsextanten, der aber diesen Abend wenig dienen konnte, an folgenden Abenden aber allein gebraucht worden ist. Nun wollte das Ungeschick, dass zwey Abende ausgenommen, der Himmel — oder wenigstens der Himmel des Moors — mit Wolken bedeckt war, wenn der Komet kaum aufgefunden war. Während des Tages liess sich keine Zeit finden, die ich von meinem Hauptgeschäfte nehmen konnte, um meine Beobachtungen zu berechnen; sie liegen noch jetzt da so wie sie angestellt sind. Die Messung einer grossen Basis, die mich damals beschäftigte, dauert noch fort und ich werde froh seyn, wenn nach dreyen Wochen dieses Geschäft wirklich zu Ende gebracht werden kann. Morgen kehre ich zum Punkte zurück, welchen ich vor ein paar Tagen meiner hiesigen Amtsgeschäfte halber verlassen musste. Da es seine Schwierigkeit hat meine Briefe mir folgen zu lassen wenn ich sie richtig erhalten soll, so bleiben sie in Bern bis ich sie da treffe. Ich hoffe, dass dieser Brief Ihnen zu seiner Zeit auch in die Hände fallen (kommen) wird, wenn Sie gleich noch nicht in Basel zurück wären wohin ich, nichts Besseres wissend ihn adressire.

Mit vollkommener Hochachtung habe ich die Ehre zu sein,
hochzuverehrender Herr, Dero gehorsamster Diener

J. G. Tralles.

Neuenburg, den 12. May 1803.

Empfangen Sie, hochzuverehrender Herr, meinen Dank für das Schreiben, welches ich von Ihnen empfangen habe. Nicht nur erinnere ich mich recht wohl ihrer Bekanntschaft aus Anlass des Kometen von 9. I., sondern ich habe seither oft Gelegenheit gehabt von Ihrem Eifer für die Kenntniss der Natur von Ihren Mitbürgern viel Ruhmvolles zu vernehmen und Ihr Brief giebt mir einen angenehmen Beweis des Interesses, welches Sie an einem besondern Zweige der Naturkunde nehmen. Sie bemerken ganz richtig, dass die Theorie der Höhenmessung mit dem Barometer auf gar mancherlei Gegenstände sich erstreckt, und dies ist auch der Gesichtspunkt, unter welchem ich dieselbe betrachtet und nicht nur interessant, sondern selbst nothwendig finde, dass sie auf's Reine gebracht werde; wenigstens dass man sie auf den Punkt bringe, dass man wisse unter welchen Umständen sich aus dem bekannten Luftzustande in zweien Punkten der Atmosphäre ihre Verschiedenheit in Höhe bestimmen lasse, und unter welchen Umständen dies nicht geschehen könne. Denn es ist klar, dass wenn die Gesetzlichkeit der Abnahme der Dichte (als Funktion der Entfernung des atmosphärischen Punktes vom Mittelpunkt der Erde) zuweilen unterbrochen würde, in diesem Falle keine auf ein stetiges Gesetz sich gründende Formel entspräche. Wäre die *Dalton'sche* Vorstellung der Mischung verschiedener elastischer Materien eine nothwendige statt eine bloss mögliche, so fiele jenes ganz weg und man würde stets bei gegebenen Umständen genaue Resultate finden. Die Formel für die Differenz der Höhe, die — nach den bisherigen Vorschriften — nur aus einem Terminus besteht, würde bloss die Summe mehrerer sein und sich leicht in anderer Gestalt auch noch bringen lassen; wenigstens wäre dies der Fall sobald ein ruhiger Gleichgewichtszustand der Luftmasse eingetreten wäre. Die Sache verhält sich meiner Meinung nach anders. Die Verwickelung selbst aber ist nicht hinreichend bekannt und es ist mehr als zu bezweifeln, dass die bisherigen Beobachtungen nicht einmal zureichen einem — wenn ich mich so ausdrücken darf — Normalluftzustand eine Regel anzupassen. Die Umstände in der Schweiz waren zu ungünstig für mich, um das was sich aufklären lässt, zu erreichen, und in der Erwartung in der Folge etwas Sicheres zu bestimmen, habe ich das Geschehene wenig geschätzt und daher die gemachten Beobachtungen theils verloren theils vernichtet, da ich sehe, dass ich weiterhin nicht Gelegenheit finden werde das Verlangte zu leisten, und da die Verwirrung meiner Papiere, durch die Hausstallirung, die ich in Bern erlitten, mir alle Lust benahm Dinge zusammenzusuchen, mit welchen ich nun nichts mehr anzufangen hatte und deren Anblick mir nur Verdruss und Reue der unnütz verlorenen Zeit und Mühe erweckte. Gerne würde ich Ihnen Beobachtungen zu jedem Gebrauch übergeben haben, da ich vernommen, dass Sie viel über diese Sachen sammeln, Sie sehen aber, dass es unmöglich ist, Ihnen zu entsprechen.

Da ich noch einige Zeit hier bleibe, so kann es geschehen, dass noch einige Beobachtungen angestellt werden auf gut bestimmten Höhen, nur wird es schwer fallen gute Barometer zu erhalten. Schon in Bern suchte ich über die Veränderung der Refraktion Beobachtungen zu machen, allein meine Wohnung war dafür nicht gelegen, und nachher der Aufenthalt an einem andern Orte zu kurz um mehr zu thun als das Phänomen wahrzunehmen. Hier habe ich freilich alle die erforderlichen Mittel nicht zur Hand. Indessen habe ich doch mit einem Kreisinstrumente beträchtliche Veränderungen scheinbarer Höhenwinkel entfernter Punkte wahrgenommen. Allein um das Gesetz der Aenderung zu entwickeln, müsste ich mit noch grösserer Sicherheit beobachten können. Diese Beobachtungen könnten indessen zur Belehrung über die Modifikation der Atmosphäre beitragen, da sich diese Veränderung der Brechbarkeit des Lichtstrahles keineswegs durch die Veränderung der Temperatur und der Dichtigkeit erklären zu lassen scheint.

Nebst meinen Wünschen für Ihr Wohlsein genehmigen Sie, hochzuverehrender Herr, die Versicherung meiner Hochachtung.

Tralles.

Inhalts-Verzeichniss.