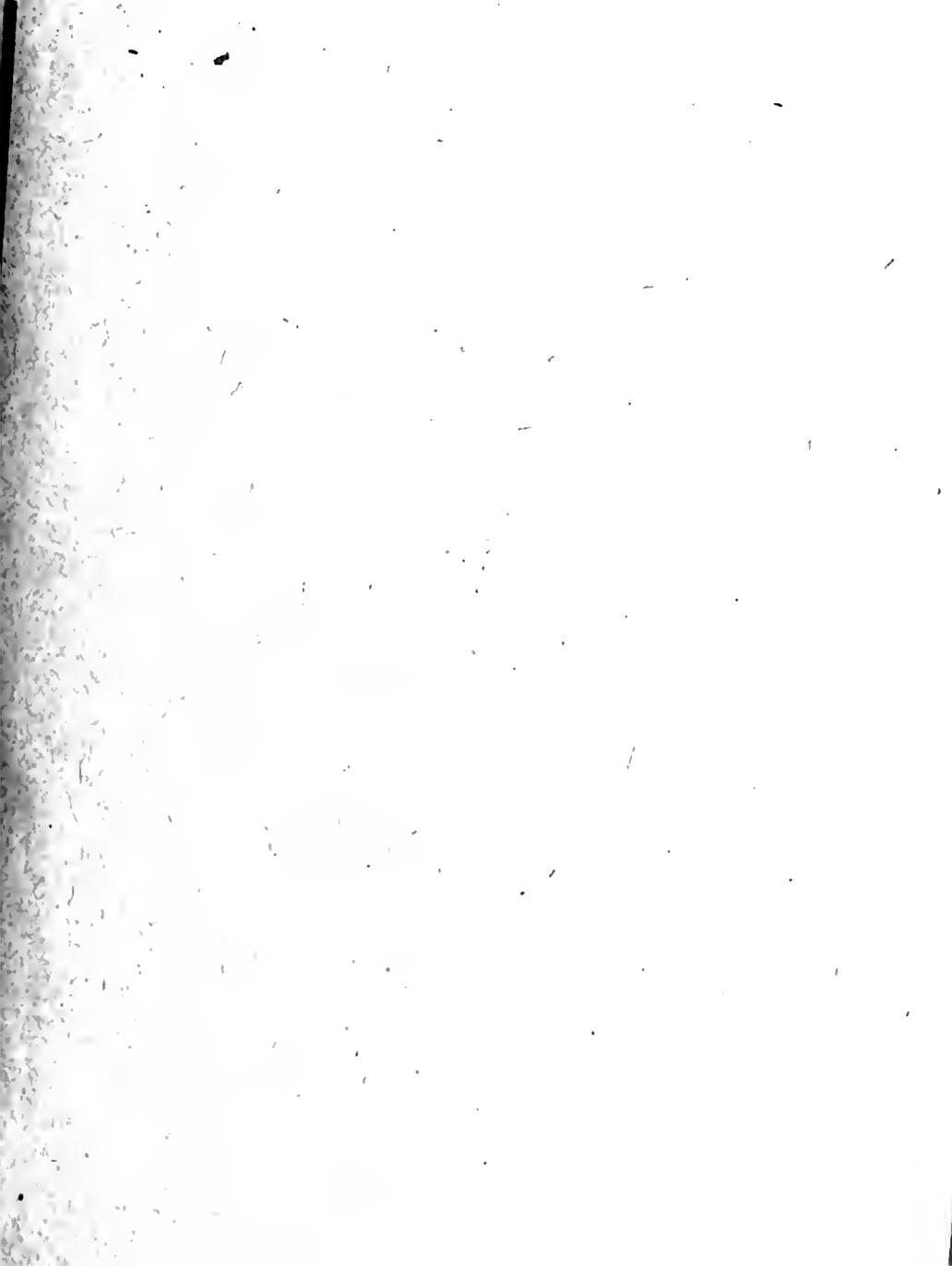
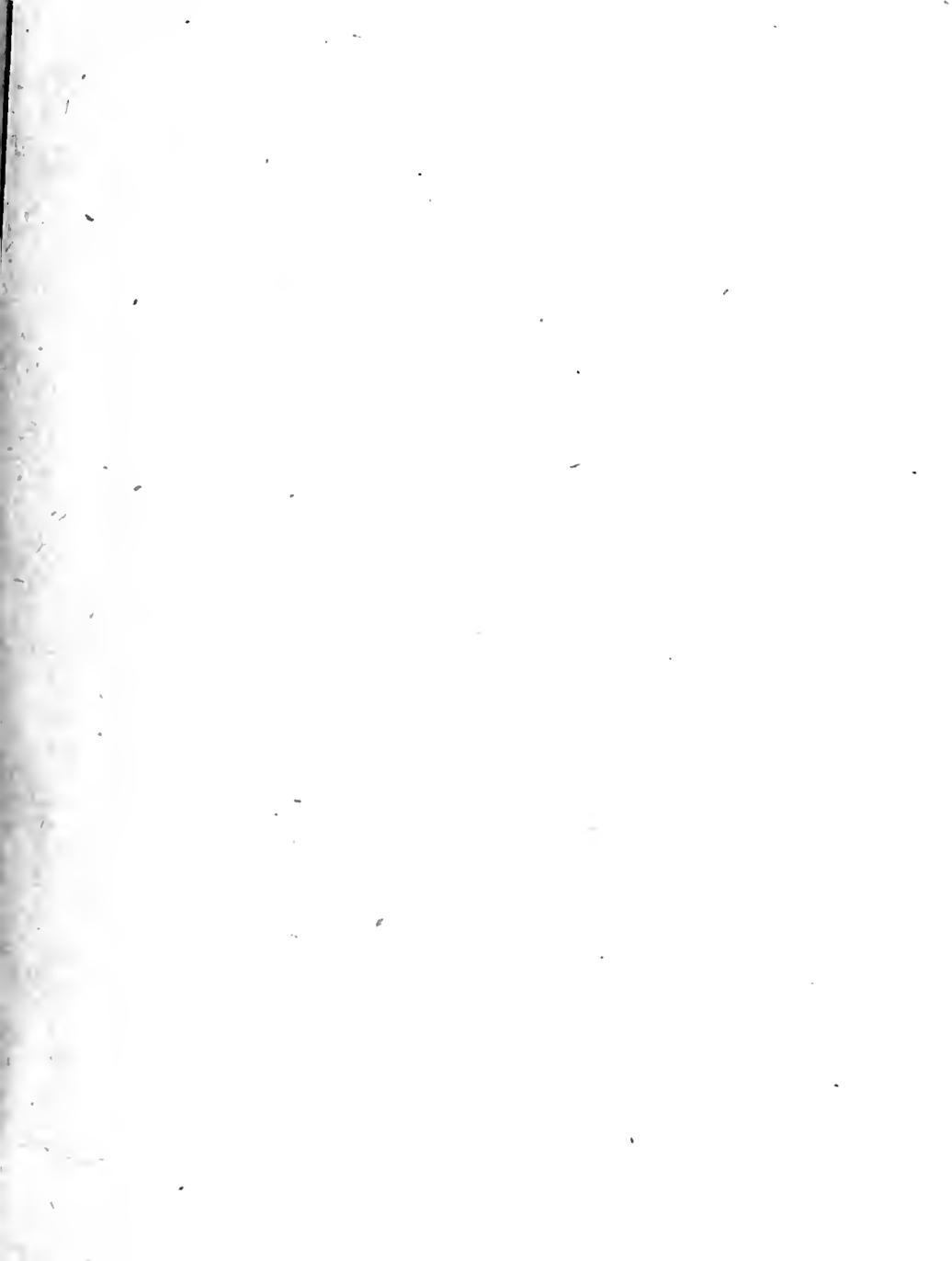




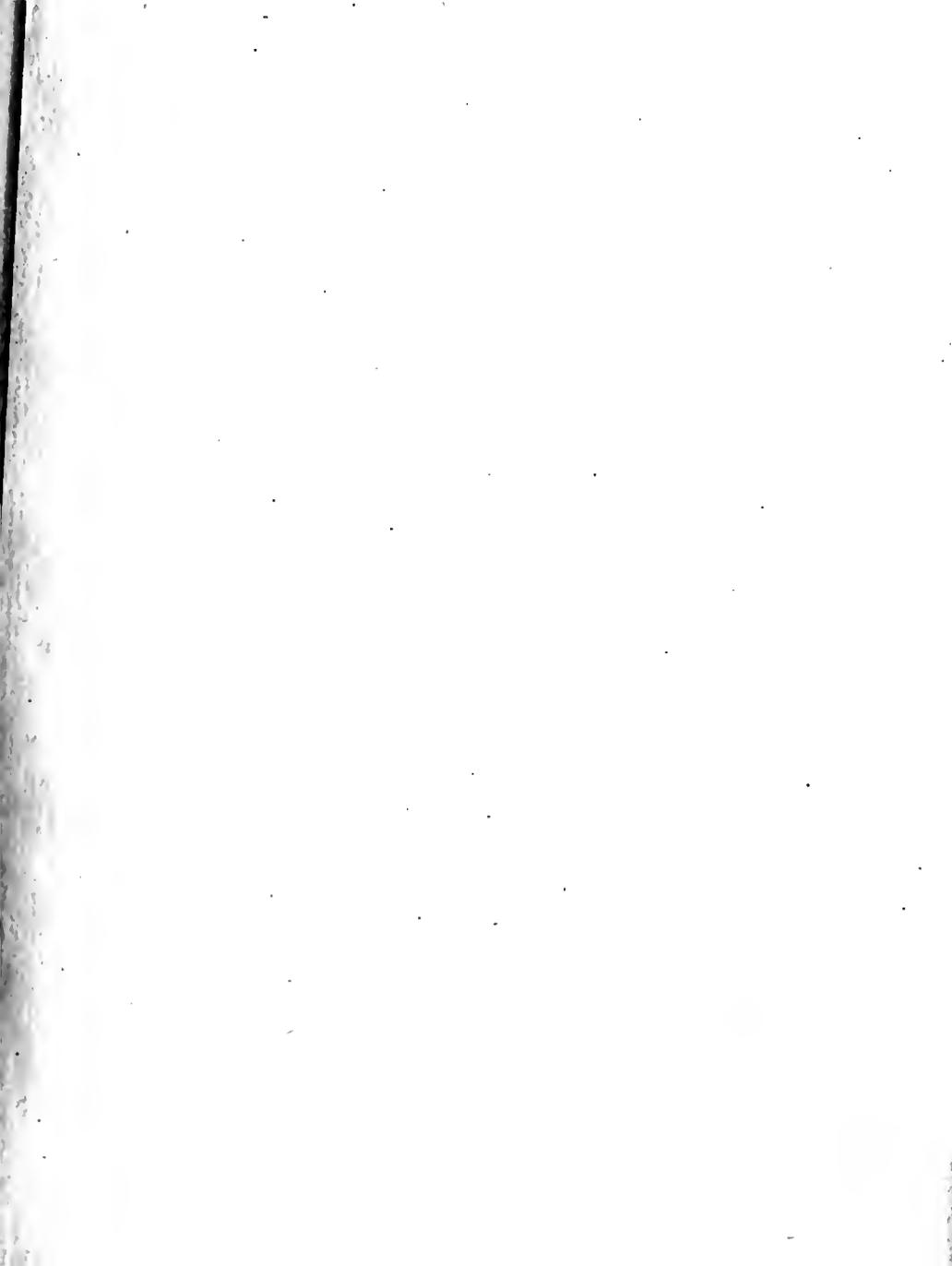
S. 1109. B₂

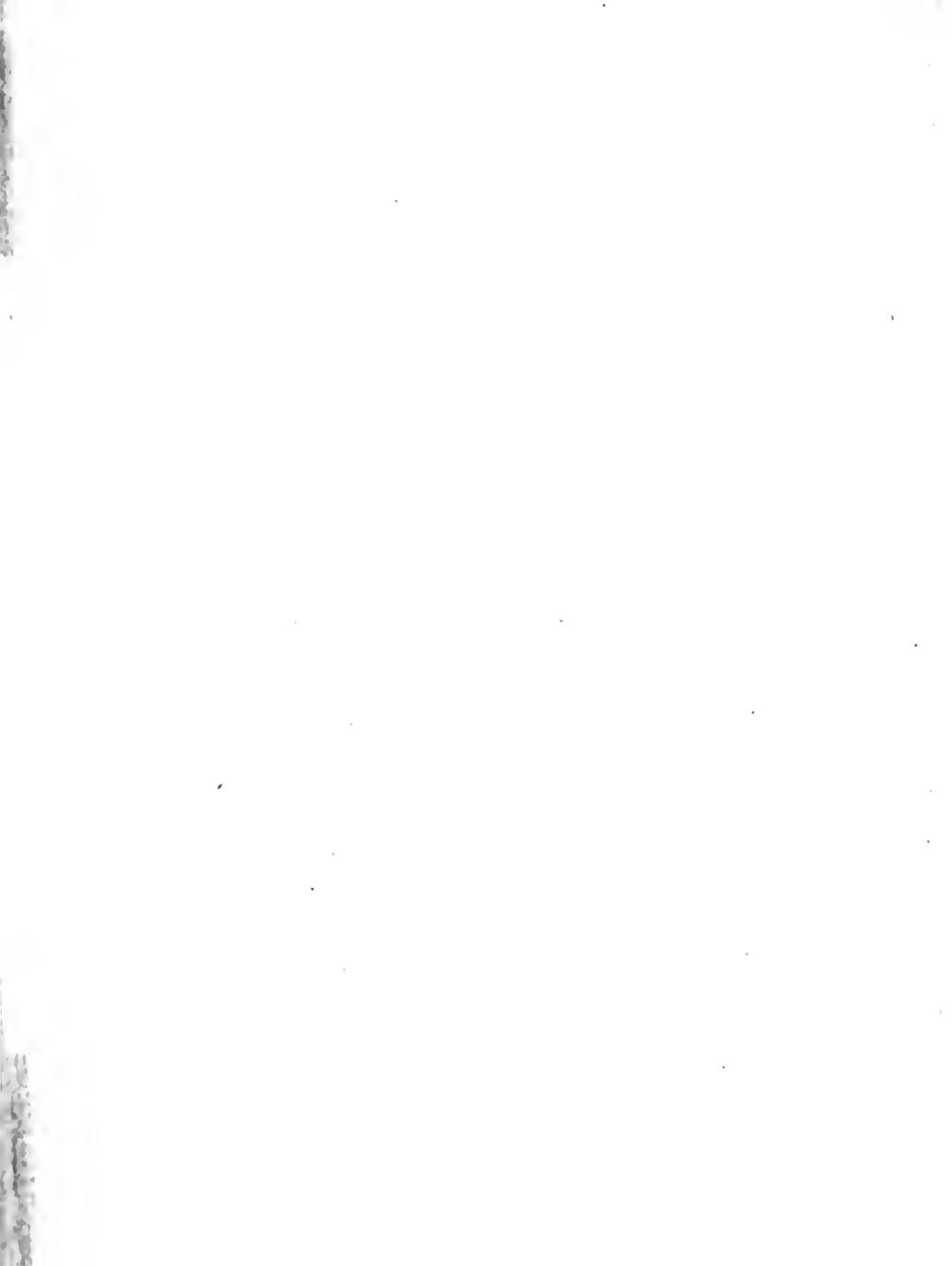












MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS ALTER.

S. 1109. B. 2.

M É L A N G E S

D E

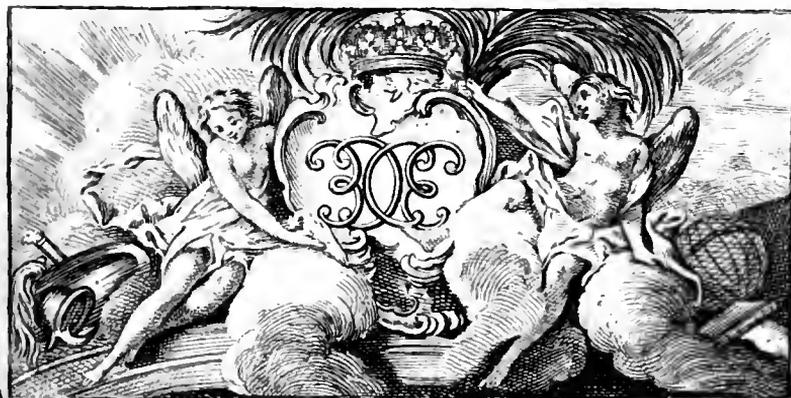
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE

D E L A

SOCIÉTÉ ROYALE

D E T U R I N

POUR LES ANNÉES 1760—1761.



A T U R I N,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

AVEC PERMISSION.



T A B L E

Des Mémoires contenus dans ce Volume.

ALBERTI HALLER *Emendationes & Auctaria ad stirpium helveticarum. historiam* pag. 3.

CAROLI ALLIONI *Synopsis methodica stirpium horti Taurinensis* p. 48.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA *De motibus Electricis experimentum* p. 77.

JOHANNIS BAPTISTAE GABER *Experimentorum de putrefactione humorum animalium Specimen secundum, in quo præcipue agitur de sedimento seri purulento, ac membrana pleuritica* p. 80.

Réflexions pour servir de suite aux mémoires sur le fluide Elastique de la poudre à Canon par M. LE COMTE SALUCE p. 94

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA *De frigore ex evaporatione, & affinibus phænomenis nonnullis* p. 143

EJUSDEM *De causa extinctionis flammæ, & animalium in aere interclusorum* p. 168

FELICIS VALLE *Taurinensis florula Corsicæ edita a CAROLO ALLIONO* p. 204

Addition aux réflexions sur le fluide Elastique par M. DE SALUCE p. 216

-
- Lettre de M. EULER A M. DE LA GRANGE contenant des recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu Elastique* p. 1
- Nouvelles recherches sur la nature & la propagation du son par M. DE LA GRANGE* p. 11
- Essai d'une nouvelle Methode pour déterminer les maxima & les minima des formules intégrales indéfinies par M. DE LA GRANGE* p. 173
- Application de la methode précédente à la solution de différens problêmes de Dynamique par M. DE LA GRANGE* p. 196
- Sur les principes fondamentaux de la mécanique par M. le CHEVALIER DAVIET DE FONCENEX* p. 299
- Addition à la première partie des recherches sur la nature & la propagation du son imprimées dans le volume précédent par M. DE LA GRANGE.* p. 232
- Eclaircissémens pour le mémoire sur les quantités imaginaires inséré dans le volume précédent par M. DE FONCENEX* p. 337.
-
- De l'infini absolu considéré dans la grandeur par le PERE GERDIL Barnabite.* p. 1
- Algebra philosophica in usum artis inveniendi Specimen primum LUDOVICI RICHERI* p. 46
- Observation sur le cours du Pò , avec des recherches sur les causes des changemens qu'il a souffert par M. CARENA* p. 64
ALBERTI

ALBERTI HALLER

5

EMENDATIONES ET AUCTARIA

A D

STIRPIUM HELVETICARUM

HISTORIAM.

*I*n invitatione Sociorum praestantissimorum gratus utens, CIGNA celeberrime, quae ad classes naturales Tetrapetalorum, siliquosarum, Papilionacearum, Didynamiarum utriusque generis, Dipsacearum, floreque composito corrigenda & addenda visa sunt, breviter expono, dum quae ex incerta spe senii mei pendet, majoris operis editionem secundis curis praeparo. Aliqua nova, multa emendatiora hic reperiuntur, postquam plantarum rariorum in locis natalibus lectarum mihi abunde copia facta est. Certo carptiones aliquas vitavero, si quae minus recte olim scripsi, ipse non monitus correxero. Rupe d. 24. Decembris 1759.

4
PLANTAE SILIQUOSAE, TETRAPETALAE.

TETRADYNAMIAE LINN.

1.



DRABA *foliis hirsutis incanis, radicalibus ovatis* Enum. helv. n. 2. p. 539.

Rarior reliquis in *Chaux ronde vallis Ormond desfus*, & in *M. Fouly* reperta. Folia rosulas ad terram efficiunt, fere ut *Aretia villosa*, pariter ovata, integerrima, hirsuta, peculiari modo flaccida. Caulis, ut in *Draba vulgatissima*, unum, duo, tria folia, aut nullum etiam producit, prima ovato lanceolata, deinde longiora. Flores in singulo caule, sex & ultra, calycibus hirsutis, petalis incisus albis fructus similis vulgari, glaber, in utroque loculo 10. & 11. femina continet, & tubam conservat, sed brevem, & capitatam.

2. **CLYPEOLA** *perennis foliis ovatis, scabris, calyce deciduo.*

Jonthlaspi luteo flore incanum discoides umbellatum montanum COLUMN. *Ecphraf.* p. 281. *ic.* p. 280.

Non vulgarem in Helvetia plantam abunde legi ad pedem rupium arenosi lapidis *Gysenau* prope pontem *Emmae* fl. Descriptionem, quae in *Enum. helv.* p. 540. n. 2. nulla est, nunc addo.

Ex una radice, quae fibrosissima est, prodeunt caules innumerabiles, semierecti, simplices, dodrantes, hirsuti. Folia in petiolo folioso dilatata, obtusa, ovatis longiora; alba, scabra, hirsutiae recta. Flores secundum caulem in petiolis semiuncialibus, spicati. Calycis folia quatuor, ex ovatis lanceolata, deorsum paullum turgida, pallide flava, decidua. Petala multo majora, quam in vulgari specie, ex ungue latefcunt, ambitu cordiformi, flava. Stamina eminentia majora quatuor, duo breviora lateralia. Ad istorum originem interior haeret squama bidentata, brevis alias,

alias

alias stamini pene aequalis; petalodes. Siliqua ovata, emarginata, utrinque turgens, hirsuta. In ea semen utrinque unum, lenticulatum, quorum alterum saepe abortit.

3. NAUSTURTIOLUM *alpinum folio alato* RAI p. 826. nunc crediderim, ex ipsius nominis vi, esse plantulam a *Nasturtiolo alp. tenuissime diviso* non diversam, quam ex praealto M. Col de Ferry habeo, foliis tamen potius ovatis, quam lanceolatis; petiolo, qui semper latus est, in hac herbula, etiam aliquanto latiori.

4. COCHLEARIA J. LINN. *foliis angulosis*. Utique sponte in Helvetia nascitur, abunde quidem in paludosis inter marmoris varii venas, & scaturiginem rivi *Furet* prope *Roche*: Dicitur etiam in valle *Moutier-Grand-val aux roche de Moutier près de la grande cascade de la Birse* nasci, sed planta ex ea valle missa majus fuit *Cardamines vulgarissimae* exemplum.

5. LEPIDIUM *latifolium* non tantum circa Urbam, & in Vaudensi agro ad vias sponte provenit, sed omnino, ut veram indigenam plantam esse constet, in altissimo, & *ferrissimo* (ut solent vocare) M. *Prapioz*.

6. *Iberis* MATTH. *Lepidium* 12. LINNAEI p. 675. non est *diandria*. Stamina quatuor majora, parva duo habet; petala ovata; fructum ex lata basi contractum, ex angusti finis fissura eminentem tubam; semen in utrovis loculo unicum.

7. Ad *Lepidia* addatur elegans species *Thlaspi saxatile flore rubente* J. R. H. 5. *Lepidium foliis pulposis subrotundis antheris lateralibus* Enum. Gott. p. 245. Ad rupes prope *Ruchenette* reperit Cl. NEUHAUS.

Est *Iberis saxatilis* LINN. Cent. 111. n. 171.

8. DRABIS, ut recte Cl. ALLIONIUS noster conjicit, utcumque vicina est planta, quam ipse, nobiscum *Lepidium caule repente foliis ovatis amplexicaulibus* vocavit l. c. p. 27. T. IV. Siliqua enim pene quadrangula est, utique marginibus
magis,

magis, media linea, quae septo respondet, minus conspicua, sed tamen eminente. Septum ipsum non latitudini, & majori axi, sed commissurae acutae filiquae parallelum est. Quando tamen filiqua aperta semina dejecit, tunc septum perinde, ut in Alyssis, planum persistit, videturque valvis fructus parallelum fuisse. Inaequalitatem petalorum, ut inter Iberides reponi mereatur, neque ego observavi, aut nunc observo, neque Cl. amicus noster. In saxosis vicinarum alpium abunde nascitur.

9. *Alysson myagri folio n. 3. p. 538.* omnino a cochlearia differt, fructu quidem pene rotundo, non tamen transversum lato, valde convexo, sed cujus septum huic convexitati parallelum persistit. Foliis penitus pinnatis reperi in periculosa via *les ruines*, qua irur ad M. *Tompey*.

10. Denique ALYSSON *foliis pinnatis multiformibus floribus racemosis luteis* ALLIONE p. 40. T. 7. utique a Cl. LACHENAL p. 6. inrer *Cliben*, & *pontem Wiesae*, tum inter *Neuhaus*, & *Haltingen* reperta est, nova civis, & nova planta.

11. HESPERIDIS secundae Enum. nomine tres plantae continentur, Helveticae omnes. Prima alpina a summorum rupium M. *Chasseral* pede a DD. SCHUH, & GAGNEBIN, & in *Creux du Vent*, au *pertuis de la Bise* a Cl. DIVERNOI lecta est. Et humilior omnino, & dodrantalis statura est, folia omnia oblonga, rariter dentata, dentibus saepe profundis; caulis non ramosus est nisi ex radice, idem in summa parte spicatus. Petioli florigeri sex linearum, robusti, ad grandem angulum de caule exeunt. Flos uncia paullo brevior. Calyx tubulosus, albidus, duobus foliis deorsum gibbis. Petala longo ungue, bractea pene orbiculari, sulfurea, venosa. Siliqua subhirsuta, cornu longum sine emarginato.

Hoc est *Leucojum angustifolium alpinum flore sulfureo* ALLIONE p. 44. T. 9. f. 3.

12. Altera in planitie Valeſiae paſſim creſcit ſupra *Leu-*
cam, ubi & ipſe legi, & Cl. RICOU, tum circa *Dieden-*
heim alſatiae vicum Cl. RISLER. Huic caulis ramaſus, al-
 rior, cubitalis. Folia ad terram plurima, petiolata, longe
 lanceolata, ſcorzonerae ſimilia, non dentata, glauca, tota
 ſubtiliter hiriſuta, quae priori glabra ſunt, ad caulem gra-
 cilia, linearia. Flos multo minor, caetera ſimilis. Siliqua
 hiriſuta quadrangularis. Stigma craſſum globolum. Haec eſt
Leucojum ſylveſtre CLUS. p. 299.

13. Ab hac ſpecie modice differt planta Germanicae
 proſapie, & ſibiricae, quae abunde in rupibus M. *Alten-*
ſtolberg, & in muris rupibuſque circa *Kelbra* a me decer-
 pta eſt, & circa *Jenam* etiam naſcitur. Huic caules bicu-
 bitales, valde ramaſi, folia ſubhiriſuta, dentata ſed rariter,
 ut ſint quae dentibus deſtituantur. Flos minor quam prio-
 rum, stigma emarginatum. Siliquae etiam quadrangulares,
 hiriſutae. *Eryſimum eſt foliis ferratis lanceolatis* LINN. Cent. 1.
 p. 18. flor. ſuec. n. 602., ſed hiriſuta omnino ſiliqua eſt,
 quam LINNAEUS glabram fecit. Eſſi poſſit videri ſtatura, fo-
 liiſque cauliniſ omnibuſque ferratis, diſſerre, non tamen
 auſim a priori n. 12. ſeparare, cui fructuſ ferat ſimillimoſ.

14. *TURRITIS foliis hiriſutis amplexicaulibus ſiliquis nutan-*
tibus.

Leucojum ſylveſtre anguſtifolium flore albido parvo RAI p. 786.
 Magna copia provenit in rupeſtribus circa *Roche*, à *la*
Marbrière, *Agauni*, circa *Bonneville*, & alibi.

Verno tempore haec planta pedaliſ & cubitaliſ, tota
 foliſ, & caule molliter hiriſuta eſt. Folia radicalia petio-
 lata, hirta, cum mollitie tamen, longe petiolata, obtuſa,
 ex ovatiſ lanceolata, paucis ſed magniſ dentibuſ ferrata
 ſunt. Caulem eadem amplectuntur, & lente diminuta lati-
 tudine, denticuliſ minoribuſ per marginem exaſperantur.
 Verſuſ ſummum caulem petioli florigeri exeunt, ut in hac
 claſſe ſolent, racemoſi. Calyx coloratuſ, albicanſ, deor-
 ſum

sum non gibbus, caryophyllaeus. Sic petala ex albis sublutea; longe petiolata, leviter emarginata. Duae glandulae ad originem staminum breviorum. Siliqua hirsuta, cornu brevi, sine rotundo, longissima trium quatuorve unciarum, per maturitatem nutans, compressa, oris undulatis. Semina plana, ovata, hilo incisa, ala foliacea cincta. Calyces nostris non rugosi, sed modice utique pilosi, ut cum Ammeniana conveniant LINN. *spec. p. 665. n. 6.* A *Monspeliensi* planta differt caeterum simillima, quod ei Calyces deorsum gibbi sint. Ita enim in speciminibus reperio a praestantissimo COMMERSON missis.

15. ERYSIMUM 10. Bernae nunc desideratur, cum tota ea ruderosa area, in qua crescebat, magnificis aedificiis repleta sit.

16. *Sisymbrium* 11. 12. & 13. nunc denique paullo rectius licet constituere, plurimis undique, & ex locis natalibus collectis speciminibus. Omnia autem ex nectariis aut sennapia erunt, aut Brassicae; huic propiora, qualis a CL. LINNAEO definitur.

17. SINAPI adeo *foliis levibus glaucis pinnatis, pinnis linearibus rariter dentatis Enum. n. 11. p. 551.*

Eruca tenuifolia perennis flore luteo C. B.

Sisymbrium tenuifolium LINN. Cent. 1. p. 1. 8. n. 50.

Genevae provenit ad portam *Cornevin*, & Basileae in arenosis ad *Wiesam fl. Badae* in arce diruta. *Aux allées de Colombier*. Frequens etiam in *Alsatia*, *Spirae*, *Manhemii*.

Concinnae plantae folia longe petiolata, fere polypodium imitantur. Nervus nempe a foliosa latitudine augetur, pinnasque accipit alternas, aut oppositas, ipseque in similem, aliquanto majorem, lanceolam exit. Pinnae simplices rarissime dentatae, sed incerta & alternante latitudine; primae breviores, acutum cum nervo angulum faciunt. Ad caulem saepe integerrima, *linariae* familia folia. Caulis subhirsutus, firmus pedalis, cubitalis. Calyx deorsum non gibbus, ad lentem

lentem vitream visus subhirsutus, deciduus. Petala ex petiolo lente dilatantur, bracteis flavis, rotundis, patentibus, calyci duplo longiora. Stamina longiora breviora bina magna portione superant. Inter ea majora stamina, & calycem, tum inter stamen minus, & germen glandulae quatuor rotundae, virides sedent. Cornu siliquae breve, sine globo. Maturescens eadem erigitur fuscuncialis, compressa, paulum articulata, lata ultra lineam, cornu persistente, seminibus compressis, ovatis, cum hilo, non alatis.

18. SINAPI altera planta est *foliis semipinnatis rotunde dentatis hirsutis* Enum. n. 12. p. 552.

Eruca inodora J. B. II. p. 862.

Eruca lutea sylvestris caule aspero C. B.

Haec priori vulgatio *Ebroduni* abunde in fossis provenit: rum ad Arolam inter *Aarberg*, & *Worben*, in *Valesia*. Inter *Lausannam*, & *les Croisettes* ad viam. *Basileae* prope curiam *Naviculariorum* ad *Rheni* pontem. In arenosis *Wiesae*, & *Rheni*. *Bernae* etiam circa *un Stukhof* nascebatur, nunc destructa.

Huic caulis hirsutus, angulosus, caeterum sulcatus, parum firmiter erectus tripedalis, ramosus & brachiatus. Folia *Jacobeae* vulgaris similia, qualia *Linnaeus* *lyrata* vocat, longe petiolata, semipinnata, pinnis angulosis sensim majoribus, ultimam impare maxima obtusa, omnibus angulosis, & maximis paucioribusque dentibus incisus. In caule haec omnia angustiora sunt, dentesque tanti, ut folia semipinnata sint. Tota cum nervis hirsuta sunt. Calycis folia parula, duo modice deorsum gibba, omnia subhirsuta, decidua. Petala longo petiolo, bractea rotunda, de calyce duplo longiora se efferunt, colore ochroleuco. Glandulae quatuor, positae, ut in priori planta 17. Fructus subhirsutus, tetragonus, cornu brevi, capitato, obtuso. Siliquarum petioli ad magnum angulum de caule recedunt, ipsae sursum recurvae, cauli penè parallelae, obtuse tetragonae, turgidae, fuscunciales. Semen oblongum.

Eadem in *Arve* fl. alveo, inque veragrigo agro, & in *Valesia* fere flavo flore nascitur.

Haec est *Sinapi sylvestre Genevense* J. B. II. p. 858. in alveo *Arve* lectum; uti ex plantis video, quas ex loco natali Cl. le CLERC ad me misit.

19. *Eruca Tanacetii folio* MORISONI. Pari jure, ut pleraeque Basileenses, & Genevenses pro Helvetica haberi potest, quam Cl. CLARET ad pedem montis S. Bernhardi in valle Augustae legerit.

20. *Brassica perfoliata* potest helveticis accenseri, quae circa Mulhusiam proveniat.

21. *CARDAMINE foliis pinnatis pinnis laciniatis*, saepe quidem apetalae est, atque folis suis staminibus albis, de calyce eminentibus, florem mentitur, sed eadem tamen, in ipsa Suecia, alias petalae albae calyce majora produxit (LINN. flor. suec. nov. ed. p. 464.).

22. *CARDAMINEN trifoliam* raram civem foliis hederaceis angulis in argutos denticulos exeuntibus, habuit inter suas Cl. le CLERC.

CARDAMINE alpina bellidis folio, glabra, quidem nuper a me in M. *Enzeinda* lecta est, & in summo *Pennino* a Cl. CLARETO.

23. Sed alia, neque a nobis dicta planta, & ex M. *Baldo* cum eo nomine mihi missa est, & lecta in M. *Surchamp* agri Aquilegiensis, penitus omnino diversa. Huic folia integerrima, ovata, radicalia, hirta & aspredine scabra. Caulis trium quatuorve unciarum, uno alterove folio ovato lanceolato ornatus, simplex, habitu omnino *Turritidis* ramosae vulgaris, sed flore toto differt, & fructu. Flos enim grandis, triplo ejus plantulae florem superat, idemque petalodem album calycem habet, deorsum insigniter gibbum. Petalae lacteae, ovatae. Siliquas grandes latissimas ad lineam unciales, cornu brevissimo simplici, erectas praefert, & cauli parallelas. Num elasticae resiliant, seque convolvant,

vant, non rescivi. Videtur ex loco natali esse *Cardamine* §. SEGUIER *veron.* p. 387. Nomen meretur, si glandulas habet, quod nunc quidem expedire nequeo, *ARABIDIS foliis radicalibus ovatis integerrimis scabris, caule subnudo. A Turritide minori flore grandi separatur, latisque filiquis, & caule non folioso.*

P A P I L I O N A C E A E.

24. **A** Stragalorum primum genus oportet expedire in quo ob specimina imperfecta, & fructus potissimum defectum multa mihi, dum majus opus scripsi, dubitatio, neque absque errore fuit. Nunc copia collecta exemplorum, & fructibus maturis conquisitis, haec possunt expediri.

Removere vero oportet ab *Astragalis*, primum *Tragacantham*, quae *alpina sempervirens flore purpurascens* J. R. H., & GARIDEL in ic.

In *M. Jeman, Cheville*, & inter *Javernaz*, & *Ovannaz* montes, a D. RICOU primum reperta, tum a D. des *Coppets*, aliisque

Radix lignosa, maxima, ramosa, multiceps. Caules pedales, foliosi, ramosi. Petioli foliorum in spinulam terminantur, eorumque petiolorum reliquiae superstites, acuminatae, caulem circumstant. Folia subhirsuta, ovatis angustiorum, pinnarum septem ad decem. Flores fructusque ad basin caulium congesti. Fructus hirsuti, turgidi, teretes, duri, breves. Calyx hirsutus, cylindricus, quinque longis & hirsutis dentibus. Flos longus, strictus, albidus. Vexillum emarginatum, venis saturati purpurei coloris pictum. Alae petiolum habent capillarem, hamum brevem & obtusum. Carina brevior, quam alae, hamis brevibus, obtusis, rostellum purpureo, mucrone perbrevis. Caeterum flos pallide carneus est. Stamina novem connata, unum singulare. Tuba filiformis longa, sine paulum crassiori. Siliqua constanter unilocula-

cularis, in ea quatuor nigra, reniformosa femina, aliquibus membranulis & seprulis interstineta, non parallelis ad valvas, sed oblique & transversim normalibus.

A Massiliensi Tragacantha, quam a variis amicis accepi, non videtur differre.

Sive velis generis tueri dignitatem, sive alteri alicui generi addere, certe ex nostris experimentis cum Astragalo non potest relinqui. Si omnino alii Cl. viri Tragacanthas biloculares viderunt, crit in ipso genere varietas loculorum. Nimis enim multos fructus aperui, ut potuerim in meis septum praetervidisse.

25. Porro aliquot ab Astragalis plantas oportebit remove, quas ignorata fabrica fructus pro astragalis habui.

Astragaloides sive *phaca* adeo similis est *Astragalo*, ut vulgo cum ea conjuncta fuerit. Neque tamen sola filiqua differt, quam astragali nonnulli perinde inflatam habent, & ovatam, sed praeterea partium floris proportione. Cum enim *Astragalis* flos fere strictus, & vexillum praelongum esse soleat, *Astragaloidi* multo brevior, & ejusmodi est quales in viciis, in iis certe quinque phacae speciebus, quas inter meas habeo; & quarum tres sunt helveticae.

. I. PHACA caule procumbente foliis ovato lanceolatis

. *Astragalus* quidam *montanus*, vel *onobrychis* aliis J. B. II.

. F. 339.

. *Astragalus montanus* LINN. spec. p. 960. n. 24.

Post priora lectus ad pedem rupis glacialis *Steinbey* in *M. Chaquise*, *Fouly*, *Orgevaux*, *Sur champ*, *Ovanna*, *Erzeinda*, *Prapioz*, *Breitlawenen*, *Stokhorn*, *Galanda*, plerumque in lapidosis deciduis. Haec planta *Astragalos* inter, & *Astragaloides* sive *phacam* ambigit. Habet enim filiquam rererem, ovatam, lanceolatam, inflatam, hinc convexam, inde cava linea sulco divisam. In ea linea commissio valvarum mediam superiorem partem filiquae valde breviter elevatam contingit, eique arancosis nexubus adaptatur; &

ex receptaculo utrinque feminales funiculi exeunt. Semina in duos ordines disposita utrinque ad decem, compressa, reniformia. Adulta filiqua calvescit, & omnino absque vestigio bilocularis naturae est, unaque folia contracto margine lanceolata fiunt, ut alia tunc planta videatur. Eos tamen loculos non membranaceum adeo alicujus longitudinis septum, sed contiguitas receptaculi ad mediam superioris convexitatis filiquae sedem elevati dividit. Caeterum flores breviter spicati, ad angulos rectos, rectisque minores, tum ipsi, tum filiquae eriguntur: iidemque flores breviori sunt vexillo, quam in *Astragalis* solent & latiori, ut *Viciae* florem penitus referat. Folia incerta figura ludunt, ovata, & ex ovatis lanceolata. Caules foliosi, auriculis ovato lanceolatis, ad originem folii positis, spica florali terminati.

26. II. PHACA caule procumbente; foliis ovatis, filiquis pendulis Enum. n. 10.

Astragalus alpinus foliis viciae ramosus, & procumbens flore glomerato oblongo albo caeruleo SCHEUCHZER iiii. VII. p. 509.

Astragalus alpinus minimus LINN. fl. lapp. p. 261. T. 9. f. 1. Similibus locis, uti prior, sed aliquanto rarior. In lapidosis circa glaciales rupes *Steineberg, Stokhorn, Chapuisse, Enzeinda*. Cl. RAMPSPEK in M. *Miirtschen, Galanda*.

Vere a n. 25. differt, floribus rarioribus, minus in eadem spica numerosis, petalis magis distinctis, vexillo striato, floribus, & filiquis pendulis, radicibus, quae priori pedales, huic minimis, etsi lignosae sunt. Caeterum fructus ejusdem naturae est, hirsutus, niger, & unilocularis, nullo septi vestigio, idemque in meis curvus: verum satis maturas filiquas non vidi. Ab *Astragalis* pariter, ut prior breviori flore differt.

27. III. PHACA caulibus erectis, ramosis, foliis ovatis. *Astragaloides alpina hirsuta erecta foliis viciae floribus dilute luteis* TILLI hort. Pisan. p. 19. T. 14. f. 2.

Praeter

Praeter eos montes, quos in *Enum. Helv.* citavi, nascitur etiam in *M. Chapuisse*, a nobis lecta, in *Prapioz*, in *Jerman*, *Ovanna*, *Sur champ*, *aux Nombrieux*. Adde descriptioni, radicem enormem, pedalem & cubitalem esse, caulem erectum ad pedem, & cubitum, foliorum paria quatuor, quinque, sex, mollia, hirsuta, ovata; ad eorum originem praegrandes stipulas, ovato lanceolatas; scapos floriferos ex alis prodire, spicasque ferre confertas, florum etiam retrorsum converforum & pendulorum. Calyx cylindricus, compressus, pallens, nigris pilis hirsutus, denticulis quinque brevibus, nigro pilo totis barbatis. Flos ochroleucus, calyce duplo longior. Vexillum longe petiolatum plicatum, ovale & quasi mucronatum, album, dorso, & parte proxima flava: alae longe petiolatae, longe hamatae, ochroleucae, paullo carina breviores: carina unipes, hamis retrogradis obtusis, mucrone obtuso, curvulo, flavescente. Stamina novem connata; & decimum solitarium. Tuba filiformis. Siliquae pendulae, ovatae, mucronatae, styliferae, inflatae, intus glabrae, uniloculares, seminibus reniformibus.

28. Iterum ex fructus ignoratione mihi, & LINNAEO *spec. p. 756.*, & ante nos SCHEUCHZERO accidit, ut inter *Astragalos* recenseremus *HEDYSARUM caule recto, ramoso, foliis ovatis, siliquis, levissimis, venosis.*

Hedysarum alpinum siliqua levi C. B.

Eam nunc plantam, multis locis, & diversis anni temporibus, repertam, utique rectius constituo.

Radix longa, crassa, lignosa, teres, nigra, multiceps. Caulis erectus, ramosus, dodrantalis, pedalis, etiam cubitalis. Sub foliis vaginae squalentes, siccae, longae, aristatae. Folia venosa, ovata, parium novem & ultra. Spicae in scapis ex foliorum alis prodeuntibus, floresque reflexi & penduli: calycis dentes subhirsuti, inferiori longissimo. Flores *Hedysari*, vexillo quam carina breviori, reflexo, plicato, emarginato. Alae curina breviores graciles, hamo lon-

go retrogrado. Carina pene normalis, obtusa, omnibus peralis major, ex caeruleo purpurea. Fructus articulatus constat quatuor, aut quinque, articulis ovatis, planis, nervosis, alatis, monospermis per graciles isthmos sibi continuatis. Sibirica planta non videtur diversa, fructu, flore, folio, habitu. Sola magnitudo floris nostras separat.

Nascitur in M. *Ovanna*, *Sur champ*, *Chapuisse*, *Enzeinda*, *Fouly*, *Orgevaux*, *Neunenen*, *Stokhorn*, *Pilato*, *Breitlawenen*, *Wangelalp*, *Nombrieux*, *Schilt*, montibus *Switensium*.

29. Astragali veri praeter hos, quos nunc recensebo, in helvetia non sunt reperti. Quis sit *Astragalus II.* CLUS. p. CCXXXIII., aut C. B. *helveticus* ignoratur, & difficile est conjecturam facere, quemnam potuerit cum *Orobo sylvatico purpureo verno* comparare CLUSIUS. Neque de Astragalo 12. 13. & 14. quidquam mihi ultra innotuit.

Vulgarem procumbentem omitto, & *Glaucem* RIVINI.

Qui sequuntur, veri sunt Astragali.

30. I. ASTRAGALUS caule erecto, ex aliis spicifero, siliquis teretibus hirsutis Comm. Gott. 1752. cum icone.

In Helvetia; circa castellum Octodurense, vetustate dirutum, in herbosis abunde nascitur, ibi lectus a me an. 1757.

An hic fuerit *Astragalus pilosus* LINN. Spec. p. 148.

Cicer montanum lanuginosum erectum C. B. prodr. p. 148.

Ad descriptionem alias datam remississe liceat.

31. II. ASTRAGALUS caule erecto, ramoso, foliis linearibus hirsutis, spicis erectis terminatricibus Enum. p. 567. n. 7.

Onobrychis purpureo flore CLUS. Pann. p. 751.

Inter *Leucani* & *Siders* in herbosis abunde, etiam inter *Orsieres* & *Bovernier*.

Fructus, quem nunc demum vidi, brevis, vix trium linearum, subhirsutus, turgidus, curvo stylo instructus. Semina utrinque fere tria, nitida, reniformia, sed hilo eminente.

Hi astragali caulibus ramosis: qui sequuntur sunt scapis spiciferis de radice prodeuntibus, neque ramosis, neque foliosis.

32. III. ASTRAGALUS caule diffuso, foliis ovatis subhirsutis, scapis radicalibus, vexillo longissimo, siliquis teretibus Enum. n. 2.

Astragalus monspessulanus J. B. II. p. 338. (idem enim monspelio missus est) LINN. spec. p. 761. idemque *Astragalus alpinus magno flore* C. B. Enum. l. c. n. 3.

Abunde in via *Tombey*, proxime super *Olon*.

Radix cubitalis, lignosa, inmensum cespitem caulium fundit, & ipsos cubitalis diametri. Folia decem parium, eaque ovata, dum juniora sunt subhirsuta, & obtusa. Flos autem longus ad unciam, strictusque. Calyx longus, cylindricus, etiam roseo colore tinctus, superius excisus, longis rectisque segmentis. Vexillum, ut in praecedente, & in trifoliis, praelongum, strictum, plicatum, emarginatum, purpureum. Alae, quod in tota classe rarissimum, emarginatae in partem magnam & parvam divisae, pallidi coloris. Carina brevior, obtusa, saturate purpurea. Stamina novem connata, & unum singulare. Siliqua longa sine recurvo, tota gracilis, per maturitatem dura, uncialis, teres, paulum incurva, convexa, valvularum commissura latiori. Semina in utrovis loculo quinque & sex, nigra, reniformia, sed superiori parte super hilum crassiori.

33. IV. ASTRAGALUS scapis aphyllis, siliqua turgida ovato lanceolata stylifera, foliis ovato lanceolatis serviceis Enum. n. 5. T. 5.

Praeter scopulos *Neunen* etiam nascitur inter *Charat* & *Sixen* *Vallesiae*.

Adde descriptioni folia sericea, splendentia, nonnunquam satis calvescere. Calycem pariter sericeum cum fructu superesse, qui nigro villo hispido, ovalis inflata est siliqua, constanter acumine terminata. Semina in duobus loculis numerosa: matura non vidi.

34. V. *ASTRAGALUS scapis aphyllis foliis lanceolatis hirsutis, siliqua villosa, inflata, ovata. Enum. n. 8. ic. T. 13.*

Astragalus Pyrenaicus barbae joris folio non ramosus, flore ochroleuco glomerato SCHEUCHZER It. alp. IV. p. 330.

Astragalus campestris LINN. spec. p. 761. n. 30. Nobis utique alpinus est, neque in humiliores montes, aut Juram descendit.

Praeter priora loca nuper in itineribus legi ad M. glaciales *Steineberg*, & in *Wangelalp*, *Prapioz*, *Enzeinda*, *Ovanna*, *Fouly*.

Descriptioni adde, radicem enormi saepe crassitie, & pollicarem reperiri. Fructum brevem, hirsutum, vehementer turgidum, ovatum styliiferum, septo divisum esse. In eo semina numerosa compressa reniformia.

35. *Coronilla prima Enum. sive minima J. R. H. nascitur au Richard, & Sur champ, tum in M. Jeman, & inter S. Aubin, & M. Falconiarum & alibi. A ferro equino imprimis siliquis distinguitur, quas pendulas habet incipientes ex petiolo nodo circulari, deinde articulis constantes tribus, quatuor, & ultra. Ovati sunt articuli, utrinque acuminati, & complanati, cum acie utrinque. Facies plana linea eminente separatur. Acies habet alas membranaceas eminentes duas, interque eas duas lineas pariter paullum, sed brevias elevatas. In articulo semen phaseoli forma, longius, parum incisum. Tamen etiam folia huic coronillae magis perfecte ovata, & crassiora sunt, parium fere quatuor & quinque in nostris, cum extremo impari. Stipulae fuscae, argute lanceolatae, gemellae. Longissima & crassissima radix.*

Haec est, quam Cl. GAGNEBIN reperit au *Rocher de la Chage des Corbeaux*, *Milledoux*, & à *Refrein*. Certo cum nomine *minimae* ex Gallia & Pedemontio amici miserunt. Sed etiam Hispanica planta, in horto culta, nostrae similis est, diversa tamen stipulis rotundis, aut nullis.

36. Ab ista *Coronilla* diversissima est quarta *Enum.* p. 574: *erecta, foliis maximis, ovatis retusis in acumen exeuntibus, filiquis neque alatis, neque aciem habentibus, abitu minus duro.* Conf. *Enum. Gott.* p. 268. Cl. GAGNEBIN reperit au *val de Ruz.* Ego maxima copia in M. *Kunisberg* prope *Jenam*, tum in sylva *Welmesen.* Cl. MIEG circa *Farnspurg.*

Neutram, quod mireris, habet LINNAEUS, quarum utraque multis locis proveniat, & passim descripta sit.

37. *OROBUS caule erecto, ramoso, foliis ovato lanceolatis* *Enum. Helv. n. 2., qui Orobus alpinus latifolius.* C. B. *Prodr. F.* 149.

An *Orobus* 8. LINN. *spec. p.* 729.?

In M. *Luan*, in *Ovaille* sylva, in M. *Nombrieux* & alibi in *Aquilegensium* montosis abunde nascitur.

Ex speciosissimis papilionacearum. Caulis erectus bicubitalis, & ultra, sulcatus & angulosus: folia numerosa, ascendentia; stipulae sub ramis grandes, deorsum hamatae, ex ovatis lanceolatae, ferratae. Foliorum paria quatuor, parum ovato lanceolata, glabra. Ex alis foliorum perpetui scapi florigeri, foliis nudi, angulosi, dodrantes. Florum spica laxa, iidemque, quando maturescunt, retroversi, penduli, heteromalli. Calyx cylindricus compressus: ejus segmenta superiora brevia, lata, curvula, se mutuo respiciunt; inferiora recta, & triangularia sunt. Flos longus, ochroleucus. Vexillum angustum, replicatum, conduplicatum, quasi emarginatum, dorso flavo. Alae obtusae, mucronatae, carinae longitudine, hamis binis obtusis. Carina petiolo fissili, bractea recta modice rostrata. Stamina novem connata & unum solitarium. Tuba sine latiusculo. Siliqua praelonga glabra, polysperma; femina matura nondum vidi.

Orobi caule ramoso nomen nunc reformare oportet, ut sit *Orobus caule ramoso erecto, foliis ellipticis obtusis.*

38. VICIAE nova in Helvetia species nostris addita est a Cl. CLARETO, circa octodurum lecta, quam, quia multa habet vulgaris multiflorae similia, eo accuratius oportet definire.

Caulis in radicem annuam, exiguam continuatur, debilis idem, pedalis & cubitalis, ramosus, foliosus, striatus, subhirsutus. Stipulae peculiare bipartitae, portione superiori majori, utraque striata, lanceolata, aristata, saepe ferrata: duobus inferior imprimis dentibus, superior etiam quinque & septem ita magnis notata, ut pene semipinnata sit. Foliorum paria ad octo, dura ea, nervo conspicuo, linearia, ut tamen latebant ad finem, qui obtusus est, & arista distinguitur, lata ad lineam. Scapi florigeri quatuor & ultra unciarum. Spica rara, flores in pedicellis vix lineam longis, ipsi 9. ad duodecim numerantur. Calycis duo segmenta superiora brevissima, ad se invicem curva, tria inferiora majora triangularia, omnia subhirsuta. Vexillum reliquis petalis multo majus, sature caeruleum, fere totum coloratum, petiolo brevi, elevatum, emarginatum. Alae carina longiores, hamis obtusis, bractea rotunda caerulea. Carina bipes fissilis hamis obtusissimis, tum mucrone, qui caeruleus est; cum reliqua carina alba sit. Siliqua glabra plana, lata, & in medio latior. Semina ad duodecim: maturam non vidi.

Cum descriptione *Viciae onobrychidis* flore convenit C. B. Prodr. p. 149., & cum nomine *angustifoliae purpureo violaceae siliquis latis glabris* ex Delphinatu missa est, sed ea, cum semina tantum quatuor habeat, nostra non est. Erit adeo *Vicia* 6. LINN.

A multiflora segetum floribus multo grandioribus, paucioribus, stipulis ferratis, siliquis pro portione longioribus, & magis polyspermis, toto habitu duriori differt.

39. *Clymenum Parisiense* passim in Helvetia nascitur. Reperi abunde in pratis ad lacum Lemanium prope Ebro, tum

ad *Broyam* fl. inter la *Sauge* & *Sugy*, & in pratis palustribus inter *Chambon* & *Cheffel*. Cl. GAGNEBIN circa *Landeron*.

40. Inter plantas THORELLII helveticus omnes, & circa *Vevei* inque Aquilegiensi ditione lectas, fuit *Anagyris foetida*: locus autem natalis nullus additus est.

41. Inter Genistas certo diversa est ab ea, quae est *hyperici folio*, species a Cl. GAGNEBIN reperta à la *chaux de fond dans la grande pature la Breche*, & in Burgundiae Eriacetis; tum a D. CHATELAIN a *Roulier mairie de la Brevine*. Haec stirps & a me, & a Cl. GARCIN pro varietate habitata *Genistae* 2. *Enum.*, vere differt, mereturque novum nomen GENISTAE caule decumbente ramoso, foliis ovatis, floribus longe petiolatis. Comparavi sollicitè cum Genista foliis hyperici, cui propior est, & multa reperi similia, etiam angulosos caules & ramosos. Folia non valde differunt, nisi quod pilosa magis sunt, neque sericea; caeterum ovatis longiora, obrusa. Petioli floriferi incipiunt differre: hi enim in *hyperici-folia*, germanica & monspeliensi, breves sunt, linea paullum longiores, ut flores sessiles videantur: in nostra unciam aequant. Porro, flos proportionè multo major est, & plus duplo. Calyx, qui *hyperici-foliae* strictus, superiora duo segmenta aequalia lata triangula & acuta habet, inferiora tria connata, huic campaniformis est, bilabiatus & segmenta duo superiora connata curvula, breviter separata habet. Vexillum ex breviori proportionè petiolo, amplum est, & emarginatum, venis pictum. Alae evidèntiori hamo, proportionè latiores. Carina, quae illi obtusissima, huic rostrum habet, modice acutum. Porro vexillum & carina *hyperici-foliae* exterius sericeae sunt, in nostra glabrae. Totus denique habitus mollior nostro est, & folia minime aut dura, aut plicata, minorque pars ramorum indurescit.

42. *Medicae* 3. *Enum.* in colore varietas fere ejusmodi est, ut exterior vexilli pars ex violaceo in flavum langueat; unde, dum clausus flos a vexillo fere totus continetur, idem violaceus apparet, explicatus autem ochroleucum colorem expedit, qui in nostris flavo frequentior est.

43. TRIFOLIUM *pratense purpureum minus foliis cordatis Enum. helv. n. 13. p. 585.* nunc, utrisque specimenibus comparatis, conjungo cum *Trifolio caule hirsuto, scabro, foliis mollibus, integerrimis spicis subvillosis ochroleucis* Cl. LACHENAL p. 2., quod Cl. vir in M. *Vogelberg*, & versus *Schaumburg & Prattelen*, & D. BERDOT in monte *Beligardo* reperit. Folia ima saepe cordata, emarginata; superiora sub floribus stricta & linearia sunt, omnia dentibus destituuntur, & ea nota ab albo pratensi distant. Ad originem foliorum caulinarum vaginae venosae, bicaudes, caudis ex latiusculo principio longe subulatis. Spicae brevi petiolo super folia se efferunt, floresque longos & strictos habent, ochroleucos. Dentes calycis quatuor graciles, aequales, imus latior & longior, omnes ex lateribus molliter pilosi.

Non habet LINNAEUS.

44. TRIFOLIUM *flosculis albis in glomerulis asperis cauliculis proxime adnatis* VAILL. T. 37. f. 1., & a Cl. LACHENAL in arenosis ad *Birsam*, & a me an. 1757. in arcis *S. Triphon* area, cum *medica echinata*, maxima copia repertum paullo accuratius nunc describo. Ex una radice, numerosi caules nascuntur, secundum terram prostrati, semipedales & aliquanto longiores. Folia firma, subhirsuta venosa, obtuse rhomboidea, ex angulo initio facta, sine in arcum. Capitula parva, sessilia ad foliorum alas, subspera ob calyces grandiusculos. Ii campaniformes, contracti pene globosi, dentibus quinque triangularibus, quorum duo superiores minimi, medii mediocres sunt, imus minimus. Flos paullo calyce longior, strictus, inapertus, albus. Vexillum plizcatum, sursum flexum, alarum hamus brevis, & quatuor petala distincta.

45. In Anonide 5. sive *spinosa lutea minore* C. B. sunt quae emendes. Adfinis *pufillae glabrae angustifoliae*, quae montpelio cum nomine *minutissimae* LINN. n. 3. p. 717. missa est, tamen differt foliis totoque habitu hirsutis. Caulis humilis vix sex unciarum ramosus, parum erectus, totus obductus foliis & stipulis ficcis lineatis, lanceolatis, aristatis, & dentatis. Folia hirsuta, & aliquantum viscida, in forti petiolo ternata, pene ovata, argute circumferrata. Flos sessilis: calyx patulus, profunde in quinque lanceolatas, lineatas, longe aristatas, partes fissus. Vexillum pallidum, purpureis lineis pictum, peramplum, ovale, plicatum. Alae saturatius flavae, quam carina longiores, hamatae. Carina ad obtusum angulum flexa, mucrone obtuso, in lato, brevissimo petiolo. Tuba filiformis. Fructus brevis, ovatus, sub-conicus, turgidus, niger. Semina quatuor flava, phaeoli similia, sed breviora. Abunde secundum viam le *Tombe* & circa *Bex*, & in *M. Fouly*.

R I N G E N T E S ROYEN.

46. **L**ENTIBULARIA *minor* in paludosis à la *Chételaz* val-
lis minoris Monasteriensis reperta est a Cl. GA-
GNEBIN. Eam Cl. LINNAEUS in *flor. suec.* p. 10. descriptam
dedit.

47. *Euphrasiam tenuissime dissectam* vere a vulgari minori
flore differre vehementer dubito. Abundat circa *Bex*, *Agau-*
num, etiam versus fontem *Furet*.

48. Pedicularibus nullam novam speciem addo, plerasque
aliis in locis repertas confirmo.

In mucronatis illis fructibus speciei I., ultimae, & procul
dubio aliarum etiam alpinarum, loculi septo imperfecto di-
stinguuntur, quod paulatim versus apicem fructus evanescit,
ut in summo cornu locus unus sit.

49. *Pedicularis* 3. Eum. ab eo tempore a nemine in Helvetia reperta, neque a LINNAEO repetita, ramen ab omnibus nostris differt, adfinis quidem primae, sed rostro floris multo breviori, foliorum etiam pinnulis brevioribus & obtusis.

50. Contuli etiam cum Cl. virorum plantis meas. *Pedicularis* I. J. Fr. SEGUIER est omnino nostra 8. Non autem *Pedicularis foliis bis pinnatis, calyce non cristato, floribus ochroleucis in spicam nudam congestis* Cl. ALLIONE p. 50. T. 11., quae quidem non foliorum longiorum de spica eminentium defectu a nostra differt, sed foliis multo minus profunde bipinnatis.

51. *Pedicularis foliis alternis, pinnis semipinnatis floribus rostratis ochroleucis dense spicatis* ALLIONE p. 51. T. 11. differt a nostra arorubente nervo non folioso, atque adeo ad eam pertinere nequit: adque nostram certe *PEDICULARIS foliis alternis pinnis semipinnatis floribus laxae & longissime spicatis* EJUSD. Cl. viri p. 54. T. 12. ob eam notam potius accedit.

PEDICULARIS EJUSD. p. 52. T. 12. f. 1. ab omnibus nostris differt.

PEDICULARIS caulibus reflexis spica laxa purpurea SEGUIER p. 125. est omnino nostra 2.

Pedicularis alpina lutea EJUSD. p. 126. habet multo tenuiora folia, & minus repetito pinnata, quam nostra ejus nominis.

52. Cymbalaria hybridam esse, & ex utraque *Elatine* adulterio provenisse dicitur a Cl. Auctore *plant. hyb.* n. 30. Glabritie fabrica, foliis, sede natali ab utraque differt, nam segetales sunt, cymbalaria autem est muralis, & nascitur iis locis, quos nulla *Elatine* frequentat; ab iis vero perpetuo abest, in quibus utraque abunde provenit, segetibus nempe etiam frigidioribus Germaniae Septentrionalis & Helvetiae.

53. **N**Ova civis est *CASSIDA procumbens*, *foliis ovatis*, *crenatis subhirsutis*, *spicis foliosis*.

Nisi a SCHEUCHZERO forte cum nomine *Teucris inodori magno flore*. *Itin. V. p. 428.* describitur, non addito loco natali. Certe fructus, eo loco dictus, ad *Cassidam* utcumque pertinere videtur, cum *quatuor* ei *loculamenta* tribuat SCHEUCHZERUS. Sed *atropurpureus flos*, quem dicit *Itin. VII. p. 519.* & nigredo, quam in foliis supervenire addit IDEM *Itin. I. p. 50.* & IV. l. c. & locus, quem in alpium saxosis ponit, tanquam plantae vulgo notae; denique, quod *Stacheliniae* nunquam meminit, quam multo minus quam nostram, raram certe stirpem, praetervidere non potuit, haec faciunt omnia, ut eum Cl. Virum *Stacheliniam* *teucris* nomine voluisse persuadeat. Nostra enim *Cassida* unico hactenus loco in Helvetia certo visa est, in M. *Fouly*, secundum lacum.

Speciosa planta radicem habet sesquipedalem, ramosam, teretem; caulem procumbentem, ramosissimum, ramis dorantalibus & pedalibus. Folia petiolata, ex ovatis obtusa, mucronata, & obtuse pariter dentata. Bractee ovales, subhirsutae, integerrimae. Flores spicati, congesti. Spica dum floret uncialis. Calyx, qualem character generis requirit, brevioris calcei similis. Flos speciosa magnitudine: labium superius caeruleum, subhirsutum: segmenta lateralia duo subrotunda: pars inferior palato contra galeam tumet; barba obtusa emarginata, parva parte caerulea, reliqua alba & pallente.

A *Cassida spicis foliosis* praeter colores differt foliis glabris, bracteis pro portione floris minoribus, caetera valde similis.

54. *Salviam* helveticis addo.

SALVIA foliis petiolatis, cordiformibus, obtusis, verticillis nudis.
Horminum sylvestre III. CLUS. p. XXIX.

Nascitur in M. Luan, in ipso pago *Leisn*, in pratis circa *Escharpigny*, & in rupestribus prope *Roche* versus scaturiginem le *Furet*.

Folia longe petiolata, circa petiolum emarginata, circumferrata, hirsuta. Ima saepe duas auriculas habent, petiolo sub ipso folio adnatas, exiguas, ferratas, a CLUSIO minime neglectas. Caulis longe nudus, frequentibus, nudis, densis, florum verticillis ambitur, qui breves, aequales, in circulum non longum, multoque foliis minorem congesti caulem ambeunt. Flores in hoc genere ex minimis, quos recte *lavandulae* flores non superare CLUSIUS monet. Calycis dentes superne tres, inferius duo, triangulares, majores. Flos sature caeruleus. Vexillum cavum, simplex, integrum, cochlearis similitudine. Alae laterales ad perpendiculum longiores, barba profunde excisa. Antherae duae in bifidi filamentum altero cornu sessiles.

55. *HORMINUM* foliis cordato obtusis, caule nudo, LINN. spec. p. 590.

Melissa pyrenaica caule brevi plantaginis folio J. R. H. MAGNOL hort. Monsp. cum icone.

Cl. SCHINZIUS legit in alpe *Teuri* & *Alveney*, & mecum communicavit Cl. GESNERUS.

Folia ad terram petiolata, perfecte ovata, circumferrata. Caulis dodrantalis, pedalis, pene aphyllus, praeter bracteas aliquas, ex ovatis lanceolatas, integerrimas. Verticilli pauciflori, in meis plerumque ad alterum latus conversi, ad caulem sessiles. Calycis de more tres dentes sursum reflexi, duo alii deorsum, omnes aristati. Flos grandis, peculiariter latus, eminente tuba, quem recentem non vidi.

56. *CATTARIA* *hispanica* *betonicae* folio circa Rupem ubique provenit, in scopulis versus scaturiginem le *Furet*, in sepibus *aux Gauges*, passim etiam in via regia.

Sed aliam speciem Cattariae indigenis addidit Cl. le CLERC, ad pedem M. Jurae lectam, quam etiam circa *Wafen* SCHEUCHZERUS indicat.

CATTARIA tomentosa, foliis longe acuminatis, acute crenatis.

Cattaria angustifolia minor J. R. H.

Cum Cattaria vulgarissima convenit, caeterum folia proportione multo longiora habet, & angustiora, tota cum caule albo tomento obducta, calycem perinde tomentosum. Flos violaceus: odor virulentus pulegii.

57. MELISSA offic. utique sponte provenit, passim circa *Rupem*, *Aquilegiam*; (a *Verpousaz*) *Octodurum*, a *fulléyn*.

58. LAVENDULA angustifolia in monte *Vuilly* super vineas maximam copiam in sabuletis a me lecta est, tum a D. DIVERNOI in desertis montium.

59. HYSSOPUS ad rupes *Valesiae* & *Delphinatus*: *Rosmarinus* non vere quidem spontaneus, in rupibus supra *Ivorne*, tum ad pedem *gypfariarum* rupium prope *Bex*, & alibi se sponte propagat, atque arborefcit.

MENTHA angustifolia I. spicata C. B. a D. GAGNEBIN haud longe a *Ferriere*, in Burgundia quidem a *Goumey* prope *Dubim* fl. tum à la *laiche*: a me in vallis *Vaudensis* viis publicis reperta est, haud longe *Vivisco*.

Mentha palustris verticillata ab *Arvensi* staminibus eminentibus *Enum. Gott.* diversa passim in Helvetia provenit, ut circa *Anet*.

60. *Marrubiastrum vulgare*; quod *stachys minima* Riv. circa *Bevieux* in segetibus legi, & in vineis *Mulhusiae* Cl. HOFER *Act. helvet.* T. II.

61. CALAMINTHA pulegii odore florem valde similem habet montanae Germanicae, cum qua frequentissima nascitur circa *Roche*. Sed quae pulegii odore est, florem habet multo minorem, dilute violaceum, tubam tamen proportione longiorem, folia rotundiora. Altera habet folia acuminata, grandiora multo, florem purpureum, duplo majorem, tubam brevioram.

62. *MOLDAVICA* foliis fasciculatis ellipticis, integerrimis, nervo divisis.

Chamaepitys Austriaca RIVIN. T. 73.

Passim in montibus Aquilegiensibus provenit aux *Nombrieux*, à *Prapioz*, *Sur champ*, & in *M. Richard*.

Cum *Ruyschiana glabra foliis integris* AMMANNI omnino eadem planta est, ut specimine Gmeliniano cum alpinis collato facile confirmavi. A *Ruyschiana foliis cartilagineis*, pariter ex Sibiria missa, manifeste differt, foliis quidem tenuioribus, nervo medio eminente divisis, qui in Sibirica nullus est, foliis novi rami longis, quae isti brevia sunt, unde habitus fasciculatus; calycis aristis multo brevioribus: caeterum neutrum folia partita habet, aur spinarum quidquam. Nostrae calycis segmenta quinque, supremum triangulare latius, quatuor reliqua angustiora similia. Flos uncialis satore caeruleus, hirsutus, labium superius incisum, alae sive partes laterales ovatae lanceolatae. Barba bifida, circumferrata, maculata. Stamina quatuor, antheris nigris, albo polline.

D I P S A C E A E.

63. *V*ALERIANA foliis integerrimis, radicalibus ovatis, caulinis linearibus obtusis.

Nardus celtica J. B. T. III. p. 205. & omnium auctorum.

In tenui gramine altissimorum montium ad dextra lacus *Ferraire*, rum in montibus vallis *Augustae*, donec e regione sis vici *Estrouble*, & supra *S. Bernhardum* CLARETUS, In *M. Scheinberg* Switenfium Cl. SCHANZ, Etiam a Cl. ALIIONE accipi.

Plantae characterem nunquam, quantum video definitum, ad recentes plantas designavi. Radix odore forte & stabili, *Valerianae*, multis squamis obnupta, fibras plurimas cylindricas, durasque, demittit, & multos caules producit. Cau-

lis triuncialis & semipedalis, erectus, simplex. Folia ex radice quatuor, aut paullo plura, petiolo unciali latiusculo, ipsa elliptica, aut longe ovata, obtusa, crassiuscula, pallida. In caule unicum par foliorum linearium obtusorum. Caulem terminat spica nuda, duobus, tribus, quatuorve verticillis florum facta. Eorum verticillorum quilibet constat duobus petiolis trifloris, in supremo unifloris. Semina anulo striato, deinde evoluto pappo terminata, ut in tota gente. Flos campanula lata, patula, quinqueffida, aequalis, extus purpurea, intus fere cinerea: segmenta lanceolata. Tuba flava, longe eminens, terminatur tribus clavis. Stamina in his exemplis nulla. In aliis vero floribus aliorum exemplorum tres antherae flavae, grandes, suis in filamentis extra florem elatae, bifidae, tum flos purpureus, & tamen semen. Explicat rem CLARETUS, ut vere non dioica planta sit, sed mascula stamina prima prodeant, iisque senescentibus pistillum trifidum succedat.

A Cl. MORENIO multo majora, caeterum similia exempla accepi.

Si Valeriana vulgaris laudes meruit Cl. HILLII, majorem spem ab ista specie licet concipere, quae in altissimis montibus nata, multo acrioribus sit viribus, odore vulgarem valde superet.

Celticam vero spicam *Valerianae maximae cacaliae folio* radicem esse (HILL. *mat. med.* p. 580.), comparatis specimenibus, non inveni, neque ea Valeriana in Germania alpina provenit, ex qua in Aegyptum mittitur HASSELQUIST P. 537.

De Scabiosa 2. 3. 4. valde dubito.

C A P I T A T A E.

64. **C**INARA foliis petiolatis, lanceolatis, ad pediculum emarginatis.

Rhapon-

• *Rhaponticum alterum angustiori folio* LOBEL ic. p. 288.

• Nobilis planta, neque cognita nuperis, etsi ad medicinariam rem pertinet, nascitur in *M. Jeman* altiori dorso.

• Radix crassa, pollicaris, teres, longa, aromatica quando recens est, per siccitatem rugas longas agit, & corona foliorum siccorum terminatur. Folia ad radicem multa, longe petiolata, plerumque ad lapathorum morem longe lanceolata, ad pedunculum emarginata, per oram non profunde dentata, in parte averfa albo tomento obnupta. Non rarum est tamen, aliquot paria pinnarum acutarum & gracilium ad hunc petiolum accedere. Caulis latus, digitalis, cubitum altus. Ad caulem folia pauca, similia, sed breviter petiolata, aliquando pinnata. Flos semper unicus caulem terminat, maximus inter capitatas indigenas, ut soli cinaræ cedat, biuncialis undique. Squamæ calycis multorum ordinum siccae, petiolatae, sine dilatato, ora lacera & laciniata, ut in *Rhapontico* vulgari. Flosculi omnes fertiles, semine columnari longo pappo coronato, qualis etiam in placenta est. Flosculi tubo gracili, campanula inclinata, purpurea, tuba emittente.

• *JACCA incana capite pini* non recedit, etiam si folia pleraque pinnata & aliquanto, quam nostra planta, magis villosa habet, uti quidem solent in calidis regionibus tomenta foliorum augeri. Caput enim squamaeque calycis conveniunt. Folia semipinnata MILLERI T. 153. in nostra pariter reperiuntur.

• 65. *Carduus* γ, etsi multiflorum caulem habet, non differt a n. 4.

• *Carduus* 3. *Acanthoides* J. B. T. III. p. 56. passim a me repertus est ad vias, etiam albo flore prope *Salzderhelden*.

• Caulis ramosus, flavis robustis, eminentibus lineis, & alis foliosis percursus, ferratis dentibus, in flavescens fortes aculeos exeuntibus, quales etiam ex foliorum dentibus producantur. Folia aliquantum *carduo turbinato* affinia, pinnata, nisi

nisi quod nervus foliosus est, pinnis retroverfis, singulo nervo in similem fortem aculeum exeunte, subtus pilosa. Flores summos ramos terminantes minores quam nutanti, sessiles, absque petiolis, hinc minime nutantes, squamis numerosis, vagis, etiam reflexis, in similes aculeos, non fortissimos terminatis.

66. CIRSIIUM 2. Enum. abunde reperi in adscensu des *iles d'Ormond à la Croix*, circa molendinum *arveja*, & alias in pratis vallis *Ormond defsus*, tum in pratis vallis *Juranae*. GAGNEBIN à l'*échelette sur l'Anvers de Renan*, au *Bugnet*, aux *Convey*, à la *ronde de Chaux de fond*, circa *Monpelgardum* D. BERDOT. Cl. le CLERC aux environs de la *dole*, & in M. ad *Gex* pertinente, in adscensu a *Gex* ad *Misoux à la faucille*.

Idem est *Cirsium decimum* Enum., & demum *Cirsium novum ejusd.* Enum., quas species expungere oportet.

Proprium huic plantae est, habere ima folia integra, dentata, superiora vero eo magis laciniata, quo altiora sunt, donec pinnata sint, ut in *polypodio*, a quo nomen habent, pinnis longis, aliquot praegraves dentes emittentibus, ut in *carduis turbinatis*, per oram molliter spinosis, extrema tamen pinna semper longiori. Caulis profunde sulcatus, cubitalis & bicubitalis, parum foliosus, sub flore tomentosus. In summo caule, & in ramis, tres quatuorve flores brevibus in pedunculis. Flos conicus, quando floret, squamis plurimorum ordinum, glabris, sublividis, mollissimo mucrone, triangulis, & eo longioribus, quo sunt interiores. Pappus plumosus. Flosculi de more gentis, alias ochroleuci, alias purpurei, cum tuba insigniter eminente. Semina ovata, compressa, linea percurfa.

Vicinum *cirsio pratensi acanthoidi* folia nulla floribus substrata habet.

Proliferum etiam reperit Cl. GAGNEBIN fere singulis calycis foliis in florem imperfectum exeuntibus in pratis de *Convey*.

67. *CIRSIUM foliis triangularibus, lunate dentatis, subtus tomentosis* Enum. Gott. n. 16. in M. Fouly florens contemplatus sum. Flores in umbellam potius, quam spicam, septem vel octo. Calycis folia hic magis, quam in speciminibus circa pontem *Diaboli* olim a me lectis, lanata, triangularia, brevia. Flosculi omnes androgyni, violacei, tubo stamineo eminente, de quo tuba leviter incisa prodit.

Non repugno esse *Cynoglossi folio* HORTI ELTHAMENSIS, etsi in Anglia, ac Suecia folia lata non habet (LINN. flor. suec. n. 714.). Serratula vero caule ramosissimo 6. ZINNII p. 387. differt flosculis carneis calycem non superantibus.

68. *Cyanum* 3. legit D. LACHENAL circa Basileam.

DISCOIDEAE.

69. **T**ANACETUM flore nutante nascitur in *Goldey* prope *Underseen*, repertum a D. BERDOT, & circa *Mulhausen* a Cl. RISLER. Characterem dedi in *Enum. Gott.* p. 371. Ab astere omnino recedit cum semina pappo destituantur, & flosculi in ambitu feminini imperfecti sunt, & absque ligula.

70. *Absinthium Romanum* vera indigena est, & ad rupes circa *Lavey* abunde nascitur.

Sic & ARTEMISIA foliis duplicato pinnatis, pinnulis parallelis tomentosis *Enum. Gott.* p. 372. sive *Absinthium tenuifolium* in M. *Cheillon* circa scaturiginem torrentis *Grisonne* provenit, & in *Rhaetiae* M. *Beverin* a Cl. SCHINTZIO lectum est, tum a *Couvet*, a *Travers*, & au *cul des Roches* a Cl. GAGNEBIN. *Artemisiae* 6. *Enum. Helv.* folia prima sericea & incana sunt, ut aliam omnino plantam promittant.

71. *Artemisiae* 3. nomine duas plantas Cl. viri conjunxerunt. Earum rarior est, ARTEMISIA foliis sericeis, caulinis pinnatis, radicalibus bis tripartitis.

Abfynthium alpinum fpicatum foliis petiolatis bis trifidis, caulinis pinnatis Cl. ALLIONE *firp. Pedem. T. 1. p. 5.* huc omnino pertinet.

Nafcitur in M. *Fouly* Valesiae, nova planta. Folia ad terram petiolata, fericeo brevi & adreffo tomento obducta, incana, tripartita. Segmentum quodlibet ex petiolo tripartitum, laterale inaequaliter, medium aequaliter. Ultima segmenta lanceolata, obtufa, obtufiora etiam in caulinis foliis. Caulis dodrantalis & femipedalis, non ramosus. Folia ad caulem feffilia, pinnata, pinnarum paribus quatuor, extremo segmento maximo, & latiori, pariter fericea. Petioli florigeri folitarii ex alis foliorum, in longam foliofam fpicam digeffi, cujus pars fuma denfior eft, & petioli breviores, erecti omnes. Calycis folia ovata, fubhirsuta, ora fufca. Floculi in ambitu feminini, fola cum tuba; femine plano, pene cordiformi, & abfque ftaminibus. Interiores androgyni, cum lutea campanula, & ftaminibus. Placenta nuda.

ICON BARRELIERII n. 642. & fylvii BOCCONE T. 71. huic propior eft.

72. *ARTEMISIA foliis fericeis caulinis pinnatis, radicalibus petiolatis pinnatis, pinnis trifidis & quinquefidis.*

Abfynthium alpinum incanum C. B.

Haec multo vulgatio, in plerifque montibus editis & frigidis, alpium tamen, provenit, tum ad Rhenum fuperiorem & lacum Rivarium: in alpibus Urienfium, Angelimontanorum, Abbatifcellanorum J. GESNER. SCHEUCHZER in M. *Joch Titifperg, Gemmi*. Ego in *Gemmii* meridionali defcenfu, in M. *Scheidek, Mettenberg, Grindel, Wangenalp*; in alpibus Aquilegienfium *Enzeinda, Prapioz, Chapuife, Jeman, Surchamp, Richard* legi; tum *ex valle de Bagnes, S. Bernhard* & aliunde habui.

Alia planta omnino, etfi leviter adfpicienti eadem videri poffit. Radix brachiata multiplex, lignea, reses, tuberculofa. Folia ad radicem petiolata, pinnata, pinnarum paribus duobus,

duobus, extrema impari: pinnarum quaelibet iterum trifida est & quinquefida, sericeae quidem omnes, sed angustiores, hinc acutiores quam priori, caulis pariter subhirsutus, purpurascens. Folia ad caulem pinnata, duorum, triumve parium, pinnis angustioribus, quam prioris, & simplicibus, lanceolatis; demum simplicia ex ovatis lanceolata. Flores in petiolis longioribus etiam fescuncialibus erecti, nisi quod imi, forte folii, in gracili pedunculo nutant. Calycis folia hirsutiora, quam priori, viridiora, ora minus fusca, aut omnino alba. Circulus caeterum similis flosculorum femininorum, imperfectorum, cum interiores androgyni sint, & campanulam quinquefidam, luteolam habeant. Placenta nuda. Totam plantam priori minus dura, odorata, aromatica, uti prior, sed aliquanto diverso odore. Vocant *Genipi blanc* alpicolae, & ea pariter ut *Achillea* in pleuritide uruntur.

Inter sibiricas Gmelini haec est *Artemisia* 95. etsi alio cum synonymo; teste planta sicca Martiniana. *Absinthium V.* Gmelini p. 128. T. 62. alia omnino planta est, vel receptaculo teste, altiori etiam habitu.

73. *Absinthium I.* Enum. seu *alpinum candidum humile* a n. 72. non differt, cui perfecte convenit figura Cl. Allionii. Unice minora exempla sunt, floribus nullis petiolatis, iisque in summo caule congestis.

74. *Gnaphalium 3.* seu *Americanum latifolium* omnino totum collem late operit ad dextram villae *Drakau*, supra Arolam. Non repugno vero primordia ex horto habuisse.

75. *Gnaphalium 7.* Enum. habet multo plures flores sessiles, congestos, breviores, calycibus villosis, squamis lanceolatis, ora fusca: flosculos in ambitu pariter feminas, minimo floris tubo, & eminente cum tuba: androgynos tamen etiam numerosos, campanulatos.

76. *Gnaphalium 8.* Enum. habet flores tres quatuorve in summo caule congestos: squammas calycis lividas fuscas, subhirsutas, oris nigris, juniores tamen penitus albas. In

ambitu flosculi feminini pauci, tuba eminente facti; & tubo florali; interius androgyni numerosi. Iis campanula quinquefida pallens, de qua tuba bifida cum pappo longe eminent. Folia prima, subrotunda. In Montibus *Sur champ* & *Richard*. Vera & diversissima planta est. Erit **FILAGO** caule simplici, floribus cylindricis, fuscis, in summo caule quaternis papposis.

77. Alia iterum planta est **FILAGO** 6. Enum. caule simplicissimo, paucifloro, calyce fusco, glaberrimo.

Gnaphalium supinum Lavandulaefolio **BOCCONI** p. 107. T. 85. ut videtur.

In *Wangenalp*, *Jeman*, *S. Bernhard*, montibus vallis de *Bagnes* &c.

Huic caules simplicissimi, dum floret, vix erecti, aegre triunciales, postquam defloruit etiam semipedales. Flores in summo caule tres, duo, saepe etiam unicus congesti dum planta viget; postquam defloruit remoti: proportione plantae magni, cylindrici, sed breviores quam Filagini 7.: squamae calycis glaberrimae, fuscis oris. Flosculi in ambitu pauci imperfecti, plures androgyni, campanula flava in fuscum colorem degenerante. A filagine 8. calyce glaberrimo differt, a spicata, quae etiam in alpes ascendit, habitu paucifloro, flore non conico.

Hoc est ex descriptione *Gnaphalium* 29. **LINNAEI**, etiam alia habet synonyma. De flosculis vero androgynis non adinet dubitare.

78. **PETASITES** floribus spicatis, flosculis paucissimis androgynis, calycis foliis lanceolatis abunde nascitur in sylva *Traversin*, ubi legi, qua itur au *Torrent des males pierres*, & à *Roulier mairie de la Brevine* a **Cl. CHATELAIN** lectus, tum in valle *Ormond dessus* passim, & alibi in frigidis alpium, *Breitlawenen* &c.

Cum **Petasite** 3. in multis convenit, diversa tamen, non solum multo foliorum, & caulis tomento, sed potissimum etiam spica brevissima, pauciflora, flore sextuplo majori, segmen-

segmentis calycis lanceolatis, quae in Petasite 2. obtusa sunt. Character similis, & duo, vel tres unice androgyni flosculi, cum multis femininis.

XERANTHEMUM, a me descriptum p. 709. omnino varietas est vulgaris *Xeranthemi* junioris, nondum explicati, valde ramosi.

R A D I A T A E.

79. **I**Nter ERIGERONTIS species oportet conjungere duas, quas primo & secundo loco enumeravi. Nam vere omnino continua serie progredi licet ab exemplaribus caule unifloro calyce albo tomento obducto, quae species in M. *Enzeinda* abunde provenit, altioribusque montibus vallis *Bagnes*; inde ad speciem 2. ejusque varietatem *minorem*, cui calyx & folia subhirsuta, & denique glabra sunt, caulis etiam uniflorus, & quae *Conyza caerulea alpina minor* C. B. est: denique ad varietatem 3. altiolem, cubitalem, foliis etiam ad caulem subrotundis, caule brachiato, aliquot floribus terminato, quae *Conyza caerulea alpina major* C. B. Varietatem 2. albo flore reperi in *Enzeinda*, *Chapuisse*, *Foreletta*, & *Prapio*. Varietas altior crescit in M. *Danfex*, *Richard*, *Sur champ*, & *Ovanna*. Nomen autem melius dici potest ERIGERON *foliis imis petiolatis subrotundis, ad caulem lanceolatis, petalis femininis ligulatis*.

80. ASTERIBUS oportet tres species addere, noviter in Helvetia inventas, flavo flore omnes.

ASTER caule ramoso, foliis ovato lanceolatis subtus incanis, odoratis, floribus luteis umbellatis.

Helenium montanum salicis folio subtus incano VAILL., ut ex specimine sicco confirmor, quod a VAILLANTIO per STAEHELINUM ad me pervenit: synonyma vero huc referri nequeunt, cum *Aster III. Pannonicus* CLUSII diserte ab Ill. Viro dicatur odore carere.

Passim circa Bernam a me lectus est inter arundines supra praedium *Infeli* ad *Arolam fl.*, deinde inter falices *aufsmbodenaker*, inque insulis circa *Hunziken*, & in solitudine *die Eymatte*, autumnalis planta, parum nuperis cognita. Radix lignosa, teres, deorsum fibras numerosas demittit. Caulis bicubitalis, ramosus, superne brachiatus, valde multiflorus, rectus, firmus, lineatus, hirsutus, saepe purpureus. Tota planta odore conyzae est, & pene pulegii. Folia inordinata, sicca, ex ellipticis lanceolata, rariter dentata, rugosa, subhirsuta, subtus pene tomentosa, alba. Flores in umbellam planam dispositi, dense congesti ad quemlibet ramum aliquot: Calycis folia exteriora lata, lanceolata, reflexa, vagma, duorum ordinum: interiora erecta, & ad florem appressa pariter duorum ordinum. Petala plana 40. & ultra, obtusa, quinque dentata, aliquot ordinum, sibi fere parallela, flava. Flosculi copiosissimi, discus planus. Staminum aculei retrogradi, ut LINNAEO *Inula* fit. Seminis pappus longiusculus.

Odores & colores, qui sensibus percipiuntur, quando constantes sunt, in plantarum nominibus excludere, in animalibus admittere ejus est, qui leges nutu figat atque refigat.

81. II. ASTER foliis radicalibus petiolatis ellipticis, ad caulem lanceolatis, sub caulis divisione laciniatis.

Aster luteus major folio succisae RUPP. p. 180. ed. meae, non vero C. B., qui *Inula* 4. LINN. spec. p. 882. uti quidem suspicor.

In Germania legeram Jenae, locis a RUPPIO citatis, tum circa *Salzderhelden*, ad *Werram fl.* prope *Witzenhausen*, & alibi. In Helvetia abunde reperi ad oras lacus Lemani, aux *Grangettes*, haud longe *Noville*.

Satis adfinis Asterisco, ejusque iconi CLUSIANAE, & ab *Astere* 3. Enum. *Stirp. Helv.* diversissimus est. Radix exigua, dura, capillata, multifida. Caulis hirsutus, purpureus, cubitalis aut aliquanto altior. Folia prima utique cum Succisa

cifa conveniunt, petiolata, elliptica, mucronata, perpaucis denticulis notata, aut nullis, leviter utrinque hirsuta. Folia caulina evidentius ferrata, ora saepe purpurea, principio angustiori, petioli simili; inferiora latiori basi quasi caulem amplexa, ex ellipticis lanceolata; superiora etiam plicata & laciniata. Flores in summo caule aliquot, grandes, uncia latiores. Folia calycis exteriora lata caulinorum similia, retrograda: interiora angusta, subhirsuta, apicibus longe lanceolatis, reflexis, laxa, neque sibi, ut in *Astere* 4. adplicata. Petala semper numerosa, quinquentata, angusta, plurium ordinum. Semiflosculi minimi, discus paululum convexus, pappus longus & copiosus.

82. *ASTER foliis omnibus integerrimis, ovatis, tomentosis, caule unifloro.*

Aster montanus hirsutus LOBEL p. 350.

Auf der Kanderlatt Cl. KOCH pharmacopola Thunensis. Circa *Kertzen* Cl. RAMPSEK. Ego nunquam reperi. Facile agnoscitur foliis nitentibus, sericeis, crassulis, utraque superficie albo tomento obnupta, ora levissime ferrata. Ima petiolata sunt, suprema amplexicaulia, lanceolata. Flos grandis uncialis. Calycis squamae imae nitidae, non ita reliquae, latae omnes; lanceolatae, in meis speciminibus per aetatem repandae. Semiflosculi lati; aurei; quinquentati. Flosculi numerosissimi, pappus copiosissimus. Non omnino singulares, sed duo, tresve in uno caule flores sedent.

Asterem 9. nemo recentiore reperit.

Inulae genus, ut a minuto, & in minoribus speciebus aegerime percipiendo caractere sumtum, totum artificiale est.

Ad *Senecionam* II. *S. Chrysanthemum alp.* 1. CLUS. *Pann.* p. 566. adde abunde nasci in *M. Jeman*, & popularibus dici *Genipi Jaune*, & in montibus etiam supra *Bagnes* lectum esse, & in *Bovina*, montibus vallis *Augustae*, atque supra *S. Bernhadi* M.

Caly-

Calycis segmenta unius ordinis, obtusa, nigro margine finiuntur, cum paucissimis, aut omnino nullis squamis, ad basin floris accessoriis. Petala lata, lineata, obtusa, incisa, pauca, duo, tria. Flosculi grandes & ipsi pauci: pappus praelongus.

84. *Jacobeae vulgaris* specimina prope Roche à la marbrière mense Octobri reperi, quae perfecte absque radiis essent.

Senecionem 6. parum diversum a *vulgari Jacobaea*, cui & ipsi juniore calycem saepe lanuginosum reperi, legi ad lacum lemanum.

De *Senecione* 12. 14. 15. 16. 17. nihil porro inaudiui.

85. *Anthemis MICHELI Chamaemelum* quidem est VAILLANTII, sed eae plantae, quas nunc expono, facile possunt cum *Achilleis* manere, quarum semiflosculi breves sint latique. Difficillimum vero fuerit, tres, quatuorve sibi similes stirpes separasse, quas tamen separare, vel ob vires medicas oportet, quas habent diversissimas, aliae acres, aromaticae aliae, aliae omnino nullas, quae sensibus percipiuntur.

86. I. *ACHILLEA foliis pinnatis, pinnulis acute trifidis, laxè dispositis*.

Parthenium alpinum CLUS. Pann. p. 262. *hist.* p. 336.

Anthemis alpina saxatilis umbellata perennis calyce nigricante MICHELI p. 33. Vetat huc referre Cl. SEGUIER, quod uniflora sit. Verum CLUSIANA multiflora huc MICHELANIAM ducit.

Haec species reliquis multo vulgatiores, passim rivos alpinos obsidet, ut torrentis *Avançon Scaturigines* in M. *Enzeinda*, aut saxa *Gemmii, Gotthardi, Grimsulae, furcae M., Ovanana, Prapioz, Sur champ, Richard, & Chapuise*.

Radix nigra, lignosa, ramosa, fibrosa, reptans, multos caules producit, eademque gustata fatua primum, demum igneum in lingua & durabilem pyrethri saporem relinquit. Caules dodrantaes, pedales, duri, inferne glabri, superne hirsuti,

hirsuti, ut petioli denique tomentosi sint. Folia satute virentia, pinnata, petiolo plano, pinnis distinctis planis, decem, duodecimve parium, quarum primae simplices, quae sequuntur acute & saepissime inaequaliter trifidae sunt, ultimae simplices. Flores in umbellam, sex & duodecim etiam florum. Calyx inverse conicus, cujus folia prima viridia hirsuta, reliquis in ordinibus lutea, cum ora nigerrima, ut in cyano. Petala plana ovata, lata, obtusa, tridentata, alba, decem, duodecim. Squamae inter flosculos fuscae: ipsi flosculi albi, staminum tubus flavus. Planta tota inodora.

87. II. *ACHILLEA aromatica foliis pinnatis, pinnis simplicibus punctatis, glabris.*

Anthemis alpina saxatilis odorata minima perennis floribus exiguis umbellatim compactis MICHELI p. 59.

Tanacetum alpinum odoratum C. B. SCHEUCHZER *Itin.* II. p. 242. T. 21. f. 3. I. VI. p. 462.

C. GESNERUS in *M. Braulio*; J. BAUHINUS in montibus Rhaeticis, SCHEUCHZERUS in Praegallienibus, nos ex *M. Jean, Fouly*, montibus supra *Bagnes*, & *S. Bernhadi*.

Véritable Genipi Medicorum circa alpes medentium.

Difficile iudicium est, num a priori diversum sit, ut Cl. Viri senserunt, num varietas, ut ego in priori opere. Accurate vero rimando haec discrimina reperi. Radix non acris. Caules humiliores, minus sub floribus tomentosi. Folia pallidius viridia, pinnis plerisque simplicibus, parium pauciorum, fere sex & octo; eadem plenissima foveolarum, hinc pulposa, & ad microscopium reticulata. Squamae calycis proportionem breviores, imprimis si extremas compares, levissime ad vitream lentem hirsutae, magis compactae, ora potius fusca quam nigra. Flores minores. Tota planta odore grato aromatico, penetrabili, quem etiam culta retinet. Vere adeo differt.

Haec planta ad pleuritides febresque antidotus est alpico-larum, & in theae modum pota sudorem movet *Journ helv.*

1758. M. Sept. : calida tamen , & nocitura , quoties non fanat.

Altitudo bicubitalis *Achilleae* GMEL. T. 83. f. 1. vix videtur admittere , ut nostrae eadem sit , cum praeterea Cl. noster amicus flores amplissimos , radicem parvam faciat , nec aromatici , gratissimi , odoris meminerit.

88. III. *ACHILLEA aromatica foliis pinnatis , pinnulis acutis , villosis*.

In M. *Fouly* *Valesiae*.

Multo subtilius huic a priori est discrimen , cum perinde odorata sit , perinde folia habeat reticulata , & punctata , pulposaque : alius tamen , etiamsi etiam gratus , odor est . Folia diversa , tota hirsuta , pinnis plurium parium , duodecim , sibi propioribus , magis aequalibus , latioribus proportionem longitudinis , saepissime simplicibus , nisi in radicalibus foliis , quibus breviter bifidae pinnae sunt & trifidae . Hinc rotum folium longius . Juniors , quae priori glabra , huic villosa sunt ; adulta , in hac varietate , pene calvescunt , non tamen unquam penitus hirsuties deficit .

A floribus congestis non potest discrimen sumi , nam etiam in 1. & 2. saepe perinde congestos vidi .

89. Haec eadem 88. tomento penitus obvoluta in altissimis montibus nascitur , & est

Millefolium alpinum tomentosum BOCCONE T. 170. *odoratum nanum* p. 166. , qui hoc ipsum vult dici *Genipi* ; uti quidem dici meretur .

Achillea foliis pinnatis lanugine totis obductis floribus albis umbellatis ALLIONE *plant. pedem* p. 9. T. 2.

In eo statu , etsi summarum alpium , tamen vulgatus est . SCHEUCHZERUS in jugis *Aversanorum* & *Praegalliensum* , & in descensu *Furcae* M. versus *Valesiam* . Ibi & ego abunde legi : frequens etiam est in M. *Bernhardo* , in montibus vallis *Bagnes* . *Hinterrhein* Cl. SCHINZ.

Humilius aliquanto est. Caulis saepe curvus, cum foliis totus albo tomento obnuptus, ut fere in Creticis stirpibus solet. Florum umbella compacta, calyce hirsuto, oris foliorum fuscis, semiflosculis minoribus similiter obtuse incis. Folia proportione longa, pinnis vicinis brevibus, trifidis, quadrifidis, foveolis balsamicis minus conspicuis, aut nihil quidquam. Non ob aetatem tomentum dejicit, nam utraque species perinde florens & perfecta reperitur. Sed ob loci natalis diversitatem, villosior, quo altiori loco nascitur, cum in humilioribus villum dejiciat adulta. Separassem omnino, nisi omnes medios inter utramque gradus possiderem, a perfecta glabritie ad summam tomenti ubertatem.

90. Vereor, ut *Achillea* 10. a vulgari satis diversa sit, quam circa *Branfon* Valesiae abunde legi an. 1757.; continuos enim hoc inter, & *vulgare millefolium* gradus mihi sum visus adnotasse. Idem de n. 7. metus est.

Achillea 11. seu *lutea* maxima copia circa *Branfon* in rupibus provenit.

PLANIPETALAE.

91. **I**N hac classe ea nostra fortuna fuit, ut pluculas addere cives; alias, in quibus haeseramus dubii, nunc expedire possimus.

I. *Lampfana caule nudo indiviso, foliis semipinnatis, pinnis retrogradis dentatis.*

Leontodoides alp. glaber, erysimi folio, radice crassa foetida
MICHELI p. 31. T. 28.

Dens Leonis minimus C. B. ex fide horri ficci.

Nihil vulgatius in sylvis umbrosis & udis montium Aquilegensium. Legi super *Roche* in sylva le *Traversin* cis torrentem *des males pierres*, in adscensu *M. Enzeinda*. Miserunt Cl. Viri SEQUIER & MORENI.

Folia ad terram peculiari habitu pinnata, pinnis retro-
 versis, aliquot non multis dentibus incis, saepe super se
 invicem reduplicatis & imbricatis. Caulis aphyllus, semipe-
 dalis. Squamae ad calycis basim accessoriae capillares ali-
 quae. Verae calycis squamae septem, nigricantes, lanceo-
 latae. Flos, quam taraxacis, minor saturate flavus, petalis
 dentatis. Semina fusca, columnaria, neque squamis distin-
 cta, neque ullo modo coronata, nisi flosculo.

92. II. LAMPSANA *foliis ovatis dentatis, caule nudo, flori-
 bus nutantibus* Enum. hort. Gotting.

Hieracium VII. CLUS. *Pannon.* p. 649.

Abunde provenit in agris septentrionem spectantibus in-
 ter *Hindelbank* & *Rormooss* ad dextram viae, quae ducit
 ad oppidum *Burgdorf*.

93. TARAXACON 2. est varietas primi.

Quintum Enum. p. 741. misit etiam Cl. ALLIONIUS. Fo-
 liis glaberrimis a 6. differt, non tamen, ut vereor, satis
 diversum est.

Ad n. 6. omnino refero Taraxacon 7. *Enum.*, ut verae
 species supersint 1. 3. 4. 5. 8.

94. HIERACIIS accensere oportet.

I. HIERACIUM *foliis ovatis lanatis*.

Hieracium montanum tomentosum DILL. *hort. Elth.* T. 150.
 f. 180. MILLER T. 146.

Radix perennis, dura, squamis aspera. Ex ea & caules
 florescentes prodeunt, & alii, qui altero anno florebunt.
 Folia ad terram petiolata, ovata, & paullum lanceolata,
 margine integerrimo, crassa substantia, tota tomento albo
 villosa. Ad caulem unum alterumve folium simile, acutum,
 sessile. Caulis aliquoties brachiatus, triflorus, quadriflorus.
 Calycis folia albissimo longo tomento villosa. Flos flavus.
 Describit LINN. *Cent.* 1. n. 76.

Legit in rupibus ad *Saillon* CLARET, tum inter *Charar*
 & *Saxon* ad viam Sedunum ducentem.

95. II. *HIERACIUM* caule unifloro, foliis ad caulem ovato lanceolatis dentatis amplexicaulibus.

Hieracium montanum rapifolium C. B. *Prodr.* p. 65. *Basil.* p. 38.

C. B. in M. *Wasserfall* legerat, ego diu desideratam plantam in M. *Luan.* frequentissime legi. *Aux Nombrieux* rupestri loco *supra les plans* etiam nascitur.

Speciosa inter *Hieracia* magnitudine planta est, radice lignosa, terete, curva, pilis longis barbara, quae sunt petiolorum siccatorum reliquiae: foliis ex radice numerosis, longe petiolatis, ellipticis, lanceolatis, pedem longis, petiolo folioso: foliis vero ad caulem quatuor vel quinque, amplexi caulibus, auriculis obtusis, margine dentibus longis rariter serrato. Figura folii ex ovata lanceolata est, acuta, tota glabra sunt, nervo solo villosa. Caulis cubitalis, longe plerumque uniflorus, raro biflorus, crassus, lineatus, sub flore albo tomento barbatus. Flos grandissimus, fere in tota classe eminent. Calyx pilis & tomento nigro barbatus, caetera lignei coloris, segmentis latis, trium ordinum. Color flavus, & numerus semiflosculorum maximus.

LINNAEUS non habet *Hieracium* 24. GMELINI T. 10. a nobis in horto Gottingensi cultum, differt caule ramoso, multifloro.

An fuerit *Hieracium alpinum villosum pulmonariae foliis caulem ambeuntibus* CL. GARCIN, lectum in sylvis supra *Valangin*?

96. III. *HIERACIUM* foliis lanceolatis, glaucis, caule brachiato multifloro.

Hieracium VI. montanum CLUS. *Pannon.* p. 645. 646.

Hieracium montanum angustifolium nonnihil incanum C. B., sed nostrum non est uniflorum, neque scabrum LINN. *spec.* p. 799.

In rupibus, quibus eremirae Agaunensis cellulae subjiciuntur, maxima copia provenit, tum in arenosis *de la grande*

eau: & Octoduri; etiam Verona missum a Cl. MORENIO.

Radix perennis, lignosa, fusca, teretibus crassis fibris capillata. Folia ad radicem plurima, ad caulem perpauca, glauca, longe lanceolata, acutissima, vix supra 8. lineas, rarissime dentata, ad caulem nulla fere nisi stipulae. Caulis durus, striatus, brachiatus & ramosus, multiflorus, non tamen in umbellam, cubitalis. Flores multo, quam in hieraciis pilosellae similibus grandiores, calyce nigro farinoso, hirsuto.

Idem crediderim esse *Hieracium alpinum scorzonerae folio*. SCHEUCHZER Enum: n. 27.

97. Ad Hieracium 10. sive *radice praemorsa* adde, in calidioribus Helvetiae non solum viscidum, sed grate etiam odoratum nasci cum radice crassa, lignosa, teretibus radiculis capillata. Folia ei ima petiolata, ovato lanceolata, per marginem longis dentibus, fere ut *rapifolium*, serrata, ad caulem ovato lanceolata, vix dentata. Caulem hirsutum, habet cubitalem, aliquoties brachiatum, singulo ramo multifloro, petiolis villosis unguentatis. Calyx obscure viridis; pilis & ipse capitatis, globuliferis villosus. Meretur nomen *HIERACII foliis ovato lanceolatis, obiter dentatis, viscidis, caule brachiato multifloro*.

LINNAEUS non habet; nam ejus *Hieracium praemorsum* a nostro differre videtur calyce non hispido, odoris & visceris absentia V. *flor. suec.* p. 273.

98. Emendare etiam oportet descriptionem Hieracii 10. sive *foliis ad caulem amplexicaulibus pilosis, rarissime dentatis, caule multifloro*, quod *Hieracium montanum majus latifolium* J. B. T. II. p. 1036.

Legi in pascuis M. Jurae, in laetis pratis M. Jorogne, in adscensu *aux Granges ad Forclaz a Chapuisse*.

A *Griesbachiano latifolio* differt omnino. Folia ovata acuminata, ex hora pilosa, pilis de nervis omnibus, totoque rete inferiori exeuntibus: ad caulem amplexicaulia, auriculis

lis retrocedentibus, obtusis, dentibus ubique brevissimis: cubitali caule, floribus in summa planta numerosis, multo, quam in latifolio Griesbachiano, majoribus, calyce nigricante, duris & nigris pilis barbato. Non habet LINNAEUS.

99. *Hieracium latifolium montanum alterum Genevense folio conyzæ majoris Monspelienfis* J. B. II. p. 1026.

Hieracium montanum alterum leptomacrocaulon COLUMN. *Ecphraf.* p. 249. ic. p. 248. habet folia, nervis exceptis, glabra, longiora, angustiora, multo frequentius dentata, auriculis acutis aristatis caulis amplexa; florem quam sequenti grandiorum, nigris villis barbato. Dixerim *HIERACIUM foliis amplexicaulibus ferratis auritis, auriculis aristatis, calycibus villosis.*

100. Denique *Hieracium foliis ad caulem glabris ferratis lanceolatis, supremis profunde dissectis.*

Hieracium latifolium glabrum ex valle Griesbachiana J. B. T. II. p. 1023.

Hieracium 21. GMELIN T. IX. omnino, ex foliis & calyce nigris pilis hirto.

In sylvis nostris humidis pratique familiare, ab utroque diversum est. Cum proxime priori convenit foliorum nervis insignibus, foliorum crebris denticulis, auriculis acutis, foliis etiam magis glabris absque pilis. Differt dentibus multo grandioribus, floribus exiguis, calyce nigro paulum, & multo minus quam priori barbato, dentibus folii grandioribus, & sub caulium brachiis adeo profundis, ut folia pene laciniata sint. A penultimo glabritie, dentibus & auriculis; cauleque glaberrimo differt.

101. Expungi posse credo *Hieracium* 2. 11. 15. 19.

De 24. 25. 28. 30. 31. porro oportet quaerere, & de 14. dubitari posset, an pro varietate haberi praestet.

102. Intybi duas species hirsutas, ut distinguerem, elaboravi. Ergo *INTYBUS foliis omnibus ellipticis hirsutis, ferratis*, qui *Hieracium fruticosum latifolium hirsutum* vulgo dicitur,

citur, cumque eo nomine ab Ill. DILLENIO ad me missus est, & Octoduri, & in via *Tombey*, tum Bernae, tum in prato praecipiti optimi D. Ith secundum oram pinastreti *Dalholzém* provenit, is quidem similis Intybi glabri est, durior, caule firmissimo, rectissimo, in summa planta paniculato, caetera vix ramoso: foliis ad caulem numerosissimis, dense congestis, firmis, siccis, hirtis, elliptico lanceolatis, paucis, sed magnis dentibus ferratis, squamarum calycis lividarum ora pallente. Uniflorum reperit prope *Bautenberg* Cl. BERDOT. Non habet LINNAEUS.

103. Alter autem Intybus *foliis inferioribus ellipticis hirsutis ferratis, superioribus ovato lanceolatis*, quem *Hieracium fruticosum latifolium folio subrotundo* vocant, omnino diversus, Gottingae in sylvis provenit, altior quidem planta, & bicubitalis, sed debilior. Folia inferiora quidem satis similia habet, sed superiora longe diversa, sessilia, lata, brevia, ex ovatis lanceolata: calycis squamae etiam totae nigrae sunt, & flos potius grandior. Est *Hieracii Sabaudi varietas*. *Erinus quibusdam* MATTH. *diſta* J. B. T. II. p. 1030., & *Hieracii Sabaudi varietas altera* ibid. *Hieracium* 30. GMELII T. 24.

Receptaculum, quod nudum vocat Cl. LINNAEUS *flor. suec.* p. 274. omnino alveolatum est, uti memini me an. 1750. Cl. MISSAE jam ostendisse.

Inter stirpes D. le CLERC fuit *Hieracium fruticosum folio angustissimo, lineari, incano, glabro*, cum uno alterove dente, quod nunc non memini me alias reperisse.

Crepim, quae *Hieracium dentis leonis folio flore suaverubente*, in M. *Wasserfall* nasci scribunt auctores *der Basler Merkwurdigkeiten* p. 1800. Nondum audeo inter nostrates referre.

104. *Scorzonerae* duae helveticae, quas dubia ex fide, neque visas, recensueram, nunc abunde lectas facile constituo. *Scorzonera caule nudo, uniflora, foliis petiolatis ovato lanceolatis*.

Scorzonera humilis latifolia Pann. II. CLUS. hist. p. CXXXVIII.

Abunde provenit Rupe, Agauni, circa facellum *N. Dame du Sex*. &c.

Radix maxima, reris, anulata, corona pilorum ad exitum de terra ornata. Folia ad terram plurima, longe petiolata, nervosa, glabra, ex ellipticis lanceolata. Caulis pedalis, simplicissimus, praeter aliquas, ex ovatis lanceolata ligulas, nudus. Flos in singulo caule unicus, grandis, calycis foliis 3. & 4. ordinum triangularibus, eo latioribus, quo interiora. Petala numerosa, pallide lutea, lineata, dentata. Hanc non visam habueram pro Germanica.

105. II. SCORZONERA caule nudo unifloro, foliis linearibus nervosis.

Scorzonera humilis angustifolia Pann. III. CLUS. ibid.

An *Scorzonera caule simplici unifloro foliis ex lineari lanceolatis* GMELIN flor. sibir. T. 2. T. 1.

Radix similis, & pariter pilis coronata: similis etiam caulis simplicissimus, & flos, minor tamen. Folia vero angusta, nervosa, linea non latiora, cauli aequalia. Flos similis, sed minor, petalis pariter lineis striatis, quas purpureas fuisse vidi. Semina sulcata, curva, sessili plumoso pappo ornata.

Au Tombey inter *Aquilegiam* & *Ollon* primo vere floret.

A caule basi villosa nomen sumi nequit; quum species I. perinde villum habeat in summa radice; neque pediculus nostris *incrassatur*.

CAROLI ALLIONII
 SYNOPSIS METHODICA STIRPIUM
 HORTI TAURINENSIS.

Postquam Horti Taurinensis cura ab Augustissimo, & Invictissimo REGE nostro mihi commissa fuit, muneris mei omnino esse putavi stirpes omnes in eodem contentas diligenter recensere, & alienis aut vagis nominibus satas expendere, ut tyrones ea qua decet ratione instituere possem, & hortum magis, magisque locupletare. Hujus laboris fructus est haec synopsis, in qua plantae omnes, quas hoc anno coli observavi, enumerantur eodem ordine, quo adolescentibus easdem explicandas suscepi. Nomina sunt trivialia Celeb. LINNAEI, quorum usum opportunum existimavi, ut brevitati consulerem, nec angustos commentarioli limites transgrederer; eo vel maxime quod praedictis nominibus alia ab auctoribus usitata facile reperiri possint in libro ejusdem LINNAEI, cui titulus species plantarum. Eas porro herbas, quarum trivialia nomina nondum constant, aut quae distinctas species constituere visae sunt, separatim recensendas curavi. Genera, ut quisque videt, servanda mihi fuerunt qualia a LINNAEO proponuntur, pariterque species secundum ipsius praecepta, ad propria genera referuntur. Aliquot denique minus notae stirpes accurata descriptione illustrantur, & quaenam Pedemontanae hujus regionis indigenae sint, asterisco notatur.

CLASSIS PRIMA.

Plantae flore monopectalo simplici.

I. MONOSTEMONES.

Canna indica .

II. DISTEMONES.

A. GYMNOTETRASPERMAE.

Salvia officinalis *
 horminum *
 sclarea *
 pratensis *
 agrettis *

verbenaca
 verticillata *
 glutinosa *
 canariensis
 ceratophilla
 aethiopis *
 afr. caerulea
 2
 3
 4
 5

Rosmarinus officinalis *
 Lycopus europaeus *
 Ziziphora tenuior
 Monarda didyma

B. DIANGIAE.

G

Vero-

- 1 *Horminum pratense niveum foliis incanis* BAUH. pin. 238. V. LINN. amoen. T. III. p. 399.
- 2 *Salvia orientalis frutescens, foliis subrotundis, acetabulis moluccae*, TOURN. cor. p. 10.
- 3 *Salvia cretica angustifolia* CLUS. hist. 343. *Salviae officinali* similis, diversa tamen. Folia minime aspera, subincana, & brumali tempore omnino incana, mollia, acutiora. Verticilli decemflori & nudi. Flos minor barba magis pendula, & ad suam originem striis & maculis violaceis picta. Antherarum, quae luteae sunt, margo obscurus. Semina magna compressa subrotunda duo tantum fere maturantur. Suavius & minus vehementer odorata est. *Salvia cretica* LINN. alia omnino planta esse debet cum calyces diphillos ei tribuat Celeb. AUCTOR.
- 4 *Salvia villosa & viscosa, foliis lanceolato-ovatis, versus petiolum angulatis*. Exoticae originis planta, neque, quod sciam Botanicis nota. Ex duro & fere lignoso caudice erigit virgas ad summum cubitales. Folia similia sunt foliis *salviae officinalis*, sed minora, viridia, non aspera, sed cum tota planta viscosa, & alto densoque villo barbata. Folia prima petiolata, & sensim deinde sessilia, versus petiolum ampliora, & angulata. Calix striatus bilabiatus. Labii superioris dentes tres minimi approximati aegre distinguendi; inferioris aristati aliquantulum divaricati. Flos albus tubo corollae calycem aequante: Galea villosa fornicata, truncata, non falcata, Alae subrotundae rectae. Barba concava, obverse cordata, subpurpurea, triangulariter emarginata. Antherae luteae extra galeam protensae. Semina laevia, nigra, subtrigona oblonga. Odor totius plantae validus, qualis *salviae sclareae*.
- 5 *Salvia americana chia dista*. Olim hoc nomine ad me misit Cl. PONTERA.

Veronica spicata *
 officinalis *
 alpina *
 serpillifolia *
 beccabunga *
 anagallis *
 chamaedrys *
 agrestis *
 arvensis *
 hederaefolia *
 Justicia adathoda
 Syringa vulgaris *
 perfica

C. FRUCTU PULPOSO.

Nictanthes sambac
 Jasminum officinale
 azoricum
 fruticans *
 odoratissimum
 Olea
 Phillyrea latifolia *
 Ligustrum vulgare *

III. TRISTEMONES.

A. FLORE CALICULATO.

Trichosanthes anguina
 Cucurbita lagenaria
 pepo
 verrucosa
 melopepo
 citrullus

Cucumis colocynthis
 melo
 dudaim
 fativus
 Momordica balsamina
 charantia
 luffa
 cylindrica
 elaterium *
 Bryonia alba *
 africana
 Sicyos angulata.

B. CALICE DESTITUTAE.

Crocus fativus *
 Ixia chinensis
 Gladiolus communis *
 Iris fusiana
 germanica *
 variegata
 graminea
 pseudacorus *
 hermodactylus.
 Valeriana dioica *
 phu
 officinalis *
 calcitrapae *
 tripteris *
 cornucopiae
 locusta *

IV.

IV. TETRASTEMONES.

A. GYMNODISPERMAE.

1. *Flore plano.*

Galium verum *
 boreale *
 aparine *
 parisiense *
 7
 8

Rubia tinctorum. *

2. *Fl. infundibuliformi.*

Crucianella angustifolia *
 Sherardia arvensis *
 Asperula odorata *
 arvensis *
 taurina *
 cynanchica *

B. GYMNOTETRASPERMAE.

1. *Galea plana*a. *Vix fissa*

Melittis melissophyllum *
 Mentha crispa
 pulegium *
 cervina

arvensis *
 rotundifolia *
 aquatica *

Origanum majorana
 aegyptiacum
 dictamnus
 vulgare *
 Thymus vulgaris *
 Acinos *
 serpillum *
 9

b. *Profunde secta*

Lavandula spica *
 multifida
 Glechoma hederacea *
 Sideritis perfoliata
 romana
 hirsuta *

Marrubium vulgare *
 pseudodictamnus
 peregrinum

2. *Galea concava*

Lamium purpureum *
 amplexicaule *
 album *
 10

G 2

Ga-

7 *Gallium album vulgare* TOURN. *infl.* 115. *

8 *Gallium montanum latifolium ramosum* TOURN. *infl.* 115. *

9 *Thymus foliis ellipticis & caule hirsutis* HALL. *gott.* 341.

10 *Lamium montanum hirsutum, folio oblongo, flore purpureo* D. *Pontederac* TILLI. *pis.* Tota planta hirsuta, & odore forti lamii. Caules habet spithamaeos, aut etiam duplo altiores. Folia ex cordato-triangulara, statim a petiolo dentata dentibus geminatis, non nitentia, obtuso non acuto dente terminata; & minora, quam in *Lamio albo*. Corollae tubus tertia circiter parte extra calycem protenditur Galea surrecta, pilosa, erosa; barba vero resta descendit. Antherae luteae, vix pilosae. Verticilli minime nudi, sed involucro donati, h. e. stipulis linearibus quinque aut septem verticillum cingentibus.

Galeopsis ladanum *
 tetrahit *
 galeobdolon *
 Stachys silvatica *
 alpina *
 germanica *
 palustris *
 cretica
 Dracocephalon canariense
 peltatum
 moldavica
 canescens
 11
 Leonurus fibricus
 cardiaca *
 marrubiastrum *
 Phlomis tuberosa
 leonurus
 fruticosa
 Moluccella laevis
 spinosa
 frutescens *

Prunella vulgaris *
 grandiflora
 laciniata *
 Ballota nigra *
 Betonica hirsuta *
 glabra *
 officinalis *
 12
 Nepeta cataria *
 nuda
 13
 Melissa officinalis *
 calamintha *
 nepeta *
 Cilnopodium vulgare *
 Scutellaria supina *
 galericulata *
 14
 3. Galea nulla, seu limbo
 semiquinquesido.
 Verbena bonariensis
 urticifolia

com-

11 *Dracocephalon foliis ex lanceolato-linearibus, rarius dentatis, spinulosis, floribus gemellis* MARTINI. HALL. gott. 335.

12 *Betonica foliis hirsutis, floribus purpureis amplissimis* MONT. in ZANON. p. 46. l. 30. *

13 *Cataria tenuifolia* CLUS. hist. XXXIII. *

14 *Cassida caule quadrangulo rubente, teucris serrato folio, fl. caeruleo, labro albo.* TILLI. pis. Duro & repetito ramoso caule se se ad tricubitalem & ultra altitudinem erigit. Postremi rami longissime simplices & continuo floriferi, floribus binatis. Folia petiolata, glabra, venosa, cordato-ovata, acuta dentibus utrinque tribus aut quatuor serrata. Floralia elliptica, acuminata, integerrima, subfistilia. Calix de more gentis cum crista & ora longius pilosa. Flos gracilis ex violaceo purpureo alarum extrema parte albescente. Semina quaterna, inaequalia, ex cinereo obscura, subtriangula, minutissime alveolata. Univerſa planta amarissima est, & non sine principio aromatico. Densi & subtiles pili obsident ramos floriferos, & ex iis stillat globulus tenuissimae, & amarae resinae.

- communis *
4. *Galea nulla, seu flore unilabiato.*
- Teucrium scorodonia* *
- scordium *
- flavum *
- chamaedrys *
- 15
- botrys *
- 16
- chamaepithys *
- polium *
- montanum *
- marum
- Ajuga pyramidalis* *
- reptans *

C. MONANGIAE.

- Orobanche major* *
- ramosa *

D. DIANGIAE.

1. *Corolla non labiata.*
- Sanguisorba officinalis* *
- Plantago major* *
- virginica

- lanceolata* *
- lagopus* *
- coronopus* *
- psyllium* *
- cynops
- Celsia orientalis.*
2. *Corolla labiata.*
- a. *Calyce quadrifido.*
- Rhinanthus glaber* *
- Melampyrum cristatum* *
- Euphrasia officinalis* *
- b. *Calyce quinquefido.*
- Antirrhinum cymbalaria* *
- spurium *
- triphillum
- purpureum
- monspeffulanum *
- multicaule
- linaria *
- majus. *
- Scrophularia nodosa* *
- aquatica *
- canina *
- Digitalis ferruginea*
- lutea *
- 17

Che-

- 15 *Teucrium foliis cordatis crenatis petiolatis, spicis oblongis densissimis ex Hir- cania* MARTINI HALL. *comm. Gotting.* 1752.
- 16 *Teucrium supinum, perenne, palustre, apulum, glabrum, foliis laciniatis, fl. albo D. Michellii.* TILLI. *pis. cum icone.* Procumbit ramis, & foliis oppositis glabrum. Folia sulcata, & trifida segmentis lateralibus tridentatis, & medio iterum trifido. Verticilli biflori. Calycis dentes spinulosi. Alae ovatae duorum parium: barba cordato ovata. Floris color albus, sed striae, & maculae purpureae pingunt alas primas & barbae originem. Semina quaterna aspera.
- 17 *Digitalis alpina magno flore* BAUH. *pin.* 244.

Chelone hirsuta ¹⁸

Bignonia catalpa
radicans.

Lantana annua
camara

Ruellia strepens.

Sesamum orientale.
c. *Calyce polyphillo.*

Acanthus mollis
aculeatus.

E. FRUCTU PULPOSO.

Callicarpa americana

Ilex aquifolium *

V. PENTASTEMONES.

A. MONOSTYLAE.

1. *Gymnomonospermae.*

Plumbago europaea *

Bafella rubra

Mirabilis Jalappa
.¹⁹

2. *Gymnotetraspermae.*

a. *Squamulis in fauce.*

Symphitum officinale *
tuberosum *

Anchusa officinalis *

Cynoglossum officinale *

linifolium

Lycopsis vesicaria *
variegata

Asperugo procumbens.
b. *Fauce nuda.*

Cerithe maculata *

Echium vulgare *
italicum *

Lithospermum officinale *
arvense *

purpuro-caeruleum *

Heliotropium indicum
europaeum *

Myosotis scorpioides *
lappula *

3. *Monangiae.*

a. *Valvis duabus.*

Anagallis²⁰
.²¹

Menyanthes trifoliata *

b. *Valvis quinque.*

Samolus valerandi *

Cyclamen europaeum *

c. *Valvis decem.*

Primula elatior *

acaulis *

vitaliana *

auricula *

Lysimachia vulgaris *

num-

18 Quintum sterile villosissimum stamen anthera destitutum reliquis fertilibus longius ego quoque adnotavi.

19 *Mirabilis foliis viscidis villosis, tubo storis cylindrico villoso foliis longiore* LINN. *comm. Gott. T. V.*

20 *Anagallis phaeniceo flore* BAUH. *pin. 252. **

21 *Anagallis caeruleo flore* BAUH. *pin. 252. **

nummularia *
 4. *Diangiae*.
 Nerium oleander
 Vinca major *
 minor *
 Datura stramonium *
 ²²
 Hyoscyamus niger *
 albus
 puffillus
 Nicotiana tabacum
 minor
 paniculata
 Verbascum thapsus *
 lychnitis *
 nigrum *
 sinuatum
 blattaria *
 phaeniceum *
 Gratiola officinalis *
 5. *Tri- aut Pentangiae*.
 Convolvulus arvensis *
 sepium *
 panduratus
 tricolor

hederaceus
 ficulus
 ²³
 Ipomoea quamoclit
 coccinea
 triba
 Phiteuma spicata *
 Campanula rapunculus *
 erinus *
 perficifolia *
 trachelium *
 glomerata *
 ²⁴
 speculum *
 6. *Fructu pulposo*.
 Mandragora officinarum
 Atropa belladonna
 phifalodes.
 Solanum pseudocapsicum
 dulcamara *
 tuberosum
 lycopericon
 officinarum
 ²⁵
 melongena

indicum

22 *Stramonium aegyptiacum* flore pleno intus albo, foris violaceo Tourn. *inst.* 118.
 23 *Convolvulus serpens maritimus spicaefolius* TRIUMF. *obs.* p. 91. Plures teretes, yimineae radices plurimos producunt caules ad summum palmares procumbentes. Folia ex longo & folioso petiolo longe elliptica, acuto sine, non plana, sulco medio eadem dirimente, brevissimo & sericeo villositate ita tamen, ut adhuc viridia appareant. Summus cauliculus saepe unicum florem sustinet, raro duos brevi pedunculo nixos, qui stipulis duabus linearibus cinguntur. Calycis foliola sericea; & eorum duo exteriora majora. Fructus calycinis foliis ex parte agglutinatur; iisdem brevior & sericeo villo testus. Minime igitur confundi potest cum *convolvulo cneorum*?
 24 *Campanula hortensis* folio & flore oblongo BAUH. *pin.* 94.
 25 *Solanum guineense* fructu magno instar cerasti DILL. *elth.* 366.

indicum
 fodomeum
 incanum
 tomentosum.
 Physalis somnifera
 alkekengi *
 angulata
 26
 Capsicum annuum
 27
 28
 29
 30
 Lonicera caprifolium *
 periclymenum *
 nigra *
 Xylosteum *
 Lycium afrum
 Rhamnus paliurus *
 ziziphus
 catharticus *
 Coffea arabica.

B. DISTYLAE.

Gomphrena globosa
 Gentiana centaurium *
 spicata *
 asclepiadea *

Cynanchum acutum
 erectum
 Asclepias incarnata
 curassavica
 syriaca
 vincetoxicum *
 fruticosa
 tuberosa

C. TRISTYLAE.

Viburnum tinus *
 lantana *
 opulus *
 Sambucus ebulus *
 nigra *
 laciniata
 racemosa *

VI. HEXASTEMONES.

A. MONOSTYLAE.

Aloe disticha
 spiralis
 retusa
 variegata
 21
 22
 23

- 26 *Alkekengi barbadense nanum alliariae foliis* DILL. *elsh.* p. 10.
 27 *Capsicum fructu flavo pyramidali oblongo* TOURN. *inst.* 153.
 28 *Capsicum siliqua latiore & rotundiore* TOURN. *inst.* 153.
 29 *Capsicum siliquis surrectis oblongis* TOURN. *inst.* 153.
 30 *Capsicum fructu cordiformi erecto* HALL. *Gott.* 216.
 31 *Aloe africana sessilis foliis carinatis verrucosis* DILL. *elsh.* p. 22.
 32 *Aloe africana humilis spinis inermibus & verrucosis obsita* COMM. *prael.* p. 77.
 33 *Aloe africana flore rubro folio maculis ab utraque parte albicantibus notato*
 COMM. *hort.* II. p. 15.

VIII. ENNEASTEMONES.

- 34
 35
 36
 37
 38
 39

Agave americana
 Hyacinthus non scriptus
 orientalis
 cernuus

Polianthes tuberosa
 Convallaria majalis *
 verticillata *
 stellata
 polygonatum *
 Aristolochia clematitis *
 rotunda *

B. TRISTYLAE.

Colchicum autumnale *

VII. OCTOSTEMONES.

Daphne mezereum *
 laureola *
 cneorum *
 Diospyros lotus.

Rheum rhaponticum

IX. DECASTEMONES.

Cotyledon umbilicus *
 Oxalis acetosella *
 corniculata *
 stricta

X. POLYSTEMONES.

Mimosa sensitiva
 pudica
 pernambuccana
 glauca
 40
 scorpioides. *

CLASSIS II.

Plantae flore monopetalosculoso.

I. ANTERIS DISJUNCTIS.

Dipsacus fullonum *

H

- 34 *Aloe africana folio in summitate triangulari margaritifera flore subviridi* COMM. hort. II. p. 10.
 35 *Aloe africana foliis glaucis margine, & dorso parte superiore spinosis, flor. rubro.* COMM. prael. p. 75.
 36 *Aloe africana caulescens foliis spinosis maculis ab utraque parte albicanibus notatis* COMM. hort. II. p. 9.
 37 *Aloe africana caulescens foliis glaucis brevissimis, foliorum summitate interna & externa nonnihil spinosa.* COMM. prael. p. 73.
 38 *Aloe succotrina angustifolia spinosa flore purpureo.* COMM. hort. I. p. 91.
 39 *Aloe foliorum margine luteo.*
 40 *Acacia americana non spinosa, foliis viciae multiflorae, floribus in spicam trium-
 calem dispositis, siliqua palmari compressa & intorta.* MANETTI. vir. flor. n. 12.

.⁴¹
 pilosus *
 laciniatus *
 Scabiosa alpina *
 succisa *
 syriaca
 arvensis *
 leucantha *
 tartarica *
 columbaria *
 stellata
 atropurpurea
⁴²
 Knautia orientalis
 Globularia vulgaris *

II. ANTHERIS COALITIS.

A. CAPITATAE.

Echinops sphaerocephalus
 ritro *
 Onopordon acanthium *
 illyricum
 Cynara scolymus
 Arctium personata *
 lappa *
⁴³
 Carduus lanceolatus *
 crispus *
 stellatus
 marianus *

helenioides *
 eriophorus *
 nutans *
 acanthoides . *
 Serratula tinctoria *
 arvensis *
 Carthamus tinctorius *
 Cnicus benedictus
 Carlina acaulis *
 corymbosa *
 Centaurea crupina *
 moschata
 cyanus *
 montana *
 paniculata *
 ragulina
 scabiosa *
 jacea *
 aspera *
 eriophora
 calcitrapa *
 folstitialis *
 galactites *
 salamantica *
 fonchifolia *
 napifolia *
 centaurium .

B. DISCOIDAE.

1. Semine nudo.

Tana-

41 *Dipsacus sativus* BAUH. pin. 385.

42 *Scabiosa foliis planis carnosis, inferioribus pinnatis, ramorum integerrimis linearibus* GMELIN. sibir. II. p. 213.

43 *Lappa major montana capitulis tomentosis* BAUH. pin. 298.

Tanacetum vulgare *
 crispum
 balsamita
 Santolina chamaecyparissus *
 rosmarinifolia
 Cotula coronopifolia
 Artemisia abrotanum *
 campestris *
 pontica
 absinthium *
 vulgaris *
 caeruleascens
 dracunculus
 44
 45
 Micropus lupinus *
 2. *Semine pappis coronato.*
 Gnaphalium dioicum *
 foetidum
 margaritaceum *
 germanicum *
 arenarium
 Sthaechas *
 46
 Chrysocoma graminifolia
 Eupatorium cannabinum *
 caelestinum
 altissimum
 Tuffilago farfara *
 petasites *

3. *Sem. arifflis coronato.*
 Xeranthemum annuum *
 Bidens tripartita *
 cernua *
 pilosa
 frondosa
 bipinnata
 47

C. RADIATAE.

1. *Sem. nudo.*
 a. *Placenta paleacea.*
 Helianthus annuus
 multiflorus
 Rudbeckia hirta
 laciniata
 oppositifolia
 Buphthalmum grandiflorum *
 helianthoides
 Siegesbekia orientalis
 Achillea ageratum *
 tomentosa *
 ptarmica *
 nana *
 millefolium *
 nobilis *
 Anthemis nobilis
 millefolia
 tinctoria *
 maritima *

H 2

arven-

44 *Absinthium alpinum candidum humile* BAUH. pin. 139. *
 45 *Absinthium arborefcens* LOB. ic. 753.
 46 *Filago foliis tenuiffimis, floribus umbellatis cylindricis* HALL. Gott. 377. *
 47 *Bidens foliis ovatis & triplexis, caulibus hirtis brachiatis* HALL. Gott. 383.

arvensis *
 b. *Placenta nuda* :
 Oiteospermum uvedalia
 moniliferum
 Calendula . . . 48
 49
 Chrysanthemum leucanthemum *
 fegetum *
 coronarium
 corymbosum *
 Matricaria parthenium *
 chamomilla *
 recutita *
 Bellis perennis *
 2. *Sem. pappis coronato*.
 Aster alpinus *
 novae angliae
 novi belgii
 chinensis
 dumosus
 Inula helenium *
 dysenterica *
 pulicaria *
 hirta *
 50
 Erigeron canadense *
 Senecio hieracifolius
 vulgaris *
 incanus *
 jacobea *
 farracenicus *

paludosus
 Solidago farracenicus *
 mexicana
 virga aurea *
 canadensis
 sempervirens
 Doronicum pardalianches. *
 3. *Sem. aristis coronato*.
 Tagetes patula
 erecta

D. PLANIPETALAE.

1. *Sem. nudo*.
 a. *Placenta nuda*.
 Lapsana communis *
 stellata
 rhagadiolus.
 b. *Placenta paleacea*.
 Catanance caerulea *
 Cichorium intybus *
 endivia
 spinosum
 Scolymus maculatus. *
 2. *Sem. pappis coronato*.
 a. *Placenta nuda*.
 Leontodon taraxacum *
 hispidum *
 Hieracium alpinum *
 auricula *
 pilosella *
 murorum *

. . . 51

48 *Caltha vulgaris* BAUH. pin. 275.49 *Caltha arvensis* BAUH. pin. 275. *50 *Aster montanus hirsutus* LOBEL. ic. 350.

CLASSIS IV.

Plantae flore tripetalo.

Cneorum tricocon *
 Commelina tuberosa
 Tradescantia virginiana
 Bromelia ananas
 Chamaerops humilis *
 Alisma plantago *

CLASSIS V.

Plantae flore tetrapetalo
 cruciformi.

I. TETRASTEMONES.

Epimedium alpinum *
 Cornus mas
 Sanguinea *
 Potamogeton lucens *
 Crispum *

II. HEXASTEMONES.

A. SILICULOSAE.

Myagrurn perfoliatum
 Sativum *
 Draba verna *
 alpina *

Lepi-

.⁵¹
 amplexicaule *
 umbellatum *

.⁵²
 Crepis barbata
 foetida *

.⁵³
 Picris echioides *
 hieracioides *

Sonchus asper *
 laevis *

Prenanthes muralis *

Chondrilla juncea *

Lactuca fativa
 perennis *
 virofa *

Scorzonera laciniara *
 hispanica
 tingitana

Tragopogon pratense *
 b. *Placenta squamis distincta.*

Hypochoeris maculata *

CLASSIS III.

Plantae flore dipetalo.

Corispermum hisopifolium
 Circaea lutetiana *

51 *Hieracium murorum laciniatum minus pilosum folio angustiore* BAUH. pin. 129. *

52 *Hieracium caule folioso, ramofo, foliis & calyce longo villo barbato* HALL. helv. 744. *

53 *Crepis foliis glabris, floribus minimis, caule ramosissimo* HALL. Gott. 412.

Lepidium latifolium *

iberis *

fativum

Thlaspi saxatile *

arvense *

alliaceum

campestre *

bursa pastoris *

Cochlearia coronopus *

armoracia *

glastifolia

officinalis *

Iberis semperflorens

umbellata

amara *

Alyssum incanum *

montanum *

Halimifolium *

sinuatum

clypeatum

Clypeola . . . 54

. 55

Biscutella didyma *

auriculata

. 56

Lunaria rediviva *

. 57

B. SILIQUOSAE.

Cardamine pratensis *

Sisymbrium sophia *

tanacetifolium *

irio *

Strictissimum *

Erysimum alliararia *

Cheiranthus cheiri

incanus

tricuspidatus

Hesperis matronalis *

dentata

. 58

. 59

Arabis thaliana *

Turritis glabra *

hirsuta *

Brassica orientalis

campestris *

napus

rapa

Sinapis arvensis *

alba *

nigra *

Raphanus fativus

raphanistrum *

Bunias erucago *

orien-

54 *Thlaspi alysson dictum campestre minus* BAUH. pin. 107.55 *Clypeola perennis incana, foliis subrotundis, calyce deciuo, siliculis ovato acutis.* Habitat in summis alpebus cottiis nova planta, cujus descriptionem, & iconem dabo in Enumeratione stirpium Pedemontii propediem edenda.56 *Jondraba alyssoides apula spicata* COL. cephr. p. 285.57 *Lunaria foliis pinnatis, foliolis laciniatis* ROY. Leyd. 533.58 *Hesperis maritima supina exigua* TOURN. n. fl. 222.59 *Hesperis exigua lutea folio dentato angusto* BOERH. ind. alt. II, 20.

orientalis
 Ifatis tinctoria *
 Crambe maritima
 hispanica
 Cleome gynandra
 ornithopodioides
 viscosum

III. OCTOSTEMONES.

Oenothera bonariensis
 biennis *
 6c
 Epilobium hirsutum *
 angustifolium *
 montanum *
 palustre *
 Ruta graveolens *
 Cardiospermum halicacabum

IV. POLYSTEMONES.

A. MONOSTYLAE.

Euphorbia maculata
 pilosa *
 chamaeefyce *
 peplus *
 lathyris *
 spinosa *
 dulcis *
 helioscopia *
 verrucosa *
 orientalis

platiphillos *
 cypariffias *
 palustris *
 neriifolia
 caput medusae
 61
 officinarum

Chelidonium majus *
 glaucium *
 corniculatum
 hybridum
 Papaver rhaeas *
 orientale
 somniferum
 Argemone mexicana
 Actaea spicata nigra *
 Capparis spinosa

B. TETRASTYLAE.

Philadelphus coronarius *

C. POLYSTYLAE.

Tormentilla erecta *
 Talictrum foetidum *
 flavum *
 minus *
 aquilegifolium *
 Clematis recta *
 vitalba *
 flammula *
 integrifolia

CLAS-

60 Onagra foliis glabris, flore suave purpureo HALL. comm. Gott. 1751. p. 224.
 61 Euphorbium humile procumbens, ramis simplicibus, copiosis, caule crassissimo tuberoso BURM. afr. p. 20. t. 10.

CLASSIS VI.

Plantae flore tetra- aut
pentapetalo papi-
lionaceo.

I. TETRAPETALAE.

A. HEXANTHERAE.

Fumaria bulbosa *
lutea
officinalis *
spicata *

B. OCTANTHERAE.

Polygala vulgaris *

C. DECANTHERAE.

1. *Uniloculares.*

Trifolium repens *
rubens *
agrarium *
montanum *
squarrosum
angustifolium *
arvense *
clypeatum
glomeratum *
melilotus corniculata
melilotus officinalis *
melil. caerulea *
melil. italica

Lotus tetragonolobus
conjugata *
hirsutus *
corniculata *
dorychnium *
orinthopodioides *
recta *

Anthyllis tetraphylla *

vulneraria *
barba jovis *

Medicago radiata

fativa *
falcata *
lupulina *
orbicularis *
scutellata *
tornata *
intertexta *

Ononis spinosa *

alopecuroides
natrix *
mitissima
viscosa
rotundifolia *

Cytisus laburnum *

Genista tinctoria *⁶²

Phaseolus coccineus

caracalla
vulgaris
lunatus

Dolichos lablab

soja

foia
Hedysarum canadense
 onobrychis *
 gallo-provinciale *
 violaceum
 paniculatum
Vicia faba
 narbonensis
 fativa
 dumetorum *
 benghalensis
Ervum lens
 retraspermum *
 hirsutum *
 ervilia
Orobus tuberosus *
 vernus *
 niger *
Lathyrus aphaca *
 cicera
 fativus. *
 tingitanus *
 pratensis *
 latifolius *
 Zeylanicus
Pisum sativum
 maritimum
Cicer arietinum
Colutea arborescens *
 aethiopica
 herbacea
Galega officinalis *

Indigofera tinctoria
Aeschynomene americana
 aspera
Amorpha fruticosa "
Crotalaria laburnifolia
Robinia pseudoacacia *
Coronilla emerus *
 securidaca *
 varia *
Hippocrepis unifiliquosa *
Lupinus albus
 hirsutus
Scorpiurus subvillosa *
 2. *Biloculares.*
Astragalus glycyphillos *
 uliginosus
 montanus *
 epiglottis
Biferrula pelecinus *
Glycine apios.

II. PENTAPETALAE.

Glychiriza echinata
 filiquosa
Ulex europaeus
Spartium junceum *
 scoparium *
 monospermum
Psoralea corylifolia
 bituminosa *
Cercis filiquastrum *
Sophora alopecuroides

I

Cassia

63 Unico exemplo habet AMORPHA florem monopetalum h. e. tantummodo vexillum, alis & carina deficientibus.

Cassia femina
 : fistula
 occidentalis
 chamaecrista
 Parkinsonia aculeata

CLASSIS VII.

Plantae flore pentape-
 tala, & Gymno-
 dispermae.

II. SEM. AD PLACENTAM COMMUNEM CON- JUNCTIS.

Eryngium planum
 maritimum *
 campestre *

II. SEM. COMMUNI PLA- CENTA CARENTIBUS.

A. OBSCURA UMBELLA.

Phyllis nobla
 Hydrocotyle vulgaris

B. MANIFESTA UMBELLA.

1. *Sem. Gibbis striatis.*
 a. *Petalis aequalibus.*
 Apium petroselinum
 graveolens
 Anethum hortense

foeniculum *
 Ligusticum vulgare *
 Sium sisarum
 falcaria *
 Sison amomum
 canadense

Bupleurum falcatum *
 Crithmum maritimum *
 Althamanta cretensis *
 orefelinum *

b. *Petalis inaequalibus.*

Smyrniolum olusatrum *
 Aegopodium podagraria *
 Carum carvi *
 Sefeli annuum *
 Pimpinella saxifraga *
 Oenanthe biennis *
 Aethusa cynapium *
 Conium maculatum *

2. *Sem. gibb. & alatis*

a. *Alis duabus.*

Peucedanum officinale *
 Angelica archangelica *
 sylvestris *
 lucida

Imperatoria ostruthium *
 b. *Alis quatuor, & ultra.*
 Laserpitium latifolium *
 filer *

Astrantia major *
 3. *Sem. planis alatis.*
 Pastinaca sativa

. 64

Tordy-

Tordylium fyriacum
 maximum *
 Heracleum sphondylium *
 Ferula glauca
 ferulago
 Thapsia 65
 4. *Sem. asperis.*
 Caulis grandiflora
 platycarpus *
 Sanicula europaea *
 5. *Sem. villosis, nec ro-*
 stratis.
 Daucus : : : 66
 67.
 b. *Sem. rostratis.*
 Scandix odorata *
 pecten *
 chaerefolium
 nodosa
 Chaerefolium sylvestre *
 hirsutum *

CLASSIS VIII.

Plantae flore pentape-
 tala, nec Gymno-
 dispermae.

I. FILAMENTIS IN UNUM TUBUM CONJUNCTIS.

Geranium capitatum

zonale
 inquinans
 odoratissimum
 alchimilloides
 pratense *
 robertianum *
 molle *
 68
 bohemicum
 sylvaticum *
 nodosum *
 sanguineum *
 malacoides *
 cicutarium *
 gruinum *
 myrrhifolium
 triste

Sida spinosa
 abutilon

Napaea dioica

Alcea rosea

Malva caroliniana
 rotundifolia *
 sylvestris *
 mauritiana
 verticillata
 alcea *

Lavatera arborea *
 lusitanica
 trimestris

I 2

thurin-

65 *Thapsia sive turbiti garganicum semine latissimo* BAUH. *hist. III. 2. 50.*

66 *Daucus vulgaris* CLUS. *hist. CXCIII. **

67 *Daucus sativus* TOURN. *inst. 307.*

68 *Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculis brevioribus, caule erecto* HALL. *helv. p. 366. **

thuringiaca *
 Gossypium herbaceum
 Hibiscus syriacus
 palustris
 mutabilis
 aesculentus
 abelmosch
 Althaea officinalis *
 cannabina *

II. FILAMENTIS BASI COALITIS.

Citrus medica
 aurantium
 Hypericum androsaemum *
 perforata *
 Croton tinctorium *

III. FILAMENTIS OMNI- BUS LIBERIS.

A. PENTASTEMONES,

1. *Monostylae*.
 Lagoecia cuminoides
 Celosia cristata
 argentea
 Vitis vinifera *
 arborea
 Ribes alpinum *
 nigrum *
 grossularia *

rubrum
 Hedera helix *
 quinquefolia
 Ceanothus americanus
 africanus
 Evonymus europaeus *
 Viola hirta *
 odorata *
 canina *
 montana *
 calcarata *
 biflora *

. . . . 69
 70

2. *Tristylae*.

Tamarix germanica *
 Staphilaea pinnata *
 Rhus coriaria
 cotinus *
 copallinum
 radicans

Passiflora foetida
 caerulea
 incarnata

3. *Tetraftylae*.

Parnassia palustris *

4. *Pentastylae*.

Statice armeria

. . . . 71

Linum usitatissimum

. . . . 72

narbo-

69 *Viola bicolor arvensis* BAUH. pin. 200. *

70 *Viola tricolor hortensis* BAUH. pin. 200.

71 *Limonium maritimum majus* BAUH. pin. 192. *

72 *Linum arvense* BAUH. pin. 214. *

narbonense *

hirfutum

Crassula coccinea

perfoliata

pellucida

. . . . 73

B. HEPTASTEMONES.

Aesculus hippocastanum.

C. OCTOSTEMONES.

Tropaeolum minus

majus.

D. DECASTEMONES.

1. *Monostylae*.

Tribulus terrestris *

Zygophyllum fabago

Caesalpinia sappan

Melia azedarach *

Guilandina moringa

Dictamnus albus *

2. *Distylae*.

Dianthus chinensis

armeria *

barbatus

plumarius *

caryophyllus *

prolifer *

Saponaria officinalis *

vaccaria *

ocymoides *

orientalis

Gypsophila repens *

muralis *

Saxifraga cotyledon *

rotundifolia *

tectorum *

granulata *

3. *Tristylae*.

Alfina media *

Arenaria serpillifolia *

campestris *

Silene nutans *

rubella

quinquevulnera *

lusitanica

behen

conoidea

nutans

Cucubalus baccifer *

behen *

viscosus

reflexus

. . . . 74

Gari-

73 *Crassula portulacae facie arborefcens* DILL. *elth.* p. 120.

74 *Silene viscosa alpina* foliis omnibus planis, ac prostrus glabris, petalis angustis, intus candidis extus ex viridi luteolis, profunde bifidis, divisionibus divaricatis linearibus, nectariis extantibus, ac stylis tribus longissimis purpureis sub sole spiraliter convolutis. MANETTI, *Spicil.* n. 1005. Caules trichubiales, rotundi, subhirsuti, viscosi, ramosi, ad ramos nodosi. Calix gracilis ore acute quinquesido, albescens, & decem striis nigris elevatis percursus. Petala cordata semisida, coronae denticuli acuti incumbentes. Antherae didymae virides, & iis arescentibus stylis longe producuntur. Semina nigra reniformia aspera, & undique minimis foveolis excavata.

70
 Garidella nigellastrum
 4. *Pentastylae*.
 Sedum telephium *
 rupestre *
 cepaea
 album *

. 75
 Agrostemma githago
 76

Ceraftium repens
 aquaticum *
 viscosum *
 strictum *

Spergula arvensis *
 5. *Decastylae*.

Phitolacca americana *
 mexicana

POLYSTEMONES.

Monostylae.

Tilia europaea
 Portulaca oleracea
 pilosa
 77

Cistus albida *
 falvifolia *
 fumana *

helianthemum *
 Peganum harmala
 Corchorus oleriorus
 Prunus mahaleb *
 armeniaca
 cerasus
 domestica
 sylvestris *

Amygdalus sylvestris
 persica
 communis

Myrtus 78
 79

Punica granatus
 2. *Distylae*.
 Agrimonia 80
 81

Crataegus torminalis *
 oxyacantha *
 3. *Tristylae*.

Sorbus acucuparia *
 domestica
 Refeda luteola *
 alba
 lutea *

. 82
 Aconitum lycoctonum *
 antho-

75 *Sedum foliis teretibus ternatis, caulibus simplicibus trifidis* HALL. emendat. n. 107. &c. V. Excerptum Bernae anni 1760. T. I. p. 161.
 76 *Lychnis coronaria Dioscoridis sativa* BAUH. pin., & *Lychnis umbellifera montana helvetica* ZAN. *
 77 *Portulaca foliis ovatis petiolatis* Roy. prodr. p. 473.
 78 *Myrtus minor vulgaris* BAUH. pin. 469. *
 79 *Myrtus boetica domestica latifolia* LOB. ic. p. 127.
 80 *Agrimonia, seu eupatorium veterum* BAUH. pin. 321. *
 81 *Agrimonia odorata* CAM.
 82 *Refeda foliis integris, floribus odoratis* HALL. Gott. 95.

* anthora *
Delphinium ajacis

* staphisagria
elatum *

4. *Pentastylae.*

Aquilegia sylvestris

Nigella damascena

fativa

orientalis

Mespilus germanica

Pyrus malus

cydonia *

communis

5. *Polystylae.*

Spiraea aruncus *

filipendula *

ulmaria

Caltha populago *

Helleborus niger *

viridis *

Isopyrum fumarioides

Potentilla anserina *

multifida

argentea *

reptans *

recta *

Geum urbanum *

rivale *

Comarum palustre

Rubus idaeus *

Rosa eglanteria

canina *

centifolia

alba

CLASSIS IX.

Plantae flore hexapetalo.

I. DIANTHERAE.

Orchis bifolia *

maculata *

ustula-

- 83 *Delphinium nectarius diphillis, floribus solitariis, foliis multipartitis, foliis lineari acuminatis. Enum. nic. p. 200. * Folia crassula, sulcata, viridia; (licet interdum subincana) profunde trifida, segmentis acute trilobis. Rami terminales longissime floriferi. Flos singulus prodit ex ala folioli lineari-lanceolati in spinulam inermem attenuati, nixus pedunculo bilineari, qui prope florem firmatur duabus stipulis lanceolato-acutis receptaculum longitudine superantibus. Flos caeruleus calcare sursum spectante. Calcar levissime incanum duplo longius flore. Nectarium ex duabus portionibus; quaelibet autem superius alam erigit linearem bifidam segmentis rotundis, inferius alam subrotundam non incisam. Inter prima duo lateralia petala, & stamina nascuntur duae laminae ex longis unguibus ovatae, incisae, imberbes, pallidiores petalis, sed ea omnino referentes. Hae laminae alas inferiores calcaris amplectuntur, & cum iis interiorem florem custodiunt. Antherae laeae, filamentis pallidioribus. Siliquae tres laeves, torosulae.*

84 *Fragaria vulgaris* BAUH. pin. 326. *

85 *Fragaria chiloensis foliis maxime carnosis hirsutis* DILL. elth. p. 145.

86 *Rosa lutea simplex* BAUH. pin. 636. *

ustulata *
 Ophris ovata *
 Serapias . . . *

II. TRIANTHERAE.

Rufcus aculeatus *
 hypoglossum *
 racemosus.

III. HEXASTEMONES.

MONOSTYLAE.

1. *Flore fructui impoſito.*

Narciffus poeticus
 pseudonarciffus *
 jonquilla
 tazetta

Amaryllis formoſiſſima
 Pancratium illiricum

2. *Flore fructum cingente.*

Allium fativum
 porrum
 ſphaerocephalum *
 ſcorodopraſum
 vineale *
 urſinum *
 cepa

Lilium candidum
 bulbiferum *
 martagon *

Fritillaria imperialis
 perſica

Erythronium dens canis *
 Tulipa geſneriana
 Ornithogalum pyrenaicum *
 pyramidale
 umbellatum *

Anthericum ramoſum *
 liliago *
 fruteſcens
 alooides

Yucca glorioſa
 aloifolia

Berberis vulgaris *
 Aſparagus officinalis *
 acutifolius *

IV. ENNEASTEMONES.

Laurus nobilis
 indica
 benzoin.

CLASSIS X.

Plantae flore polypetalo.

Nymphaea alba *
 lutea *

Cactus mammillaris
 triangularis
 tetragonus
 hexagonus
 grandiflorus
 peruvianus
 lanuginofus

flagel-

87 *Epipactis foliis oniformibus, floribus pendulis, labello obtuſo per oras plica-*
 10 HALL. aſt. helv. T. IV. p. 111. *

flagelliformis

opuntia *

tuna

cochenillifer

Adonis annua *

Anemone hepatica *

palmata

pratensis *

coronaria

virginiana

nemorosa *

Trollius europaeus *

CLASSIS XI.

Plantae flore apetalo
exceptis grami-
nibus.

I. FILAMENTIS COALITIS.

Ricinus communis

Ephedra distachya *

Thuya occidentalis

Cupressus sempervirens

disticha

Pinus larix *

abies *

Juniperus communis *

II. FILAMENTIS DISTINCTIS.

A. JULIFERAE.

Salix fragilis *

babylonica

Carpinus betulus *

Corylus avellana *

Fagus sylvatica *

Platanus orientalis

Pistacia trifolia

B. NON JULIFERAE.

1. Monantherae.

Salicornia annua *

Blitum capitatum

2. Triantherae.

Ficus communis

Polycnemum arvense *

3. Tetrantherae.

Urtica urens *

dioica *

cannabina

Parietaria officinalis *

Aphanes arvensis *

Elaeagnus angustifolia *

4. Tetrantherae.

Salsola kali *

soda *

Atriplex hortensis

laciniata *

halymus *

portulacoides *

hastata *

Ghenopodium bonus henri-

cus *

vulvaria *

scoparia

botrys *

K

ambro-

ambrosioides
 rubrum *
 hybridum *
 glaucum
 maritimum
 altissimum
 falsum
 Amaranthus tricolor
 melancolicus
 blitum *
 spinosus
 Beta vulgaris
 Cannabis fativa
 Humulus lupulus *
 Spinacia oleracea
 Ceratonia filiqua *
 Ulmus campestris *
 Celtis australis
 5. *Hexantherae.*
 Smilax aspera *
 Tamus communis *
 Rumex patientia
 alpinus *
 crispus *
 acutus *
 obtusifolius *
 pulcher *
 bucephalophorus *
 lunaria *
 vesicaria *
 scutatus *
 acerosa *

acetosella *
 6. *Octostemonos.*
 Polygonum bistorta *
 hydropiper *
 perficaria *
 orientale
 aviculare *
 fagopyrum
 convolvulus *
 tartaricum.

7. *Polyantherae.*
 Mercurialis annua *
 perennis *
 Alcalypha virginica
 Arum dracunculus
 colocasia
 maculatum *
 arisarum *

Afarum europaeum *

CLASSIS XII.

Plantae flore apetalo.

GRAMINA.

I. DISTEMONES.

Anthoxanthum odoratum *

II. TRISTEMONES.

1. A. MONOSTYLAE.

Cyperus longus *

aescu-

aesculentus
 Coix dactyloides
 Carex filiformis
 pseudocyperus.

B. DYSTYLAE.

Saccharum officinarum
 Phalaris annua
 phleoides *
 arundinacea *

Panicum americanum
 italicum
 crus galli *
 Dactylon
 miliaceum

Agrostis paradoxa
 Melica ciliata *
 nutans *

Poa bulbosa *
 Briza minor *
 media *
 maxima *

Cynofurus aegyptius
 Bromus scalinus *
 arvensis *

Stipa pennata *
 Avena elatior *
 fativa
 fatua *
 pratensis *

Lagurus ovatus *
 Arundo donax

phragmites *
 Lolium perenne *
 Elymus virginicus
 Secale cereale

villosum
 Hordeum vulgare
 murinum *
 Triticum aestivum
 muricum
 turgidum

III. HEXASTEMONES.

Juncus pilosus *
 campestris *

CLASSIS XIII.

Plantae flore imperfecto,
 seu potius incon-
 spicuo.

FILICES.

Equisetum arvense *
 Osmunda regalis *
 struthiopteris
 spicant *.
 Acrostichum septentrionale *
 Asplenium scolopendrinum *
 ceterach *
 trichomanes *

ruta

89 *Triticum spica multiplici* BAUH. pin. 21.
 90 *Asplenium ramosum* TOURN. inst. 544. *

ruta muraria
Polypodium vulgare
lonchitis
cristatum

f. mas
f. faemina
rhaeticum
Adiantum capillus veneris *

III. HEXASTEMONES

XIII



Faint, illegible text is visible in the background, appearing as bleed-through from the reverse side of the page. Some words like 'Aqua', 'Spiritus', and 'Essentia' are partially discernible.

EXPERIMENTUM.

NUM aër sit necessarius ad motus electricos ciendos, & quantum ad eosdem motus ejus actio conferat, quaestio jamdudum inter Physicos exorta est, in qua definienda FLORENTINI ACADEMICI, BOYLEUS, HAUKSBEJUS, NOLETIUS, & alii praestantissimi Physici se se exercuerunt, modo electrica corpora intra vacuum confricando, modo jam confricata vacuo includendo, modo demum intra globum vacuum fila disponendo, quae ab excitata globi electricitate commoveri, ac dirigi possent.

At enim varius pro electricitatis majori, minorive vehementia, pro vacuo plus, minusve accurato, pro corporum movendorum varia mole, pro tempestate inconstanti, experimentorum eventus quaestioni adhuc locum reliquit, & in contrarias partes magnos VIROS distraxit, quorum alii aërem ad id, quo de agitur, necessarium esse affirmarunt, negarunt alii, alii etiam hos inter, oppositas sententias conciliaturi, illam experimentorum varietatem a duplici electricitatis, qua resinosae, qua vitreae genere repetendam esse duxerunt, ita ut illa etiam in vacuo, haec nonnisi cum aëre vim suam exerceat.

Quaestionem demum Celeberrimus BECCARIA definivit, parato accuratiori vacuo, novaque excogitata methodo, qua, per verticem recipientis pneumatici traducta catena, electricitatem in vacuo commodius excitaret. In vacuo etiam barometrico motus electricos exploravit, dum ad superiorem barometri partem, cui amianti fila inclusa erant, electricum corpus extrinsecus admovebat: his enim, aliisque tentaminibus VIR *Clarissimus* demonstravit electricos motus in vacuo

accurato penitus extingui, in rariori autem aëre ita languere, ut eorundem alacritas pro ratione subducti aëris imminuatur (a).

Sic demonstrata ad motus electricos aëris necessitate, illud quaeri insuper posse videbatur, id vi ne ejus coercenti, an elasticitati, an cui alii proprietati sit adscribendum, ad cuius quaestionis definitionem aptiorem viam iniri non posse censui, quam si in aliis mediis, praeterquam in aëre, & vacuo, quae a Physicis haëtenus sola tentata fuerant, motus electricos explorarem.

Itaque inter catenae extremum oleo immersum, & ferreum filum cum solo communicans oleo itidem immersum, globulum ferreum ex serico filo pendulum ita collocavi, ut globulus etiam intra oleum demergeretur: dein electricitatem excitavi, ejusque vi globulum inter catenae extremum, & filum ferreum cum solo communicans in oscillationes perinde adigi observavi, ac in aëre contigisset. At idem experimentum in aqua, aliisque liquidis, quae paullo minori facilitate, quam ferrum ab electrico fluido permeantur, tentanti, non licuit mihi per mediocrem, & consuetam electricitatis vehementiam ullos motus excitare.

Ex his primo confirmari videtur in spatio aëre vacuo motus electricitate excitari nullos posse; quum enim spatium aëre vacuum electricum fluidum aequè transmittat, ac deferens aliud quodcunque medium, electricis motibus efficiendis similiter ineptum esse deber.

Evincitur deinde aëris vim in motibus electricis praestandis ex ejus elasticitate repetendam non esse, quum oleum elasticitatis expers eosdem non minus efficiat: iccirco vim aëris omnem in eo esse positam, quod & electricum fluidum coerceat, & demersa in ipsum deferentia corpora comprimat; evincitur demum media alia quaecunque, quibus im-

(a) In Epistolis ad Cl. BECCARIUM epist. III. §. 82. 83. 109. 110.

immerſa corpora premantur, electricis motibus faciendis eo aptiora eſſe, quo difficilius per ipſa, quam per movenda immerſa corpora, electricum fluidum permeare poteſt, quando vi ſua elatiſtica quaquaverſum expanditur, vel etiam ex eorum uno in alterum effluit, ſi inaequaliter per ipſa fuerit diſtributum.

Hinc adparet de motibus electricis theoriam eo rotam ſpectare, ut dato fluido elatiſtico, & datis corporibus ipſum, deferentibus, per quae aequaliter, aut inaequaliter diſtributum ſit, ac dato demum medio elatiſticum fluidum coercente, a quo ea deferentia corpora utcunq; premantur, inveſtigentur, ac definiantur leges moruum corporum eorundem, quae ex inaequali medii coercentis preſſione producuntur, dum fluidum elatiſticum, vel quaquaverſum expanditur, vel etiam ex deferentium corporum altero in alterum effluit, ut ad aequalitatem diſtribuat: de qua quidem re praeclara nonnulla protulit Cl. BECCARIA, & ſpem facit ſe plura brevi prolaturum, quae novum hoc mechaniſmi genus illuſtrare, ac perficere poſſint (b).

(b) L. C. §. 93., & ſeq.



JOHANNIS BAPTISTAE GABER

EXPERIMENTORUM DE PUTREFACTIONE
HUMORUM ANIMALIUM.

SPECIMEN SECUNDUM,

*In quo praecipuae agitur de sedimento feri
purulento, ac membrana pleuritica.*

NULLIUS humoris, ut equidem arbitror, origo, & natura aequae dubia est, & incerta, quam puris. Nam & cum leni foetore, aliisque quibusdam notis cum corruptis humoribus convenit, & tamen blanda, miti, ac fere balsamica quadam indole ab iisdem longissime differt, & crassitie, aequabilitate, densitate, albedine peculiarem corrupti humoris speciem exhibet. Id autem vitae, & vitalis actionis productum Medici, ac Chirurgi plerique constituerunt, quod nullibi extra corpus natura, vel arte paratum hujusmodi humorem reperiissent. Tandem Celeberrimus PRINGLE veram hujus humoris originem, & genesis invenit, & luculentissimo experimento explicavit. Animadvertit enim absque ulla vitae actione digestum serum, sedimentum deponere, quod veri puris speciem omnino praefert. Hoc inventum plane dignum mihi visum est, in quo illustrando, & quoad fieri liceret perficiendo, studium, diligentiamque conferrem. Quapropter experimenta multa institui, quae, ni fallor, inventum illud comprobant, confirmant, exornant, ejusque in hanc Pathologiae partem magnum, & uberrimum usum ostendunt. Nonnulla etiam eadem occasione circa pleuriticam crustam experimenta tentavi, quae omnia acutiorum Virorum judicio proponenda esse putavi.

I. Sedimentum duplex a putrescente fero deponi constanter observavi; alterum primis digestionis diebus absque ulla
feri

feri perturbatione secedebat, albidissimum erat, fundo vasis adhaerens, & eo magis spissum erat, quo calor in dige-
rendo minor adhibitus fuerat. In calore modico, ad exem-
plum decem graduum rheaumuriani Thermometri, simillimum
erat membranae tenerae, quae in hydropicis fit, & viscera regit.
Portio ejusdem materiei ex sero secedentis similis membranae
specie ad ejus superficiem etiam innatabat. Alterum sedimentum
tardius deponabatur, & feri perturbatio ejus depositionem
praecedebat (a), subcinerei magis coloris a principio erat,
minusque compactum, sed procedente tempore majorem densitatem,
& opacitatem acquirerebat, & ex subcinereo in album magis vergebat.

Sedimentum primum, si digestionis calor paullo major
esset, cum hoc paullatim ita confundebatur, ut distingui ampli-
us non posset. Prius illud exiguum erat, & in vase ad
spithamam alto vix duas, tresve lineas altitudine aequabat;
alterum copiosum erat, & tertiam voluminis feri superabat.
Prius illud, ut dictum, intra unam, alteramve diem in ca-
lore humani corporis subsidebat, hoc, nonnisi post quinque,
aut sex dierum intervallum, aut etiam tardius.

2. Eo autem citius subsidebat, quo calor erat major; in
vasis etiam angustioribus, coeteris paribus, citius longe se-
cedere visum est, quam in amplioribus, quando in urrisque
feri superficies oleo tegebatur. In vasis autem hermetice
clausis, coeteris item paribus, paullo tardius subsidere visum
est, quam in iis, in quibus feri superficies oleo tegebatur,
& in his iterum aliquanto tardius, quam in iis, in quibus
serum nudum ad aërem patebat.

3. Coeterum secundum sedimentum etsi plerumque ex al-
bo subcinereum, opacum, homogenum adpareret, & vasis
infimam partem occuparet ita, ut horizontalem superficiem
haberet, interdum tamen inprimis si serum ex hominibus
dis-

(a) Cl. PRINGLE T. II. trait. sur les substanc. septiq., & antiseptiq. Exp.
XLV. p. 278.

difcrasia aliqua laborantibus esset eductum, & colore aliquo, vel bilis, vel alterius humoris infectum, non ejusmodi erat sedimentum, sed inaequale, in flocculos divisum, partim ad fundum colligebatur, partim ad superficiem ferebatur: idque etiam multo magis in vasis apertis contingebat calori humani corporis, aut etiam vehementiori expositis, quando ex evaporatione dissipata tenuiori parte, priusquam crassior haec secederet, ita confuse deponeretur, ut non album, sed plus, minusve nigrum, foetens, glutinosum sedimentum relinqueret instar capitis mortui a feri distillatione residui (b).

4. Ex his, aut similibus causis fortuitis factum fuisse censeo, ut aqua, quae sedimento supernatabat, viridis fuerit observata a Cel. PRINGLE (c), qualem mihi semel, & bis observare contigit in sero nudo ex ictericis educto, & calori viginti-quinque graduum exposito. Sed quando serum sanum, oleo tectum, aut hermetice clausum in calore viginti-quinque, aut triginta-quinque digerebam, observabam constanter aquam supernatantem decolorem, & eo magis limpida, quo diutius fuerat digesta.

5. De aëre vix memorare necesse est dum sedimentum fieret, & dum addensaretur, copiosum semper per oleum bullarum specie erupuisse, quando oleo liquor tegebatur: in vasis autem hermetice clausis etiam robustis, tanta copia haud raro collectum, imprimis si vacuum sparium, exiguum, serum autem copiosum esset, ut vasa ingenti cum fragore diffringeret.

6. Compressioni hujusmodi ab aëre factae tribuendum censeo, quod in clausis hoc pacto vasis sedimentum tardius secederet (2); ut enim motum quemlibet intestinum, ita & putrefactionis exordia, ex quibus illa sedimenti secessio profi-

(b) Vid. T. praeced. p. 81.

(c) L. c.

proficiscitur, pro ratione compressionis retardari, aut impedi-
 diri, BOYLEI experimenta luculentissima ostendunt.

7. Juvabit modo sedimenti hujus, & puris qualitates exponere, ac comparare.

1.° Pus album fere est, opacum, spissum (*d*): eandemque esse sedimenti speciem mox memoravimus.

2. Pus in aqua dissolvitur, & deinde situ ipso iterum subsidet (*e*): idipsum sedimento evenire per experimenta comperi.

3.° Pus frigore non cogitur (*f*): eandem proprietatem sedimentum praefert.

4.° Pus laudabile fere semper foetet (*g*), sed parum, & vix sensibiliter (*h*): ita quando sedimentum deponitur vix foetere incipit (*i*), & praeterea cum acidis nondum effervesce-
 re, quinimo iisdem, & igne coagulari, tum sedimentum, tum supernatantem aquam observavi secus, ac in sero penitus corrupto contingat (*k*). Eandem etiam proprietatem puri inesse experimentis deprehendi, ut & alkoole, & acidis, & calore pene eodem, quo serum cogeretur, quae puris proprietas, ut opinor, ad ejus ortum ex sero confirmandum plurimum facit.

5.° Demum pus inflammabile esse dicitur (*l*); nec inflammabilibus partibus serum destitui ejus analysis ostendit (*m*).

8. Quod

(*d*) Cl. QUESNAY de la suppuration p. 2. 3. ex albedo flavescens Cl. ESCHENBACH prix de l'Academ. de Chirurg. Tom. II. p. 371.

(*e*) Trait. des tumeurs, & des ulcères. Tom. I. p. 39.

(*f*) Id. l. c.

(*g*) Id. l. c.

(*h*) Cl. QUESNAY l. c. AQUAPENDENTE apud ESCHENBACH l. c. p. 373. Cl. GRASHUIS in eod. lib. p. 279.

(*i*) Cl. PRINGLE turbatur serum antequam foetere incipiat. l. c. p. 282.

(*k*) Ex MALPIGHIO Ill. HALLER Physiol. Elem. T. II. p. 132. SCHVVENCHE tamen serum corruptum cum summe acidis metallicis in massam coire post effervescentiam. Haematolog. p. 134.

(*l*) Ill. HALLER l. c. p. 128. not. h. *

(*m*) Id. l. c. p. 139.

8. Quod si consideremus ea, quae in vulnere contingunt, ubi referente BOERHAAVIO, postquam haemorrhagia cessavit, liquor dilutus, rubellus, tenuis effluit (*n*), qui tertio, quatuorve die ferius, vel ocyus in liquorem tenacem, album, pinguem, aequalem, pus abit (*o*). Si cogitemus eam mutationem non contingere, quando vel crusta sponte nata, vel emplastro vulnus non tegitur (*p*), manifesto, ni fallor, constabit, quomodo ex effuso sero pus in vulneribus resorpta tenuiori parte relinquatur: neque dubito ex spissescente lymphâ pus illud produci, etsi Vir Cl. lympham in vulnere quantumvis relictam, numquam spissescere contendat (*q*), & id solum praestare, ut emollita arteriarum extrema phlogistica id dimittant, quod postea in pus est abiturum (*r*): quidquod in vulneribus etiam cum exigua inflammatione, aut etiam dispositionibus inflammationi oppositis, tamen bona suppuratio plerumque fit, quae vulneris sanationem adjuvat, & cicatricem citam producit (*s*)? & ex oculis infantum palpebris per aliquod tempus conglutinatis sine ulla, sive inflammationis, sive suppurationis nota huiusmodi materia saepe exit (*t*): huc accedit ratio, quam affert Cl. PRINGLE (*u*), quod fetacea magnam quotidie puris copiam praebendo insigniter debilitent, quod fieri non posset ex solo partis vitio, absque universali humorum jactura, & Cl. DE-HAEN advertit ex vulneribus tamdiu tanta copia pus effluere, ut homines pereant defectu virium, cum stagnans in extremis vasis phlogistica materies ne censesima quidem puris partem suppeditare posse videatur, quae
om-

(*n*) De cognosc., & curand. morb. aph. 158. n. 4.

(*o*) Ibid. n. 7.

(*p*) Cel. SVVIETEN in eum loc. T. 1. p. 230. GRASHUIS l. c. p. 287.

(*q*) Cl. DE-HAEN T. II. p. 32. ad 36.

(*r*) Id. Ibid. a p. 37. ad 43.

(*s*) Cl. QUESNAY l. c. p. 6. 7.

(*t*) GRASHUIS l. c. p. 299.

(*u*) L. c.

omnia ex proposita feri sanguinei in pus degeneratione (v), facilius intelliguntur, quin ut necesse sit ad puris in vasis efformationem confugere (x), cum imprimis, ut dictum est, in vulneribus quibusdam absque inflammatione locali, tum absque universali humorum vitio bonum pus prodire fuerit observatum (y).

9. Sedimentum porro principio dilutum, ac rarum continuata digestionem crassius, densius, & albidius evadit. Idipsum puri sive vulneratae, sive inflammatae partis contingit, ut primum aquosius, & dilutius, opacum magis, densum, albumque fiat, prout temporis progressu digeritur, & ad maturitatem, ut inquirunt, perducitur.

10. In inflammatione autem cum serum sanguini admixtum in cellulofam effundatur (z), inde intelligi posse videtur, quare pus inflammationis magis putrescibile sit (a). Sanguinem enim magis putrescere, quam serum, & PRINGLEI experimenta (b), & mea (c) demonstrarunt.

11. Coeterum serum plus, vel magis dispositum esse ad sedimentum deponendum demonstrant exempla furunculorum, qui uno die pus funderé incipiunt (d), tum anginarum uno die pus exsudantium (e): quod autem pus citius efformetur (f), quam sedimentum secedere soleat in calore humani corporis, id tribuo tum memoratae dispositioni, tum calori inflammationis naturali majori, tum modicae effusi feri quantitati (2): nec igitur ausim definire, num aliquando ex

M

(v) P. 44. 45.

(x) Cl. DE-HAEN l. ult. c. Et de pure vulneris Cl. QUESNAY l. c. p. 6. 7.

(y) Vid. sup. not. s.

(z) HALLER Elem. Physiol. T. I. p. 37. 38. 115. 116.

(a) QUESNAY l. c. p. 15.

(b) Exp. XLII.

(c) Vid. T. praec. p. 80.

(d) DE-HAEN T. I. p. 20. 21.

(e) Ibid. p. 21.

(f) In vulneribus inflammatis jam secundo, aut tertio die pus invenitur, Cl. QUESNAY l. c. p. 19. 20.

13. Membrana autem, quam memoravimus hydropicorum viscera regens (o), calore hypocausti digesta in liquamen murabatur, quod omnes puris dotes exhibebat (7). Quemadmodum primum sedimentum continuata digestionem, secundi, & vere puriformis sedimenti naturam induebat, ut cum eodem confunderetur (1); hinc facile mihi persuadebam, tum hanc membranam, tum utrumque sedimentum ex eadem materie constitui, quae minori digestionem parcius secedat, & membranae, aut primi sedimenti speciem induat, majori, & diuturniori, & secedat copiosius, & pus referat.

14. Cum pinguedinem, aut solum, aut praecipuum puris elementum nonnulli esse velint (p), libuit experiri quid digesta pinguedo praestaret, sed eandem rancescere quidem, putrescere, in flavum vergere deprehendi, absque eo quod aut sedimentum deponeret, aut ullo modo ad puris similitudinem accederet: hinc pus ab eadem vitari potius, quam constitui crediderim, & revera venerea ulcera, in quibus pinguedo corrupta, rancida, puri admiscetur, sordida esse solent, & malae indolis pus effundere (q).

15. Cruorem etiam diutissime licet vase hermetice clauso digestum, fluidiorem quidem, & subobscurum evadere, numquam vero in partes secedere, aut ad puris colorem, aliasque dotes accedere observavi. Quare minus probabilis eorum sententia visa est, qui ex cruoris globulis vitali motu attenuatis, & album colorem induentibus puris originem repetunt (r); verosimilius ergo sanguinem coeteris puris principiis admixtum, ipsum magis foetidum, & deterius reddere, ut de inflammationis pure superius notatum (10).

M 2

Nec

(o) Eadem phaenomena exhibet membrana regens viscera inflammata: An melicerides, & frigidi alii tumores tarde suppurantes, ex eadem materia?

(p) Cl. GRASHUIS l. c. p. 297. 299.

(q) Id. l. c.

(r) PLAINER Chir. §. 54. Cl. QUESNAY, qui de la flegme p. 418. 419. pus ex crusta phlogistica fieri censet, & p. 415. 416. crustam a crudere destructo, & colorem mutante fieri existimat.

Nec aliter admixtum sero cruorem sedimentum obscurioris coloris, & magis foetens effecisse observavi.

16. Similiter sero admixta bilis sedimenti colorem, & reliquas dotes a puris dotibus eo magis diversas efficiebat quo majori copia admiscebatur. Hinc ex abscessibus hepatis raro bonum pus prodire observationes ostendunt (f); hinc erysipelas ichorem potius, quam pus generat (f*).

17. Demum & investigare volui quid solidae partes digestae exhiberent. Itaque carnis frustula in serum, aut aquam immergebam, & impositis pondusculis impediēbam quominus ex putredine leviora facta ad superficiem eleventur: dein tegebam oleo utriusque liquoris superficiem, ac demum in digestionis calore vasa reponebam. Animadverti autem ex digestionē carnem aqua immersam in pulverem veluti subpallidum resolutam, qui nullam cum pure similitudinem referebat, carnem vero in sero immersam in similia ramenta resolutam fuisse, quae purulento seri sedimento admixta ipsius aequalitatem & colorem vitiabant (t).

18. Ex quibus omnibus jam constare videtur puris originem vitali motui adscribendam non esse (u), nisi quatenus calorem facit, qui spontaneam humorum degenerationem promovet; deinde puris materiem non ex cruore, aut pinguedine, aut bile, aut solidis esse repetendam, sed dumtaxat a sero, coeteros vero humores, aut solidas partes sero admixtas puris naturam depravare.

19. Ichor igitur, aut sanies ex alterius cujuscumque humoris sero admixti spontanea degeneratione repetenda est, tum

(f) Si abscessus in intima jecoris substantia sit; non negamus enim sincerum pus sub ejus membrana colligi posse illaeso parenchymate.

(f*) DE-GORTER syst. prax. §. 160. & alibi.

(t) Negat enim Cl. DE-HAEN solidas partes in pus converti, & ex ramentis solidarum partium puris acrimonia detritis, puris homogeneitatem tolli l. c. p. 35. 36. 37.

(u) Quae communis Medicorum sententia erat (vid. BOERHAAVE aph. 387., & alios plerosque) priusquam Cl. PRINGLE sola spontanea seri degeneratione purulentum humorem parare docuisset,

tum ex diuturniori ejusdem stagnatione ; tum forte etiam ex nimio , & inaequali calore (3) , aut ex prava , & vitiosa feri indole in variis dyscrasiae speciebus , aut demum ex vitio partis serum , aut falsum , aut aliter depravatum effundentis ; hinc forte est , ut belladonna , & cicuta , quae narcotica sunt , & vasa laxant , ichorem cancrorum in pus convertant , & tantam ejus profusionem faciant , ut aegrotantes in virium prostrationem conjiciantur (v) .

20. Serum porro in vase hermetice clauso , ut diximus , diutius asservatum , postquam sedimentum deponit , magis limpidum usque , & usque evadit (4) , ut tandem aquae limpidissimi fontis speciem referat : tunc vero sedimentum jam fere totum dissipatum est , ejus loco remanente exigua congerie minorum fragmentorum , quae calcaream substantiam , sabulumque imitantur (x) , ut in sero per plures menses asservato observavi , tunc vero aqua supernatans evaporabilis tora est , foetet , & ex acidis concentratis opaca dumtaxat , & lactea nonnihil evadit , vehementer effervescent , quin tamen coaguletur ; in aperto vase per biduum relicta omnem effervescendi vim amittit . An ex ea calcarea materiae skirri origo est explicanda ?

21. Hinc adparet quomodo intelligendus sit Cl. PRINGLE , qui sedimentum nec colorem mutare , nec sero amplius misceri doceat (y) . Ex elementari vero terra sedimentum fieri censet Vir Celeb. nutriendis partibus destinata : quapropter observare libuit qualenam sedimentum serum praeberet animalium , quorum ossa ex rubia rubro colore tincta fuerant , sed de more ex albo in subcinereum vergens fuisse observavi .

22. Pla-

(v) Ex belladonna Cl. DE-HAEN p. 43. 46. l. c. ex cicuta vulg. Cl. STORCK in libell. de cicuta p. 104: corollar. 8.

(x) Quales molleculas teneras tophis podagricis similes in siccato sero superstitis observavit ELLER. Mémoir de Berlin T. XI. p. 25.

(y) l. c.

22. Placuit etiam serum igne induratum digestionem in vase clauso explorare : paulatim solvebatur, aquam dimittebat, & gelatinae speciem induerat, quae emollita sensim tandem sedimentum puriforme priori (1) haud abimile exhibebat, postea vero colliquescens ulterius huiusmodi sedimentum modicae arenae speciem similiter assumebat, aqua limpidissima supernatante (20); sed haec omnia tardius quam in sero non coagulato contingebant (7).

23. Libuit demum albumen ovi explorare, quod similia penitus phaenomena, similesque mutationes, ac serum digestum exhibuit, & fluidissimum evasit deposito sedimento, sed haec omnia tardius quam in sero contingebant, & sedimentum subcinereum magis, ac fere nigricans erat.

24. Haecenus de sedimento sero puriformi. Quoniam vero puris materiem nonnulli ex eadem materie, ex qua pleuriticam crustam fieri docuerunt (a), non inopportunitate censent experientia addere nonnulla, quae in crusta pleuritica tentavi.

Crustam pleuriticam aestivo tempore poculo testam, post aliquot dies per deliquium fluidam evasisse Cl. PRINGLE observavit (b); eam mutationem in vasis hermetice clausis pariter contigisse deprehendi, ita ut crusta tota in fluidum abiret citius, vel tardius prout crassior, densiorque, aut tenuior; rariorque erat: prout vero emollebatur, sensim sensimque rubrum colorem acquirebat, quamquam adhaerens rubrum crassamentum diligentissime fuisset detersum, proinde in liquamen abibat plus, minusve rubrum; inde suspicari coeperam revera molleculas sanguinis colore deposito in crustae elementa abiisse.

25. At

(1) Inde intelligitur cur ex corruptione, igne induratum serum penitus solvi negaverit Cl. PETIT Epist. II. p. 25.

(a) Cl. QUESNAY de la saignée, edit. nov. p. 418. 419. qui censet ex propria sanguinis substantia crustam glaireuse confici ab aucta vasorum actione, ita destructa; ut rubrum colorem deposuerit Cl. SAUVAGES sur l'Inflammation §. 87. DE-HAEN P. II. p. 17. & 22.

(b) Exp. XLII;

25. At postea albidissimas crustas (c) nactus, & teneras, eas digestionem in limpidum, ac decolorem liquorem olei aemulum resolvi observavi, quapropter verosimilius visum est ruborem, quem (24) sensim prodire observaveram, ex irretitis globulis sanguineis provenisse, qui postea soluti, & cum materie membranæ propria (d) admixti magis conspicui evaderent, & revera jam observaverat Cl. QUESNAY (e) interdum cruoris molleculas tot intercipi, ut crusta rubra sit, & cum placenta sanguinea confundatur, nec ejus crassities definiri proinde possit, nisi novacula scindendo observetur quousque durities, & resistentia perveniat. Quoniam vero globuli sanguinei etiam plures intercipi solent, & solutione manifestari, etsi antea membrana irretiti conspicui non essent; inde intelligitur cur in morbis, prout crusta augetur, cruoris quantitas minui videatur (f).

26. Ut vero ad propositum revertamur, soluta crusta in oleosum liquorem abierat, & foetens erat, ut tamen acidis, & igne coagulari hætenus posset, & quod ad rem nostram facit, quantumvis in vase hermetice clauso digesta numquam aut speciem mutabat oleosi liquoris, aut sedimentum ullum puri simile deponebat; sed deponebat perpauca particulas, quae pulverem tenuissimum, cinereum referebant, ex quo verosimile videbatur ex aliis feri partibus constari, acæae sunt, ex quibus sedimentum constituitur, sumi etiam ejusdem materiem ab hydropicæ membranæ materie discrepare cum illa digestionem non fluida, sed puriformis evaderet (13).

27. Quo-

(c) Ideo autem albidissimæ erant, quod sæpiissime per viginti-quatuor horas aquam mutaveram, diversisque in vasis ablueram, aqua autem semper rubuit.

(d) Membranam observavi, ex qua ejusdem ortum illustrari crediderim. Etenim crusta, quæ sanguineam placentam obtegebat, crassa, dura, eidem firmiter nexa in ambitu producebatur in mucosam, flocculentam membranam, quæ sensim emollita in serum continuari videbatur, in quod immersa erat, ut coronam veluti circa placentam constitueret.

(e) L. c. p. 411. 412.

(f) Id. ibid. p. 407. 408. 415. 416.

27. Quoniam vero soluta calore iterum cogitur, inde intelligitur, cur citius aqua calida, quam frigida solvi visa sit (g), quod nempe aquae calore indurata perinde, ac induratum ex calore serum tardius colliquescat (22): de coetero digestionis calor eo citius ejusdem membranae portiones solvit, quo intensior est, quamdiu humanum calorem parum superat.

28. Cum humor crustam efformaturus dum sanguis educitur, fluidus, forma olei ad superficiem colligatur, mora demum in crustam densandus (h); explorare volui num instar glaciei ex calore humani corporis pristinam fluiditatem recuperaret, sed frustra. Nam in eo calore constituta crusta nonnisi duorum dierum intervallo soluta est, & soluta foetebat, nec amplius frigore pristinam consistentiam recuperabat: quapropter conclusi non calore liquari, sed ingruente putredine.

29. Equidem nitro, aut nitrata aqua, aut etiam aqua pura crustam solvi docent (i): sed in aqua sive pura, sive nitrata vix ac ne vix quidem citius resolvi observavi, quam si sola in calore digestionis relinqueretur. Praeterea aquam solutae crustae supernataesse vidi, ut praeterea digestionem potius, & putredine, quam vi aquae soluta fuisse videatur, cum imprimis observaverim crustam nitro, aut salibus aliis neutris, aut alkalicis fixis putredinem arcentibus aspersam longe tardius solutam fuisse; neque sic soluta, aut etiam admixtis salibus ex frigore iterum est indurata.

30. Volatilium demum alkaliorum spirituum actionem in hanc crustam explorare volui, & vidi quidem cum spiritu volatili salis ammoniaci calce parato in vase clauso calore viginti-quinque graduum digestam membranam intra horam, tremulae gelatinae speciem induisse, per quatuor vero horas penitus solutam fuisse in liquorem admodum fluidum,

(g) Cl. DE-HAEN P. I. p. 87.

(h) Cl. QUESNAY l. c. p. 405. 406.

(i) Cl. DE-HAEN l. c. P. I. p. 101. u. 1. de vi nitri solvente.

dum, homogœneum, coloris nonnihil rubelli; tunc vero liquorem hunc in vas patulum effudi, in quo aliquot horarum spatio, dissipato alkali iterum in gelatinam concreta est; interea dum ejusdem membranae frustra alia, aut sola digesta in eodem calore, aut cum nitro salibus neutris aliis, alkalicis fixis, octava tandem die, vel etiam tardius ex integro soluta fuerunt. Membrana etiam albidissima, quae in alkoole per mensem, & ultra servata induruerat in corium, quod aqua emolliri, aut dissolvi amplius non potuisset (*k*), pari facilitate soluta est, & iterum congelata. Jam vero ea solutio ex putredine repetenda non est, cum tam cito dissolvatur, quamvis affusus liquor putrefactioni vehementer resistat, & eodem in auras abeunte iterum crescat. Notandum tamen ex alkali volatilissimae dissipatione solutam membranam pristinae membranae duritiem non recuperasse, sed in firmiorem tantum gelatinam concrevisse, quae novo spiritu alkali affuso absque digestionem confestim solvebatur, ejus dissipatione iterum concreverat. Gelatinam etiam artificialem ex cornu cervi, volatili spiritu salis ammoniaci solvi observavi, sed aegrius, quam pleuriticam membranam: aegrius adhuc, & tardius solvebatur coagulatum ex igne ferum, & omnium tardissime, & minus perfecte coagulatum albumen ovi. Posteriores binae solutiones spiritu dissipato crustas pellucidas relinquebant. Ex his constat verum membranae phlogisticae menstruum esse alkali volatile, ex quo confirmatur ejusdem membranae analogia cum polypis, qui urinoso volatili sale solvi dicti sunt (*l*). An igitur liquor membranam efformaturus indurescit quarundam partium dissipatione potius, quam frigore? Has, aliasque conjecturas, quae circa naturam, & phaenomena hujus membranae occurrunt, proponere non licet, quamdiu experimentorum plurium comparatione confirmatae non sint.

N

REFLE-

(*k*) SCHWENKE p. 156.

(*l*) MALPIGHIIUS posth. p. 162.

94
RÉFLEXIONS

POUR SERVIR DE SUITE AUX MÉMOIRES

*Sur le fluide élastique de la Poudre
à Canon*

PAR M. LE COMTE SALUCE.

CHAPITRE I.

*De l'action de l'air sur la Poudre : de la propagation
de l'inflammation & de son détonnement.*

1. **D**ANS les Mémoires, que j'ai donné dans notre premier Volume, je me suis particulièrement attaché à examiner la nature du fluide élastique, qui se développe de la Poudre à Canon à l'occasion de son inflammation, & l'Analyse Physico-Chimique que j'en ai fait, m'a donné occasion d'entrer dans des discussions de plusieurs phénomènes, qui partageoient les sentimens des Savants. Les objections des Célèbres M. MUSCHEMBRØEK & BERNOULLI (a) m'ont paru les plus solides, & mériter le plus d'être développées; c'est ce que je me flatte d'avoir fait, & je ne donnerai maintenant à cet égard que quelques observations & réflexions que j'ai fait du depuis: mon principal but dans ce Mémoire étant d'exposer & de démontrer par des expériences nombre de vérités, & de questions, qui n'ont été jusqu'à présent que très-imparfaitement traitées, & dont personne n'a encor donné aucune solution: telles sont par exem-

(a) Mém. pr. p. 6. . . . Mém. 2. p. 126.

exemple, celles de déterminer quelle est la véritable action de l'air naturel sur la Poudre: comment les principes actifs de la Poudre sont développés à l'occasion de l'inflammation, je tâcherai aussi de démêler le degré de chaleur nécessaire pour l'enflammer &c.: je ne m'arrêterai point à faire par avance le détail de toutes les questions que j'aurai occasion de traiter, quelques unes étant purement accidentelles, & quelques autres ne me paraissant pas d'une assez grande conséquence pour mériter que j'en prévienne mes Lecteurs; je me contenterai donc d'en indiquer les principales. Savoir 1.^o La raison pourquoi dans le vuide, quoique la poudre prenne feu, la propagation d'un grain à l'autre ne s'en fait pas pour autant. 2.^o Je traiterai de la chaleur nécessaire pour l'enflammer soit dans l'air libre, ou dans le vuide, & cela selon la dose & la qualité des composans: 3.^o J'exposerai ensuite la méthode dont je me suis servi pour mesurer l'intensité de la chaleur de différentes quantités de poudre dans le plein, & les effets qu'elle peut produire. 4.^o Je passerai en après à parler des vapeurs du soufre, de la poudre, des méches, & de chandelles allumées &c., & j'aurai occasion de faire des réflexions sur la méthode dont on fait usage dans les expériences sur ce sujet. 5.^o Je finirai enfin par un examen de la poudre qu'on peut faire sans soufre.

2. Tous les Phisiciens ont observé que la poudre ne brûle que très-lentement, très-difficilement, & en très-petite quantité dans le vuide, mais quelques uns se sont contentés de rapporter simplement le fait (a). D'autres ont confondu ce phénomène avec ce qui arrive à toutes les espèces de flammes, & ont assigné cet effet à quelque propriété particulière de l'air. Un fait que j'ai rapporté dans mon second Mémoire pag. 146. §. 42., & un examen réfléchi sur d'autres expériences faites par plusieurs

N 2

Auteurs

(a) BOYLE Expér. circa relat. flam. & aer. tit. 3. pag. 164. & 165.
= HAUKEE = MARIOTTE, & plusieurs autres.

Auteurs m'ont donné lieu de penser que ce n'était que dans la pression qu'exerce l'air sur la flamme qu'on en devait chercher la raison. En effet j'ai fait voir que la poudre s'enflamme dans quelque air infecté que ce soit, & BOYLE (a) nous apprend qu'une fusée continue à brûler sous l'eau. *La flamme de la poudre n'a donc besoin que d'une pression qui en augmente l'intensité en la retenant au tour des grains ?* C'est une vérité que l'expérience que je vais rapporter me paraît mettre hors de doute, elle a été faite par M. le Chevalier D'ANTONI pour faire voir les différences entre les quantités de poudre, qui s'enflamment dans le plein & dans le vuide. Quoique cette expérience n'ait donc pas été faite dans la vue que je viens de proposer, on verra cependant que l'application en est directe, & qu'elle sert à établir solidement la Théorie en question: sans entrer dans une description étendue de la machine, il suffit de dire que l'essentiel consiste en ce que le tuyau, qui contient la poudre, n'est point vuide d'air, tandis que, par le moyen d'une vessie ou parchemin, interceptant la communication qu'il a avec un grand récipient, que l'on place sur une pompe pneumatique, on peut pomper l'air contenu dans le récipient ou l'y laisser: on met ensuite la poudre en feu, & le fluide ne peut se faire jour qu'à travers la vessie. Or il arrive que, lorsque le récipient est vuide d'air, il s'enflamme beaucoup moins de poudre que lorsqu'il est plein: en réfléchissant sur les circonstances de cette expérience nous pouvons aisément reconnaître la vérité que nous venons de proposer; car le tuyau qui contient la poudre étant également plein d'air lorsque le récipient, auquel il tient, est plein, ou vuide; il est clair, que dans le cas où il est vuide la propagation du feu cesse, parceque au moment que
le

(a) BOYLE loco cit.

le parchemin est rompu par l'explosion des premiers grains, l'air naturel contenu dans le tuyau cesse aussi de comprimer la flamme, laquelle en se raréfiant n'a plus assez de chaleur pour mettre en feu les grains qui restent.

3. Il n'est pas moins aisé de voir en rapprochant les circonstances de ces expériences, que l'air ne fait point d'autre fonction que de comprimer la poudre, & qu'en s'opposant à la libre expansion de la flamme & du fluide, il procure une intensité suffisante au feu des premiers grains pour enflammer les autres, & à mesure que la pression est plus grande, la propagation du feu est aussi plus prompte. *Cette plus grande intensité dépend donc de la densité que la flamme acquiert par la pression.*

4. Delà il est facile de rendre raison pourquoi en enflammant la poudre dans un récipient, par le moyen d'un verre ardent ou d'un fer rouge, au commencement on ne met en feu que les grains qui sont immédiatement atteints par le feu, & ensuite à mesure qu'il se développe de fluide, la propagation du feu se fait aux grains voisins, & cela plus ou moins promptement, suivant que la quantité d'air développé est plus ou moins grande, eu égard à l'espace qu'il doit occuper. Il est vrai que ces degrés d'accélération ne sont point assez sensibles dans le vuide, parceque étant obligé d'employer des petites quantités de poudre pour prévenir les accidens facheux, qui ne manqueraient pas d'arriver à l'occasion de l'inflammation, il ne se développe que de très-petites quantités de fluide: pour s'en assurer donc, & en faire une comparaison solide avec l'air naturel, il est nécessaire qu'il s'en produise autant qu'il en faut pour résister considérablement à l'expansion de la flamme de la poudre qui continuë à s'enflammer, afin que la flamme d'une quantité soit suffisante à mettre en feu celle qui la suit, de façon que la propagation se fera avec la même vitesse que dans l'air naturel lorsqu'il se fera dé-

développé assés de fluide pour être en équilibre avec l'air extérieur : ce qui est en effet prouvé par les expériences de HUIGENS, & de MUSCHEM BROEK. Celles dont je vais donner le détail peuvent servir de confirmation à ce que je viens d'avancer.

E X P E' R I E N C E .

Je mis une fusée enflammée dans un récipient, j'en pompai l'air, & le fluide nouvellement engendré avec beaucoup de précipitation, à chaque exhantlation, on en voïait diminuer la flamme, lorsque enfin elle parut éteinte je fis rentrer un peu d'air qui la révivifiat dans l'instant, & elle brulait ensuite avec plus de vivacité à mesure qu'il se développaît du nouveau fluide: je fis enfin une seconde fois le vuide, & je continuai pendant quelque tems à pomper le peu de fluide qui pouvait encore se produire, & la fusée fut éteinte.

5. On ne trouvera pas mauvais que je fasse observer d'avance que je me suis aussi servi de l'expérience suivante pour déterminer la force & l'élasticité du fluide qui se développe de la poudre à canon, comme on le verra dans la suite.

E X P E' R I E N C E .

Un tuyau de verre de la longueur de 9. pieds de Roi environ, était recourbé de deux côtés, & placé sur une planche de même longueur perpendiculairement à l'horizon; la partie supérieure communiquait avec un autre tuyau très-mince, & d'un fort-petit diamètre, qui étant parallèle au premier était soigneusement mastiqué à la pompe pneumatique, & lorsqu'on avait tout le vuide possible, on interceptait hermétiquement la communication entre les deux tuyaux

tuiaux à l'endroit de la jonction, afin de simplifier la machine, & la rendre moins sujette à se casser: la partie inférieure aussi recourbée & parallèle au grand tuyau, n'en était que la continuation, & était de la longueur de 30. pouces environ, elle tenait à un autre tuyau placé horizontalement, & d'un diamètre presque triple, lequel était uni pour la longueur environ d'un pied, & portait ensuite au moins une douzaine de boules soufflées dans le même tuyau du diamètre d'un demi pouce environ chacune, & gardant entr'elles un espace cylindrique d'un pouce à un pouce & demi: par le moïen d'un autre petit tuyau on pouvait faire le vuide dans cette autre partie de la machine, & lorsque le mercure était de niveau, on scellait hermétiquement ce tuyau: chacune des boules contenait une égale quantité de poudre en poids, je me servais d'une cuillère de verre, faite à peu près comme celles, avec lesquelles on sert les pièces d'Artillerie, & j'évitai par ce moïen l'inconvénient de ne pas mettre chaque dose dans sa boule: je mettais ensuite des charbons ardents dans un cuiller de fer que je plaçais sous la première boule, dont la poudre s'enflammait après quelque tems, & faisait monter le mercure à une certaine hauteur: lorsque tout était froid, je mettais le cuiller de fer sous la seconde boule, & je continuais de la même manière pour les suivantes. Or il arrivait, que pendant que le mercure était plus bas que lorsque j'avais fait le vuide dans le long tuyau, la poudre de chaque boule ne prenait feu, que quand le charbon en feu était dessous; mais aussitôt que cette colonne avait atteint à peu près la même hauteur le feu se communiquait d'une boule à l'autre, de sorte que le mercure était poussé à une hauteur qui n'était pas comparable avec les précédentes; & une fois entre autres, où il se trouvait encore plusieurs boules à prendre feu, la machine fut brisée de ce côté avec un bruit extraordinaire, & dommage des Assistans.

6. Il est inutile de réitérer ici les inductions que nous avons déjà fait; nous observerons seulement, que dans un même récipient, où la différence consiste en ce qu'il soit plein, ou vuide d'air, la flamme de la poudre se trouve comprimée, dans un cas, par un poid, qui résiste à son expansion, & augmente par-là sa densité, & dans l'autre elle peut librement se répandre; ce qui doit faire une grande différence dans l'activité.

La propagation du feu est donc intercepté dans le vuide, parce que la flamme des grains, qui sont en feu, pouvant se dilater librement, l'intensité de chaque particule enflammée n'est pas suffisante pour mettre en feu les grains auxquels elle touche: & ce défaut d'intensité, qui dépend du défaut de pression n'est autre que une diminution de la densité de la flamme.

7. La pression donc ou résistance &c., de quelle nature qu'elle soit produira toujours les phénomènes dont il est ici question, savoir une facilité à l'inflammation & à la communication du feu, & à mesure qu'elle sera plus grande jusqu'à un certain point, ces deux phénomènes seront plus prompts, le développement du fluide plus simultané, & le détonnement plus considérable (a). De là les différences qui arrivent dans les effets d'une arme à feu chargée avec la même quantité & qualité de poudre (b).

8. II

(a) Nous avons démontré §. 4. & 5. qu'une résistance quelconque sert à la propagation du feu, & que le fluide élastique a aussi cette propriété. C'est ce qui est encore confirmé par M. HUIGENS & par M. JEAN MUSCHEMBROEK dans son appendice à la physique de M. son frère pag. 52., le même avertit de pomper le fluide à chaque projection de poudre que l'on fait dans un récipient vuide d'air, car sans cette précaution il se fait une succession d'inflammation de la poudre, que l'on fait tomber sur le fer rouge à celle qui est dans la phiole, & le vaisseau peut en être brisé avec danger de ceux qui font l'expérience.

(b) On ne trouvera pas mauvais que je fasse ici une petite digression, pour faire mieux sentir l'idée que l'on doit se former de l'action de l'air naturel sur la poudre; on ne saurait lui faire franchir de certains bornes, sans tomber dans des inconvénients, qui ne peuvent qu'induire dans des erreurs grossières. La pression donc que fait l'air naturel ou quelconque autre corp sur la poudre, sert à nous procurer une pro-

8. Il très-important de concevoir la différence qu'il y a entre la pression nécessaire pour s'opposer à la dilatation de la vapeur enflammée, & la pression que l'on peut faire à la poudre même puisque à proportion que la flamme est plus comprimée, & par conséquent plus dense, la propagation du feu est d'autant plus aisée comme nous venons de l'observer. Au contraire à mesure que la poudre est plus comprimée la flamme pénètre plus difficilement, comme il arrive dans tous les combustibles qui, à choses égales brûlent plus lentement à mesure que leurs parties sont plus étroitement liées ensemble. Ainsi la densité de l'air qui comprime la flamme sans comprimer les grains, facilite toujours la propagation du feu, à mesure qu'elle est plus grande; & cela arrive aussi par la pression du fluide engendré quand il est retenu par des parois qui ne peuvent céder comme dans le fusil pyropneumatique de M. le Chevalier D'ANTONI, au contraire quand on presse fortement

O

la

pagation du feu plus ou moins prompte, suivant qu'elle s'oppose plus ou moins à la dilatation des parties enflammées de la vapeur & qu'elle l'oblige à réagir avec d'autant plus de violence sur la poudre; d'ailleurs elle n'est point la cause de la flamme de la poudre, non plus que de l'explosion, comme le remarque M. MUSCHEMBROEK dans une note qu'il fait à des expériences des Académiciens de Florence, sur la fumée dans le vuide, où il s'exprime en ces termes = *il paroît par cette expérience que la flamme & l'explosion de la poudre ne dépendent point de la compression de l'air* =.

L'expérience, sur laquelle il se fonde, est qu'ayant jetté quelques grains de poudre sur un fer rouge dans le vuide, il ne se fit que une flamme bleuë; mais il ajoute que si on en jette plusieurs ensemble, ils s'enflamment; font explosion & brisent le vaisseau.

R E M A R Q U E

Puisque la poudre peut s'enflammer dans le vuide, & se décomposer, il est clair que la présence de l'air, ou de quelqu'autre corp comprimant, n'est point nécessaire pour produire ni la flamme, ni l'explosion.

La flamme étant causée par cette propriété que les phlogistiques ont en général de se dissiper, lorsqu'ils ont acquis le degré de chaleur nécessaire pour les séparer des matières grossières, auxquelles ils sont unis.

Ne pourrai-t-on pas soupçonner, que ce fut une espèce d'évaporation des parties plus volatiles agitées par un mouvement très-violent?

la poudre dans un tuyau ouvert, la pression sur la flamme n'est pas plus grande, & par surcroit elle trouve plus de difficulté à pénétrer ce corps compacte: delà le plus de lenteur dans la propagation de la flamme.

9. C'est ce que l'on voit sensiblement dans les armes à feu; où le bouchon qui sert pour arranger la poudre, & lui faire occuper un moindre espace de celui qu'elle garderait sans son secours, s'oppose en même tems à la dilatation du fluide, lequel comprime par là la flamme de la poudre, qui a pris feu: or suivant que la pression retombe plus sur l'une des deux circonstances énoncées, les effets qui en résultent sont différens; car le bouchon étant poussé avec force le long de l'arme jusque contre la poudre sans la resserrer de trop, sert à empêcher la dilatation du fluide, lequel contraint celle de la flamme des premiers grains en feu, de sorte qu'elle peut réagir avec d'autant plus d'intensité sur ceux qui restent, & par conséquent

L'explosion n'est autre chose, que le changement que souffre l'air contenu dans la poudre au tems de l'inflammation; & l'on doit considérer trois différens états dans cette circonstance, savoir celui de l'extrême condensation où il est avant l'inflammation, l'état naturel qu'il doit acquies avant de passer à celui de dilatation; & ce dernier enfin qu'il acquies plus ou moins, suivant la plus grande quantité de chaleur qu'il l'affecte.

De la promptitude donc & de la véhémence, avec lesquelles se fait la succession de ces états opposés dépend cette force surprenante de la poudre.

Il n'est pas surprenant que les vaisseaux soient brisés dans l'expérience que propose le Célèbre M. MUSCHEM BROEK, puisque les grains, en tombant sur le fer rouge, trouvent tous un degré de chaleur suffisante pour les mettre en feu, & les décomposer en même tems, sans qu'il soit nécessaire qu'un grain communique le feu à celui qui le suit, & par conséquent cette quantité de fluide étant développée avec une simultanéité prodigieuse, heurte rudement contre les parois du vaisseau & le fait céder: pourque pareil effet puisse avoir lieu, il n'est pas nécessaire qu'il se produise une quantité de fluide, laquelle étant condensée, puisse être en équilibre avec l'atmosphère, car il faut avoir égard à la dilatation que souffre le fluide dans cette circonstance, & à la vitesse avec laquelle il se développe, de sorte qu'une même quantité de fluide développé plus ou moins simultanément fera sauter ou non le vaisseau, dans lequel il se produit.

N. B. on me permettra de faire une application de ces réflexions en y rapprochant un phénomène, qui ne manque pas d'arriver lorsque on

féquent la propagation du feu devient plus prompte, & plus facile : il en arrive le contraire lorsque le bouchon sans être exact est trop réfoulé sur la poudre, puisque elle devient alors plus lente. La quantité absolüe de poudre qui peut s'enflammer dans une arme donnée doit donc dépendre du rapport relatif de ces deux circonstances combinées ensemble : pour éclaircir encor davantage tout ce que nous venons de dire, il ne fera pas hors de propos d'en faire une application pratique; elle nous est présentée fort simple dans les pistolets qui ont une chambre pour la poudre, & une supérieure pour la bâte, on est obligé d'en dévider le canon pour les charger, parceque le diamètre du trou, par lequel doit sortir la bâte est un peu plus petit que celui de la bâte même, ce qui l'oblige à changer de configuration, & qui supposant un grand effort donne le tems à un plus grand développement de fluide, lequel par sa densité, nous le répéterons,

O 2

s'op-

ne sert pas les armes à feu avec toute la précaution nécessaire : lors donc que dans quelque arme à feu que ce soit, on n'a pas soin de faire passer les bouchons contre la charge, ou que la bâte vient à être engagée plus haut qu'elle ne devrait être, & pour dire la chose plus simplement enfin, si on vient à laisser un intervalle de quelque considération entre les parties de la charge, l'arme crevé dans cet endroit, & c'est parceque une grande quantité de fluide étant développée, & venant à heurter contre cette résistance, dont les parties ne peuvent céder avec une égale vitesse, le fluide réagit sur tout la partie de l'arme, dans laquelle il se trouve renfermé, & la flamme de même, de sorte que toute la poudre qui reste est enflammée à la fois, ce qui n'arrive pas si le fluide peut se dilater à proportion qu'il se développe, parceque alors la pression sur la flamme restant à peu près la même, la succession de l'inflammation est plus uniforme. On ne trouvera pas mauvais que j'ajoute que la résistance n'étant pas insurmontable, c'est-à-dire que la partie de la charge, qui est engagée pouvant céder à la pression du fluide, il arrivera que suivant le plus ou moins de vitesse du développement, l'arme crevera ou non; de sorte qu'en employant deux quantités différentes de poudre, dont la proportion des Composans soit la même, & que la seule différence consiste en ce que l'une soit plus aisée à se décomposer que l'autre, ce qui dépend du grainage, de l'arrangement qu'on tache de lui procurer, & d'un certain rapport qu'elle a avec l'arme, comme

s'oppose à la dilatation de la flamme des grains qui sont déjà en feu, & fait qu'elle agit avec plus d'intensité sur les autres, de sorte que les premiers développemens sont beaucoup moins prompts que ceux qui suivent: les carabines rayées nous fournissent encor un autre exemple, mais un autre détail serait en pure perte, vù que ce serait tomber dans des répétitions de ce que nous avons déjà dit.

10. Pourqu'il s'ensuive donc le plus grand effort possible d'une charge donnée dans une arme à feu, il faut que le fluide se développe le plus simultanément qu'il est possible, ce qui dépend de la combinaison de la vitesse dans la propagation du feu, & de son intensité: celles-ci dépendent d'un certain rapport entre la quantité de matière de chaque grain, & les interstices qui sont entr'eux, & de celui de l'arme avec la charge (a).

11. On obtiendra le plus grand des efforts possibles, si on ajoure à ces conditions, que le mélange des composans la poudre soit tel que le phlogistique & l'acide nitreux soient

nous venons de le dire, celle-ci, quoiqu'en moindre de quantité; fera crêver l'arme plus aisément que l'autre, qui est en plus grande quantité, & cela parceque la simultanéité du développement sera telle, qu'elle ne donnera pas le tems à l'obstacle supposé de se déranger, au lieu que l'autre lui communiquera plus successivement les degrés de vitesse nécessaire pour entrer en mouvement.

On voit aisé que je ne donne point ceci, comme une vérité absolue dans tous les cas, sans qu'elle soit susceptible de différentes modifications, je me borne seulement à dire qu'il y en a ou cela doit arriver ainsi.

(a) Comme la force de la poudre dépend de la vitesse, avec laquelle le fluide se développe, & par conséquent de l'action plus ou moins vive de la flamme sur la substance des grains; il paraît que toutes choses d'ailleurs égales, on doit préférer la poudre ronde à l'irrégulière, parceque elle offre à la flamme un passage toujours égal & uniforme, au lieu qu'il peut arriver que les surfaces planes de la poudre irrégulière venant à s'arranger l'une contre l'autre empêchent la libre communication du feu: quant à la grosseur des grains, il est constant qu'il en est une qui est favorable à la simultanéité de l'inflammation, & c'est à une expérience éclairée à la déterminer.

Du reste quand on aura déterminé la quantité absolue de fluide qui se développe d'une quantité de poudre donnée, ce sera un problème purement géométrique d'assigner les proportions des armes à feu.

soient combinés entr' eux dans une proportion convenable.

12. Pour ce qui regarde le détonnement, il est visible, que puisqu'il se fait par la collision & l'impulsion des parties de l'air nouvellement engendré contre celles de l'air extérieur qui ne peuvent céder avec une égale vitesse, Mém. pr. pag. 4. §. 25. il diminuera d'autant plus que le milieu sera plus rare, de même que le son, dont le plus ou moins d'intensité dépend de la plus ou moins grande densité du milieu, dans lequel on l'excite; donc le détonnement cessera lorsque cette cause n'aura plus lieu.

CHAPITRE II.

De la chaleur nécessaire pour enflammer la Poudre dans le plein & dans le vuide.

13. **A**près avoir déterminé comment l'air agit sur la poudre &c. Je passerai à traiter la seconde question que je me suis proposé, savoir *quel est le degré de chaleur nécessaire pour l'enflammer.* Elle renferme plusieurs cas différens qui me semblent mériter d'être traités séparément; & quoique un tel examen paraisse entièrement isolé, & de peu de conséquence, je me fais un devoir de prévenir mes Lecteurs en ce que je le crois digne de quelque attention, puisque outre la nouveauté des phénomènes qu'il présente, il peut être d'un grand secours pour découvrir les loix simples, suivant lesquelles se fait le grand jeu de cette force si étonnante, afin de simplifier la question autant qu'il m'était possible, j'ai jugé à propos de commencer à fixer le degré de chaleur nécessaire pour disposer chacun des composans à être décomposé. J'ai fait ensuite les différentes combinaisons, & j'ai déduit des résultats que j'ai eu les vérités principales qui en découlent directement.

14. J'ai été obligé de faire usage de deux méthodes différentes dans le cours des expériences que j'ai cru nécessaires à ce sujet, & j'en détaillerai les raisons avant que je fasse la description des résultats : elles me paraissent d'ailleurs le plus comodes, & peut être des plus simples qu'on puisse imaginer, l'une est cependant préférable à l'autre dans des cas particuliers, suivant ce qu'on se propose principalement à examiner, nous n'en dirons pas davantage pour le présent.

15. Dans la première il ne s'agissait que de mettre les substances dans des morceaux de flacon que je mettais ensuite à un bain d'huile, dans lequel était un thermomètre dont la jambe formait un angle pour plus grande commodité, & la marche en était fort sensible; c'est par ce moyen que j'ai trouvé que le soufre soit lorsqu'il est seul, ou qu'il est mêlé avec le salpêtre & le charbon, prend toujours feu à peu près au 593. degré de Farenheit, & qu'un moment après la poudre détonne (a), mais il n'en a pas été de même de chacune des substances séparément, car le salpêtre ne pouvait pas se fondre non plus que le charbon s'enflammer, ni enfin un mélange des deux pouvait se décomposer par la chaleur qui lui était ainsi communiquée par l'huile bouillante.

16. Il faut remarquer que si on met la poudre quelque tems avant que l'huile ait aquis le degrés de chaleur qui lui est nécessaire pour transmettre à la poudre celui qui lui faut pour prendre feu, ou que les degrés de feu soient communiqués trop lentement, la poudre ne peut plus s'enflammer par ce moyen (a); il arrive la même chose à celle qu'on met dans des récipients à long col, il faut pour lors employer un plus grand degré de chaleur pour la faire dé-

ton-

(a) M. AMMONTONS a trouvé que la poudre s'enflamme au même degré de chaleur qui fait fondre de la grenaille de plomb, Mém. de l'Académ. des Sciences de Paris pour l'année 1703. p. 247.

tonner : nous tacherons de démêler la raison de ces phénomènes quand il en fera remis, & nous passerons en attendant à exposer la seconde méthode dont j'ai fait usage.

17. Je mettais les substances sur une platine de fer blanc qui avait un enfoncement sphérique de trois lignes environ de diamètre en largeur & d'une demi en profondeur, elle était fixée dans une rainure pour plus de sûreté, & une petite lampe dont le lumignon était constamment de 88. fils de coton fin était placée avec soin dessous la cavité de la platine en même tems qu'on lâchait un pendule, dont le nombre des vibrations était de 76. par minute ; elles étaient comptées tout haut par une personne pendant qu'une autre marquait le nombre que la première prononçait au moment que je donnais le signal convenu.

18. Cette manière de faire ces expériences quoique fort simple & exacte, n'est pas à beaucoup près aussi décisive que la première, laquelle est plus uniforme, & la chaleur peut se transmettre avec plus d'équabilité ; mais celle là est en défaut d'autre part en ce qu'elle n'a pas assez de chaleur pour répondre à l'enchaînement des expériences nécessaires nous n'oublierons cependant pas l'avantage essentiel qu'elle a sur l'autre, qui est qu'elle donne des résultats absolus pendant que la seconde n'en donne que des relatifs.

19. Je dois avertir que cette seconde méthode exige nombre des circonspections ; je ne les passerai pas sous silence pour épargner de peine à quelqu'un qui voudrait les réitérer.

1.°

Il faut tacher de procurer autant qu'il est possible une égalité dans la flamme.

C'est

(a) La poudre grainée perd plus facilement encore de son inflammabilité par ce moyen que la poudre pilée.

C'est ce qu'on peut obtenir à peu près en laissant toujours la lampe allumée sans toucher au lumignon, qu'on aura soin de ne pas éparpiller; le lin incombustible serait préférable, & le coton fin est aussi d'un très-bon usage en l'employant dans une lampe à esprit de vin, car il ne peut y avoir alors d'équivoque, moyennant qu'on ait soin d'ajouter de l'alcool à chaque expérience.

2.°

On aura soin d'arroser la lampe de tems en tems avec de la nouvelle huile.

3.

La platine dont on se servira sera grande, parceque sans cette précaution le feu de la lampe se communiquera au souffre.

4.°

On la laissera de plus entièrement refroidir après qu'on l'aura bien nettoyée en tous sens.

5.°

Il ne faut ôter la lampe de dessous la platine que, lorsque le souffre sera tout brulé, & s'il entre du salpêtre dans le mélange, il ne sera pas mal d'y mettre un charbon en feu pour décomposer ce qui peut en être resté.

6.°

Les substances doivent enfin être mesurées exactement, & pour obtenir quelque précision dans leur arrangement
sur

sur la platine on n'a qu'à passer une ratiffoire sur la cavité de la même : voici les résultats des essais que j'ai fait avec cette méthode.

EXPERIENCES.

I.

Le soufre entra en fusion à 5 vibrations fut entièrement fondu à 10., & s'enflamma à 15.

II.

Le salpêtre commença se fondre à 25 vibrations, & fut tout en fusion à 50.

III.

Le charbon commença à prendre feu à 36 vibrations, & fut tout en feu à 50.

IV.

Le soufre combiné avec le salpêtre, parties égales, commença à se fondre à 12 vibrations, s'enflamma régulièrement entre 15. & 20. étant entièrement fondu, & à 25. la flamme changea de couleur, & devint blanchâtre, ce qui me fit appercevoir que le salpêtré était décomposé par le soufre, en effet aiant examiné le ressidu je trouvai qu'une partie du salpêtre avait été réellement décomposée. J'observais aussi dans cette occasion que si on ôte la flamme de dessous la platine aussitôt que le soufre a pris feu, le même brule entièrement sans que le salpêtre se décomposé pour autant, la même chose ne manque pas d'arriver

P

si on

si on met le feu avec un charbon rouge au soufre qu'on a mêlé avec du salpêtre.

Dans cette expérience les irrégularités dans l'inflammation du soufre dépendaient probablement de la distribution plus ou moins uniforme des deux substances.

V.

Le soufre mêlé à doses égales avec le charbon se fondit à 15. vibrations, s'enflamma à 18.; on vit du charbon en feu à 25. & à 35. tout le mélange fut éteint. Il est bon d'observer que le charbon ne paraît en feu que pendant que le soufre l'est, à moins qu'il ne soit bien léger. J'ai été obligé de donner un résultat mitoyen à cause des variations qu'il y a eu dans l'inflammation du soufre.

V I.

Un mélange de 4. parties de salpêtre & une de charbon détonna à 37. vibrations.

V I I.

Un autre de 4. de salpêtre sur une de soufre, & une de charbon détonna à 25. vibrations le soufre aiant pris feu à 22.

Après avoir réitéré avec soin cette expérience aiant vu qu'il y avait presque toujours des différences dans l'inflammation du soufre, ce qui en causait quelques unes dans la détonnation du salpêtre & du charbon, j'ai jugé plus convenable d'employer de la poudre pilée, dans laquelle les composans sont plus uniformément distribué en vertu de la longue trituration qu'on lui fait essuyer.

VIII.

La poudre pilée de 5. parties de salpêtre sur une de soufre & une de charbon prit feu à 18. vibrations, le soufre aiant pris feu à 15.

IX.

Celle qui est faite avec 6. parties de salpêtre, une de soufre, & une de charbon détonna à 17. vibrations, le soufre aiant de même pris feu à 15.

X.

Une autre enfin de de 7. parties de salpêtre sur une de soufre, & une de charbon se décomposa à 16. vibrations, le soufre s'étant constamment enflammé à 15.

Lorsque la poudre est grainée l'inflammation du soufre est retardée, de sorte que si le grainage est fort gros il lui faut environ un tiers de plus de tems pour prendre feu qu'il ne lui en faut lorsqu'elle est pilée, ce qui fait aussi que la décomposition totale de la poudre qui suit de près l'inflammation du soufre est beaucoup moins prompte.

XI.

La poudre ne laisse pas de se décomposer entièrement quand même l'on ôte la lampe de dessous la platine aussitôt que le soufre a pris feu, & la détonnation se fait quand le soufre est presque tout brulé (a).

P 2

La

(a) Cela arrive aussi à d'autres combustibles; si par exemple on met de la poudre dans l'esprit de vin rectifié qu'on enflamme ensuite, elle ne prend feu que, lorsque celui-ci est entièrement dissipé; il en est de même si on met le feu à un linge mouillé dans de l'alcool, il ne prend feu que quand le même a fini de bruler.

La poudre fulminante commença à entrer en fusion à 30. vibrations, & détonna à 32. étant toute fondue à ce tems.

20. De tout ce que nous avons dit ci-devant, nous pouvons déduire les vérités suivantes.

Que la flamme du soufre est suffisante (a) pour enflammer la poudre, mais qu'il faut que le soufre soit presque entièrement détruit par la combustion, les expériences (VIII. IX. X.) concourent à le confirmer, car l'on voit qu'à mesure qu'il y a plus de soufre dans la poudre, il se passe un plus long tems entre l'inflammation de celui-ci, & la décomposition de la même poudre.

21. La comparaison des résultats (I. IV. VI.) sert à nous faire connaître qu'il faut un plus grand degré de chaleur pour que le soufre puisse détonner avec le salpêtre qu'il ne lui en faut pour s'enflammer seulement. 2.º qu'il en faut un plus grand encor, pour que le salpêtre soit décomposé par le charbon.

22. La flamme du soufre a cependant assez d'intensité pour mettre en feu le charbon, pour faire entrer le salpêtre en fusion, & pour faciliter la décomposition des deux, c'est donc là la raison, pour laquelle la poudre s'enflamme à 20. 25. vibrations quoique le charbon ne puisse s'enflammer qu'à 38., & que le salpêtre ne soit entièrement fondu qu'à 50.

23. Nous avons vu dans l'expérience (VII.) que le soufre ne prenait pas feu régulièrement après un même nombre de vibrations, & que la décomposition totale des
sub-

(a) Pour se convaincre avec beaucoup de facilité que la flamme du soufre peut faire décomposer le charbon avec le salpêtre, on n'a qu'à projeter de la poudre dans du soufre enflammé.

substances souffrait aussi les mêmes altérations, la même chose arrive aussi dans la poudre grainée à mesure que le grainage est plus gros, comme j'ai fait observer après l'exp. (x.) ce qui sert à nous confirmer que c'est en vertu de la flamme du soufre que le salpêtre & le charbon peuvent se décomposer.

24. Le phénomène assez singulier dont j'ai fait mention (16.) savoir que la poudre mise dans des flacons à long col ne pouvait plus s'enflammer non seulement au même degré de chaleur, auquel elle prenait feu dans des vases ouverts, mais même à 7. degrés de plus, semble nous fournir une nouvelle preuve qu'il faut moins de chaleur pour enflammer le soufre, qu'il ne lui en faut pour se décomposer avec le salpêtre, parceque on fait d'ailleurs qu'il ne peut prendre feu dans des récipients à long col.

25. Nous avons de même rendu compte d'un autre phénomène, qui arrive lorsqu'on fait essuyer à la poudre un feu par degrés pendant long tems, comme quand on met le verre qui la contient dans l'huile en même tems qu'on expose celle-ci à un feu lent; il faut pour lors un plus grand degré de chaleur pour l'enflammer, qu'il ne lui en faut lorsque on lui communique le feu avec plus de vivacité; & ceci a encor plus facilement lieu dans la poudre grainée que dans la pilée: mais il est très-plausible de penser que cela dépend de ce que le soufre se dissipe en pure perte à cette chaleur, puisque la communication en est faite fort lentement par l'huile, & le soufre en reçoit assez pour se sublimer entièrement avant qu'il ait pu en acquies autant qu'il lui en faut pour pouvoir s'enflammer; une circonstance que je n'ai pas indiqué, & que j'ai d'ailleurs observé dans ces occasions sert à étayer la conjecture que je viens de proposer, & à la douer même (on me passera l'expression) d'une lueur d'évidence, c'est que lorsqu'on laisse ainsi la poudre exposée pendant long

tems,

tems, on lui voit changer de couleur, & elle devient d'un noir très-foncé.

26. Cela posé, on voit clairement que la décomposition totale de la poudre est plus difficile, parceque il faut un plus grand degré de chaleur pour faire détonner le salpêtre avec le charbon (vi.) qu'il n'en faut pour enflammer le soufre (i.), & par conséquent pour décomposer la poudre qui en contient encor au moment que le degrés de chaleur communiqué peut suffire pour le mettre en feu.

27. Dans la poudre pilée finement cela n'a pas lieu de la même manière, & n'arrive pas si aisément, car comme elle forme une espèce de masse, & que le nombre des surfaces est très-fort diminué, la sublimation du soufre ne peut pas être si prompte, ni si facile, de sorte qu'il en reste encore suffisamment pour s'enflammer, & pour causer l'entière décomposition de la poudre, au tems que le mélange a reçu un degré de chaleur égal à celui qui fait que le soufre prend feu.

28. La poudre perd de son inflammabilité dans le vuide, de sorte que le degré de chaleur, qui peut l'enflammer dans l'air libre, n'est pas suffisant à en procurer la décomposition dans les récipients dont on a pompé l'air; Mrs. HUIGENS, & MUSCHEMBROEK ont fait aussi cette observation. Cette différence ne dépendrait-elle pas aussi de la sublimation du soufre? ceci me parait être d'autant plus fondé, que le vuide sert à la favoriser (a), & que, suivant ce que nous avons vu ci-devant, non seulement le salpêtre se décompose plus aisément avec le soufre qu'avec le charbon, mais sa flamme sert à accélérer la détonnation du charbon avec le salpêtre.

29. Si

(a) J'ai observé que dans ces occasions il s'élève une poudre jaunâtre qui se cole aux parois du vaisseau, M. BOYLE le dit de même, or cette poudre ne peut être que du soufre sublimé.

29. Si on ne fait pas effuyer un degré de chaleur violent, & avec promptitude à un mélange de souffre & de salpêtre dans des récipiens vuides, on ne peut parvenir à le faire décomposer, parceque le souffre se sublime bientôt, & le salpêtre ensuite quoique fondu ne peut plus détonner faute de phlogistique. Tout ceci est appuyé aux expériences que j'ai fait sur ces mélanges dans le vuide, par lesquelles j'ai trouvé, outre ce que je viens de dire, que la poudre qui contient du souffre prend feu à peu près au même degré de chaleur que celle qui n'en a point ce qui sert à confirmer ce qui a été dit précédemment.

30. Nous pourrons donc rendre aisément raison de ce, que quelques Savants, n'ayant pas pris ces précautions, n'ont pas vu la poudre s'enflammer dans le vuide, & l'ont en conséquence niée; mais c'est probablement parceque où ils ont employé un mélange sans charbon, ou qu'ayant fait usage de bonne poudre, ils ont donné un feu trop lent & moindre de celui qui est en ce cas nécessaire pour faire détonner le salpêtre avec le charbon.

31. Nous finirons donc ce Chapitre par conclure.

1.°

Que plusieurs circonstances contribuent à modifier l'inflammabilité de la poudre, savoir le plus ou moins de souffre; le mélange plus ou moins intimément broyé; le grainage plus ou moins gros.

2.°

Que l'inflammation est très-prompte aussi si le souffre peut s'enflammer comme il arrive en plein air.

3.°

Quelle fera encor augmentée si le soufre est en petite quantité au moment qu'il a aquis le degré de chaleur nécessaire pour s'enflammer.

4.°

Que le soufre ne pouvant s'enflammer, il faut en ce cas employer nécessairement un degrés de chaleur plus grand, & égal à celui qui peut faire décomposer le soufre avec le salpêtre.

5.°

Que si le soufre se sublime avant qu'il ait aquis le degrés de chaleur qu'il lui faut pour prendre feu, soit à cause du trop de surface, soit par la lenteur dans la communication du feu, soit par le défaut de pression, ou soit enfin par quelque autre circonstance, ou par le concours de plusieurs à la fois, on ne peut se dispenser d'employer un degré de chaleur encore plus grand du précédent pour faire détonner la poudre.

32. J'ai taché d'exposer avec toute la précision possible les inductions principales, que nous fournissent les résultats des expériences dont j'ai donné le détail: j'aurais pu en tirer un plus grand nombre, & proposer même quelques conjectures qui, sans avoir jamais été démenties par les faits semblaient au contraire parfaitement d'accord avec quelques cas particuliers, mais ne m'ayant pas été possible d'obvier aux irrégularités qui les accompagnaient quelque fois à cause de la complication des circonstances, dont on ne pouvait les délivrer; j'ai jugé plus convenable de conserver trop de réserve, plutôt que de tomber dans le défaut

faut opposé ; d'ailleurs je suis assés porté à croire que ce que nous avons dit sur ce sujet fournit des lumières suffisantes pour servir de guide à la pratique , & pour nous tirer de l'esclavage d'une *routine machinale* (a), par laquelle nous nous assujettissons sans connoissance de cause à ce que nos Prédécesseurs ont jugé à propos d'établir : s'ils avaient fait de même nous serions bien plus reculés en certains genres que nous ne sommes ! Leur exemple nous met donc en droit de pousser plus loin nos Recherches sur les choses naturelles, & de soumettre même ce qu'ils ont fait à l'Analyse la plus scrupuleuse. C'est par là qu'on parvient à découvrir la vérité .

33. Les Recherches que nous avons faites pour déterminer la chaleur qui peut enflammer la poudre, peuvent aussi nous fournir des lumières sur le développement des principes actifs, dont dépendent les effets qu'elle peut produire : La théorie chimique que M. MACQUER en a donné dans son excellent Cours satisfait amplement pour ce qui regarde les actions intestines, & les jeux d'affinité des substances, & nous renvoyons avec plaisir nos Lecteurs à cet ouvrage digne de son Illustre Auteur, nous réservant seulement de rapprocher tout ce qui peut servir à donner une idée exacte des causes, pour ainsi dire, secondaires qui concourent au développement de l'air, en vertu du-

Q

quel

(a) Bien des gens ont une idée assés obscure des termes de *théorie* & de *pratique*. L'application physique des principes généraux, & abstraits à des cas particuliers est ce, qu'on doit entendre par la première. L'action où les opérations purement mécaniques qui sont nécessaires pour cela, sont ce que nous entendons par *routine*, & ceux qui n'ont qu'un répertoire de cas particuliers sans enchaînement & sans système ne savent pas la *pratique*, & cette classe comprend le plus grand nombre des hommes dans toutes les professions. Ceux qui outre les principes fondamentaux savent encore tout ce qui est essentiel pour en faire usage, ceux là savent à proprement parler la véritable *pratique*, & ne manqueront tout au plus que de la *routine* nécessaire pour opérer avec plus de facilité. La *pratique* est donc l'art propre d'une science, & à leur tour les principes généraux & abstraits sont les sciences des arts.

quel on voit arriver les effets les plus singuliers ; nous ne nous arrêterons pas à former des conjectures pour décider si on est plus fondé à croire que l'air préexiste dans la poudre, ou s'il est produit à l'occasion de l'inflammation par le nouvel arrangement que prennent entr'elles les parties primitives, ou les élémens des composans.

34. Il est visible en premier lieu qu'il faut nécessairement un degré de chaleur tel, qui puisse fondre le salpêtre pour que la détonnation de la poudre ait lieu. 2.^o que puisque la flamme du soufre est capable de produire cet effet, toutes les fois qu'elle ne pourra pas s'exciter, la détonnation sera retardée : mais on fait par les principes chimiques que dans cette occasion le phlogistique du soufre & du charbon se sépare de sa base pour se dissiper avec l'acide nitreux, c'est donc dans le tems de ces actions & réactions des substances que se développe le fluide élastique de la poudre.

35. Il est donc clair que le développement du fluide sera d'autant plus accéléré que le salpêtre aura de facilité à se décomposer avec le phlogistique, & il n'est pas moins évident que la décomposition sera d'autant plus prompte que l'acide nitreux trouvera moins de difficulté à attaquer le phlogistique : or l'acide nitreux attaque avec plus de facilité le phlogistique à mesure qu'il se trouve moins fortement uni à sa base, ce qui arrive en effet dans le charbon où l'union n'est pas si forte que dans le soufre ; delà la raison pourquoi le salpêtre détonne plus aisément avec le charbon qu'avec le soufre, & encor plus facilement avec le foye de soufre qu'avec le charbon même. Mém. second p. 137. 145. §§. 43. 64. car le phlogistique a plus d'adhérence avec l'acide vitriolique qu'il n'en a avec les terres, mais il en a plus avec celleci qu'avec le tartre vitriolé.

36. Quelques expériences que j'ai fait sur la poudre fulminante, servent à confirmer ce que nous venons de dire,

&

& ce que j'ai avancé ailleurs Mém. second p. 145. §. 64. on me permettra d'en donner un précis.

E X P É R I E N C E .

Je fis du foye de souffre que je pilai finément avant qu'il fut tout-à-fait froid pour qu'il ne put pas contracter si aisément l'humidité de l'air, & je le mélai en doses convenables avec du salpêtre, après que le tout parut intimément broyé, j'en mis une partie sur une pêle que j'exposai au feu, & il se fit une détonnation semblable à celle de la poudre fulminante commune.

E X P É R I E N C E .

Au lieu de broyer intimément les substances ensemble dans ce second essai, je me suis contenté de faire tomber du salpêtre froid sur du foye de souffre liquéfié, ce qui produisit une fulmination un peu moindre à la vérité que celle de la précédente & de la commune, mais infiniment supérieure à la déflagration de la poudre à canon.

37. Une troisième expérience que j'ai fait sur cette poudre, sert à nous convaincre que le degré de chaleur contribue en quelque façon à la plus grande simultanéité du développement du fluide, & par conséquent au plus grand effort, & au détonnement plus violent, je l'ai dit en passant dans mon second Mém. p. 144. §. 63.

E X P É R I E N C E .

Si on mêle le salpêtre entièrement fondu avec de foye de souffre liquéfié on obtient une détonnation qui surpasse toutes les autres.

Je ne dissimulerai point que le peu de soin que j'ai eu quelquefois à prendre les précautions indispensables pour me garantir des dangers qu'on peut courir dans toutes ces expériences m'a coûté un peu cher, je dis ceci pour avertir ceux qui voudront les répéter de n'en négliger aucune.

38. L'action du feu sur la poudre est encore une circonstance qui favorise la décomposition de l'acide nitreux & du phlogistique suivant que la quantité en est plus ou moins étendue; & par conséquent l'inflammation sera d'autant plus simultanée que la flamme de celle qui a pris feu sera plus *reverberée* sur celle qui reste par la résistance de l'air ou de quelque autre corp comprimant comme nous l'avons démontré dans le premier Chapitre, or comme le développement se fait avec la même vitesse que la décomposition des substances donc le développement sera d'autant plus simultané que la reverberation de la flamme sera plus grande.

39. L'action plus ou moins grande de la poudre dépend de l'élasticité ou de la densité du fluide, qui diminueront à mesure que les obstacles qu'elle doit surmonter seront plus aisés à être dérangés, & qu'ils céderont avec plus de facilité, d'où il s'ensuit que, si le fluide peut se répandre dans un trop grand espace pendant que les développemens se font, l'effort en deviendra très-fort diminué, parceque l'action de la flamme sera moins vive, & par conséquent la succession des développemens beaucoup plus lente.

Il résulte de ceci que dans les cas dont nous avons parlé dans les notes du premier Chapitre (savoir lorsque la poudre brûle avec promptitude, & que le fluide se dilate moins) les effets sont incomparablement supérieurs à ceux qui ont lieu dans des circonstances contraires.

40. D'ailleurs outre tout ce que nous avons dit jusqu'ici pour faire voir que la différence des effets des mêmes
quan-

quantités & qualités de poudre dépend du plus ou moins de vitesse, avec laquelle le fluide se développe, rien ne peut nous fournir une preuve plus complète que les expériences que je donnerai dans le Chapitre suivant, par lesquelles je trouve que les quantités de fluide développé sont toujours dans la raison des quantités de poudre qu'on a employé, & qui se sont décomposées (a).

CHAPITRE III.

Des quantités relatives de fluide développé de différentes quantités de la même poudre.

41. **C'** Est un principe assés communément reçu que la quantité de fluide qui se développe de la poudre est proportionnelle aux quantités de la poudre décomposée; on fait de plus que le soufre & le charbon n'en fournissent point: nous sommes donc fondés à penser que le principe actif de ce fluide est contenu dans le salpêtre, & qu'il en est développé par l'action des autres substances, relativement à la proportion qu'il y a entr'elles; quoique je n'aie jamais douté de ce principe. J'ai cependant voulu m'en convaincre par l'expérience, & on ne trouvera pas mauvais que j'en donne ici un détail.

EXPÉRIENCE.

Un tuyau de baromètre de la hauteur de 36. pouces, & courbé dans sa partie supérieure communiquait à un flacon

(a) J'ai cru nécessaire d'ajouter cette expression parceque souvent il arrive que toute la poudre qu'on emploie ne prend pas feu, & cela particulièrement dans les armes à feu, car les obstacles ne peuvent pas résister au delà d'un certain terme, & il faut ou qu'ils cèdent, ou que l'arme crève. Il n'en est pas de même ici, où le feu extérieur échauffe uniformément tous les grains sans qu'il soit besoin que le feu se communique successivement, de sorte qu'elle s'embrase toute, & je suis très-persuadé que les effets en sont plus grands proportion gardée.

con dont le col était de la longueur environ d'un pied, j'en mastiquai la jonction avec de la cire d'Espagne pour plus grande commodité (a); l'extrémité du tuyau était de forme conique, & l'embouchure avait la même figure, mais elle était renversée afin que le flacon fut toujours placé de la même manière: un tuyau de verre hermétiquement ajusté tenait à la courbure de celui du baromètre, & par cette voie l'on pompait l'air de la machine, l'extrémité inférieure du baromètre trempait dans une fiole de mercure, & une planche, à laquelle on adaptait une graduation mouvante, soutenait le baromètre, & mettait l'observateur à l'abris de tout danger; la quantité de vuide était toujours la même, savoir de p. 26. $\frac{3}{4}$ environ, & pour plus grande précaution, je ne cherchai point à le pousser aussi loin que j'aurais pû, car il restait à peu près 8. ligne d'air dans le cas où j'avais fait monter le mercure à la hauteur susdite, & qui est celui où il y avait plus de vuide: je dois de plus avertir, qu'après avoir fait avec la même station autant d'expériences qu'il était possible, & dont le terme était fixé par la descente du mercure jusqu'au niveau, je changeai la station, & je les repetai de la même manière sur celle-ci, il est vrai qu'à mesure qu'il restait plus d'air la suite diminuait de termes: j'avais mesuré, & choisi enfin plusieurs flacons précisément de la même capacité pour substituer en cas de besoin: je commençai donc par bruler des quantités de poudre, qui étaient entr'elles dans le rapport des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. &c., & le mercure était à la hauteur de 26. $\frac{3}{4}$ pouces; je repetai 6. fois cette expérience avec la même station en conservant le même rapport entre les quantités, & je trouvai, que les dépressions moyennes dans l'inflammation suivaient aussi la même proportion, de même que le fluide
refroidi,

(a) On pouvait de cette façon mettre la poudre sans altérer les capacités, & en cas que le flacon eut souffert ou pouvait en substituer aisément un de ceux que j'avais mesuré.

savoir à peu près celle des nombres ci-dessus, aiant ensuite fait la station du mercure à 26 pouces & demi, & ensuite à 26 j'en eus les mêmes résultats ; je me suis servi ensuite du rapport d'1, 2, 4, 8, &c. pour les quantités de poudre que j'emploiais, & les dépressions y répondirent.

42 Enfin il est très-constant que la force où l'élasticité de plusieurs quantités d'une même qualité de poudre, & les quantités de fluide permanent sont proportionnelles aux quantités de poudre employées, savoir si elle est double, triple, quadruple &c. il se développe 2, 3, 4 fois autant de fluide, & les effets sont doubles, triples, quadruples &c. pourvû que la pression soit la même.

43 Ce que nous avons vû ci-devant sert à nous faire connaître les quantités réelles du fluide après le développement fait & après sa parfaite condensation relativement aux quantités de poudre employée, & l'élasticité de ce même fluide à l'occasion du développement : or en faisant une sous-traction, l'on aura la somme de toutes les dilatations, c'est-à-dire celle de l'air jusqu'au moment, de l'inflammation celle qu'il souffre encore dans cette occasion, & celle du fluide qui se développe, & comme l'air résidu est constant, on peut déterminer à peu près sa dilatation dans le tems de l'inflammation par la comparaison de plusieurs résultats. En effet lorsque le fluide est refroidi, la quantité d'air naturel, que l'on a laissé dans la machine, agit toujours de même, puisque la quantité en est supposée égale, au lieu que cette action est différemment altérée par la présence du feu, & je l'ai considérée sous différens points de vûe suivant que la quantité de poudre que je brûlais dans la même capacité était plus ou moins grande ; mais la dilatation de l'air qui restait dans la machine étant donnée par l'observation, on n'a qu'à la déduire, & ce qui reste comprend seulement la raréfaction que souffre le fluide, & celle qu'essuient les parties de l'air qui ont un attouchement immédiat,

médiat avec les parties enflammées, de sorte qu'on pourrait sans erreur grossière les considérer comme faisant partie du fluide qui se produit; ou si on veut l'apprécier on peut à mon avis poser la dilatation totale de l'air à celle du fluide comme 2, 3. car il est bon d'observer que le fluide est entièrement confondu dans les parties enflammées de la poudre pendant qu'à l'air la communication de la chaleur ne se fait que par couches; quoique cette estimation paraisse tout-à-fait arbitraire, je suis assés porté à croire qu'elle ne s'écarte pas trop de la véritable, mais nous n'oublierons pas de dire que dans les armes à feu elle sera moindre encore, & que l'on peut même la négliger entièrement, vû la petite quantité qu'il s'en trouve eu égard à la quantité de fluide qui se produit, & il est même très-plausible de penser que la plus grande partie en est chassée par la lumière du moment que le feu se communique, mais après tout la détermination n'étant pas trop grande les erreurs ne sauraient être de conséquence.

44 Ces expériences nous fournissent encore quelque autre induction; en premier lieu que les dilatations de la même quantité d'air qui reste dans la machine à compter du moment qu'on applique le feu jusqu'à celui où la poudre s'enflamme, sont toujours les mêmes quoique on varie les quantités de poudre; la quantité de feu qu'on applique extérieurement n'apporte donc aucun changement à cette circonstance, c'est ce qui est assés clair moyennant que la quantité d'air soit constante, & que l'arrangement de la poudre soit à peu près le même, car s'il faut un degré de chaleur fixe pour enflammer la poudre, ce même degré ne peut aussi dilater l'air que jusqu'à un point déterminé, sauf qu'on ne fasse des grandes différences qui dépendent pour lors de ce que nous avons déjà dit §. 25, d'ailleurs le feu étant vif les différences évanouissent, & le plus ou le moins n'en fait que dans les vitesses des effets. En second lieu le fluide

fluide à l'occasion de l'inflammation occupe un espace à peu près double de celui qu'il occupe étant condensé. Nous avons vu Mém. 2.^d p. 125. §. 12. que la densité du fluide dans la poudre est environ de 2128, donc en doublant ce nombre nous aurons 4256 pour la dilatation dans l'inflammation: dilatation qui est conforme autant qu'on peut prétendre avec celle que AMMONTONS & BELIDOR ont assigné.

45 De la méthode que je viens de proposer il est aisé de construire une échelle de la force du fluide de la poudre lorsque la pression est constante; j'en exposerai maintenant un autre où cette pression va en augmentant, & qui n'exigeant pas à chaque résultat un nouvel appareil me paraît plus commode: j'ai donné la description de cette machine dans le Chapitre premier p. 98. §. 5. & pour l'employer avec plus de succès à l'usage dont il question j'ai ajouté une règle graduée qui pouvait se mouvoir dans une coulisse, & qui depuis la surface supérieure du vif argent cotoyant le long tube servait à en indiquer la marche, il ne restait plus que 8 à 9 lignes d'air dans les deux parties de la machine, chaque boule contenait un grain de la meilleure poudre grainée, & j'avais soin de laisser parfaitement condenser le fluide avant que passer à l'inflammation de la poudre qui était dans la suivante: par le nombre des vibrations d'un pendule je voyais à peu près de combien la pression augmentée pouvait accroître l'inflammabilité; nous passerons sous silence les autres précautions pour ne pas tomber dans des répétitions, on n'a qu'à se rappeler tout ce que nous avons dit à l'endroit cité.

46 Les résultats de ces expériences diffèrent de ceux de l'autre parceque nous avons supprimé des conditions, & que nous en avons introduit des autres, elles s'accordent néanmoins dans celles qui sont communes, en effet nous commençons par observer que les quantités de fluide engendré sont toujours les mêmes; il n'en est pas ainsi des variations du mercure

au moment de l'inflammation , car l'intensité du feu de la poudre devenant toujours plus grande rareté d'avantage le fluide & l'air qui comprime , & de la comparaison de plusieurs termes successifs de différentes suites il résulte que la force est à peu près en raison des pressions : nous voyons aussi que la poudre acquiert plus aisément les degrés de chaleur qui lui faut pour s'enflammer , car le nombre des vibrations décroît dans une progression dont les différences vont toujours en augmentant , mais c'est une conséquence de ce que nous avons déjà fait observer.

C H A P I T R E IV.

Méthode dont je me suis servi pour mesurer l'intensité de la chaleur de différentes quantités de poudre dans le plein, & les effets qu'elle peut produire: Réflexions sur les vapeurs du Souffre, de la Poudre, des Méches & des Chandelles allumées &c. & de la méthode dont on fait usage dans les expériences sur ce sujet.

47 **L**ES sentimens des Savans semblent être partagés sur ce sujet, mais cette diversité n'est dans le fond qu'apparente , & dépend de ce que l'énoncé dans leur manière d'apprécier l'intensité du feu de la poudre est trop vague , car je ne saurai penser qu'il put y avoir lieu à différentes opinions sur une chose qui peut être assujettie à l'expérience , & je suis très-persuadé que la question proposée sous un énoncé rigoureux fera disparaître toute contradiction : quant à moi je ne dissimulerai point que je crois que cette intensité est sujette à beaucoup de modifications , & qu'elle est plus ou moins grande : 1.° Suivant que on en augmente , ou qu'on en diminue la quantité dans le même espace où l'on l'enflamme : 2.° Suivant que les composans sont entr'eux dans

dans un tel rapport, plutôt que dans tel autre: 3.^o Enfin que l'ordre ou l'arrangement qu'on lui procure peut aussi y avoir quelque part &c. & je ne doute point qu'on ne puisse l'augmenter à l'infini.

48 Ce qui est certain d'ailleurs, & que l'expérience nous apprend, c'est que le fluide en se développant occupe un espace à peu près double de celui où il est réduit lorsqu'il est condensé §. 44, donc la chaleur de la poudre dans une arme à feu ne s'écartera pas beaucoup de celle-ci; & cette donnée est assez exacte pour les problèmes ballistiques.

49 La complication des circonstances qui concourent à rendre l'intensité du feu d'une même dose de poudre plus ou moins active, & les moyens pour parvenir à la déterminer au juste, même relativement, ont été d'assez puissans motifs pour me contenter des essais dont je ferai le rapport & que je reconnais encore fort éloignés de cette précision qui servant à donner des nouvelles lumières suffit quelque fois pour bien développer un sujet, & quelque autres à former un enchaînement heureux entre plusieurs; ce que je puis dire de nouveau ne fera que l'enrichir & fournir à quelqu'un qui ait plus de loisir de nouvelles vues, & des applications plus complètes à l'avantage de la société en leur épargnant des tentatives inutiles; c'est à cet effet que j'exposerai même ce que j'ai tenté & qui ne m'est pas réussi.

50 Je me suis servi en premier lieu du thermomètre dont j'ai fait mention dans le second Chapitre de ce Mémoire p. 106. §. 15. mais à la troisième cuillerée de poudre (dont chacune était de demi once, & dont la composition était de trois parties de salpêtre une de soufre & une de charbon le tout humecté) le mercure étant bouillant le verre se fondit: au lieu de projeter ainsi la poudre dans un petit creuset j'ai préféré de substituer une fûtée de la même composition que j'ai mis dans une presse, un thermomètre

momètre était soutenu par un pied qui pouvait être baissé ou élevé à l'aide d'une vis sans fin, afin que la boule fut toujours exposée autant que faire se pouvait à la même quantité de feu, mais à peine en fut-il brûlé un tiers que le verre fut fondu; les ayant ensuite fait construire ouverts ils n'eurent pas un meilleur sort: j'abandonnai donc l'usage des thermomètres, & je ne fus pas plus heureux en employant le pyromètre, car je ne pouvais pas assujettir tellement les circonstances pour répondre à peu près de leur identité.

51 Me voyant ainsi contraint de rejeter absolument tous les moyens connus par lesquels je pouvais me flatter d'obtenir quelque exactitude j'ai tenté de trouver quelque nouvelle méthode pour me procurer au moins des limites, mais c'est ce que je n'ai pu faire non plus avec la précision que j'aurais désiré; celle dont je me suis servi est néanmoins assez commode & simple, & peut être, j'ose l'espérer, pourra-t-elle être employée une autre fois avec plus de succès.

52 Elle consiste en ce que je mis successivement des lames de différens métaux fort minces & de même poids, dans un creuset dans lequel je projettais des doses de poudre de demi once chacune, & de la composition déjà énoncée; j'étais obligé de mettre le feu à la première, & lorsqu'elle touchait à sa fin j'en projettais une autre, laquelle était de même suivie par une troisième & ainsi de suite. Les résultats que j'en ai eu sont les suivans.

Le plomb & l'étain se fondirent à la fin de la première dose.

2.^o

Le zinc s'enflamma à la moitié environ de la seconde.

3.^o

Le cuivre jaune, & une monnoie se fondirent & formèrent un bouton avant la fin de la quatrième.

4.^o

L'argent fut vitrifié à la sixième projection.

5.

Le cuivre rouge commença se fondre lorsque la sixième dose touchait à sa fin & fut entièrement fondu avant que la septième eut cessé de fuser.

6.^o

La limaille de fer parut former un amas informe à la dixième dose, mais le fond du creuset fut alors percé par un trou, d'où la flamme sortait avec une grande impétuosité, son diamètre était de trois lignes, & sa figure paraissait tout-à-fait uniforme & circulaire.

53 Quoique le degrés de chaleur ou le feu actuel soit le principal agent dans ces expériences j'avais cependant assés de fondement pour croire, que le souffre y contribuait aussi considérablement, c'est pourquoi j'ai voulu les réitérer de la même manière en employant un mélange où il n'en entraît point, & j'ai en effet trouvé quelque différence dans la facilité de la fusion, principalement pour la limaille de fer,

fer, & le cuivre car ils tardaient plus long-tems ; au contraire quelque autre tel que la monnoie se fondait plus vite, & l'argent était de même plus facilement vitrifié.

54 Je ne me contentai pas de ces deux procédés je voulus voir encor si je pouvais obtenir les mêmes effets pas la simple communication de la chaleur, & je mis pour cela les lames dans un creuset suspendu au dessus d'un petit bassin dans lequel je faisais les projection du mélange ; on sent affés que je fus obligé d'employer beaucoup plus de poudre, mais malgré mes soins celui de la limaille de fer ne put plus avoir lieu ; je dois cependant avertir que dans ce cas les effets sont plus prompts si on emploie un mélange sans souffre.

55 Je fis enfin une dernière tentative en mettant dans un petit pot (dont l'ouverture était beaucoup plus petite que le ventre & la base) une pâte faite avec du salpêtre du charbon & un peu d'huile d'olive (a), cette composition enflammée j'en réverbérai la flamme avec un soufflet & une lame d'argent plus épaisse encore des précédentes fut vitrifiée à la seconde dose, qui était de même que la première d'une demi once comme j'avais toujours fait.

56 Tout ce que je viens d'exposer sur l'intensité du feu de la poudre sert à nous faire voir qu'elle peut être augmentée en différentes manières jusqu'à l'infini, & nous n'en devons être nullement étonnés, car en considérant toutes les circonstances dont cette flamme est toujours accompagnée nous voyons distinctement tous les caractères du feu le plus violent ; en effet la vitesse ou la rapidité avec laquelle les parties inflammables se communiquent le feu ; la grande résistance que lui opposent en conséquence les parties de
l'air

(a) Il est à propos de faire observer que cette pâte doit être exposée pendant quelque tems à un feu lent, pour qu'une partie de l'huile puisse s'évaporer, car il y en a toujours de reste.

l'air qui en en empêchant une trop grande dilatation servent à en augmenter la densité, le développement successif du fluide par lequel son mouvement est accéléré, sont tous des signes non équivoques de l'activité qui le caractérise; & c'est précisément à cause de la rapidité prodigieuse avec laquelle ses parties inflammables se détruisent que le corps ambiens ne peuvent acquérir si aisément un si grand degré de chaleur.

57 Voilà un précis de mes recherches sur ce sujet, on pourrait assurément le traiter plus méthodiquement & lui donner beaucoup plus d'étendue; mais les soins & le tems qu'exigent de tels essais peuvent être employés plus avantageusement par quelque Artiste ingénieux qui soit dans le cas d'en tirer parti; car quoique la chose ne présente en elle-même au premier coup d'œil rien d'extraordinaire, elle pourra peut-être par cette même raison fournir dans le détail des circonstances dignes d'attention: je n'avance ceci qu'autant que me le permettent les observations passagères que j'ai pu faire sur les faits particuliers que j'ai exposé; d'ailleurs personne que je sache ne s'est encor attaché jusqu'ici à faire un tel examen, & si l'exactitude dans le procédé ne répond pas à la grandeur du sujet c'est parceque en premier lieu il ne tient que par incident à celui que j'ai eu en vue, & en second lieu pour les motifs dont j'ai rendu compte; il me suffit pour le présent d'en avoir donné le premier un essai, & je passerai maintenant à exposer les phénomènes que j'ai observé sur quelques sortes de vapeurs qui m'ont fait douter de l'étendue qu'on donne à la doctrine de l'absorption de l'air.

58 L'objet que nous allons donc prendre à tâche annonce l'intérêt qu'on doit avoir à le suivre de près: il s'agit d'une doctrine qui sert à rendre raison de beaucoup de phénomènes surprenans, dont la solution ferait obscure & peut-être inconnue sans son secours, elle est d'ailleurs
géné-

généralement adoptée, & j'ai même lieu de penser qu'on y a recours avec un peu trop de facilité : l'affertion des Savans les plus distingués, & les expériences sur lesquelles ils se sont appuyés & dont ils nous ont donné le détail paraissent nous mettre en droit d'y puiser les explications les plus heureuses & les plus faciles, malgré tous ces avantages j'ai observé que toutes les vapeurs, auxquelles on a attribué la propriété d'absorber & de fixer l'élasticité de l'air, n'en sont pas effectivement douées, & il m'a paru d'entrevoir que la méthode dont on a fait usage dans cette espèce d'analyse est sujette à quelques inconveniens, de la viennent les équivoques qu'on peut avoir pris : c'est ce qui m'a engagé à dire quelque chose sur ce sujet, me réservant à le traiter à part une autre fois avec plus d'étendue, en attendant quelques réflexions & des procédés plus circonspects nous mettront en état de juger de la foi que nous devons prêter à ces sortes d'expériences : je ne prétens pas refuter toute absorption, mais seulement faire voir qu'il y a des vapeurs qui pourraient sembler en être la cause quoiqu'elles ne le soient pas en effet.

59 Les procédés, que tous les Auteurs plus respectables (a) ont régulièrement suivi pour faire les expériences sur l'absorption de l'air, sont ceux, de la combustion, de la distillation, de la fermentation des substances, ou des effervescences que produisaient leur mixtion ; l'eau est le milieu qui servait à intercepter toute communication entre l'air commun des vaisseaux, & celui de dehors ; dans celles qui se faisaient par la combustion & la fermentation (b), on plaçait les matières toutes enflammées ou en fermentation

(a) HALLES, MUSCHEMBROECK, HAUKSBÉ, &c.

(b) Telles que les méches ou les chandelles allumées : le safran de Mars fait avec la limaille de fer le soufre & l'eau ; le sel volatil d'ammoniac fait avec la chaux, &c. car on fait qu'à peine ces substances sont mêlées il s'éleve aussitôt des vapeurs, &c.

tion sous les récipients, de sorte que la quantité d'air absolu qui s'y trouvait était moindre de la quantité qu'il y en aurait eu si on les avait enflammé par quelque moyen dans le vaisseau même, toute communication étant ôtée, ou si on les eut avec cette précaution disposées à la fermentation.

60 Une autre circonstance dont je n'ai pas encor pû m'assurer parfaitement, mais que j'ai assés de fondement pour ne devoir pas dissimuler, puisqu'elle peut toute seule rendre douteux les résultats des expériences, c'est qu'il m'a paru de voir que l'air étant beaucoup raréfié peut s'insinuer dans les parties de l'eau, de façon que bien des fois l'absorbion ferait l'ouvrage du milieu qui doit intercepter: quoique on n'ignore pas que l'eau peut se charger d'air on fait aussi qu'elle ne peut en recevoir qu'une quantité déterminée, mais j'ai eu occasion d'observer comme je l'ai dit que cette vérité peut souffrir des restrictions.

61 Voici l'expérience qui m'a donné lieu de penser ainsi.

E X P É R I E N C E .

J'ai plongé dans un vaisseau de la hauteur de deux pieds environ un tube de verre de six pieds de long, & du diamètre au moins de six lignes auquel on avait hermétiquement ajouté un flacon, ou qui était garni d'une boule soufflée dans le même verre & qu'on avait précédemment approché du feu pour en chasser une partie de l'air avec plus d'aisance; dès que la machine avait aquis la température & que l'eau était montée à une station fixe dans le tube je marquais avec un fil ciré le point d'élévation, & comme on ne pouvait pas approcher de la boule, même à quelque distance sans causer quelque raréfaction à l'air qui y était contenu, & faire par conséquent baisser l'eau dans le tube, je laissais derechef reposer la machine pendant quelque tems en m'en éloignant comme auparavant, & j'examinais ensuite si le fil répondait avec précision au niveau de l'eau, toutes ces

précautions étant prises j'approchais une flamme par degrés de la boule, & aussitôt qu'elle était un peu échauffée & qu'elle ne risquait plus de se fendre je lui ai fait subir une chaleur telle qui fit précipiter la dépression de l'eau, laquelle cependant n'atteignit point à l'extrémité du tube, afin que l'air n'en fut point chassé: je m'écartai pour lors de la machine de même que j'avais fait auparavant & j'ai vû quelque tems après l'eau s'élever dans le tube au-dessus de la marque que j'avais fait.

62 Cette expérience quoique très-simple exige beaucoup de circonspections & de soin, outre ceux que nous avons déjà suggerés il est bon d'ajouter, qu'il faut la faire dans une chambre où les variations dans l'atmosphère ne soient pas si sensibles, il n'y faut pas du feu, ni qu'elle soit fort ventilée, on ne s'y arrêtera qu'autant qu'il est indispensable, il faut y laisser le flambeau allumé jusqu'à ce qu'on ait fini d'observer; on doit enfin avoir un baromètre & un thermomètre fort exacts pour plus grande sûreté; cependant malgré toutes ces précautions, elle ne réussit pas toujours, apparemment à cause de la facilité de l'eau à se mouvoir & que souvent les variations peuvent se compenser, elle a néanmoins réussi vingt fois pour une; avec tout cela je me réserve à faire d'ultérieures observations.

63 Ce que nous venons de dire suffit pour nous convaincre que cette méthode est incertaine & même insuffisante, pour faire ces sortes d'expériences, puisque elle peut aisément induire en erreur, car ne sachant pas de combien l'air a été raréfié dans le tems qu'on a intercepté la libre communication entre celui qui est enfermé dans les vaisseaux & l'extérieur, ignorant la quantité qui peut s'en être infinué dans l'eau, on ne peut dire avec fondement qu'il y ait eu d'absorption: quelques substances que j'ai soumis à un procédé plus simple, & qui réduites en vapeurs, n'ont point absorbé d'air, quoique traitées de la manière qui a été adopté
jusqu'

jusqu'ici , passent généralement pour avoir une telle propriété, à servi à me confirmer dans les soupçons que j'avois formé.

64 Je commencerai par rendre compte de la manière dont je m'y suis pris pour obtenir le même effet en les assujettissant à un procédé délivré de tout équivoque , ce détail sera suivi de celui des substances que j'y ai soumis, & de ce qui en est résulté.

65 Je mettais les substances qui devaient être enflammées dans des flacons par le moyen d'un bout de tuyau de communication, qui était hermétiquement attaché à côté de leurs cols, & dont l'extrémité était jointe de la même manière à un long tuyau courbé en forme de baromètre qui contenait du mercure & servait à en faire les fonctions; suivant l'espèce de flamme qui devait s'y exciter, & le moyen que je devois employer à cet effet, je laissois tout l'air dans la capacité où j'en faisois sortir une partie, en me servant du feu comme j'ai déjà dit; l'ouverture latérale par laquelle j'avois mis les substances étant bouchée avec de la cire d'Espagne, j'excitais la flamme ou avec le miroir ardent comme pour le soufre, ou avec une flamme, je conservois ensuite ces machines en les examinant plusieurs fois le jour, & j'avois mis au même endroit un baromètre, un thermomètre & un flacon fermé, & portant à son extrémité un tuyau recourbé avec du vif argent ce qui faisoit une même machine & dans le fond un baroscope.

66 Comme je ne pouvois pas entreprendre un travail de longue haleine, je me suis contenté de choisir le soufre, la poudre & de la méche pour voir ce qui leur arrivait; j'enflammai le soufre avec une lentille, & j'ai vû de même qu'OLAUS BORRICHUS une fumée qui passait au travers des porres du verre à l'endroit où tombent les rayons rassemblés par le foyer, mais le mercure ne fit plus aucun mouvement depuis que l'air du flacon fut refroidi; dans celui où j'avois mis deux grains de poudre j'avois environ

quatre pouces de moins d'air, je la mis en feu à l'aide de la flamme d'un flambeau, & après une demi heure environ aiant marqué le point d'élévation, le vif argent fut immobile, jusqu'à ce qu'il arriva des variations dans l'atmosphère; la même chose est succedée aux méches.

67 Je n'en donne pas d'avantage pour le présent faute de tems: quant à ce qui regarde les chandelles allumées, M.^R le D.^R CIGNA notre ami & savant confrère rapportera les expériences que nous en avons fait; si mes devoirs me le permettent je me propose de faire des nouvelles recherches sur ce sujet, de renouveler les expériences qui semblent plus rigoureuses, & particulièrement le Chap. VI. de la Statique des Végétaux, digne ouvrage du Célébre feu M.^R HALLES.

68 La délicatesse du sujet ne me permet pas d'ailleurs de dissimuler, que l'on ne saurait être assés sur ses gardes pour obvier aux moindre petits inconveniens, car ils deviennent très-essentiels: en effet avec quelle facilité l'air ne se rarefie-t-il pas? & son élasticité augmentée fait qu'on ne peut pas s'appercevoir que la quantité absolue dans la même capacité est diminuée, ces réflexions posées on conviendra de la facilité qu'on peut avoir à se tromper.

C H A P I T R E V.

Examen de la Poudre sans Souffre.

69 **C**E Chapitre est particulièrement destiné à quelques réflexions sur l'usage que l'on peut faire dans la pratique de la poudre sans souffre. J'avais déjà établi dans mon second Mémoire quelques uns des principes sur lesquels elles sont appuyées, je pense qu'en y joignant ce qu'on lit dans le Chap. 2.^d & 3.^c de celui-ci nous pourrons être en état d'apprécier d'avance les effets qu'on en doit attendre, sans se jeter avec-

aveuglément dans des essais toujours couteux & trop incertains quand ils ne sont pas appuyés sur la théorie. Je dois au reste avertir ici que l'Auteur de l'article *feux artificiels* dans l'Encyclopédie est le premier qui ait proposé d'appliquer cette poudre à l'usage de l'Artillerie; je l'ignorais quand j'écrivis mon second Mémoire, & je n'ai pu en faire mention que dans une note: je suis au reste bien éloigné de lui accorder tous les avantages que cet Auteur semble en attendre.

70 Il s'agit à la vérité de ce que nous avons dit jusqu'à présent qu'on peut avec une moindre quantité de cette poudre que de la commune chasser un projectile jusqu'à une distance donnée, ce qui peut faire une différence assez considérable dans la consommation de la poudre, & plus encore dans la dépense, puisque toutes choses d'ailleurs égales cette espèce de poudre est moins dispendieuse. Si cependant on réfléchit sur la cause de la plus grande force de cette poudre on verra bientôt qu'il résulte de cet avantage même des inconvéniens assez considérables.

71 La force de la poudre en général ne peut dépendre que de la quantité du fluide qui s'en développe, & de la plus grande vitesse & simultanéité avec lequel se fait ce développement. Chap. 2.^d §. 39. 40. On voit assez que la supériorité de cette poudre sur l'autre ne peut dans le cas dont il s'agit être l'effet d'une plus grande quantité de fluide, puisque le salpêtre se trouve dans cette charge en moindre quantité que dans l'autre: elle dépend donc absolument de la plus grande vitesse avec laquelle se fait la propagation du feu & le développement du fluide Chap. 2.^d §. 38. en sorte que dans le cas d'un effet constant les quantités des différentes poudres doivent en quelque sorte être en raison inverse de cette même vitesse.

71 Cela posé le dérangement dans la direction ou dans le pointement d'une pièce d'Artillerie ne pouvant être occasionné

sioné que par l'action du fluide élastique qui fait par son développement reculer le canon dans une ligne différente de la direction qu'on lui avait donné, soit à cause de l'irrégularité de la pièce plus riche de métal d'un côté que de l'autre, soit par l'imperfection des roues, de la plate forme ou de quelque autre cause semblable : il est aisé de voir que ces dérangemens seront plus considérables dans le cas d'un développement plus prompt.

73 En effet en supposant que l'action des deux charges, ou la vitesse qu'elles impriment au boulet soit la même il est évident que si le canon ne souffrait pas dans son recul la résistance du frottement, il est évident dis-je que les dérangemens dans la direction seraient absolument les mêmes : mais il n'en va pas ainsi si nous voulons faire attention à ces résistances, car l'expression de l'élément de la vitesse avec laquelle la pièce est poussée en arrière n'est plus alors proportionel à la pression qu'exerce sur elle le fluide élastique, mais à cette même pression diminuée d'une autre quantité qu'on peut supposer proportionelle à la vitesse du recul à chaque instant : or si dans cette hipotése on cherche au moyen du calcul intégral l'expression générale de cette vitesse, en faisant, comme la nature du Problème le requiert, que cette vitesse fut la même quand le fluide élastique cesse d'agir sur le canon, fût la même dis-je quelle que soit l'élasticité du fluide, ou ce qui revient au même qu'on suppose que cette vitesse doit être la même si on n'a pas égard aux résistances, on la trouvera toujours plus petite quand l'élasticité est moindre (a) d'où il est aisé de conclure

(a) Une réflexion bien simple pourra aider à concevoir sans calcul cette vérité. (Fig. I. Pl. I.) Quelle que soit la loi du développement du fluide élastique il est visible que les vitesses des boulets chassés par les deux différentes charges pourront à chaque instant être représentées par celle de deux corps qui descendraient librement le long de deux courbes quelconques AG, AQ; & que puisqu'on suppose les deux portées égales

clure que le recul & par conséquent le dérangement du pointement sera toujours plus grand pour une poudre plus violente quoique les portées soient égales.

74 Il est évident que ce que nous venons de dire peut également s'appliquer au cas où le bouchon introduit dans le canon avec violence fait une plus grande résistance au fluide, un autre inconvénient fort considérable dont nous avons fait mention plus haut, Chap. 1.^r p. 102. en note c'est le péril de faire crever plus facilement les pièces en se servant de la poudre sans souffre, je me contente pour cela de renvoyer à l'endroit cité.

75 Je passe à décrire les défauts de cette poudre qui ne dépendent pas comme ceux dont nous venons de parler de la force avec laquelle elle se développe, mais plutôt de la nature des principes dont elle est composée. Plusieurs expériences que j'ai fait sur cette poudre à différentes reprises & par des méthodes diverses m'ont convaincu qu'elle s'enflamme beaucoup plus difficilement que la poudre commune, M.^r le Marquis BIRAGUE dont la sagacité & surtout

l'amour

égales ces courbes doivent être terminées par l'horizontale BQ. Il est encore évident que si l'on fait abstraction du frottement, les vitesses du canon dans son recul à chaque instant seront proportionnelles à celles des boulets, & par conséquent encore à celles des corps qui descendent dans AG & AQ. Cela posé pour trouver quels changements le frottement peut causer aux vitesses des reculs dans ces deux cas. Imaginons que ce sont ces corps eux-mêmes qui éprouvent cette résistance dans leurs mouvement selon AG & AQ, & supposons pour un moment qu'ils aient une vitesse égale aux points D, E (supposition qui est vraie en effet pour le point A où la vitesse des deux corps est nulle) il est clair en tirant là ce infiniment proche de CE que les résistances qu'éprouvent ces corps étant proportionnelles aux vitesses & par conséquent égales en DE elles agiront plus sur le corp qui se meut selon AQ, puisque $Ee > Dd$. Donc la vitesse du corps qui se meut dans AQ sera toujours plus petite dans le cas du frottement, que celle qui se meut dans AG quand tous les deux seront parvenus à une horizontale quelconque BQ; & par conséquent quand l'action des fluides cessera entièrement sur le canon, la vitesse du recul sera plus petite quand la charge sera plus lente à se décomposer, même dans le cas où ces reculs seraient égaux en faisant abstraction de ces résistances, & c'est là à peu près le cas que nous avons supposé des deux portées égales.

L'amour des sciences font assés connus a été présent à plusieurs des essais que j'ai fait sur cette matière. Il est vrai qu'on pourrait en quelque sorte remédier à cet inconvénient en se servant d'un charbon plus léger, mais il est facile de s'apperevoir qu'étant dans ce cas nécessaire d'employer une plus grande quantité de charbon pour procurer l'entière décomposition du salpêtre, cette poudre perdrait alors beaucoup de cette force, qui fait son unique mérite. On déduit facilement de là que la force de la poudre est toutes choses d'ailleurs égales toujours proportionnelle à la plus prompte décomposition du salpêtre, & par conséquent à la difficulté qu'elle a de prendre feu (b).

76 On fait combien le grainage est nécessaire à la poudre en général pour l'usage de faction & celleci le soutient difficilement, car quoique on ait différentes méthode de la rendre propre au grainage elles sont toutes impraticables en grand (c).

77 En-

(b) Comme le charbon n'est composé que par l'union d'une substance inflammable à des parties terrestres, il s'ensuit naturellement que la différence dans la qualité du charbon consiste dans le rapport où ces substances se trouvent combinées entr'elles: cela posé il en doit résulter des différences dans l'inflammabilité & dans l'action qu'il peut exercer sur le salpêtre, d'où il est évident qu'il doit s'en trouver une espèce, telle où ces deux propriétés soient les plus grandes possibles; & ce serait celle qui servirait avec plus de succès dans les armes à feu, l'expérience peut l'assigner avec facilité; d'ailleurs il n'est pas moins aisé de déterminer par ce moyen celle qu'on doit préférer dans les différents usages qu'on se propose. La quantité de charbon nécessaire pour procurer la totale décomposition d'une quantité de salpêtre doit donc être déterminée relativement à sa qualité.

(c) CASIMIR SIMIENOWICZ dans son Grand Art de l'Artillerie rapporte la méthode dont les Payfans Cosaque font usage pour construire la poudre. Elle consiste à mettre les doses convenables de salpêtre, de soufre & de charbon dans un pôt avec de l'eau qu'on fait bouillir jusqu'à ce que les substances soient épaissies par l'évaporation de l'eau; ils passent ensuite cette pâte au tamis & la réduisent en grains. Cette manoeuvre il faut l'avouer est fort commode, parceque on peut faire de la poudre en fort peu de tems & on peut épargner les moulins, de même qu'un nombre d'opérations qui sont indispensables dans celle qu'on fabrique communément, mais elle est sujette à des grands inconvéniens: car on ne peut la faire en premier lieu qu'en petite quantité,

77 Enfin cette poudre attire d'avantage l'humidité de l'air inconvenient très-considérable sans doute, puisqu'elle est par là incapable d'être conservée long-tems dans les magasins. D'ailleurs elle sâlit & ronge extrêmement les armes à feu, parcequ'il résulte de sa décomposition un alkali fixe qu'on fait être un des corrosifs les plus violens, & qui lorsqu'il s'humecte à l'air, ronge avec promptitude & avec une grande facilité les métaux.

78 Il ferait donc nécessaire d'ajouter à la poudre sans soufre une substance, qui dans le tems de sa décomposition, se fait de cet alkali & forma avec lui une substance neutre: or c'est précisément une des fonctions du soufre dans la poudre commune, qui sert aussi à la délivrer par sa viscosité de l'inconvenient d'attirer si facilement l'humidité de l'air, ce qui comme nous l'avons vû plus haut est un des défauts les plus essentiels de la poudre sans soufre.

79 Répiloguons enfin ici les raisons que nous venons de rapporter pour préférer la poudre dont on se sert aujourd'hui à celle

& en second, parceque par une manœuvre telle que nous venons de l'exposer, la poudre que l'on fait est beaucoup moins forte, & la manufacture en est plus dangereuse, outre qu'elle requiert plus de soins & de circonspection de la part des Ouvriers, & je crois aussi que la main d'œuvre en ferait plus couteuse; sans entrer cependant dans des telles discussions, je donnerai un détail des moyens dont je me suis servi pour délivrer cette méthode de ses inconveniens, laissant à part celui de la manufacture en grand, puisque la chose est absolument incompatible. Premièrement au lieu d'eau j'ai une fois substitué du vinaigre, & une autre fois de l'urine, parceque principalement le vinaigre ne fait pas une dissolution intime du salpêtre comme fait l'eau, & attaque plutôt le charbon, de manière que le mélange est plus exact & uniforme, car les substances ne peuvent pas se séparer si aisément: le vinaigre ensuite contenant du phlogistique loin de délayer celui du charbon contribue en quelque façon à le rendre meilleur; la même chose à lieu avec l'urine. Mr. le Chev. de ROBILANT Major d'Artillerie & Inspecteur Général des Mines de S. M. dont le mérite, le savoir & l'assiduité avec laquelle il cultive les différens genres des sciences sont également reconnus, m'a communiqué des vûes qu'il avait formé sur ce sujet, qui ne pourraient être que fort utiles & instructives, & il est porté à croire qu'on peut se servir avec succès du vinaigre pour humecter la poudre lorsqu'on la manufacture dans les moulins; quant

celle que nous venons d'examiner , & foumettons-les d'un coup d'œil au jugement du Lecteur éclairé & impartial.

80 En premier lieu le soufre par la facilité qu'il a de s'enflammer la rend plus propre à l'usage de toutes les armes à feu , & si son développement est moins prompt c'est moins un défaut dans presque toutes les circonstances qu'un avantage réel puisque nous avons fait voir qu'un développement trop simultané ruine facilement les armes à feu , & rend les pointemens trop incertains ; il empêche outre cela l'action de l'alkali fixe, sur les métaux dont elles sont faites , en formant avec lui lors de la décomposition du tartre vitriolé (*d*); enfin le soufre par sa viscosité rend le grainage facile à se faire & à se soutenir , & empêche la poudre d'attirer trop facilement l'humidité de l'air , ce qui la rend supérieure à la poudre sans soufre, même pour l'usage des mines où les autres inconveniens de cette dernière pourraient être considérés comme des avantages réels.

à moi je conviens non seulement avec lui pour le vinaigre en particulier , mais j'opine pour tous les liquides qui contiennent du phlogistique & dont la partie aqueuse peut s'évaporer avec facilité ; quoique en puisse dire quelque Praticien par routine. 2. Je ne voulus pas me servir d'un trop grand degré de chaleur dans l'évaporation , parce que la séparation des deux composans aurait été par là facilitée , & je mis à cet effet une fois le pôt au bain marie de 60 à 70 degré de Réaumur ; & une autre le petit chaudron fut mis à feu nud avec un thermomètre qui en touchait le fond &c. ; 3. je broyai aussi sans discontinuer les substances avec une spatule de bois , & lorsque la matière était bien épaissie , je levais le chaudron du feu en continuant à broyer jusqu'à ce que la pâte me parût suffisamment desséchée & propre au grainage , je l'étendis pour lors sur une planche & je la passai ensuite au tamis ; les poudres sans soufre que j'ai fait de cette façon étaient pour le moins aussi fortes que celle que j'ai fait en la broyant sur une pierre comme dit Mr. PERRINET d'Orval , où en la faisant piler pendant dix heures dans un mortier , elle avait même l'avantage de soutenir mieux son grainage , & je ne me suis aperçu d'aucune différence asés considérable , quant à cette propriété , entre celle-ci & la commune ; mais nous en reviendrons toujours à conclure , que cela ne pouvant se faire qu'en détail , & eu égard à quelques réflexions que nous avons déjà fait , elle ne parait pas propre à l'usage ordinaire.

(*d*) Loin d'obvier avec cette poudre à l'évasement des lumières comme je l'avais soupçonné. Mém. second p. 145. §. 57. on le facilite , ainsi que nous venons de le voir.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De frigore ex evaporatione, & affinibus
phoenomenis nonnullis.

DE thermometrorum variis liquoribus madentium re-
frigeratione ex inflato vento nonnulla in superio-
re Tomo protulimus (a) eorum nescii, quae jam-
dudum celeberrimus CULLEN hoc in argumento praestiterat;
qui non modo egregiis experimentis doctrinam hanc orna-
vit, verum etiam hujusmodi phoenomenorum causam inge-
niosè est assecutus. Hujus ego luculentissimam, quam po-
stea cognovimus, theoriam (b) cum nostris experimentis
contuli; & nonnulla in his, cum minus forte accurate per-
acta, tum novam in hac disquisitione viam patefactam esse
intellexi. Quare opportunum duxi in eadem experimenta
operam diligentiorè impendere, quaeque mihi observare
contigit, eà hic exponenda adgredior.

1. Observavit clarissimus CULLEN non aqua solum (quod
a MERANO fuerat animadversum (c)) sed & aliis liquo-
ribus, qui cum ambiente ad eundem caloris gradum com-
positi essent, perfusa thermometri bulla, liquorem in ther-
mometro deprimi, & tamdiu deprimi, quamdiu thermo-
metri bulla exsiccata sit, tumque, si iterum madefiat, adhuc
inferius descendere (d), eoque magis, caeteris paribus, quo
magis liquor, quo bulla perfunditur, volatilis est (e), &
descen-

(a) In comment. pag. 20. 21.

(b) In specimin. observ. physic. & litterariar. Societ. Edimburg. edit. anno
1756. tom. 2. pag. 145. quam dissert. gallic. primum vertit. Cl. Roux
in lib. cui tit. *Recherches historiques & critiques sur le refroidissement des
liqueurs.* Egregius hic liber sub finem anni 1759. nobis demum notus
fuit cum sub initium ejusdem anni specimina nostra edita fuissent.

(c) In dissert. de Glacie edit. 1749.

(d) *Recherches* pag. 97. & sequent.

(e) *Ibid.* pag. 99. 100. 101.

descensum majorem esse in vacuo, quam in aperto aëre, ex quibus non immerito conclusit liquoris thermometrici descensum ex evaporatione repetendum esse, eamque non solum vento accelerari, & augeri (*f*), sed & in rariori aëre majorem esse, cum ibidem liquor thermometri magis deprimatur (*g*).

2. Qua tamen in re exceptionem hanc laudatus Auctor adnotavit, quod acida mineralia *concentrata*, quibus thermometrum madefit, non modo liquorem in tubo non deprimerent, quinimmo valde elevarent; idque ex *concentrati* acidi cum humido aëreo calefactione repetendum existimavit (*h*), cum observaverit eadem acida duplo aquae diluta contrarium effectum praestitisse (*i*); quae quidem Cl. Viri sententia experimento a nobis allato confirmari videtur: observavimus namque oleum tartari *per deliquium*, quod nec humidum aëreum absorbere, nec nisi difficillime correptam aquam per vapores dimittere potest, thermometro nullam mutationem induxisse. Equidem narravimus olea tum expressa, tum stillatitia thermometri liquorem ad majorem altitudinem elevare; at postquam in CULLEN experimentis olea etiam stillatitia (*k*) liquoris thermometrici descensum praestitisse novimus, repetitis majori diligentia experimentis, & sensibilibus thermometris adhibitis (*l*) experti revera fuimus ab oleis quoque essentialibus liquorem thermometricum deprimi, minus tamen, quam ab alio quovis liquore

(*f*) Si humida thermometri bulla vento ejusdem temperaturæ exponeretur liquorem in tubo deprimi docuerat olim MUSSCHEMBROECK *essai de physique* §. 962. quæ jam ab anno 1739. gallico sermone conversa, & edita fuerant.

(*g*) Recherches pag. 104. 105.

(*h*) Ibidem pag. 102.

(*i*) Ibidem loco cit. fere majus frigus quam aquam excitasse; non vacavit explorare, an minus dilutum eundem effectum producturum esset pag. 102.

(*k*) Recherches pag. 100.

(*l*) Thermometro aëreo CULLEN usus est pag. 99.

quore (ut laudatus Auctor adverterat), olea autem expressa vix ullam mutationem parere, maximeque dubitandum esse ne alias observata elevatio, tum adhibiti olei *essentialis* vetustati, tum alicui, ex ejus, qui follem agit, propinquitate communicato calori, adscribenda sit (*m*), ut propterea expressa olea, quae nihil evaporant (*n*) thermometrum non immutent, quod cum CULLEN theoria egregie consentit.

3. Caeterum calorem thermometri acido minerali aspersi ex absorpto humido aëreo produci multa confirmant. Et primo quidem, ut GOULDIUS ostendit, acida *concentrata* in vasis apertis aëri exposita, pondere augentur (*o*), quod ponderis incrementum non aliunde, quam ex absorpto humido atmosferico repeti potest; & quemadmodum pondus paullatim minus augetur, prout humido atmosferico eadem acida saturantur, ac tandem omnino augeri desinit, ita immersa thermometra in acida concentrata majorem in his, quam in ambientibus corporibus calorem ostendunt, qui tamen paullatim imminuitur, ut tandem ambientium corporum calori exaequetur, quod facile est experiri. Acida demum mineralia eo magis intra datum tempus pondere augentur, quo ampliorem habent superficiem aëri expositam (*p*); ita oleum vitrioli, quod in vase cylindrico aperto quatuor tantum gradibus immersum thermometrum calefaciebat, educto thermometro, ut jam per amplam bullae thermometricae superficiem adhaerens oleum ad aërem

(*m*) Thermometrum spirit. vin. aceto, lacte, aqua aspersum refrigerari donec bulla exsiccata sit, contra aspersum oleo olivarum, aut lini calefieri, se observasse affirmat Anonimus ad Auctorem *Du London Kronike*, & prioris phoenomeni causam perspicuam esse, nempe evaporationem, alterius obscuram. Vid. *Journal Etranger Janvier 1761. Nouvelles d'Angleterre* §. 8. pag. 110.

(*n*) Diutissime aëri exposita ponderis jacturam ex evaporatione nullam patiuntur. Vid. *Encyclopéd. article Evaporation*.

(*o*) *Transf. philosoph.* anni 168. $\frac{3}{4}$ n. 156. art. 3.

(*p*) *Ibid.*

rem pateret, septem infuper gradibus ipsius calorem augebat; ex quo pater eadem lege acida mineralia a contactu aëris calefieri, qua pondere augentur; proindeque aucti caloris eandem causam esse, ac aucti ponderis, absorptum videlicet aëris humidum (*q*), & ex hac quidem sola causa pyrophori hombergiani incensionem repetendam esse nuper Vir Cl. demonstravit (*r*).

4. Ex allato simplicissimo experimento, quod acida *concentrata* ex aëris humido incalescant, miri cujusdam phoenomeni ratio eruitur olim a GEOFROIO propositi (*f*), quod nempe, si oleum vitrioli in salem ammoniacum infundatur, effervescentia contingat, ex qua immersum thermometrum refrigeretur, intereadum thermometrum miscelae vaporibus expositum admodum incalescit; notum siquidem est ex hac miscela acidum marinum extricari eo magis *concentratum*, quo oleum vitrioli est vehementius (*t*). Itaque ex hujusmodi acido marino in vapores abeunte, & ex atmosphaera humido incalescente suspensi thermometri calor est repetendus. Et revera experiundo didici calorem eo semper minorem esse, quo adhibitum oleum minus est *concentratum*, ut tandem ex oleo aqua prius saturato in salem ammoniacum immisso halitus erumperent, absque ullo sensibili calore; cum nempe ex acido marino diluto hujusmodi halitus fierent, quod cum atmosphaerae humido incalescere non poterat.

5. Ad refrigerationem immerfi thermometri, quod spectat, eandem solutioni salis ammoniaci in aqua olei vitrioli adscribendam esse multa suadent (*u*). Nam primo
exper-

- (*q*) CULLIN in perfecto vacuo experimentum instituire decreverat, ut quaestionem accurate resolveret pag. 102.
- (*r*) SUVIGNY Mémoires de Mathématiques & de Physique, présentés à l'Académie des Sciences tom. 3. pag. 180. & sequent.
- (*f*) Mémoires de l'Académie 1700. pag. 113.
- (*t*) MAQUER Chymie pratique tom. 1. pag. 123. tom. 2. pag. 536.
- (*u*) Generatim acidorum mineralium refrigerationem ex admixtis talibus variis ab eorumdem salium solutione in aqua, qua acida diluuntur, repetendam esse opinatus est. Cl. Roux p. 42. 43.

expertus sum, quo oleum vitrioli aquosius est, caeteris partibus, eo majorem exoriri frigoris gradum; contra si summe concentratum sit, non frigidam, sed calidam effervescentiam cum sale ammoniaco efficere, quod & ab aliis jam pridem indicatum videtur (x). Deinde sales alii, alkalici volatiles (y), nitrum (z), aliique uno verbo omnes, qui aquam refrigerant, oleum vitrioli dilutum similiter refrigerant; *concentratum* calefaciunt, ut tamen, quo frigori cum aqua faciendo minus apti sunt, quam sal ammoniacus, eo etiam dilutius oleum vitrioli exoptulent, ut cum eodem frigus producant (a). Caeterum frigus in proposito experimento ex effervescentia neutiquam esse videtur; siquidem non solum gignitur a salibus, qui cum acidis effervescent, verum etiam ab iis, qui hac dote carent (b), id equidem prae-

- (x) „ Ab excellentibus, ut audio, Florentinis Academicis observatum est non „ incallescere oleum vitrioli; sed frigescere sali ammoniaco adjectum; „ neque absimile fuit, quod in rectificato spiritu sulphuris per campam „ nam factò observavi: effectum tamen longe alium reperi, quando „ Florentinos imitatus experimentum cum oleo institui. „ BOYLE de caloris, & frigoris orig. mech. exper. 23. pag. 314. At ROUVIERZ aperte docuit oleum vitrioli dilutum quidem a sale ammoniaco refrigerari, *concentratum* contra admodum calefieri. Vid. *Recher.* pag. 43. in not.
- (y) Ex oleo vitrioli duodecuplo aquae diluto, & sale volatili salis ammoniaci effervescentia frigida (BOYLE loc. cit. exp. 5. pag. 296.) ex oleo vitrioli non diluto, & eodem sale volatili calida effervescentia orta est. Id. *ibid.* exp. 7. pag. 296. 297.
- (z) Drach. iij. olei vitrioli cum drach. j. nitri pulverati calorem gr. 3. auxerunt. Drach. iij. ejusdem olei triplo aquae diluti cum drach. ij. nitri calorem gr. 9. minuerunt. MUSSCH. in *Cement.* p. 209. 210. §. 229. collect. Acad.
- (a) Hinc idem oleum vitrioli, quod ex sale ammoniaco refrigerabatur in MUSSCHAM. experimentis (l. c. §. 230.) ex nitro incalcescebat, nisi dilueretur (vid. not. praeced.) & ex sale marino (GEOFROY l. c. pag. 113.) Revera aqua ex sale marino gr. 2. tantum, ex nitro gr. 8, ex sale ammoniaco gr. 12. refrigerabatur in ELLERI experimentis (Acad. de Berlin 1750. p. 85.)
- (b) Sic ex spiritu nitri, & nitro frigus, tum ex aceto, & salibus quibuscumque aquam refrigerantibus (GEOFROY l. c.) contra dilutissima acida cum spiritibus alkalicis, id est cum salibus alkalici jam aqua solutis effervescent quidem, sed frigus non producant (BOERH. elem. chem. tom. 1. p. 202. exp. 3.

praestare videtur effervescentia, ut ex intestino motu promptior fiat salis ammoniaci intra aquam, qua acidum diluitur, solutio, sicque frigus nonnihil intendatur; notum namque est ex Cl. BECCARII (c) experimentis salia neutra intra aquam, si quiescuerint vix, ac ne vix quidem solvi, propterea effervescentia salis solutionem accelerando non fecus, ac agitatio, quae bacillo fit, frigoris gradum auget (d).

6. Quibus positis jam corrumpit Physicorum quorundam hypothesis, qui per effervescentiam ignem ex miscela fugari opinati sunt, propterea miscelam ipsam refrigerari, interea dum expulsus cum vaporibus ignis iisdem expositum thermometer calefaceret (e). Si enim theoria staret, vapores eo calidiores essent, quo miscela frigidior evadit; at contra, ut diximus, in summa olei vitrioli vehementia, non refrigeratur, sed calefit miscela, & tamen vapores eo tempore maxime calidos emittit; contra si oleum vitrioli dilutissimum sit, licet maxime miscela frigeat, vapores tamen sensibilem calorem non habent; & generatim aqua, qua oleum vitrioli diluitur sicut effervescentiam eo frigidior reddi, quo copiosior est, ita vapores non calidiores, ut ex proposita theoria sequeretur, sed frigidiores efficit. Praeterea sunt aliae effervescentiae frigidae, qualis est effervescentia salis alkalini volatilis cum acido quovis, & cum ipso oleo vitrioli, quae calidos halitus non emittunt, quod nullum inde acidum *concentratum* expellatur, ex quo iterum evincitur calorem halituum non expulso igni, quod omnibus miscelis frigoriferis commune esset, sed *concentrationi* erumpentis acidi tribuendum esse. Hinc halitus, qui ex
sale

(c) Comment. Bonon. tom. 1. p. 405. in opusc.

(d) BOYLE transaction n. 15. art. 1. ann. 1666.

(e) MUSSCHEM. in Cement. p. 214. n. 10.

fale marino; & oleo vitrioli admixtis copiosi erumpunt (*g*) calidos similiter reperi, licet non ex frigida, sed ex calida effervescentia nascantur: enimvero oleum vitrioli ex fale marino idem acidum *concentratum*, quod ex ammoniaco in halitus expellit, qui propterea pariter incalescunt.

7. Sed ut ad refrigerationem ex evaporatione, a qua non nihil digressi sumus revertamur, quaesitum est, num liquida vasis apertis infusa, evaporatione superioris superficiei frigidiora evadant. Id in vacuo contingere Cl. CULLEN, experimenta invicte demonstrant (*h*): in aperto autem aëre ejusmodi proponitur experimentum, ut non satis constans videatur. Nam Cl. BEAUMÉ, nisi liquidum immediate thermometro incumbat, nullam mutationem ab ejus evaporatione induci affirmat, & in cucurbitis, aut in lagenis vitreis sive obturatis, sive apertis aether continentibus thermometrum paullo profundius in ipsum immersum, ad temperaturam componi affirmat (*i*). At alibi indiscriminatim docet, si aether tum vitriolicum, tum nitrosum in vitreis vasis reponatur immerfi thermometri liquorem 4.º infra temperaturam deprimere, inque ea depressione servare (*k*). Alibi demum thermometrum mercuriale in aether nitrosum immisum 1.º; thermometrum autem ex vini spiritu $\frac{1}{2}$ º deprimi affirmat (*l*). Ego in cylindricis vasis pollicem parisinum diametro patentibus, & spiritum volatilem salis ammoniaci calce paratum continentibus, thermometrum 4.º circiter refrigerari observavi, tum quod immediate superficiei liquidi subjectam bullam habebat, tum alterum, cujus bulla ad infima vasis

tribus

(*g*) GEOFFROY l. c.

(*h*) Recher. p. 106.

(*i*) Dissertation sur l'aether p. 98. 99. exp. 12. 13.

(*k*) Ibid. pag. 87. exp. 3.

(*l*) Ibid. pag. 84. 85. exp. 2. Hujusmodi inconst. iam jam Roux adnotaverat. Recher. pag. 115. 116.

tribus circiter infra primam pollicibus demergebatur; atque utriusque liquorem sensim subsedisse, donec ad quartum infra temperaturam gradum pervenisset, ibique tamdiu substitisse, quamdiu, dissipatis volatilibus spiritus partibus, ejusdem evaporatio minueretur; in vasis autem aequalem aperturam habentibus, sed in ampliorem ventrem expansis multo minorem refrigerationem ex ejusdem spiritus evaporatione productam observavi, eoque minorem, quo venter amplior erat; ex quibus constat evaporatione tum superiora, tum inferiora liquidi strata aequaliter quidem refrigerari, sed frigoris producti gradum eo majorem esse, quo superficies evaporans ad reliquam superficiem, per quam penetrare nititur ambientium corporum calor, aut ad massam refrigerandam, aut etiam ad harum quantitatum productum majorem habet proportionem: quod si igitur thermometrum liquido volatili perfusum magis refrigeratur, quam si in liquidum ipsum immergeretur, id ex eo non fit, quod in primo casu liquidum evaporans immediate thermometrum contingat, sed ex eo, quod superficies evaporans ad massam refrigerandam majorem habet proportionem, eodem modo, quo vidimus, thermometrum acido *concentrato* madefactum magis calefieri, quam si in hujusmodi liquidum patulo vase contentum immergatur (3). Hinc thermometrum liquore volatili madefactum ex ipsius evaporatione eo magis refrigeratur, quo bulla minor est (*m*), cum eo major sit proportio superficiem ad massam, quo magis bulla imminuitur.

8. Quod si evaporatio calorem minuit, eo magis minuat necesse est, quo major eadem existit, cumque major existat in majori calore, inde conficitur eo magis corpora ex evaporatione refrigerari, quo calidiora sunt, atque adeo tempus, quo volatilia corpora refrigerantur, non solum ex proportionem superficiem ad massam, juxta generalem legem aesti-

aestimandum esse, verum etiam ex evaporantis superficiei magnitudine. Et quidem ferventem aquam oleo tectam longe tardius refrigerari observavi, quam si caeteris paribus nuda, & aëri aperto exposita relinqueretur, quando intra $\frac{2}{3}$ circiter temporis ad eundem gradum perveniebat, evaporatione refrigerationem adjuvante. Inde vero ratio repeti posse videtur experimenti a BORRICHIO olim propositi (*n*), quod nempe, si vasa alia aliis inclusa aquam contineant, dum exterioris vasis aqua ebullit, aqua in vasis caeteris ab ebullitionis calore eo magis absit, quo vasa interiora sunt. Et sane instituto experimento, duorum, triumve caloris graduum differentiam, pro vasorum varia crassitie, & materie, inter unius & proxime inclusi vasis aquam thermometer ostendit: hac arte posset quilibet caloris gradus ebullientis aquae calore minor constanter servari.

9. In vacuo, ut diximus, Cl. CULLEN ex evaporatione majus frigus produci observavit (*i*), ut tamen adverterit frigus, atque adeo evaporationem cessare, quando bullae e liquore evaporante prodire desierunt (*o*); quid simile ab HOMBERGIO fuerat observatum, liquores nempe volatiles principio in vacuo, quamdiu bullae prodirent, longe majorem jaeturam ponderis facere, quam deinceps, bullis jam desinentibus, qui propterea suspicatus est, evaporationem, quae in vacuo fit, prodeuntibus aëreis bullis tribuendam esse (*p*), & huc confugiunt, qui evaporationem ab aëre repetunt (*q*). Verumtamen evaporationem cessare non quod bullae aëreae deficient, sed quod spatium vaporibus jam refer-

(*n*) Acta Hafniensia anni 1671. 1672. observ. 73.

(*o*) Recher. p. 105. Frigus vero ex evaporatione spiritus salis ammoniaci in vacuo tantum fuisse, ut vasi circumposita aqua in glaciem converteretur.

(*p*) Acad. des Sciences 1697. p. 295. ad 298. Sed eas bullas in plerisque volatilibus liquoribus ex aëre non esse infra constabit §. 20. not. 9.

(*q*) In rarefacto aere liquida minus evaporare, in vacuo nihil, aut fere nihil Physici plerique ante CULLEN docebant.

refertum, & saturatum fit, sub clauso recipiente aëris pleno institutum experimentum demonstravit. Etenim sub hoc etiam frigus ex evaporatione spiritus volatilis paullatim producebatur, ut immerſi thermometri liquor ſenſim ſubſideret, qui tamen, poſtquam ad ſummam depreſſionem pervenerat, pedetentim ad temperaturam reſiliebat: neque defectu volatiliū partium thermometri liquorem reſiliſſe conſtitit; nam, ſublato recipiente, ex reſtaurata evaporatione iterum deprimebatur. Frigus vero productum ſub eo clauſo recipiente aëris pleno, caeteris paribus, eo minus erat, minusve diuturnum, quo recipientis amplitudo minor erat, adeo ut liquida etiam maxime volatilia, ſicut ſpiritus volatilis falis ammoniaci calce paratus, ſub anguſto recipiente, ex evaporatione ſenſibiliter non refrigererent; ex quo confirmatur frigus illud evaporationi deberi, & demonſtratur evaporationem in clauſo ſpatio, ſive vacuo, ſive aëris pleno tunc demum ceſſare, quando recipientis capacitas vaporibus reſerta eſt, &, ut ita dicam, ſaturata.

10. In rariori quidem aëre, caeteris paribus, ut frigus multo majus eſt, ita longe citius ceſſat, promptiusque thermometri liquor ad externam temperaturam revertitur, quam in denſiori, ita ut tempus, quo frigus ex evaporatione perdurat, eo majus ſit, quo denſitas aëris major eſt; immo & majori proportione creſcat, quam denſitas aëris, quantum quidem per experimenta videre licuit haecenus minus accurata. Cum enim in his experimentis ſpiritu volatili falis ammoniaci uterem, cujus volatilitas, prout ſubtiliores partes avolant, minor evadit, propterea frigus non ſolum ex retardata ab ambientibus vaporibus evaporatione, ſed etiam ex defectu volatiliorum partium minuebatur. Maxime autem conſentaneum eſſet ope liquoris uniformiter evaporabilis legem eam inveſtigare, ac definire, juxta quam pro varia aëris denſitate frigus minus eſt, magisque

gisque diuturnum. Interim ex iis, quae attulimus, confici videtur, prout aër densior est, evaporationi magis resistere, eamque resistentiam, caeteris paribus, in majori proportione crescere, quam aëris densitatem: hinc & frigus pari ratione minus produci, & in dato recipiente magis diuturnum, quod tardius prodeunt vapore, tardius etiam tanta copia colligantur, ut erupturos novos vapores cohibere possint.

11. Quoniam vero spatium datum sive vacuum, sive aëre plenum, prout vaporibus refertum, sensim novis recipiendis minus aptum efficitur, ut tandem evaporatio omnino cohibeatur, inde intelligitur, cur humida tempestate, humida corpora aëri exposita ex humoris evaporatione minus quam sicca tempestate refrigerentur (*r*); cur ex vento, qui continue aërem circum corpora evaporantia renovat & evaporatio (*f*), & frigus ex evaporatione (*t*) augeantur; cur humida corpora, aëre continue circa ipsa ex arte renovato, haud tardius fere, quam ex admoti ignis calore exsiccantur (*u*); cur tandem aqua dissoluto sale saturata in vacuo spatio non concresecat in crystallos (*v*) nec etiam aqua fortis in lixivium salis tartari immissa (*x*). Etenim non ob defectum aëris, qui ad nitri constitutionem requiratur, crystallisationem deficere (*y*), vel ex eo demonstratur, quod mixtura aquae fortis, & salis tartari aërem non absorbet, sed magna copia producit (*z*); contra vero defectu evaporationis crystallisationem fieri non posse, probat experimentum

(*r*) Notante MERAN, & RICHMAN. Vid. Recher. p. 93. 86. §. 9. p. 90. §. 15.

(*f*) MUSSCHEM. essai §. 962.

(*t*) MERAN apud ROUX exp. 1. p. 93.

(*u*) DESAGULIER tom. 2. p. 370. 371.

(*v*) "Ex eo, quod vapores nulli e vacuo recipiente elabi queunt.", BOYLE Exper. Physico-Mech. continuat. II. art. XI. exp. 2. p. 390.

(*x*) Idem. Tentamen circa partes nitri. Sect. XXIX. pag. 778.

(*y*) Ut HALESIUS *Statique des Végétaux* exp. 74. p. 162.

(*z*) BOYLE contin. II. art. XI. exp. 5. p. 390.

mentum aliud, in quo cum loco lixivii salis tartari, sal tartari siccum cum aqua forti admisceretur, verum inde nitrum, vel in ipso vacuo paratum est (&). Hic enim cum sal tartari, non aqua solutum, sed siccum esset, humidæ evaporatione necessaria non erat, ut inde natum nitrum a modico diluente liquore secedere posset: acidum quippe nitrosum ex alkali admixtione in nitrum conversum jam minori quantitate ab eadem aquæ copia dissolutum servari potest; ut nitri specie magna ex parte e liquore secermi debeat, & ad altera, ac fundum vasis deponi.

12. Ex eo porro, quod aër erumpentibus vaporibus resistat facile patet aërem, & vapores difficulter secum invicem admisceri, atque intelligitur, cur gutta aquæ intra phialam vi ignis in vapores resoluta fere omnem aërem ex phiala expellat, & vicissim irruens in vacuum aër dispersos vapores contra recipientis parietes cogat (a); atque conficitur evaporationem non ab aëre, sed a causa alia, verosimiliter a solo calore liquores expandente repetendam esse.

13. Ersi vero perspicuis adeo experimentis evictum sit evaporationem ab aëre non pendere, prostant tamen experimenta alia, quæ demonstrare videntur vapores, in primis aquosos, vi aëris sustineri: dum enim vacuum paratur vapores hujusmodi aquosi per recipientis parietes in levis nebulæ speciem conspiciuntur (b), & ab iisdem recipientis parietes obnubilantur (c): hinc HOMBERGIUS licet aquam in vacuo celerius evaporare, quam in pleno recipiente ex humida terra, quæ intra datum tempus in vacuo magis dehisceat, collegisset: putavit tamen in aëre altius vapores elevatum

(&) Idem loc. ult. cit. tum in tentamine circa partes nitri sect. XXX.

(a) HALEs l. c. p. 233.

(b) Etiam absque usu humidæ pellis. NOLLET *Lezioni di Fisica* lex. 10. esp. I. tom. 3. p. 140. 141. lex. II. sez. 2. esp. 3. p. 261.

(c) BOERHAAVE *Chemia* tom. 1. p. 247. 248.

vatum iri, quam in vacuo (*d*). Equidem vapores aquosi in definito caloris gradu certae densitatis esse videntur, propter quam in fluido plus, minusve denso vel eleventur, vel in infimum locum descendant (*e*): sed illa aquae, aut aliorum fluidorum in vapores rarefactio, & expansio, tum vaporum in aquam condensatio ab aëris praesentia, aut defectu non pendet. Quod si vapores dum fit vacuum ab aëre secedunt, id non propter defectum sustentaculi evenire videtur, sed quod vapores minus, quam aër se dilatare contentur, hinc & minus dilatentur, & aërem deserant (*f*), nisi quatenus cum ipso intime admixti, aut adhaerescerent ab eodem se expandente ex parte simul abripiuntur. Vapores autem aquosos in mediocri etiam caloris gradu parum elasticos esse, adeoque exiguum ad expansionem nisum exercere HUGHENII, & PAPINI experimento constat, in quo vapores aquae in vacuo etiam ebullientis, mercurium in appenso syphone sensibiliter elevare non potuerunt (*g*).

14. Vaporum vero praesentiam in vacuo boyleano alio insuper experimento exploravi: scilicet in phialam angusti colli oleum vitrioli *concentratum* infudi; atque ad latus phialae vitrum cylindricum apposui, in cuius cavum aptati thermometri bulla pendebat: haec prompte recipiente pneumatico cooperui, tum parato vacuo, omnia in eodem situ per horam servavi, tandem ope consueti machinamenti oleum

(*d*) Mémoires de l'Académie des Sciences 1693. p. 321. 322.

(*e*) Hinc fumus in recipiente etiam aëre pleno, dum refrigeratur paulatim subsidet, & ad infimam recipientis partem colligitur (BOYLE Physico-Mech. exp. 30. p. 68. 69.) qui non in pleno tantum (Idem l. c.) sed etiam in vacuo (MUSSCHEM. in Cementinos p. 39. n. 9.) admoto calore iterum expanditur: & liquoris, qui magnam partem ex metallis constabat, fumus, cum in aëre elevaretur, in vacuo infimam recipientis partem occupabat (BOYLE l. c. exp. 29. p. 67.) quod significat eum fumum aëris pressione elevatum fuisse.

(*f*) Ita NOLLET loc. cit. p. 140. 263.

(*g*) Transact. anni 167 $\frac{3}{4}$ n. 122. art. 4.

oleum ex phiala in appositum vas cylindricum effudi, & paullatim thermometer, cujus bulla jam in oleum vitrioli demersa erat a 16.° ad 21.° reaumur. scal. calefactum est, in eoque calore per insigne temporis intervallum perseveravit. In eo experimento pellibus pingui materia illinitis, non aqua madidis usus sum, ut recipiens cum lance pneumatica aptaretur. Ex quo jam patet vapores aquosos etiam in recipiente jam per horam aëre vacuo adhuc superstites esse, cum oleum vitrioli diu, multumque fuerit calefactum, cujus incalescentiam nonnisi ab attractis aquosis vaporibus repetendum esse superius demonstravimus (3), hucque confirmatur vapores aquosos aëris sustentaculo nequaquam indigere.

15. At qui fit, ut vapores, qui ex admixto oleo vitrioli cum sale ammoniaco in aëre calidi erumpunt, quorumque calorem humidis vaporibus, quibus admiscuntur; adscribendum esse demonstravimus (4), in vacuo, teste MUSSCHEMBROEKIO, vix ullum calorem ostendant (*h*)? An non inde evincitur vapores aquosos in vacuo vix ullos superesse, ex quorum miscela salis ammoniaci erumpens acidum incalescere possit? Juvabit ipsum MUSSCHEMBROEKII experimentum perpendere, quo accurarius ex eodem judicium fieri queat. Porro laudatus Auctor drach. iij. olei vitrioli per horam sub vacuo recipiente reliquit, priusquam in salis ammoniaci drach. j. effunderet, forte ut ad eandem cum ambiente caloris temperaturam exigerentur: postea affuso in salem oleo vitrioli, vidit expositum vaporibus thermometer nonnisi 3.° fahrenheit. scal. incaluisse, & quidem tarde, effervescentia scilicet jam desinente. Thermometerum vero miscelae immisum, primo 21.° ejusdem scalae refri-

(*h*) MUSSCHEMB. in Ciment. p. 210. §. 230. 231. Calidos non esse hujusmodi vapores in vacuo ex MUSSCHEMBROEK Cl. LA RATTE Encyclop. tom. 7. art. *froid* p. 319.

frigeratum fuisse, postea, finita effervescentia, 7.° incaluisse; cum contra, ex pari olei vitrioli dosi in duplam salis ammoniaci dosim in aperto aëre immissa, thermometrum in ipsam immersum 12.° refrigeraretur; expositum autem vaporibus thermometrum 10.° incalesceret. Quae quidem ostendunt, in vacuo, ut minus calidi halitus fuerunt, ita frigidiorum effervescentiam fuisse quam in aperto aëre. Quod si consideremus oleum vitrioli, prout dilutius est, frigidiorum quidem effervescentiam cum ammoniaco sale producere, sed quae halitus pari ratione minus calidos emittat (6), primum est conjicere, oleum, quod MUSSCHEMBROEKIUS in vacuo cum sale ammoniaco commiscuit, dilutius fuisse, quam illud, quod idem experimentum in aëre tentans adhibuerat: cur autem id oleum dilutius evaserit facile est divinare, nam cum in vacuo per horam in aperta ampulla fuisset relictum, ex absorpto humido sub vacuum recipiens diffuso dilui facile potuit (§. praeced.) maxime si recipiens amplum (i), tempestas humida, ampla phialae apertura, tum si humidus pelles ad recipiens cum lance aptandum adhibuerit, e quibus novi vapores humidi assidue prodire, & in eorum, qui ab oleo absorbebantur, locum succedere possent (l).

16. Hae me animadversiones admonuerunt, ut idem experimentum paullo aliter repeterem. Drach. iij. olei vitrioli admodum *concentrati* in phialam angusti colli infundebam, & drach. j. salis ammoniaci immittebam in vas vitreum cylindricum, quod thermometro duplo instructum erat, de-
pressio-

(i) Duae aut tres mensurae *chopines* aëris semper tantum aquae continent, ut inde drach. j. salis tartari sensibilibiter humescat, & pondere augeatur (NOLLET *lex. tom. 3. p. 140.*) Recipiens vero MUSSCHEMBROECKII amplitudinem habebat 284. pollic. rhen. pag. 211.

(l) Effervescentia ex oleo vitrioli cum sale ammoniaco in vacuo mixtis minor, quando ante miscelam diu in vacuo morabantur. BOYLE contin. II. art. XII. pag. 398. 399.

pressiore altero, ut in miscelam demergi posset, altero elatiore, ut miscelae vaporibus expositum esset: prompte haec omnia excipulo pneumatico obtegebam, cujus limbus ad lancem per interjectas pelles pinguedine oblinitas aptabatur; rum cito, intra 2' scilicet parato vacuo, in eodem situ relinquebam, donec hora integra lapsa esset: solito dein machinamento phialam invertēbam, ut oleum vitrioli in falem ammoniacum effunderem. Postea idem omnino experimentum repetēbam, cum hoc solo discrimine, ut prius aërem in recipiens admitterem, quam miscela perficeretur. In utroque casu eundem omnino caloris gradum vapores ostēderunt, qui aequae diuturnus, eadem lege, aequalibus intervallis aequae auctus, aut imminutus est, ita ut in utroque experimento thermometrum iisdem expositum 6' aut 7' a perfecta mixtione maximum calorem, 10.° scilicet in scala reaumuriana praeferebat, & post semihoram adhuc 4.° huiusmodi calorem retineret (*m*). Frigus miscelae fere idem fuit in utroque experimento, 3.° scilicet in vacuo, 2.° in recipiente aëris pleno: in utroque autem, finita effervescētia, thermometrum in miscelam immersum, non modo ad temperaturam ambientis revertēbatur, sed 3.° 4.°^{ve} supra illam incallescere pergebat; adeo dum thermometrum alterum vaporibus expositum refrigeraretur, alterum quod in miscelam immersum erat contra calefieret. Inde itaque evidens fit salis ammoniaci vapores etiam in vacuo calorem ostendere, & propterea humidos vapores, etiam horam unam postquam aër subductus est, per id vacuum recipiens diffusos remanere; variumque a MUSSCHEMBROEKIO observatum experimenti eventum verosimiliter vaporibus aquosis tribuendum esse, quos, dum oleum vitrioli moraretur in vacuo recipiente, ante mixtionem hauserat, quibusque fuerat dilutum.

17. Cum

(*m*) Experimentum institutum est hyemali tempestate, die serena, ac sicca, mercurio in barometro maximam altitudinem habente.

17. Cum porro finita effervescentia mixtura incalesceret, quando thermometri vaporibus expositi calor jam evanuerat, patet inde thermometri vaporibus expositi calorem in MUSSCHEMBROEKII experimento a miscela incalescente communicatum non fuisse, ut HALESIIUS suspicatur (*n*): praeterea vero in eo ipso MUSSCHEMBROEKII experimento thermometrum vaporibus expositum a 67.° ad 69.° fahrenheit. scal. jam incaluerat, quando miscela ad 58.° frigida adhuc erat (*o*); propterea illius thermometri calor a miscela communicari non potuit, quæ non modo nondum incaluerat, verum 9.° adhuc ambiente frigidior erat. Facile autem est caloris, quem miscela post finitam effervescentiam concipit, causam reperire, si consideremus duas partes falis ammoniaci requiri, ut una pars olei vitrioli saturetur (*p*); propterea tum in nostris experimentis, tum in experimento, quod MUSSCHEMBROEKIUS in vacuo instituit, in quibus drach. iij. olei vitrioli cum drach. j. falis ammoniaci commixtae sunt, longe minorem fuisse falis ammoniaci dosim, quam saturando oleo vitrioli requireretur: hinc portionem olei vitrioli in his experimentis in falem ammoniacum secretum GLAUBERI conversam quidem fuisse, quod cum ambiente humido incalescere amplius non potest; portionem autem liberam superstitem fuisse, quae, attracto ambiente humido, non secus ac §. 14, &, cessante frigore a falis ammoniaci solutione producto, novum calorem ostenderet. Hinc mirum non est si hujusmodi frigida effervescentia, adjecta aqua, in calidam mutetur (*q*). Cum vero in aëre MUSSCHEMBROEKIUS duplam falis ammoniaci dosim cum pari olei vitrioli

(*n*) Statique des Végétaux appendice p. 566. n. 78.

(*o*) Vide MUSSCHEM. l. c.

(*p*) POTT Académie de Berlin. 1752. p. 60.

(*q*) Cimentini p. 184. SLARE in transact. philosoph. n. 150. art. 4. exp. 7. GEOFROY l. c. p. 121.

vitrioli quantitate miscuerit, inde minor olei vitrioli quantitas post finitam effervescentiam libera superesse potuit, minoremque calorem praebere, cujus forte ideo non meminit Cl. Auctor (*r*). Jam vero majori posita in vacuo, & celeriori evaporatione (9. 10.) phaenomena explicantur haecenus obscura: cur ad exemplum aqua fortis, cui vini spiritus admisceatur, ferrum cum ebullitione in vacuo solvat, & interea in aëre nihil simile praestet (*f*); namque vis aquae fortis in ferrum, admixto vini spiritu, infringitur (*t*): itaque in vacuo, eodem citius dissipato, majorem in ferrum efficaciam aqua fortis citius recuperat, dum quae in aëre est ex ipsius admixtione impeditur, quominus similem actionem in ferrum exercent. Caeterum, quoniam vini spiritus, qui, admixta aqua forti, vix ullas bullas in vacuo emittit (*u*), celerius tamen ibidem evanescit; confirmatur inde, quod superius jam probavimus (9), celeriore in vacuo evaporationem erumpentibus aëreis bullis tribuendam non esse. Forte autem ex similibus causis, quod nempe acida, dum vacuum paratur, attracto ambientis humido diluantur (15. 16), tum quod menstrua alia volatiles nonnullas partes amittant diversa phaenomena aliarum etiam solutionum, quae in vacuo, & aëre fiunt, repetenda sunt.

18. Fluida alia prae aliis majorem caloris gradum inter ebullendum acquirere Physici observarunt, eumque nec densitati, nec oleositati, nec partium tenuitati respondere (*v*), sed varium esse, prout liquida plus, minusve essent volatilia (*y*). Revera si advertere lubeat, oleum olivarum calorem

(*r*) Etiam in aperto aëre thermometer primo frigidatum sub finem nonnihil calefieri observaverat GEOFROY l. c. p. 114.

(*f*) BOYLE Physico-Mech. contin. II. art. XI. exp. 13. PAPIŃ, & HUGHENS transact. phil. 1675. n. 119. art. I.

(*t*) BOYLE experimenta, & notae circa corrosibil. orig. exp. II. p. 378. 379.

(*u*) PAPIŃ, & HUGHENS l. c.

(*v*) BOERHAAVE Chem. tom. 1. p. 93. 94. 398.

(*y*) DESAGULIER tom. 2. pag. 212.

lorem summum recipere antequam ebulliat, 600.° scilicet scalae fahrenheitianae (z), olea stillatitia 560.°, & diffipatis tenuioribus partibus, majorem (&), aquam 212.°, vini spiritum 175.° (a), ac demum spiritum volatilem salis ammoniaci calce paratum 150.° (b); & frigoris gradum ab iisdem fluidis in CULLEN experimentis productum eodem ordine majorem fuisse (c), inde confirmabitur, tum varium ebullientium liquidorum calorem, tum varium frigus ab iis liquidis in memoratis experimentis productum a vario fixitatis, aut volatilitatis gradu dependere; proindeque liquida, tum demum ebullire, quando majorem caloris gradum acquirere non possunt (d), quando nempe evaporatio eorumdem ex aucto calore ea lege augetur, ut tantum caloris dissipet, quantum adjicitur. Hinc est ut in machina papiniana, coërcitis vaporibus, in indefinitum caleferi possint (e).

19. Jam vero, quoniam evaporatio aëre cohibetur, eoque magis, quo densior est, in vacuo liberior evadit (g); inde intelligitur, cur liquorum ebullientium calor eo major sit (f), quo mercurius in barometro altior (g), in vacuo mi-

(z) Vere numquam ebullit; nam ex supposito igne caleferi pergit donec accendatur. MARTINE *Dissertation IV. sur la chaleur art. VIII. p. 235. 236. 237.*

(&) MARTINE l. c. BOERHAAVE l. c. p. 397.

(a) MARTINE p. 232. BOERHAAVE p. 396. de alcohol.

(b) Ut instituto experimento comperi.

(c) Recherches p. 99. 100.

(d) AMONTON, & FAHRENHEIT apud BOERH. l. c. p. 92.

(e) Caloris gradus 36. ultra consuetum aquam recipere (BOERHAAVIUS l. c. p. 91.) ferrumen ex stanno, & plumbo calore aquae liquefactum in ea machina vidit DESAGULIER (tom. 2. p. 412.) stannum, & plumbum intra aquam posita NOLLETIUS (lez. tom. 4. p. 85.), aut etiam in media aqua per fila aenea suspensa MUSSCHEMB. (*Essai* §. 879.)

(f) " Atmosphaerae incumbentis pondus vapores deprimit, impeditque quoque minus aqua ebulliat, donec calorem contraxerit multo majorem, quam quo ad ejuſdem in vacuo ebullitionem excitandam opus sit. " NEWTON quæst. XI. post opticam p. 140. similia DESAGUL. tom. 2. p. 212. alique.

(g) BOERH. l. c. p. 92. 93. MARTINE l. c. dissert. I. §. 9.

minimus habeatur (*h*). Sunt quidem nonnulli, qui ut evaporationem in vacuo (*g*), sic celeriore ebullitionem aëri erumpenti tribuunt: verumtamen intestinus motus, qui ex ebullitione est, non confundendus cum eo, qui ab erumpente aëre producitur: et si enim bullas aëreis similes ebullitio excitet, undas tamen nullas facit, quemadmodum aër, qui e liquidis per exantlationem educitur (*i*); praeterea erumpens aër non impedit, quominus liquida majorem calorem acquirere possint (*k*); at liquida etiam in vacuo ebullientia ulterius calefieri nequeunt (*l*), & generatim eo majorem calorem adipisci possunt, quo majus est incumbentis atmosphaerae pondus (*m*), in montibus minorem recipiunt (*n*); demum ebullitio in vacuo etiam promptior, tardiorve est, prout liquida plus, vel minus volatilia (*o*); hincque fit, ut liquida quaedam in vacuo ex ingenti calore non

(*h*) Aquam in vacuo gr. 96. scalae fahrenheitianae ebullire. BOERHAAVE l. c. MUSSCHEM. §. 879. Vid. inf. not. 9.

(*i*) MUSSCHEM. §. 879.

(*k*) Vide supra notam *h*. Eatenus tamen majorem calorem acquirunt, quatenus in vacuo vase clauso collecti vapores ebullitionem cohibent, ut cohibent evaporationem (§ 9.); hinc alterna ebullitio aquae in vacuo, alterne erumpentibus, iterumque condensatis vaporibus; hinc immisso in frigidam recipiente, ut vapores condensentur ebullitio vehementior evadit (HUGHENS, & PAPIN transact. n. 122. art. IV.) continuato emboli motu diuturnior (BOYLE exper. Physico-Mech. exp. 43.)

(*l*) Sic in aperto aëre prodire incipiunt ex aqua aëreae bullae calore gr. 150. fahrenheit. (Acad. de Berlin 1750. p. 69.), pergit adeo calefieri per gr. 72. In vacuo aër ex aqua prodit gr. 50. ejusdem scalae (MUSSCHEM §. 881.) pergit adeo calefieri antequam ebulliat per gr. 46. forte ex observato motu hoc bullarum aërearum erumpentium factum est ut NOLLETIUS doceret aquam in vacuo gr. 60. fahrenheit ebullire (toun. 4. lez. 12. sez. 1. exp. 2. p. 31.)

(*m*) Vide supra notam *g*.

(*n*) Ex TURY, & MONNIER experimentis NOLLETIUS l. c. exp. 3. p. 35.

(*o*) Ita aqua, vinum, oleum terebintinae, si tepentia vacuo committantur vehementer adeo ebulliunt, ut per os vasis effundantur; contra oleum olivarum etiam maxime calidum, ad ebullitionem perducere non potest (BOYLE Physico-Mech. exp. 43. p. 117. 118.); spiritus vini in vacuo citius, quam aqua ebullit (PAPIN, & HUGHENS transact. n. 122. art. IV.), non sic aqua fortis, aut vini spiritus, cui aqua fortis admista fuit (Idem transact. n. 119. art. 1.)

non ebulliant; etsi copiosum aërem emittant (*p*), dum liquida alia parum, nihilve aëris continentia, & aqua etiam, quae praecedente ebullitione aëre repurgata est (*q*) exiguo calore ad ebulliendum adigitur.

20. Porro quaesitum est, cur corpora aliqua solida tardius in vacuo, quam in aëre; fluida contra quaedam, ut aqua tardius in aëre, quam in vacuo refrigerentur (*r*). Ejus vero quaestionis solutio ex praecedentibus perspicua est; scilicet solidorum, fixorumque corporum refrigeratio, quae ex aequabili tantummodo caloris diffusionem dependet, in vacuo minor est; liquidorum autem refrigeratio, cum non tantum ex aequabili caloris diffusionem, verum etiam ex evaporatione proveniat (*8*), evaporatio autem in vacuo augeatur (*9*), idcirco in vacuo refrigeratio celerior, quae ex evaporatione nascitur tarditatem alterius, quae ex aequabili diffusionem caloris oritur compensare non modo poterit,

(*p*) Ut oleum olivarum, quod forte praë omnibus liquidis copiosissimum aërem continere BOYLEUS testatur (l. c. exp. 24.) & tamen ex ingenti calore in vacuo non ebullit, ut dictum in nota superiore.

(*q*) De aqua aëre per ebullitionem repurgata BOYLE (l. c. exp. 43.) de spiritu vini PAPIN (l. c.); de spiritu volatili salis ammoniaci CULLEN (l. c. p. 106.); etsi vini spiritus parum aëris contineat (HALES l. c. exp. 66.); spiritus volatilis, tum aqua, quae ebullit nihil penitus (BOER.

l. c. p. 273.). Praeterea aqua etiam nativa vix $\frac{2}{14}$ volum aëris continet (HALES l. c.), hinc in vacuo ebulliens mercurium in appposito siphone sensibiliter non deprimit (HUGHENS transact. n. 122. art. IV.); ex quibus constat bullas, quas e vini spiritu, & spiritu volatili in vacuo prodeuntes vidit Cl. CULLEN (*9*) magnam partem ex aëre non fuisse, sed ex liquore ipso vi ignis, aut caloris expanso (confer. MUSSCHEM. §. 987. n. 3.) ut enim hi liquores in aëre citissime ebulliant (§. praeced.) ita verisimile est in vacuo solo ambientis calore, nisi perfrigidum sit, ad ebullitionem adigi, quae tamdiu duret, donec collectis vaporibus coërceatur (vid. not. k.)

(*r*) Aquam calidam celerius in vacuo refrigerari DGRAVESAND §. 2521. GALEATIUS Com. Bonon. tom. 2. part. 1. p. 314. Caeteticis paribus virgam pyrometri paullo tardius contrahi sub vacuo recipiente, quam sub eodem aëre pleno MUSSCHEM. in Ciment. p. 137. 138. Hinc quaestionem proposuit. *Essai* §. 959. *Pourquoi l'eau se refroidit-elle plus vite dans le vuide sandis. que le fer y reste plus long-tems chaud qu'en plein air?*

terit, verum etiam superare. Enim vero cum intra sphaeram vitream thermometri mercurialis bullam inclusissem, ut sphaerae centrum teneret, per tubulum, qui ad latus sphaerae erigebatur eandem aëre evacuavi, dein in ebullientem aquam immisi, ut acquabiliter calefieret, tandem, mercurio ad $70.^{\circ}$ scalae reaumurianaë existente, in aquam eandem cum aëre caloris temperaturam habentem, $10.^{\circ}$ scilicet supra 0 immersi: mercurius ad $20.^{\circ}$ descendit tempore $14\frac{1}{4}$. Eodem experimento repetito cum hoc solo discrimine, quod aër in sphaeram admissus fuisset, tempus refrigerationis fuit $9\frac{1}{2}$ circiter (*f*). Ex quo patet mercurium, quo thermometer conficitur, secus ac aquam tardius in vacuo, quam in aëre refrigerari, tum quod magis fixus est, tum quod in vitro thermometrico clausus, si vel maxime volatilis esset evaporare non posset: hincque verosimile fluida etiam alia, vel fixa, ut oleum expressum, vel etiam volatilia, dummodo vasis coercita evaporare non possint, adinstar solidorum corporum, tardius in vacuo, quam in aëre refrigeratum iri.

21. Quoniam refrigerationis ex evaporatione ratio in eo sita videtur, quod celerius liquorum volatiliùm calor per vapores dissipetur, quam ab ambientium corporum calore ejusdem jactura reparari possit (8): libuit investigare quænam corpora calori transmittendo aptiora essent, quod non solum huic quæstioni illustrandæ, verum etiam ipsius caloris theoriæ perficiendæ aptum videbatur. Itaque cum aequalia olei olivarum, alcoholis, aquae, ac mercurii volumina in pocula terrea aequalia, & similia infudissem, & ad eundem cum ambiente caloris gradum componi sivissem, qui

(*f*) Simile experimentum NEWTONUS memorat, in quo duo thermometra paria paribus cylindris vitreis cavis, altero vacuo, altero aëre pleno includebantur, atque in vacuo cylindro nihilominus, neque fere tardius thermometer incallescere, quam in aëre pleno, si e frigido in calidum cubiculum ambo deferantur. Quæst. XVIII. post Opticam p. 142.

qui eo tempore 10.º supra 0 scalae reaumur. erat; thermometer mercuriale ad 70.º ejus scalae calefactum successive in singula haec liquida immisi, atque observavi tempus, quo a 70.º ad 20.º mercurius descendebat, in aperto aère fuisse 10' & 20"; in oleo olivarum fuisse 99", vel 100"; in alcohole 44"; in aqua 25"; in mercurio 11": repetitum experimentum vix 1", aut 2" varietatem obtulit (1). Aequae cito etiam refrigerabatur thermometer in oleo olivarum sive nudo, sive tenui alcoholis strato oblecto: fuerunt adeo tempora refrigerationis in aère, oleo olivarum, alcohole, aqua, mercurio fere uti numeri 224, 20, 9, 5, 2. Ex quibus primo patet permeabilitatem horum liquidorum a calore non esse in ratione volatilitatis, aut densitatis eorundem: patet deinde eam fere legem obtinere, ut corpora, prout magis pingua, calori deferendo minus apta evadant, ut aqua calorem citius deferat, quam liquida inflammabilia, ut demum mercurius etiam citius aqua eundem transmittat; quae novam, eamque magni momenti caloris proprietatem electrico fluido communem patefaciunt: quod nimirum corpora, prout igni electrico deferendo aptiora, eadem aptiora quoque sint deferendo calori. Una haecenus exceptio tantum se offert, quam §. superiore indicavimus; corpora nimirum in vacuo tardius calorem amittere, cum electricitatem citius disperdant. Interim ex dictis intelligitur, cur lana, pili, & similia corporibus

(1) MARTINE. l. c. p. 112. 113. Corpora in aère nonnisi octuplo tardius refrigerari, quam in aqua, in mercurio nonnisi 2" celerius pro singulis minutis quam in aqua; sed Vir Cl. & minus calefecit thermometer, & fere usque ad ambientis temperaturam refrigerandum reliquit: ego & magis calefeci, & temporis tantum rationem habui, quo mercurius ad gr. 10. supra temperaturam perveniebar: hinc discrimen obtinui magis perspicuum; eodem modo, quo discrimen inter permeabilitatem corporum metallicorum, & aquae respectu fluidi electrici, quod, quamdiu electricitas exigua est, vix percipi potest, satis perspicuum fit, quando vehementior adhibetur.

ribus circumposita eorum calorem diutius fervent (μ); cur similiter circumpositum gossipium frigus fervet ex arte productum (ν); cur glacies citius in aqua, tardius in oleo terebinthinae, tardius adhuc in oleo olivarum, tardissime in aëre dissolvatur (γ): cum enim haec in glaciem non agant vi corrodeute, manifestum est ipsam citius, tardiusve dissolvere, prout calori communicando plus, minusve apta sunt. Sed de pulcherrimo hoc argumento fusius alias, & ex proposito erit agendum.

(22. Observavit laudatus Cl. CULLEN liquorem in thermometro sub excipulo pneumatico suspenso, educto aëre, 2.^o aut 3.^o deprimi; postea in ipso vacuo ad temperaturam restitui; admissa demum aëre 2.^o adhuc, aut 3.^o elevari (ζ). Hujusmodi porro phoenomenon nihil cum prioribus commune habet, ut quisque facile intelligit: neque enim ulla ratio est, propter quam irruens in vacuum aëris unda thermometrum calefaciat, intereadum lenis ejusdem motus dum subducitur frigus inducat. Ad descensum quidem quod spectat, jam observatum a Cl. GALEATIO liquorem in thermometris, subducto aëre, nonnihil deprimi, ejusque phoenomeni causam hanc esse opinatus est, quod aër ex omni parte vitro incumbens ipsum constingat nonnihil, qua constrictione sublata vitrum relaxetur, eoque fiat, ut inclusus liquor deprimatur (ξ). Hanc Cl. Viri sententiam experimentis consentaneam deprehendi: perinde enim liquorem thermometri aëre vacui deprimi observavi, quando, aperto superius tubo, aditus concedebatur externo aëri, ut liquorem comprimeret, & cum aëre externam vitri superficiem premente ad aequilibrium componeretur. Cum enim thermometri liquor in-

com-

(μ) MUSSCH. Essai tom. I. p. 474.

(ν) FAHRENHEIT apud BOERH. l. c. p. 88.

(γ) Ex BOYLIO ROUX l. c. p. 29. 30.

(ζ) Recher. p. 104.

(ξ) Comment. Bonon. tom. 2. part. 1. p. 318. 319.

compressibilis sit, omnis in hoc experimento observata depressio vitri dilatationi erit adscribenda. In apertis autem hoc pacto thermometris in vacuo recipiente constitutis liquor non deprimebatur, quod scilicet, facto vacuo, pressio ex interna, externaque vitri parte aequae tolleretur (a). Demum BOYLEUS in aperto etiam tubo ad ovale vitrum cavum conexo aquam $\frac{1}{2}$ digiti deprimi observavit, quando incluso sub excipulo pneumatico ovali vitro, & tubo per excipuli verticem prodeunte, subductoque demum aëre, pressio in ovalis vitri externam faciem minuebatur, & interea aër liquori incumbens in tubo ipsum contra internam vitri faciem premere pergebat: hinc, restituto aëre, ad priorem altitudinem liquor resiliebat (b). Ex quibus omnibus evincitur Cl. GALEATIUM veram propositi experimenti causam invenisse; sed cum etiam in vacuo, Cl. CULLEN observante, ad pristinum locum, thermometri liquor reverteretur, id indicio est calorem eo tempore nonnihil auctum fuisse; hincque factum est, ut, restituto aëre, tantumdem elevaretur supra eum locum liquor, quantum eodem educto subsederat.

(a) In apertis thermometris, extracto aëre, liquorem nonnihil ascendere, quod aër in liquoribus ipsis delitescens, aëris pressu sublato, se se exerat. TABERANUS Comment. Bonon. l. c. p. 320.

(b) Exper. Physic. Mech. exp. 39. p. 47.

*De caussa extinctionis flammæ, & animalium
in aëre interclusorum.*

IN superiore Tomo argumenta protulimus, quibus demonstrarem: ignem, & flammam in intercluso aëre nec propter erumpentes fumos, nec propter imminutam ab iisdem aëris elasticitatem suffocari (a), quin & probabili conjectura ducti, ne alios quidem vapores suffocationis causam esse putavimus, sed potius quod aër a flammæ calore perverteretur. Cum vero ab animalibus vitiatu aër flammam repente extinguat, hinc utrumque phœnomenon ab eadem causa produci opinati sumus, quæ gradu tantummodo discreparet: at postquam non minus a raris calore prope modum destitutis, quam a caeteris animalibus aërem perverti observavimus de conjectura nostra dubitare coepimus, aliaque experimenta meditari, quibus proposita quaestio accuratius dirimi posset (b). Quum in hujusmodi experimentis instituendis versarer eorum nonnulla, quæ antea protulimus, castiganda esse comperi, & ex consideratione eorum, quæ in præcedenti dissertatione circa vapores dicta sunt, his multo plus memoratis in phœnomenis tribuendum esse cognovi: quapropter idem argumentum retractandum suscepi, eo quidem, ni fallor, successu, ut minus dubia, & minus indefinita in eam rem mihi videar prolaturus.

1. Relatum est in superiore tomo aërem, in quo flamma sponte fuerit extincta, ita perverti, ut immisissam aliam subito suffocet etiam diu postquam fuerit vitiatu (c):
idipsum

(a) In Commentariis p. 22. & seq.

(b) Ibid. a p. 48. ad 51.

(c) Ibid. p. 36. §. 38. Reaccensa candela in aëre, in quo mox suffocata est, tam diu ac antea non perdurat (BOYLE nova exp. circa relat. inter aërem,

idipsum in aëre ab animalium respiratione vitiato contingere ex BOYLEO retulimus, qui aërem in quo animal ante quatuor horas interierat immisso alteri animali trium minorum spatio mortem attulisse scribit (d). Hujusmodi BOYLEI experimentum, quo animalia in eundem aërem successive immittuntur hunc in modum iterandum suscepi. Campanam vitream sexdecim circiter librarum aquae capacem ita suspendi, ut tres transversos digitos limbo suo in aquam subjecti vasis demergeretur: ad internam, superioremque campanae partem trochleam aptaveram, per quam funiculus trajiciebatur, cujus alteri extremo exigua cavea adnexa erat, dum extremum alterum per aquam sub campanae limbum tractum ita ad manus erat, ut cavea per aquam elevari posset. Funiculus alteri caveae fundo adnexus, similiterque sub campanae limbum tractus caveae deprimentae, & e recipiente per aquam educendae inferviebat: eo pacto cavea cum inclusa avicula in aërem sub recipiens positum per aquam induci, aut educi poterat, quin aër mutaretur, prohibente aqua, quae campanae limbum undique obtegebat. Rebus hunc in modum dispositis carduelis primum cavea inclusus per aquam in recipiens immissus est: avis primis duabus horis aërem absorpsit, ut aquam uno circiter pollice supra libellum elevaret; postea vero tardius, tardiusque hujus altitudinem adauxit; principio bene se habuit, dein consuetae laesae respirationis vicissitudines passa est, quibus in fine horae quartae cum quadrante sublata fuit. Haeceducta carduelis alius eodem modo

& flam. vital. animal. tom. 3. p. 168.) sub quintuplum tempus (HALES
 exp. 106. p. 201.) momento ipso, quo in eum aërem immittitur, ex-
 tinguitur (Helmont. magnum oportet p. 130. n. 59. Confer tom. praec.
 §. 1. c. in nota). Aërem per flammam ex vini spiritus in vacuum traje-
 ctum immissam flammam confestim suffocare (HAUKSBÆ exper. physico-
 mech. tom. I. art. XI); aut trajectory per flammam carbonum (DA-
 SAG. tom. II. p. 439.)

(d) Exper. physico-mechan. cont. II. art. V. exp. 11.

do in recipiens immiffus eft, qui ftatim magna, ac frequenti refpiratione correptus duobus minutis interiit (e). Tertius carduelis unico minuto mortuus eft; quartus demum paullo ultra femi-minutum vitam traxit. Posteriores aves, quæ, aëre jam valde depravato, in recipiens immiffæ funt vehementibus convulfionibus, vomitu, fopore occupabantur. Aqua poft primas quatuor horas fenfibiliter amplius non ascendit.

Post hæc infufa exterius aqua eft, ficque aër fub campana ita condensatus, ut aqua ad libellam refitueretur, tum carduelis alius in recipiens immiffus: ne minutum quidem vixit, nec aëris elaterium amplius imminuit.

Ex quibus confirmatur aërem ab animalibus ita vitiari, ut immiffa animalia alia citiffime extinguat.

2. Neque folum flamma, & animalia in aëre ab alia flamma, aut animali vitiato fuffocantur, fed ipfæ quoque ftirpes, ut ex aëris interclufione paulatim languent (f), fic citiffime intereunt, fi aër ille ab inclufis antea ftirpibus fuerit vitiatus, & cum aëris elasticitatem infringant, fimiliter infringere definunt, fi aër, cum quo intercluduntur ab immiffa antea ftirpe elasticitatis jaëturam jam fecerit (g).

3. Porro diurnitas vitæ animalium in aëre intercluforum, caeteris paribus, effe folet in ratione directâ voluminis aëris, inverfa numeri animalium, ut Cl. VERATTI obfervavit (h). Anomaliam tamen quamdam in ranis fe deprehendiffe teftatur, quæ five plures, five pauciores, æque tamen cito interirent (i): Idemque animadvertit ne ulla quidem difficultate refpirandi in iis anguftiis ipfas labo-

(e) Bullæ aliquot aëris, dum traduceretur cavea, per aquam in recipiens penetraverant.

(f) Confer Cl. HALLERUM in BOERH. tom. 2. par. 1. pag. 89. not. 38. elem. phyl. tom. 3. p. 315. n. f. g.

(g) HALL. Statiq. des Végétaux exp. 122. n. 7. p. 278. 279. 280.

(h) Com. Bon. t. 2. par. 2.

(i) Ibid. p. 275. 276.

laborasse (*k*), quamquam & aëris elasticitatem infringant (*l*), & ex interclusione aëris, ut ipse existimat, instar aliorum animalium perimantur (*m*).

Equidem, ut alia praetermittam, ranas aërem vitare, ex eo confirmari videtur, quod aërem flammae alendae imparem non minus reddant, quam caetera animalia (*n*); in vitiato autem aëre diutius vivere non posse, vel inde constar, quod artificiali aëre tam cito laedantur (*o*).

4. Cum itaque haec phaenomena quid miri, ac singularis praesferant, placuit eadem per experimenta persequi: & primum libuit experiri, quantum respiratio ranis esset necessaria. De iis quidem legimus 10' in vacuo torricelliano ipsas interire (*p*), in boyleano autem tribus horis ita torpescere, ut vitam recuperare adhuc possint (*q*), sex autem (*r*), aut ad summum septem horis (*s*) penitus extinguere quamquam alias, aut horis duabus extinguerentur (*t*), aut ad horas viginti septem, & ultra in ipso boyleano vacuo languidam vitam producerent (*u*). Verumtamen dubium esse potest an ranae in vacuo defectu pressionis, an respirationis intereant: idcirco quamdiu sub aquis vivere possint explorandum suscepi; & quoniam ad aquae superficiem respirandi causa identidem feruntur, propterea ipsas vinculis sub aquis coëgi. Post horam unam jam mortuae videbantur, ut concussae hac illac cadaverum instar moverentur absque ullo proprii motus indicio: cum vero ipsas attentius observarem depre-

(*k*) P. 277.

(*l*) P. 276. (*m*) p. 274.

(*n*) Miscel. tom. praeced. p. 48. §. 45.

(*o*) BOYL. physico mech. cont. II. art. V. exp. 4. §. 7.

(*p*) Florentini p. 51. col. Acad.

(*q*) BOYL. nov. exp. pneum. tit. 2. exp. 1. & in transf. n. 62.

(*r*) Id. l. c. exp. 2.

(*s*) Id. l. c. exp. 5.

(*t*) Id. exp. physico-mech. cont. II. art. VI. exp. 7.

(*u*) MUSSCH. in Ciment. p. 51. 52.

deprehendi post octavum, aut decimum quodque minutum aliquot respirationis motus sub ipsis aquis edidisse; dein conatas fuisse, ut a vinculis sese expedirent, postremo mortuarum instar iterum jacuisse, donec post idem tempus eadem phaenomena recurrerent. Quinta ab immersione hora cum jam nullus hujusmodi motus appareret unam eduxi; cum vero postea adhuc in reliquis motum aliquem respirationis mihi videre visus sim cunctatus sum horam alteram; ut secundam ab aquis elicerem: septima demum elapsa hora cum jam motus nullus amplius cerneretur, quae sub aquis adhuc erant tres reliquas eduxi; singulas distinctis locis seposui, atque post horas aliquot priores duas, quae quinta, & sexta ab immersione hora eductae fuerant vitam recuperasse comperi; postremas autem tres, quae per septem horas sub aquis permanferant nec sponte, nec admoto calore, aut stimulis in vitam revocari amplius potuisse. Experimenta autem haec mense septembri, liquore in thermometro ad 15° circiter supra 0 scalae reaumurianaee existente, instituta sunt, quod utique monendum censeo, cum videam in aliis experimentis (v) sex diebus, aut diutius ranas sub aquis vixisse, & contingere possit, celeberrimo HALLERO notante, ut ranae, quemadmodum caetera animalia, frigore torpentes absque respiratione vitam diutius conservent (x).

5. Quae autem in aëre intercluso phaenomena ranae exhibuerunt hujusmodi sunt. Ex ranis quatuor unam in vase inclusi, quod uncias duodecim; secundam in vase alio, quod duplum; tertiam in vase, quod quadruplum aquae recipere potuisset; quartam in libero aëre reliqui: thermometrum tunc indicabat gradum 20. caloris in scala reaumuriana. Post 48. horas vivebant adhuc omnes; post horas 60. omnes ita mortuas inveni, ut vitam recipere amplius non possent.

(v) BROWNE erreurs populaires lib. III. p. 315.

(x) Elem. physiol. tom. III. p. 266.

tent: laesae respirationis indicia ante mortem in his ranis in aëre interclusis aut nulla, aut dubia extiterunt, cum earum respiratio a ranae in libero aëre relictæ respiratione sensibilibiter non differret.

6. Cum porro viderem aequali propemodum tempore ranas & in aperto, & in intercluso aëre periisse, inde suspicio mihi nata est, eas non tam interclusione aëris, quam aliqua alia causa, imprimisque aquae defectu interiisse; siquidem notum est ranas in aqua etiam purissima absque alimento ad hebdomadas, imo & ad menses vitam protrahere posse (*y*). Hinc ranas una cum aqua in aëre intercludendas putavi, ut sublata altera mortis causa, quantam vim habeat interclusi aëris vitium ad ipsas enecandas tutius judicare liceret.

7. Itaque in vasorum vitreorum aequalium altero ranam unam, in altero tres cum aqua inclusi: (spatium ab aqua relictum, & ab aëre occupatum tantum erat in utroque vase, ut uncias 20. aquae capere adhuc potuisset) ranam aliam cum pari aëris quantitate absque aqua interclusi; aliam demum in aperto aëre reliqui: thermometerum tunc erat ad 5° supra 0 scalae reaururianaë. Post quindecim horas vivebant adhuc omnes: post horas 20. ranas tres cum aqua, & aëre simul interclusas mortuas inveni, quae, aperto vase, vitam non recuperarunt; rana quae cum aqua, & aëre sola fuerat interclusa post quinquaginta quinque horas adhuc vivebat, hora sexagesima tertia mortua erat; quae cum aëre absque aqua fuerat interclusa post viginti sex horas adhuc vivebat, vigesima octava hora mortuam inveni, datoque aëre amplius non revixit; quae demum in aperto aëre relictæ fuerat quinto die languescebat quidem, adhuc tamen vivebat. Eodem experimento repetito ex tribus cum aqua interclusis ranis una per horas viginti, altera per horas triginta;

(*y*) SWAMERDAM. Bib. natur. p. 170. col. Acad. Idipsum saepe observavi.

ginta; tertia post tringinta quinque jam mortua erat; sic singularum vita in summam collecta ultra octuaginta quinque horas non perduravit; quae rana sola cum aqua, & aëre fuerat interclusa post septuaginta quinque horas jam mortua videbatur, aperto tamen vase vitam recuperavit; quae absque aqua in aëre fuerat interclusa post horas viginti quatuor jam mortua erat; quae demum in aperto aëre fuerat relicta decima die adhuc vivebat.

8. Ranae porro cum aqua interclusae principio sub aquis delitescabant, nec nisi identidem respirandi causa ad superficiem innatabant; progressu tamen temporis frequentius ad aquae superficiem ferebantur; ac tandem sub finem perpetuo innatabant, & perpetuo respirabant. Respiratio primo frequens, & parva erat, dein frequens, & magna, ac laboriosa; quando ad extremum pervenerant vix se amplius sustinere ad aquae superficiem poterant, & capite sub aquis demergebatur; identidem tamen magno nisu innatabant, & magnas aliquot, vehementesque respiraciones edebant. Frequentes quoque eo tempore convulsiones apparuerunt. Quae in aëre absque aqua intercludebantur ranae, convulsiones nullas passae sunt, & minus evidentem laesam respirationem habuerunt.

9. Ex his itaque patet ranae cum aqua in aëre interclusas vitam fere ducere, quae sit ut quantitas aëris simul interclusi; easdemque non secus ac caetera animalia ex difficultate respirandi interire, quodque rem conficere videtur jam morituras, & dyspnoea, ac convulsionibus laborantes similiter renovato aëre restitui.

10. Quandoquidem vero, ut dictum est, in postremis experimentis (7) ranae, quae in aperto aëre relictae fuerant multo diutius vivebant illis, quae in aëre absque aqua fuerant interclusae secus, ac in primo experimento (5) contigisset, sive id a peculiari ranarum constitutione, sive a tempestatum varietate repetendum esset, placuit iterum ranae absque aqua numero vario in vasis ejusdem capacitatis cum aëre inter-

tercludere; & iterum observavi, perinde ac quando cum aqua intercludebantur, vitae durationem longiorem fuisse ubi pauciores ranae erant, etsi inverfam numeri ipsarum rationem minus exacte sequeretur, & quasdam mortuarum instar jacentes, aëre renovato, restitutas vidi.

11. Quoniam igitur ranae, quando citius in intercluso aëre, quam in aperto intereunt, intereunt etiam eo citius, quo plures sunt in pari aëris quantitate (9. 10.) patet vel ab alia causa, quam ab interclusione aëris ipsarum interitum accelerari, vel certe earum vitam esse in ratione quantitatis aëris: quemadmodum autem hujusmodi anomaliae frequentes sunt, si ranae absque aqua intercludantur (3. 5.), ita, concessa iisdem aqua, & nulla hujusmodi inconstantia appareret, & ex aëris interclusione pereunt, & eo citius, quo minorem aëris quantitatem habent, iisdemque demum symptomatibus, quibus caetera animalia, perimuntur, similiterque periturae ex aëris renovatione refocillantur (7.8.).

12. Quemadmodum vero animalium, ita & flammaram durationem in eodem recipiente inverfam fere numeri ipsarum rationem secutam fuisse experimento comperi, dummodo candelae essent aequales, & aequae arderent: & in aequalibus quidem recipientibus, ex aequalibus candelis accensis diutius ardere illam, quae in ampliori interclusa sit, docuit HALESIUS; sin autem recipientia essent aequalia, candelae inaequales, majorem flammam citius extinguere (a); ut appareat flammam, caeteris paribus, non secus ac animalia in intercluso aëre citius extinguere, quando minorem aëris quantitatem habent. Equidem idem monuit HALESIUS in ampliori recipiente aequalem flammam minus durare, quam pro ratione quantitatis contenti aëris debuisset, sed cum simul adnotaverit parem candellam in majori recipiente aëris quantitatem longe majorem absorpsisse (b), hinc

(a) Exp. 103. p. 178.

(b) Exp. 106. 107. p. 200. 201. 202.

hinc verosimile sit candelam in majori recipiente positam paullo magis arsisse, ideo & minus perdurasse: enim vero postea constabit absorpti aëris quantitatem flammae magnitudini, quam proxime respondere (30). Quod vero opinionem nostram confirmat illud est, pondus amissum sive ab una, sive a pluribus candelis homogeneis fere secutum fuisse rationem capacitatis vasis, seu quantitatis aëris, cum qua intercludébantur: similiter Cl. BECCARIA expertus est (ut ipse mihi narrabat) cum limaturam stanni, aut plumbi in vitris hermetice clausis calcinationi subjiceret, portionem tantum limaturae ex subiecto igne in calcem redigi potuisse, at eo majorem, quo vacui in vase vitreo spatii amplitudo major erat.

13. Cum vero haëtenus exposita experimenta in aëre ejusdem densitatis fuerint instituta, illud praeterea dignum consideratione videbatur, quantum pro varia aëris densitate simul interclusorum animalium vita brevior, diuturniorve evaderet. Cum itaque phialam haberem vitream quinquaginta librarum aquae capacem, cujus collum cochlea cuprea munitum erat, latera autem utrimque tubulum vitreum continuum habebant, horum alteri syphonem vitreum hermetice adglutinandum curavi, ut ex immisso in ipsum mercurii altitudine variam aëris interclusi densitatem cognoscerem; alterum ad machinam pneumaticam aptavi: dein passerculum in phialam immisi, eademque cochleae ope firmiter obturata, aërem cito hausi, donec mercurius in syphone pol. 16. lin. 10. supra libellam elevatus esset: tunc commercium inter anthiam, & phialam intercepi; eo autem tempore 2' ab immisso passerculo erant praeterlapsa.

Passerculus principio vomuit (c) convulsiones nonnullas passus

(c) Similiter alauda in aëre ad dimidium rarefacto ter vomuit, dein melius se habuit, ut post horae $\frac{3}{4}$ mortis periculum adhuc abesset. BOYL. nov. exp. pneum. tit. XI. exp. 4. & in transf. n. 63.

passus est, postea aliquamdiu bene se habuit. Respiratio ipsi primum parva erat, & frequens (*d*), dein minor adhuc, & frequentior evasit, postea frequens, ac magna, postremo magna, & rara, quando, supervenientibus convulsio- nibus, sublarus est: mercurius paulatim in syphone elevaba- tur, ut mortis tempore lin. 4. $\frac{2}{3}$ circiter ejus altitudo ada- cta esset. Vixit passerculus a clauso tubo, qui cum antlia pneumatica commercium faciebat 35'. Cum post mortem passer- culi tantum novi aëris in recipiens admissem, ut 3. pol. mercurius subideret post horas 1. $\frac{1}{2}$ iterum paullo ultra li- neam unam mercurium elevatum fuisse observavi; sed non ausim affirmare alicui caloris vicissitudini eam mutationem adscribendam non esse; etsi mercurius in proximo thermo- metro nullum ejus rei indicium praebuerit.

Post haec passerulum parem in eadem phialam prius lotam similiter immisi: aërem similiter exantlavi, ut tamen mercurius in syphone pol. 13. lin. 5. tantummodo elevare- tur, & phialae commercium cum anthlia intercepti, quae omnia pari celeritate, 2' scilicet ab immisso passerulo ab- soluta sunt. Passerculus eadem passus est, quae prior: vi- xit 70', cum mercurius septem lineis supra priorem locum mortis tempore altior esset.

Demum in eadem phiala cum aëre nativae densitatis par passerulus interclusus (altitudo mercurii in barometro tunc erat pol. 27. lin. 6.) eadem passus est praeter convulsio- nes, quae nullae fuerunt: vixit horas 3. $\frac{1}{2}$; mercurius in syphone mortis tempore pol. 1. lin. 1. $\frac{2}{3}$ circiter altius conscenderat.

14. Porro in hujusmodi experimentis quantitates aëris interclusi erant uti numeri 128. 169. 330., adeoque fere
uti

(*d*) Etiam in rarissimo aëre montium peruvianorum respiratio frequens, anhe- losa (BOUGUER *Mém. de l'Acad.* 1744. p. 261.) in aëre condensato contra respiratio rarior (BOYL. *physico-mech. cont.* II. art. 4. exp. 6.)

uti 3. 4. 8., duratio autem vitae fuit uti 35. 70. 210., seu uti 1. 2. 6., ex quo primo pater in aëre diversae densitatis durationem vitae non respondere quantitati aëris; sed majori in proportione augeri, quam aëris quantitas, quando densitas major evadit; adeoque eandem aëris quantitatem diutius animalium vitam sustentare quum condensata, quam quum fuerit rarefacta.

Quod autem in aëre nativo rariori experti sumus, id in densiori expertus similiter est BOYLEUS, qui cum mures duos in paribus recipientibus inclusisset, in quorum altero aër nativam, in altero duplam densitatem habebat vidit in duplo densiori mus 15. vicibus diutius vixisse, quam in nativo aëre, etsi conclusi aëris quantitatem duplam tantummodo haberet (e).

15. Illud deinde ex hisce experimentis deducitur, imminutionem elasticitatis aëris majorem esse, caeteris paribus, quando aëris densitas major est, & quantitatem imminutionis densitatis fere rationem sequi: imo novi admissi aëris, post animalium mortem, elasticitatem iterum imminui ex iisdem probabiliter deducitur.

16. Quod vero de animalibus dictum est; id ipsum de flamma observavit HALESIUS; in aëre nimirum ad dimidium rarefacto eandem flammam multo minus quam dimidium tempus perdurare; adeoque ipsius durationem conclusi aëris rationem nequaquam sequi (f).

17. Quum igitur eadem aëris quantitas, prout addensatur eo tardius flammae, aut animalibus exitialis evadat; inde intelligitur, cur 522. pollices aëris, qui in nativa densitate hominis respirationi per $2' \frac{1}{2}$ tantum inservire possunt (g) in campana urinaria aquae pondere compressi,

&c

(e) Loco ult. cit.

(f) Statiq. des Végét. p. 234.

(g) Ibid. append. exp. vi. p. 372.

& condensati per 5', & ultra respirationi apti sunt (*h*), inde etiam verosimile sit eandem aëris quantitatem campana urinaria inclusam eo diutius respirationi inservire posse, quo profundius demissa campana, ex incumbentis aquae pondere aër in angustius spatium adigitur (*i*).

18. Ex his etiam eruitur rariorem aërem ob raritatem animalibus, aut flammae nocuum non esse, sed quod cito ob hanc ipsam pervertatur, idcirco nocuum celeriter fieri: enimvero animalia in eo aëre per aliquod tempus optime respirant (*k*), & respiratio pederentim laeditur, & eo tardius, quo recipientis amplitudo major est, & eodem demum modo, quo in nativo aëre intercluso laedi solet (13); at si propria raritate aër noceret, aequè cito nocere deberet, quacumque posita recipientis amplitudine: patet ergo vitium ipsius raritati non esse adscribendum: praeterea vero manifestum est tantam densitatem aëris respiratiōni sustentandae sufficere, quae apta sit pressione sua dilatandis pulmonibus; pressio autem dilatandis pulmonibus necessaria tanta est, quanta requiritur pulmonum vi contractili superandae (nullus enim est aër thoracicus, qui resistantiam augeat), adeoque pressionem 2. pol. mercurii vix superat (*l*), ex quo conficitur aërem etiam praetermodum rarum pressione quidem sua mechanismo respirationis perficiendo aptum esse.

19. Ut

- (*h*) Nam centum pollices pro 1' sufficiunt HALLEY philos. trans. n. 349. DESAGUL. leçons t. II. p. 236. 473.
- (*i*) Docet tamen DESAGUL. l. c. p. 236. tempus quo aër pervertitur esse uti ipsius volumen, quacumque fuerit ejusdem densitas.
- (*k*) Si excipias frequentiam majorem, quae etiam in montano aëre observatur. Vid. §. 13. n. d.
- (*l*) HALEY l. c. exp. 112. p. 214. 215. in mortuis quidem brutis experimentum institutum; & iterum exp. 113. p. 216 217. applicito ad apertum canis latus syphone, vidit in ordinaria inspiratione vix sex pollicibus, in vehementissima ad summum triginta pol. in syphone vini spiritum elevatum fuisse: tanta igitur erat vis, qua distensus pulmo inspirati aëris pressionem sustinebat.

19. Ut vero eo certius cognoscerem quantam nam aëris raritatem animalia tolerare possint sequens experimentum institui. Passerculum in phialam vitream immisi, cujus aperturam flaccescente ampla vesica arte ad collum phialae circumligata obturavi: phialam cum passerculo alio sub recipiens pneumaticum posui, aëremque exantlavi, donec mercurius ad 19. pollic. altitudinem in appenso syphone elevaretur (altitudo ejusdem in barometro tunc erat poll. 27. $\frac{2}{3}$) dein tantum aëris per epistomium admisi, ut mercurius duobus pollicibus subsideret; mox parem aëris quantitatem prompte iterum exantlavi, sicque alterne, & celeriter eandem aëris mensuram & haurire, & reddere continuavi per horae dimidium: hoc pacto uterque passerculus semper versatus est in aëre adeo raro, ut 7. $\frac{1}{2}$ ad summum 9. $\frac{1}{2}$ mercurii pollices sustinere posset, cum eo tamen discrimine, quod passerculus phiala inclusus eundem semper aërem haberet, extra phialam sub recipiens positus assidue renovatum: ille principio vomitu correptus est (*m*), postea bene se habuit, ut finita semihora integer, alacerque educeretur; hic dyspnoea sensim ingravescente, & convulsivis demum motibus correptus, non multo post quam eductus esset, interiit.

20. Ex his confirmatur aërem sub recipiente pneumatico etiam admodum rarefactum vitae, ac respirationi sustentandae aptum esse, dummodo renovetur, indeque fit, ut animalia majores mutationes densitatis tollerent, quando densitas nativa interclusi aëris augetur, quam cum imminuitur (*n*),
inde

(*m*) Et respirationem minorem, frequentioreque perpetuo habuit; vomitus repentinae mutationi aëris (vid. not. c. §. 13.), respiratione frequentior ipsi aëris raritati adscribenda (vid. ib. n. *d*, & §. 18. n. *k*.)

(*n*) Homines in campana urinaria aërem ferunt novem vicibus densiorem (MUSCH. *essai* §. 1411.) & animalia in machina compressoria ex aëre etiam octuplo densiore nullum incommodum passa sunt (ex BIRCH. HALLERUS l. c. p. 194. not. o.) alauda contra in aëre quadruplo tantum rariore 2' interiit (BOYLE nova exp. pneum. tit. XI. exp. 3.)

inde etiam ratio pendet, propter quam in rariori altissimo-
rum montium aëre, & flamma ardet, & animalia oprime
se habent (*o*), in aëre contra per antliam ad parem rari-
tatem perducto cito extinguuntur (*p*): ille scilicet aër aper-
tus est, & sponte renovatur, hic interclusus brevi perverri
debet; verosimile propterea est aërem montanum interclu-
sum aequè cito laethalem futurum, ac ille, qui in aequali
recipiente ad parem raritatem est perductus.

21. Jam si comparemus phœnomena exposita cum phœ-
nomenis liquorum in clauso spatio evaporantium iisdem ac-
curate respondere comperiemus: vidimus nimirum primo.
Evaporationem in clauso spatio paullatim imminui, ac ran-
dem omnino desinere, ut novi vapores in id spatium erum-
pere amplius non possint. 2. Durationem autem evapora-
tionis, caeteris paribus, fere esse ut amplitudinem reci-
pientium. 3. demum, si aër rarefiat, evaporationem acce-
lerari, & recipiens vaporibus multo citius repleri; ita ut
tempus, quo repletur majori in proportione imminuatur,
quam densitas aëris (Dissert. praec. §. 9. 10.): quae qui-
dem omnia etiam in flamma, & animalibus in aëre in-
terclusis vera esse observavimus; nam & paullatim illa lan-
guere vidimus, ac tandem extingui, & immixtam novam
flamam, aut novum animal tunc statim suffocari (1), &
durationem utriusque in eadem aëris densitate esse, uti quan-
titem aëris conclusi (3. 11. 12.), in diversa hanc rationem
non amplius sequi; sed eo celerius desinere, posita aequali
aëris interclusi quantitate, quo rarior aër esset, eo tardius,
quo

(o) Vid. HALLERUM l. c. p. 189. not. *i*, *k*, p. 193. not. *b*, *c*, p. 197. not.

(p) Vid. not. ^{*o*, *p*, *q*.} *n* praeced. inde forte factum est, ut plerique doceant aves aë-
rem $\frac{2}{3}$ leviolem ferre non posse; sed discrimen huiusmodi inter aërem
montanum, & aërem antlia rarefactum jamdudum est adnotatum. Vid.
HALLER. l. c. p. 193. not. *t*.

quo densior (14. 15.). Dum vero flammam, & animalia in intercluso aëre vaporibus suffocari concludimus, nondum aut eorum naturam licet definire, aut peculiarem modum, quo noceant; num scilicet novis tantummodo coercitis vaporibus, an potius mutatis physicis, aut mechanicis aëris qualitatibus; sed de his deinceps nonnulla erunt addenda.

22. At si vapores flammae nocent, qui fit, ut in propositis alibi experimentis aër non per candens tantummodo metallum, sed & per vitrum trajectus flammam extingueret (q), & ex admoto extrinsecus ad vitream phialam igne contentus aër flammae deinceps alendae ineptus evaderet (r)? Ad primum, quod spectat experimentum, in quo, flamma intra recipiens binis verticalibus foraminibus pertusum constituta, ad inferius foramen candens vitrum admovebatur, non prava qualitate ex vitro contracta, sed impetu, & unda sua aërem vitri calore rarefactum flammam extinxisse cognovi; aliter enim experimentum cessit, quando cautum est, ne aëris a vitro rarefacti, & nimio impetu ad flammam impulsæ unda in eandem irrueret. Ad alterum, quod attinet experimentum maxime dubito ne per tenues vitri parietes (f), aut per latentem rimulam halitus admoti extrinsecus ignis in ipsius cavum penetraverint, vel fortuita alia adfuerit erroris causa; quandoquidem crassioribus vitris in cassum deinceps tentavi: nec dissimulatum est a nobis in superiori tomo frigidis etiam animalibus corruptum aërem alendae flammae imparem fieri, unde de prioris opinionis veritate dubitare coepimus (t): caeterum & DESAGULIERIUS monuit aërem per candentia metalla trajectum non perverti, nisi quatenus aut ipsorum metallorum (u),
aut

(q) Tom. praec. §. 32. 34. 35.

(r) Ib. §. 36.

(f) Vid. BOERICHIUM Act. Hafn. tom. 2. pag. 137. 138.

(t) L. c. §. 45. 46. 47.

(u) Ut aër, qui a candente auricalco lapidis calaminaris halitus recipit. *Leçons* tom. 2. p. 467. 468.

aut prunarum, in quas immerfa metalla sunt vaporibus (v) inficitur, & HAUKSBEI experimenta esse castiganda: experius demum fum aërem phiala inclusum per menses in praealido hypocausto servatum nullam noxiam qualitatem contraxisse. Atque haec quidem de hujusmodi experimentis: argumenta caetera, quae vaporum hypothefim nobis oppugnare videbantur (x) minoris momenti esse deinceps constabit.

23. Verum si phoenomena consideremus imminutae ab animalibus imprimis aëris elasticitatis luculentius constabit vapores in cauffam suffocationis esse adducendos. Constat enim aëris elasticitatem a vaporibus iis infringi, qui vehementer adeo ad ejus particulas adhaerent, ut interpositione sua mutuam ipsarum vim repulfivam imminuant (y). Hinc 1.^o vis elastica aëris principio a vaporibus magis imminuitur, dein fenfim minus, prout aër vaporibus onustus novis recipiendis minus aptus efficitur, ut demum 2. Aëre vaporibus jam saturato ejus elasticitas infringi amplius non poffit (z). Tunc vero 3., novo aëre in recipiens admiffio nova fit elasticitatis deperditio (a). Hinc 4. aër factitiuus, qui vaporibus jam saturatus prodit, in vacuum, aut aërem vaporibus jam saturatum emiffus nullam elasticitatis jacturam patitur (b), quam tamen in purum aërem emiffus pati

vi-

(v) Ut in HAUKSBEI experimentis immiffio in prunas ferro, aut aere. Ibid.

p. 439.

(x) §. 24. 25. 28. 33.

(y) Ita DESAG. l. c. p. 42. 43, HALES. passim.

(z) HALES exp. 106. p. 202.

(a) Et novus aër cum impuro effervefcit. Id. append. exp. 3. p. 342., & fequent.

(b) Si fubitam eam excipias, quae ex ipfius aëris geniti, aut admixtorum vaporum refrigeratione dependet. Sic aër factitiuus ex corau cervi in vacuo per fpeculum caufticum combufto pofft horam nullam amplius patitur elasticitatis jacturam (BOYLE contin. II. art. VIII. exp. 2. p. 375.) imo vero nec aër ipfe ex charta fuphurata in vacuo combufta (Id. l. c. exp. 1. p. 374. 375.), nec aër ex aqua forti, & nitro fixo in vacuo mixtis (Id. l. c. art. XI. exp. 5. p. 390.), aut ex aqua forti, & cupro (PAPIN. tranf. an. 1675. n. 119.)

videtur, ex eo, quod vaporibus suis hujus elasticitatem imminuat (*c*): ex quibus 5. intelligitur, cur corpora quaedam, quae in vacuo, aut aëre vaporibus jam saturato aërem emittunt, in aëre nativo, puroque interclusa, aliquando videantur absorbere (*d*), quod scilicet decrementum elasticitatis interclusi aëris ex vaporibus majus sit ejusdem incremento ex novo aëre adjecto: cur item 6. corpora quaedam in aëre interclusa aërem alterne gignere, & absorbere videantur, quando, harum caussarum altera alteram alterne superante, elasticitas interclusi aëris alterne adaugetur, vel imminuitur (*e*): cur tamen 7. corpora etiam, quae principio aëris interclusi elasticitatem imminuebant, postremo adaugeant, quando interclusi aëris vaporibus jam onusti elasticitas ab erumpentibus novis vaporibus ita imminui amplius non potest, ut ejus decrementum ex hac causa incrementum superet, quod ab erumpente novo aëre producitur (*f*).

24. Et haec quidem phaenomena maxime consentanea sunt iis, quae ab interclusis in aëre animalibus producuntur. 1. Enim ab iisdem vis elastica aëris principio celerius, dein tardius, tardiusque imminuitur (*g*), ut demum 2. aëre iis vaporibus jam saturato ejus elasticitas imminui amplius non possit; tunc vero 3. novo aëre admisso,

(*c*) HALEs l. c. exp. 76. p. 163.

(*d*) Sic sulphur in vacuo fluidum elasticum vi ignis emittit, cum aërem in HALEs experimentis absorpsisset adnotat MUSSCH. in Ciment. pag. 31. Similiter spiritum nitri cum ferri limatura in vacuo fluidum elasticum gignere ut pol. 4. $\frac{1}{2}$ mercurius deprimeretur (MUSSCH. l. c. p. 201. §. 166.), contra sub recipiente aëre pleno aërem absorpsisse (HALES exp. 94. p. 190.), etiam repetito, si novus aër in recipiens admitteretur (Id. append. exp. 3. n. 6. p. 344.)

(*e*) HALEs p. 256.

(*f*) In quinque rubis successive admixto minerali de Walton cum aqua forti sub eodem recipiente immoto aëris pleno, priores tres miscelae aëris elaterium imminuunt, posteriores duae auxerunt (Id. append. p. 350.)

(*g*) VERATTI l. c. p. 277.

missio, ex admixtis cum eodem vaporibus, nova elasticitatis deperditio fieri nobis visa est (15). Quoniam vero, aëre vaporibus semel saturato, ejus elasticitas ab iisdem debilirari amplius nequit, ex eo fit, ut 4. quantitas imminutionis non animalium numero, sed interclusi aëris quantitati respondeat (§. cit.), & in eadem aëris quantitate, quovis numero fuerint animalia, par fere elasticitatis imminutio fiat (*h*), quod nempe, quovis fuerint numero, ultra certam vaporum quantitatem in aërem illum effundere; atque adeo ejus elasticitatem ultra certum terminum enervare non possint: hinc 5. si animalia in aërem aliorum halitibus jam saturarum immittuntur, cito pereunt, quin aëris elaterium sensibilibiter amplius imminuant (1), quinimo 6. animalia, quae per aliquod tempus in aëre vaporibus saturato supervivere possunt (4), in aëre interclusa, sub finem ejus elaterium non modo non pergunt enervare, ut contra novum aërem ante mortem gignant (*i*), quemadmodum de miscelis quibusdam dictum, quae cum purum aërem absorbere videantur, in aëre propriis halitibus saturato novum producunt (n. 7. §. praeced.)

25. Quare cum admixti animalium vapores ii sint, qui aëris elasticitatem infringunt, perperam nonnulli ex absorpto per pulmones aëre, & in sanguinem traducto hujusmodi elaterii imminutionem repetendam putant: etsi enim vel maxime per pulmones aër in sanguinem penetret, necesse nihilominus

(*h*) Ex uno cypselo in aëre intercluso mercurius digit. 1. lin. $\frac{1}{2}$ descendit, ex duobus sub eodem recipiente lin. 10, ex tribus digit. 1.; scilicet fere aequaliter descendit in experimentis VERATTI, quod ut Cl. Auctor advertit numerus ipsorum vitae brevitate compensetur (l. c. p. 271. 172.) Eandem legem in ranis deprehendit (p. 276.), videtur tamen aliquanto diversam observasse in coturnicibus (p. 272.) HALESTUS quoque in majoribus recipientibus absorptionem aëris, proportionem habita ad capacitatem, minorem observavit, sed ejusdem speciei animalia non adhibuit, exp. 7. p. 202. 203.

(*i*) De ranis idem Cl. VERATTI p. 277. 278.

nus erit, ut aequalis aëris quantitas per pulmones ipsos, aut per viam aliam e sanguine erumpat; adeoque nullus hujusmodi effectus apparebit (*k*). Deim si vera hypothesis, sequeretur in eodem recipiente plus aëris a pluribus, quam a paucioribus animalibus absorberi (vid. n. 4. §. praec.): postremo constitutis in rariori aëre animalibus nulla fieri deberet elasticitatis deperditio; quinimo erumpens e sanguine, & humoribus densior aër elasticitatem ambientis aëris augere deberet, cum tamen contrarium evenire experimenta ostendant (15).

26. Juxta easdem generales leges (23) imminuitur etiam aëris elaterium ab interclusis stirpibus; dum enim hae per interclusum aërem vapores disperdunt ejus elaterium paulatim enervant, &, imminuta pari passu evaporatione, languescunt, & demum ante interitum eousque aëris interclusi elasticitatem vaporibus suis imminuunt, ut immissa nova stirps, & cito pereat, & eam aëris elasticitatem debilitare amplius non possit (2).

27. Equidem phaenomena imminutae a flamma aëris elasticitatis non parum a prioribus discrepant 1. enim flamma in aëre interclusa principio ejus elasticitatem non modo non minuit, quin potius adauget, dein sensim imminuere incipit, haecque imminutio ea lege augetur, ut, extincta flamma, maxima evadat (*i*) 2. flammae, quo majores, aut plures in eodem recipiente, etsi pari proportione minus perdurent, & ponderis decrementum idem patiantur (12), quod innuit parem halituum quantitatem in eum aërem diffundere; eo tamen magis aëris elaterium enervant (*l*), &

con-

(*k*) Enormis certe aëris quantitas intra sanguinem accumularetur, si 100. grana, seu 353. pollices aëris quavis hora in ipsum penetrarent, quemadmodum ex HALESI computatione, l. c. exp. 110. p. 211. 212.

(*i*) HALEX exp. 106. p. 200.

(*l*) Majores candelas in eodem recipiente plus absorbere, HALEX exp. 106. p. 201. Pluribus flammis cum animali interclusis hydrargiri descensus majores, celeriosque fuerunt, Cl. LAGHI Comment. Bonon. tom. 4. pag. 82.

contra in recipientibus utcumque inaequalibus par propemodum elasticitatis imminutio ab aequalibus flammis producitur (*m*), ut adeo non quantitati aëris, aut durationi flammæ, sed ejus magnitudini absorptio respondeat: hinc 3. flamma in aëre alterius flammæ halitibus jam infecto, etsi cito extinguatur, & sub quintuplum tempus ad summum perduret (*n*) haud minus tamen, quam prior flamma ejus elaterium enervat (*o*). Quin 4. in aëre fervidae fumis referto, etsi flamma minus perduret $\frac{1}{2}$ plus ipsius elaterium debilitat (*p*).

28. Quæ omnia demonstrant elaterii imminutionem, quæ a flamma producitur aëris rarefactioni tribuendam esse, quæ a pari flamma, quaecumque fuerit recipientis amplitudo, aequalis producat; a majori, aut pluribus, in eodem quamvis recipiente, major existat; & aequalis iterum fit, sive flamma in purum, sive in infectum aërem immergatur, major vero, quo aër humidior, atque adeo ex calore magis dilatabilis est: quando enim flamma languere incipit, multoque magis quando extinguetur, aër minus, minusque calore rarefactus sese contrahet, unde ejus elaterium pari ratione decrefcere videbitur, ac calor imminuitur.

29. Ut vero rarefactionis effectus ab effectibus effluvi-
orum aëris elaterium imminuentium secernerem, hujusmodi experimentum tentavi. In aqua vase contenta accensum ce-
reo-

(*m*) Equidem HALESIUS monuit flammam sub majori recipiente aliquanto plus absorbere, sed cum simul adnotaverit & absorptionem, & durationem minorem fuisse, quam pro ratione contenti aëris esse debuisset: hinc verosimile flammam paullo majorem extitisse, unde & plus absorberet, & minus perduraret, quemadmodum innuimus §. 12.

(*n*) Confer. §. 1. n. c.

(*o*) HALESIUS exp. 106. p. 201. exp. 103. p. 198.

(*p*) In hujusmodi aëre flamma 64" perduravit, cum in pari quantitate aëris puri 70" perduraret, & tamen in priori experimento $\frac{1}{2}$ plus aëris absorpta fuit. Id. exp. 121. p. 256. 257.

reolum fulcro sustentatum collocabam, postea campana vitrea tegebam, & syphonis ope aqua prius ad libellam composita, statim syphonem in aquam immergebam, ut ablatae inter aërem externum, & aërem campana inclusum communicatione, ex aquae sub campanam ascensu decrementum elasticitatis aëris dimetiri possem. Cum primum flamma contrahi, ac minui incipiebat, aqua elevabatur, & multo celerius eo momento, quo interibat: aliquamdiu post ascendere pergebat aqua, donec aër penitus refrixisset: tunc altitudinem summam, ad quam aqua pervenerat accurate metiebar.

Postea idem experimentum repetebam, applicito cereolo accenso ad crus syphonis, quod sub campana recipi debebat: cereolum autem ad ejus cruris latus ita adplicitum erat, ut, inclinato syphone, primo crus, & statim postea flamma sub aquas demergeretur, atque extingueretur. Res ita peracta erat eo consilio, ut vix dum ablata communicatione inter aërem campana inclusum, & externum aërem, a quo jactura elasticitatis a flamma producta reparari poterat, flamma statim extingueretur, nulla mora temporis concessa, qua aërem consumere posset; adeo ut ascensus aquae campana inclusae supra libellam exterioris aquae post flammae extinctionem ex toto fere aëris condensationi esset tribendus, quin absorptioni, aut imminutae aëris elasticitati quidpiam adscribi posset: verumtamen non minus in hoc, quam in praecedente experimento aqua ascendit, etiamsi in illo flamma diu perdurans aërem absorbere potuerit, si revera absorbet; aliqua dumtaxat anomalia observata est pro varia flammae magnitudine, quam prout accuratius aequalem in utroque experimento esse curabamus, minus etiam inaequalis erat aquae ascensus (q).

30. Ex

30. Ex quibus jam patet aëris elaterium a flamma quidem ex cera vix, ac ne vix quidem debilitari, & elevationem aquae sub recipientibus, sub quibus flamma extinguitur, condensationi aëris a flamma prius rarefacti potius quam elaterii imminutioni tribuendum esse, & demum discerni non posse utrum flamma magis, vel minus quam animalia aëris elaterium infringat, donec effectus rarefactionis ab imminutae elasticitatis effectibus non fuerint secreti.

31. Quoniam vero phosphorus etiam caustico vitro intra recipiens accensus, aut accensus in clauso vase ex admoto extrinsecus calore (*r*) aëris elaterium enervat, & enervat etiam pyrophorus, dum intra recipiens clausum sponte incalescit, aut accenditur (*f*); quoniam fumi sulphurei etiam frige facti per circumpositam frigidam, si iterum circumfusa fervida calefiant, iterum aëris elasticitatem infringunt (*t*); quoniam imminutio elasticitatis ab incenso sulphure, aut flamma etiam communi producta post viginti, aut triginta horas ab eadem extincta fieri perseverat, multo scilicet postquam omnia refrigerata sint (*u*), & demum sulphur (*v*), aut etiam communis flamma (*x*) per vitrum causticum intra vitreum recipiens accensa aëris elaterium imminuunt, inde sequi videtur flammam saltem aliquam, forte etiam communes aëris elaterium nonnihil enervare. Et quidem pro varietate pabuli modo aëris elaterium infringi, modo

(*r*) HALES pag. 147. 257.

(*f*) Id. exp. 54. p. 151. 152. BOYL. noëtiluc. obs. 10. p. 11.

(*t*) 13. pol. aëris quinque diebus absorpsit. HALES exp. 101. p. 196.

(*u*) Id. p. 147. & exp. 106. p. 200. Si tamen consideremus aërem tardissime refrigerari, probabile fit in amplioribus recipientibus vel permultas horas requiri prius quam ad ambientis temperaturam se restituat: quam tarde autem frige fiat aër thermometrum amontonianum ostendit.

(*v*) Accensum sulphur ultra 2 mensuras pintas aëris a detonante prius nitro productu absorbebat. Id. exp. 121. p. 257.

(*x*) Accensa est per chartam sulphuratam, & nitratam. Id. p. 201. Sed quantum aëris elaterium imminuerit non narrat.

modo novum aërem a flammis produci demonstrare videntur experimenta HALESII, qui ex corporibus quibusdam inflammabilibus distillatis aëris elaterium infringi observavit, cum corpora alia similiter inflammabilia, & olea ipsa copiosum aërem producerent (*y*).

32. Verum ex iis ipsis experimentis, quae memoravimus constat imminutionem elasticitatis a flammae vaporibus productam imminutione ea, quae ex refrigeratione, & condensatione aëris fit, longe minorem esse: nam & sulphur distillatum multo minus, quam accensum aëris elaterium imminuit (*z*), & duo grana phosphori accensa, & sub recipiens immissa viginti octo pollices aëris absorbebant, cum intra vas clausa, dein accensa ex admoto extrinsecus igne tredecim tantum consumerent (*e*), quae rursus ostendunt, quam imperfecte imminuti elaterii mensura ab aquae, aut mercurii ascensu exhibeatur.

33. Caeterum quando flammae aëris elaterium imminuunt, id non absorpto aere efficere, sed vaporibus suis, qui vim repulsivam partium aëris, cum quibus admiscuntur, imminuunt (*23*), vel eo constat, ut notat Cel. HALESIIUS, quod post sulphuris deflagrationem, nonnisi terra sicca superfit, quae certe aërem nullum continet (*a*).

34. Postquam vero evictum est vapores esse, qui flammam, & animalia in intercufo aëre suffocant, illud primum quaerendum sese offert, num vapores iidem sint, qui flammae, & animalibus nocent. Et vidimus quidem aërem animalibus, sive calidis, sive frigidis (*b*) corruptum, immixtam flammam statim suffocare. Vidit etiam PAPINUS flammam in vase clausam, ut nonnisi per tubum aër circum ipsam

reno-

(*y*) De oleis exp. 62., de cera exp. 64.

(*z*) Id. exp. 76. p. 163.

(*e*) Id. exp. 54.

(*a*) Exp. 120. p. 256.

(*b*) Tom. praec. l. c. §. 44. 45.

renovari posset, extinctam fuisse quotiescumque loco puri aëris aërem ab homine exspiratum recipiebat (c): at aër flamma vitiat, quocumque demum pabulo alatur, etsi flammam aliam quamvis confestim suffocet (d), non perinde animalibus nocet, sed pro varietate pabuli modo noxius admodum, modo vix notabiliter molestus est: sic Cl. LAGHIUS observavit animalia cum flammis communibus interclusa diu iisdem supervixisse (e), & licet animalia aliquanto citius interiisse adnotaverit, quando flamma simul interclusa erat (f), cum tamen etiam citius periisse animadverterit, quando plures flammae simul intercludebantur (g), ex hoc ipso erui videtur flammam eas halitibus suis animalibus non nocuisse; nam a flammis sive pluribus, sive paucioribus in idem spatium eadem quantitas halituum disperditur, cum eo citius finiant quo plures, & idem ponderis decrementum patiantur (12). Verosimilius igitur ideo animalibus nocuisse, quod aërem rarefacerent, eoque magis, quo plures, unde & paucior aër intra recipiens relinqueretur, & aqua altius assurgeret (h), pari profus modo, quo passerulus in recipiente, in quo aër exteriori calore fuerat rarefactus, ne horam quidem vixit, cum par passerulus in eodem recipiente, cui calor similiter admotus fuerat, sed ita, ut aër undique interclusus rarefieri non posset, ad 73' vitam protraxerit (i). De flamma vero ex vini spiritu

(c) Act. lipsiens. ann. 1689. p. 466. Col. Acad.

(d) Vid. §. 1. n. c.

(e) Comm. Bonon. tom. 4. p. 88. Mus sub eodem recipiente cum cerea candela accensa interclusus, & novies, aut decies diutius quam vixisset flamma sub recipiente relictus, laesus non apparuit (BOYLE de relat. inter aërem, & flammam vital. animal. tom. III. exp. 1. p. 168.

(f) Passerulus sub recipiente halitibus candelae referto vixit horas 4. 45', cum sub eodem nativo aëre pleno vixerit hor. 5. 24', l. c. p. 81.

(g) Modo singulae aquae arderent p. 82.

(h) Id. l. c.

(i) Id. l. c. p. 87.

spiritu BOYLEUS narrat (*k*), & saepe etiam sem expertus, aviculam cum ea flamma in aëre interclusam huic diu supervixisse: lignorum etiam quorundam flamma animalibus parum noxia (*l*), dum aliorum infensa admodum (*m*), ut & flamma prunarum, quae aperto igne parantur parum animalibus nocet, cum carbonum ligneorum, aut lithantracis flamma iisdem perniciosissima sit (*n*). Admodum etiam perniciosus halitus sulphuris, aut pulveris pyrii (*o*) incensorum.

35. Quod si igitur flammarum quarundam halitus, qui flammae manifeste quidem nocent, animalibus vix, ac ne vix quidem molestiam afferunt, inde concludi posse videtur diversos omnino halitus esse, quibus flamma, & animalia suffocantur (*p*); ac propterea flammam, quae animalia suffocant simul cum halitu flammam extinguente caeteris flammis communi, halitum alium emittere, qui animalibus perniciem afferat: & in carbonibus quidem halitum animalia extinguentem distinctum inesse, & ab illo diversum, quo flamma perimitur, demonstrare videtur spiritus carbonis, qui cum animalia suffocet, flammam non modo non extinguit, ut imo ab admota flamma incendatur (*q*). Jam vero huiusmodi halitus ignem, & animalia extinguentes conjunctos adesse patet tum in respirato aëre, tum in aëre facti-

- (*k*) Quinquies, aut sexies diutius quam vixisset flamma sub recipiente relicta avicula laesa non apparuit (loc. ult. cit. p. 167.) Aërem tamen, qui per flammam ex vini spiritu in vacuum penetrat linariam intra 2 suffocare, DESAG. t. II. p. 467. 468.
- (*l*) HALEX exp. 121 p. 237. Description des arts & métiers par Mrs. de l'Acad. Art du charbonier p. 3.
- (*m*) De flamma ligni quaerens viridis MUSSCH. *essai t. II.* §. 1330. n. 3.
- (*n*) Art du charbonier p. 2. 3. & alibi.
- (*o*) Mus suffocat $\frac{1}{4}$ BOYLE physico-mech. cont. II. exp. 8.
- (*p*) Flammam vulgarem, & vitalem diversis substantiis ali, aut saltem eo alimento multo magis indigere flammam vulgarem, BOYLE l. c. exp. 2. Similia Cl. LAGHIUS l. c. p. 88.
- (*q*) Trans. philos. n. 452.

factitio plurium corporum , tum demum in aëre plerarumque mephitidum ; cum contra alias hujusmodi halitus singulatim erumpant , ut e flammis , quae animalibus non nocent , aut e corporibus , quae cum animalia suffocent, vicissim flammam non laedunt (*r*), aut etiam inflammabilem halitum emittunt (*f*).

36. Quae cum ita sint minus tutum indicium est quo ex quantitate pabuli dato tempore a flamma consumti de aëris salubritate , aut insalubritate iudicium ferrur , cum aequae aprus alendae flammae esse possit aër animalibus admodum infensus , & contra.

37. Ignis porro , & flamma aërem animalibus vitiatum , aut halitibus aliis , non quidem corrigunt , sed eundem expellunt , ut novus in ipsius locum succedere possit (*t*); hinc quando aër halitibus hujusmodi saturatus est igne non modo emendari non potest , ut imo hunc ipsum exstinguat (*u*).

38. Si vero de eorum halituum natura , qui flammam , aut animalia in clauso aëre suffocant , quaerere libeat , illud primum manifestum est , fumos non esse , qui flammae noceant ; nam & aër flamma infectus diu id vitium retinet postquam fumi subsederunt (*v*), & percolatione per liquida varia , quibus fumi retinentur , aër hujusmodi corrigi non potest (*x*), & flamma etiam , quae fulgines nullas emittit , qualis ea est , quae alcohole nutritur , in clauso aëre non minus

(*r*) Aut minus manifeste (LAGHI p. 84. 85.) : certe spiritus sanguinis humani animalibus infensissimus (Ibid.) flammae non nocuus , quum contra ejus halitus admota flamma accendatur. Vid. inf. §. 40.

(*f*) Aëris factitii inflammabilis exempla HALSIUS habet exp. 57.

(*t*) De renovatione aëris , quae per ignem fit fule diximus tom. praec. a §. 5. ad 17. Et ignem quidem ad aërem renovandum utiliter adhaerent in fodinis (transf. phil. n. 5.) & in locis aliis. Ibid. n. 462. 463. SURTON in libro in eam rem conscripto. DUHAMEL *art. de préserver a* p. 121. ad 128.

(*u*) Quemadmodum notat DESAG. l. c. p. 475.

(*v*) Tom. praec. §. 28.

(*x*) Ibid. §. 24. 25.

minus suffocatur (*y*), & demum combustibilium corporum fumi flammam non suffocant, cum ipsi inflammabiles sint (*z*). Igitur non phlogisto, sed vapore eo, qui fit ex phlogisto, seu ignis pabulo vi ipsius ignis permutato, flamma in intercluso aëre suffocatur.

39. Ad halitus quod spectat, quibus animalia in aëre interclusa perimuntur perspicuum est eosdem ex perspiratione, inprimisque pulmonali provenire; nam & vitri interna superficies iis mortuis obnubilatur, & aperto recipiente odor putidus stomacho infensus percipitur (*a*): ex his vero constat halitus hujusmodi non mere aquosos esse (*b*), tum etiam ex eo, quod aëris elaterium infringant (24), quod mere aquosi halitus non praestant (*c*); demum ex eo, quod aqua saepe majori quantitate in aëre communi adsit, quam in respirato, quin tamen veneficam qualitatem praeseferat (*d*).

40. Cum vero ab allatas rationes putrido vaporis similis sit is, qui animalia in intercluso aëre suffocat, ob id ipsum ex alkalino volatili sale inprimis constare videbatur, eo vel maxime, quod Cl. LAGHIUS observaverit interclusa animalia ex hujus salis vapore, cujusmodi est spiritus sanguinis humani multo celerius sublata fuisse: placuit vero ejus etiam salis vim in flammam experiri. Itaque in interclusum aërem, qui jamdiu exhalantis spiritus salis ammoniaci calce parati halitibus fuerat saturatus, flammam immisi totumque statim aërem illum concepta flamma deflagasse observavi; idemque fuit eventus quando flammam immisi in interclusum

(*y*) Ibid. §. 2.

(*z*) Hoc argumento utitur HELMONTIUS l. c.

(*a*) Cl. LAGHI l. c. p. 82. 83.

(*b*) Ex aqua fiunt oleoso volatili halitu praegnante, oleate, non acida, nec alkalina, & praecipua causa sunt vitii, quod ex respirantium hominum turba in angusto spatio aër contrahit HALLER cl. phys. tom. II. p. 37. 38. tom. III. p. 353. 354.

(*c*) HALES. exp. 121. p. 260.

(*d*) Hoc argumento utitur idem HALESIUS p. 375.

rum aërem halitibus tincturae sulphuris volatilis similiter saturatum; quoniam vero aër respiratus flammam non modo non concipit, verum etiam extinguit (34), inde conficitur halitus, quibus aër respiratus foedatur, vel a salis volatilis halitibus discrepare, vel cum iisdem alios admisceri, qui & flammam suffocent, & ipsorum inflammationem impediant: ex his vero insuper confirmatur quod aliis jamdudum experimentis fuerat evictum pinguem substantiam ad salis volatilis constitutionem requiri, & intelligitur, cur putridorum corporum vapor aliquando inflammabilis sit, alias contra alkali volatili jam dissipato, aut vapore alio cum eodem admixto, vel eidem succedente flammam extinguat (e).

41. Aër autem hujusmodi ex flamma immissa accendebatur etiam aliquot menses, postquam dictis halitibus fuerat saturatus, ut propterea vapores semel per aërem dispersi diutissime eidem inhaereant, unde intelligitur quando aër flamma infectus, aut respiratus, aut artificialis id vitium diutissime retineat (f).

42. Dum vero dicimus halitus, quibus interclusa in aëre animalia suffocantur ad putridorum halituum naturam accedere simul notandum innumeros alios esse, qui animalibus noceant; idque demonstrant Cel. HAUKSBEI, DESAGULIERII, LAGHII experimenta, & ingens multitudo stirpium noxios halitus emittentium, & venefica vis factitii aëris ex tot diversis corporibus prodeuntis; indeque fit ut halitus venefici aliquando aëre sint leviores (g), alias fere graviores (h) aliquan-

(e) Vid. HALLER elem. phys. tom. III. n. k. l.

(f) Tom. praec. §. 28. 45.

(g) Hujusmodi esse videntur halitus omnes, qui in aperto, tranquilloque aëri innocui, in intercluso admodum perniciosi sunt, ut halitus animalium: hinc in noscomiis, in quibus foetor purum gravis est, vix tolerabilis evadit, si prope laquear conscendas, DUHAMEL l. c. p. 77. 277.

(h) Tales esse videntur halitus mephitidum quarundam, quae aperto aëri expositae sunt: hinc ex phiala in phialam ita transfundi possunt, ut interpositam flammam in transitu extinguant. *Sauvages effets de l'air* §. 119.

aliquando sonum intercipient (*i*), alias non item (*l*), olentes demum aliquando sint, alias vix ullum odorem praesferant (*m*).

43. Illud nunc inquirendum, quomodo collecti flammae, aut animalium vapores eadem in intercluso aëre suffocent: & ut primo de flamma dicamus, imminutam a vaporibus aëris elasticitatem in extinctionis causam adduci non posse alibi demonstravimus (*n*): simplicissima vero ratio in eo sita videtur, quod aër flammae vaporibus semel saturatus novorum vaporum, in quos per combustionem ignis pabulum fuisset resolvendum, eruptionem cohibeat, pari modo, quo in caeteris evaporationibus contingit (diff. praec. §. 9.). Sane interclusae in aëre flammae aequae diuturna duratio est, sive superiora, sive inferiora recipientis teneat, & non aër solum inficitur, qui ipsam ambit, aut supra ipsam eminet, sed totus aër undequaque aequabiliter vitatur, ut immissa nova flamma in limine suffocetur (1); quod argumento est ut dicamus non a calore (22), sed ab halitibus quaquaversum diffusis vitium illud proficisci: caetera etiam phaenomena evaporationis in clauso vase suppressae cum phaenomenis suffocationis flammae in aëre interclusae apprime convenire superius ostendimus (14).

44. Nec dissimilis ratio est ob quam stirpes in intercluso aëre pereunt; nam & aëris elaterium infringunt paulatim minus, & pari passu languescunt, adeo ut, quando demum perierunt, immissa ejusdem generis stirps & cito pereat; & aëris elaterium infringere amplius non possit (2. 26.), quae sane ostendunt vapores, ex quibus aëris elaterium imminuitur paulatim cohiberi, hinc aëreae elasticitatis jacturam

(i) Sauvages l. c. §. 160.

(l) Saggio delle transf. filosof. tom. 5. p. 10. 11.

(m) Vid. Cl. HALLER l. c. p. 113. n. f.

(n) Tom. praec. §. 2. 3.

ram minorem fieri, & stirpem languere, tandem vero omnino supprimi, hinc & elasticitatem aëris non amplius infringi, & stirpem interire: stirpibus enim necessaria exhalatio est, ut novum succum per radices haurire possint, ex cujus jugi affluxu earum vita, & incrementum dependet: ex quibus facile est intelligere cur stirpes solitariae ramos undique aequabiliter diffundant, altiores, gracilioresque sint quae in sylvis adolefcunt (o); nam solitariae stirpes aequabiliter undique exhalant; & propterea aequabilis fit nutritii laticis affluxus, & aequabile incrementum; in iis vero, quae confertae in sylvis sunt lateralium ramorum evaporatio minor est, quod ambientium stirpium halitibus refertus aër eandem cohibeat: hinc ad verticem copiosius affluens nutritius humor eandem in altitudinem magis, quam juxta aliam dimensionem expandit.

44. Obscurius aliquanto est, quo pacto infectus ex interclufione aër animalibus perniciem afferat: illud quidem facile est demonstrare, perinde ac de flamma diximus (43), vapores non ideo iisdem nocere, quod aëris elasticitatem imminuant: nam in aëre aliorum animalium halitibus jam infecto intereunt, etiamsi aut, aperto vase, aditus externo aëri concedatur, ut ad aequilibrium se componat, aut adjecta aqua, sicque condensato intra recipiens aëre, ad nativam elasticitatem restituatur (r): mihi etiam aliquando observare contigit ut immiffa in recipiens avicula interiret, immoto mercurio in appposito syphone, quod indicio fuit hiatum aliquem patuisse, per quem aër & insinuari, & renovari etiam ex parte potuerit, quod & paullo consueto diuturnior animalis vita confirmavit (p), quo quidem in casu cum non:
elasti-

(o) HALEs l. c. p. 300.

(p) BOYLEO etiam aliquando contigit, ut in aëre interclusa animalia interirent, etsi mercurius in indice immobilis perstaret (nov. exp. pneum. vit. XV. exp. 1. 2. & in transf. n. 63, art. 1.), aut exterior aër admitteretur, aperto vase (Ibid.).

elasticitate, sed pondere aër ageret, manifestum est imminutam a vaporibus aëris elasticitatem in mortis causam adduci non posse. Porro demonstravit Cel. HALLERUS animalia ex perenni inspiratione ob eandem rationem suffocari, propterquam in intercluso aëre pereunt (q), id autem, vel inde confirmatur quod, caeteris paribus, inspirationem eo breviorē edant, quae rarior aër citius inficitur, eo tardiorē, quo densior aër est, tardiusque pervertitur (13), atqui tamen dum in aperto aëre animalia inspirant, aëris pulmone contenti elasticitas tanta esse debet, ut cum aëris adglotridem incumbentis pondere aequilibratur, atque adeo immutata esse debet; ergo nec animalia spiritum retinentia, nec propterea in aëre interclusa ob imminutam ipsius elasticitatem suffocantur.

46. Si aër infectus per pulmones permearet, alter esset modus mechanicus, quo respirationi ineptus posset evadere; at in cuniculis, quos ejus rei experiundae causa, in intercluso aëre suffocaveram, detecta pleura, pulmonem ei undique contiguum observavi, eademque sub aquis perforata, nullas bullas aëreas prodiisse vidi, manifesto argumento, aërem etiam respiratione corruptum pulmonem non permeare: ex quibus jam constat, mechanicis quidem qualitibus, aërem respiratione corruptum dilatando pulmōni aptissimum esse, nec dubium quin machina, quae respirationis functionem imitatur (r), hanc aequè feliciter in hujusmodi aëre exhibere possit.

47. Quod si in physicos modo inquiramus, quibus inquinatus aër animalia suffocet primo quidem occurrit imminuta, aut etiam suppressa perspiratio a similibus vaporibus, quibus aër jam refertus sit, ac saturatus, cum ejus elasticitas ab immixtis aliis animalibus infringi amplius non possit

(24).

(q) Elem. phys. tom. III. p. 258. 359. 260.

(r) Vid. apud HALLER. l. c. p. 236. 237.

(24), & ex ea sane causa fieri videtur ut homines, qui ex puro in infectum aërem, etiam frigidiorē se transferunt, sensu caloris corripiantur, qui faciem imprimis invadit (f): verumtamen adeo necessaria non videtur perspiratio, ut animalia, hac etiam suppressa, brevi adeo debeant suffocari (1), & aliae evacuationes ejus defectum ad tempus saltem possent compensare, & demum in aëre admodum denso, in quo perspiratio tantopere imminuitur, animalia commode vivunt (20).

48. Alia vero, quae sese offert physica causa est nervosi systematis a deleterius in aëre congestis vaporibus irritatio, ac perturbatio, unde bronchia, & pulmones contrahantur, & aëri expansuro negent cedere. Hujusmodi vim sulphureis vaporibus BOERHAAVIUS tribuit (t), & Cl. SOVASTIUS mephitico cuidam vaporis etiam adscribit (u), etsi odore, & sapore destituatur (x): eo igitur verosimilius tribui posse videtur vaporibus, quibus respiratus aër inficitur, quique, Cl. LAGHIO notante, foerent adeo, ut stomachum moveant (y); & respirationis quidem vicissitudines, quae interclusis in aëre animalibus contingunt, conjecturae favere maxime videntur: principio enim, quando aër vaporibus foedari incipit, respiratio paullatim frequens, ac parva evadit, quod vix inspiratus aër molestia sua ad expirationem statim sollicitet; deinde vero, pluribus collectis vaporibus, ex brevi, & parva in brevem, magnamque mutatur (z), & in aëre vaporibus jam foedato hujusmodi respiratione animalia statim afficiuntur (1), quod significare videtur, aërem illum non solum molestum esse, sed etiam bronchia vi sua irritante constringere; ita ut eidem ingressuro magis resistent, unde

(f) DUHAMEL l. c. p. 28. 29.

(1) De morb. nervor. p. 259.

(u) L. c. §. 148. eaque sententia Cl. HALLERO placuit l. c. p. 254. n. d.

(x) Id. l. c. §. 144.

(y) L. c. p. 82. 83.

(z) LAGHI l. c. p. 82. VERATTI l. c. p. 269.

unde anxietas nascatur, quam laboriosa, ac magna inspiratione animal superare conetur: quoniam vero effectus idem est, sive vis aëris in pulmonem irruentis imminuatur, sive resistentia pulmonis adaugeatur, inde forte factum est, ut imminuta aëris elastica pressio a multis accusaretur; aut non imminutae pressioni aëris, sed auctae pulmonis resistentiae hanc respirationis laesionem tribuendam esse tum superius dicta (45. 46.) suadent, tum confirmant HALESII, & BOYLEI experimenta: hic enim cum aërem corruptum, in quo animal laborabat, condensaret, nihil levatum fuisse observavit (a); ille autem, compressa vesica, quae ad sectam vivi canis trachaeam adnexa erat, etsi aërem non renovaret, animal tamen refocillari perspexit (b). In primo nimirum experimento vis omnis aëris in pulmonem irruentis a dilatactione thoracis pendebat, ita ut, quacumque posita aëris densitate, ejus in pulmonem impetus tantus semper esset, quanta vis erat, qua pectoris cavum dilatabatur (18. not. l.), mirum propterea non est animal inde minus laboriosam respirationem affecutum non fuisse; secus vero in altero experimento, compressa vesica, aëris in pulmonem vis augebatur, quin necesse esset majorem nisum a pectoris parietibus exerceri, inde magis dilatabatur pulmo, & animal minori cum labore respirabat.

49. Ex his vero intelligitur, cur HALESIIUS ex vesica (c), aut recipiente flexilibus parietibus instructo (d) aërem respirans perfocationis sensum perceperit, & canis, cui vesica ad trachaeam adnexa erat, reapse fuerit suffocatus (e), & animalia intra vasa flaccescentibus vesicis obrurata non minus intereant (f), etiamsi in hisce adjunctis aër exterior vesicarum,

(a) Ita tamen, ut novum aërem non adderet, cont. II. art. IV. exp. 18.

(b) L. c. exp. 114. p. 217.

(c) Exp. 108. p. 204. 205.

(d) Exp. 116. p. 225. 227. 228.

(e) lb. exp. 114. p. 257. & seq.

(f) LAGHI l. c. p. 83.

rum, aut flexilis vasis parietibus incumbens eos ita comprimere debeat, ut inclusi aëris elasticitas cum atmosphaerae pondere perpetuo aequilibratur; intelligitur etiam cur animalia in condensato aëre intercluso intereant, quando ipsius elasticitas nativi aëris elasticitate adhuc major est, quemadmodum barometrum indicat (*g*): cur in nativo aëre intercluso intereant, etsi mercurii descensus in barometro minor sit, quam a mutata tempestate produci solet (*h*): cur contra in montano aëre, aut etiam in aëre per antliam rarefacto, dummodo renovetur, optime se habeant, etiamsi ipsius in pulmonem pressio longe minor sit (20): cur demum aër mephiticus (*i*), aut artificialis (*k*), qui eodem fere modo ac aër interclusus animalibus infensus est, etiam in aperto loco animalia suffocet, ubi tamen non elasticitate, sed pondere aëris pulmones dilatantur, quod a vaporibus huiusmodi immutari nequit, ut facile apparet, & barometrum ostendit (*l*): cur huiusmodi aër citius etiam, quam vacuum animalia suffocet (*m*), & animalia etiam, quae diu vacui vim tolerare possunt (*n*).

50. Vi-

(*g*) MUSSCH. in Ciment. p. 59.

(*h*) Notante Cel. HALLERO l. c. p. 208. 209. Profecto HALESIUS (append. exp. 6. pag. 371.) perfocationis sensum percepit, quando in recipiens, ex quo aërem respirabat, 18. pollices aquae penetraverant: recipientis vero diameter erat 9. pol., adeoque altitudo ejus aquae supra libellam 3. lin. circiter esse debuit; hunc pressio elastica respirati aëris tantumdem; hoc est 3. lin. aquae, aut $\frac{3}{14}$ lin. mercurii imminuta tantum erat.

(*i*) Vid. *Encyclop. artic. gas.*

(*k*) Hoc argumento HALESIUS inductus est ut crederet, artificialem aërem nequitiam nocere ob elasticitatis defectum l. c. p. 370. 371.

(*l*) Vid. HALLER. l. c. pag. 213: n. h.

(*n*) Vacuum torricellianum aviculas $\frac{1}{2}$ interimit (Cimentin. p. 49. 50.) aër ex pasta $\frac{1}{2}$ (BOYL. conf. II. art. V. exp. 5.) tum ex uvis ad solem exsiccatis (Ibid. exp. 10.)

(*n*) De ranis ib. exp. 7. p. 371., de cochleis exp. 6. p. 367.

50. Videtur utique respiratus aër ea in re a mephitico discrepare, quod convulsionibus nullas producat (o), quas tamen nullas observari verosimilius est, quod pedetentim halitibus aër saturet, sicque interclusa animalia vel iisdem paulatim affluant, vel paulatim debilitata, aut stupefacta minus ab iisdem afficiantur: etenim in aërem ab aliis animalibus jam infectum immissa animalia gravibus convulsionibus torqueri observavimus (r), & in aëre rariore, qui citius inficitur, ex convulsionibus interiisse (13) (p), & demum in nativo etiam, puroque aëre interclusa animalia ex convulsionibus periisse vidi, quando recipiens adeo angustam erat, ut cito foedatus aër eadem promte suffocaret (q).

51. Quum igitur nocua aëris vis ab admixtis vaporibus proveniat, mirum non est aërem corruptum directione quavis agitatam, aequè tamen nocere (r), imo vero cum vapores tenaciter plerumque aëri adhaereant (23. & seq.); inde est ut percolatione per liquida varia aër hujusmodi hætenus depurari non potuerit (f): frigore potius vehementi vapores cogente corrigi potuit (t). Equidem si peculiaris vaporum natura perspecta esset forte, aut liquores hujusmodi reperiri possent, qui vapores nocuos absorberent,

reti-

(o) Cl. LAGHI l. c. p. 88.

(p) Quae convulsionibus non confundendae cum iis, quibus principio animal corripiebatur ex repentina mutatione densitatis aëris, quaeque paulo post sedabantur. Vid. §. 13. not. c.

(q) In angusto recipiente nativo aëre pleno interclusos cuniculos intra dimidiam horam gravissimis convulsionibus correptos interiisse vidi. BOYLEUS etiam murem observavit in recipiente nativo aëre pleno, sed adeo angusto, ut 24' tantum vixerit, ex convulsionibus periisse. cont. II. art. IV. exp. 6.

(r) Flamma in intercluso aëre extinguitur, quacumque directione agitur (tom. praec. §. 21.), & accensae prunae licet interclusus aër rapidissimo motu adversus illas insuffletur (SHAW *leçon de chym. les. 2. exp. 5.*) & animalia (TABOR exerc. medic. p. 173.)

(f) Tom. praec. §. 25.

(t) lb. §. 39. Vel ipse spiritus salis ammon. calce paratus usque adeo volatilis frigore artificiali ex nive, & nitri spiritu in glaciem densatur (MARTINE *diff. IV. art. VI p. 211.*)

retinerentque, maxime si aër infectus per eosdem percolaretur; aut corpora alia invenirentur, quorum salutare halitus vel nocuos vapores ab aëre separarent, vel cum his coalescentes, eosdem in mediam, minimeque noxiam naturam converterent, quae quidem haëtenus occulta, penitusque incomperta esse videntur (*u*). Sed alius suppetit aërem depurandi modus, qui, etsi in usum revocari vix possit non parum tamen facit ad confirmandum noxiam zëris vim vaporibus esse adscribendam. Cum enim vapores minus quam aër elastici sint, & aëre rarefacto minus quam ipse dilatentur, semel autem ab eodem separati, nonnisi lente, ac tarde cum ipso iterum permisceantur (Dissert. praec. §. 12. 13.), propterea alterna, ac repetita rarefactione, ac condensatione aër maxima ex parte vaporibus expurgatur. Et hoc quidem artificio passerculum in eodem aëre alterne, & repetito ad dimidium rarefacto, ac ad nativam densitatem restitudo per hor. 3. 50' vivum servavi (*v*), cum in aëris immoti aequali quantitate par passerculus h. 1. 21' interiisset. Sed de peculiaribus quibusdam hujus experimenti adjunctis, deque aliis aërem depurandi modis accuratiora alias me spero prolaturum.

(*u*) De HALESI experimentis sale tartari institutis dubitationes nostras proposuimus tom. praec. §. 46., quae eo firmiores videntur, quod vapores nocui aquosi non sint §. 39. tum quod oleum tartari, aqua jam saturatum minorem quidem quam sal tartari, aliquem tamen effectum produxerit (exp. 116.), qui nullus esse debuisset, si in humidi absorptione vis corrigens posita esset: similiter in recipiente induto tela lanea oleo tartari imbuta flammam aequè perdurasse vidit; ac in nudo, etsi $\frac{2}{3}$ recipientis a tela occuparetur (exp. 117. p. 231.) verum & absorptus aër $\frac{2}{3}$ minor significare videtur flammam tantundem minorem fuisse (§. 12. 30.) ideo in angustiiori spatio aequè perdurasse.

(*v*) Scilicet passerculus inclusus erat phiala; cujus orificium flaccida ampla vesica obturabatur: phiala vero ipsa sub recipiente pneumatico posita erat, quemadmodum §. 19. Hujusmodi experimentum a BOYLEO olim in alium finem fuerat tentatum, ut scilicet decerneret num animalia rariiori aëri assuescere possent (nov. exp. pneum. tit. XIV. & in trans. n. 63. art. 1. eodem tit.), idque sibi alias repetendum propofuerat (ib. in post scripto.)

FELICIS VALLE
 TAURINENSIS
 FLORULA CORSICAE
 EDITA
 A CAROLO ALLIONO.

*S*cripsi olim * perisse totam illam suppellectilem herbarum, quas in Insula Corsicae legit Cl. VALLE, & fasciculum maritimarum Siirpium, quas acquiseram, ad Savonae territorium pertinere. Certior factus cum fuerim hasce stirpes etiam in Insula Corsicae circa S. Fiorenzo ab eodem fuisse collectas, in Botanicorum commodum eas recenseo, additis rariorum iconis & descriptione.

ACHILLEA foliis lanceolatis obtusis acute ferratis. *Linn. syst. p. 1224.*

Balsamita minor. *Dod. pempt. 295.*

AGROSTEMMA glabra, foliis lineari lanceolatis, petalis emarginatis coronatis. *Linn. syst. p. 1038.*

Lychnis foliis glabris calyce duriore. *Bocc. sic. 27.*

ALISMA foliis ovatis acutis, fructibus obtuse trigonis. *Linn. syst. p. 993.*

Plantago aquatica. *Cam. epit. 264.*

ALLIUM caule planifolio umbellifero, foliis inferioribus hirsutis, staminibus subulatis. *Linn. syst. p. 977.*

Moly angustifolium umbellatum. *Bauh. pin. 75.*

ALO-

* V. Rar. ped. spec. pag. 23.

- ALOPECURUS** panicula villosa oblonga folio involuto. *Linn. syst. p.* 871.
 Gramen alopecurum minus, spica longiore. *Bauh. pin.* 4.
- ANDRYALA** *Ger. galloprov. p.* 171.
 Sonchus villosus luteus major, & minor. *Bauh. pin.* 124.
- ANTHYLLIS** herbacea foliis quaterno pinnatis, floribus lateralibus. *Linn. syst. p.* 1160.
 Trifolium halicacabum. *Cam. hort.* 171. t. 47.
- ANTHYLLIS** fruticosa foliis pinnatis aequalibus, floribus capitatis. *Linn. syst. p.* 1160.
 Barba jovis pulchre lucens. *Bauh. hist.* 1. p. 885.
- ANTIRRHINUM** foliis ternis ovatis. *Linn. syst. p.* 1160.
 Linaria triphilla minor lutea. *Bauh. pin.* 212.
- ANTIRRHINUM** foliis hastatis alternis, caulibus procumbentibus, corollis calcaratis. *Linn. syst. p.* 1110.
 Elatine folio acuminato in basi auriculato, flore luteo. *Bauh. pin.* 253.
- ANTIRRHINUM** procumbens ramosum, foliis alternis ovatis acuminatis integerrimis, floribus candidis axillaribus. *Misc. Taurin. tom.* 1. p. 88.
 Hujus brevem descriptionem dedimus l. c., modo iconem exhibemus. Tab. I.
- ARENARIA** foliis subulatis subtus hispidis. *Linn. syst. p.* 1033.
- ARUM** acaule, foliis cordato-oblongis, spatula inflexa, spatula incurva. *Linn. syst. p.* 1250.
 Arisarum latifolium majus. *Bauh. pin.* 196.
- ASPHODELUS** caule nudo, foliis strictis subulatis striatis subfistulosis. *Linn. syst. p.* 982.
 Asphodelus minor. *Clus. hist.* 1. p. 197.
- ASTER** foliis lanceolatis integerrimis carnosissimis glabris, ramis inaequalibus, floribus corymbosis. *Linn. syst. p.* 1216.
 Tripolium majus caeruleum. *Bauh. pin.* 267.
- ASTRAGALUS** caulescens procumbens, leguminibus subulatis recurvatis glabris. *Linn. syst. p.* 1174.

Securidaca lutea minor corniculis recurvis. Bauh. pin.

349.

ASTRAGALUS caulescens procumbens leguminibus capitatis cordatis acutis hirsutis complicatis. *Linn. syst. p. 1174.*

Astragalus hispanicus siliqua epiglottidi similis flore purpureo major. Herm. lugdb. t. 75.

BELLIS caule subfolioso. *Linn. syst. p. 1220.*

Bellis leucanthemum annuum Italicum. Mich. gen. p. 34.

BRIZA spiculis cordatis, flosculis septendecim. *Linn. syst. p. 875.*

Græmen tremulum maximum. Bauh. pin. 2. Scheuch. gram. 204.

BUNIAS filiculis ovatis laevibus ancipitibus. *Linn. syst. p. 1136.*

Eruca maritima italica, siliqua hastae cuspidi simili. Bauh. pin. 99.

BUPLEURUM involucris universalibus nullis, foliis perfoliatis. *Linn. syst. p. 953.*

Perfoliata vulgatissima arvensis. Bauh. pin. 277.

BUTOMUS. *Linn. syst. p. 1010.*

Juncus floridus major. Bauh. pin. 112.

CALENDULA seminibus radii cymbiformibus echinatis, disci bicornibus. *Linn. hort. cliff. 425.*

Caltha arvensis. Bauh. pin. 275.

CAMPANULA caule dichotomo, foliis sessilibus utrinque dentatis, floralibus oppositis. *Linn. syst. p. 295.*

Rapunculus minor foliis incis. Bauh. pin. 92.

CAMPANULA foliis radicalibus reniformibus, caulinis linearibus. *Linn. syst. p. 925.*

Campanula minor rotundifolia vulgaris. Bauh. pin. 93.

CARDAMINE foliis pinnatis, axillis stoloniferis. *Linn. syst. p. 1131.*

Nasturtium aquaticum majus, & amarum. Bauh. 3. pin.

104.

CATANANCHE squamis calycinis inferioribus ovatis. *Linn. syst.*

p. 1197.

Chondrilla caerulea, cyani capitulo. *Bauh. pin.* 130.

CENTAUREA calycibus setaceo spinosis, foliis decurrentibus sinuatis spinosis. *Linn. syst.* p. 1232.

Carduus galactites. *Bauh. hist.* 3. p. 54.

CHRYSANTHEMUM

Chrysanthemum latifolium. *Bauh. hist.* 3. p. 105.

Tota planta leviter pilosa est. Folia amplexicaulia cum auriculis; inferiora spatulata, superiora fere linearia, omnia brevibus, & acutis denubibus simplicibus secta. Squamae calycis membranaceae, ut in chrysanthemo segetum, sed sub hirsulae. Semiflosculi lutei longiores, & graciliores quam in chrysanthemo segetum, viginti circiter.

CISTUS arborefcens foliis linearibus sessilibus, utrinque pubescentibus trinervis, alis nudis. *Linn. syst.* p. 1077.

Cistus ladanifera monspeliensium. *Bauh. pin.* 467.

CISTUS herbaceus exstipulatus, foliis oppositis trinerviis, racemis ebracteatis. *Linn. syst.* p. 1078.

Helianthemum flore maculoso. *Col. ecphr.* 2. p. 78. t. 77.

CISTUS arborefcens, foliis oblongis tomentosis incanis sessilibus supra enerviis. *Linn. syst.* p. 1077.

Cistus mas folio oblongo incano. *Bauh. pin.* 464.

CISTUS

Chamaecistus luteus toroso folio hispanicus. *Barrel. ic.* 436.

CISTUS frutescens foliis ovatis petiolatis utrinque hirsutis, alis nudis. *Linn. syst.* p. 1077.

Cistus foemina folio salviae. *Bauh. pin.* 464.

CISTUS suffruticosus stipulatus, erectus, foliis oblongo ovatis, acuminatis, subtrus subincanis, minime ciliatis. *V. Tab. II.*

Plurimum accedit ad Helianthemum vulgare flore luteo

C. B. a quo distinguitur foliis ex ovato sensim acuminatis, nec ellipticis, obscure virentibus, brevissime pilosis, nullis ciliatis. Caules duri lignosi, subrubentes, rotundi, subin-

cani, & aliquantulum pilosi sunt in hac cisti specie.

CLYPEOLA perennis filiculis bilocularibus ovatis dispermis.

Linn. syst. p. 1130.

Thlapsi narbonense centunculi angusto folio. Tabern. ic. 461.

CNEORUM. *Linn. syst. p. 867.*

Chamaelea tricoccus. Bauh. pin. 462.

CONVOLVULUS foliis palmatis cordatis fericeis, lobis repandis, pedunculis bifloris. *Linn. syst. p. 922.*

Convolvulus argenteus folio althaeae. Bauh. pin. 295.

CONVOLVULUS foliis linearibus acutis, caule ramoso subdichotomo, calycibus mucronatis pilosis. *Linn. syst. p. 923.*

Convolvulus linariae folio. Bauh. pin. 295.

CONVOLVULUS foliis reniformibus, pedunculis unifloris. *Linn. syst. p. 924.*

Soldanella maritima minor. Bauh. pin. 295.

CORIS. *Linn. syst. p. 931.*

Coris caerulea maritima. Bauh. pin. 280.

CYNOSURUS paniculae spiculis sterilibus pendulis ternatis, floribus aristatis. *Linn. syst. 836.*

Gramen barcinonense panicula densa aurea. Tournef. inst. 523.

CYTISUS floribus subsessilibus, peduncularisque, foliis conduplicatis tomentosis, caulibus fruticosis. *Linn. syst. pag. 1167.*

Trifolium argenteum, floribus luteis. Bauh. hist. 2. p. 359.

ECHIUM caule simplici erecto, foliis caulinis lanceolatis hispidis, floribus spicatis lateralibus. *Linn. syst. p. 916.*

Echium vulgare. Bauh. pin. 254.

ECHIUM calycibus frutescentibus distantibus, caule procumbente. *Linn. syst. p. 916.*

Echium creticum latifolium rubrum. Bauh. pin. 254.

EUPHORBIA umbella multifida: dichotoma, involuclis subcordatis: primariis triphyllis, caule arboreo. *Linn. syst. p. 1050.*

Tithymalus dendroides. Cam. epit. 965.

EUPHORBIA umbella quinquefida: trifida, dichotoma, involucellis diphyllis reniformibus, foliis amplexicaulibus, cordatis serratis. *Linn. syst. p. 1049.*

Tithymalus characias, folio serrato. Bauh. pin. 290.

EUPHORBIA umbella quinquefida, trifida, bifida, involucellis ovatis, petalis integris, fol. lanceolatis subpilosis apice serrulatis. *Linn. syst. p. 1049.*

Tithymalus palustris villosus mollior erectus. Barr. rar. 41. r. 885.

EUPHORBIA dichotoma; fol. integerrimis semicordatis, floribus solitariis axillaribus, caul. procumbentibus. *Linn. syst. p. 1048.*

Peplis maritima folio obtuso. Bauh. pin. 293.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma, involucellis lanceolatis, foliis linearibus. *Linn. syst. p. 1048.*

Tithymalus S. Esula exigua. Bauh. pin. 291.

EUPHORBIA umbella subquinquefida simplici, involucellis ovatis: primariis triphyllis, foliis oblongis integerrimis, caule fruticoso. *Linn. syst. p. 1048.*

Tithymalus maritimus spinosus. Bauh. pin. 291.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma, involucellis ovatis, fol. integerrimis obovatis petiolatis. *Linn. syst. p. 1048.*

Peplus S. Esula rotunda. Bauh. pin. 292.

EUPHORBIA umbella suboctifida: bifida, involucellis subovatis, fol. spathulatis patentibus carnosis mucronatis margine scabris. *Linn. syst. p. 1050.*

Tithymalus myrsinites legitimus. Clus. hist. 2. p. 189.

EUPHORBIA umbella quadrifida: bifida, foliis cuneiformi-linearibus tridentatis. *V. Tab. III.*

Procumbere videtur haec Euphorbiae species, quae ex radice alba simplici tortuosa varios fundit cauliculos semipalmares. Folia glabra habet sessilia sublinearia in fine ampliora, & tridentata. Umbella quadrifida. Involucris universalis folia quatuor

quatuor ex cordato ampliori principio, deinde linearia apice tridentato. Umbellula bifida. Involucella diphylla foliis amplioribus. Fructus glabri.

EUPHORBIA umbella quinquesida: dichotoma involucellis cordatis acutis, foliis lineari-lanceolatis, ramis floriferis. *Linn. hist. p. 1049.*

Tithymalus annuus lunato flore linariae folio longiore. *Mor. ox. 111. p. 339.*

EUPHRASIA foliis dentato-palmatis, floribus subcapitatis. *Linn. syst. p. 1107.*

Euphrasia tertia latifolia pratensis. *Col. ecphr. 200. t. 202. f. 2.*

FILAGO floribus sessilibus terminalibus, foliis floralibus majoribus. *Linn. syst. p. 1235.*

Gnaphalium roseum hortense. *Bauh. pin. 263.*

FRANCHENIA foliis obovatis retusis subtus pulveratis. *Linn. syst. p. 989.*

Frankenia maritima quadrifolia supina, chamaesyces folio, & facie. *Mich. gen. 23.*

FUMARIA pericarpis monospermis racemosis, caule diffuso. *Linn. syst. p. 1153.*

Fumaria officinarum, & dioscoridis. *Bauh. pin. 143.*

GALIUM foliis verticillatis lineari-setaceis, pedunculis folio longioribus, *Linn. syst. 892.*

Galium nigropurpureum montanum tenui folium. *Col. ecphr. 1. p. 298.*

GALEOPSIS internodiis caulinis aequalibus: verticillis omnibus remotis. *Linn. syst. p. 1100.*

Sideritis arvensis angustifolia rubra. *Bauh. pin. 233.*

GENTIANA corollis octofidis, foliis perfoliatis. *Linn. syst. p. 952.*

Centaurium luteum perfoliatum. *Bauh. pin. 278.*

GERANIUM pedunculis multifloris calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis cordatis sublobatis. *Linn. syst. p. 1143.*

Gera-

Geranium folio althaeae. *Bauh. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis renatis lobatis. *Linn. syst. p.* 1143.

Geranium acu longissima. *Bauh. pin.* 319.

GLOBULARIA caule fruticoso, foliis lanceolatis tridentatis, integrisque. *Linn. p.* 888.

Alypum monspeliensium, s. Frutex terribilis. *Bauh. hist.* 1. p. 598.

GLOBULARIA caule herbaceo, foliis radicalibus tridentatis, caulinis lanceolatis. *Linn. syst. p.* 888.

Bellis caerulea, caule folioso. *Bauh. pin.* 262.

GNAPHALIUM foliis linearibus, caule fruticoso ramoso, corymbo composito. *Linn. syst. p.* 1210.

Elichrysum s. Staechas citrina angustifolia. *Bauh. pin.* 264.

GNAPHALIUM caule erecto dichotomo, floribus pyramidatis axillaribus. *Linn. sp. pl.* 857.

Gnaphalium minimum alterum nostras stoechadis citrinae foliis tenuissimis. *Pluk. alm.* 172. t. 298. f. 2.

GNAPHALIUM caule simplicissimo foliis amplexicaulibus lanceolatis denticulatis, corymbo composito terminali. *Misc.*

Taurin. tom. 1. p. 95. *cum descript.*

Hujus iconem exhibet Tab. IV.

HIPPOCREPIS leguminibus sessilibus solitariis. *Linn. syst. p.* 1169.

Ferrum equinum siliqua singulari. *Bauh. pin.* 349.

HYOSCYAMUS foliis petiolatis, floribus sessilibus. *Linn. syst.* p. 932.

Hyoscyamus albus major. *Bauh. pin.* 169.

HYOSERIS fructibus subglobosis glabris, caule ramoso. *Linn. syst. p.* 1196.

Hedypnois annua. *Tournef. inst.* 478.

HYOSERIS scapis unifloris nudis, foliis glabris lyrato-hastatis angulatis. *Linn. syst. p.* 1196.

Dens leonis minor foliis radiatis. *Bauh. pin.* 129.

ILLECEBRUM floribus bracteis nitidis obvallatis, caulibus procumbentibus, fol. laevibus. *Linn. syst.* p. 943.

Paronychia hispanica. *Clus. hist.* 2. 183.

INULA foliis dentatis hirsutis; radicalibus ovatis, caulinis lanceolatis amplexicaulibus, caule paucifloro. *Linn. syst.* p. 1218.

Asteris altera species apula. *Col. ecphr.* 1. p. 251. t. 253.

INULA foliis oblongis integris hirsutis caule piloso corymboflo floribus confertis. *Linn. syst.* p. 1218.

Conyza 3. austriaca. *Clus. hist.* xx.

LAGURUS spica ovata aristata. *Linn. syst.* p. 878.

Gramen spicatum tomentosum longissimis aristis donatum. *T. Scheuch. gram.* 58.

LAPSANA calycibus fructus undique patentibus, radiis subulatis, foliis lanceolatis indivisis. *Linn. syst.* p. 1197.

Hieracium filiqua falcata. *Bauh. pin.* 128.

LATHYRUS pedunculis unifloris cirrho terminatis, cirrhis diphyllis: foliolis linearibus. *Linn. syst.* p. 1164.

Lathyrus angustissimo folio, femine anguloso. *Tournef. inst.* 395.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis aphyllis, stipulis fagittato-cordatis. *Linn. syst.* p. 1164.

Vicia lutea, foliis convolvuli minoris. *Bauh. pin.* 345.

LAVANDULA foliis lanceolato-linearibus, spica comosa. *Linn. syst.* p. 1097.

Stachas brevioribus ligulis. *Clus. hist.* 1. p. 344.

LAVATERA caule arboreo, foliis septemangularibus tomentosis plicatis, pedunculis confertis unifloris axillaribus. *Linn. syst.* p. 1147.

Malva arboreascens. *Dod. pempt.* 653.

LEPIDIUM foliis lanceolatis amplexicaulibus dentatis. *Linn. syst.* p. 1127.

Draba umbellata, five *draba major capitulis donata*. *Bauh.*

pin. 109.

LINUM calycibus subulatis, foliis lanceolatis strictis, mucronatis, margine scabris. *Linn. syst.* p. 968.

Passerina lobelii. *Bauh. hist.* 3. p. 454.

LOTUS leguminibus subquinatis, arcuatis compressis, caulibus diffusis. *Linn. syst.* p. 1179.

Lotus peculiaris filiquosa. *Cam. hort.* 91. t. 25.

LOTUS capitulis aphyllis, foliis sessilibus quinatis. *Linn. syst.* p. 1179.

Dorycnium monspeliensium. *Lob. ic.* 51.

LOTUS capitulis dimidiatis, caule diffuso ramosissimo, foliis tomentosis. *Linn. syst.* p. 1179.

Lotus filiquosa maritima lutea cytisi facie. *Barrel. ic.* 1031.

LYSIMACHIA calycibus corollam superantibus, caule erecto ramosissimo. *Linn. syst.* p. 919.

Linum minimum stellatum. *Bauh. pin.* 214.

LYTHRUM foliis alternis linearibus, floribus hexandris. *Linn. syst.* p. 1045.

Salicaria hyslopi folio latiore. *Hall. jen.* 147. t. 2. f. 3.

MEDICAGO pedunculis racemosis, leguminibus cochleatis spinosis, caule procumbente tomentoso. *Linn. syst.* p. 1180.

Medica marina. *Clus. hist.* p. 243.

MEDICAGO leguminibus reniformibus, margine dentatis, foliis pinnatis. *Linn. syst.* p. 1180.

Loto affinis filiquis hirsutis circinnatis. *Bauh. pin.* 333.

MEDICA pedunculis multifloris, leguminibus cochleatis spinulis hamatis, stipulis integris. *Ger. Galloprov.* p. 518.

Medica echinata hirsuta. *Bauh. hist.* p. 386.

MENYANTHES foliis cordatis integerrimis, corollis ciliatis. *Linn. syst.* p. 918.

Nymphaea lutea minor, flore simbriato. *Bauh. pin.* 194.

MYOSOTIS feminibus nudis, foliis hispidis, racemis foliatis. *Linn. syst.* p. 913.

- Echium luteum minimum. *Bauh. pin.* 255.
- ONONIS pedunculis unifloris filo subterminatis, foliis ternatis stipulis dentatis, *Linn. syst. p.* 1160.
Anonis pusilla villosa, & viscosa (purpurascente flore. *Tourn. inst.* 408.
- ORCHIS rad. subrotundis, galea longissime rostrata, labello vomerem referente *Hall. orch. n.* 6.
Orchis macrophilla. *Col. ecphr. p.* 321.
- ORCHIS radicibus subrotundis labello holosericeo emarginato, medio processu brevissimo *Hall. orch. n.* 5.
Orchis fucum referens major foliis superioribus candidis, & purpurascentibus. *Bauh. pin.* 83.
- ORNITHOPUS foliis ternatis subsessilibus, impari maximo. *Linn. syst. p.* 1168.
Scorpioides postulacae folio. *Bauh. pin.* 287.
- ORNITHOPUS foliis pinnatis, leguminibus subarcuatis, *Linn. syst. p.* 1168.
Ornithopodium minus. *Bauh. pin.* 350.
- OTHONNA foliis pinnatifidis tomentosis, laciniis sinuatis; caule fruticoso. *Linn. syst. p.* 1235.
Jacoboea maritima. *Bauh. pin.* 131.
- PAPAVER capsulis subglobosis torosis hispidis, caule folioso multifloro. *Linn. syst. p.* 1072.
Argemone capitulo brevior. *Bauh. pin.* 172.
- PASSERINA foliis carnosis extus glabris, caulibus tomentosis. *Linn. syst. p.* 1004.
Thymelaea tomentosa, foliis sedi minoris. *Bauh. pin.* 463.
- PHILLYREA foliis lanceolatis integerrimis. *Lin. hort. Cliff.*
Phillyrea angustifolia. *Bauh. pin.* 476.
- PISTACIA foliis abrupte pinnatis: foliolis lanceolatis. *Linn. syst. p.* 1290.
Lentiscus vulgaris. *Bauh. pin.* 399.
- PISTACIA foliis impari-pinnatis: foliolis ovato-lanceolatis. *Linn. syst. p.* 1290.

- Terebinthus vulgaris. *Bauh. pin.* 400.
- PLANTAGO fol. linearibus dentatis, scapo tereti. *Linn. syst.*
p. 896.
- Coronopus sylvestris hirsutior. *Bauh. pin.* 190.
- PLANTAGO caule ramoso suffruticoso, foliis integerrimis,
spicis aphyllis. *Linn. syst.* p. 896.
- Psyllium majus erectum. *Bauh. pin.* 191.
- PLANTAGO foliis lanceolatis flexuosis villosis, spica cylin-
drica erecta, scapo tereti foliis longiore. *Linn. syst.*
895.
- Holosteum hirsutum albicans majus. *Bauh. pin.* 190.
- POLYGALA floribus cristatis racemosis, caulibus herbaceis
simplicibus procumbentibus, fol. lineari lanceolatis. *Linn.*
syst. p. 1154.
- Polygala major. *Bauh. pin.* 215.
- RHAMNUS inermis floribus divisis stigmatibus triplici. *Linn. syst.*
p. 937.
- Phylica elatior. *Bauh. pin.* 477.
- RUBIA foliis fenis. *Linn. syst.* p. 893.
- Rubia sylvestris aspera. *Bauh. pin.* 33.
- RUMEX floribus hermaphroditis: valvulis dentatis nudis; pe-
dicellis planis reflexis. *Linn. syst.* p. 990.
- Acetosa ocyimi folio, bucephalophoros. *Col. ecphr.* 1. p. 151.
t. 150.
- SAGITTARIA foliis sagittatis acutis. *Linn. syst.* p. 1270.
- Sagitta aquatica minor latifolia. *Bauh. pin.* 194.
- SALVIA fol. sinuato-ferratis, corollis calyce angustioribus.
Linn. syst. p. 854.
- Horminum verbenacae laciniis angustifolium. *Triumph. obs.*
66. t. 66.
- SCIRPUS culmo tereti nudo, spica subovata imbricata. *Linn.*
syst. p. 867.
- Scirpus equiseti capitulo majore. *T. Scheuchz. gram.* 360.

SCORPIURUS pedunculis subquadrifloris, leguminibus extrorsum spinis confertis acutis. *Linn. syst. p.* 1169.

Scorpioides bupleuri folio, corniculis asperis magis in se contortis, & convolutis. *Morif. hist. 2. p.* 127. *f.* 2. *t.* 11. *f.* II.

SCORZONERA foliis linearibus dentatis acutis, caule erecto. *Linn. syst. p.* 1191.

Scorzonera foliis laciniatis. *Tournef. inst.* 477.

SCROPHULARIA foliis cordatis: superioribus alternis, pedunculis axillaribus bifloris. *Linn. syst. p.* 1113.

Scrophularia peregrina. *Cam. hort.* 157. *t.* 43.

SCROPHULARIA foliis cordatis, pedunculis axillaribus solitariis dichotomis. *Linn. syst. p.* 1114.

Scrophularia flore luteo. *Bauh. pin.* 236.

SHERARDIA foliis omnibus verticillatis, floribus terminalibus. *Linn. syst. p.* 590.

Rubeola arvensis repens caerulea. *Bauh. pin.* 334.

SIDERITIS herbacea decumbens, calycibus spinosis: labio superiore indiviso. *Linn. syst. p.* 1098.

Sideritis genus verticillis spinosis. *Bauh. pin. hist.* 3. *p.* 428.

SILENE calycibus fructiferis pendulis inflatis angulis decem scabris. *Linn. syst. p.* 1032.

Viscago hirsuta sicula, lychnidis aquaticae facie supina. *Dill. elth.* 421. *t.* 312. *f.* 404.

SILENE hirsuta, petalis emarginatis, flor. erectis, fructibus reflexis pedunculatis alternis. *Linn. syst. p.* 1031.

Viscago cerastii foliis, vasculis pendulis anglica. *Dill. elth.* 417. *t.* 309. *f.* 398.

SISYMBRIUM siliquis axillaribus sessilibus subulatis aggregatis, fol. repando-dentatis. *Linu. syst. p.* 1132.

Erysimum polyceratium s. corniculatum. *Bauh. pin.* 101.

SMILAX caule aculeato angulato, foliis dentato-aculeatis, cordatis novemnerviis. *Linn. syst. p.* 1292.

Smilax aspera fructu rubente. *Bauh. pin.* 296.

SONCHUS foliis omnibus integris denticulato spinosis, ramis unifloris, semiflocculis quinquedentatis. *Enum. nic. p. 85.*

Sonchus pedunculo nudo, foliis lanceolatis amplexicaulibus indivisis, retrorsum argute dentatis. *Linn. syst. pag. 1192. ?*

SPARTIUM foliis ternatis, ramis angulatis spinosis. *Linn. syst. p. 1156.*

Acacia trifolia. Bauh. pin. 392.

STACHIS ramis ramosissimis, foliis lanceolatis glabris. *Linn. syst. p. 1110.*

Sideritis viscosa cretica bitumen redolens. Zan. hist. 136.

STATICE caule nudo paniculato, foliis spatulatis retusis. *Linn. syst. p. 967.*

Limonium maritimum minus, foliis cordatis. Bauh. pin. 192.

TAMUS foliis cordatis indivisis. *Linn. syst. p. 1292.*

Bryonia sylvestris baccifera. Bauh. prodr. 135.

TEUCRIUM foliis subtriscupidatis linearibus, floribus sessilibus. *Linn. syst. p. 1094.*

Chamaepitys moschata foliis serratis. Bauh. pin. 249.

THLASPI siliculis subrotundis, foliis amplexicaulibus cordatis subserratis. *Linn. syst. p. 1128.*

Thlaspi arvense perfoliatum majus. Bauh. pin. 106.

TRAGOPOGON calycibus corolla brevioribus inermibus, foliis lyrato sinuatis. *Linn. syst. p. 1191.*

Chondrilla foliis cichorei tomentosis. Bauh. pin. 130.

TRAGOPOGON calycibus corolla radio longioribus, foliis integris nudis, pedunc. superne incrassatis. *Linn. syst. pag. 1191.*

Tragopogon purpuro-caeruleum, porri folio, quod Artesi vulgo. Bauh. pin. 274.

TRAPA. *Linn. syst. p. 898.*

Tribulus aquaticus. Bauh. pin. 194.

- TRIFOLIUM spicis subovatis, calycibus inflatis, dorso gibbis, caulibus prostratis. *Linn. syst. p.* 1178.
 Trifolium pratense folliculatum. *Bauh. pin.* 329.
- TRIFOLIUM spicis villosis ovalibus, dentibus calycinis fetaceis aequalibus. *Linn. syst. p.* 1177.
 Trifolium arvense humile spicatum s. Lagopus. *Bauh. pin.* 328.
- TRIFOLIUM spicis villosis conico-oblongis, dentibus calycinis fetaceis subaequalibus, foliolis linearibus. *Linn. syst. p.* 1177.
 Trifolium montanum angustissimum spicatum. *Bauh. pin.* 328.
- VALERIANA floribus monandris, foliis pinnatifidis. *Linn. syst. p.* 860.
 Valeriana foliis calcitrapae. *Bauh. pin.* 164.
- VERONICA racemis lateralibus, fol. ovatis rugosis dentatis sessilibus, caule debili. *Gerar. p.* 324. *Linn. syst. p.* 849.
 Chamaedrys spuria minor rotundifolia. *Bauh. pin.* 249.
- VERONICA, floribus solitariis, fol. cordatis incisis pedunculo longioribus. *Linn. syst. p.* 849.
 Alfine veronicae foliis, flosculis cauliculis adhaerentibus. *Bauh. pin.* 250.
- VICIA leguminibus sessilibus reflexis pilosis pentaspermis, corollae vexillis villosis. *Linn. syst. p.* 1166.
- VICIA siliquis sessilibus erectis foliis imis ovatis, superioribus linearibus. *Hall. helv. p.* 598.
 Vicia angustifolia. *Riv. t.* 55.
- URTICA foliis oppositis ovatis serratis, amentis fructiferis globosis. *Linn. syst. p.* 1265.
 Urtica urens pilulas ferens. *Bauh. pin.* 232.

A D D I T I O N

A U X R É F L E X I O N S

Sur le Fluide Élastique

P A R M. D E S A L U C E.

IL m'est tombé entre les mains un livre , qui a pour titre *l'Artillerie raisonnée*, après que mon mémoire a été imprimé , & j'y ai trouvé quelques propositions, qui sont entièrement opposées à ce que j'ai avancé, & qui en même-tems ne me semblent pas appuyées ni à une théorie fort-éclairée, ni à des expériences fort-exactes : je ne rapporterai que les plus frappantes de celles que j'ai déjà parcouru .

1. La première (*pag. 86.*) porte en substance , qu'en parvenant à disposer le canal de la lumière de manière que le feu prenne au centre de la charge , il en résulte des petites différences dans les portées ; je ne lui conteste-rai pas le fait , lorsque la charge sera proportionnée à l'arme ; mai je dirai seulement en passant, que comme on réüffit à accélérer par là l'inflammation torale de la poudre, on peut aussi augmenter la charge, c'est ensuite à l'expérience à juger si l'avantage, qui résulte ainsi d'un plus grand effort, n'est point balancé par bien d'autres inconvéniens , & entr'autres par ceux que nous avons indiqué (*pag. 138.*).

2. La seconde proposition (*pag. 91.*) est que l'objet des chambres , qu'on fait aux pièces de 24 & de 16 , est de diminuer l'effort de la poudre sur la lumière, ce qui est absurde : car cet effort se faisant par la distribution uniforme du fluide développé, la pression est égale dans tous les points : il se ferait d'ailleurs exprimé plus exactement dans
la

la seconde raison, qu'il apporte, savoir de la plus grande épaisseur de l'arme dans cet endroit, s'il avait dit, que l'effet en est modifié.

3. La troisième, qu'il parait déduire de l'expérience (pag. 105.) ne me semble pas mériter d'être réfutée sérieusement; je ne ferai que la rapporter dans son entier, & je prierai les Lecteurs de voir ce que j'ai dit à cet égard dans le Chap.^e premier; *L'on a trouvé*, dit-il, *que les pièces chargées sans bouchon sur la poudre portoient régulièrement plus loin, que celles qu'on tirait avec des bouchons refoulés, savoir de six ou huit coups sur la poudre, suivant l'usage, & de six sur le boulet &c.* Nous observerons enfin, qu'il faut qu'il ait employé de très-petites quantités de poudre dans les pièces; dont il a fait usage, & cela devient alors très-naturel; mais c'est un des préjugés, dont on n'a pas encore pû se défaire, & qui est la source de beaucoup de maximes équivoques, & souvent fausses; nous en avons un exemple dans la théorie du jet des bombes, que les Auteurs modernes n'ont pas encore voulu abandonner, quelque un d'entr'eux s'efforçant même de nous persuader, qu'elle est assez exacte, & que les différences, qui résultent dans la pratique ne sont d'aucune considération: généralement je crois, que les essais en petit dans ce qui regarde l'Artillerie sont non seulement superflus, mais même pernicieux, parceque nous ne connaissons point les loix, suivant lesquelles agissent toutes les causes, qui concourent dans un effet; c'est pour cela aussi que tous les Problèmes qui y ont rapport se réduisent en parlant à la rigueur à des cas particuliers.

4. L'expérience nous apprend, que de deux qualités de poudre il arrive souvent, que dans les petites charges une a l'avantage sur l'autre, & que non seulement elle ne le conserve plus dans les grandes (a), mais que sa force en est alors diminuée, & j'observe, que c'est celle, qui est plus

(a) MANUEL de l'Artificier. pag. 16.

plus facile à s'enflammer, jusqu'à un certain point, qui a l'avantage dans les petites charges, & au contraire, que celle qui a moins d'inflammabilité gagne dans le service en grand.

Ne ferait-ce point, parceque dans les grandes charges le plus ou moins grand effort, dépend entièrement de l'intensité de la flamme dont la matière est susceptible, au lieu que dans les petites charges il n'est pas nécessaire, qu'elle soit si grande, parceque elles sont bien-rôt détruites, & qu'elles sont dans un moindre rapport avec l'arme, pendant que le diamètre de la lumière semble en avoir un plus grand dans les petites, que dans les grandes armes?

5. Je ne fais de même pas concevoir ce qu'il prétend déduire par ce raisonnement (pag. 142. à la fin): *Le peu de longueur de l'ame du canon fait aussi que le boulet perd moins de son mouvement ; & qu'il éprouve une moindre résistance de la part de l'air qui s'oppose à sa sortie.* Cette raison de la moindre résistance de la part de l'air ne me paraît pas conforme aux principes de physique, car la colonne d'air pèse & résiste également sur un cylindre, qu'il soit court ou long, puisqu'elle est toujours en équilibre avec le reste de l'Atmosphère.

ERRATA, ET ADDENDA.

Pag. 6.	lin. 12.	transversum	lege transversum
	24.	&	ei
8.	7.	Ammeniana	Ammaniana
9.	3.	calyci	calyce
9.	18.	un	un den
11.	25.	albidus	dilute violaceus
12.	32.	fulco	& fulco
15.	6.	separat	superat
	18.	aliis	alis
16.	14.	autem	dele autem
18.	19.	parum	ex

Pag. 19.	lin. ult.	<i>Ebro</i>	<i>Ebrodunum</i>
27.	13.	neutrum	neutra
29.	3.	Jeman	Alyfso M.
31.	23. & 24.	<i>dele in M.</i>	Chetillon &c. usque
		ad provenit	
33.	8.	forte	fere
37.	23.	recentiorem	recentiorum
39.	7.	lutea	lutea sunt
44.	27.		<i>dele ad caulem</i>
45.	7.		<i>dele synonymum co-</i>
			lumnæ
	14.	ad caulem	amplexicaulibus
Pag. 51.	lin. 28.	<i>Lamium montanum &c. leg. Lamium garganicum subinc. fl. purpurasc. cum labio superio- crenato D. Micheli apud TILLI pis.</i>	
52.	3.	Clinopodium	leg. Clinopodium
53.	4.	psyllium	psyllium
53.	10.	16. campanulatum
55.	6.	triba	triloba
55.	18.	phifalodes	phyfalodes
62.	27.	57. Cardamine lunaria
63.	7.	viscosum	viscosa
64.	3.	hirsutus	hirsuta
	19.	squarrosum	incarnatum
65.	4.	galloprovinciale	caput galli
66.	17.	biennis	pimpinelloides
69.	14.	serpillifolia	serpillifolia
70.	19.	<i>Monostylae</i>	1. <i>Monostylae</i>
71.	7.	Aquilegia silvestris	Aquilegia silvestris*
	8.	Nigella damascena	Nigella damascena*
	18.	ulmaria	ulmaria *
73.	11.	<i>Tetrantherae</i>	<i>Pentantherae</i>
75.	24.	scalinus	fecalinus

Stirpes praetermissae suis locis inferendae.

Pag. 50.

Veronica latifolia *

Valeriana rubra *

51. Post *Thymum*

Hyssopus officinalis *

Satureja juliana *

hortensis *

montana *

Ante *Lamium*

Ocimum basilicum

frutescens

52.

Melissa grandiflora *

53.

Antirrhinum minus *

Scrophularia vernalis *

54. Post *Ilicem aquifolium*

Vitex agnus castus

57.

Aristolochia pistilochia

59.

Santolina annua

62.

Erysimum cheirantoides

65.

Lathyrus articulatus

Robinia caragana

Sium ficulum

66.

Chaerophyllum aromaticum

67.

Malva hispanica

68.

Rhus vernix

toxicodendron

70.

Crataegus aria *

Mespilus cotoneaster *

71.

Aquilegia alpina *

71. Post *Ifopyrum*

Ranunculus ficaria *

sceleratus *

aconitifolius *

nivalis *

bulbosus *

repens *

acris *

arvensis *

asiaticus

Pag.

		Potentilla verna *
		rupetris *
		supina
		Potentilla <i>foliis ternatis hirsutis</i> <i>caule erecto umbellifero.</i> HALL. <i>gott. p. 108.</i>
71.		Geum montanum *
71.	Post <i>Geum</i>	Drias octopetala *
74.		Polygonum divaricatum *
75.	Post <i>cyperum</i>	Scirpus palustris *
76.	Post <i>rutam murariam</i>	Asplenium . . . <i>lingua cervina fo-</i> <i>liis costae innascentibus</i> T.
76.		Polipodium cambricum
Pag.	80. lin. 5. praecipuae	leg. praecipue
	82. 23. erupuisse	erupisse
	25. spatium, exiguum	spatium exiguum
	84. 14. quidquod	quid quod
	28. centesima	centesimam
	86. 19. tympanitide	tympanite
	91. 16. crusta in	crusta quando in
	92. 21. ut praeterea	ur propterea
	144. pen. alkalici	alkalici
	148. 7. bacillo, fit	bacillo fit,
	162. 9. (k)	(l)
	10. (l)	(k)
	17. Vid: inf. not. g.	Vid. inf. not. q.
	pen. admixta	admixta
	163. pen. <i>refroit-elle</i>	<i>refroidit-elle</i>
	180. 25. tollerent	tolerent
	189. ult. elaterium	elaterium
	195. 16. quando	quomodo
	29. aëri	aëre
	198. 7. quae rarior aër	quo rarior aër
	205. 19. candatis	caudatis
	210. 1.	<i>dele</i>

L E T T R E

DE M. EULER A M. DE LA GRANGE.

Depuis ma dernière lettre j'ai réussi à ramener au calcul la propagation du Son, en supposant à l'air toutes les trois dimensions, & quoique je ne doute pas que Vous n'y soyés parvenu plus heureusement, je ne crois pouvoir mieux témoigner mon attachement envers Votre Illustre Société qu'en lui présentant mes Recherches sur ce même sujet.

RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DES ÉBRANLEMENS DANS UNE MILIEU ÉLASTIQUE.

EN considérant le milieu dans l'état d'équilibre soit sa densité = 1, & son élasticité balancée par le poids d'une colonne du même fluide, dont la hauteur = h ; Je commence par considérer un élément quelconque du fluide qui dans l'état d'équilibre se trouve au point Z (fig. 1.) déterminé par les trois coordonnées perpendiculaires entr'elles $AX = X$, $XY = Y$ & $YZ = Z$, & que par l'agitation ce même élément ait été transporté en z , dont les coordonnées soient $Ax = x$, $xy = y$, $yz = z$, qui seront certaines fonctions des premières X, Y, Z pour un instant donné. Soit donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ$$

$$dy = PdX + QdY + RdZ$$

$$dz = SdX + TdY + VdZ.$$

Ensuite je considère un volume infiniment petit de fluide; qui dans l'état d'équilibre ait la figure pyramidale $Z\xi\eta\theta$ (fig. 2.) rectangulaire, qui par l'agitation soit transporté en $z\lambda\mu\nu$, dont la figure sera aussi pyramidale, & posant pour l'état d'équilibre

du point	les coordonnées
Z	X, Y, Z
ξ	X + α , Y, Z
η	X, Y + β , Z
θ	X, Y, Z + γ

le volume de la pyramide $Z\xi\eta\theta$ sera $= \frac{1}{6} \alpha\beta\gamma$.

On aura ensuite pour l'état d'agitation
du point les trois coordonnées

$$\zeta. Ax = x, \quad xy = y, \quad yz = z$$

$$\lambda. AL = x + L\alpha, \quad Ll = y + P\alpha, \quad l\gamma = z + S\alpha$$

$$\mu. AM = x + M\beta, \quad Mm = y + Q\beta, \quad m\mu = z + T\beta$$

$$\nu. AN = x + N\gamma, \quad Nn = y + R\gamma, \quad n\nu = z + V\gamma$$

Il s'agit maintenant de trouver le volume de la nouvelle pyramide $\zeta\lambda\mu\nu$, qu'on voit être composée de ces prismes $ymn\zeta\mu\nu + yln\zeta\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylm\zeta\lambda\mu$. Prenant pour cela la solidité de chaque part, on trouvera cette solidité =

$$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{3} (y\zeta + l\lambda + n\nu) \Delta yln \\ + \frac{1}{3} (y\zeta + m\mu + n\nu) \Delta ymn \\ + \frac{1}{3} (l\lambda + m\mu + n\nu) \Delta lmn \\ - \frac{1}{3} (y\zeta + l\lambda + m\mu) \Delta ylm \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{3} (3\zeta + S\alpha + V\gamma) \Delta yln \\ + \frac{1}{3} (3\zeta + T\beta + V\gamma) \Delta ymn \\ + \frac{1}{3} (3\zeta + S\alpha + T\beta + V\gamma) \Delta lmn \\ - \frac{1}{3} (3\zeta + S\alpha + T\beta) \Delta ylm \end{array} \right\} =$$

$$- \frac{1}{3} S\alpha \Delta ymn - \frac{1}{3} T\beta \Delta yln + \frac{1}{3} V\gamma \Delta ylm.$$

Ensuite

Ensuite on trouve les aires de ces triangles, à cause ³ de
 $xL = La$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, comme il suit
 $\Delta ymn = \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} MN(2y + Q\beta + R\gamma)$
 $- \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) = \frac{1}{2} Q\beta \times xN - \frac{1}{2} R\gamma \times xM$
 $= \frac{1}{2} \beta\gamma (NQ - MR).$

$\Delta yln = \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) + \frac{1}{2} LN(2y + Pa + R\gamma)$
 $- \frac{1}{2} xL(2y + Pa) = \frac{1}{2} R\gamma \times xL - \frac{1}{2} Pa \times xN$
 $= \frac{1}{2} \alpha\gamma (LR - NP).$

$\Delta ylm = \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} LM(2y + Pa + Q\beta)$
 $- \frac{1}{2} xL(2y + Pa) = \frac{1}{2} Q\beta \times xL - \frac{1}{2} Pa \times xM$
 $= \frac{1}{2} \alpha\beta (LQ - MP).$

De-là nous tirons la solidité de notre pyramide $\zeta\lambda\mu\nu$ dans
l'état d'agitation $= -\frac{1}{6} \alpha\beta\gamma S (NQ - MR) - \frac{1}{6} \alpha\beta\gamma T$

$(LR - NP) + \frac{1}{6} \alpha\beta\gamma V (LQ - MP)$, & partant la

densité du milieu agité en (ζ sera $= 1$: $(LQV - MPV +$

$MRS - NQS + NPT - LRT)$, & posant Π pour la hauteur

de la colonne qui y balance l'élasticité, nous aurons $\Pi = h$:

$(LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$,
laquelle étant une fonction des trois variables X, Y, Z

posons $d\Pi = EdX + FdY + GdZ$, de sorte que E
 $= (\frac{d\Pi}{dX})$, $F = (\frac{d\Pi}{dY})$, $G = (\frac{d\Pi}{dZ})$. Soit pour abrégé

$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT$
 $= K$, de sorte que $\Pi = \frac{h}{K}$; si nous concevons dans l'état
d'équilibre un point Z' infiniment proche de Z déterminé
par ces coordonnées $X + dX, Y + dY, Z + dZ$, ce
point se trouvera après l'agitation en ζ , dont les coordon-
nées seront

$$\begin{aligned} x + LdX + MdY + NdZ, \\ y + PdX + QdY + RdZ, \\ \zeta + SdX + TdY + VdZ, \end{aligned}$$

donc réciproquement la position du point ζ infiniment pro-
che de ζ dans l'état troublé étant donnée par les coordon-
nées $X + \alpha, Y + \beta, Z + \gamma$ son lieu dans l'état d'équi-
libre sera déterminé par les coordonnées $X + dX, Y + dY,$
 $Z + dZ$, de sorte que

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K}$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K}$$

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}$$

De là l'élasticité en ζ étant $\Pi = \frac{h}{K}$, elle sera en $\zeta' = \Pi$
 $+ EdX + FdY + GdZ$, ou bien si nous posons pour
abrégé

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$

$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$

$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C$$

l'élasticité en ζ' sera exprimée par $\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

la densité γ étant $\frac{1}{K}$.

Considérons maintenant un parallélepède rectangle infini-
ment petit $\zeta bcda\beta\gamma\delta$ (fig. 3.) dont les cotés parallèles à

nos coordonnées soient $z^b = \alpha$, $z^c = \beta$, $z^d = \gamma$, son volume sera $= \alpha\beta\gamma$ & sa masse $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$. Pour connoître les forces, dont ce parallélepède est sollicité, cherchons d'abord l'élasticité du milieu à chacun de ses angles de la manière suivante

du point	les coordonnées	l'élasticité
z	$x, y, z,$	Π
b	$x + \alpha, y, z,$	$\Pi + \frac{A\alpha}{K}$
c	$x, y + \beta, z,$	$\Pi + \frac{B\beta}{K}$
d	$x + \alpha, y + \beta, z,$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K}$
a	$x, y, z + \gamma,$	$\Pi + \frac{C\gamma}{K}$
β	$x + \alpha, y, z + \gamma,$	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K}$
γ	$x, y + \beta, z + \gamma,$	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K}$
δ	$x + \alpha, y + \beta, z + \gamma,$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

De-là il est clair, que considérant les faces opposées $z^c a \gamma$ & $b d \beta \delta$, les pressions sur celle-ci surpassent les pressions sur celle-là de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$; donc l'aire de ces faces étant $\beta\gamma$, il en résulte une force suivant la direction $Ax =$

$-\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$; de la même manière le parallélepède sera poussé

suivant la direction xy par la force $= -\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$, & sui-

vant la direction yz par la force $= -\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$. Donc la

masse

masse de ce parallépipède étant $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$ si nous introduisons la hauteur g , par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, en exprimant le tems écoulé t en secondes, nous aurons pour la connoissance du mouvement les trois équations suivantes.

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = - 2gA,$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = - 2gB,$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = - 2gC.$$

Ces formules étant générales pour toutes les agitations possibles, je ne considère ici que les cas où ces agitations sont quasi infiniment petites; pour cet effet je pose $x = X + p$, $y = Y + q$, & $z = Z + r$, de sorte que p , q , r sont des quantités infiniment petites; delà nous aurons

$$dp = (L - 1) dX + MdY + NdZ;$$

$$dq = PdX + (Q - 1) dY + RdZ$$

$$dr = SdX + TdY + (V - 1) dZ,$$

& partant à peu-près $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $V = 1$, & $K = 1$; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = -h \left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right) \right)$$

$$F = -h \left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right) \right)$$

$$G = -h \left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right) \right)$$

Ensuite nous trouvons $A = E$, $B = F$, $C = G$. Pour nous débarrasser encore des autres lettres, remarquons que

$$L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right), \quad Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right), \quad V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$$

de sorte qu'outre les coordonnées X , Y , Z , avec le tems t

il ne reste dans le calcul que les lettres p, q, r , qui marquent le déplacement de chaque point. Car substituant ces valeurs, que nous venons de trouver, le mouvement causé par une agitation quelconque mais fort petite, sera déterminé par les trois équations suivantes

$$\frac{1}{2gb} \left(\frac{ddp}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddp}{dX^2} \right) + \left(\frac{ddq}{dXdY} \right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ} \right),$$

$$\frac{Y}{2gb} \left(\frac{ddq}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddp}{dXdY} \right) + \left(\frac{ddq}{dY^2} \right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ} \right),$$

$$\frac{1}{2gb} \left(\frac{ddr}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ} \right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ} \right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2} \right).$$

ou bien posant $\left(\frac{dp}{dX} \right) + \left(\frac{dq}{dY} \right) + \left(\frac{dr}{dZ} \right) = u$ nous aurons

$$\left(\frac{ddp}{dt^2} \right) = 2gh \left(\frac{du}{dX} \right), \left(\frac{ddq}{dt^2} \right) = 2gh \left(\frac{du}{dY} \right), \&$$

$$\left(\frac{ddr}{dt^2} \right) = 2gh \left(\frac{du}{dZ} \right), \text{ d'où il est aisé de conclure}$$

$\frac{1}{2gb} \left(\frac{ddu}{dt^2} \right) = \left(\frac{ddu}{dX^2} \right) + \left(\frac{ddu}{dY^2} \right) + \left(\frac{ddu}{dZ^2} \right)$, d'où il faut déterminer la nature de la fonction u déterminée par les coordonnées X, Y, Z , & le tems t .

Delà il n'est pas difficile de trouver une infinité de solutions particulières, comme

$$p = \beta \phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

$$q = \gamma \phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

$$r = \delta \phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

pourvu que $\alpha = \sqrt{2gh(\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)}$ où β, γ, δ sont des quantités quelconques, & ϕ marque une fonction quelconque. Donc quelques valeurs qu'on prenne on aura toujours le cas d'un certain ébranlement, dont on pourra déterminer la continuation. Mais pour notre dessein il s'agit de trouver un tel cas, où l'ébranlement initial aura été renfermé dans un petit espace, d'où il s'est répandu ensuite en tout sens.

Soit

Soit donc A le centre de l'agitation primitive & posons $p = Xs$, $q = Ys$, $r = Zs$, & s sera une fonction du tems t , & de la quantité $\sqrt{XX + YY + ZZ} = V$ qui marque la distance du point A . Donc puisque $ds = dt$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) + dV \left(\frac{ds}{dV}\right) \text{ nous aurons } ds = dt \left(\frac{ds}{dt}\right) + \left(\frac{XdX + YdY + ZdZ}{V}\right) \times \left(\frac{ds}{dV}\right), \text{ \& puis } \left(\frac{dp}{dX}\right) = s + \frac{X^2}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right), \left(\frac{dq}{dY}\right) = s + \frac{Y^2}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right), \left(\frac{dr}{dZ}\right) = s + \frac{Z^2}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right), \text{ donc } u = \left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = 3s + V \left(\frac{ds}{dV}\right); \text{ maintenant aiant } \left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right), \left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V}, \text{ notre première équation deviendra } \frac{X}{2gb} \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right) + X \left(\frac{dds}{dV^2}\right) \text{ ou } \frac{1}{2gb} \left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V} \left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right), \text{ à laquelle se réduisent aussi les deux autres; \& l'éloignement du point } Z \text{ depuis le centre } A \text{ sera } Vs = s\sqrt{XX + YY + ZZ} = \sqrt{pp + qq + rr} \text{ qui en marque le déplacement par rapport à l'état d'équilibre, de sorte que le rayon d'une couche sphérique, qui dans l'état d'équilibre étoit } = V, \text{ fera à présent } = V + Vs. \text{ Donc si nous posons } Vs = u, \text{ ou } s = \frac{u}{V} \text{ afin que } u \text{ exprime le changement de cette couche, la particule } u \text{ sera déterminée par cette équation}$$

$$\frac{1}{2gb} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \frac{-2u}{V^2} + \frac{2}{V} \left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

Après plusieurs recherches j'ai enfin trouvé que cette équation admet une résolution générale semblable au cas, où l'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension. Que

ϕz marque une fonction quelconque de z , & qu'on indique son différentiel de cette façon $d \cdot \phi z = dz \phi' z$. Cela posé, on verra qu'on satisfait à notre équation en supposant

$$u = \frac{A}{V^2} \phi [V \pm t\sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V} \phi' [V \pm t\sqrt{(2gh)}].$$

Donc pour le commencement de l'agitation nous aurons cette équation $u = \frac{A}{V^2} \phi V - \frac{A}{V} \phi' V$; d'où l'on voit que pour appliquer cette formule à la propagation du Son la fonction ϕz doit toujours être = 0 excepté le cas, où la quantité z est extrêmement petite. Or il faut que la fonction $\phi' z$ ait la même propriété & encore celle-ci $\phi'' z$, en supposant $d\phi' z = dz \phi'' z$, afin que non seulement la quantité u , mais aussi la vitesse $(\frac{du}{dt})$ s'évanouisse au commencement par tout, excepté dans le petit espace autour de A où s'est fait l'ébranlement primitif.

Que le caractère ψ marque des fonctions discontinues de la même nature, & nous aurons la solution générale qui suit

$$u = \frac{A}{V^2} \phi [V + t\sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V} \phi' [V + t\sqrt{(2gh)}] \\ + \frac{B}{V^2} \psi [V - t\sqrt{(2gh)}] - \frac{B}{V} \psi' [V - t\sqrt{(2gh)}]$$

& pour la vitesse

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V^2} \phi' [V + t\sqrt{(2gh)}] \\ - \frac{A\sqrt{(2gh)}}{V} \phi'' [V + t\sqrt{(2gh)}] \\ - \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V^2} \psi' [V - t\sqrt{(2gh)}] \\ + \frac{B\sqrt{(2gh)}}{V} \psi'' [V - t\sqrt{(2gh)}].$$

Delà il est clair qu'une couche sphérique, dont le rayon = V demeure en repos tant que la formule $V - t\sqrt{(2gh)}$

ne devient assés petite, ou moindre que le rayon de la petite
 spère ébranlée au commencement; & partant l'agitation
 primitive sera répandue à la distance = V après le tems t
 = $\frac{V}{\sqrt{(2gb)}}$ secondes, d'où il s'enfuit la même vitesse du

Son que Newton a trouvé, c'est-à-dire plus petite que se-
 lon les expériences. D'où je conclus qu'ayant supposé dans
 ce calcul les ébranlemens infiniment petits, leur grandeur
 cause une propagation plus prompte.

Ensuite ces formules nous apprennent que lorsque les di-
 stances V sont fort grandes, en sorte que les termes divisés
 par V^2 s'évanoüissent à l'égard des autres divisés par V ,
 tant les petits espaces u , que les vitesses ($\frac{du}{dt}$) diminuent
 en raison des distances; d'où l'on peut justement juger de
 l'affoiblissement du Son par des grandes distances.

Voilà mes Recherches que vous pourrés insérer, MONSIEUR,
dans votre second Volume si vous le jugés à propos, &c.

Berlin ce 1.^r Janvier 1760.



11 NOUVELLES RECHERCHES

SUR LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON.

PAR M. DE LA GRANGE.

CHAPITRE PREMIER.

*Remarques sur la Théorie de la propagation du Son,
donnée par M. Newton.*

1. SOIENT (fig. * plan. 1.) E, F, G trois particules d'air en repos, placées sur la droite BC à des distances égales l'une de l'autre; imaginons que ces particules parviennent, dans un tems quelconque t , en ϵ, ϕ, γ ; & supposons avec M. Newton (*Prop. 47. liv. II. des Principes Mathématiques*) que la loi de leur mouvement soit renfermée dans une seule courbe PKS (fig. ** plan. 1.) de telle manière qu'en faisant $PH = t$ & prenant les portions d'arc HI, IK égales entr'elles, & qui aient un rapport donné aux distances primitives EF, FG , les abscisses correspondantes PL, PM, PN soient égales aux espaces parcourus $E\epsilon, F\phi, G\gamma$; il est clair qu'on aura $\epsilon\gamma = EG - LN$; par conséquent, si on suppose que l'élasticité de l'air soit en raison inverse de sa densité, l'élasticité de l'air condensé en $\epsilon\gamma$ sera à son élasticité naturelle, que je nomme E , en raison inverse de $\epsilon\gamma$ à EG , ou de $EG - LN$ à EG ; donc l'élasticité de la particule F transportée en ϕ , sera exprimée par $\frac{E \times EG}{EG - LN}$. Par le même raisonnement on trouvera, en coupant dans l'arc PKS , les parties HF, DK égales à HI, IK , & menant les ordonnées FQ, DR , que l'élasticité de la particule E en ϵ sera $= \frac{E \times EG}{EG - QM}$, & celle de la particule G en $\gamma = \frac{E \times EG}{EG - MR}$; d'où l'excès de l'élasticité de l'air en ϵ sur son élasticité

en γ fera $E \times EG \times \left(\frac{1}{EG - QM} - \frac{1}{EG - MR} \right) =$
 $E \times EG \times \frac{QM - MR}{(EG - QM) \times (EG - MR)} =$ (à cause que
 les excursions des particules sont fort petites par l'hyp.)
 $E \times \frac{QM - MR}{EG}$. Cette quantité est la force qui fait mou-
 voir la partie du milieu ϕ , ou $\varepsilon\gamma$, dont la masse est
 $D \times EG$, en posant D pour la densité naturelle de l'air;
 donc la force accélératrice de la particule ϕ fera $=$
 $\frac{E}{D} \times \frac{QM - MR}{EG^2}$; or la loi du mouvement de cette par-
 ticule demande qu'elle soit sollicitée par une force accélé-
 ratrice $= \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{DI^2} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{KH^2}$, h
 étant la hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le
 tems T ; donc on doit avoir $\frac{E}{D} \times \frac{QM - MR}{EG^2} = \frac{T^2}{2b} \times$
 $\frac{QM - MR}{KH^2}$ ce qui se réduit, en supposant $KH = \alpha EG$,
 à $\frac{E}{D} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{1}{\alpha^2}$; d'où l'on tire $\alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{T^2 D}{2Eb} \right)}$, la
 nature de la courbe PKS demeurant indéterminée.

Delà résulte donc cette conclusion, dont l'exactitude ne
 peut être révoquée en doute, savoir que la loi des mou-
 vemens des particules de l'air, n'est pas unique & déter-
 minée, comme l'a crû M. Newton, mais que, soit
 celle des pendules adoptée par ce grand Géomètre, soit
 celle des corps qui tombent par leur pesanteur, que M. Cra-
 mer jugeoit absurde & contradictoire, ou toute autre qu'on
 imagine à volonté, a également lieu & peut être indifféremment
 employée dans la solution Analitique. Je dis dans la *solution*
Analitique: car, lorsqu'il s'agira de déterminer cette loi dans
 des cas particuliers, il faudra encore avoir égard aux
 premiers ébranlemens des particules, donnés par l'hypotèse.

2. J'avois déjà trouvé cette conclusion générale dans le premier Chap. de mes *Recherches sur la nature & la propagation du Son* (*) imprimées dans le Volume précédent; mais elle m'avoit paru alors si paradoxé & si éloignée de la nature de la question que j'avois cru pouvoir la regarder comme une preuve de l'insuffisance des Principes de M. Newton. Or je vais démontrer ici que cette même conclusion est au contraire entièrement conforme à la Théorie de la propagation du Son que j'ai donnée dans le Chap. I. de la seconde Section des *Rech. citées*.

Qu'on considère une particule quelconque de la fibre AD dont la distance à la particule E soit x dans l'état d'équilibre; on trouvera aisément, par la construction ci-dessus, que l'espace parcouru par cette particule dans le tems t sera égal à l'abscisse qui répond à l'arc $PH = t$ diminué d'un arc $= \alpha x$; c'est-à-dire à un arc $= t - \alpha x$. Or quelle que soit la nature de la courbe PHS , il est constant qu'on peut en regarder les arcs, comme des fonctions données des abscisses correspondantes, & de même les abscisses comme des fonctions des arcs; donc l'espace parcouru par une particule quelconque de la fibre AD , pendant le tems t sera exprimé généralement par $\phi(t - \alpha x)$. Cette formule en faisant $t = 0$ doit représenter les ébranlemens primitifs de la fibre AD ; donc, si on suppose comme dans l'endroit cité des *Rech. préc.* qu'une particule quelconque E soit ébranlée par le corps sonore, il faudra que la fonction $\phi(-\alpha x)$ soit toujours nulle, excepté lorsque $x = 0$. Par conséquent la formule générale $\phi(t - \alpha x)$ aura seulement une valeur réelle, lorsque

$t - \alpha x = 0$, savoir $x = \frac{t}{\alpha}$; par où l'on voit que

l'ébran-

(*) Comme j'aurai souvent occasion dans la suite de renvoyer à ces mêmes *Recherches* je les appellerai simplement *Recherches précédentes*, & j'en citerai les Chapitres & les Articles en chiffre Romain pour les distinguer de ceux de la Dissertation présente.

ébranlement excité dans la particule E se propagera dans la fibre AD de manière que, dans un tems quelconque t , il parviendra à la particule qui est distante de la E par l'espace $\frac{t}{\alpha}$; d'où il s'ensuit que la vitesse du Son sera

$$\text{uniforme } \alpha = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{T^2 D}{2 E b}\right)}} = \sqrt{\left(\frac{2 E h}{T^2 D}\right)} = \left(\text{en}\right.$$

mettant au lieu de $\frac{E}{D}$ la hauteur A de l'air supposé homogène) $\frac{\sqrt{2 A h}}{T}$ ce qui s'accorde avec l'Art. LVI. des

Rech. préc., & avec ce que M. Newton a trouvé par une méthode différente. *Prop. 49. liv. II. des Principes.*

Au reste il est clair, qu'à cause de l'ambiguïté des signes de la valeur de α , la formule $\phi(t - \alpha x)$ renfermera réellement les deux formules $\phi\left(t - \frac{x}{\sqrt{c}}\right)$, $\phi\left(t + \frac{x}{\sqrt{c}}\right)$

en posant, pour abréger, c au lieu de $\frac{2 h A}{T^2}$; donc, en prenant deux fonctions différentes l'une pour le signe $+$, & l'autre pour le signe $-$, & les ajoutant ensemble, on aura $\phi\left(t - \frac{x}{\sqrt{c}}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{\sqrt{c}}\right)$: pour l'expression générale de l'espace parcouru par chaque particule de la fibre AD dans un tems quelconque t .

Nous verrons dans la suite les conséquences qui résultent de cette formule par rapport à la propagation du Son considérée d'une manière générale; mais nous remarquerons d'avance que la vitesse de la propagation est toujours $= \sqrt{c}$ comme on l'a trouvé ci-dessus dans un cas particulier.

3. Telle est la solution générale qui peut se déduire des Principes de M. Newton; cet illustre Auteur n'en a tiré cepen-

pendant qu'une solution assez particulière, & même peut exacte, mais qui l'a conduit néanmoins au même résultat sur la vitesse de la propagation. C'est ce qu'il faut développer.

M. Newton commence par supposer que la courbe PKS est un cercle dont le diamètre PS est égal à la plus grande excursion Ee de la particule E , & dont la circonférence est à l'intervalle BC des pulsions comme KH à EG , savoir comme $\alpha : 1$ selon nos dénominations; d'où il résulte que le mouvement de chaque particule d'air est le même que celui d'un pendule qui décrit des arcs de cycloïde, & que la durée de chaque oscillation est égale à la circonférence entière du cercle $PKSkP$, savoir

$$\alpha BC = \frac{T}{\sqrt{2bA}} BC.$$

M. Newton suppose ensuite que, dans le tems d'une oscillation, la pulsion en avançant parcourt sa largeur BC ; c'est-à-dire qu'il se forme en CD une nouvelle fibre sonore CD égale à la première BC ; d'où il déduit la vitesse du Son = $\frac{\sqrt{2hA} \times BC}{T \times BC} = \frac{\sqrt{2hA}}{T}$ précisément comme on l'a trouvé ci-dessus.

Je remarque d'abord que la première hypothèse de M. Newton, savoir que la courbe PKS soit un cercle, ne peut être admise qu'analytiquement, & non relativement à la question de la propagation du Son. Car 1.^o Les ébranlemens primitifs dépendent absolument de l'impulsion du corps sonore, laquelle peut être quelconque; par conséquent il est impossible que ces ébranlemens soient toujours exprimés par la même courbe, & encore moins par un cercle; 2.^o Comme le cercle est une courbe rentrante, il est clair qu'on peut toujours trouver un arc = $t - \alpha x$, dont l'abscisse représentera (suivant la construction) l'excursion d'une particule quelconque distante comme l'on voudra de la particule E ; d'où il s'ensuit que toutes les par-

particules de la fibre AD infiniment prolongée de part & d'autre doivent être toutes en mouvement à la fois ; ce qui détruit la propagation du Son, & est directement contraire à la nature même de la question.

A l'égard des oscillations des particules qui forment la *pulsion* BC , nous démontrerons plus bas (*Art.* 15.) que leur durée est toujours la même quelle que puisse être la nature de cette *pulsion*; & qu'ainsi la formule $\frac{\sqrt{2hA}}{T} \times BC$, que donne l'hypothèse particulière de M. Newton, est exacte & conforme à la véritable Théorie de la propagation du Son.

Il en est de même de l'autre hypothèse de M. Newton, savoir, qu'il s'engendre une seconde fibre égale à la première, lorsque cette première a achevé une vibration entière. Cette hypothèse est légitime, comme on le verra plus bas (*Art.* 12. 15.); mais doit-on l'admettre sans la démontrer? On est d'autant plus en droit d'en exiger la démonstration que, suivant la construction de M. Newton, les *pulsions* AB , BC , CD &c. ne se forment point l'une après l'autre, mais existent toutes à la fois & ne font que changer de place sur la fibre AD , comme il est aisé de s'en convaincre en examinant cette construction.

En voilà assez pour prouver l'insuffisance de la Théorie de M. Newton, & pour rendre raison pourquoi elle conduit néanmoins aux véritables loix de la propagation du Son.

4. Nous venons de montrer que la courbe PKS ne peut être un cercle. Or je dis qu'elle ne peut pas même être une courbe algébrique, ou transcendante. Pour le prouver je remarque que la fonction $\phi\left(t - \frac{xT}{\sqrt{2bA}}\right)$ qui représente en général les excursions des particules de la fibre AD pour un tems quelconque t , doit aussi représenter les excursions primitives, telles qu'elles sont engendrées dans le premier instant par l'action du corps sonore

re sur les particules de l'air contigu. Or il est clair que cette impression ne sauroit s'étendre à l'infini, mais qu'elle devra même être renfermée dans un très-petit espace autour du corps, à cause de l'extrême petitesse de ses vibrations; d'où il suit, que dans le premier instant il ne peut y avoir qu'un certain nombre de particules, dans la fibre aérienne, qui soient mises en mouvement, & pour lesquelles la valeur de $\phi\left(t - \frac{xT}{\sqrt{2bA}}\right)$ doit être réelle; il faudra en conséquence, pour remplir cette condition, que la fonction $\phi\left(t - \frac{xT}{\sqrt{2bA}}\right)$ s'évanouisse toujours d'elle-même, lorsque, t étant $= 0$, x surpassera une quantité donnée. Soit a la longueur de la portion de la fibre qui est ébranlée au commencement, il faudra avoir en général $\phi\left(-\frac{(a+\zeta)T}{\sqrt{2bA}}\right) = 0$, prenant pour ζ une quantité quelconque positive.

Telle devra donc être la nature de la courbe PHS , d'où dépend la valeur de ϕ , que tous les arcs exprimés par $-\frac{(a+\zeta)T}{\sqrt{2bA}}$ répondent toujours au même point de l'axe, où les abscisses ont leur origine; c'est ce qui ne sauroit avoir lieu dans aucune courbe soit géométrique, soit transcendante, puisque il faudroit pour cela que dans un tel point elle se transforma tout-à-coup en une droite perpendiculaire à l'axe.

Des fonctions irrégulières & discontinues.

OBSERVATIONS

Sur la nature & l'usage de ces fonctions.

5. **N**ous venons de démontrer que, pour trouver les ébranlemens des particules de l'air dans le cas de la nature, il faut se servir d'une ligne courbe, dont le cours devienne tout-à-coup rectiligne en un point donné, condition qui est absolument incompatible avec la loi de continuité, à laquelle toutes les courbes soit algébriques, soit mécaniques sont nécessairement soumises.

Delà on voit la nécessité d'admettre dans ce calcul d'autres courbes que celles, que les Géomètres ont considéré jusqu'à présent, & d'employer un nouveau genre de fonctions variables indépendantes de la loi de continuité, & qu'on peut très-bien appeller fonctions *irrégulières & discontinues*. Mais ce n'est pas ici le seul usage qu'on doit faire de ces sortes de fonctions; elles sont nécessaires pour un grand nombre de questions importantes de Dynamique & d'Hydrodynamique. Car, lorsque on a un système de corps, ou de points mobiles, dont le nombre est infini, & qu'on en cherche les mouvemens, après les avoir, comme que ce soit, derangé de leur état d'équilibre, il est facile de comprendre que tous ces mouvemens ne pourront être contenus dans une même formule, à moins qu'elle ne soit aussi applicable au premier état du système, qui est tout-à-fait arbitraire, & dans lequel la loi de continuité est le plus souvent violée;

M. Euler

M. Euler est, je crois, le premier qui ait introduit dans l'Analyse ce nouveau genre de fonctions, dans sa solution du problème de *chordis vibrantibus* qui rentre dans la classe de ceux, dont nous venons de parler; mais nous avons exposé ailleurs (*art. XV. Rech. préc.*) les difficultés, dont cette solution est susceptible, & la nécessité où l'on étoit de l'établir & de la confirmer par une méthode aussi directe & rigoureuse que celle que nous avons donné dans le *Chap. V. des Rech. citées*; M. Euler même m'a fait l'honneur de me l'avouer dans une lettre particulière qu'il m'a écrit au sujet de ma Théorie sur le Son. Cette méthode cependant qui consiste à regarder d'abord le nombre des corps mobiles comme fini & indéterminé, est extrêmement pénible & embarrassante, & elle le devient encore beaucoup plus, lorsqu'il s'agit de rendre leur nombre infini. Un tel passage du fini à l'infini dans mes formules, n'ayant pas paru assez évident & démonstratif à deux grands Géomètres, Mrs. Daniel Bernoulli & D'Alembert, comme ils ont daigné me le faire sentir dans des lettres particulières; j'ai cru devoir chercher de nouveau une autre méthode plus simple, par laquelle on pût éviter tous les embarras qui se rencontrent dans la transformation des formules, & qui leva de même tous les doutes qui pourroient encore se présenter sur l'exactitude de mes résultats.

P R O B L E M E I.

6. **E**Tant donné un système d'un nombre infini de points mobiles, dont chacun dans l'état d'équilibre soit déterminé par la variable x , & dont le premier & le dernier qui répondent à $x = 0$, & à $x = a$ soient supposés fixes; trouver les mouvemens de tous les points intermédiaires, dont la loi

est

est contenue dans la formule $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c (\frac{d^2z}{dx^2})$, z étant l'espace décrit par chacun d'eux durant un tems quelconque t .

Qu'on multiplie cette équation par $M dx$, M étant une fonction quelconque de x , & qu'on l'intègre en ne faisant varier que l' x ; il est clair, que si dans cette intégrale prise en sorte qu'elle évanouïsse lorsque $x = 0$, on fait $x = a$, on aura la somme de toutes les valeurs particulières de la formule $(\frac{d^2z}{dt^2}) M dx = c (\frac{d^2z}{dx^2}) M dx$, qui répondent à chaque point mobile du système donné. Cette somme sera donc $\int (\frac{d^2z}{dt^2}) M dx = c \int (\frac{d^2z}{dx^2}) M dx$.

Or l'intégrale $\int (\frac{d^2z}{dx^2}) M dx$, où la différence d^2z ne dépend que de la variable x , peut se transformer par les règles connues en $(\frac{dz}{dx}) M - \int (\frac{dz}{dx}) \times (\frac{dM}{dx}) dx$; cette dernière intégrale se change de même en $z (\frac{dM}{dx}) - \int z (\frac{d^2M}{dx^2}) dx$; de sorte qu'on aura $\int (\frac{d^2z}{dx^2}) M dx = (\frac{dz}{dx}) M - z (\frac{dM}{dx}) + \int z (\frac{d^2M}{dx^2}) dx$; or puisque $\int (\frac{d^2z}{dx^2}) M dx$ est $= 0$, lorsque $x = 0$, si on suppose que $\int z (\frac{d^2M}{dx^2}) dx$ le soit aussi, il faudra que $(\frac{dz}{dx}) M - z (\frac{dM}{dx})$ évanouïsse de même dans ce point; mais par hypothèse l'on a ici $z = 0$, donc il suffira que l'on ait $(\frac{dz}{dx}) M = 0$, ou bien $M = 0$, lorsque $x = 0$.

Par

Par là notre équation intégrale deviendra $f\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) M dx$
 $= c \left[\left(\frac{dz}{dx}\right) M - z \left(\frac{dM}{dx}\right) \right] + c \int z \left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx.$

Pofons $x = a$; & puisque z s'évanouït de nouveau par hypothèse, faisons disparaître de même l'autre terme $\left(\frac{dz}{dx}\right) M$ par une valeur convenable de M .

Il ne restera, après cela, que la simple équation

$$\int \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) M dx = c \int z \left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx.$$

Soit supposé $\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) = kM$, k désignant une constante indéterminée dont on trouvera la valeur au moïen des conditions qu'on a déjà attaché à la quantité M ; on aura

$$\int \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) M dx = kc \int z M dx.$$

Soit encore $\int z M dx = s$; prenant la différence de part & d'autre, dans la supposition que le seul t soit variable,

on a, à cause de $M = \text{fonct. } x$, $f\left(\frac{dz}{dt}\right) M dx =$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right); \text{ \& différentiant une seconde fois } f\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) M dx =$$

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right); \text{ ces valeurs substituées dans la dernière équation}$$

intégrale, il en résulte $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) = cks$, équation qu'il faut maintenant intégrer en ne regardant que le tems t comme variable. Nous avons donc deux équations différentielles à intégrer, dont l'une regarde simplement la variabilité de x , & l'autre celle de t , ce qui fait qu'elles rentrent dans la classe ordinaire des équations différentielles à deux changeantes.

Commençons par l'équation $\frac{d^2s}{dt^2} = cks$, & faisons usage de la méthode inventée par M. D'Alembert pour ces sortes d'équations.

Soit supposé $\frac{ds}{dt} = r$, on aura $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dr}{dt}$, & l'équation donnée se changera en $\frac{dr}{dt} = cks$; qu'on la multiplie par un coëfficient quelconque μ , & qu'on la joigne avec celle qu'on a faite par hipotéfe, on aura $\frac{ds + \mu dr}{dt} = \mu cks + r = \mu ck (s + \frac{1}{\mu ck} r)$; soit fait $\mu = \frac{1}{\mu ck}$, & par conséquent $\mu^2 = \frac{1}{ck}$, $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{ck}}$, j'aurai donc $\frac{ds + \mu dr}{dt} = \frac{1}{\mu} (s + \mu r)$, différentielle dont l'intégrale est par les méthodes connues, en ajoutant une constante A , $s + \mu r = Ae^{t\sqrt{\mu}}$; substituant la valeur de μ , on a, à cause de l'ambiguïté des signes, les deux équations

$$s + \frac{r}{\sqrt{ck}} = Ae^{t\sqrt{ck}}$$

$$s - \frac{r}{\sqrt{ck}} = Be^{-t\sqrt{ck}}$$

B étant une nouvelle constante arbitraire.

Pour déterminer les valeurs de A & de B , supposons que s & r deviennent S & R , lorsque $t = 0$, nous aurons

$$S + \frac{R}{\sqrt{ck}} = A; \quad \& \quad S - \frac{R}{\sqrt{ck}} = B;$$

substituant ces valeurs, & joignant ensemble les deux équations il nous vient

$$s = S \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + \frac{R}{\sqrt{ck}} \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2}$$

de même, en retranchant l'une équation de l'autre, on trouve

$$r = R \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + S\sqrt{ck} \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2}$$

ces équations se réduisent à la forme suivante qui est beaucoup plus simple ; savoir

$$s = S \cos. t\sqrt{-ck} - \frac{R}{\sqrt{-ck}} \sin. t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \cos. t\sqrt{-ck} + R\sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck}.$$

Or s est par supposition $= f\zeta Mdx$, & $r = \frac{ds}{dt} = f\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$

Mdx , ou bien, puisque $\frac{d\zeta}{dt}$ exprime la vitesse qui répond à l'espace ζ & au tems t , si on dénote cette vitesse par u , on a $r = fu Mdx$. Pour avoir de même les valeurs de S & de R , supposons que Z soit en général la valeur de ζ , & V celle de u au commencement du mouvement, lorsque $t = 0$, on aura $S = fZ Mdx$ & $R = fV Mdx$, substituant ces valeurs on changera les équations précédentes en celles-ci

$$f\zeta Mdx = \cos. t\sqrt{-ck} fZ Mdx - \frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} fV Mdx$$

$$fu Mdx = \cos. t\sqrt{-ck} fV Mdx + \sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck} fZ Mdx.$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur de M par la résolution de l'équation $\frac{d^2M}{dx^2} = kM$, qu'on intégrera par la même méthode que nous avons pratiqué ci-dessus ; prenant deux constantes quelconques C & D on trouvera aisément que la valeur de M est en général $Ae^{x\sqrt{k}} + Be^{-x\sqrt{k}}$, or M doit premièrement être $= 0$, lorsque $x = 0$, ce qui donne $A + B = 0$ & $B = -A$; par conséquent $M = A(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}})$. Changeons la constante A , & supposons la divisée par $2\sqrt{-1}$, on aura plus simplement $M = A \sin. x\sqrt{-k}$.

Il faut maintenant faire en sorte que M évanouisse, lorsque $x = a$, d'où l'on a $A \sin. a\sqrt{-k} = 0$, & prenant pour ν un nombre quelconque entier positif, ou négatif,

$$a\sqrt{-k}$$

$a \sqrt{-k} = \frac{v\pi}{2}$, ce qui nous apprend que $\sqrt{-k}$ peut avoir une infinité de valeurs différentes, qui remplissent toutes également les conditions données. Substituons à présent pour M la valeur trouvée, & retenant pour plus de simplicité la quantité $\sqrt{-k}$, on aura après avoir divisé par A

$$\int \zeta \sin. x \sqrt{-k} dx = \cos. t \sqrt{-ck} \int Z \sin. x \sqrt{-k} dx \\ + \frac{\sin. t \sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V \sin. x \sqrt{-k} dx$$

$$\int u \sin. x \sqrt{-k} dx = \cos. t \sqrt{-ck} \int V \sin. x \sqrt{-k} dx \\ - \sqrt{-ck} \sin. t \sqrt{-ck} \int Z \sin. x \sqrt{-k} dx$$

Ces deux équations doivent se vérifier pour toutes les valeurs qu'on peut donner à $\sqrt{-k}$, & c'est, d'après une telle condition, qu'il faut déterminer les valeurs cherchées de ζ & de u par celles de Z & V qui sont supposées données.

Pour cela il faut commencer par faire disparaître au moyen de quelques transformations, la quantité $\sqrt{-k}$ qui n'est point renfermée dans des *sinus* ou des *cosinus*; ces transformations ne consistent qu'à prendre les intégrales par parties comme nous l'avons déjà pratiqué plus haut; en sorte que l'intégrale qui reste se trouve naturellement multipliée, ou divisée par $\sqrt{-k}$. Par ce moyen on transformera d'abord l'expression $\int V \sin. x \sqrt{-k} dx$ dans celle-ci $= \sin. x \sqrt{-k} \int V dx - \sqrt{-k} \int (\cos. x \sqrt{-k} \int V dx) dx$. Je remarque maintenant que la valeur de $\sin. x \sqrt{-k}$ devient nulle dans les deux cas de $x = 0$, & de $x = a$, d'où il suit, que puisque les formules intégrales que nous manions ici, doivent être prises pour toute l'étendue de x depuis 0, jusque à a , on aura plus simplement

$$\int V \sin. x \sqrt{-k} dx = -\sqrt{-k} \int (\cos. x \sqrt{-k} \int V dx) dx.$$

Par une opération contraire on trouvera ensuite

$$\int Z \sin. x \sqrt{-k} dx = -\frac{Z \cos. x \sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} + \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{dZ}{dx} \right)$$

cos.

cos. $x\sqrt{-k} dx$; & puisque $Z = 0$, lorsque $x = 0$, & $= a$, par l'hypothèse du problème, on aura pour notre cas

$$\int Z \sin. x\sqrt{-k} dx = \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \cos. x\sqrt{-k} dx.$$

Ces valeurs substituées, il en résulte

$$\int \zeta \sin. x\sqrt{-k} dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int Z \sin. x\sqrt{-k} dx \\ - \frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{c}} \int (fV dx) \cos. x\sqrt{-k} dx$$

$$\int u \sin. x\sqrt{-k} dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int V \sin. x\sqrt{-k} dx \\ - \sqrt{c} \sin. t\sqrt{-ck} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \cos. x\sqrt{-k} dx.$$

Avant d'aller plus loin je remarque que comme on aura occasion dans la suite de comparer des valeurs de Z & de V avec des valeurs de ζ & u qui ne répondent pas aux mêmes x , pour ne pas se méprendre dans ces opérations, il sera utile de distinguer par des expressions différentes les x qui conviennent aux Z & V , d'avec ceux qui conviennent aux ζ & u ; je désignerai les premiers par la lettre X que je substituerai par tout dans les seconds termes des équations précédentes au lieu de x , en retenant néanmoins le dx qui ne peut causer aucun embarras; j'observe de plus, que les intégrales qui entrent dans ces termes se rapportent uniquement à la variable x ou X , ce qui fait qu'on peut mettre aussi sous le signe ces quantités $\sin. t\sqrt{-ck}$, & $\cos. t\sqrt{-ck}$, qui sont constantes à leur égard; j'aurai donc $\int \zeta \sin. x\sqrt{-k} dx = \int Z \sin. X\sqrt{-k} \chi \cos. t\sqrt{-ck} dx$

$$- \frac{1}{\sqrt{c}} \int (fV dx) \cos. X\sqrt{-k} \chi \sin. t\sqrt{-ck} dx.$$

$$\int u \sin. x\sqrt{-k} dx = \int V \sin. X\sqrt{-k} \chi \cos. t\sqrt{-ck} dx.$$

$$- \sqrt{c} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right) \cos. X\sqrt{-k} \chi \sin. t\sqrt{-ck} dx.$$

Je développe à présent les produits des *sinus* & *cosinus* par les méthodes connues; j'obtiens

$$\begin{aligned}
& \int z \operatorname{fin.} x \sqrt{-k} dx \\
= & \frac{1}{2} \int Z \operatorname{fin.} (X + t \sqrt{c}) \sqrt{-k} dx \\
& + \frac{1}{2} \int Z \operatorname{fin.} (X - t \sqrt{c}) \sqrt{-k} dx \\
& - \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (fV dx) \operatorname{fin.} (X + t \sqrt{c}) \sqrt{-k} dx \\
& + \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (fV dx) \operatorname{fin.} (X - t \sqrt{c}) \sqrt{-k} dx. \\
& \int u \operatorname{fin.} x \sqrt{-k} dx \\
= & \frac{1}{2} \int V \operatorname{fin.} (X + t \sqrt{c}) \sqrt{-k} dx \\
& + \frac{1}{2} \int V \operatorname{fin.} (X - t \sqrt{c}) \sqrt{-k} dx \\
& - \frac{\sqrt{c}}{2} \int \left(\frac{dZ}{dx} \right) \operatorname{fin.} (X + t \sqrt{c}) \sqrt{-k} dx \\
& + \frac{\sqrt{c}}{2} \int \left(\frac{dZ}{dx} \right) \operatorname{fin.} (X - t \sqrt{c}) \sqrt{-k} dx.
\end{aligned}$$

Ces équations sont réduites maintenant à la forme nécessaire pour en tirer les valeurs de z & de u . Voici comment je m'y prends.

Je considère, qu'en substituant pour $\sqrt{-k}$ sa valeur

$\frac{\nu \pi}{2a}$, le nombre ν qui peut être tel qu'on veut, pourvu qu'il soit entier, doit nécessairement disparaître de l'équation, puisque elle doit être vraie pour toutes les valeurs possibles de ν . Il faut donc faire en sorte que la quantité $\sqrt{-k}$ disparaisse elle-même de l'équation qui la renferme; ce qu'on ne peut obtenir dans notre cas qu'en rendant égaux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$ dans tous les termes de l'une & de l'autre équation; mais comme on pourroit être embarrassé dans les différentes valeurs qu'il faut donner à X , je ne retiendrai cette lettre X , que dans la seule expression $\operatorname{fin.} (X + t \sqrt{c}) \sqrt{-k}$, & je mettrai dans l'autre

expres-

expression fin. $(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, X' au lieu de X , en désignant de même par Z' & V' les valeurs de Z & de V qui y répondent; ainsi j'aurai par la comparaison des angles, après avoir divisé par $\sqrt{-k}$, $x = X + t\sqrt{c} = X' - t\sqrt{c}$; & ensuite les équations :

$$\zeta = \frac{Z}{2} + \frac{Z'}{2} - \frac{\int V dx}{2\sqrt{c}} + \frac{\int V' dx}{2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{V}{2} + \frac{V'}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ}{dx} + \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ'}{dx}.$$

Maintenant, l'abscisse qui convient à Z & à V étant X , elle deviendra $= x - t\sqrt{c}$, qui est sa valeur tirée de l'équation ci-dessus; on aura de même pour l'abscisse X' qui répond à Z' & à V' , l'expression $x + t\sqrt{c}$; donc si, pour plus de commodité, on joint à chaque quantité son abscisse en forme d'exposant placé entre deux parenthèses, on aura enfin les valeurs de ζ & de u exprimées de la manière suivante

$$\zeta = \frac{Z(x+t\sqrt{c}) + Z(x-t\sqrt{c})}{2} + \frac{\int V dx(x+t\sqrt{c}) - \int V dx(x-t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{V(x+t\sqrt{c}) + V(x-t\sqrt{c})}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} \left(\left(\frac{dZ}{dx} \right)^2(x+t\sqrt{c}) - \left(\frac{dZ}{dx} \right)^2(x-t\sqrt{c}) \right).$$

Telles sont donc les valeurs de ζ & de u pour chaque point mobile du système donné, & pour tous les instans de leurs mouvemens; valeurs qui ne dépendent, comme on le voit, que des quantités Z & V données à volonté dans le commencement du mouvement.

7. Les formules qu'on vient de trouver nous mènent directement à la construction suivante. Sur l'axe $AB = a$ (fig. 1.), j'éleve à chaque point M la perpendiculaire MN , égale à la valeur de Z ; c'est-à-dire à la valeur initiale de

D_2

ζ qui

z qui répond à l'abscisse $x = AM$. J'en fais autant à l'égard des valeurs initiales de u sur un autre axe de même longueur AB (fig. 2.); & j'obtiens par ce moien les deux courbes ANB , AQB que j'appelle *courbes fondamentales*, & qui sont les lieux géométriques des quantités Z & V .

Ces courbes seront régulières, ou irrégulières, suivant la nature des quantités Z & V ; mais elles se termineront toujours d'un côté & de l'autre aux extrémités A & B de l'axe, puisque les valeurs de Z & de V dans ces points sont nulles par supposition.

Je trace ensuite sur deux autres axes égaux, AB , AB (fig. 3. & 4.) les nouvelles courbes anb , Aqb , telles, que chaque ordonné Mn de la première soit toujours quatrième proportionnelle à la soutangente MT de la courbe ANB , à l'ordonnée correspondante MN , & à la quantité constante \sqrt{c} , & que l'ordonné Mq de la seconde soit égale à l'aire AQM de la courbe AQB , divisée par la même quantité \sqrt{c} .

Ces quatre courbes ainsi données, si l'on cherche les valeurs de z & de u qui répondent à une abscisse quelconque $x = AM$, & à un tems quelconque t , on n'aura qu'à prendre de part & d'autre des points M , les points M' & M'' éloignés par des intervalles égaux MM' & $MM'' = t\sqrt{c}$, & l'on aura

$$z = \frac{MN' + M'N + M'q' - M'q}{2}$$

$$u = \frac{M'Q' + M'Q + M'n' - M'n}{2}$$

Quelque générale que paroisse cette construction que nous venons de trouver, elle ne l'est cependant pas tout-à-fait; car il y a une infinité de cas où elle ne sauroit avoir lieu; c'est ce qui arrivera toutes les fois que les points M & M' tomberont au delà de A & de B .

Pour

Pour voir ce qu'il faudra faire dans ces cas, & comment les courbes données pourront être continuées de part & d'autre, il est nécessaire de reprendre les dernières formules intégrales, d'où l'on a tirées les valeurs de z & de u , & de les examiner avec attention; pour mieux y réussir nous réduirons ces formules à des constructions géométriques.

Soit imaginée la ligne ARB (*fig. 5.*) qui soit le lieu géométrique des valeurs de z pour tous les points de l'axe AB , & soit décrite sur le même axe la courbe ASB qui ait à chaque abscisse x l'ordonnée $\sin. x \sqrt{-k}$. Il est manifeste que si l'on fait les produits des ordonnées correspondantes de ces deux courbes, l'aire d'une troisième courbe qui aura ces produits pour ordonnées sera la valeur de l'intégrale $\int z \sin. x \sqrt{-k} dx$.

Pour construire de même les autres formules intégrales supposons d'abord $t\sqrt{c} < a$, & aiant tracé (*fig. 6.*) la ligne ANB , qui renferme toutes les valeurs de Z , qu'on coupe de part & d'autre du point A les deux portions de l'axe AA' , AA'' égales entr'elles, & $= t\sqrt{c}$, & qu'on transporte la courbe ASB en $A'S'B'$ & en $A''S''B''$, il est clair que si l'on prend de nouveau les produits des ordonnées de chacune de ces courbes par les ordonnées correspondantes de la courbe ANB , les aires des ces produits exprimeront les valeurs des intégrales $\int Z \sin. (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k} dx$, & $\int Z \sin. (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k} dx$. Mais il faut remarquer, que comme ces intégrales ne doivent s'étendre que depuis $X = 0$ jusque à $X = a = AB$, les aires, qui les exprimeront, ne pourront contenir que les parties de l'une & de l'autre courbe qui répondent à l'axe AB . D'où il s'ensuit que les deux portions $A'S'$ & $S''B''$ qui se trouvent au dehors de l'espace compris entre les ordonnées AS' , $B'S''$ élevées des points A & B , ne seront ici aucun usage; mais qu'il faudra au contraire ajouter à l'une

l'une & l'autre courbe, ce qui lui manque par rapport à l'axe entier AB ; c'est-à-dire que la courbe $A'S'B'$ devra être continuée jusqu'en S , & de même la courbe $B''S''A''$ jusqu'en S ; ce qui étant exécuté, on aura les deux branches $S'B'S$ & $S'A''S$, qui seront celles qu'on devra employer dans la formation des aires proposées: Pour cela examinons la nature des fonctions $\sin. (X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, & $\sin. (X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui forment les courbes $A'S'B'S$ & $B''S''A''S$, en comptant les abscisses X du point d'origine A ; & voyons ce que ces fonctions deviennent au delà du point B' & en deçà du point A'' .

Puisque les deux courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$ ne sont que la même courbe ASB , dans laquelle, nommant x les abscisses, les ordonnées sont exprimées par $\sin. x\sqrt{-k}$, la question se réduit à déterminer la valeur de $\sin. x\sqrt{-k}$, lorsque x est négatif, & lorsque x est plus grand que a ; soit donc en premier lieu x négatif; on aura, comme on le fait, $\sin. (-x)\sqrt{-k} = -\sin. x\sqrt{-k}$, c'est-à-dire que la fonction donnée de x ne recevra point d'autre changement, si non qu'elle deviendra négative. Soit ensuite $x > a$; mais $< 2a$, savoir $x = 2a - \zeta$, on aura $\sin. x\sqrt{-k} = \sin. (2a - \zeta)\sqrt{-k} = \sin. (2a\sqrt{-k} - \zeta\sqrt{-k})$. Or par la valeur déterminée ci-dessus de $\sqrt{-k}$, $2a\sqrt{-k} = \nu\pi$, & par les règles connues de la Trigonométrie, $\sin. (\nu\pi - \zeta\sqrt{-k}) = \sin. (-\zeta\sqrt{-k}) = -\sin. \zeta\sqrt{-k}$; donc puisque $\zeta = 2a - x$ on aura dans ce cas $\sin. x\sqrt{-k} = \sin. (2a - x)\sqrt{-k}$. Delà il s'ensuit 1.^o Que pour avoir la continuation $A''S$ du côté des abscisses négatives de la courbe $A''S''B''$, on n'aura qu'à renverser la même courbe au dessous de l'axe, en sorte que le point A'' demeure immobile. 2.^o Que pour avoir la continuation $B'S$ du côté des abscisses plus grandes que a dans la courbe $A'S'B'$ il faudra aussi renverser cette courbe de la même façon que l'autre; mais en prenant ici le point B' pour fixe.

Je dis maintenant, que la portion de courbe $A''S$ est la même que la AS' ; ainsi que la portion $B'S$ est la même que la $B''S''$; & que par conséquent, au lieu des deux courbes $S'B'S$ & $S''A''S$, on peut substituer les deux autres $A'S'B'$ & $A''S''B''$, lorsque il ne s'agit que d'avoir la somme des mêmes parties. Je dis ensuite que la somme des aires formées des produits des ordonnées de l'une & de l'autre courbe $S'B'S$ & $S''A''S$ par celles de la courbe ANB fera égale à la somme des aires qu'on pourra former de la même façon par les ordonnées des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, pourvu que dans les espaces AA' , BB'' , on prenne, pour ordonnées de la courbe ANB , celles qui conviennent aux espaces AA'' & BB' avec des signes contraires; d'où je déduis, que si l'on veut continuer la courbe même ANB de part & d'autre de l'axe, afin qu'elle réponde immédiatement à toute l'étendue des courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$, on n'a qu'à la renverser dessous l'axe en AN' & BN'' , le point A demeurant immobile dans le premier cas, & le point B dans le second comme on le voit clairement dans la *fig. 7*.

Il résulte donc de tout ce qu'on vient de démontrer que pour avoir la valeur de l'expression composée $\int Z \sin. (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k} dx + \int Z \sin. (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k} dx$, on n'a qu'à prendre la somme des deux aires qui se formeront par les produits des ordonnées des courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$ multipliées par les ordonnées correspondantes de la courbe $N'ANBN''$. La moitié de cette somme, si l'on suppose $V = 0$, devra donc être égale à l'aire formée par les deux courbes ARB , ASB .

Or puisque les ordonnées de la courbe ASB , qui est la même que les deux courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$, renferment la quantité $\sqrt{-k}$, laquelle doit s'évanouir de l'équation, on ne parviendra à se defaire de cette quantité, qu'en égalant la valeur de ζ , qui multiplie chaque ordonnée de ARB , à la

la

la démisomme des valeurs de Z , qui multiplie la même ordonnée dans l'une & l'autre courbe $A'S'B'$ & $A''S''B''$; prenant pour ces valeurs de Z les ordonnées correspondantes de la courbe $N'ANBN''$; on coupera donc des points A' & A'' , qui sont les origines des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, deux abscisses $= x$, ou bien, à cause de $AA' = AA'' = t\sqrt{c}$, on coupera du point A , origine de la courbe génératrice ANB , deux abscisses $x + t\sqrt{c}$ & $x - t\sqrt{c}$, & la démisomme des ordonnées correspondantes dans cette courbe, fera la valeur cherchée de ζ .

Si on suppose la courbe ANB anéantie, & qu'on y substitue la courbe AQB , on aura par la construction précédente les valeurs de la vitesse u dans le cas, où $Z = 0$. Mais si l'on veut avoir égard à la fois aux deux courbes ANB & AQB ; il faudra encore faire attention aux autres formules intégrales que nous avons négligées; & qui se construisent de la même façon que les précédentes avec cette seule différence qu'au lieu des courbes ANB , AQB il faut employer les anb & AqB . On s'y prendra donc à l'égard de ces dernières courbes d'une manière parfaitement analogue à celle qu'on vient de pratiquer pour les premières; il faudra seulement observer, que comme les deux formules intégrales, qui naissent de chacune d'elles, ont des signes différens, les branches $A'S'B'$ & $A''S''B''$ devront être situées l'une au dessus & l'autre au dessous de l'axe; c'est pourquoi la partie $A''S$, qui doit servir de continuation à la branche $B'S'$ au lieu de sa partie $A'S$, se trouvera du même côté de l'axe, comme aussi que la partie $B'S$ à l'égard de l'autre branche $A'S''$, dont elle est le supplément au lieu de $S''B''$; d'où il s'enfuit que les branches de continuation dans les courbes Anb & Aqb se trouveront au dessus de l'axe, comme on le voit dans la fig. 8. On prendra donc dans ces courbes ainsi continuées de part & d'autre les ordonnées qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{c}$ & $x - t\sqrt{c}$

en comptant du point A ; & leur demidifférence donnera ce qu'il faut ajouter à la valeur de z & de u .

La construction que nous venons de trouver est la même, pour le fond, que celle qu'on a donné plus haut; mais elle en est plus générale en ce que les courbes ici se trouvent continuées de part & d'autre par une étendue égale à l'axe AB ; ce qui suffit pour résoudre tous les cas, où $t\sqrt{c}$ ne surpasse point a comme on l'a supposé d'abord.

Tous les autres cas demanderont donc encore une nouvelle continuation, qu'on pourroit trouver aussi en suivant une méthode analogue à celle que nous avons employé ci-dessus; mais qu'on déduira plus aisément de la reflexion suivante. Je considère d'abord le sinus de l'angle $(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui est celui qui donne des valeurs de X plus grandes que a ; je trouve que ce sinus ne change point en retranchant de X un multiple quelconque de $2a$; car $\text{fin.} [(X - \sqrt{c})\sqrt{-k} - 2\mu a\sqrt{-k}]$ devient (en substituant au lieu de $\sqrt{-k}$ sa valeur $\frac{\nu\pi}{2a}$) $\text{fin.} [(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k} - \mu\nu\pi]$.

Or, μ étant un nombre quelconque entier, $\mu\nu$ le fera aussi; & par conséquent par les règles connues ce sinus deviendra $= \text{fin.} (X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, tel qu'il étoit d'abord. J'examine de même le sinus de l'autre angle $(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, d'où naissent les valeurs négatives de X ; & je vois que ce sinus demeure le même, en ajoutant à X un multiple quelconque de $2a$; Car on trouve aussi $\text{fin.} [(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k} + \mu\nu\pi] = \text{fin.} (X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}$.

Ces deux propositions prouvent donc que les abscisses X peuvent être augmentées ou diminuées de $2a$, de $4a$ &c. sans qu'il en résulte aucun changement dans les formules intégrales; d'où il suit que les ordonnées à toutes ces abscisses ainsi augmentées ou diminuées seront nécessairement les mêmes. Donc puisque nous avons ci-dessus trouvé moyen d'étendre les courbes fondamentales jusques à l'abscisse $2a$

d'un côté, & jusqu'à l'abscisse $-a$ de l'autre, on pourra à présent les étendre tant qu'on voudra, en appliquant à chaque abscisse exprimée par $z + 2\mu a$ l'ordonnée qui convient à la simple abscisse z , dont la valeur est supposée contenue entre les limites $+2a$, & $-a$. Il ne faudra pour cela que transporter successivement le long de l'axe toute la courbe qui répond à l'abscisse $= 2a$, & qui est composée de deux branches égales, situées l'une au dessus & l'autre au dessous du même axe; d'où il résultera une courbe continue, & de figure anguiforme, c'est-à-dire, contenant plusieurs ventres égaux, situés alternativement au dessus & au dessous de l'axe. Nous appellerons les courbes ainsi formées *courbes génératrices*.

Or fera la même chose à l'égard des autres courbes formées par les tangentes, & par la quadrature des courbes *fondamentales*; mais comme la portion de ces courbes, qui répond à l'abscisse $2a$, est composée de deux branches égales, situées l'une & l'autre du même côté de l'axe, la courbe, qui résultera de la répétition de cette partie, contiendra aussi plusieurs ventres égaux, mais tous placés du même côté de l'axe.

Voilà comment par la simple description réitérée des branches données ANB , AQB , anb , Aqb , on peut prolonger toutes ces courbes à l'infini, & avoir par conséquent des ordonnées réelles pour toutes les abscisses exprimées par $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$, quelle que soit la valeur du tems t ; ce qui suffit pour que la construction des valeurs de z & de u ne soit plus sujette à aucune exception.

Le problème, dont la solution nous a jusqu'à présent occupé, est le même que celui qu'on résolu dans le *Chap. V. des Rech. précéd.*; car il est facile de voir que les équations de l'*Art. XIX.*, dans le cas où le nombre des points mobiles est infini, peuvent se réduire à la formule générale

$$(d^2z)$$

$\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2\gamma}{dx^2}\right)$. Aussi la construction que nous venons de trouver s'accorde entièrement avec celle qu'on a donné dans l'*Art.* XXXIX., & plus amplement dans l'*Art.* XLV.; ce qui doit être regardé comme une confirmation de la justesse & de la bonté de nos calculs.

R E M A R Q U E S

Sur la solution précédente.

8. **Q**UOIQUE la solution précédente soit beaucoup moins compliquée que celle qui se trouve dans *mes Rech. sur le Son*; elle l'est cependant encore à un point qui la rend assés difficile à suivre. C'est pourquoi il me paroît bon de l'éclaircir par quelques remarques, qui fassent connoître plus à fond la nature & l'esprit de la méthode qui nous y a conduit.

Comme la question est de trouver les mouvemens d'une infinité de points mobiles, dans la supposition que leur état d'équilibre ait été dérangé d'une manière quelconque, on ne peut pas, ainsi qu'on l'a prouvé plus haut, exprimer tous ces mouvemens par une seule formule générale; mais il faut regarder au contraire chaque point mobile comme isolé, & en chercher le mouvement, en résolvant comme autant de problèmes à la fois, qu'il y a de points mobiles dans le système donné. Une telle question demande donc, pour être pleinement résolue, d'autres procédés que ceux de l'Analyse ordinaire; c'est ce que M. D'Alembert a eu soin de faire remarquer au sujet des cordes vibrantes, dans l'*Art.* II. de son Addition au *Mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, imprimée parmi les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1750. Dans tout autre cas, di-t-il, (c'est-à-dire dans tous les cas où la courbe initiale n'aura point les conditions prescrites par cet Auteur;

teur; le problème ne pourra se résoudre, au moins par ma méthode, & je ne sais même s'il ne surpassera pas les forcés de l'Analyse connue. En effet on ne peut, ce me semble, exprimer y analytiquement d'une manière plus générale qu'en la supposant une fonction de x & de s ; mais dans cette supposition on ne trouve la solution du problème, que pour le cas, où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une seule & même équation. Dans tous les autres cas il me paroît impossible de donner à y une forme plus générale.

La méthode, que nous avons exposé ci-dessus, est une réduction de celle que j'ai inventé pour résoudre le problème des vibrations d'une corde chargée d'un nombre indéfini de petits poids; ainsi elle remplit la condition, que tous les points mobiles soient considérés chacun en particulier, & en même tems elle n'est pas sujette aux difficultés qui se présentent en passant du nombre indéfini des points mobiles à un nombre réellement infini.

Le fondement principal de l'une & de l'autre de ces méthodes, c'est l'ingénieuse Analyse inventée par M. D'Alembert pour intégrer des équations différentielles d'un degré quelconque, & contenant un nombre quelconque de variables, pourvu qu'elles ne paroissent que sous une forme linéaire. Aussi est-ce une justice qu'il faut rendre à ce savant Géomètre, que de reconnoître que nous lui devons le principal secours qui nous a aidé à franchir les difficultés, que lui-même semble avoir cru insurmontables à l'Analyse.

À l'égard des procédés de nos deux méthodes, ils ne diffèrent d'abord entr'eux; que parce l'on a substitué, dans les derniers, des différentiations & des intégrations au lieu des sommes & des différences algébriques qui se trouvent dans les autres; mais comme on pourroit craindre que ces opérations n'entraînassent les inconvéniens qu'on a indiqué dans l'Art. XV. des *Rech. préc.*, il me paroît utile de développer

velopper cet objet plus en détail, en rapprochant l'Analyse que j'ai donné ci-dessus de celle du *Chap. III. des mêmes Rech.*

J' imagine d'abord qu'au lieu de la simple équation générale $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c (\frac{d^2z}{dx^2})$, qui appartient à tous les points mobiles, il y en ait une infinité, dont chacune représente le mouvement de chacun des points en particulier; mouvement qui dépend d'ailleurs de tous les autres, puisque la différentielle d^2z qu'on prend, en ne faisant varier que x , exprime la différence seconde des valeurs de z pour trois points consécutifs. Je multiplie donc chacune de ces équations par un coëfficient indéterminé M , ou plutôt par la quantité Mdx , en regardant M comme une variable qui peut convenir à toutes les équations en général; & j'en prens la somme par une intégration indiquée à la manière ordinaire.

Maintenant, comme il s'agit de joindre ensemble les coëfficiens de chaque valeur de z qui répond à chaque point mobile, je transforme mon équation intégrale en sorte que les différentielles de z dépendantes de x , s'évanouissent.

Les transformations, dont je fais usage dans cette occasion, sont celles qu'on appelle intégrations par parties, & qui se démontrent ordinairement par les principes du calcul différentiel; mais il n'est pas difficile de voir qu'elles ont leur fondement dans le calcul général des sommes & des différences; d'où il suit qu'on n'a point à craindre d'introduire par-là dans notre calcul aucune loi de continuité entre les différentes valeurs de z .

Après cela, je determine les valeurs de l'indéterminée M par la comparaison des coëfficiens des termes correspondans z & $\frac{d^2z}{dt^2}$; & je trouve pour cela une équation différentielle du 2 degré qui contient une nouvelle indéterminée

née constante k , & dont l'intégration entraîne encore dans la valeur de M deux autres constantes arbitraires. Je détermine ces constantes à être telles, que M s'évanouïsse, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$, puisque les valeurs de z étant nulles dans ces deux points, les M qui les multiplient ne doivent non plus avoir des valeurs réelles; par ce moïen on fait disparaître de l'équation intégrale les termes qui sont absolument algébriques, & qui auroient d'ailleurs empêché le reste des opérations. Ces deux conditions laissent encore indéterminée la valeur d'une constante, par laquelle toute l'expression de M est multipliée; mais cette constante s'évanouït ensuite d'elle même par la division. A l'égard de la constante k , on trouve une infinité de valeurs différentes, qui toutes lui conviennent également, & dont le nombre répond à celui des équations particulières qu'on résout à la fois. C'est de ce nombre infini de valeurs de k , que dépend ensuite la détermination de toutes les valeurs de z .

Delà je passe à l'intégration actuelle de notre équation formée par l'addition de toutes les équations particulières. Cette intégration ne regarde que la variabilité de t , & elle s'achève selon les méthodes connues du calcul intégral, puisque ici la loi de continuité a lieu. Après cela je substitue la valeur de M , & il en résulte une équation assez simple qui renferme toutes les valeurs de z , pour chaque point mobile dans tous les instants du mouvement, avec les valeurs particulières des mêmes z & des vitesses u dans le premier instant; valeurs qu'on suppose données à volonté, & qui ne sont point réglées par aucune loi de continuité. Je trouve en même tems une formule semblable pour les vitesses u de tous les points dans un tems quelconque.

Jusqu'ici cette Analyse est parfaitement d'accord avec celles du *Chap. cité de mes Rech.*; mais elle en diffère entièrement dans la suite, où il s'agit de tirer les valeurs de z & de u .

Comme

Comme il est nécessaire que nos dernières formules soient vérifiées, quelques valeurs qu'on donne à k , parmi le nombre infini de celles qu'on a trouvé; il est visible qu'il faut chasser cette même quantité k , à l'aide d'autant d'équations particulières qu'il y a de différentes fonctions de k . C'est à quoi nous sommes parvenus, en employant différentes transformations & réductions, dont on a rendu compte dans le cours de cette Analise; & qui me paroissent les seules capables de remplir l'objet proposé.

La construction qu'on a donné ensuite des valeurs de z & de u par le moyen des courbes *génératrices*, & la manière de continuer ces courbes à l'infini de part & d'autre dépendent d'une considération intime sur la nature de nos formules. Il est vrai que les principes, d'où l'on a tiré cette construction, pourroient paroître trop recherchés; mais elle n'en est pas moins démonstrative & certaine; ce n'a été que pour conserver une entière rigueur que j'ai été obligé d'avoir recours à de tels principes; car dès que l'on aura démontré dans deux ou trois problèmes de cette sorte, que la nature des courbes *génératrices* est la même, que celle qu'on trouve en supposant ces courbes représentées par une fonction régulière & continue, ainsi que l'a fait M. D'Alembert dans sa solution du problème des vibrations des cordes, on sera assez fondé à appliquer la méthode de ces fonctions aux cas mêmes où l'on voudra supposer qu'elles n'aient point lieu.

9. Après tout ce que nous venons d'expliquer, il ne sera pas difficile de déterminer le degré de généralité, dont notre méthode est susceptible. On verra premièrement qu'elle ne pourra réussir à moins que l'indéterminée z & ses différences ne se trouvent que sous une forme linéaire, & de plus qu'elles ne soient point mêlées avec la variable t ; lorsque ces conditions seront observées, quoique les différentielles de z montent à un degré plus haut que le second, & qu'il y ait

ait même un terme sans z , qui soit une fonction quelconque de t & de x , on pourra toujours se servir avec succès des artifices & des transformations enseignées; comme on le verra dans les solutions que nous donnerons dans la suite. Toute la difficulté ne tombera plus que sur l'intégration des équations en M & en s ; équations qui se rapportent aux méthodes ordinaires du calcul intégral. En second lieu le succès de notre méthode demande, qu'on puisse faire disparaître des équations la quantité k , qui a toujours une infinité de valeurs; cette opération renferme des difficultés plus considérables, & je ne suis point encore parvenu jusqu'à présent à trouver pour cela une méthode directe & générale; cependant nous ferons voir dans la suite, que cet objet pourra toujours être rempli si non exactement, au moins en se servant des approximations & des séries.

Pour ce qui est de la première condition qui est absolument indispensable dans notre méthode, il est aisé de démontrer qu'elle aura toujours lieu dans les mouvemens d'un système quelconque d'un nombre infini de points mobiles; lorsque ces mouvemens seront supposés infiniment petits, comme le sont tous les mouvemens réciproques qu'on observe dans la nature; d'où il suit qu'on pourra toujours les calculer soit exactement, soit seulement par approximation.

CHAPITRE III.

De la propagation du Son.

10. **L**A masse de l'air étant naturellement de trois dimensions, il est clair que, pour calculer la propagation du Son en toute rigueur, il faudroit résoudre les formules générales que M. Euler a donné dans ses *Recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique*; (Voyez pag. 1. ci-dessus) Mais ces formules n'étant point du nombre

bre de celles, sur lesquelles notre méthode peut avoir prise, il faut renoncer pour le présent, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on soit aidé par de nouveaux secours, à toute Théorie de la propagation du Son envisagée sous ce point de vûë. Cependant comme il est très-probable que les ébranlemens des particules de l'air pour produire le Son, doivent être infiniment petits, ainsi que nous tacherons de le prouver dans la suite; on pourra s'en tenir aux formules que M. Euler a aussi donné pour ce cas; formules qui sont sans comparaison beaucoup plus simples, que les premières, & qui, par la raison qu'on a dit plus haut (*Art. 9.*), rentrent nécessairement dans la classe de celles qu'on peut soumettre à notre Analyse.

Quoique la manière, dont M. Euler a trouvé ces formules, soit sans contredit la plus directe & la plus rigoureuse qui se puisse imaginer, cependant, puisque la supposition des ébranlemens infiniment petits rend le calcul incomparablement plus simple, j'ai cru qu'on ne feroit point fâché de le trouver ici.

Soient X, Y, Z les coordonnées rectangles qui déterminent la position d'une particule quelconque de fluide dans l'état d'équilibre; supposons que ces coordonnées, dans le tems t , deviennent $X + x, Y + y, Z + z$; il ne sera pas difficile de voir que, si les quantités x, y, z sont supposées infiniment petites, le parallélepède $dXdYdZ$ qui représente une particule dans l'état d'équilibre, pourra être censé se changer en un autre $= (dX + dx)(dY + dy)(dZ + dz) = dXdYdZ + dXdYdz + dXdZdy + dYdZdx$, en négligeant les puissances plus hautes de dx, dy, dz . De là il suit, qu'en nommant E l'élasticité naturelle de la portion infiniment petite de fluide renfermée dans le premier parallélepède, l'élasticité de la même portion, lorsque elle remplira le second, se trouvera =

F

$E dXdYdZ$

$$\frac{dXdYdZ + dXdYdz + dXdZdy + dYdZdx}{dXdYdZ + dXdYdz + dXdZdy + dYdZdx} = E -$$

$E \left(\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ} \right)$ en négligeant ce qui se doit négliger. Soit prise maintenant la différence de cette quantité, en ne faisant varier que l' X , & l'on aura, E étant constant, $- E \left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ} \right) dX$ pour la différence d'élasticité de deux particules infiniment voisines & placées dans la direction de la ligne X ; donc si l'on considère une autre particule intermédiaire à celles-ci, & qui leur soit contigue par tous les points des deux faces opposées $dYdZ$, il est clair que cette particule sera repoussée par l'excès de l'élasticité de la particule antérieure sur celle de la particule postérieure avec une force qui sera exprimée par

$- E \left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ} \right) dXdYdZ$. Cette force divisée par la masse à mouvoir, qui est ici (en posant D pour la densité naturelle du fluide) $DdXdYdZ$, sera donc $= - \frac{T^2}{2b} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)$, h étant l'espace qu'un corps pesant parcourt dans le tems T ; d'où l'on aura l'équation

$$\frac{T^2}{2b} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) = \frac{E}{D} \left(\left(\frac{d^2x}{dX^2} \right) + \left(\frac{d^2y}{dXdY} \right) + \left(\frac{d^2z}{dXdZ} \right) \right).$$

On trouvera de même par un semblable raisonnement les deux autres équations

$$\frac{T^2}{2b} \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{E}{D} \left(\left(\frac{d^2y}{dY^2} \right) + \left(\frac{d^2x}{dYdX} \right) + \left(\frac{d^2z}{dYdZ} \right) \right)$$

$$\frac{T^2}{2b} \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right) = \frac{E}{D} \left(\left(\frac{d^2z}{dZ^2} \right) + \left(\frac{d^2x}{dZdX} \right) + \left(\frac{d^2y}{dZdY} \right) \right).$$

Il est visible que ces trois équations s'accordent avec celles de M. Euler, en posant selon les hipotéses de cet Auteur $h = g$, $\frac{E}{D} = h$, $T = 1$, & substituant p , q & r pour x , y & z .

II. Au reste ces formules sont fondées sur l'hypothèse que l'élasticité de l'air soit proportionnelle à sa densité; mais il n'est pas difficile de les étendre à telle autre hypothèse qu'on voudra.

Pour embrasser la question dans toute la généralité possible, supposons que l'élasticité de l'air soit comme une fonction quelconque de la densité, de sorte que nommant s la densité dans un instant quelconque, l'élasticité correspondante soit exprimée par $E\phi s$; il est clair par les calculs de l'Art. préc. que $s = \frac{D dX dY dZ}{(dX + dx)(dY + dy)(dZ + dz)}$

$$= D - D \left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ} \right]; \text{ donc, à cause de } dx, dy, dz \text{ infiniment petites par rapport à } dX, dY, dZ, \text{ on aura } E\phi s = E\phi D - \left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ} \right] ED\phi' D,$$

ϕ' marquant une telle fonction de ϕ que $\phi' s = \frac{d\phi}{ds}$.

Maintenant, comme D est une quantité constante, les différences de $E\phi s$ seront exprimées simplement par

$$ED\phi' D \cdot \left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ} \right] \text{ d'où l'on voit que, pour avoir les équations du mouvement du fluide, il ne faudra qu'écrire au lieu de } E \text{ dans les calculs de l'Art. précéd. } ED\phi' D, \text{ ou } E\phi' D \text{ simplement, en posant } D = 1.$$

Si le fluide étoit composé de parties de différentes densités, il faudroit regarder alors la quantité D non plus comme constante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de X, Y, Z . Ainsi l'on parviendroit aux trois équations suivantes;

$$\frac{T^2}{2b} \left(\frac{d^2 x}{dr^2} \right) = E\phi' D \left(\left(\frac{d^2 x}{dX^2} \right) + \left(\frac{d^2 y}{dXdY} \right) + \left(\frac{d^2 z}{dXdZ} \right) \right) + \frac{E}{D} \left(\frac{d \cdot D\phi' D}{dX} \right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX} \right) + \left(\frac{dy}{dY} \right) + \left(\frac{dz}{dZ} \right) \right) - \frac{E}{D} \left(\frac{d \cdot \phi D}{dX} \right);$$

$$\frac{T^2}{2b} \left(\frac{d^2 y}{dr^2} \right) = E \phi' D \left(\left(\frac{d^2 y}{dr^2} \right) + \left(\frac{d^2 x}{dr dX} \right) + \left(\frac{d^2 \zeta}{dr dZ} \right) \right) \\ + \frac{E}{D} \left(\frac{d \cdot D \phi' D}{dr} \right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX} \right) + \left(\frac{dy}{dr} \right) + \left(\frac{d\zeta}{dZ} \right) \right) \\ - \frac{E}{D} \left(\frac{d \cdot \phi D}{dr} \right);$$

$$\frac{T^2}{2b} \left(\frac{d^2 \zeta}{dZ^2} \right) = E \phi' D \left(\left(\frac{d^2 \zeta}{dZ^2} \right) + \left(\frac{d^2 x}{dZ dX} \right) + \left(\frac{d^2 y}{dZ dr} \right) \right) \\ + \frac{E}{D} \left(\frac{d \cdot D \phi' D}{dZ} \right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX} \right) + \left(\frac{dy}{dr} \right) + \left(\frac{d\zeta}{dZ} \right) \right) \\ - \frac{E}{D} \left(\frac{d \cdot \phi D}{dZ} \right).$$

Supposons par exemple que la différente densité des parties du fluide vienne du poids du fluide supérieur; dans ce cas, quelle que soit la fonction ϕ , on aura toujours $\frac{E d \cdot \phi D}{dZ} = -D$ (en supposant que la direction de Z soit verticale), d'où l'on trouvera la valeur de D qui sera une fonction de Z seulement. Delà on pourroit tirer les équations nécessaires pour trouver les loix de la propagation du Son, en ayant égard à la densité variable des couches de l'atmosphère; mais, pour ne pas trop nous engager dans des difficultés de calcul, nous nous contenterons dans tout le cours des Recherches suivantes de regarder la densité de l'air comme constante; ce qui ne nous éloignera pas sensiblement de la vérité, pourvu qu'on ne considère la propagation du Son, que près de la surface de la terre. C'est donc sur les équations de l'Art. précéd. que nous fonderons principalement nos recherches sur la propagation du Son; mais comme ces équations sont encore trop compliquées à cause des trois variables qu'elles renferment, il fera bon de commencer par les simplifier au moyen de quelques hypothèses, qui limitent le mouvement de chaque particule de l'air. Or de toutes les hypothèses qu'on peut employer pour cela, les plus

com-

commodes, & les plus conformes à la nature, sont les deux suivantes. La première consiste à imaginer la masse de l'air réduite à une simple ligne physique, dans lequel cas on fait disparaître à volonté deux variables quelconques x & y , avec leurs correspondantes X & Y . La seconde hypothèse est de supposer que les ébranlemens se propagent dans toute la masse de l'air par des ondulations sphériques autour du corps sonore; dans ce cas chaque couche concentrique d'air est supposée subir le même ébranlement dans toutes ses parties, d'où il suit que la détermination de l'ébranlement de chaque couche ne peut dépendre que du tems t , & du rayon de la couche, c'est-à-dire de la distance du corps sonore.

§ I.

De la propagation du Son dans une ligne physique d'air.

12. **S**I l'on fait, selon la première hypothèse, x & y , & X & $Y = 0$, & qu'on pose pour abréger c au lieu de $\frac{2hE}{T^2D}$ on trouve l'équation $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c(\frac{d^2z}{dz^2})$ qui est la même que celle que nous avons appris à construire dans le *Probl. I.*, Z dénotant ici la même chose que x ; d'où il suit, que pour avoir les loix de la propagation du Son dans cette hypothèse, il ne faudra qu'appliquer la construction donnée, suivant les différens ébranlemens excités par les corps sonores, & la nature du milieu élastique qui les environne. Quoique cette matière ait déjà été traitée dans la seconde *sect. de mes Rech. sur le Son*, elle peut néanmoins l'être encor d'une manière beaucoup plus générale. Je la reprendrai donc ici avec d'autant plus de plaisir qu'elle me donnera occasion de faire plusieurs remarques nouvelles & importantes.

Que la droite PQ (*fig. 9.*) représente une ligne physique d'air étendue d'un côté & de l'autre à l'infini, & qu'au lieu de supposer (comme je l'ai fait dans la *section citée*) que la seule particule P reçoive du corps sonore une impulsion quelconque, on imagine, que toutes les particules contenues dans l'espace PQ soient ébranlées en même tems; PQ représentant, suivant M. Newton, la *pulsion* primitive de la fibre sonore; il s'agit de déterminer les lois de la propagation de cette pulsion. Aiant tracé pour cela, selon ce qui a été enseigné plus haut, les deux courbes *fondamentales*, qui représentent les déplacements primitifs des particules, avec les vitesses qui leur ont été imprimées; & aiant construit de mêmes les deux autres courbes qui résultent de la quadrature & des tangentes de celles-ci, & que nous appellerons dorénavant courbes *dérivées*, on remarquera

1.^o Que les courbes *fondamentales* se termineront nécessairement aux deux points P & Q qui sont les limites de l'agitation primitive, par supposition.

2.^o Que puisque la fibre aérienne est supposée s'étendre à l'infini de part & d'autre, aucune de ses particules ne pourra être absolument fixe; d'où il suit que les extrémités A & B des courbes *fondamentales*, qui sont censées fixes, devront dans ce cas être reculées à l'infini, ce qui fera disparaître routes les branches de continuation, en sorte que les courbes *génératrices* ne renfermeront aucune ordonnée réelle au delà des points P & Q .

3.^o Qu'il en sera de même pour les courbes *dérivées*, exceptée celle qui dépend des quadratures laquelle dégènerera du côté de Q en une droite parallèle à l'axe, comme il est facile de le voir, en examinant la génération de cette courbe.

Ces choses posées & bien entendues, voici comme je raisonne. Je suppose que l'on demande l'état de la particule qui répond à l'abscisse x pour un tems quelconque t , écoulé depuis le premier instant du mouvement. Je n'aurai qu'à prendre la demisomme des ordonnées, dont les abscisses

ses sont $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$ dans les deux courbes fondamentales, & la demidifférence des ordonnées pour les mêmes abscisses dans les courbes dérivées, & joignant ensemble la première des demisommes, & la seconde des demidifférences, comme aussi la seconde demisomme, & la première demidifférence, j'aurai l'espace parcouru par la particule pendant le tems donné t , & sa vitesse à la fin de ce tems. Je vois donc que cet espace & cette vitesse seront toujours nulles, lorsque l'abscisse $x \pm t\sqrt{c}$ restera en deça du point P ; ensuite que l'espace sera constant, & la vitesse nulle, lorsque l'abscisse $x \pm t\sqrt{c}$ tombera au delà de Q . D'où je conclus que, pour un tems quelconque t , il n'y aura, & il ne pourra y avoir d'autres particules en mouvement, que celles, pour lesquelles la valeur de $x + t\sqrt{c}$ sera plus grande que la distance du point P au point A , & moindre que la distance du point Q au même point A qui est toujours l'origine des abscisses, quoique placée à une distance infinie. Examinons séparément les deux cas de $x + t\sqrt{c}$, & de $x - t\sqrt{c}$.

Soit p la distance entre le point A & le point P , & soit $x = p + z$, z sera une nouvelle abscisse qui aura son origine en P . Posons maintenant en premier lieu $p + z - t\sqrt{c} = p$, on aura $z = t\sqrt{c}$; posons ensuite $p + z - t\sqrt{c} = p + PQ$, on aura $z = PQ + t\sqrt{c}$. Par là on peut avoir les limites de l'agitation des particules dans le tems t , en tant qu'elle résulte des termes dépendans de l'expression $x - t\sqrt{c}$; car il ne faut que prendre sur la ligne PQ , les points P' & Q' tels que $PP' = t\sqrt{c}$, & $P'Q' = PQ$; & la portion $P'Q'$ de la fibre sera la seule, où cette agitation aura lieu. On trouvera de la même manière les limites de l'agitation des particules, qui dépend de la valeur de $x + t\sqrt{c}$; car en faisant $p + z + t\sqrt{c} = p$ & $= p + PQ$, on a deux valeurs de z , savoir $z = -t\sqrt{c}$, & $z = PQ - t\sqrt{c}$. On prendra donc de nouveau, sur

la même ligne prolongée du côté opposé, deux autres points P & Q , tels que $P'P = t\sqrt{c}$, & $P'Q = P'P - PQ$ c'est-à-dire, que $P'Q = PQ$; & tous les mouvemens, dont la détermination dépendra de la valeur de $x + t\sqrt{c}$ seront renfermés dans ce dernier espace $P'Q$.

De ce qu'on vient de démontrer il s'en suit que la *pulsion* primitive, c'est-à-dire l'onde excitée par le corps sonores dans l'espace PQ de la fibre aérienne indéfinie, s'est comme divisée en deux autres, qui dans le tems t ont été transportées, l'une à droite en $P'Q'$, & l'autre à gauche en $P'Q$, conservant toujours la même étendue PQ . Pour connoître la vitesse de la propagation de ces *pulsions* secondaires, on n'a qu'à chercher celle des points P' & P , dont la position par rapport à P est déterminée généralement par les équations $z = t\sqrt{c}$, & $z = -t\sqrt{c}$; puisque donc z représente ici les espaces parcourus par ces points dans le tems t , il est évident que leur mouvement sera uniforme, & leur vitesse $= \sqrt{c}$, & que cela aura lieu quelle qu'ait été la nature de la *pulsion* primitive. Il est inutile de nous arrêter à examiner la valeur de \sqrt{c} qui est $\frac{2h}{T^2} \times \frac{E}{D}$, puisque cette expression en substituant pour $\frac{E}{D}$, la quantité A , ou nk qui est sa valeur, devient la même que celle qu'on a trouvé ailleurs (*Art. LVI.*), & que M. Newton a déduit de sa Théorie, comme on l'a déjà remarqué ci-dessus (*Art. 1.*).

13. Ce seroit ici le lieu de faire voir l'application de la formule générale que nous avons trouvé d'après les Principes de M. Newton dans l'*Art. citée*; mais cette formule étant entièrement semblable à celle que M. D'Alembert a donné sur les vibrations des cordes, il est clair qu'en admettant les fonctions discontinues, qui sont indispensables dans la matière, dont il s'agit ici (*Art. 4.*), on aura la

même

même construction que nous avons donné dans l'*Art.* 7., & que par conséquent la Théorie de la propagation du Son, qui en résultera, ne fera point autre que celle qui vient d'être d'expliquée. Par-là on prouvera aisément ce que l'on a avancé plus haut (*Art.* 1.), que la vitesse de la propagation, selon cette Théorie est déterminée par la quantité $\frac{\sqrt{2hA}}{T}$ qui divise l' x dans les fonctions ϕ & ψ .

14. La manière dont nous venons de considérer la propagation du Son est beaucoup plus générale & plus conforme à la nature que celle, qu'on a employé dans le *Chap.* I. de la II. *Seçt.* des *Rech. préc.* En effet l'hipotése que j'avois adoptée dans cet Ouvrage, savoir qu'une seule particule d'air fût ébranlée par le corps sonore à chacune de ses vibrations, ne paroît pas pouvoir subsister avec l'équilibre mutuel de toutes les particules de la fibre; il me semble beaucoup plus naturel d'imaginer, que là première particule poussée par le corps sonore, condense jusqu'à une certaine distance les particules suivantes; pourvû que cette distance ne soit pas telle que les *pulsions* ou ondes sonores, qui se succéderont les unes aux autres, puissent se troubler & s'entredétruire; comme il arriveroit nécessairement, si le tems, qu'elles mettent à parcourir leur largeur, étoit moindre que l'intervalle du tems entre deux vibrations successives du corps sonore. On pourra déterminer les limites de la plus grande largeur des ondes, en prenant le nombre des vibrations que fait dans une seconde le son le plus aigu que nous puissions entendre, & divisant par ce nombre l'espace que les ondes sonores parcourent dans le même tems. Ce nombre peut se déduire rigoureusement de la formule connue des vibrations des cordes, que nous avons démontré être exacte pour quelque figure que la corde prenne; si donc on s'en tient à ce que dit

M. Euler dans l'Art. XIII. de sa *Théorie de Musique*, on aura le nombre 7520., par lequel divisant le nombre 1240. qui exprime en piés l'espace parcouru par le Son dans une seconde, selon les expériences moïennes, il viendra pour quotient 1. pouce & 2. lignes environ, qui sera par conséquent la mesure de la plus grande étendue que puissent avoir les ondes sonores, pour former des sons distincts & perceptibles à l'oreille.

15. Jusq'ici nous n'avons encor considéré que le mouvement progressif des ondes sonores; si on vouloit aussi connoître les mouvemens particuliers qui les composent, on les trouveroit aisément par les principes établis ci-dessus.

Supposons que x ou bien z soit donné, au lieu de t , dans les équations $z = t\sqrt{c}$, & $z = PQ + t\sqrt{c}$, la différence des deux valeurs de t nous donnera la durée du mouvement de chaque particule de l'onde $P'Q'$; laquelle sera $= \frac{PQ}{\sqrt{c}}$. Or puisque \sqrt{c} est la vitesse constante, avec laquelle les ondes avancent continuellement, il est clair que l'agitation de chaque particule ne durera précisément que le tems que l'onde met à parcourir toute sa largeur PQ . Il en sera de même pour les ondes propagées du côté opposé, ce qu'il est aisé de reconnoître par le moïen des deux équations $z = -t\sqrt{c}$, & $z = PQ - t\sqrt{c}$ qui leur appartiennent.

Pour ce qui est de la nature de chaque mouvement particulier, il faudra la déterminer par la construction générale des espaces & de vitesses. On trouvera pour cela,

1.^o Que toutes les particules subissent successivement la même agitation dépendante de la nature de toute la *pulsion* primitive. 2.^o Que, si on suppose que la *pulsion* primitive consiste dans le seul déplacement des particules, sans aucune vitesse imprimée, l'agitation de chaque particule ne sera

com-

composée que d'une seule allée, & d'un retour à son lieu d'équilibre, après lequel elle demeurera immobile. 3.^o Que, si l'on suppose au contraire que la *pulsion* primitive ne consiste que dans l'impression d'une certaine vitesse, les particules, pendant tout le tems de leur agitation, s'écarteront continuellement de leurs propres points d'équilibre, & elles n'y reviendront plus comme auparavant. 4.^o Qu'enfin, si la *pulsion* primitive dépend de l'une & de l'autre cause, l'agitation des particules sera composée de celles dont nous venons de parler; ce qui paroît être le cas de la nature.

16. M. Euler dans une lettre du 23. Octob. 1759. m'a fait l'honneur de me mander, que la lecture de *mes Rech. sur le Son* lui avoit suggéré le dénouement d'une difficulté qui s'étoit présentée à lui depuis long-tems. Cette difficulté consistoit à savoir pourquoi, les ébranlemens primitifs se repandant d'abord naturellement de deux côtés opposés, les ébranlemens dérivatifs ne se propagent plus que d'un seul côté, & toujours suivant la même direction. La raison de cette différence dépend de la nature particulière des ébranlemens dérivatifs, qui est telle que leur propagation ne peut avoir lieu que d'un seul côté.

Pour s'en convaincre qu'on examine les formules des valeurs de z & de u trouvées à la fin de l'Art. 6., & supposant que z & u soient les excursions & les vitesses données, qu'on cherche celles qui en résultent pour un tems quelconque t' & pour une particule quelconque déterminée par l'abscisse x' . Il est visible qu'il n'y a pour cela que à substituer z à la place de Z & u à la place de V ; & désignant par z' & u' les valeurs cherchées, on aura

$$z' = \frac{z^{(x'+t'\sqrt{c})} + z^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2} + \frac{\int u dx^{(x'+t'\sqrt{c})} - \int u dx^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}$$

$$u' = \frac{u(x' + t\sqrt{c}) + u(x' - t\sqrt{c})}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2} \left(\frac{d\zeta}{dx}(x' + t\sqrt{c}) - \frac{d\zeta}{dx}(x' - t\sqrt{c}) \right).$$

Maintenant on fait, par ce qu'on a démontré (*Art. 12.*), que les termes, dont les exposans sont $x - t\sqrt{c}$, sont les seuls qui déterminent la propagation suivant la direction PP' , & que l'autre la propagation suivant $P'P$ dépend simplement des termes qui renferment la quantité $x + t\sqrt{c}$; donc pour connoître la propagation des ébranlemens de l'onde $P'Q'$, il ne faudra substituer, au lieu de ζ & de u , que les seuls termes

$$\frac{Z(x - t\sqrt{c})}{2} - \frac{\int V dx}{2\sqrt{c}}(x - t\sqrt{c}) \quad \&$$

$$\frac{V(x - t\sqrt{c})}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ}{dx}(x - t\sqrt{c}) \quad \text{ce qui donnera}$$

en posant $x' + t'\sqrt{c}$ au lieu de x dans les exposans

$$\zeta' = \frac{Z(x' + t'\sqrt{c} - t\sqrt{c}) + Z(x' - t'\sqrt{c} - t\sqrt{c})}{2} - \frac{\int V dx(x' + t'\sqrt{c} - t\sqrt{c}) + \int V dx(x' - t'\sqrt{c} - t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}} + \frac{\int V dx(x' + t'\sqrt{c} - t\sqrt{c}) - \int V dx(x' - t'\sqrt{c} - t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}} - \frac{Z(x' + t'\sqrt{c} - t\sqrt{c}) - Z(x' - t'\sqrt{c} - t\sqrt{c})}{2} - \frac{V(x' + t'\sqrt{c} - t\sqrt{c}) + V(x' - t'\sqrt{c} - t\sqrt{c})}{2} - \sqrt{c} \cdot \frac{\frac{dZ}{dx}(x' + t'\sqrt{c} - t\sqrt{c}) + \frac{dZ}{dx}(x' - t'\sqrt{c} - t\sqrt{c})}{2} + \sqrt{c} \cdot \frac{\frac{dZ}{dx}(x' + t'\sqrt{c} - t\sqrt{c}) - \frac{dZ}{dx}(x' - t'\sqrt{c} - t\sqrt{c})}{2}$$

$$\frac{V(x + t\sqrt{c} - t\sqrt{c}) - V(x - t\sqrt{c} - t\sqrt{c})}{4}$$

Dans ces formules il est visible que les termes, dont les exposans renferment la quantité $+t\sqrt{c}$ s'évanouissent tous d'eux mêmes, & qu'il ne reste que ceux où la même quantité se trouve avec le signe négatif; d'où il s'ensuit que la propagation des ébranlemens ζ & u ne peut se faire que dans le seul sens PP' .

On prouveroit la même chose pour les ébranlemens propagés d'abord suivant la direction opposée $P'P$; car en substituant, pour ζ & u , les seuls termes dont les exposans contiennent $+t\sqrt{c}$; on verra que les formules résultantes ne seront composées que de termes, où la quantité $t\sqrt{c}$ se trouvera avec le signe $+$.

17. Nous avons supposé ci-dessus que la fibre aérienne étoit infinie de l'un & de l'autre côté; & cette hipotèse nous a donné des courbes *génératrices*, composées d'une seule branche terminée de part & d'autre, & pour ainsi dire isolée. Mais il n'en seroit pas de même si la fibre étoit elle même terminée des deux côtés, ou d'un simplement; car puisque la manière de continuer les courbes *fondamentales*, & *dérivées* est générale, & que les extrémités fixes de la fibre sont les points, autour desquels on doit, pour ainsi dire, faire tourner chaque branche, pour en avoir la continuation, ainsi qu'on l'a enseigné (*Art. 7.*), il est évident que, dans le cas d'une seule extrémité fixe les courbes *génératrices* seront composées de deux branches égales, & semblablement situées de part & d'autre du point qui constitue cette extrémité; & que dans le cas de deux extrémités fixes, les courbes *génératrices* auront un nombre infini de branches égales & semblablement situées autour des deux points qui constituent les extrémités données. Delà si on cherche la propagation des ondes sonores par la méthode de l'*Art. 12.*; on trouvera sans beaucoup de peine que

que chaque onde , venant rencontrer une des extrémités fixes , devra se réfléchir , pour ainsi dire , & retourner en arrière avec la même vitesse , & conservant la même nature qu'elle avoit avant la réflexion , d'où il résultera des *échos* simples ou composés , ainsi qu'on l'a expliqué. (*Chap. II. de la Sect. II. des Rech. préc.*).

Je ne m'arrêterai pas ici à démontrer plus en détail cette Théorie des *échos* , non plus que les autres propriétés du Son , qui dépendent des principes que nous venons d'établir. Il ne faut que relire attentivement la *Section citée* pour voir que les propositions qu'on a démontré , en ne considérant que des mouvemens instantanés dans les particules de l'air , sont aussi vraies dans l'hipotése présente des ondulations.

Mais il est un point essentiel de la Théorie du Son , dont on n'a pas encore parlé jusqu'à présent ; c'est son intensité . Or de ce que les ondes sonores ne souffrent aucune altération en parcourant un espace quelconque , comme on l'a fait voir (*Art. 12.*) , il est simple de conclure que l'intensité du Son sera constante & indépendante de la distance du corps sonore . Mais cette conclusion ne peut avoir lieu que dans l'hipotése que le Son soit obligé de suivre une seule & même direction , comme si l'on supposoit l'air renfermé dans des tuyaux , ou des conduits assés étroits , par rapport à leur longueur ; ainsi , dans les aqueducs de Rome , le P. Kircher rapporte que les Sons ne reçoivent point de diminution sensible par l'espace de 600. piés environ . Il n'en est pas de même pour l'air libre , dans lequel le Son se propageant de tous côtés à la ronde , doit s'affaiblir à mesure qu'il s'éloigne du corps sonore ; & c'est ce que l'expérience journalière apprend , & que nous allons aussi démontrer par la Théorie , en adoptant la seconde hipotése de l'*Art. 11.* , qui reste encore à examiner .

*De la propagation du Son dans l'hipotése
des ondes sphériques.*

18. **D**ANS cette hipotése on conserve à la masse de l'air ses trois dimensions; mais on suppose que, aiant pris un point fixe pour centre, toutes les particules qui se trouvent dans la direction de chaque rayon se meuvent sans sortir de cette direction, & que leurs mouvemens ne dépendent que du tems t , & de la distance de chacune d'elles au centre. Delà il est clair qu'il doit se former dans l'air des ondulations sphériques & concentriques, dont la détermination soit contenue dans une seule équation, de même que dans le cas de l'hipotése précédente. Cette équation peut se trouver soit par l'application des formules générales, ainsi que l'a fait M. Euler dans son *Mémoire pag. 1. ci-dessus*, ou plus simplement encore, quoique avec moins de rigueur, en considérant le mouvement d'un fluide élastique, renfermé dans un tuyau conique; comme on le verra plus bas. Nous nous contenterons pour le présent d'emprunter l'équation de M. Euler, & d'y appliquer notre méthode, afin d'avoir une construction qui ne soit point assujétie à la loi de continuité, comme l'exige la Théorie de la propagation du Son. Cette équation, en substituant z pour u , & x pour V se réduit à celle-ci $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c (\frac{d^2z}{dx^2}) + 2c (\frac{d \cdot z}{dx})$, qui peut être traitée de la même manière que celle du Problème I.

P R O B L È M E II.

Conservez les mêmes noms & les mêmes suppositions du Problème I., avec cette seule différence que les mouvemens des

des particules soient contenus dans l'équation $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c (\frac{d^2z}{dx^2}) + 2c (\frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx})$ construire cette même équation.

Je commence par multiplier l'un & l'autre membre par Mdx (M étant une fonction quelconque de x); ensuite j'intègre en ne faisant varier que x ; j'ai, $\int (\frac{d^2z}{dt^2}) Mdx = c \int (\frac{d^2z}{dx^2}) Mdx + 2c \int (\frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}) Mdx$. Je transforme d'abord l'intégrale $\int (\frac{d^2z}{dx^2}) Mdx$ en $(\frac{dz}{dx}) M - \int (\frac{dz}{dx}) \times (\frac{dM}{dx}) dx$, ensuite en $(\frac{dz}{dx}) M - z (\frac{dM}{dx}) + \int z (\frac{d^2M}{dx^2}) dx$. Je change de même l'autre intégrale $\int (\frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}) Mdx$ en $\frac{zM}{x} - \int \frac{z}{x} (\frac{dM}{dx}) dx$, & je tire par la substitution la nouvelle équation $\int (\frac{d^2z}{dt^2}) Mdx = c \left(M (\frac{dz}{dx}) - z (\frac{dM}{dx}) + \frac{2zM}{x} \right) + c \int z \left(\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{x dx} \right) dx$.

Je dois maintenant supposer M tel, que $\frac{Mdz}{dx} - \frac{z dM}{dx} + \frac{2zM}{x}$ soit $= 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$; or puisque l'on a déjà dans ces deux cas $z = 0$, par hypothèse, il suffit que M le soit aussi, ce qui donnera les mêmes conditions à remplir par les constantes de M , que l'on a eu dans le *Probl. I*.

L'équation restante sera donc $\int (\frac{d^2z}{dt^2}) Mdx = c \int z \left(\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{x dx} \right) dx$, où il faudra supposer $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{x dx} = kM$.

Cette

Cette équation en M est intégrable par les méthodes connues ; mais en voici une qui est, si je ne me trompe, la plus simple qu'on puisse employer dans ce cas.

Soit supposé $M = e^{\int \frac{dx}{x}}$, on aura par la substitution —

$$\frac{dp}{p^2 dx} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{px} = k, \text{ savoir } kp^2 + \frac{2p}{x} + \frac{dp}{dx} = 1.$$

Je vois que cette équation peut s'écrire ainsi $k(p + \frac{1}{kx})^2 dx$

$$+ d \cdot (p + \frac{1}{kx}) = dx, \text{ donc si on fait } p + \frac{1}{kx} = q,$$

$$\text{on aura } kq^2 dx + dq = dx; \text{ d'où l'on tire } dx = \frac{dq}{1 - kq^2}$$

$$\& \text{ intégrant par les logarithmes } x = \frac{1}{2\sqrt{k}} \left(\frac{1+q\sqrt{k}}{1-q\sqrt{k}} \right)$$

ou bien en passant aux exponentielles, avec l'addition d'une

$$\text{constante } C, q\sqrt{k} = \frac{Ce^{2x\sqrt{k}} - 1}{Ce^{2x\sqrt{k}} + 1}, \text{ donc } p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Il faut maintenant pour avoir la valeur de

M , intégrer la quantité $\frac{dx}{p}$. Or il est visible que si l'on

substitue pour p son expression telle qu'on vient de la trouver, on a une différentielle qu'il seroit assez difficile, peut

être impossible de ramener à l'intégration ; mais on peut

simplifier beaucoup le calcul, en supposant l'arbitraire C

nulle ou infinie ; dans le premier cas on a $p = -\frac{1}{kx} -$

$$\frac{1}{\sqrt{k}}, \& \text{ dans le second } p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}}, \& \text{ combinant}$$

l'une & l'autre valeur, $p = -\frac{1}{kx} \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$. On aura donc

$$\int \frac{dx}{p} = \int \frac{kx dx}{-1 \pm x\sqrt{k}} = -1 \pm x\sqrt{k} + l. (-1 \pm x\sqrt{k}),$$

H

&

& par conséquent, en ajoutant une constante A , $M = A(-1 + x\sqrt{k})e^{-1+x\sqrt{k}}$; ou bien à cause de l'ambiguïté des signes $M = A(-1 + x\sqrt{k})e^{-1+x\sqrt{k}} + B(-1 - x\sqrt{k})e^{-1-x\sqrt{k}}$. Or il faut que M soit $= 0$, lorsque $x = 0$, d'où il suit que $A + B = 0$, & par conséquent $B = -A$, donc en changeant la valeur de la constante A , $M = A(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}}) - Ax\sqrt{k}(e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}})$, ou bien encore $M = A(\sin. x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k} \cos. x\sqrt{-k})$.

Telle est la valeur de M qu'il falloit trouver; si l'on en prend la différence, on a $\frac{dM}{dx} = Ax \sin. x\sqrt{-k}$, d'où l'on voit qu'au commencement, où $x = 0$, on a aussi $\frac{dM}{dx} = 0$, de sorte que le terme $-z \frac{dM}{dx}$ s'évanouit de lui-même, sans qu'il soit besoin de supposer $z = 0$ dans ce point; ce qui nous montre que la valeur de z pourra être ici tout ce que l'on voudra.

Il faut maintenant déterminer k par la condition que M devienne nul, lorsque $x = a$; on aura donc pour cela $A(\sin. a\sqrt{-k} - a\sqrt{-k} \cos. a\sqrt{-k})$, ce qui donne $a\sqrt{-k} = \frac{\sin. a\sqrt{-k}}{\cos. a\sqrt{-k}} = \text{tang} a\sqrt{-k}$, c'est-à-dire que l'angle $a\sqrt{-k}$ devra être égal à sa tangente. Cherchant donc un tel angle,

& le nommant ϕ on aura $\sqrt{-k} = \frac{\phi}{a}$. Quoique il soit impossible d'exprimer cet angle algébriquement, on peut néanmoins, par la seule considération du cercle, se convaincre, qu'il n'est pas unique & déterminé, mais qu'il y en a une infinité qui ont tous la même propriété, de sorte que $\sqrt{-k}$ aura aussi une infinité de valeurs différentes, qui satisferont toutes également. On peut voir dans le *Tome II. de l'Introd. à l'Analyse des infinimens petits* de M. Euler le dernier *Prob. du Chap. XXII.*, on l'on trouvera une manière assez simple de déterminer tous ces angles par approximation. Au reste

nous n'aurons pas besoin dans la suite de connoître leurs valeurs, il nous suffira de savoir que leur nombre est infini. Après avoir ainsi déterminé la variable M , si on suppose, comme dans le Problème I. $\int \zeta M dx = s$, & qu'on pratique les mêmes différentiations à l'égard de t notre dernière équation intégrale, deviendra $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks$, qui est

la même que nous avons déjà intégré dans le Problème cité. On aura donc ici de même

$$s = S \cos. t\sqrt{-ck} + \frac{R}{\sqrt{-ck}} \sin. t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \cos. t\sqrt{-ck} - R\sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck},$$

& mettant à la place des quantités $s, r, S,$ & R leurs valeurs en $\zeta, u, Z,$ & V ,

$$\int \zeta M dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int Z M dx + \frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \cos. t\sqrt{-ck} \int V M dx - \sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck} \int Z M dx.$$

Il faut maintenant substituer la valeur de M , & faire les autres opérations que demande notre méthode; mais comme cette valeur de M est différente de celle du Problème I., il est clair que les mêmes procédés que nous avons suivis alors ne suffiront pas à présent; on pourra cependant s'en servir de nouveau avec succès, en préparant par une simple transformation les expressions $\int \zeta M dx,$ $\int u M dx$ avec les deux autres $\int Z M dx$ & $\int V M dx$ de la manière que voici. Substituant la valeur de M j'ai d'abord $\int \zeta \sin. x\sqrt{-k} dx + \sqrt{-k} \int \zeta x \cos. x\sqrt{-k} dx$; or il est clair que si l'on n'avoit que le premier membre de cette expression, on seroit exactement dans le cas du Problème I.; il ne s'agira donc que de ramener aussi le second membre à la même forme; pour cela je change d'abord la formule $\int \zeta x \cos. x\sqrt{-k} dx$ en $\frac{\zeta x \sin. x\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} - \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{d. \zeta x}{dx} \right) \sin. x\sqrt{-k} dx$; ensuite je remarque que, puisque on suppose que les intégrales ne

s'étendent que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, le terme algébrique qui est de lui-même $= 0$ dans le cas de $x = 0$, & qui le devient aussi dans le cas de $x = a$, à cause que ζ s'évanouit par hypothèse, ce terme, dis-je, devra être entièrement effacé, de sorte que l'on aura simplement

$$\int \zeta x \cos. x \sqrt{-k} dx = -\frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{d. \zeta x}{dx} \right) \sin. x \sqrt{-k} dx.$$

Substituant donc cette transformée dans l'expression de $\int \zeta M dx$, elle deviendra $\int \left(\zeta + \frac{d. \zeta x}{dx} \right) \sin. x \sqrt{-k} dx$.

Faisant des opérations semblables sur les autres expressions intégrales, & supposant pour plus de simplicité

$$\zeta + \frac{d. \zeta x}{dx} = \zeta', \quad u + \frac{d. u x}{dx} = u'$$

$$Z + \frac{d. Z x}{dx} = Z', \quad V + \frac{d. V x}{dx} = V'$$

nos deux équations intégrales deviendront.

$$\int \zeta' \sin. x \sqrt{-k} dx = \cos. x \sqrt{-ck} \int Z' \sin. x \sqrt{-k} dx$$

$$+ \frac{\sin. x \sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V' \sin. x \sqrt{-k} dx$$

$$\int u' \sin. x \sqrt{-k} dx = \cos. x \sqrt{-ck} \int V' \sin. x \sqrt{-k} dx$$

$$- \sqrt{-ck} \sin. x \sqrt{-ck} \int Z' \sin. x \sqrt{-k} dx.$$

Ces équations sont réduites à l'état de celles que nous avons appris à construire dans le *Prob. précédent*. Il sera donc facile de leur appliquer la même méthode; or puisque tout se réduit à faire disparaître la quantité $\sqrt{-k}$ à cause du nombre infini de valeurs, dont elle est susceptible, il est clair que quoique ces valeurs ne soient pas les mêmes ici que dans le *Prob. cité*; néanmoins les résultats des opérations seront parfaitement semblables, en sorte qu'il ne faudra que substituer ζ' , u' , Z' & V' à la place de ζ , u , Z & V pour avoir tout d'un coup.

$$\zeta' = \frac{Z'(x + \sqrt{-k}) + Z'(x - \sqrt{-k})}{2}$$

$$+ \frac{\int V' dx (x + \sqrt{c}) - \int V' dx (x - \sqrt{c})}{V'(x + \sqrt{c}) + V'(x - \sqrt{c})}$$

$$u' = \frac{\left(\frac{dZ'}{dx}\right)^2 (x + \sqrt{c}) - \left(\frac{dZ'}{dx}\right)^2 (x - \sqrt{c})}{+ \sqrt{c}}$$

Remettant à présent au lieu de ζ , u , Z , V leurs valeurs en ζ , u , Z & V , on aura deux équations qui détermineront les deux variables inconnues ζ & u par les données Z & V pour un tems quelconque t .

20. Les deux formules que nous venons de trouver étant parfaitement analogues à celles du *Prob. I.* admettront aussi une construction semblable à celle qu'on a déduit des courbes *fondamentales* & *dérivées* dans l'*Art. 7.* Supposons donc ici que les courbes ANB , AQB (*fig. 1.* & *2.*) soient les lieux des valeurs de Z' & de V' , favoir de $Z + \frac{d.Zx}{dx}$ & de V

+ $\frac{d.Vx}{dx}$ pour chaque abscisse x , & que les autres courbes anb , AqB (*fig. 3.* & *4.*) en dépendent de la manière qu'on a dit dans l'*Art. cité*; on aura pour une abscisse quelconque $x = AM$, & pour un tems quelconque $t = \frac{MM'}{\sqrt{c}} = \frac{M'M}{\sqrt{c}}$

$$\zeta' = \zeta + \frac{d.\zeta x}{dx} = \frac{M'N'}{2} + \frac{M'N}{2} = \frac{M'q' - M'q}{2}$$

$$u' = u + \frac{d.u x}{dx} = \frac{M'Q'}{2} + \frac{M'Q}{2} = \frac{M'n' - M'n}{2}$$

Si on désigne par P & Q ces valeurs de ζ' & u' , de sorte que

$$\zeta + \frac{d.\zeta x}{dx} = 2\zeta + \frac{x d\zeta}{dx} = P \quad \&$$

$$u + \frac{d.u x}{dx} = 2u + \frac{x du}{dx} = Q$$

On aura en intégrant, après avoir multiplié par $x dx$

 ζx^2

$$z x^2 = \int P x dx; \text{ \& } z = \frac{\int P x dx}{x^2} \text{ \& de même}$$

$$u x^2 = \int Q x dx \text{ \& } u = \frac{\int Q x dx}{x^2}$$

Que ϕ & ψ représentent deux fonctions quelconques régulières ou irrégulières, telles que

$$MN = \phi AM = \phi x$$

$$MQ = \psi AM = \psi x, \text{ on aura}$$

$$M'N' = \phi AM' = \phi(x + t\sqrt{c})$$

$$M'N = \phi AM = \phi(x - t\sqrt{c})$$

$$M'Q' = \psi AM' = \psi(x + t\sqrt{c})$$

$$M'Q = \psi AM = \psi(x - t\sqrt{c}) \text{ \& } \int$$

$$Mn = \sqrt{c} \frac{d \cdot \phi AM}{d \cdot AM} = \sqrt{c} \frac{d \cdot \phi x}{dx}$$

$$Mq = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi AM d \cdot AM = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi x dx,$$

\& par conséquent

$$M'n' = \sqrt{c} \left(\frac{d \cdot \phi(x + t\sqrt{c})}{dx} \right)$$

$$M'n = \sqrt{c} \left(\frac{d \cdot \phi(x - t\sqrt{c})}{dx} \right)$$

$$M'q' = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi(x + t\sqrt{c}) dx$$

$$M'q = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi(x - t\sqrt{c}) dx; \text{ donc}$$

$$P = \frac{\phi(x + t\sqrt{c}) + \phi(x - t\sqrt{c})}{2}$$

$$+ \frac{\int \psi(x + t\sqrt{c}) dx - \int \psi(x - t\sqrt{c}) dx}{2\sqrt{c}}$$

$$Q = \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})}{2}$$

$$+ \sqrt{c} \frac{\left(\frac{d \cdot \phi(x + t\sqrt{c})}{dx} \right) - \left(\frac{d \cdot \phi(x - t\sqrt{c})}{dx} \right)}{2}$$

Soit

Soit supposé $\frac{d \cdot \phi x}{dx} = \phi' x$, $\frac{d \cdot \phi' x}{dx} = \phi'' x$ &c. & $\int \phi x dx = \phi x$, $\int \phi' x dx = \phi x$ &c., & (ainsi pour la fonction ψ on aura $\int x \phi(x \pm t\sqrt{c}) dx = x \int \phi(x \pm t\sqrt{c}) dx - \int dx \phi(x \pm t\sqrt{c})$, traitant de la même manière les autres formules intégrales qui composent les valeurs de $\int P x dx$, & de $\int Q x dx$ on aura après toutes les substitutions,

$$\begin{aligned} \int &= \frac{\phi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\phi(x-t\sqrt{c})}{2x} \\ &+ \frac{\psi(x+t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} - \frac{\psi(x-t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} \\ &+ \frac{\phi(x+t\sqrt{c})}{2x^2} - \frac{\phi(x-t\sqrt{c})}{2x^2} \\ &+ \frac{\psi(x+t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}} - \frac{\psi(x-t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}} \\ &+ \sqrt{c} \frac{\phi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c} \frac{\phi(x-t\sqrt{c})}{2x} \\ &+ \frac{\psi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\psi(x-t\sqrt{c})}{2x} \\ &- \sqrt{c} \frac{\phi(x-t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c} \frac{\phi(x+t\sqrt{c})}{2x} \end{aligned}$$

21. On peut simplifier ces expressions de la manière suivante. Au lieu de $\phi(x+t\sqrt{c}) + \frac{\psi(x+t\sqrt{c})}{2x}$ je pose simplement $\Delta(x+t\sqrt{c})$, & au lieu de $\phi(x-t\sqrt{c}) - \frac{\psi(x-t\sqrt{c})}{2x}$ je substitue de même la seule expression $\Gamma(x-t\sqrt{c})$ (Δ & Γ étant de nouvelles fonctions variables différentes de ϕ & ψ), & prenant les différences de la manière indiquée ci-dessus, on obtiendra les formules:

$$\int =$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\Delta'(x + t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Delta(x + t\sqrt{c})}{2x^2} \\ &+ \frac{\Gamma'(x - t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Gamma(x - t\sqrt{c})}{2x^2} \\ \kappa &= \sqrt{c} \frac{\Delta''(x + t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c} \frac{\Delta'(x + t\sqrt{c})}{2x^2} \\ &- \sqrt{c} \frac{\Gamma''(x - t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c} \frac{\Gamma'(x - t\sqrt{c})}{2x^2} \end{aligned}$$

lesquelles s'accordent pour le fond avec celles que M. Euler a donné dans son *Mémoire* à la pag. 9. ci-dessus, où il nomme u , ce que nous avons appelé ζ & V , ce que nous avons nommé x .

22. La construction trouvée, au commencement de l'Art. 20., n'est bonne que pour les cas, où $x + t\sqrt{c}$ n'est pas plus grande que a , ni moindre que zero, puisque les valeurs de Z & de V ne sont données que pour la simple étendue de l'axe $AB = a$. Il faut donc chercher ici, comme on l'a fait dans le *Prob. I.*, une manière de continuer les courbes ANB , AQB , &c. au delà des points A & B . Pour cela aiant conservé la construction de l'Art. 7. avec la même équation des courbes $A'SB'$, $A''S''B''$, on examinera leur cours au delà des points B' & A'' , en supposant la quantité $\sqrt{c} - k$ déterminée par l'équation $a\sqrt{c} - k = \frac{\sin. a\sqrt{c} - k}{\cos. a\sqrt{c} - k}$ (Art. 19.).

Pour ce qui regarde la branche $A''S$ qui est du côté des abscisses négatives rien n'est d'abord plus facile que de la trouver; car faisant x négatif, $\sin. x\sqrt{c} - k$ devient simplement négatif sans changer de valeur; d'où il s'ensuit que cette branche ne doit être que la branche même $A'S''$ renversée de la manière qu'on l'a déjà fait dans la *fig. 6.* Ainsi on prouvera de nouveau par le même raisonnement de l'Art. 7. que la partie des aires qui répond à l'abscisse

AA''

AA'' sera la même que celle qu'on pourroit former sur l'abscisse AA' , en employant la courbe $A'S'$ & la courbe AN continuée dessous de l'axe de la même manière que la $A''S''$; d'où l'on voit que la continuation de la courbe ANB au delà de A , sera aussi la même que celle qu'on a pratiquée dans la *fig. 7*.

Mais il n'en sera pas ainsi pour la continuation au delà de B ; car $\sin. x\sqrt{-k}$ n'ayant plus dans le cas présent des valeurs égales & contraires autour du point B' qui répond à $x = a$, la branche $B'S$ ne sauroit non plus être la même que la $B'S'$ renversée. Il ne seroit pas difficile de connoître la nature de cette branche $B'S$, mais cela ne serviroit de rien pour l'objet présent, puisque la méthode de l'*Art. 7*. demande que la branche $B'S$ puisse être substituée à la place de la $B'S''$, afin qu'on ait la courbe entière $A'S''B''$ qui soit la même que la $A'S'B'$, & que la ASB . Pour remplir cette condition il n'y a pas d'autre moyen que de transformer chaque la portion d'aire qui répond à $B'B$ en une autre égale, & dans laquelle la branche $B'S$ soit semblable & diamétralement opposée à la $B'S'$, comme dans la *fig. 6*. Examinons pour cela cette expression intégrale $\int Z' \sin. (a + z) \sqrt{-k} dz$, laquelle étant prise depuis le point B' , ou $z = 0$, jusqu'au point B , exprime l'aire formée par les produits des ordonnées des deux courbes ANB , $A'S'B'$ relativement à l'espace $B'B$; & voyons si on peut la changer en une autre de la forme de $-\int (Z) \sin. (a - z) \sqrt{-k} dz$, (Z) désignant une quantité quelconque donnée en Z' .

Je prens cette autre expression $\int R \sin. (a + z) \sqrt{-k} dz$, & je la change dans son égale $\int R \sin. a \sqrt{-k} \times \cos. z \sqrt{-k} dz + \int R \cos. a \sqrt{-k} \times \sin. z \sqrt{-k} dz$. Je substitue ensuite à la place de $\sin. a \sqrt{-k}$, la quantité $a \sqrt{-k} \cos. a \sqrt{-k}$ tirée de l'équation qui détermine la valeur de $\sqrt{-k}$; & je fais évanouir à l'aide d'une intégration par parties le coefficient

$$\begin{aligned} & \sqrt{-k} \text{ introduit par cette substitution ; j'ai ainsi} \\ & \int R \sin. a \sqrt{-k} \chi \cos. z \sqrt{-k} dz \\ & = a \sqrt{-k} \int R \cos. a \sqrt{-k} \chi \cos. z \sqrt{-k} dz \\ & = a R \cos. a \sqrt{-k} \chi \sin. z \sqrt{-k} \\ & - a \int \cos. a \sqrt{-k} \chi \sin. z \sqrt{-k} dR. \end{aligned}$$

Le terme algébrique de cette transformée s'évanouït de lui même, lorsque $z = 0$, donc si on suppose $R = 0$, lorsque $z = B'B$ (nous verrons ci-après que cette supposition est possible) on pourra l'effacer entièrement ; & la première transformée deviendra par la substitution $\int R \cos. a \sqrt{-k} \chi \sin. z \sqrt{-k} dz - a \int \cos. a \sqrt{-k} \chi \sin. z \sqrt{-k} dR = \int R \sin. (a + z) \sqrt{-k} dz$. Développons à présent les produits des *sinus* & *cosinus* ; on aura l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int R \sin. (a + z) \sqrt{-k} dz - \frac{1}{2} \int R \sin. (a - z) \sqrt{-k} dz \\ & - \frac{1}{2} a \int \sin. (a + z) \sqrt{-k} dR + \frac{1}{2} a \int \sin. (a - z) \sqrt{-k} dR \\ & = \int R \sin. (a + z) \sqrt{-k} dz ; \text{ \& réduisant} \\ & \int \left(R + \frac{adR}{dz} \right) \sin. (a + z) \sqrt{-k} dz \\ & = - \int \left(R - \frac{adR}{dz} \right) \sin. (a - z) \sqrt{-k} dz. \end{aligned}$$

Comparant donc les deux membres de cette équation avec les formules proposées $\int Z' \sin. (a + z) \sqrt{-k} dz$, &

$$- \int (Z) \sin. (a - z) \sqrt{-k} dz, \text{ on aura } Z' = R + \frac{adR}{dz} \text{ \& } (Z) = R - \frac{adR}{dz}, \text{ d'où l'on déduira le rapport entre}$$

(Z) & Z' . Multipliant la première équation par $e^{\frac{x}{a}} dz$, & intégrant il vient $\int Z' e^{\frac{x}{a}} dz = a R e^{\frac{x}{a}}$, &

$$R = \frac{e^{-\frac{x}{a}} \int Z' e^{\frac{x}{a}} dz}{a}, \text{ d'où l'on tire en substituant } (Z) =$$

$\frac{2e^{-\frac{z}{a}} \int Z' e^{\frac{z}{a}} dz}{a} - Z'$. Or nous avons supposé que R étoit
 $= 0$, lorsque $z = B'B$; on satisfera donc à cette condi-

tion, en prenant l'intégrale $\int Z' e^{\frac{z}{a}} dz$, tel qu'il s'éva-
 nouïsse dans ce cas; il ne faudra pour cela que poser $B'B$
 $= y$ au lieu de z & de dy au lieu de dz , & commencer
 l'intégration avec les abscisses y du point B en allant vers

B' ; on aura par ce moïen $(Z) = \frac{2e^{\frac{y}{a}} \int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - Z'$.

Telle est la valeur de (Z) qui étant prise au lieu de Z'
 pour multiplier chaque ordonnée correspondante de la bran-
 che $B'S$ produira une aire égale à celle qui se formeroit en
 multipliant la valeur de Z' par l'ordonnée correspondante non
 pas de la branche $B'S$, mais de celle qui seroit la vraie conti-
 nuation de la courbe $A'SB'$ dans notre cas. Delà, & du
 raisonnement de l'Art. 7. il n'est pas difficile de conclure
 que la portion d'aire qui répond naturellement à $B'B$ dans
 la formule $\int Z' \sin. (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k} dx$ peut être changée
 en une autre, formée sur $B'B''$ par les ordonnées de la bran-
 che $S'B''$, & par celles d'un autre branche, comme la BN''
 (fig. 10.) qui serve, pour ainsi dire, de continuation à la
 courbe fondamentale ANB , & qui soit telle qu'en prenant
 de part & d'autre de B les abscisses égales BP' , $B'P = y$,

on ait toujours $P'N'' = (Z) = \frac{2e^{\frac{y}{a}} \int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - Z'$

$= \frac{2e^{\frac{y}{a}} \int P''N e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - P''N.$

Voilà donc comment il faudra continuer la courbe *fondam-*
mentale ANB au delà de B pour pouvoir faire usage de la
 construction donnée ci-dessus, lorsque X a des valeurs plus
 grandes que a .

Tout ce que nous avons jusqu'ici enseigné sur la manière de continuer cette courbe d'un côté & de l'autre, s'appliquera aussi à l'autre courbe *fondamentale* AQB , & encore aux courbes *dérivées* anb , Aqb , pourvu que dans ces dernières on ait soin de placer les deux branches de continuation au dessus de l'axe par la raison qu'on a dit à la fin de l'*Art.* 7.

La construction qu'on vient de trouver n'est encore suffisante que pour les cas, où X est contenu entre les limites $-a$ & $+2a$. Pour lui donner toute la généralité qu'il est possible, reprenons la formule $\int Z' \sin. (a + z) \sqrt{-k} dz$ qui a été changée en $-\int (Z) \sin. (a - z) \sqrt{-k} dz$; posant $a + z = x$, on aura $\int Z' \sin. x \sqrt{-k} dx = \int (Z) \sin. (x - 2a) \sqrt{-k} dx$, d'où l'on voit que l'abscisse x peut être diminuée de $2a$, pourvu qu'on change l'ordonnée Z' en (Z) ; de même si $((Z))$ est une fonction de (Z) , telle que (Z) l'est de Z' , on pourra diminuer de $2a$ l'abscisse qui se rapporte à (Z) , en changeant (Z) en $((Z))$; donc on pourra aussi diminuer l'abscisse de Z' de $4a$ en changeant immédiatement Z' en $((Z))$; & ainsi de suite. Delà il résulte que le reste de la continuation des courbes, soit *fondamentales*, soit *dérivées* au delà du point B , pourra se déduire aisément de la branche qui répond à l'abscisse $= 2a$; car on n'aura qu'à transformer successivement cette branche en d'autres, dont les ordonnées aux mêmes abscisses se répondent entr'elles, comme les expressions Z' , (Z) , $((Z))$ &c. & appliquer ensuite par ordre, & suivant la direction AB toutes ces branches l'une à côté de l'autre le long de l'axe AB prolongé à l'infini.

Par un raisonnement tout opposé, on prouvera que la continuation des mêmes courbes au delà de A se fera par un assemblage semblable de branches *dérivées* l'une après l'autre de la seule branche qui répond à l'abscisse $2a$, mais avec des opérations contraires aux précédentes, savoir de manière que les ordonnées qui répondent à une même abscisse

scisse x dans chaque branche à commencer du point A soient entr'elles, comme les quantités (Z) & Z' .

Par-là on trouvera sans difficulté que les courbes, dont il s'agit, auront autour du point A une figure semblable, avec cette seule différence que pour les courbes *fondamentales* les deux branches infinies de part & d'autre de A seront diamétralement opposées, savoir, l'une au dessus, l'autre au dessous de l'axe; & que pour les courbes *dérivées*, les branches seront l'une & l'autre du même côté de l'axe; d'où il s'ensuit qu'ayant exécuté la continuation du côté des abscisses positives à l'infini, suivant ce qu'on a dit ci-dessus, on n'aura plus qu'à renverser la même courbe au delà de A , & au dessous, ou au dessus de l'axe, selon qu'elle appartiendra aux *fondamentales*, ou aux *dérivées*.

23. Par la méthode qui vient d'être expliquée, nous avons la manière de continuer de part & d'autre à l'infini les courbes qui dépendent des valeurs de Z & de V , données à volonté dans le premier instant du mouvement, sans s'embarasser que les différentes branches de ces courbes soient liées entr'elles par la loi de continuité. Mais si on vouloit si borner à admettre cette loi, on pourroit obtenir les mêmes résultats avec beaucoup moins de peine par la simple considération des formules données à la fin de l'Art. 20. Toute la difficulté se réduiroit à chercher la nature des fonctions ϕ & ψ au delà des points A & B , par la condition que z & u soient $= 0$ dans ces points quelque valeur qu'on suppose à t .

Posons d'abord dans ces formules $x = 0$, & z & u de même $= 0$, on aura les équations

$$0 = \frac{\phi t\sqrt{c} + \phi - t\sqrt{c}}{2x} - \frac{\phi t\sqrt{c} + \phi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$

$$+ \frac{\psi t\sqrt{c} - \psi - t\sqrt{c}}{2x\sqrt{c}} - \frac{\psi t\sqrt{c} - \psi - t\sqrt{c}}{2x^2\sqrt{c}}$$

0 =

$$0 = \frac{\psi t\sqrt{c} + \psi - t\sqrt{c}}{2x} - \frac{\psi t\sqrt{c} + \psi - t\sqrt{c}}{2x^2} \\ + \sqrt{c} \frac{\phi t\sqrt{c} - \phi - t\sqrt{c}}{2x} - \sqrt{c} \frac{\phi t\sqrt{c} - \phi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$

De ces deux équations il suffira de vérifier la première, puisque la seconde n'en est que la différentielle divisée par dt ; mais il se présente dans cette opération une difficulté; car les termes étant divisés les uns par x , les autres par x^2 , on peut être en doute si en faisant à part $= 0$ les numérateurs de x & de x^2 toute la formule disparaîtra, à cause que x est déjà lui même $= 0$. Pour lever cette difficulté, supposons que x , au lieu d'être tout-à-fait nul, soit seulement infiniment petit & $= \alpha$; & développons chaque fonction $\phi(\alpha \pm t\sqrt{c})$, $\psi(\alpha \pm t\sqrt{c})$ &c. suivant la formule connue $\phi(\zeta + \alpha) = \phi\zeta + \alpha\phi'\zeta + \frac{\alpha^2\phi''\zeta}{2} + \frac{\alpha^3\phi'''\zeta}{2.3} + \&c.$; en effaçant ce qui se détruit, & en négligeant les termes qui se trouvent multipliés par des puissances de α on aura l'équation

$$0 = - \frac{\phi t\sqrt{c} + \phi - t\sqrt{c}}{2\alpha^2} + \frac{\phi t\sqrt{c} + \phi - t\sqrt{c}}{4} \\ - \frac{\psi t\sqrt{c} - \psi - t\sqrt{c}}{2\alpha^2} + \frac{\psi t\sqrt{c} - \psi - t\sqrt{c}}{4}$$

qui doit être vraie indépendamment de la quantité α ; donc on aura

$$\phi t\sqrt{c} + \phi - t\sqrt{c} + \psi t\sqrt{c} - \psi - t\sqrt{c} = 0, \\ \phi t\sqrt{c} + \phi - t\sqrt{c} + \psi t\sqrt{c} - \psi - t\sqrt{c} = 0$$

équations auxquelles on satisfera en posant $\phi - t\sqrt{c} = -\psi t\sqrt{c}$, & $\psi - t\sqrt{c} = \psi t\sqrt{c}$, ou bien en différentiant $\psi - t\sqrt{c} = -\psi t\sqrt{c}$. Or, t étant une variable qui peut croître à l'infini, en commençant du zero, $t\sqrt{c}$ pourra représenter une abscisse quelconque positive; donc la nature des fonctions ϕ & ψ devra être telle, que faisant les abscisses négatives, ces fonctions deviennent simplement négatives.

négatives sans changer de valeur. Il en sera de même des fonctions ϕ & ψ , puisque en différenciant deux fois les équations précédentes, elles deviennent $\phi - t\sqrt{c} = -\phi t\sqrt{c}$, & $\psi - t\sqrt{c} = -\psi t\sqrt{c}$; d'où l'on voit que les deux courbes ANB , AQB qui représentent ces fonctions, devront avoir de part & d'autre du point A des branches égales & diamétralement opposées, ainsi qu'on l'a trouvé dans l'Art. 22. Il n'en sera pas tout-à-fait ainsi pour les courbes anb & Aqb qui contiennent les fonctions ϕ' & ψ' . Car l'on a pour ces fonctions $\phi' - t\sqrt{c} = \phi' t\sqrt{c}$, & $\psi' - t\sqrt{c} = \psi' t\sqrt{c}$; ce qui montre que les ordonnées doivent être exactement les mêmes à des abscisses égales, positives & négatives; & que par conséquent les branches autour de A seront semblablement situées sur l'axe; ce qui s'accorde avec ce qui a été enseigné dans l'Art. cité.

Examinons maintenant les valeurs des mêmes fonctions pour les abscisses qui surpassent l'axe donné a . Posant $x = a$, & z & $u = 0$, on aura de nouveau deux équations; la première sera

$$0 = \frac{\phi(a+t\sqrt{c}) + \phi(a-t\sqrt{c})}{2a} - \frac{\psi(a+t\sqrt{c}) + \psi(a-t\sqrt{c})}{2a^2} + \frac{\psi'(a+t\sqrt{c}) - \psi'(a-t\sqrt{c})}{2a\sqrt{c}} - \frac{\psi''(a+t\sqrt{c}) - \psi''(a-t\sqrt{c})}{2a^2\sqrt{c}}$$

la seconde ne sera que la différentielle de celle-ci, divisée par dt , & par conséquent nous pourrons nous dispenser d'y avoir égard. Or afin que les fonctions ϕ & ψ ne dépendent pas l'une de l'autre, on fera séparément

$$a\phi(a+t\sqrt{c}) - \psi''(a+t\sqrt{c}) = -a\phi(a-t\sqrt{c}) + \psi''(a-t\sqrt{c}) \quad \&$$

$$a\psi'(a-t\sqrt{c}) - \psi''(a+t\sqrt{c}) = a\psi'(a-t\sqrt{c}) - \psi''(a-t\sqrt{c}). \quad \text{Dif.}$$

Différentions deux fois la première, & trois fois la seconde; on aura en changeant les signes

$$\begin{aligned} \phi(a + t\sqrt{c}) - a\phi'(a + t\sqrt{c}) &= -\phi(a - t\sqrt{c}) \\ &+ a\phi'(a - t\sqrt{c}) \quad \& \\ \psi(a + t\sqrt{c}) - a\psi'(a + t\sqrt{c}) &= -\psi(a - t\sqrt{c}) \\ &+ a\psi'(a - t\sqrt{c}), \end{aligned}$$

équations qui sont tout-à-fait semblables entr'elles.

Je multiplie par $e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} \sqrt{c} dt$, & j'intègre; j'ai

$$-a\phi(a + t\sqrt{c}) e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} = -a\phi(a - t\sqrt{c}) e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}$$

$$- 2 \int \phi(a - t\sqrt{c}) e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} \sqrt{c} dt,$$

où l'on voit que la valeur de l'intégrale du dernier terme doit = 0, lorsque $t = 0$, puisque dans ce cas les deux autres termes se détruisent d'eux mêmes. On aura donc

$$\phi(a + t\sqrt{c}) = \phi(a - t\sqrt{c}) + \frac{2e^{\frac{t\sqrt{c}}{a}}}{a} \int \phi(a - t\sqrt{c}) e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} \sqrt{c} dt.$$

Or si l'on fait $t\sqrt{c} = y$, & que l'intégration soit supposée commencer du point, où $y = 0$, on aura

$$\phi(a + y) = \phi(a - y) - \frac{2e^{\frac{y}{a}}}{a} \int \phi(a - y) e^{-\frac{y}{a}} dy.$$

Ce qui nous fait connoître la manière, dont les valeurs de la fonction ϕ qui sont de part & d'autre à distances égales de l'extrémité B de l'axe doivent être liées entr'elles. Or il est aisé de voir en relisant les *Art.* 20. & 22. que $\phi(a - y)$ dénote ici la même chose que Z' & $\phi(a + y)$ la même chose que $- (Z)$, donc l'équation précédente donne le même rapport entre Z' & (Z) qu'on a trouvé dans le dernier des *Art. cités*; & par conséquent aussi la même continuation de la courbe ANB au delà de B . Il est vrai que l'équation entre (Z) & Z' donnée dans l'endroit mentionné n'étoit d'abord censée appartenir qu'à la seule portion

tion de l'axe comprise depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse $2a$; & que pour toutes les autres abscisses plus grandes à l'infini, on a donné une manière générale de continuer la courbe au moïen des branches déjà connues; mais il ne faudra que considérer toutes les branches de continuation au delà de B , pour s'appercevoir qu'elles auront constamment avec celles qui sont en deçà de B , le même rapport que la quantité $-(Z)$ a avec la quantité Z' .

Ce qu'on vient de démontré sur la fonction ϕ doit se dire de même de l'autre fonction ψ , qui appartient à la courbe AQB , & il ne sera pas difficile de l'appliquer aussi aux autres fonctions ϕ' & ψ' pour les courbes aqb , ANB , & de faire voir le parfait accord qu'il y a entre les résultats de ces procédés, & ceux qu'on a trouvé plus haut par une voie différente.

Cette manière auroit peut être besoin d'être traitée, avec un plus long détail, que nous ne l'avons fait ici; mais ceux, qui auront bien saisi l'esprit de nos méthodes, n'auront pas de peine à suppléer d'eux mêmes à ce, qui peut manquer pour l'entière exactitude des démonstrations, sans qu'il soit nécessaire de nous étendre davantage la-dessus.

24. Il est à remarquer, au reste, que l'on abregeroit beaucoup la solution précédente, si par le moïen de quelque substitution convenable on parvenoit à ramener tout d'un coup l'équation $\frac{d^2\zeta}{dx^2} = c \left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{2d\zeta}{dx} \right)$ à la forme

$$\frac{d^2\zeta'}{dx^2} = c \frac{d^2\zeta'}{dx^2}.$$

Or, pour cela, il n'y auroit qu'à supposer $\zeta = \frac{\int \zeta' x dx}{x^2}$,

ce qui donne en différentiant, $\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{\int \left(\frac{d^2\zeta'}{dx^2} \right) x dx}{x^2}$, $\frac{d \cdot \zeta}{dx} = \frac{\zeta}{x^2}$

$$\frac{3 \int \zeta' x dx}{x^3} + \frac{d^2 \zeta'}{dx^2} = \frac{\left(\frac{d\zeta'}{dx}\right)}{x} - \frac{3\zeta'}{x^2} + \frac{6 \int \zeta' x dx}{x^3}, \text{ \& sub-}$$

$$\text{stituant } \frac{\int \left(\frac{d^2 \zeta'}{dx^2}\right) x dx}{x^3} = c \left[\frac{\left(\frac{d\zeta'}{dx}\right)}{x} - \frac{\zeta'}{x^2} \right]; \text{ multipliant}$$

par x^2 , & différentiant de nouveau $\left(\frac{d^2 \zeta'}{dx^2}\right) x dx = c \left(\frac{d^2 \zeta'}{dx^2}\right)$

$x dx$, ou bien $\left(\frac{d^2 \zeta'}{dx^2}\right) = c \left(\frac{d^2 \zeta'}{dx^2}\right)$. Equation réduite au cas

du *Prob.* 1. Or puisque la valeur de ζ' est ici $= \frac{d \cdot \zeta x^2}{x dx}$

$= 2 \zeta + \frac{x d \zeta}{dx}$, telle qu'on l'a supposé dans l'Analise du *Prob.*

préc. il est facile de voir que la solution, qu'on aura de façon, reviendra entièrement à celle qu'on a déjà trouvé.

Il est vrai qu'il faudra pour cela que la quantité k ait aussi les mêmes valeurs; & c'est ce qu'il sera aisé de prouver; car on fait, que la détermination de k dépend

de la condition que les termes algébriques $\frac{Md\zeta'}{dx} - \zeta' \frac{dM}{dx}$

disparoissent, lorsque $x = a$ (*Voies Prob.* 1.). Or ζ' étant ici

$= 2 \zeta + \frac{x d \zeta}{dx}$, $d\zeta'$ fera $= 3 d\zeta + \frac{x d^2 \zeta}{dx}$; d'où l'on aura

en posant $x = a$, & $\zeta = 0$, l'équation

$$\frac{3 Md\zeta}{dx} + \frac{a M d^2 \zeta}{dx} - \frac{a d M d \zeta}{a x^2} = 0.$$

Maintenant, puisque ζ doit toujours disparoître, lorsque $x = a$

quel que soit le tems t , on aura aussi $\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = 0$, & par consé-

quent, par l'équation fondamentale, $0 = \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{2 d \zeta}{a dx} - \frac{2 \zeta}{a^2}$

d'où l'on tire $\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = - \frac{2 d \zeta}{a dx}$, laquelle valeur substituée, on

aura

aura $(M - \frac{adM}{dx}) \frac{dz}{dx} = 0$, ou bien $M - \frac{adM}{dx} = 0$.

Or, M étant = fin. $x\sqrt{-k}$ (*Art.* 6.), on aura en substituant, & posant ensuite $x = a$, fin. $a\sqrt{-k} - a\sqrt{-k} \cos. a\sqrt{-k} = 0$, d'où l'on tire, comme dans l'*Art.* 18. $a\sqrt{-k} = \frac{\text{fin. } a\sqrt{-k}}{\text{col. } a\sqrt{-k}} = \text{tang. } a\sqrt{-k}$.

Il y a encore un autre substitution qu'on pourroit employer au lieu de la précédente. Cette substitution consiste à faire $z = y - \frac{xdy}{dx}$; ce qui réduira l'équation en z à

une équation en y de la forme de $(\frac{d^2z}{dx^2}) = c(\frac{d^2z}{dx^2})$,

& cette équation étant construite par la méthode du *Prob.* 1. on aura pour la valeur de z des formules analogues à celles qu'on a trouvé à la fin de l'*Art.* 20. ci-dessus.

Application de la solution précédente à la recherche des loix de la propagation du Son.

25. **L'** Application du Problème précédent à la théorie de la propagation du Son, se présente d'elle même. Imaginons un corps sonore quelconque mis en vibration au milieu d'un air tranquille, homogène, & libre de tous cotés; il est visible que ce corps peut être regardé comme placé sensiblement au centre d'une sphère aérienne d'une étendue indéfinie; donc on ne s'écartera, que très-peu, de la vérité, en calculant les mouvemens communiqués à toute la masse de l'air, dans l'hipothèse des ondulations sphériques, de l'*Art.* 18.; & d'après la construction donnée dans l'*Art.* 20. & suiv.

Pour cela, aiant mené la ligne indéfinie PR , qui représente le rayon de la sphère totale d'air qui environne le corps sonore, soit pris PQ pour le rayon de la petite

sphère, dans laquelle sont contenues les particules qui ont reçu leur mouvement primitif du corps sonore placé en P ; & soient tracées sur la ligne PQ les courbes qui représentent les valeurs données de Z & V , & que nous avons appellées courbes *fondamentales*; il suit de l'Art. 22., que chacune de ces deux courbes devra être continuée du côté opposé Pq , avec une branche semblable, égale, & diamétralement opposée à la première. Il est vrai que cette proposition n'a été démontrée que pour les courbes qui représentent les variables Z' & V' ; mais il est facile de voir qu'elle a également lieu ici, où à cause de $x = 0$ au point P , les valeurs de Z' , & V' deviennent $2Z$, & $2V$. On prouvera de même que les autres branches de continuation qui suivant la Théorie de l'Art. citée, devroient être ajoutées, du côté PR , disparaîtront entièrement à cause du rayon a infini; de sorte que les courbes *génératrices* seront toutes renfermées dans le seul espace qQ . Or, cela posé, qu'on demande pour un tems quelconque t les mouvemens des particules qui composent la fibre rectiligne PR , mouvemens qui, selon l'hypothèse, doivent être sensiblement les mêmes pour toutes les autres fibres partant du centre P .

Soit pour faciliter cette recherche $t > \frac{PQ}{\sqrt{c}}$; il est évident qu'il faudra rejeter dans la construction de l'Art. 20. les termes qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{c}$, ces termes ne pouvant ici produire aucune valeur réelle; il n'y aura donc que les termes relatifs aux abscisses $x - t\sqrt{c}$, qui entrent dans la détermination des quantités ζ & u , d'où dépend la connoissance des mouvemens en question. Aiant pris (fig. 11.) sur la ligne PR le point P' tel que $PP' = t\sqrt{c}$, & coupé de part & d'autre les parties $P'Q'$, $P'q'$ égales à PQ , & Pq ; je transporte en $q'P'Q'$ les deux courbes qui renferment les valeurs des Z & V , telles qu'elles ont été décrites sur le diamètre qPQ ; & prenant le point P' pour l'ori-

Prorigine des absciffes x , je trouve pour une particule quelconque M ;

$$\zeta' = \frac{Z + \frac{d \cdot Z x}{dx} - \frac{1}{\sqrt{c}} \int \left(V + \frac{d \cdot V x}{dx} \right) dx}{2}$$

$$u' = \frac{V + \frac{d \cdot V x}{dx} - d \cdot \left(Z + \frac{d \cdot Z x}{dx} \right) \frac{\sqrt{c}}{dx}}{2};$$

Or par les fuppoſitions faites à la fin de l'Art. 19., on a généralement $\zeta' = \zeta + \frac{d \cdot \zeta x}{dx}$, & $u' = u + \frac{d \cdot u x}{dx}$; l'origine des x étant au point P . Mettant donc ici pour transporter cette origine en P' , $x + t\sqrt{c}$ au lieu de x , & intégrant après avoir multiplié par $(x + t\sqrt{c}) dx$, il viendra les deux équations fuivantes

$$\zeta (x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2} Z x^2 + \frac{1}{2} t\sqrt{c} (\int Z dx + Z x)$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (x + t\sqrt{c}) dx \int \left(V + \frac{d \cdot V x}{dx} \right) dx$$

$$u (x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2} V x^2 + \frac{1}{2} t\sqrt{c} (\int V dx + V x)$$

$$- \frac{\sqrt{c}}{2} \int (x + t\sqrt{c}) \times d \cdot \left(Z + \frac{d \cdot Z x}{dx} \right).$$

Si on ſimplifie les expreſſions intégrales par la méthode des intégrations par parties; & qu'on ajoute les conſtantes néceſſaires, on aura

$$\zeta (x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2} (x^2 + x t\sqrt{c}) Z + \frac{1}{2} t\sqrt{c} \int Z dx$$

$$- \frac{1}{2} t\sqrt{c} A - \frac{1}{2\sqrt{c}} \left(\frac{x^2}{2} + x t\sqrt{c} \right) \int V dx - \frac{1}{4\sqrt{c}}$$

$$\int V x^2 dx + \frac{D}{4\sqrt{c}}$$

$$u (x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2} (x^2 + x t\sqrt{c}) V + \frac{1}{2} t\sqrt{c} \int V dx$$

$$- \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} t \sqrt{c} B - \frac{\sqrt{c}}{2} (x^2 + x t \sqrt{c}) \frac{dZ}{dx} - \frac{\sqrt{c}}{2} (x + 2 t \sqrt{c}) Z + \frac{\sqrt{c}}{2} \int Z dx - \frac{\sqrt{c}}{2} A.$$

L'addition des constantes sert à rendre égal à zero le dernier membre de chacune des équations précédentes, lorsque $x + t \sqrt{c} = 0$, ou $x = -t \sqrt{c} = -PP'$; ce qui est nécessaire, puisque, alors les premiers membres disparaissent d'eux mêmes; ainsi en supposant que les intégrations commencent toutes au point P' où $x = 0$, les lettres A, B, D , représenteront les valeurs des intégrales $\int Z dx, \int V dx, \int V x^2 dx$ prises depuis P' jusqu'à q' , lesquelles sont les mêmes que si on les prenoit de l'autre coté depuis P' jusqu'à Q' . Il faut néanmoins remarquer que dans la première équation l'on ne trouve point de constante qui fasse évanouïr le terme $-\frac{t}{2\sqrt{c}} (\frac{x^2}{2} + x t \sqrt{c}) \int V dx$,

dans le cas de $x = -t \sqrt{c}$; c'est une omission que j'ai fait exprès à cause d'un nouveau terme qu'il faut encore ajouter à la même équation. Pour voir la raison de ceci on n'a qu'à se souvenir de ce, que dans l'expression des valeurs de ζ . & de u' , nous avons regardé, comme généralement nuls, tous les termes qui répondoient aux abscisses exprimées par $x + t \sqrt{c}$; il en est cependant un qu'on ne peut pas négliger; c'est celui qui est exprimé par la formule intégrale $\int (V + \frac{d \cdot V x}{dx}) dx = \int V dx + V x$; car il est évident que quoique les valeurs de V disparaissent sur la ligne QR depuis le point Q , l'intégrale $\int V dx$ conserve toujours la même valeur constante, qu'on a désigné ci-dessus par B ; delà il est facile de conclure, qu'il faut ajouter à la valeur de ζ le terme $\frac{B}{2\sqrt{c}}$, & par conséquent à

la valeur de $\zeta (x + t\sqrt{c})^2$ le terme $(\frac{x^2}{2} + xt\sqrt{c}) \frac{B}{2\sqrt{c}}$, lequel fera justement disparaître l'autre terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}$

$(\frac{x^2}{2} + xt\sqrt{c}) \int V dx$, lorsque $x = -t\sqrt{c}$, $\int V dx$ devenant alors $= B$.

Si l'on examine maintenant la forme des deux équations précédentes, on verra aisément que l'on peut se passer de l'addition des constantes, en donnant un autre origine aux intégrales $\int Z dx$, $\int V dx$, $\int V x^2 dx$, & les faisant commencer du point q' en allant vers R , ainsi l'on aura plus simplement

$$\zeta = \frac{(x^2 + xt\sqrt{c})Z + t\sqrt{c} \int Z dx}{2(x + t\sqrt{c})^2} - \frac{(x^2 + 2xt\sqrt{c}) \int V dx + \int V x^2 dx}{4\sqrt{c}(x + t\sqrt{c})^2}$$

$$u = \frac{(x^2 + xt\sqrt{c})V + t\sqrt{c} \int V dx}{2(x + t\sqrt{c})^2} - \sqrt{c} \frac{(x^2 + xt\sqrt{c}) \frac{dZ}{dx} + (x + 2t\sqrt{c})Z - \int Z dx}{2(x + t\sqrt{c})^2}$$

26. Il est visible par ces formules que ζ & u sont toujours $= 0$, lorsque la valeur de x tombe au delà des points q' , & Q' ; d'où il suit que pour le rems donné t , il n'y a que la seule partie $q'Q'$ de la fibre qui soit en mouvement; or comme le point du milieu P' a été pris tel que $PP' = t\sqrt{c}$; il est évident que l'onde aérienne $q'Q'$ avancera toujours avec une vitesse constante & $= \sqrt{c}$ qui est la même que nous avons trouvé plus haut dans la première hypothèse (*Art.* 12.). On pourroit ici développer les loix particulières que chaque particule d'air observera dans ses mouvemens, dépendamment des premières impressions Z & V produites par le corps sonore; mais laissant

ces

ces discussions peu importantes en elles mêmes nous nous contenterons de faire observer en général la variation des quantités z & u , à mesure que le tems t augmente.

Pour cela, comme l'espace PQ est toujours très-petit (*Art.* 14.), on peut, sans erreur sensible, lorsque le tems t a déjà une valeur considérable, négliger x par rapport à $t\sqrt{c}$; ainsi il viendra

$$z = \frac{xZ + \int Z dx - \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dx}{2t\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{xV + \int V dx - \left(\frac{x dZ}{dx} + 2Z \right) \sqrt{c}}{2t\sqrt{c}}$$

d'où l'on voit qu'en général les valeurs de z & de u diminuent dans la raison inverse de $t\sqrt{c}$; ou de PP' ; ce qui montre que la force ou l'intensité du Son, doit décroître à très-peu près dans la raison inverse des distances simples, du centre de propagation.

Je ne pousserai pas plus loin l'examen de ces formules, & je ne chercherai pas, non plus à déduire de la théorie exposée dans l'*Art.* 22. les lois de la reflexion qui auroit lieu dans l'hypothèse présente si la masse de l'air étoit renfermée dans un vase sphérique de grandeur finie. Ces recherches étant de peu d'utilité je me contenterai d'en avoir posés tous les principes dans la solution générale du Problème précédent.

CHAPITRE IV.

*Application de nôtre méthode du Chapitre II.
à différentes hipothèses.*

27. **L**es Problèmes, dont nous allons maintenant nous occuper, quoique peu nécessaires pour la matière que nous traitons, serviront néanmoins à faire voir l'utilité, & l'extension de notre méthode du Chapit. II.; ils pourront aussi être d'usage dans plusieurs autres points de la Théorie du Son.

PROBLEME III.

Construire l'équation

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = c \left(\frac{dz}{dx}\right) + mc \left(\frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}\right).$$

Multipliant par Mdx , & pratiquant les mêmes réductions que dans le Prob. II. on aura l'équation en M , $\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{m dM}{x dx} = kM$; qu'il faudra intégrer. Or il est facile de s'assurer, au moien de quelques transformations convenables, que cette équation tombe dans le cas général de Ricati, & que par conséquent son intégrabilité dépend de certaines conditions, qui se réduisent ici à ce, que m soit un nombre pair positif ou négatif; mais la méthode ordinaire d'intégration pour ces mêmes cas est si laborieuse, que je ne saurois me résoudre à la pratiquer; d'ailleurs il ne suffit pas de trouver une expression algébrique de M ; il faut de plus, qu'elle soit telle, qu'on puisse dans la suite du calcul chasser aisément la quantité k à l'aide de quelques réductions; comme on a fait dans les Problèmes précédens. Il m'a donc fallu imaginer une autre méthode, & voici comment je m'y suis pris.

L

Puif-

Puisque l'on a trouvé pour le cas de $m = 0$, qui est celui du Prob. I., $M = A \sin. x \sqrt{-k}$; & pour le cas de $m = 2$ dans le Prob. II., $M = A (\sin. x \sqrt{-k} - x \sqrt{-k} \cos. x \sqrt{-k})$; ce qui s'exprime plus simplement par $M = A \sin. x \sqrt{-k} - Ax \frac{d \cdot \sin. x \sqrt{-k}}{dx}$, on est assez fondé à croire que, lorsque m aura une valeur quelconque 4, 6 &c. l'expression de M sera de la forme suivante

$$M = A \sin. x \sqrt{-k} + Bx \frac{d \cdot \sin. x \sqrt{-k}}{dx} + Cx^2 \frac{d^2 \cdot \sin. x \sqrt{-k}}{dx^2} + \&c.$$

A , B , C &c. étant des coefficients à déterminer par la substitution, & la comparaison des termes.

Mais pour embrasser une plus grande généralité, je suppose $\sin. x \sqrt{-k} = u$; &

$$M = Au + B \frac{du}{dx} + C \frac{d^2 u}{dx^2} + D \frac{d^3 u}{dx^3} + \&c.$$

& je regarde les quantités A , B , C &c. comme des fonctions variables de x ; dont il faut chercher la valeur convenable à l'équation donnée.

Je commence par prendre la différentielle de M , que je mets sous la forme suivante

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dA}{dx} \cdot u + \frac{dB}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dC}{dx} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dD}{dx} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \&c.$$

$$+ A + B + C + \&c.$$

Je trouve de même

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{d^2 A}{dx^2} \cdot u + \frac{d^2 B}{dx^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d^2 C}{dx^2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 D}{dx^2} \cdot \frac{d^3 u}{dx^3} + \&c.$$

$$+ \frac{2dA}{dx} + \frac{2dB}{dx} + \frac{2dC}{dx} + \&c.$$

$$+ A + B + \&c.$$

On

On trouvera de plus par la nature de la fonction u

$$k M = A \frac{d^2 u}{dx^2} + B \frac{d^3 u}{dx^3} + C \frac{d^4 u}{dx^4} + D \frac{d^5 u}{dx^5} + \&c.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{m d M}{x dx} - k M = 0$,

& ordonnant les termes par rapport à la variable u on aura

$$\begin{aligned} & u \left(\frac{d^2 A}{dx^2} - \frac{m d A}{x dx} \right) \\ & + \frac{d u}{dx} \left(\frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{m d B}{x dx} + \frac{2 d A}{dx} - \frac{m A}{x} \right) \\ & + \frac{d^2 u}{dx^2} \left(\frac{d^2 C}{dx^2} - \frac{m d C}{x dx} + \frac{2 d B}{dx} - \frac{m B}{x} \right) \\ & + \frac{d^3 u}{dx^3} \left(\frac{d^2 D}{dx^2} - \frac{m d D}{x dx} + \frac{2 d C}{dx} - \frac{m C}{x} \right) \\ & + \&c. \quad \&c. \quad \&c. = 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tirera les équations particulières

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dx^2} - \frac{m d A}{x dx} &= 0 \\ \frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{m d B}{x dx} + \frac{2 d A}{dx} - \frac{m A}{x} &= 0 \\ \frac{d^2 C}{dx^2} - \frac{m d C}{x dx} + \frac{2 d B}{dx} - \frac{m B}{x} &= 0 \\ \&c. \quad \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

qui sont très-aisées à résoudre; dans l'intégration de toutes ces équations, à l'exception de la première, on peut négliger les constantes, qui ne serviroient qu'à rendre les valeurs des quantités B , C , D &c. plus compliquées sans les rendre plus générales. Ainsi f & h étant les deux constantes de la première quantité A on aura

$$A = f + h x^{m+1}$$

$$B = -f x - h x^{m+2}$$

$$C = f \frac{(m-2)}{2 \cdot (m-1)} x^2 + h \frac{(m+4)}{2(m+3)} x^{m+3}$$

$L 2$

$D =$

$$D = -f \frac{(m-2)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot (m-1)(m-2)} x^3 - h \frac{(m+4)(m+6)}{2 \cdot 3 \cdot (m+3)(m+4)} x^{m+4}$$

$$E = \&c.$$

où la loi de la progression est affés manifeste .

28. Dans ces formules on voit clairement que si m est un nombre pair positif à commencer par 2 , la serie des termes multipliés par f devient exacte & finie , tandis que l'autre serie qui est toute multipliée par h , va à l'infini ; c'est tout le contraire , lorsque m est un nombre pair négatif à commencer de -4 , car dans ce cas la seconde serie se termine après un nombre fini de termes , la première allant à l'infini ; d' où il suit que , puisque les quantités f & h sont absolument arbitraires , il n'y a qu'à faire $h = 0$ dans le premier cas , & $f = 0$ dans le second , & l'on aura algébriquement la valeur de M en x , en cherchant celle des coëfficiens A , B , C &c. dont le nombre est alors limité .

On pourroit , au premier aspect , former des doutes sur l'exactitude des formules précédentes , par la raison qu'elles ne paroissent pas satisfaire au cas de $m = 0$; & de $m = -2$, dans lesquels on fait d'ailleurs que M a une valeur finie .

Pour lever cette difficulté , il ne faut que recourir à l'intégration immédiate des équations qui doivent donner les valeurs de A & de B , dans les deux cas proposés ; on trouvera pour le premier , $A = f$, $B = 0$, $C = 0$ &c. & pour le second $A = hx^{-1}$, $B = 0$, $C = 0$; c'est un inconvénient attaché à toutes ces sortes de formules générales d'intégration , d'être en défaut dans certains cas , qui demandent un examen à part .

On pourroit encore être embarrassé dans l'usage des formules précédentes , lorsque $m = \pm 1$, ± 3 , ± 5 . &c. puisque dans ces cas tous les termes de la serie f , ou h deviennent infinis , à l'exception seulement de quelques uns
des

des premiers. Mais il est aisé de se tirer de cet embarras, si on fait réflexion, que les constantes f & h étant absolument arbitraires, peuvent être supposées tout ce qu'on veut, ainsi il n'y a qu'à faire f ou $h = 0$, ou $= 0 \times g$; car ce 0 détruisant celui du dénominateur, les termes qui étoient infinis, redeviendront finis, & se trouveront de nouveau multipliés par une constante arbitraire g ; ceux au contraire qui étoient demeurés finis s'évanouïront par cette supposition; d'où résulte la règle générale, favoir de ne conserver que les termes qui reçoivent une valeur infinie, en les dégagant cependant de l'infini qu'ils renferment.

Ayant ainsi trouvé la valeur de M il ne s'agit plus que de poursuivre le calcul de la même manière qu'on l'a fait dans le Prob. I.; on aura donc de nouveau les deux équations

$$\int \zeta M dx = \text{cof. } t \sqrt{-ck} \int Z M dx + \frac{\text{fin. } t \sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \text{cof. } t \sqrt{-ck} \int V M dx - \sqrt{-ck} \text{fin. } t \sqrt{-ck} \int Z M dx;$$

$$\text{substituant la valeur de } M = A \text{fin. } x \sqrt{-k} + B \frac{d \cdot \text{fin. } x \sqrt{-k}}{dx}$$

$$+ C \frac{d^2 \cdot \text{fin. } x \sqrt{-k}}{dx^2} + \&c., \text{ \& faisant disparaître le dif-}$$

férences de $\text{fin. } x \sqrt{-k}$ par la méthode des intégrations par parties on obtiendra

$$\int \zeta' \text{fin. } x \sqrt{-k} dx = \text{cof. } t \sqrt{-ck} \int Z' \text{fin. } x \sqrt{-k} dx$$

$$+ \frac{\text{fin. } t \sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V' \text{fin. } x \sqrt{-k} dx$$

$$\int u' \text{fin. } x \sqrt{-k} dx = \text{cof. } t \sqrt{-ck} \int V' \text{fin. } x \sqrt{-k} dx$$

$$- \sqrt{-ck} \text{fin. } t \sqrt{-ck} \int Z' \text{fin. } x \sqrt{-k} dx,$$

où

$$\zeta' = A \zeta - \frac{d \cdot B \zeta}{dx} + \frac{d^2 \cdot C \zeta}{dx^2} - \&c.$$

$$Z' = AZ - \frac{d \cdot B Z}{dx} + \frac{d^2 \cdot C Z}{dx^2} - \&c.$$

$$u' =$$

$$u' = Au - \frac{d \cdot Bu}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cu}{dx^2} - \&c.$$

$$V' = AV - \frac{d \cdot BV}{dx} + \frac{d^2 \cdot CV}{dx^2} - \&c.$$

Enfin l'on tirera les valeurs de z & de u par les mêmes procédés qu'on a suivi dans les Prob. I. & II.

Je ne m'arrêterai pas ici à examiner la nature des courbes *génératrices*, & la manière de les continuer, laquelle dépend de la valeur de M ; il seroit cependant aisé de le faire suivant les principes que nous avons établis; mais comme je ne donne ici cette solution générale, que comme une simple application de ma méthode, il vaut mieux de la simplifier autant qu'il est possible, en y introduisant les fonctions indéterminées ϕ & ψ comme on l'a pratiqué dans le Prob. II. On trouvera donc par ce moien les deux équations suivantes

$$Az - \frac{d \cdot Bz}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cz}{dx^2} + \&c.$$

$$= \frac{\phi(x + t\sqrt{c}) + \phi(x - t\sqrt{c})}{2}$$

$$+ \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) - \psi(x - t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}}$$

$$Au - \frac{d \cdot Bu}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cu}{dx^2} + \&c.$$

$$= \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})}{2}$$

$$+ \sqrt{c} \frac{\phi'(x + t\sqrt{c}) - \phi'(x - t\sqrt{c})}{2}$$

qu'il faudra ensuite intégrer pour avoir les valeurs de z & de u ; ces intégrations, quoique toujours possibles, ne laisseroient pas que d'être souvent fort embarrassantes; c'est pourquoi je vais résoudre le même Problème par une autre méthode moins directe à la vérité, & moins lumineuse que la précédente, mais telle qu'elle donnera les valeurs de z & de u en termes finis.

Autre

Autre construction de l'équation

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + mc \frac{d \cdot \frac{\zeta}{x}}{dx}.$$

29. Au lieu de multiplier cette équation par $M dx$, en supposant M une fonction de x , & de l'intégrer ensuite, eu égard à la seule variabilité de x , je la multiplie au contraire par $M dt$, où M est supposée une fonction de t , & j'en prends la somme en considérant la seule t comme variable; je poursuis le calcul de la même façon qu'auparavant en faisant toujours varier t au lieu de x . Je trouve d'abord l'équation en M , $\frac{d^2 M}{dt^2} = k M$; d'où je tire $M = \sin. t \sqrt{-k}$; puis en supposant $\int \zeta M dt = s$, il me vient l'équation fondamentale

$$k s = c \frac{d^2 s}{dx^2} + mc \frac{d \cdot \frac{s}{x}}{dx}.$$

Pour intégrer cette nouvelle équation, je fais $\frac{s}{x} = y$, ce qui la réduit par la substitution à $k y = c \frac{d^2 y}{dx^2} + (2 + m) c \frac{dy}{x dx}$; équation qui étant comparée à celle en M du Problème précédent donnera pour la valeur de y la suite

$$A u + B \frac{du}{dx} + C \frac{d^2 u}{dx^2} + D \frac{d^3 u}{dx^3} + \&c.$$

Les valeurs des A, B, C , étant les mêmes qu'auparavant, mais transformées par la substitution de $m + 2$ au lieu de $-m$. A l'égard de la valeur de u elle sera ici $= \sin. x \sqrt{-\frac{k}{c}}$; il faut observer, qu'elle peut-être également $\cos. x \sqrt{-\frac{k}{c}}$; d'où il suit que prenant deux quantités P, Q constantes à l'égard de x , on aura généralement $u = P \sin. x \sqrt{-\frac{k}{c}} + Q \cos. x \sqrt{-\frac{k}{c}}$.

$x\sqrt{-\frac{k}{c}} + Q \operatorname{cof.} x\sqrt{-\frac{k}{c}}$, donc si on fait

$$s = P \left(A \operatorname{fin.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} B \operatorname{cof.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{k}{c} C \operatorname{fin.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \&c. \right) \\ + Q \left(A \operatorname{cof.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} - \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} B \operatorname{fin.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{k}{c} C \operatorname{cof.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} - \&c. \right)$$

on aura

$$A = fx + hx^{-m}$$

$$B = -fx^2 - hx^{1-m}$$

$$C = f \frac{(m+4)}{2 \cdot (m+3)} x^3 + h \frac{m-2}{2(m-1)} x^{2-m}$$

$$D = -f \frac{(m+4)(m+6)}{2 \cdot 3(m+1)(m+4)} x^4 - h \frac{(m-2)(m-4)}{2 \cdot 3(m-1)(m-2)} x^{3-m}$$

$$E = \&c.$$

où l'on voit que les coefficients des termes de la série f font les mêmes que ceux de la série h dans les formules du Prob. préc., & réciproquement; donc il suffira d'appliquer aux formules présentes les mêmes remarques qu'on a déjà fait sur les différents cas de m positif ou négatif.

Soit divisée toute l'équation par A , il est évident que, puisque l'on ne doit prendre à la fois que l'une des deux séries, selon que m est positif ou négatif, les fractions $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ &c. seront toujours $= 0$, lorsque $x = 0$; soit

de plus, lorsque $x = 0$, Z la valeur de $\frac{z}{A}$, & V la va-

leur de $\frac{d \cdot \frac{z}{A}}{dx}$, valeurs qui pourront très-bien être l'une & l'autre des fonctions de z ; on aura, en faisant d'abord $x = 0$ dans l'équation ainsi préparée, $\int Z M dt = Q$; en-

suite

suite différentiant la même équation, & y faisant de nouveau $x = 0$ il viendra $\int \mathcal{V} M dt = P \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} (1 + \mu)$;

μ est une constante qui désigne la valeur de $\frac{d \cdot \frac{B}{A}}{dx}$; posant

pour abrégér \mathcal{V} au lieu de $\frac{\mathcal{V}}{1 + \mu}$, on substituera $\int Z M dt$

au lieu de Q , & $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{-k}} \int \mathcal{V} M dt$ au lieu de P . Main-

tenant, pour chasser la lettre k de l'équation, on se servira de la méthode des intégrations par parties, qui a déjà été tant de fois mise en usage; car, puisque $M = \sin.$

$t\sqrt{-k}$, on peut au lieu de $\int Z M dt$ substituer indifféremment $\frac{1}{\sqrt{-k}} \int \frac{dZ}{dt} \cos. t\sqrt{-k} dt$, ou $-\frac{1}{k} \int \frac{d^2Z}{dt^2} \sin. t\sqrt{-k} dt$;

en négligeant les termes algébriques qui doivent être supposés d'eux mêmes $= 0$; il en est de même de l'expression $\int \mathcal{V} M dt$. Ces opérations achevées, on mettra sous

les signes d'intégration les *sinus* & *cosinus* de $x\sqrt{-\frac{k}{c}}$;

& on développera à l'ordinaire les produits de ces *sinus* & *cosinus* par les *sinus* & *cosinus* correspondens de $t\sqrt{-k}$, on obtiendra ainsi l'équation

$$\begin{aligned} & \int \zeta \sin. t\sqrt{-k} dt \\ = & \frac{1}{2} \int (AZ + \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{dZ}{dt} + \frac{C}{c} \frac{d^2Z}{dt^2} \&c.) \sin. (t - \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k} dt \\ + & \frac{1}{2} \int (AZ - \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{dZ}{dt} + \frac{C}{c} \frac{d^2Z}{dt^2} \&c.) \sin. (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k} dt \\ + & \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (A\mathcal{V} dt + \frac{B}{\sqrt{c}} \mathcal{V} + \frac{C}{c} \frac{d\mathcal{V}}{dt} \&c.) \sin. (t - \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k} dt \\ - & \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (A\mathcal{V} dt - \frac{B}{\sqrt{c}} \mathcal{V} + \frac{C}{c} \frac{d\mathcal{V}}{dt} \&c.) \sin. (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k} dt. \end{aligned}$$

Or suivant les principes de notre méthode, on égalera

M

le t

le t du premier membre aux quantités $t - \frac{x}{\sqrt{c}}$, & $t + \frac{x}{\sqrt{c}}$ du second; d'où l'on aura $t + \frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les termes multipliés par $\sin. (t - \frac{x}{\sqrt{c}})$ & $t - \frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les autres termes qui se trouvent multipliés par $\sin. (t + \frac{x}{\sqrt{c}})$; or Z & V étant des fonctions de t , on peut les exprimer généralement par Δt , & Γt ; ou si pour abrégier davantage, on pose $Z + \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dt = \Delta t$ & $Z - \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dt = \Gamma t$, on tirera de l'équation précédente

$$\begin{aligned} \zeta &= A \frac{\Delta (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) + \Gamma (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2} \\ &+ \frac{B \Delta' (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) - \Gamma' (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{\sqrt{c}} \\ &+ \frac{C \Delta'' (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) + \Gamma'' (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2} \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Si l'on aimoit mieux que l'expression de Z fut composée de fonctions de $x + t\sqrt{c}$, & de $x - t\sqrt{c}$, il n'y auroit qu'à faire quelques légères transformations à l'équation finale qui donne immédiatement la valeur de ζ ; mais sans avoir recours à cet expédient qui est sans doute le plus direct, il suffit de remarquer, que l'équation différentielle de ζ ne contenant que le dt^2 , il faut que l'expression de ζ soit telle qu'elle demeure la même en changeant t en $-t$. Soit donc mis dans la formule précédente $-t$ au lieu de t ; $\Delta (t + \frac{x}{\sqrt{c}})$, & $\Gamma (t - \frac{x}{\sqrt{c}})$ deviendront

$$\Delta (-t)$$

$\Delta \left(-t + \frac{x}{\sqrt{c}} \right) = \Delta \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} (x - t\sqrt{c}),$ & $\Gamma \left(-t - \frac{x}{\sqrt{c}} \right)$
 $= \Gamma \cdot -\frac{1}{\sqrt{c}} (x + t\sqrt{c}).$ Changeant les valeurs des fon-
 ctions Δ & Γ on pourra mettre simplement $\Delta(x - t\sqrt{c})$
 au lieu de $\Delta \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} (x - t\sqrt{c}),$ & $\Gamma \cdot (x + t\sqrt{c})$
 au lieu de $\Gamma \cdot -\frac{1}{\sqrt{c}} (x - t\sqrt{c});$ mais il faudra mettre
 puis $\sqrt{c} \Delta'(x - t\sqrt{c}), c \Delta''(x - t\sqrt{c})$ &c. au lieu de
 $\Delta' \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} (x - t\sqrt{c}), \Delta'' \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} (x - t\sqrt{c})$ &c, & $-\sqrt{c}$
 $\Gamma'(x + t\sqrt{c}), c \Gamma''(x + t\sqrt{c})$ &c. au lieu de $\Gamma' \cdot -\frac{1}{\sqrt{c}}$
 $(x + t\sqrt{c}), \Gamma'' \cdot -\frac{1}{\sqrt{c}} (x + t\sqrt{c}),$ &c. comme il est aisé de
 s'en assurer avec un peu de réflexion; on aura de cette
 manière

$$\begin{aligned}
 \zeta &= A \frac{\Gamma(x + t\sqrt{c}) + \Delta(x - t\sqrt{c})}{2} \\
 &+ B \frac{\Gamma'(x + t\sqrt{c}) + \Delta'(x - t\sqrt{c})}{2} \\
 &+ C \frac{\Gamma''(x + t\sqrt{c}) + \Delta''(x - t\sqrt{c})}{2} \\
 &+ \text{\&c.} \qquad \qquad \text{\&c.}
 \end{aligned}$$

En rapprochant cette formule de celle qu'on a trouvé
 dans l'Art. préc. il fera facile de déterminer le rapport des
 fonctions $\Gamma(x + t\sqrt{c}),$ & $\Delta(x - t\sqrt{c})$ aux fonctions
 $\phi(x + t\sqrt{c}) + \frac{1}{\sqrt{c}} \psi(x + t\sqrt{c}),$ & $\phi(x - t\sqrt{c})$
 $- \frac{1}{\sqrt{c}} \psi(x - t\sqrt{c}).$

La méthode de cet Article conduit, comme on le voit; à des résultats beaucoup plus simples, que la première; mais elle est aussi moins générale, & ne peut, à la rigueur être employée que dans l'hypothèse, que toutes les valeurs de z qui répondent à différentes abscisses x dans un même instant soient liées entr'elles par la loi de continuité. Ce n'est que d'après la première solution qu'il sera permis de prendre pour Γ & Δ des fonctions quelconques, soit régulières ou non.

Des oscillations d'un fluide élastique renfermé dans un tuyau de figure conoidale quelconque.

30. **S**Oit imaginé tout le fluide partagé en une infinité de tranches perpendiculaires à l'axe, dont la largeur variable soit exprimée par X , qui désigne une fonction de la partie correspondante x de l'axe; il est clair que, si on suppose, que les tranches conservent toujours leur parallélisme, & que z soit l'espace infiniment petit parcouru par une tranche quelconque Xdx dans le tems t , cette quantité Xdx deviendra $(X + \frac{dX}{dx} z)(dx + dz)$
 $= Xdx + \frac{dX}{dx} z dx + Xdz$, en supprimant les infinimens petits du second ordre; donc, si c désigne l'élasticité du fluide dans son état naturel; l'élasticité du fluide contenu dans la tranche Xdx fera après le tems t

$$c \cdot \frac{Xdx}{Xdx + \frac{dX}{dx} z dx + Xdz} = c \left(1 - \frac{dz}{dx} - \frac{dX}{Xdx} z \right)$$

en négligeant ce qui se doit négliger. La différence de cette expression prise négativement donne l'excès de l'élasticité d'une tranche quelconque sur celle qui la suit immédiatement, donc si

on

on multiplie cet excès par la largeur $X + \frac{dX}{dx} \zeta$ de la tranche, & qu'on divise ensuite par la masse $X dx$, on aura la force accélératrice qui tend à faire parcourir l'espace ζ ; donc l'équation du mouvement du fluide sera $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + d \cdot \frac{dX}{X dx} \zeta \right) \left(\frac{X + \frac{dX}{dx} \zeta}{X dx} \right)$ qui se réduit par la supposition de ζ infiniment petit à

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{d \cdot \frac{dX}{dx} \zeta}{dx} \right).$$

Telle est l'équation générale; mais jusqu'à présent je ne connois encore que quelques cas où elle soit constructible; ce sont ceux qui peuvent être compris dans la solution du Prob. III.; c'est-à-dire où l'on a $\frac{dX}{X dx} = \frac{m}{x}$; ou bien $X = h x^m$; ce qui donne une conoïde formé par la révolution d'une parabole, ou d'une hiperbole quelconque. On aura donc dans cette hypothèse $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + m \frac{d \cdot \zeta}{dx} \right)$, équation intégrable exactement toutes les fois que m fera un nombre pair positif, ou négatif (*Art.* 28.); dans tous les autres cas la valeur de ζ sera exprimée par une suite infinie.

Soit $m = 2$, on aura le cas du Prob. II., & la formule de l'*Art.* 28. donnera

$$\zeta + \frac{d \cdot x \zeta}{dx} = \frac{\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})}{2} + \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) - \psi(x - t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'*Art.* 20.; de plus la formule de l'*Art.* 29. donne

$$\zeta = \frac{\Gamma(x + t\sqrt{c}) + \Delta(x - t\sqrt{c})}{x^2}$$

$$\frac{\Gamma'(x + t\sqrt{c}) + \Delta'(x - t\sqrt{c})}{x}$$

ce qui s'accorde encore avec l'Art. 21.

Si on fait $m = 1$ le conoïde sera formé par la révolution d'une parabole Apollonienne autour de son axe, & la valeur de ζ ne pourra être donnée que par des séries.

S C O L I E.

31. Si le tuyau avoit une figure plane, l'équation précédente auroit encore lieu; & le cas de $m = 1$, appartiendroit à un tuyau triangulaire; ainsi l'équation $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{d \cdot \frac{\zeta}{x}}{dx} \right)$ pourroit servir à trouver les loix de la propagation du Son dans un plan; & c'est dans cette vue que M. Euler me fit l'honneur de me la proposer dans la même lettre, dont j'ai fait mention (Art. 16.). En faisant usage de ma nouvelle méthode, je reconnus bientôt que cette équation n'étoit pas intégrable exactement, mais qu'on pouvoit la rendre telle en donnant au terme $\frac{d \cdot \frac{\zeta}{x}}{dx}$

le coefficient 2. Voila ce qui m'a conduit à l'hypothèse des ondulations sphériques que nous avons examiné au long dans le *Chap. précéd.*; hypothèse qui est d'ailleurs beaucoup plus conforme à la nature, que celle des ondulations simplement circulaires. Je fis part à M. Euler des changemens que j'avois fait à son hypothèse, & des résultats qui m'en étoient venus, dans une lettre de la fin de Décembre 1759.; mais j'ai vu depuis avec beaucoup de plaisir que ce savant Auteur en avoit déjà fait de même, & étoit parvenu aux mêmes conclusions, que moi, sur les loix de la propagation des ébranlemens de l'air dans une sphère. (*Voies son Mémoire imprimé à la tête de ces Recherches*).

32. Supposons maintenant le tuyau d'une longueur donnée a , & bouché à ses deux extrémités; il faudra que la nature des fonctions Γ & Δ (*Art.* 29.) soit telle que z s'évanouisse aux points, où $x = 0$, & $x = a$ quel que soit d'ailleurs le tems t . Par un raisonnement semblable à celui de l'*Art.* 23., on trouvera pour la première de ces conditions $\Gamma t\sqrt{c} + \Delta - t\sqrt{c} = 0$; ce qui apprend comment la fonction Δ doit être continuée du côté des abscisses négatives; pour satisfaire ensuite à l'autre condition, faisons $\Gamma(a + t\sqrt{c}) = T$, $\Delta(a - t\sqrt{c}) = \theta$; & soient α , β , γ &c. les valeurs des quantités $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, lorsque $x = a$; on aura $0 = \alpha(T + \theta) + \beta\left(\frac{dT - d\theta}{dt\sqrt{c}}\right) + \gamma\left(\frac{d^2T + d^2\theta}{dt^2c}\right) + \&c. = 0$; soit maintenant $T = -\theta + y$, on aura $\alpha y + \beta\frac{dy}{dt\sqrt{c}} + \gamma\frac{d^2y}{dt^2c} + \&c. = 2\beta\frac{d\theta}{dt\sqrt{c}} + \&c.$ L'intégration de cette équation sera toujours possible. Soient a' , a'' , a''' &c. les racines de l'équation

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \&c. = 0$$

la valeur de y fera de la forme suivante

$$\begin{aligned} y = & Fe^{a'\sqrt{c}} \int -a'\beta e^{-a'\sqrt{c}} d\theta - \&c. \\ & + Ge^{a''\sqrt{c}} \int -a''\beta e^{-a''\sqrt{c}} d\theta - \&c. \\ & + He^{a'''\sqrt{c}} \int -a'''\beta e^{-a'''\sqrt{c}} d\theta - \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

F , G , H désignant des constantes à déterminer par la substitution, & la comparaison des termes.

Si la quantité y étoit $= 0$, il est évident que les courbes géométriques, qui représentent les fonctions Γ & Δ ne seroient qu'un assemblage de branches toutes égales, & semblables à celles qui répondent à la portion

a de

a de l'axe; ainsi il ne seroit pas difficile de comprendre que le système des particules reprendroit toujours sa première position après chaque intervalle de tems $= \frac{2a}{\sqrt{c}}$; or, pour que ce cas puisse avoir lieu, il suffira que le coëfficient β , & tous ceux qui multiplient les différences impaires de y soient nuls; c'est-à-dire que la valeur de ζ soient telle, qu'elle ne renferme que des différences paires des fonctions Γ & Δ , ou au moins que leurs coëfficiens s'évanouissent en posant $x = a$. Ces conditions ne pouvant avoir lieu dans notre cas, on en doit conclure que les oscillations des particules de l'air contenu dans les tuyaux donnés changeront continuellement, & ne reviendront jamais les mêmes, si ce n'est par une espèce de hazard dépendant de la nature des premiers ébranlemens. Je dis par une espèce de hazard, puisque je suppose que ces ébranlemens soient quelconques; car, on pourroit d'ailleurs les supposer tels que le système fût toujours soumis aux lois de l'isochronisme; c'est ce qui est connu de tous les Géomètres; mais nous aurons dans la suite occasion d'examiner cette matière plus à fond qu'on ne l'a encor fait.

Des vibrations des cordes inégalement épaisses.

33. **I**L est facile de voir que l'équation pour le mouvement des cordes tendues, qui sont d'une épaisseur variable sera de la même forme que celle, qu'on a donné (*Art. XII. Rech. préc.*), avec cette seule différence que la quantité c devra être regardé non plus comme constante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de x . Conservant donc les mêmes noms, & supposant X une fonction donné de x , on aura $(\frac{d^2y}{dt^2}) = X(\frac{d^2y}{dx^2})$
 Soit dans un cas particulier, $X = hx^m$, je fais x
 $= s$

$= s^{\frac{2}{n-2}}$, & $y = \frac{\zeta}{s}$; & prenant ds pour constante je trouve après les substitutions, & les réductions convenables $(\frac{d^2 \zeta}{dt^2}) = \frac{(2-n)^2 h}{4} [(\frac{d^2 \zeta}{ds^2}) - \frac{n-4}{n-2} (\frac{d \cdot \zeta}{ds})]$, équation qui est dans le cas du Prob. III. Donc si on suppose $m = -\frac{n-4}{n-2}$, $c = \frac{(2-n)^2 h}{4}$, & qu'on substitue s au lieu de x dans les formules de l'Art. 28. ou 29., on aura la valeur de ζ , laquelle étant ensuite multipliée par s donnera celle de y en s & en t ; où il n'y aura plus qu'à remettre, au lieu de s , sa valeur en x tirée de l'équation de supposition $x = s^{\frac{2}{n-2}}$.

Delà il est évident que y aura une valeur finie & exacte toutes les fois que $\frac{n-4}{n-2}$ sera un nombre pair positif, ou négatif; c'est ce qui arrivera lorsque $n = \frac{4\mu - 4}{2\mu - 1}$, μ étant pris pour exprimer un nombre quelconque entier; dans tous les autres cas la série ira à l'infini. Au reste soit qu'on trouve pour y une valeur exacte, ou non; les vibrations de la corde ne seront jamais isochrones, excepté dans le seul cas de $n = 0$, qui est celui d'une épaisseur uniforme; car il est visible, que la corde étant supposée fixe à ses deux bouts, on aura les mêmes conditions à remplir que dans l'Art. 32. ci-dessus; donc les conséquences en seront aussi les mêmes.

Le défaut d'isochronisme dans les cordes inégalement épaisses les rend incapables de produire un son fixe, & appréciable à l'oreille; aussi les Artistes les rejettent-ils toujours, & les nomment communément cordes *fausses*, par la raison qu'elles ne peuvent jamais s'accorder parfaitement avec les autres. Cette observation peut servir, ce me sem-

ble, à démontrer l'insuffisance de la Théorie de M. Taylor sur les vibrations des cordes; car il est visible, que quelque inégale, que puisse être une corde sonore, elle devrait cependant faire toujours des vibrations de même durée, si la figure qu'elle prend d'elle même ne pouvoit être autre que celle qui convient à l'isochronisme, tel que cet Auteur le suppose.

Au reste on pourra toujours résoudre l'équation générale $(\frac{d^2y}{dt^2}) = X(\frac{d^2y}{dx^2})$ directement par ma méthode; toute la difficulté se réduisant à l'intégration de l'équation en M , $kM = X \frac{d^2M}{dx^2}$. Les cas les plus connus, de l'intégrabilité de cette équation, sont ceux de $X = hx^n$ (n étant $= \frac{4\mu - 4}{2\mu - 1}$) que nous avons examiné ci-dessus; il peut y en avoir d'autres; mais il feroit trop long de les examiner ici.

Des oscillations d'une chaîne pesante.

34. **C**E Problème étant célèbre parmi les Géomètres, je crois pouvoir me dispenser de donner l'Analyse, par laquelle on trouve que la force accélératrice de chaque point de la chaîne est comme la somme des angles de contingence depuis le sommet, moins l'angle de contingence multiplié par le rapport du poids total de la portion inférieure de la chaîne au petit poids dont ce point est chargé. Soit donc x la longueur d'une partie quelconque de la chaîne à commencer par le bout inférieur, Xdx la pesanteur, où la masse de la portion infiniment dx , & y l'espace parcouru horizontalement dans le tems t , on aura l'équation

$$(\frac{d^2y}{dt^2})$$

$$- \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) = - \left(\frac{dy}{dx} \right) - \frac{f X dx}{X} \times \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right).$$

Or soit $X = f x^n$, on aura $\frac{f X dx}{X} = \frac{x}{n+1}$, & faisant

$x = \frac{s^2}{b}$, $y = \frac{\zeta}{s}$ il viendra

$$\left(\frac{d^2 \zeta}{ds^2} \right) = \frac{h}{4(1+n)} \left[\left(\frac{d^2 \zeta}{ds^2} \right) + \frac{1}{2n-1} \times \left(\frac{d \cdot \zeta}{ds} \right) \right].$$

Equation réduite à notre formule générale, & qui aura une solution exacte toutes les fois que $2n-1$ fera un nombre pair quelconque, c'est-à-dire, que $n = \frac{2\mu+1}{2}$. Dans le cas où la chaîne est d'une pesanteur uniforme, on a $n = 0$; ainsi m fera $= -1$ dans les formules des *Art.* 27. & l'on trouvera que les deux séries, dont l'une est toute multipliée par f , & l'autre par h , reviendront précisément à la même.

Soit l la longueur de la chaîne, on aura dans le point de suspension $y = \frac{\zeta}{\sqrt{bl}}$; donc, ce point étant supposé fixe, il faudra que ζ y soit $= 0$; d'où l'on retrouvera les mêmes conditions entre les fonctions $\Gamma(a + t\sqrt{c})$, & $\Delta(a - t\sqrt{c})$ que dans l'*Art.* 32. Maintenant, puisque la chaîne est libre dans tous ses autres points, il est visible que ce seroit mal à propos, qu'on supposeroit $y = 0$, lorsque $x = 0$; mais il faudra remplacer cette condition par celle-ci $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$; car il est naturel de penser, que la courbure de la chaîne doit s'évanouir à son extrémité inférieure, par la raison qu'il n'y a ici aucun appui à l'action des parties supérieures. Or $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{h^2}{s^3} \left(s^2 \frac{d^2 \zeta}{ds^2} - 3s \frac{d\zeta}{ds} + 3\zeta \right)$; donc lorsque s est zero, ou simplement

infiniment petit, $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit à $\frac{3\zeta}{s^3}$, & par conséquent on aura de même ici $\zeta = 0$, lorsque $s = 0$, & $\Gamma t \sqrt{c} + \Delta - t \sqrt{c} = 0$, comme dans l'Art. cité. Au reste ce Problème, étant absolument analogue aux précédens, est susceptible de remarques semblables. Je me contenterai simplement de faire observer, que si on vouloit le résoudre directement par notre méthode générale, on parviendroit après les opérations ordinaires à cette équation en M ,

$$kM = \frac{d^2 \cdot \frac{MfXd x}{x}}{dx} - \frac{dM}{dx}, \text{ qui est constructible par les méthodes connues dans le cas, où } X = hx^{\frac{2\mu+1}{2}};$$

il faudroit ensuite déterminer la quantité k , avec les autres constantes de M , par la condition que $\frac{MfXd x}{X} \times \frac{dy}{dx} - \frac{d \cdot \frac{MfXd x}{x}}{dx} \times y + My$, ou bien $\frac{MfXd x}{X} \times \frac{dy}{dx} - \frac{dM}{dx} \times \frac{fXd x}{X} \times y + MfXd x \times \frac{dX}{X^2 dx} \times y$ soit $= 0$, lorsque $x = a$, & $x = 0$. Or dans le premier cas y étant lui même $= 0$, il suffira que M le soit aussi; dans le second il est clair que toute la quantité s'évanouïra d'elle même à cause du facteur $fXd x$ qui multiplie tous les termes; cependant on supposera toujours $M = 0$, afin de terminer la suite des points mobiles au bout inférieur de la chaîne.

SCOLIE I.

35. Par les formules données dans ce Chapitre, on peut résoudre le Problème de l'Art. 61. de l'excellent Traité de la résistance des fluides de M. D'Alembert, d'une manière, peut être plus analytique que ne l'a fait cet Auteur. Voici en quoi consiste ce Problème; il s'agit de trouver deux quan-

tités A , & B , telles que $A dx + B dz$, & $z B dx - z A dz$ soient l'une & l'autre des différentielles exactes. Pour rendre la question plus générale, je me propose de rendre exactes les deux différentielles $\alpha dt + \beta dx$, $x^m \beta dt + b x^n \alpha dx$; soit la première $= dp$, & la seconde $= dq$; on

aura $\alpha = \frac{dp}{dt}$, $\beta = \frac{dp}{dx}$, $x \beta = \frac{dq}{dt}$, $b x^n \alpha = \frac{dq}{dx}$; donc

$x^m \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dt}$, $b x^n \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$. Je différentie ces équations

en faisant varier x seul dans la première, & t seul dans la seconde; & je compare ensuite les deux valeurs de

$\frac{d^2 q}{dx dt}$; j'ai $\frac{d \cdot x^m (\frac{dp}{dx})}{dx} = b x^n (\frac{d^2 p}{dt^2})$; savoir $b x^{n-m}$

$(\frac{d^2 p}{dt^2}) = (\frac{d^2 p}{dx^2}) + \frac{m}{x} (\frac{dp}{dx})$. Equation qui est, comme on le voit susceptible de notre méthode; en suivant cette méthode, on trouvera d'abord l'équation en M

$$k M x^{n-m} = \frac{d^2 M}{dx^2} - m \frac{d \cdot \frac{M}{x}}{dx}$$

qu'il faut intégrer avant d'aller plus avant. Pour cela je

fais $x = s^r$; $M = N s^v$; & supposant $u = \frac{2}{n-m+2}$ &

$v^2 - (u + m u) v + m u^2 = 0$, je trouve après les substitutions & les réductions $k N u^2 = \frac{d^2 N}{ds^2} + (2v - u - m u + 1)$

$\frac{dN}{s ds}$, équation qui se rapporte à celle de l'Art. 27. On voit

donc par là, que l'équation en M sera constructible exactement par nos formules, toutes les fois que $2v - u - m u + 1$

sera un nombre pair quelconque; le reste du calcul n'ayant plus de difficulté, on trouvera pour la valeur de p

une expression exacte & finie, composée de fonctions très-générales de x & de t . Si $n = m$, alors on a $u = 1$, &

l'équation qui donne la valeur de v , devient $v^2 - (1 + m)v$

$+ m$

+ $m = 0$; d'où l'on tire $v = 1$, ou $= m$; dans le premier cas, le coefficient $2v - m - mu + 1$ devient $= 1 - 2m$; & dans le second, $= 1$; or dans le Problème de M. D'Alembert on a $m = 1$, d'où l'on voit que ce Problème n'admet point de solution exacte au moins suivant ma méthode; cependant si l'on veut se contenter d'une solution seulement approchée, on pourra y parvenir immédiatement par les formules du Prob. III. Car si dans l'équation $b x^{n-m} \left(\frac{d^2 p}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2 p}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dp}{dx}\right)$ on fait $x = s^u$, & $p = q s^v$; & qu'on suppose les valeurs u & v déterminés par ces équations $u = \frac{1^2}{n - m + 2}$, & $v^2 + (2 - u + mu)v + mu - u + 1 = 0$ il vient

$$b u^2 \left(\frac{d^2 q}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2 q}{ds^2}\right) + (2v - u + 1 + mu) \left(\frac{d \cdot q}{ds}\right)$$

Equation qui a la même forme, que celle du Prob. cité, & qui par conséquent est susceptible des mêmes solutions. Lorsque $m = n$, on a $u = 1$, & $v = -1$, ou $-m$; la première racine rend le coefficient de $d \cdot \frac{q}{s}$, $= m - 2$, & la seconde le rend $= -m$; ce qui conduit aux mêmes conclusions que plus haut. Au reste il est visible que le Problème présent renferme dans sa généralité tout ceux, dont nous avons traité dans ce Chapitre.

S C O L I E I I.

36. L'équation $kM = \frac{d^2 M}{dx^2} - m \frac{dM}{x dx}$ étant transformée par la substitution de $f s^{\frac{-1}{m+1}}$ au lieu de x devient $\frac{f^2 k}{(1+m)^2}$
 $M s$

$M s^{\frac{-2m}{1+m}} = \frac{d^2 M}{ds^2}$, & faisant ensuite $M = e^{fs ds}$, $dy + y^2 ds = \frac{f^2 k}{(1+m)}$; $s^{\frac{-2m}{1+m}}$; qui est l'équation même de Riccati. Les formules trouvées dans la solution du Prob. III. donnent, comme on le voit, une construction générale de cette équation; mais il faut remarquer, que ces formules ne sont encore que des cas particuliers des intégrales complètes, qui résultent de la supposition de quelques constantes = 0; pour les compléter on joindra à la valeur déjà trouvée de y , la quantité $\frac{e^{-2fs ds}}{\int e^{-2fs ds} ds}$; ce qui est facile à démontrer.

C H A P I T R E V.

Continuation des Recherches sur la propagation du Son.

§. I.

De la propagation du Son, en supposant que les ébranlemens des particules de l'air ne soient pas infiniment petits.

37. **Q**uelque naturelles, que paroissent les hypothèses que nous avons examiné dans le Chap. III.; elles donnent cependant la vitesse du Son moindre que la véritable, d'environ 163. pieds par seconde; comme on le peut conclure des *Art.* 12. & 26. ci-dessus. Cette différence est sans doute assez considérable, pour ne pas être attribuée aux erreurs des expériences, qui servent d'élémens à notre Théorie, comme j'étois porté à le penser quand je donnai mes premières Recherches sur

le

le Son (*Voies Art. LVII.*). Mais quelle pourroit donc être la cause? M. Euler a crû la trouver dans la supposition des ébranlemens infiniment petits, sur laquelle on a jusqu'ici fondé les calculs de la propagation du Son (*Voies son Mémoire, pag. 10. ci-dessus*). Cette conjecture est plausible, mais je doute, qu'en l'examinant à fond on la trouve aussi satisfaisante, qu'elle le paroît d'abord. Pour en apprécier la valeur, voici la méthode que j'ai imaginé.

Problèmes préliminaires.

P R O B L E M E I V.

Construire l'équation $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c (\frac{d^2z}{dx^2}) + y$, y étant une fonction quelconque de x & de t .

38. Je la multiplie par Mdx , je l'intègre, & j'opère à l'égard des termes $f(\frac{d^2z}{dt^2}) Mdx$, & $c f(\frac{d^2z}{dx^2}) Mdx$, comme dans le Prob. I.; je parviens ainsi à cette équation en s , $\frac{d^2s}{dt^2} = cks + fMydx$ par les mêmes procédés je trouve l'intégrale $s + \mu v = Ae^{t:\mu} + \mu e^{t:\mu} \int e^{-t:\mu} dt fMydx$, d'où résultent les deux équations

$$\begin{aligned} \int \ddot{z} Mdx &= \text{cof. } t \sqrt{-ck} \int Z Mdx + \frac{\text{fin. } t \sqrt{-ck}}{\nu - ck} \int V Mdx \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt fMydx \\ &- \frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{-t\sqrt{ck}} \int e^{t\sqrt{ck}} dt fMydx \dots (A) \\ \int u Mdx &= \text{cof. } t \sqrt{-ck} \int V Mdx - \sqrt{-ck} \text{fin. } t \sqrt{-ck} \int Z Mdx \\ &+ \frac{1}{2} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt fMydx \\ &+ \frac{1}{2} e^{-t\sqrt{ck}} \int e^{t\sqrt{ck}} dt fMydx \dots (B) \end{aligned}$$

Or

Or, puisque $M = \sin. x \sqrt{-k}$, il faut, pour pouvoir chasser la quantité k des équations précédentes, réduire tous leurs termes en sorte, que cette quantité k ne se rencontre que dans des fonctions de la forme de $\sin. (x) \sqrt{-k}$, (x) marquant une fonction quelconque de x & t . Les termes qui renferment $\int Z M dx$ étant les mêmes ici que dans le Prob. I., ils se ramèneront à cette forme par les réductions enseignées; ainsi toute la difficulté se réduira aux termes affectés de deux signes d'intégration, & provenant de la quantité y .

Prenons d'abord le terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int My dx$; & commençons par faire disparaître la quantité k du coëfficient $\frac{1}{2\sqrt{ck}}$. Pour cela soit changée l'intégrale $\int My dx = \int \sin. x \sqrt{-k} y dx$ en son équivalente $\sin. x \sqrt{-k} \int y dx - \sqrt{-k} \int \cos. x \sqrt{-k} dx \int y dx$; ce qui donnera par la substitution, & en effaçant le terme $\sin. x \sqrt{-k} \int y dx$, à cause de $\sin. x \sqrt{-k} = 0$ au premier & au dernier point de l'intégrale $\int My dx$, la transformée $\frac{1}{2\sqrt{-1} \times \sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int \cos. x \sqrt{-k} dx \int y dx$. Posons pour abrégér $\int y dx = Y$, & mettons aux lieu de $\cos. x \sqrt{-k}$ sa valeur exponentielle $\frac{e^{x\sqrt{-k}} + e^{-x\sqrt{-k}}}{2}$; transportant le signe d'intégration qui regarde l' x au devant de celui qui regarde le t , (ce qui est permis à cause que la quantité $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui est entre les deux signes, est une quantité constante à l'égard de x) on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{-k}} Y dt + \frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{-k}} Y dt$. Soit fait $x - t\sqrt{c} = p$, $x + t\sqrt{c} = q$, & soit nommée P , la fonction de t & de p qui vient de

la substitution de $p + t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la quantité Y ; & Q la fonction de t & de q , qui vient de la substitution de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la même quantité Y ; en prenant au lieu des variables t & x , les nouvelles variables t & p , & t & q , on changera les deux expressions intégrales $\int dx se^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt$, $\int dx se^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt$, en celles-ci $\int dp se^{p\sqrt{k}} P dt$, $\int dq se^{-q\sqrt{k}} Q dt$, qui ont les mêmes valeurs, quoique sous des formes différentes. Dans ces dernières expressions, les intégrations $\int e^{p\sqrt{k}} P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}} Q dt$ devront se faire en variant seulement t ; donc, si on suppose que les intégrales $\int P dt$, & $\int Q dt$ soient prises avec cette condition, on aura $e^{p\sqrt{k}} \int P dt$, $e^{-q\sqrt{k}} \int Q dt$; ce qui donnera les transformées $\int e^{p\sqrt{k}} dp \int P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}} dq \int Q dt$, dans lesquelles il faudra faire maintenant p & q variables, & t constante; or, à cause que les quantités $\int P dt$, & $\int Q dt$ ne contiennent point de x , il est visible qu'il reviendra au même d'intégrer $e^{p\sqrt{k}} dp \int P dt$; & $e^{-q\sqrt{k}} dq \int Q dt$, en supposant p & q seules variables, & de remettre après l'intégration au lieu de p & q leurs valeurs $x - t\sqrt{c}$, & $x + t\sqrt{c}$, que de restituer d'abord ces valeurs à la place de p & de q , & d'intégrer ensuite en faisant varier x ; d'où il s'ensuit qu'on aura $\int dx se^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt = \int dp se^{p\sqrt{k}} P dt = \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int P dt$, & $\int dx se^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt = \int dq se^{-q\sqrt{k}} Q dt = \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int Q dt$. Par conséquent la transformée cherchée du terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{c}k} \int e^{-t\sqrt{c}k} dt \int My dx$ deviendra après toutes les substitutions $\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}} e^{t\sqrt{c}k} \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int P dt + \frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}} e^{t\sqrt{c}k} \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int Q dt$, laquelle, en mettant hors des signes d'intégration la quantité exponentielle $e^{-t\sqrt{c}k}$, qui est constante à l'égard de x , se réduit

duir plus simplément à $\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}} (f e^{x\sqrt{k}} dx \int P dt + f e^{-x\sqrt{k}} dx \int Q dt)$.

Par des opérations, & des réductions semblables on changera encore l'autre terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{-x\sqrt{ck}} \int e^{t\sqrt{ck}} dt \int M y dx$

en $\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}} (f e^{x\sqrt{k}} dx \int Q dt + f e^{-x\sqrt{k}} dx \int P dt)$;

donc en retranchant la transformée du second terme de

celle du premier, on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1}\sqrt{c}} \int (e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}})$

$(\int P dt - \int Q dt) dx = \int \frac{1}{2\sqrt{c}} (\int Q dt - \int P dt) \sin. x\sqrt{-k} dx$.

Substituant cette expression dans l'équation (A) ci-dessus, & égalant entr'eux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$, sui-

vant les règles de notre méthode, on trouvera pour la valeur de z les formules qu'on a déjà trouvé dans le

Prob. I., jointes avec la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}} (\int Q dt - \int P dt)$.

Après avoir ainsi trouvé la valeur de z il ne sera pas difficile de déduire celle de u de l'équation (B). Pour cela, comme dans cette équation les termes qui renferment

y , sont exempts du coefficient $\frac{1}{\sqrt{ck}}$, on y mettra d'abord,

& sans aucune préparation, à place de M sa valeur expo-

nentielle $\frac{e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}}}{2\sqrt{-1}}$; ensuite faisant des observations

& des réductions analogues à celles que nous avons faites plus haut, on trouvera que, si P' & Q' sont pris pour ex-

primer les valeurs de y après les substitutions de $p + t\sqrt{c}$ & de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x , les termes dont il s'agit

deviendront $\frac{1}{2} \int (\int P' dt + \int Q' dt) \sin. x\sqrt{-k} dx$; par

conséquent l'expression de u renfermera outre les formules

trouvées à la fin de l'Art. 6., encore celle-ci $\frac{\int P' dt + \int Q' dt}{2}$.

C O R O L L A I R E.

38. Donc le terme y ajouté à l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2}$ produit dans les valeurs de z & de u une augmentation qu'on déterminera ainsi. Soit intégré $y dx$, en ne faisant varier que x ; & l'intégrale trouvée $\int y dx$ étant multiplié par dt soit intégrée de nouveau en supposant d'abord $x + t\sqrt{c}$ constant, & t seul variable; puis en supposant $x - t\sqrt{c}$ constant, & t seul variable; retranchant cette seconde intégrale de la première, & divisant la différence par $2\sqrt{c}$, on aura ce qu'il faut ajouter à la valeur de z . Ensuite soit intégré simplement $y dt$ d'abord en traitant $x - t\sqrt{c}$ comme constante, & t comme variable, puis en traitant $x - t\sqrt{c}$ comme constante, & t de même comme variable; la somme de ces deux intégrales divisée par 2 fera l'augmentation de la valeur de u .

S C O L I E I.

39. Dans l'excellent Traité de la cause des vents de M. D'Alembert on trouve à l'Art. 87. une méthode fort simple, & fort ingénieuse pour rendre completes ces deux différentielles $\alpha ds + \beta du$, & $\rho \alpha du + \nu \beta ds + du \Delta u, s + ds \Gamma u, s$. Le Problème se réduit à celui que nous venons de résoudre; car en supposant la première de ces différentielles $= dp$, on trouve $\alpha = \frac{dp}{ds}$ & $\beta = \frac{dp}{du}$; mais pour que la seconde différentielle soit exacte, il faut que

$$\frac{d \cdot (\rho \alpha + \Delta u, s)}{ds} = \frac{d \cdot (\nu \beta + \Gamma u, s)}{du}$$

ce qui donne en substituant & différentiant

$\rho d^2 p$

$$\rho \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{d \cdot \Delta u, s}{ds} = \frac{d^2 p}{du^2} + \frac{d \cdot \Gamma u, s}{du},$$

Equation qui reviendra au même, que celle du Problème précédent, si on pose z au lieu de p , t au lieu de s , x au lieu de u , c au lieu de $\frac{v}{\rho}$, & y au lieu de $\frac{d \cdot \Gamma u, s}{\rho du}$

$$- \frac{d \cdot \Delta u, s}{\rho ds}.$$

Si d'un coté la solution de M. D'Alembert est plus simple que la notre, de l'autre elle paroît insuffisante pour les cas, où les valeurs de p seroient prises à volonté lorsque $s = 0$; & c'est précisément dans ces cas que rentre la question qui est l'objet du Problème précédent. Au reste si on introduit dans notre solution au lieu de Z & de V des fonctions indéterminées, on en tirera des formules analogues à celles que M. D'Alembert a trouvé par sa méthode. Il est vrai, que nos formules se présenteront sous une autre forme, que celles de cet Auteur; mais la comparaison n'en fera pas difficile, & ne demandera d'ailleurs que un peu d'adresse de calcul; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

S C O L I E . II.

40. Ce Savant Géomètre a encore rendu l'usage de sa méthode plus général en l'appliquant à déterminer les quantités α & β par les conditions que $\alpha ds + \beta du$, & $\rho \alpha du + \rho \beta ds + \gamma \beta ds + m \alpha ds + du \Delta u, s + ds \Gamma u, s$, soient l'une & l'autre des différentielles complètes. Faisant $\alpha ds + \beta du = dq$, & substituant dans la seconde différentielle les valeurs de α & β en q , on trouvera par les conditions de l'intégrabilité l'équation suivante,

$$\rho \left(\frac{d^2 q}{ds^2} \right) + \rho \left(\frac{d^2 q}{ds du} \right) + \left(\frac{d \cdot \Delta u, s}{ds} \right) = \gamma \left(\frac{d^2 q}{du^2} \right) + m \left(\frac{d^2 q}{du ds} \right) + \left(\frac{d \cdot \Gamma u, s}{du} \right)$$

qui

qui peut se rapporter à cette forme

$$\left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2}\right) = b \left(\frac{d^2 \zeta}{dt dx}\right) + c \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2}\right) + y$$

Quoique cette équation soit étrangère à la matière que nous traitons, je crois qu'on ne fera point fâché de voir comment notre méthode s'y applique. Je commence ici

par supposer $\frac{d\zeta}{dt} = u$; & je décompose par ce moïen

l'équation proposée dans les deux suivantes

$$\frac{d\zeta}{dt} = u; \quad \& \quad \frac{du}{dt} = b \frac{du}{dx} + c \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + y;$$

Je multiplie la première de ces équations par Ndx , & la seconde par Mdx , je les ajoute ensemble, & j'en prens l'intégrale, en faisant évanouïr par des intégrations par parties les différences de ζ qui naissent de la variabilité de x ;

$$\begin{aligned} \text{j'ai} \quad & \int (N \frac{d\zeta}{dt} + M \frac{du}{dt}) dx = \\ & \int (c \frac{d^2 M}{dx^2} \zeta + [N - b \frac{dM}{dx}] u) dx + \int My dx \\ & + bMu + cM \frac{d\zeta}{dx} - c \frac{dM}{dx} \zeta. \end{aligned}$$

Négligeant ces derniers termes algébriques qui disparaissent d'eux mêmes, dans la supposition que M soit $= 0$ au premier, & au dernier point de l'intégrale, & comparant terme à terme, on aura $kN = c \frac{d^2 M}{dx^2}$; & $kM = N - b \frac{dM}{dx}$

d'où l'on tire $k^2 M + bk \frac{dM}{dx} - c \frac{d^2 M}{dx^2} = 0$, & $M =$

$Ae^{mkx} + Be^{nkx}$, m & n étant les racines de l'équation $1 + by - cy^2 = 0$. Or M devant être $= 0$, lorsque $x = 0$, & $x = a$, on aura $B = -A$; & $e^{mka} - e^{nka} = 0$; ce qui fournira une infinité de valeurs de k ; on aura donc $M = e^{mkx} - e^{nkx}$; & par conséquent $N = ck(m^2 e^{mkx} - n^2 e^{nkx})$. Soit maintenant $\int (N\zeta + Mu) dx = s$,

notre

notre equation deviendra $\frac{ds}{dt} = ks + fMdyx$; d'où l'on tire en intégrant & conservant les noms, que nous avons employé dans tout le cours des Recherches précédentes, $f(N\zeta + Mu)dx = e^{kt} f(NZ + MV)dx + e^{kt} \int e^{-kt} dt fMydx$. Or la quantité N étant multipliée par un coëficient k , pour le faire disparoître on changera les intégrales $fN\zeta dx$, & $fNZ dx$ en $-\int(\frac{d\zeta}{dx})dx fN dx$ & $-\int(\frac{dZ}{dx})dx fN dx$, en négligeant les autres termes qui deviennent nuls, à cause que ζ & Z disparoissent quand $x = 0$, & $x = a$; substituant donc les valeurs de M , & de $fN dx$, on aura

$$f(u - cm \frac{d\zeta}{dx}) e^{mkx} dx - f(u - cn \frac{d\zeta}{dx}) e^{nkx} dx = \\ f(V - cm \frac{dZ}{dx}) e^{(m+x)k} dx - f(V - cn \frac{dZ}{dx}) e^{(n+x)k} dx \\ + e^{kt} \int e^{-kt} dt f e^{mkx} y dx - e^{kt} \int e^{-kt} dt f e^{nkx} y dx.$$

Soit P la fonction de p & de t qui vient de la substitution de p au lieu de $mx - t$ dans y , & Q la fonction de q & de t qui vient de la substitution de q à la place de $nx - t$ dans la même quantité y ; les deux derniers termes de la formule précédente se changeront, selon ce qui a été enseigné plus haut, en ceux-ci

$$f(fP dt) e^{mkx} dx - f(fQ dt) e^{nkx} dx.$$

Maintenant, puisque m est supposé différent de n , il est clair, que les quantités exponentielles e^{mkx} , e^{nkx} , & $e^{(m+x)k}$, $e^{(n+x)k}$ ne sauroient jamais devenir égales; donc il faudra nécessairement décomposer l'équation en deux, afin d'en chasser la quantité k ; par ce moïen on trouvera, en retenant les expressions employées dans le Problème I.

$$u - cm \frac{d\zeta}{dx} = (V - cm \frac{dZ}{dx}) (x - \frac{t}{m}) + \int P dt$$

$$u - cn \frac{d\zeta}{dx} = (V - cn \frac{dZ}{dx}) (x - \frac{t}{n}) + \int Q dt.$$

Si il arrivoit que n fût $= m$, alors, la première de ces équations demeurant la même, on ne feroit qu'augmenter n d'une quantité infiniment petite α ; c'est-à-dire on supposeroit $n = m + \alpha$; & ôtant la première équation de la seconde, il viendrait après avoir divisé par α

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{d \cdot (V - cm \frac{dZ}{dx})}{dx} \times \frac{t}{cm^2} \right) (x - \frac{t}{m}) + \int \left(\frac{dP}{dp} \right) \times \left(\frac{p + t}{cm^2} \right) dt.$$

Si n étoit infini, ce qui arrivera lorsque $c = 0$, alors on auroit aussi $cn = 0$, & la seconde équation deviendrait $u = (V)^{(x)} + \int Q dt$.

Si on veut maintenant comparer les résultats de cette solution avec ceux de M. D'Alembert, on prendra pour $(V - cm \frac{dZ}{dx}) (x - \frac{t}{m})$, & $(V - cn \frac{dZ}{dx}) (x - \frac{t}{n})$

des fonctions indéterminées de $x - \frac{t}{m}$, & de $x - \frac{t}{n}$, & faisant les substitutions & les réductions nécessaires, on trouvera pour α & β des formules analogues à celles que cet Auteur a donné; quoique j'aie fait tous les calculs que cette comparaison demande, je ne les inférerai point ici pour ne pas passer les bornes que je me suis prescrites dans cette Dissertation.

P R O B L E M E V.

Construire l'équation $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c(\frac{d^2z}{dx^2}) + c(\frac{d \cdot \frac{z}{dx}}{dx}) + y$.

41. En suivant notre méthode, on parviendra aux mêmes équations (A) & (B) du Prob. précéd., avec cette
seule

seule différence, que la quantité M sera maintenant égale à $\sin. x \sqrt{-k} - x \sqrt{-k} \cos. x \sqrt{-k}$ comme dans le Prob. II.; ce qui rendra l'expression $\int My dx$ composée des deux termes $\int \sin. x \sqrt{-k} y dx - \sqrt{-k} \int \cos. x \sqrt{-k} y x dx$;

on aura donc dans l'équation (A) $\frac{1}{2\sqrt{ck}} \int My dx =$

$$\frac{1}{2\sqrt{ck}} \int \sin. x \sqrt{-k} y dx + \frac{1}{2\sqrt{ck} \sqrt{-1}} \int \cos. x \sqrt{-k} y x dx =$$

(en réduisant le premier terme, comme on a fait dans le Prob. préc.) $\frac{1}{2\sqrt{ck} \sqrt{-1}} \int \cos. x \sqrt{-k} (fy dx + xy) dx$; où il faudra pourtant observer que l'intégrale $\int y dx$ soit prise de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $x = a$,

afin que le terme $\frac{\sin. x \sqrt{-k} \int y dx}{\sqrt{ck}}$ que nous négligeons

s'évanouisse de même. Supposant donc maintenant $\int y dx + xy = Y$, & faisant les autres observations, & réductions suivant les principes établis dans les Prob. II. & IV.,

on trouvera que la valeur de ζ favorir de $\zeta + \frac{d \cdot \zeta x}{dx}$, de

l'Art. 20., devra être ici augmentée de la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}$ ($\int Q dt - \int P dt$).

On tirera de même de l'équation (B) la valeur de u' ; mais on pourra s'épargner la peine de ce calcul, en cherchant d'après la valeur trouvée de ζ' celle de $\frac{d \zeta'}{dt} = u'$.

Usage des Problèmes précédens.

42. Examinons d'abord le cas d'une ligne physique d'air; il est facile de trouver que l'équation rigoureuse du mouvement des particules sera $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -c \frac{d \cdot \frac{dx}{dx + d\zeta}}{dx^2} \times (dx + d\zeta)$

P.

$= c$

$= c \frac{d^2 \zeta}{dx(dx + d\zeta)}$; car la portion de fluide qui dans l'état d'équilibre occupe l'espace dx , après le tems t remplira l'espace $dx + d\zeta$, & son élasticité sera par conséquent diminuée dans le rapport $\frac{dx}{dx + d\zeta}$; donc la différence d'élasticité des deux particules adjacentes, s'exprimera par $d \cdot \frac{d^2 \zeta}{dx(dx + d\zeta)} \times (dx + d\zeta)$; donc divisant par la masse dx de la particule intermédiaire, on aura la force qui tend la mouvoir, donc &c.

Je réduit la fraction $\frac{1}{dx + d\zeta}$ en suite par une division infinie; il me vient $\frac{1}{dx} - \frac{d\zeta}{dx^2} + \frac{d\zeta^2}{dx^3} - \&c.$; j'aurai donc en substituant $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \frac{d^2 \zeta}{dx^2} - c \frac{d\zeta d^2 \zeta}{dx^3} + c \frac{d\zeta^2 d^2 \zeta}{dx^4} - \&c.$ Or si on suppose $d\zeta$ infiniment petite par rapport à dx , il est clair que le second membre de cette équation se réduit au seul terme $c \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$, & qu'ainsi l'équation $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$ donnera une valeur de ζ qui pourra être regardée comme exacte; c'est le cas que nous avons déjà traité. Mais si on suppose seulement ζ fort petite, & cependant finie l'équation $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$ ne donnera plus qu'une valeur approchée de ζ ; on substituera donc cette valeur dans les termes $- c \frac{d\zeta d^2 \zeta}{dx^3} + c \frac{d\zeta^2 d^2 \zeta}{dx^4} - \&c.$ qu'on avoit négligés, & intégrant l'équation par la méthode du Prob. IV., on aura une valeur de ζ plus exacte; on substituera de nouveau la valeur de ζ ainsi corrigée, & l'on en tirera une autre encore plus exacte que la précédente; en opérant ainsi de suite, on approchera toujours de plus en plus de la vraie valeur de ζ .

Or

Or si, pour faciliter le calcul, on introduit les fonctions indéterminées dans notre solution du Problème I., on a pour la première valeur de ζ , $\zeta = \phi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})$; maintenant il faut supposer $y = -c \frac{d\zeta}{dx} - c \frac{d^2\zeta}{dx^2} + c \frac{d^3\zeta}{dx^3} - \&c.$ ce qui donne $\int y dx = Y = -c \frac{d\zeta}{2dx} + c \frac{d^2\zeta}{3dx^2} - \&c. = -\frac{1}{2}c\phi'(x + t\sqrt{c}) - \frac{1}{2}c\psi'(x - t\sqrt{c}) - c\phi'(x + t\sqrt{c}) \times \psi'(x - t\sqrt{c})$, en négligeant les termes suivans qui doivent être regardés comme infiniment petits d'un ordre plus élevé; on aura donc

$$P = -\frac{1}{2}c\phi'^2(p + 2t\sqrt{c}) - c\phi'(p + 2t\sqrt{c}) \times \psi'p \\ - \frac{1}{2}c\psi'^2p \quad \&c$$

$$Q = -\frac{1}{2}c\phi'^2q - c\phi'q \times \psi'(q - 2t\sqrt{c}) \\ - \frac{1}{2}c\psi'^2(q - 2t\sqrt{c}), \quad \&c \text{ par conséquent}$$

$$\int P dt = -\frac{1}{2}c \int \phi'^2(p + 2t\sqrt{c}) dt - \frac{\sqrt{c}}{2} \phi(p + 2t\sqrt{c}) \\ \times \psi'p - \frac{1}{2}ct\psi'^2p$$

$$\int Q dt = -\frac{1}{2}ct\phi'^2q + \frac{\sqrt{c}}{2} \phi'q \times \psi(q - 2t\sqrt{c}) \\ - \frac{1}{2}c \int \psi'^2(q - 2t\sqrt{c}) dt.$$

Que (ϕ) dénote la valeur de l'intégrale $\int \phi'^2(p + 2t\sqrt{c}) dt\sqrt{c}$, & (ψ) celle de l'intégrale $\int \psi'^2(q - 2t\sqrt{c}) dt\sqrt{c}$, on trouvera après avoir restitué au lieu de p & de q leurs valeurs, $\frac{\int Q dt - \int P dt}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4}t\sqrt{c} [\psi^2(x - t\sqrt{c})$

$-\phi'^2(x + t\sqrt{c})] + \frac{1}{4} \psi(x - t\sqrt{c}) \times \phi'(x + t\sqrt{c}) +$
 $\psi'(x - t\sqrt{c}) \times \phi(x + t\sqrt{c}) - \frac{1}{4}(\psi) + \frac{1}{4}(\phi)$ quanti-
 té qui devra être ajoutée à la première valeur de ζ .

Pour voir maintenant combien cette correction peut in-
 fluer sur la vitesse de la propagation des ébranlemens, on
 observera que les fonctions ϕx & ψx doivent être telles
 qu'elles soient toujours $= 0$, lorsque les abscisses x ne sont
 pas très-petites (*Voies Art. 4.*); d'où il suit que pour la
 propagation du côté des abscisses positives x , il ne faudra
 retenir que les fonctions de $x - t\sqrt{c}$, ou de $q - 2t\sqrt{c}$;

on aura donc $\zeta = \psi(x - t\sqrt{c}) + \frac{1}{4} t\sqrt{c} \psi'^2(x - t\sqrt{c})$

$-\frac{1}{4}(\psi)$. Or, en supposant la valeur de $\psi(x - t\sqrt{c})$
 très-petite, $\psi'^2(x - t\sqrt{c})$ sera infiniment petite du second
 ordre; & (ψ) sera aussi du même ordre à très-peu-près,
 à cause que la fonction $\psi(x - t\sqrt{c})$ n'a de valeur que
 dans une fort petite étendue de l'axe; mais $t\sqrt{c}$, devant
 être à peu-près $= x$, recevra une valeur considérable; donc
 le terme (ψ) s'évanouira auprès du terme $t\sqrt{c} \psi'^2(x - t\sqrt{c})$;
 & la valeur de ζ se réduira à $\psi(x - t\sqrt{c}) + \frac{1}{4} t\sqrt{c}$
 $\psi'^2(x - t\sqrt{c})$.

Le premier terme $\psi(x - t\sqrt{c})$ donne, comme il est
 facile de voir, & comme on l'a démontré ailleurs, la vi-
 tesse de la propagation $= \sqrt{c}$; & il est clair que cette
 vitesse ne peut varier à moins que la quantité \sqrt{c} ne varie de
 même; supposons donc $\sqrt{c} + \alpha$ au lieu de \sqrt{c} , α étant
 une quantité assez petite; on aura pour le premier terme
 de la valeur de ζ , $\psi(x - t\sqrt{c} - t\alpha)$, qui se réduit
 à $\psi(x - t\sqrt{c}) - t\alpha \psi'(x - t\sqrt{c})$; comparant cette
 expression avec celle qu'on a trouvé par notre approxima-
 tion

tion, on a $\alpha = -\frac{\sqrt{c}}{4} \psi'(x - t\sqrt{c})$; mais $-\sqrt{c} \psi'(x - t\sqrt{c})$
 $= \frac{d \cdot \psi(x - t\sqrt{c})}{dt} =$ à la vitesse propre de la particule
 qui répond à l'abscisse x ; donc si on nomme u cette vi-
 tesse on aura $\alpha = \frac{u}{4}$, & par conséquent la vitesse de la

propagation deviendra $= \sqrt{c} + \frac{u}{4}$ à très-peu-près. Cette
 conclusion paroît donc en quelque sorte favorable à l'hipo-
 thèse des ébranlemens finis; mais elles perdra toute sa
 force pour peu qu'on s'arrête à l'examiner.

Par ce qu'on vient de trouver, on a $\zeta = \psi(x - t\sqrt{c}$
 $- \frac{t u}{4})$; soit a la longueur de l'onde aérienne excitée immé-
 diatement par le corps sonore, il est clair que ζ ne com-
 mencera à avoir une valeur, que quand $x - t\sqrt{c} - \frac{t u}{4}$ fera
 $= a$; d'où il s'ensuit qu'au bout du tems t le Son fera
 parvenu jusqu'à la particule qui répond à l'abscisse $x = a$
 $+ t(\sqrt{c} + \frac{u}{4})$, u étant la vitesse que cette particule reçoit
 en même tems. Or en premier lieu cette vitesse ne peut
 être qu'infiniment petite, puisque il seroit absurde qu'une
 particule d'un fluide élastique reçût tout d'un coup une vi-
 tesse finie par l'action des autres parties adjacentes; en
 second lieu il est visible que la formule trouvée détruiroit
 l'uniformité de la vitesse du Son, & la feroit dépendre
 en quelque sorte de la nature des ébranlemens primitifs;
 ce qui est contraire à toutes les expériences.

Il seroit, après cela, inutile de pousser plus loin l'appro-
 ximation de la valeur de ζ ; car, outre qu'il n'en résulteroit
 que des termes moindres que celui que nous venons d'exa-
 miner, l'expression de la vitesse du Son deviendroit toujours
 plus

plus compliquée, & par conséquent moins conforme à la véritable.

43. Passons maintenant à l'hypothèse des ondulations sphériques; & cherchons par le moyen du Prob. V. si le changement, que la supposition des ébranlemens finis cause dans leur propagation, peut s'accorder avec les phénomènes.

Par les principes posés dans l'Art. 30., on trouvera pour l'équation rigoureuse du mouvement du fluide

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -c \frac{d \cdot \frac{x^2 dx}{(x + \zeta)^2 (dx + d\zeta)}}{dx} \times \frac{(x + \zeta)^2 (dx + d\zeta)}{x^2 dx}$$

$$= \frac{d^2 \zeta}{dx (dx + d\zeta)} + \frac{2 d\zeta}{dx (x + \zeta)} - \frac{2 \zeta}{x (x + \zeta)},$$

d'où l'on tire par la voie des séries

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 \zeta}{dx^2} + \frac{2 d \cdot \frac{\zeta}{x}}{dx} \right) - c \left(\frac{d\zeta d^2 \zeta}{dx^2} + 2 \frac{\zeta}{x} \times \frac{d \cdot \frac{\zeta}{x}}{dx} \right)$$

$$+ c \left(\frac{d^2 \zeta^2}{dx^2} + 2 \frac{\zeta^2}{x^2} \times \frac{d \cdot \frac{\zeta}{x}}{dx} \right) - \&c.$$

On aura donc selon le Prob. V. $y = -c \left(\frac{d\zeta d^2 \zeta}{dx^2} + 2 \frac{\zeta}{x} \times \frac{d \cdot \frac{\zeta}{x}}{dx} \right)$ en négligeant les autres termes qui renferment plus de deux dimensions de ζ ; donc $\int y dx = -\frac{c}{2} \frac{d\zeta^2}{dx^2} - c \frac{\zeta^2}{x^2}$; & $\int y dx + xy = Y = \frac{d \cdot x \int y dx}{dx} = -\frac{c}{2} \frac{d \cdot x d\zeta^2}{dx^2} - c \frac{d \cdot \zeta^2}{dx^2}$. Maintenant il faut substituer

au lieu de ζ , sa valeur tirée des formules du Prob. II.; pour abrégér ces substitutions je remarque d'abord, comme il est évident, qu'il ne faudra employer que les seules fonctions de $x - t\sqrt{c}$; d'où il suit que si on pose

$$\zeta + \frac{d \cdot \zeta x}{dx} = \varphi(x - t\sqrt{c}), \text{ on aura}$$

$\zeta =$

$$\zeta = \frac{\phi(x - t\sqrt{c})}{x} - \frac{\phi(x - t\sqrt{c})}{x^2};$$

Je remarque ensuite que, lorsque x a une valeur considérable, on peut négliger, auprès des termes qui contiennent x seul au dénominateur, tous ceux qui sont divisés par des puissances d' x plus hautes que l'unité; par ce moyen on aura simplement $\zeta = \frac{\phi(x - t\sqrt{c})}{x}$, &

$$Y = -c \frac{\phi(x - t\sqrt{c}) \times \phi'(x - t\sqrt{c})}{x}, \text{ donc}$$

$$P = -\frac{c\phi p \times \phi' p}{p + t\sqrt{c}}; \int P dt = -\sqrt{c} l(p + t\sqrt{c}) \times \phi p \times \phi' p$$

$$= -\sqrt{c} l x \times \phi(x - t\sqrt{c}) \times \phi'(x - t\sqrt{c});$$

$$Q = -\frac{c\phi(q - 2t\sqrt{c}) \times \phi'(q - 2t\sqrt{c})}{q - t\sqrt{c}};$$

d'où l'on tirera par les quadratures la valeur de $\int Q dt$; mais il est facile de voir que cette valeur sera infiniment petite par rapport à celle de $\int P dt$, à cause que la fonction ϕ , & ses différences sont toujours infiniment petites, & qu'elles n'ont outre cela des valeurs réelles, que dans une très-petite portion de l'axe; ne prenant donc que la formule

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} \int P dt, \text{ \& l'ôtant de } \zeta + \frac{d \cdot x \zeta}{dx}, \text{ savoir de } \phi(x - t\sqrt{c})$$

on aura pour l'augmentation de cette fonction $\frac{1}{2} l x \times \phi(x - t\sqrt{c}) \times \phi'(x - t\sqrt{c})$; or si on suppose comme on a fait plus haut, que la quantité \sqrt{c} croisse d'une très-petite quantité α , on trouvera ici $\alpha = -\frac{l x \times \phi(x - t\sqrt{c})}{2t}$,

ce qui changera la fonction $\phi(x - t\sqrt{c})$ en $\phi[x - t\sqrt{c} + \frac{1}{2} l x \times \phi(x - t\sqrt{c})]$. Prenant a pour le rayon de la première onde aérienne excitée par le corps sonore, les loix de la propagation du Son seront donc contenues dans la for-

$$\text{mule } x - t\sqrt{c} + \frac{1}{2} lx \times \phi(x - t\sqrt{c}) = a.$$

Je crois superflu de m'arrêter ici à examiner les conséquences de cette formule, car il est facile de voir qu'elles ne seront pas plus favorables à la supposition dont il s'agit, que ne l'ont été celles qu'on a trouvé dans l'Article précédent.

C O R O L L A I R E.

44. Après ce qu'on vient de démontrer je crois qu'on peut regarder comme une vérité assés constante, que l'hypothèse des ébranlemens infiniment petits, est la seule récévable dans la théorie de la propagation du Son, comme nous avons promis de le prouver dans l'Art. 10. Je vais donc rentrer dans cette hypothèse, & chercher à déterminer les lois de la propagation du Son, d'une manière plus générale & plus exacte, que je ne l'ai fait.

§. II.

Essai d'une construction générale des trois équations de l'Art. 10.

45. JE multiplie la première de ces équations par L , la seconde par M , & la troisième par N (L , M , N étant supposées des fonctions quelconques de X , Y , Z); j'en fais une somme, que je multiplie encore par $dXdYdZ$, & dont je prens l'intégrale, en faisant varier l'une après l'autre les trois changeantes X , Y , & Z . De cette manière j'aurai l'équation

$$\int \left(\frac{d^2x}{dt^2} L + \frac{d^2y}{dt^2} M + \frac{d^2z}{dt^2} N \right) dXdYdZ =$$

$$c \int \left(\frac{d^2x}{dX^2} L + \frac{d^2y}{dXdY} L + \frac{d^2z}{dXdZ} L + \frac{d^2y}{dY^2} M + \frac{d^2x}{dYdX} M \right. \\ \left. + \frac{d^2z}{dYdZ} M + \frac{d^2z}{dZ^2} N + \frac{d^2x}{dZdX} N + \frac{d^2y}{dZdY} N \right) dXdYdZ$$

qui renferme le mouvement de chaque point mobile du système donné. On remarquera que c est mise ici pour $\frac{2 E h}{T^2 D}$, ainsi que nous l'avons pratiqué par tout ailleurs.

En suivant notre méthode on prendra autant d'intégrales par parties qu'il en faudra pour faire disparaître toutes les différences de x, y, z suivant X, Y, Z ; on aura donc

$$\int \frac{d^2x}{dX^2} L dXdYdZ = \int x \frac{d^2L}{dX^2} dXdYdZ$$

$$+ \int \left(\frac{dx}{dX} L - x \frac{dL}{dX} \right) dYdZ$$

$$\int \frac{d^2y}{dXdY} L dXdYdZ = \int y \frac{d^2L}{dXdY} dXdYdZ$$

$$+ \int \frac{dy}{dY} L dYdZ - \int y \frac{dL}{dY} dXdZ$$

$$\int \frac{d^2z}{dXdZ} L dXdYdZ = \int z \frac{d^2L}{dXdZ} dXdYdZ$$

$$+ \int \frac{dz}{dZ} L dYdZ - \int z \frac{dL}{dZ} dXdY$$

$$\int \frac{d^2y}{dY^2} M dXdYdZ = \int y \frac{d^2M}{dY^2} dXdYdZ$$

$$+ \int \left(\frac{dy}{dY} M - y \frac{dM}{dY} \right) dXdZ$$

$$\int \frac{d^2x}{dYdX} M dXdYdZ = \int x \frac{d^2M}{dYdX} dXdYdZ$$

$$+ \int \frac{dx}{dX} M dXdZ - \int x \frac{dM}{dX} dYdZ$$

$$\int \frac{d^2z}{dYdZ} M dXdYdZ = \int z \frac{d^2M}{dYdZ} dXdYdZ$$

Q

+ $\int (dz$

$$+ \int \frac{dz}{dZ} M dX dZ - \int \zeta \frac{dM}{dZ} dX dY$$

$$\int \frac{d^2 \zeta}{dZ^2} N dX dY dZ = \int \zeta \frac{d^2 N}{dZ^2} dX dY dZ$$

$$+ \int \left(\frac{d\zeta}{dZ} N - \zeta \frac{dN}{dZ} \right) dX dY$$

$$\int \frac{d^2 x}{dZ dX} N dX dY dZ = \int x \frac{d^2 N}{dZ dX} dX dY dZ$$

$$+ \int \frac{dx}{dX} N dX dY - \int x \frac{dN}{dZ} dY dZ$$

$$\int \frac{d^2 y}{dZ dY} N dX dY dZ = \int y \frac{d^2 N}{dZ dY} dX dY dZ$$

$$+ \int \frac{dy}{dY} N dX dY - \int y \frac{dN}{dZ} dX dZ.$$

Dans ces transformées il y a, comme on le voit, deux fortes d'expressions intégrales; les unes plus générales renferment trois intégrations, suivant la variabilité des trois coordonnées X , Y , Z , & expriment par conséquent la somme d'autant de valeurs particulières, qu'il y a de particules dans la masse totale du fluide; les autres, au contraire, moins générales, ne renferment chacune que deux intégrations suivant la variabilité de deux des coordonnées X , Y , & Z ; & ne dénotent, en conséquence, que la somme d'autant de valeurs particulières qu'il y a de particules dans une seule tranche du fluide. Celles-ci pourront donc être regardées comme des constantes à l'égard de la troisième variable manquante; & l'on sera toujours le maître de les faire évanouir, en donnant certaines limitations aux valeurs des quantités L , M , & N , selon la figure de l'espace, dans lequel on suppose que la masse de l'air est renfermée.

Ainsi, par exemple, si cette figure est celle d'un parallélépipède quelconque, on voit aisément que x est nul dans les deux plans opposés qui sont perpendiculaires à la

ligne

ligne X ; d'où il suit que les intégrales, qui contiennent x , seront aussi nuls dans toute leur étendue, à cause que ces intégrales ne varient que suivant Y & Z ; par une raison semblable on verra, que les intégrales contenant y & z s'évanouiront aussi d'elles mêmes; donc pour achever de faire évanouir les autres intégrales, on supposera L tel qu'il devienne $= 0$, lorsque $X = 0$, & lorsque $X = a$ quels que soient Y & Z ; ensuite M devra devenir $= 0$, lorsque $Y = 0$, & $Y = b$, X & Z étant quelconques; enfin N devra disparaître de même, en posant $Z = 0$, & $Z = c$, pour toute l'étendue des X & Y ; a , b , c étant les trois dimensions du parallélépipède donné.

Si la masse du fluide avoit une autre figure quelconque, on trouveroit aussi, en aiant égard à cette figure, les conditions qui pourront faire disparaître toutes les expressions intégrales à deux seules changeantes; il est vrai, que le plus souvent ces opérations ne pourront s'exécuter, faute de connoître les valeurs exactes & générales des quantités L , M , & N ; mais il suffira de les imaginer exécutées pour démontrer que l'on peut toujours omettre les expressions intégrales dont nous parlons. Ainsi l'on aura simplement après les substitutions

$$\int \left(\frac{d^2 x}{dt^2} L + \frac{d^2 y}{dt^2} M + \frac{d^2 z}{dt^2} N \right) dXdYdZ =$$

$$c \int \left[x \left(\frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{d^2 M}{dXdY} + \frac{d^2 N}{dXdZ} \right) + y \left(\frac{d^2 M}{dY^2} + \frac{d^2 L}{dYdX} \right) \right. \\ \left. + \frac{d^2 N}{dYdZ} \right] + z \left(\frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZdX} + \frac{d^2 M}{dZdY} \right) dXdYdZ.$$

On fera maintenant

$$\frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{d^2 M}{dXdY} + \frac{d^2 N}{dXdZ} = kL \dots \dots (A)$$

$$\frac{d^2 M}{dY^2} + \frac{d^2 L}{dYdX} + \frac{d^2 N}{dYdZ} = kM \dots \dots (B)$$

$$\frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZ dX} + \frac{d^2 M}{dZ dY} = kN \dots \dots \dots (C)$$

Equations, par lesquelles on déterminera les valeurs des quantités L , M , & N . Il faudra de plus que ces valeurs satisfassent aux conditions énoncées ci-dessus; & c'est par là qu'on déterminera routes les constantes que l'intégration aura entraîné, comme aussi la constante k qui ne pourra manquer d'avoir autant de valeurs différentes qu'il y a des particules mobiles.

Cela fait, notre équation principale pourra se mettre sous la forme ordinaire $\frac{d^2 s}{dt^2} = kcs$, s étant ici $= \int (xL + yM + zN) dXdYdZ$; d'où l'on tirera comme dans le Prob. I.

$$s = S \cos. t\sqrt{-ck} + \frac{R}{\sqrt{-ck}} \sin. t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \cos. t\sqrt{-ck} - S\sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck}.$$

Or soit, $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, & $\frac{dz}{dt} = z'$; & que (x) , (y) , (z) , (x') , (y') , (z') désignent les valeurs de x , y , z , x' , y' , & z' , lorsque $t = 0$, on aura donc

$$(D) \dots \dots \dots \int [xL + yM + zN] dXdYdZ = \cos. t\sqrt{-ck} \int [(x)L + (y)M + (z)N] dXdYdZ + \frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int [(x')L + (y')M + (z')N] dXdYdZ$$

$$(E) \dots \dots \dots \int [x'L + y'M + z'N] dXdYdZ = \cos. t\sqrt{-ck} \int [(x')L + (y')M + (z')N] dXdYdZ - \sqrt{-ck} \sin. t\sqrt{-ck} \int [(x)L + (y)M + (z)N] dZdYdZ.$$

Voilà les équations, d'où l'on tireroit suivant notre méthode les valeurs exactes de x , y , & z , si l'on avoit celles de L , M , & N , & qu'on pût faire disparaître la quantité k , ainsi qu'on l'a fait dans les Prob. préc.

Mais le premier de ces objets, nous présente d'abord des difficultés insurmontables, soit qu'en effet les équations

(A),

(A), (B), (C) ne soient pas susceptibles d'intégration, soit qu'elles demandent d'autres méthodes, que celles que nous connoissons. Si on vouloit se borner à des constructions particulières, il seroit aisé d'en trouver; mais elles ne sauroient être d'aucune utilité dans la recherche des loix de la propagation du Son.

46. Il est visible, par exemple, qu'on peut supposer
 $L = A e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}}$; $M = B e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}}$;
 $N = C e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}}$; A, B, C, p, q, r étant des constantes à déterminer par la substitution & la comparaison des termes; pour cela on trouvera les trois équations

$$A = c (Ap^2 + Bpq + Cpr)$$

$$B = c (Bq^2 + Apq + Crq)$$

$$C = c (Cp^2 + Apr + Bqr),$$

qui donnent, en posant R pour $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $p =$

$$\frac{A}{R\sqrt{c}}, \quad q = \frac{B}{R\sqrt{c}}, \quad r = \frac{C}{R\sqrt{c}};$$

mais les valeurs de $L, M, \& N$ n'étant que particulières, on ne pourra s'en servir, suivant notre méthode, que dans l'hypothèse que les valeurs de $x, y, \& z$ soient renfermées dans certaines conditions: car il est visible, que $L, M, \& N$ étant exprimées par une même fonction de $pX + qY + rZ$, multipliée seulement par des constantes différentes, les valeurs de x, y, z devront être les mêmes pour tous les points, dont la position est renfermée dans la formule $pX + qY + rZ = \text{const}$, & de plus ces valeurs devront garder entr'elles un rapport constant. Supposé que ces conditions aient lieu, on pourra poursuivre le calcul, en substituant les valeurs trouvées de $L, M, \& N$ dans l'équation (D), & transformant ensuite le terme

$$f[A(x') + B(y') + C(z')] e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}} dX dY dZ$$

$$\text{en } -\sqrt{k} f[pA f(x') dX + qB f(y') dY + rC f(z') dZ]$$

$$e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}} dX dY dZ, \text{ \& réduisant cos. } \pm \sqrt{-ck},$$

$$\text{\& sin. } \pm \sqrt{-ck} \text{ en exponentielles imaginaires, on aura}$$

$$f[A$$

$$\int [Ax + By + Cz] e^{(pX + qY + rZ) \pm t\sqrt{c}} \sqrt{k} dXdYdZ = \\ \frac{1}{2} \int [A(x) + B(y) + C(z) - \frac{1}{\sqrt{c}} pA f(x') dX - \frac{1}{\sqrt{c}} \\ qB f(y') dY - \frac{1}{\sqrt{c}} rC f(z') dZ] e^{(pX + qY + rZ + t\sqrt{c}) \sqrt{k}} \\ dXdYdZ + \frac{1}{2} \int [A(x) + B(y) + C(z) + \frac{1}{\sqrt{c}} pA \\ f(x') dX + \frac{1}{\sqrt{c}} qB f(y') dY + \frac{1}{\sqrt{c}} rC f(z') dZ] \\ e^{(pX + qY + rZ - t\sqrt{c}) \sqrt{k}} dXdYdZ.$$

Equation, d'où l'on tirera suivant notre méthode,

$$Ax + By + Cz = \frac{1}{2} [A(x) + B(y) + C(z) \\ + \frac{1}{\sqrt{c}} pA f(x') dX + \frac{1}{\sqrt{c}} qB f(y') dY + \frac{1}{\sqrt{c}} \\ rC f(z') dZ] e^{(pX + qY + rZ + t\sqrt{c})} + \frac{1}{2} [A(x) + \\ B(y) + C(z) - \frac{1}{\sqrt{c}} pA f(x') dX - \frac{1}{\sqrt{c}} qB f(y') dY \\ - \frac{1}{\sqrt{c}} rC f(z') dZ] e^{(pX + qY + rZ - t\sqrt{c})}.$$

Les quantités mises en forme d'exposants denotent, comme dans le Problème I. les valeurs qu'il faut donner aux coordonnées; ainsi X, Y, Z étant les coordonnées qui répondent à x, y, z & $(X), (Y), (Z)$ étant supposées celles qui répondent aux expressions qui ont l'exposant $pX + qY + rZ \pm t\sqrt{c}$, les valeurs de ces dernières devront être telles, que $p(X) + q(Y) + r(Z) = pX + qY + rZ \pm t\sqrt{c}$.

Au reste, si l'on introduit dans cette solution les fonctions indéterminées, elle reviendra au même, que celle que M. Euler a donné dans son Mémoire. Car on aura $Ax + By + Cz = \phi(pX + qY + rZ + t\sqrt{c}) + \psi(pX + qY + rZ - t\sqrt{c})$; d'où l'on tirera les valeurs de y &

y & de z en faisant, selon l'hypothèse, $y = fx$, $z = hx$; substituant ensuite ces valeurs dans les équations différentielles de l'Art. 10., on trouvera $f = \frac{B}{A}$, & $h = \frac{C}{A}$, conformément aux formules de la pag. 7. ci-dessus.

Voilà le Problème résolu analytiquement pour une infinité de cas; mais il faut avouer qu'aucune de ces solutions ne sera applicable à la Théorie de la propagation du Son, dans laquelle les ébranlemens primitifs doivent être supposés quelconques. Il en sera de même de toute autre solution qui se trouvera en intégrant les équations (A), (B), (C) dans des cas particuliers. C'est pourquoi nous renoncerons pour le présent à déterminer les valeurs exactes de x , y , & z , par les voies ordinaires de notre méthode, & nous nous bornerons à les trouver, s'il est possible, par approximation, en supposant que le tems t soit fort petit; nous verrons ensuite quelles conséquences on pourra tirer d'un tel calcul pour la connoissance de loix de la propagation du Son en général.

47. Je commence par développer l'expression $\cos. t\sqrt{-k}$ en poussant la série jusqu'aux quantités infiniment petites du quatrième ordre; j'ai $\cos. t\sqrt{-ck} = 1 + \frac{1}{2} k t^2 c +$

$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} k^2 t^4 c^2$; ce qui changera le terme $\cos. t\sqrt{-ck}$ $f[(x)L + (y)M + (z)N] dXdYdZ$ de l'équation (D) en

$$f(x) \times \left[L + \frac{1}{2} t^2 c k L + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 L \right] dXdYdZ$$

$$+ f(y) \times \left[M + \frac{1}{2} t^2 c k M + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 M \right] dXdYdZ$$

$$+ f(z) \times \left[N + \frac{1}{2} t^2 c k N + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 N \right] dXdYdZ.$$

Or les équations (A), (B), (C) donnent d'abord

kL

$$kL = \frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{d^2 M}{dXdY} + \frac{d^2 N}{dXdZ}; \quad kM = \frac{d^2 M}{dY^2} + \frac{d^2 L}{dYdX} + \frac{d^2 N}{dYdZ}; \quad kN = \frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZdX} + \frac{d^2 M}{dZdY};$$

multipliant ces équations par k , & substituant de nouveau au lieu de kL , kM , kN leurs valeurs, on aura ensuite

$$k^2 L = \frac{d^4 L}{dX^4} + \frac{d^4 L}{dX^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dX^2 dZ^2} + \frac{d^4 M}{dX^3 dY} + \frac{d^4 M}{dXdY^3} + \frac{d^4 M}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4 N}{dX^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dXdZ^3} + \frac{d^4 N}{dXdZdY^2};$$

$$k^2 M = \frac{d^4 M}{dY^4} + \frac{d^4 M}{dY^2 dX^2} + \frac{d^4 M}{dY^2 dZ^2} + \frac{d^4 L}{dY^3 dX} + \frac{d^4 L}{dYdX^3} + \frac{d^4 L}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4 N}{dY^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dYdZ^3} + \frac{d^4 N}{dX^2 dYdZ};$$

$$k^2 N = \frac{d^4 N}{dZ^4} + \frac{d^4 N}{dZ^2 dX^2} + \frac{d^4 N}{dZ^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dZ^3 dX} + \frac{d^4 L}{dZdX^3} + \frac{d^4 L}{dXdY^2 dZ} + \frac{d^4 M}{dZ^3 dY} + \frac{d^4 M}{dZdY^3} + \frac{d^4 M}{dX^2 dYdZ}.$$

Par là, on pourra faire évanouïr la lettre k de l'expression précédente; car on aura

$$L + \frac{1}{2} t^2 c kL + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 L = L + \frac{1}{2} t^2 c \left(\frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{d^2 M}{dXdY} + \frac{d^2 N}{dXdZ} \right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 \left(\frac{d^4 L}{dX^4} + \frac{d^4 L}{dX^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dX^2 dZ^2} + \frac{d^4 M}{dX^3 dY} + \frac{d^4 M}{dXdY^3} + \frac{d^4 M}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4 N}{dX^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dXdZ^3} + \frac{d^4 N}{dXdZdY^2} \right) \dots \dots (F)$$

$M +$

$$\begin{aligned}
 M + \frac{1}{2} t^2 c k M + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 M &= M + \frac{1}{2} t^2 c \left(\frac{d^2 M}{dY^2} \right. \\
 + \frac{d^2 L}{dY dX} + \frac{d^2 N}{dY dZ} \Big) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 \left(\frac{d^4 M}{dY^4} + \frac{d^4 M}{dY^2 dX^2} \right. \\
 + \frac{d^4 M}{dY^2 dZ^2} + \frac{d^4 E}{dY^3 dX} + \frac{d^4 L}{dY dX^3} + \frac{d^4 L}{dX dY dZ^2} \\
 + \left. \frac{d^4 N}{dY^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dY dZ^3} + \frac{d^4 N}{dX^2 dY dZ} \right) \dots \dots \dots (G)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N + \frac{1}{2} t^2 c k N + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 N &= N + \frac{1}{2} t^2 c \left(\frac{d^2 N}{dZ^2} \right. \\
 + \frac{d^2 L}{dZ dX} + \frac{d^2 M}{dZ dY} \Big) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 \left(\frac{d^4 N}{dZ^4} + \frac{d^4 N}{dZ^2 dX^2} \right. \\
 + \frac{d^4 N}{dZ^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dX^3 dX} + \frac{d^4 L}{dZ dX^3} + \frac{d^4 L}{dX dY^2 dZ} \\
 + \left. \frac{d^4 M}{dZ^3 dY} + \frac{d^4 M}{dZ dY^3} + \frac{d^4 M}{dX^2 dY dZ} \right) \dots \dots \dots (H)
 \end{aligned}$$

Or, quelles que soient les valeurs des quantités L, M, N , il est certain qu'elles feront des fonctions de X, Y, Z , ce que nous dénoterons ainsi $L(X, Y, Z), M(X, Y, Z), N(X, Y, Z)$; de sorte, que si l'on suppose que les variables X, Y, Z deviennent $X + pt, Y + qt, Z + rt$, les valeurs correspondantes de L, M, N s'exprimeront à notre manière par $L(X + pt, Y + qt, Z + rt), M(X + pt, Y + qt, Z + rt), N(X + pt, Y + qt, Z + rt)$. Cela posé, on fait, que si L représente une fonction quelconque de la variable X , laquelle croisse d'une quantité très-petite pt , la valeur de L deviendra, en négligeant les quantités infiniment petites au dessus du quatrième ordre, $L + pt \frac{dL}{dX} + \frac{1}{2} p^2 t^2 \frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} p^3 t^3 \frac{d^3 L}{dX^3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 t^4 \frac{d^4 L}{dX^4}$; donc si on suppose que la fonction L renferme outre la variable X , les variables $Y, & Z$ qui croissent en même tems des quantités très-petites qt, rt , on trouvera par un calcul assés simple

R

L

$$\begin{aligned}
L(X+pt, Y+qt, Z+rt) &= L + t(p \frac{dL}{dX} + q \frac{dL}{dY} + r \frac{dL}{dZ}) \\
&+ \frac{1}{2} t^2 (p \frac{d^2 L}{dX^2} + 2pq \frac{d^2 L}{dXdY} + q^2 \frac{d^2 L}{dY^2} + 2pr \frac{d^2 L}{dXdZ} \\
&+ 2qr \frac{d^2 L}{dYdZ} + r^2 \frac{d^2 L}{dZ^2}) + \frac{1}{2 \cdot 3} t^3 (p^3 \frac{d^3 L}{dX^3} + 3p^2q \frac{d^3 L}{dX^2dY} \\
&+ 3pq^2 \frac{d^3 L}{dXdY^2} + q^3 \frac{d^3 L}{dY^3} + 3p^2r \frac{d^3 L}{dX^2dZ} \\
&+ 3pr^2 \frac{d^3 L}{dXdZ^2} + 3q^2r \frac{d^3 L}{dY^2dZ} + 3qr^2 \frac{d^3 L}{dYdZ^2} + \\
&6pqr \frac{d^3 L}{dXdYdZ} + r^3 \frac{d^3 L}{dZ^3}) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 (p^4 \frac{d^4 L}{dX^4} \\
&+ 4p^3q \frac{d^4 L}{dX^3dY} + 6p^2q^2 \frac{d^4 L}{dX^2dY^2} + 4pq^3 \frac{d^4 L}{dXdY^3} + \\
&q^4 \frac{d^4 L}{dY^4} + 4p^3r \frac{d^4 L}{dX^3dZ} + 6p^2r^2 \frac{d^4 L}{dX^2dZ^2} + 4pr^3 \frac{d^4 L}{dXdZ^3} \\
&+ 4q^3r \frac{d^4 L}{dY^3dZ} + 6q^2r^2 \frac{d^4 L}{dY^2dZ^2} + 4qr^3 \frac{d^4 L}{dYdZ^3} \\
&+ 12p^2qr \frac{d^4 L}{dX^2dYdZ} + 12pq^2r \frac{d^4 L}{dXdY^2dZ} \\
&+ 12pqr^2 \frac{d^4 L}{dXdYdZ^2} + r^4 \frac{d^4 L}{dZ^4}).
\end{aligned}$$

De cette formule je déduis les suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8} L(X+pt, Y+qt, Z+rt) + \frac{1}{8} L(X+pt, Y-qt, Z+rt) \\
&+ \frac{1}{8} L(X+pt, Y+qt, Z-rt) + \frac{1}{8} L(X+pt, Y-qt, Z-rt) \\
&+ \frac{1}{8} L(X-pt, Y+qt, Z+rt) + \frac{1}{8} L(X-pt, Y-qt, Z+rt) \\
&+ \frac{1}{8} L(X-pt, Y+qt, Z-rt) + \frac{1}{8} L(X-pt, Y-qt, Z-rt) \\
&= L + \frac{1}{2} t^2 (p^2 \frac{d^2 L}{dX^2} + q^2 \frac{d^2 L}{dY^2} + r^2 \frac{d^2 L}{dZ^2}) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}
\end{aligned}$$

$t^4 (p^4$

$$t^2 (p^2 \frac{d^4 L}{dX^4} + 6p^2 q^2 \frac{d^4 L}{dX^2 dY^2} + q^4 \frac{d^4 L}{dY^4} + 6p^2 r^2 \frac{d^4 L}{dX^2 dZ^2} + 6q^2 r^2 \frac{d^4 L}{dY^2 dZ^2} + r^4 \frac{d^4 L}{dZ^4});$$

$$\frac{1}{4} L(X, Y + qt, Z + rt) + \frac{1}{4} L(X, Y - qt, Z + rt) + \frac{1}{4} L(X, Y + qt, Z - rt) + \frac{1}{4} L(X, Y - qt, Z - rt)$$

$$= L + \frac{1}{2} t^2 (q^2 \frac{d^2 L}{dY^2} + r^2 \frac{d^2 L}{dZ^2}) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 (q^4 \frac{d^4 L}{dY^4} + 6q^2 r^2 \frac{d^4 L}{dY^2 dZ^2} + r^4 \frac{d^4 L}{dZ^4});$$

$$\frac{1}{8} L(X + pt, Y + qt, Z + rt) + \frac{1}{8} L(X + pt, Y + qt, Z - rt) + \frac{1}{8} L(X - pt, Y - qt, Z + rt) + \frac{1}{8} L(X - pt, Y - qt, Z - rt)$$

$$- \frac{1}{8} L(X + pt, Y - qt, Z + rt) - \frac{1}{8} L(X + pt, Y - qt, Z - rt) - \frac{1}{8} L(X - pt, Y + qt, Z + rt) - \frac{1}{8} L(X - pt, Y + qt, Z - rt)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \times 2pq \frac{d^2 L}{dXdY} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 (4p^3 q \frac{d^4 L}{dX^3 dY} + 4p^2 q^3 \frac{d^4 L}{dXdY^3} + 12pqr^2 \frac{d^4 L}{dXdYdZ^2});$$

$$\frac{1}{8} L(X + pt, Y + qt, Z + rt) + \frac{1}{8} L(X + pt, Y - qt, Z + rt) + \frac{1}{8} L(X - pt, Y + qt, Z - rt) + \frac{1}{8} L(X - pt, Y - qt, Z - rt)$$

$$- \frac{1}{8} L(X + pt, Y + qt, Z - rt) - \frac{1}{8} L(X + pt, Y - qt, Z - rt)$$

$$- \frac{1}{8} L(X - pt, Y + qt, Z + rt) - \frac{1}{8} L(X - pt, Y - qt, Z + rt)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \times 2pr \frac{d^2 L}{dXdZ} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 (4p^3 r \frac{d^4 L}{dX^3 dZ} + 4pr^3$$

$$4 p r^3 \frac{d^3 L}{dX dZ^3} + 12 p q^2 r \frac{d^3 L}{dX dY^2 dZ}.$$

On formera de pareilles formules à l'égard des expressions $M(X + p\epsilon, Y + q\epsilon, Z + r\epsilon)$, & $N(X + p\epsilon, Y + q\epsilon, Z + r\epsilon)$, & en donnant des valeurs convenables aux constantes indéterminées p, q, r on changera, par les substitutions, l'équation (F) en celle-ci

$$\begin{aligned} (L) \dots L + \frac{1}{2} \epsilon^2 c k L + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \epsilon^4 c^2 k^2 L = L(X, Y, Z) \\ - \frac{1}{4} L(X, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) - \frac{1}{4} L(X, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ - \frac{1}{4} L(X, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) - \frac{1}{4} L(X, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ + \frac{1}{8} L(X + \epsilon \sqrt{c}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8} L(X + \epsilon \sqrt{c}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ + \frac{1}{8} L(X + \epsilon \sqrt{c}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8} L(X + \epsilon \sqrt{c}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ + \frac{1}{8} L(X - \epsilon \sqrt{c}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8} L(X - \epsilon \sqrt{c}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ + \frac{1}{8} L(X - \epsilon \sqrt{c}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8} L(X - \epsilon \sqrt{c}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ + \frac{1}{8} M(X + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8} M(X + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ + \frac{1}{8} M(X - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8} M(X - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ - \frac{1}{8} M(X + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) - \frac{1}{8} M(X + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ - \frac{1}{8} M(X - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) - \frac{1}{8} M(X - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\ + \frac{1}{8} N(X + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}) + \frac{1}{8} N(X + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}) \\ + \frac{1}{8} N(X - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}) + \frac{1}{8} N(X - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}, Y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{\sigma}}, Z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{2}}) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{8} N(x+i\sqrt{\frac{c}{2}}, y+i\sqrt{\frac{c}{2}}, z-i\sqrt{\frac{c}{2}}) - \frac{1}{8} N(x+i\sqrt{\frac{c}{2}}, y-i\sqrt{\frac{c}{2}}, z-i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\ - \frac{1}{8} N(x-i\sqrt{\frac{c}{2}}, y+i\sqrt{\frac{c}{2}}, z+i\sqrt{\frac{c}{2}}) - \frac{1}{8} N(x-i\sqrt{\frac{c}{2}}, y-i\sqrt{\frac{c}{2}}, z+i\sqrt{\frac{c}{2}})$$

On trouvera de même les transformées (M) & (N) des deux autres équations (G) & (H), & l'on aura ainsi, en substituant, la transformée entière de la formule $\cos. t\sqrt{-c}k \int [(x)L + (y)M + (z)N] dXdYdZ$, qu'on substituera ensuite dans l'équation (D).

Supposons, pour un moment, que les quantités (x'), (y'), (z') soient nulles dans cette équation, la lettre k s'en ira entièrement, & ne se trouvera plus que dans les expressions des quantités L, M, & N. Or, quoique nous ne conoissions point la forme de ces expressions, on pourra cependant vérifier l'équation indépendamment de k, comme notre méthode le demande; car pour cela il ne s'agira que de comparer ensemble les quantités qui se trouveront multipliées par les fonctions L, M, N qui auront des valeurs égales.

Que (X), (Y), (Z) dénotent les coordonnées qui répondent à l'expression générale $L(X+pt, Y+qt, Z+rt)$, on aura, selon notre hypothèse, $(X) = X + pt$, $(Y) = Y + qt$, $(Z) = Z + rt$; X, Y, Z étant les coordonnées, qui répondent à l'expression L simplement, & aux quantités x, y, z, (x), (y), (z). Supposons donc que les valeurs de (X), (Y), (Z) soient diminuées des quantités pt, qt, rt, (ce qui est permis, puisque ces quantités sont constantes à l'égard des intégrations indiquées dans l'équation) elles deviendront X, Y, Z; mais en même temps les coordonnées correspondantes à (x), (y), (z), & qui étoient auparavant X, Y, Z, deviendront $X - pt$, $Y - qt$, $Z - rt$. De cette manière toutes les quantités exprimées généralement par $L(X+pt, Y+qt, Z+rt)$, $M(X+pt, Y+qt, Z+rt)$, $N(X+pt, Y+qt, Z+rt)$, redeviendront

dront $L(x, y, z)$, $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, ou simplement L , M , N ; mais à leur tour les quantités (x) , (y) , (z) , qui les multiplient, se changeront en $(x)^{(x-px, y-qt, z-rt)}$, $(y)^{(x-px, y-qt, z-rt)}$, $(z)^{(x-px, y-qt, z-rt)}$.

Après ces transformations on joindra ensemble les termes de l'équation qui se trouvent multipliés par L , M , N , & on décomposera ensuite cette équation en trois portions, dont chacune devra se vérifier séparément, & indépendamment des valeurs de L , M , & N . On aura donc par là (P) $x = (x)^{(x, y, z)}$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4}(x)(x, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) - \frac{1}{4}(x)(x, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & -\frac{1}{4}(x)(x, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) - \frac{1}{4}(x)(x, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & +\frac{1}{8}(x)(x - \epsilon\sqrt{c}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8}(x)(x - \epsilon\sqrt{c}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & +\frac{1}{8}(x)(x - \epsilon\sqrt{c}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8}(x)(x - \epsilon\sqrt{c}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & +\frac{1}{8}(x)(x + \epsilon\sqrt{c}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8}(x)(x + \epsilon\sqrt{c}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & +\frac{1}{8}(x)(x + \epsilon\sqrt{c}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8}(x)(x + \epsilon\sqrt{c}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & +\frac{1}{8}(y)(x - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8}(y)(x - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & +\frac{1}{8}(y)(x + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8}(y)(x + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & -\frac{1}{8}(y)(x - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) - \frac{1}{8}(y)(x - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & -\frac{1}{8}(y)(x + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) - \frac{1}{8}(y)(x + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & +\frac{1}{8}(z)(x - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8}(z)(x - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) \\
 & +\frac{1}{8}(z)(x + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y - \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}) + \frac{1}{8}(z)(x + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, y + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}}, z + \epsilon\sqrt{\frac{c}{\sigma}})
 \end{aligned}$$

+ $\frac{1}{\sigma}$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{8} (\zeta) (X - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) - \frac{1}{8} (\zeta) (X - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
 & - \frac{1}{8} (\zeta) (X + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) - \frac{1}{8} (\zeta) (X + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}})
 \end{aligned}$$

On aura de même, pour les valeurs de y & de ζ , deux autres formules que je nommerai (Q) & (R), & que je m'abstiens de rapporter, puisque on peut les déduire de la précédente en changeant simplement, x , (x), X en y , (y), Y pour la formule (Q), & en ζ , (ζ), Z pour la formule (R), & réciproquement.

Ce sont là les valeurs de x , y , ζ dans l'hypothèse que (x'), (y'), & (ζ') soient nulles. Supposons maintenant que ces quantités aient une valeur, mais qu'en même tems les (x), (y), & (ζ) soient nulles; il est clair que dans l'équation (D) on aura, à la place du terme $\cos. t\sqrt{-ck}$ $\int [(x)L + (y)M + (\zeta)N] dXdYdZ$, l'autre terme $\frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int [(x')L + (y')M + (\zeta')N] dXdYdZ$;

Or si l'on fait attention que $\sin. \frac{\sin. t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} = \int \cos. t\sqrt{-ck} dt$, il ne sera pas difficile d'appercevoir que les expressions de L , M , & N qui se trouveront en faisant disparaître la lettre k ne seront que les intégrales de celles qu'on a trouvé plus haut, prises en regardant t seul comme variable. Ainsi un terme quelconque de la transformée sera représenté par $\int [(x') \int L(X + pt, Y + qt, Z + rt) dt] dXdYdZ$; or il est visible que l'intégration suivant t , dans l'expression $\int L(X + pt, Y + qt, Z + rt) dt$, se réduit à trois intégrations, suivant X , Y , Z ; d'où il s'ensuit que l'intégrale de $[(x') \int L(X + pt, Y + qt, Z + rt) dt] dXdYdZ$ pourra se transformer, par des intégrations par parties, en celle-ci $-\int [L(X + pt, Y + qt, Z + rt) \int (x') dt] dXdYdZ$, qui pourra encore se mettre sous cette autre forme $\int [L(X, Y, Z) \int (x') (X - pt, Y - qt, Z - rt) dt] dXdYdZ$,

où

où l'intégrale de (x') ($X - pt, Y - qt, Z - rt$) devra être prise en faisant varier t dans les valeurs $X - pt, Y - qt, Z - rt$ des coordonnées de (x') .

Faisant des observations & des réductions semblables sur tous les autres termes, & comparant ensuite les quantités $L, M, & N$ entr'elles, on trouvera pour x, y, z des formules qui ne différeront de celles qu'on a trouvé ci-dessus, qu'en ce qu'à la place des quantités $(x), (y), (z)$ il y aura les quantités intégrales $\int (x') dt, \int (y') dt, \int (z') dt$.

Il est maintenant facile de voir, en examinant l'équation (D) , que les deux solutions particulières, qui viennent d'être trouvées, renferment la solution générale, & qu'il ne faudra qu'ajouter ensemble les expressions trouvées de x, y, z dans les cas, où $(x'), (y'), (z')$, ou $(x), (y), (z)$ sont nulles, pour avoir les expressions complètes pour le cas où ces quantités sont toutes réelles.

De plus, comme l'équation (E) n'est que la différentielle de l'équation (D) prise en variant t seul, on aura tout d'un coup les valeurs de vitesses, en différentiant les formules qu'on vient de trouver pour les valeurs des espaces x, y, z ; il viendra donc

$$\begin{aligned}
 (P') \quad & x' = (x')(x, y, z) \\
 & - \frac{1}{4} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (x, y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}, z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}) \\
 & - \frac{1}{4} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (x, y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}, z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}) \\
 & - \frac{1}{4} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (x, y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}, z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}) \\
 & - \frac{1}{4} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (x, y + \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}, z + \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}) \\
 & + \frac{1}{8} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (x - \epsilon \sqrt{c}, y - \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}}, z - \epsilon \sqrt{\frac{c}{g}})
 \end{aligned}$$

+ $\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (X - i\sqrt{c}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (X - i\sqrt{c}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (X - i\sqrt{c}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (X + i\sqrt{c}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (X + i\sqrt{c}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (X + i\sqrt{c}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] (X + i\sqrt{c}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(y') + \frac{d \cdot (y)}{dt} \right] (X - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(y') + \frac{d \cdot (y)}{dt} \right] (X - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(y') + \frac{d \cdot (y)}{dt} \right] (X + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(y') + \frac{d \cdot (y)}{dt} \right] (X + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& - \frac{1}{8} \left[(y') + \frac{d \cdot (y)}{dt} \right] (X - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& - \frac{1}{8} \left[(y') + \frac{d \cdot (y)}{dt} \right] (X - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& - \frac{1}{8} \left[(y') + \frac{d \cdot (y)}{dt} \right] (X + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& - \frac{1}{8} \left[(y') + \frac{d \cdot (y)}{dt} \right] (X + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(z') + \frac{d \cdot (z)}{dt} \right] (X - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(z') + \frac{d \cdot (z)}{dt} \right] (X - i\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + i\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - i\sqrt{\frac{c}{2}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right] (x + i\sqrt{\frac{c}{2}}, r - i\sqrt{\frac{c}{2}}, z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& + \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right] (x + i\sqrt{\frac{c}{2}}, r + i\sqrt{\frac{c}{2}}, z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& - \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right] (x - i\sqrt{\frac{c}{2}}, r - i\sqrt{\frac{c}{2}}, z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& - \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right] (x - i\sqrt{\frac{c}{2}}, r + i\sqrt{\frac{c}{2}}, z + i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& - \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right] (x + i\sqrt{\frac{c}{2}}, r - i\sqrt{\frac{c}{2}}, z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) \\
& - \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right] (x + i\sqrt{\frac{c}{2}}, r + i\sqrt{\frac{c}{2}}, z - i\sqrt{\frac{c}{2}}) .
\end{aligned}$$

Les valeurs de y' & de ζ' se trouveront de même en substituant dans cette formule à la place de x' , (x) , (x') , X , leurs correspondantes y' , (y) , (y') , Y , ou ζ' , (ζ) , (ζ') , Z , & réciproquement.

48. Voilà des formules très-générales, par lesquelles, connoissant dans un instant quelconque le mouvement de toutes les parties du fluide, on pourra déterminer à très-peu-près leur mouvement dans les instans suivans, au moins pendant un intervalle de tems fort court. Or, si après ce tems on recommence le calcul, en substituant à la place de (x) , (y) , (ζ) , (x') , (y') , (ζ') les valeurs trouvées de x , y , ζ , x' , y' , ζ' , on en tirera des nouvelles valeurs de x , y , ζ , x' , y' , ζ' qui serviront pour un second intervalle de tems égal au premier; & opérant ainsi de suite on pourra trouver les mouvemens du fluide par tel espace de tems qu'on voudra; mais il faut avouer que cette méthode ne sera guere praticable pour un tems assés long; car, nos formules n'étant qu'approchées, l'inexactitude de chaque résultat influira nécessairement sur tous les résultats suivans, & par conséquent, plus le nombre des opérations sera grand, plus aussi on risquera de s'éloigner de la vérité.

Consé-

*Conséquences qui résultent des formules précédentes
par rapport à la propagation du Son.*

49. Imaginons d'abord qu'un corps sonore n'ébranle qu'une seule particule d'air, dont la position soit déterminée par les coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, & voyons comment & par quels degrés cet ébranlement unique se propagera au loin dans toute la masse de l'air pendant un tems quelconque t fort court.

Il est d'abord évident que dans les équations (P) , (Q) , (R) , (P') , (Q') , (R') il faudra regarder comme nulles toutes les quantités (x) , (y) , (z) , (x') , (y') , (z') , qui auront un autre exposant que $([X]$, $[Y]$, $[Z])$; or soit en général l'exposant de chacune de ces quantités exprimé par $(X - pt, Y - qt, Z - rt)$, il suit de ce qu'on vient de dire, que les valeurs de x, y, z, x', y', z' seront aussi nulles pour toutes les particules, dont la position ne sera point déterminée par des coordonnées X, Y, Z , telles que $X - pt = [X]$, $Y - qt = [Y]$, $Z - rt = [Z]$, savoir que $X = [X] + pt$, $Y = [Y] + qt$, $Z = [Z] + rt$; si donc on donne successivement à p, q, r , toutes leurs valeurs particulières conformément à nos formules, on aura autant de valeurs de X, Y, Z , qui détermineront la position de toutes les particules de l'air qui auront quelque mouvement au bout du tems t .

Supposons p, q, r donnés, & faisons varier t ; il est clair que les coordonnées X, Y, Z seront à une ligne droite qui passera par le point, auquel répondent les coordonnées $[X], [Y], [Z]$, & qui fera avec les lignes X, Y, Z des angles dont les cosinus seront

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}; \text{ d'où}$$

il s'ensuit qu'en donnant à p, q, r des valeurs différentes,

on aura aussi des droites de différente position, mais qui s'entrecouperont toutes dans un même point, & qu'on pourra par conséquent regarder comme autant de rayons sonores, excités par l'ébranlement donné de la particule qui est à leur centre.

Ces rayons croîtront uniformément avec le tems, de sorte qu'au bout d'un tems quelconque t leur longueur sera généralement exprimée par $t \sqrt{c (p^2 + q^2 + r^2)}$; l'on aura donc, pour la vitesse de la propagation du Son dans chacun d'eux, la formule $\sqrt{c (p^2 + q^2 + r^2)}$, dont la valeur se connoîtra en substituant au lieu de p, q, r leurs valeurs particulières. Par ces substitutions on aura les trois quantités suivantes, $\sqrt{c (\frac{c}{3} + \frac{c}{3})} = \sqrt{\frac{2c}{3}}$, $\sqrt{c (1 + \frac{c}{3} + \frac{c}{3})} = 2 \sqrt{\frac{c}{3}}$, $\sqrt{c (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{c}{6})} = \sqrt{\frac{2c}{3}}$; qui constitueront pour ainsi dire autant d'espèces différentes de rayons sonores.

C'est une chose digne de remarque que la plus grande vitesse $2 \sqrt{\frac{c}{3}}$ approche beaucoup de celle qu'on trouve par l'expérience; car \sqrt{c} étant environ $= 979$ piés, & $c = 958441$, on aura $\sqrt{\frac{c}{3}} = 565$, & par conséquent $2 \sqrt{\frac{c}{3}} = 1130$, qui est à très-peu-près le nombre de piés que le Son parcourt dans une seconde, selon les expériences moyennes. Cependant il ne paroît pas que ce résultat soit encore capable de mettre la Théorie d'accord avec l'expérience sur la vitesse de la propagation du Son. Voici les raisons qui m'obligent à suspendre mon jugement la-dessus. 1° Nos formules ne sont qu'approchées, & ne peuvent avoir lieu que pendant un tems assez court, après lequel chaque particule mobile doit être regardée, comme un nouveau centre de rayons sonores; 2° La position de chaque rayon n'est pas fixe, puisque elle dépend de celles des trois axes principaux, laquelle est absolument arbitraire; d'où il suit qu'en changeant la position des axes, les rayons qui avoient auparavant une vitesse donnée, pourront

pourront prendre la place de ceux qui avoient des vitesses différentes; ce qui paroît renfermer une espèce de contradiction, puisque une même particule de fluide pourroit en ce cas avoir ou ne pas avoir du mouvement. Cet inconvénient, qui vient sans doute de ce que nos formules ne renferment pas tous les termes nécessaires, sera aussi attaché à toutes les autres formules qu'on trouvera par approximation; d'où il résulte que, jusqu'à ce qu'on ait trouvé des formules tout-à-fait exactes & rigoureuses, on ne sera pas en état de prononcer sur le point dont il s'agit; 3° Nous avons trouvé dans les deux hypothèses du *Chap. III.* la vitesse du Son = \sqrt{c} ; & cette même valeur peut se trouver aussi par les formules de ce *Chap.* en considérant la plus grande vitesse des rayons estimée suivant la direction de chacun des trois axes; ce qui paroît mieux quadrer avec la nature particulière de ces formules.

50. Nous n'avons encore considéré que l'effet qui résulte de l'ébranlement d'une seule particule d'air; supposons maintenant, que tant des particules qu'on voudra soient ébranlées d'une manière quelconque dans le premier instant du tems t ; on trouvera, en raisonnant sur nos formules de la même manière qu'on a fait ci-dessus, que chacun des ébranlemens primitifs, excitera dans le fluide environnant les mêmes rayons sonores, que s'il étoit seul; de sorte que les particules d'air qui se trouveront dans la rencontre de plusieurs rayons auront un mouvement composé de tous les mouvemens, qui dépendront de chaque ondulation particulière. C'est ce qui nous fournit une explication complète & rigoureuse de la manière, dont plusieurs sons différens peuvent coexister & se repandre dans une même masse d'air, sans se nuire mutuellement les uns aux autres. *Voies l'Art. 63. des Réch. préc.*

Au reste, comme chaque particule d'air ébranlée devient elle

elle même un centre de rayons sonores, il est évident que le Son doit se repandre également en tous sens; ce qui est aussi un des principaux phénomènes de sa propagation.

51. Quoique il ne soit pas nécessaire de connoître la nature particulière de chaque ébranlement, il est cependant bon de faire attention à la différence qui se trouve entre les ébranlemens primitifs & dérivatifs, par rapport à leur propagation. Supposons pour cela qu'ayant déduit de nos formules les valeurs de x , y , z , &c. pour un tems quelconque désigné par t , on les substitue dans les mêmes formules à la place de (x) , (y) , (z) &c. pour trouver les valeurs correspondantes de x , y , z &c. pour un second intervalle, de tems marqué par t ; & soit par exemple $\alpha [(x) + f(x') dt]^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)}$ un terme quelconque de la valeur de x ,

&
 $\alpha [(x') + \frac{d(x)}{dt}]^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)}$ le terme

correspondant de la valeur de x' , lesquels doivent être substitués au lieu de (x) , & de (x') dans les termes de la forme de $\alpha [(x) + f(x') dt]^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)}$ pour la valeur de x , & dans ceux de la forme de

$\alpha [(x') + \frac{d(x)}{dt}]^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)}$ pour la valeur

de x' . On remarquera d'abord que dans nos formules un terme quelconque, dont l'exposant est $(X + pt, Y + qt, Z + rt)$ est toujours accompagné d'un autre terme exprimé de la même manière, mais avec l'exposant $(X - pt, Y - qt, Z - rt)$; on fait de plus, par ce qui a été dit ci-dessus que les termes

$$\begin{aligned} & [(x) + f(x') dt]^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)}, \\ & [(x') + \frac{d(x)}{dt}]^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)} \end{aligned}$$

marquent la propagation des ébranlemens (x) , (x') suivant

vant une ligne qui fait, avec les trois axes principaux des angles, dont les cosinus sont $\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$, $\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$,

$\frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$, d'où il s'ensuit que les termes

$$\left[(x) + f(x') dt \right]^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)},$$

$$\left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right]^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)} \quad \text{dénoteront}$$

la propagation des mêmes ébranlemens (x) , & (x') dans la même ligne prolongée du côté opposé. Or, cela posé, je dis, que si Cc (fig. 12.) représente un rayon de la propagation d'un ébranlement primitif excité en C , la propagation de l'ébranlement dérivatif qui est en c sera nulle suivant la direction cC opposée à celle de son ébranlement primitif.

Pour le prouver, il n'y a qu'à faire voir qu'en substituant

$$a \left[(x) + f(x') dt \right]^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)} \text{ au lieu de } (x)$$

$$\& a \left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right]^{(X + pt, Y + qt, Z + rt)} \text{ au lieu de } (x')$$

dans les termes

$$\left[(x) + f(x') dt \right]^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)}$$

$$\left[(x') + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right]^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)} \quad \text{ces termes}$$

deviendront nuls. Or, comme dans les exposans $X - pt$, $Y - qt$, $Z - rt$, le tems t est négatif par rapport aux coordonnées X , Y , Z , il est visible, que l'intégrale

$f(x) dt$, & la différentielle $\frac{d \cdot (x)}{dt}$ seront aussi nécessairement négatives ; d'où l'on aura par la substitution

$$\left[(x) - f(x') dt \right] = a \left[(x) + f(x') dt - f(x') dt - (x) \right]$$

$$= 0, \& \text{ de même } \left[(x') - \frac{d \cdot (x)}{dt} \right] = a \left[(x) + \frac{d \cdot (x)}{dt} \right]$$

$$- \frac{d \cdot (x)}{dt} - x'] = 0, \text{ donc } \&c.$$

Au reste la remarque que nous venons de faire sur les formules générales de ce Chap., est entièrement analogue à celle qu'on a déjà fait sur les formules particulières du Chap. III. dans l'art. 16., remarque dont nous sommes rédevables à M. Euler, & qui est d'une grande importance dans la Théorie de la propagation du Son.

52. Il ne nous reste plus qu'à examiner le changement qui doit arriver aux rayons sonores par la rencontre d'un obstacle quelconque, qui s'oppose entièrement, ou en partie au mouvement des particules contigues de l'air. Pour cela il n'y a qu'à chercher quelle devra être la position d'une particule mobile quelconque, lorsque les coordonnées $X = [X] + pt$, $Y = [Y] + qt$, $Z = [Z] + rt$ tomberont au delà de l'obstacle immobile. Or en examinant les calculs de l'Art. 47. on voit que les valeurs des X , Y , Z pour une particule quelconque mobile sont les mêmes que celles qui constituent les fonctions $L(x, y, z)$, $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$; donc tout se réduit à examiner la nature de ces fonctions, & à voir de quelle manière il faudra les transformer, afin que les quantités X , Y , Z ne surpassent jamais des valeurs données.

Imaginons donc que la masse de l'air soit interrompue de quelque côté, & comme terminée par une espèce de parois immobile de figure donnée; il est constant par ce qui a été enseigné dans l'Art. 45. que les expressions intégrales à deux seules changeantes, que nous avons traité comme nulles dans l'Art. cité, devront disparaître par elles mêmes, en tant qu'elles se rapporteront à un point quelconque de la figure proposée. Rapellons-nous ces expressions négligées dans les calculs précédens, & considérons d'abord celles qui ont le signe $-$; je dis que leur somme est toujours évanouissante, quelle que soit la figure à laquelle il faille les rapporter. Pour le prouver ajoutons-les ensemble; on aura

$$\int (dL$$

$$\int \left(\frac{dL}{dX} + \frac{dM}{dY} + \frac{dN}{dZ} \right) \times (x dY dZ + y dX dZ + z dX dY).$$

Or soit le rapport entre les trois coordonnées X, Y, Z exprimé par l'équation $dZ = P dX + Q dY$; il est aisé de prouver qu'on peut ramener tous les termes de l'expression précédente à la variabilité des seules coordonnées X, Y , en substituant au lieu de dZ , $P dX$ dans le produit $dY dZ$, & $Q dY$ dans le produit $dX dZ$; d'où l'on aura la transformée $\int \left(\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dY} + \frac{dN}{dZ} \right) \times (xP + yQ + z)$

$dX dY$ qu'il faudra maintenant intégrer en faisant varier X & Y l'une après l'autre. Mais x, y, z dénotant les espaces parcourus par une même particule suivant les directions des trois coordonnées X, Y, Z , il n'est pas difficile de voir que $\frac{xP + yQ + z}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$ dénotera l'espace que cette même particule décrira suivant une direction perpendiculaire à la surface dont l'équation est $dZ = P dX + Q dY$; or il est clair, que dans notre cas, cet espace doit être nul, puisque le mouvement est entièrement arrêté suivant la direction perpendiculaire à chaque point de la paroi immobile; donc on aura $\frac{xP + yQ + z}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} = 0$; & par conséquent $xP + yQ + z = 0$.

Joignant ensemble les autres formules qui ont le signe +; on aura l'expression $\int \left(\frac{dx}{dX} + \frac{dY}{dY} + \frac{dZ}{dZ} \right) \times (L dY dZ + M dX dZ + N dX dY)$ qui doit aussi être = 0, en tant qu'elle se rapporte à chacun des points de la surface exprimée par $dZ = P dX + Q dY$. Or le facteur $L dY dZ + M dX dZ + N dX dY$ se réduira, de la même façon que ci-dessus, à $(LP + MQ + N) dX dY$, d'où l'on tirera l'équation $LP + MQ + N = 0$, qui devra avoir lieu pour tous les points de la surface proposée; & cette équation

tion renfermera en général les conditions que doivent avoir les valeurs de L , M , N . (Voies ci-dessus art. 45.).

Supposons maintenant, pour simplifier les choses, $P = 0$ & $Q = 0$, de sorte que la paroi immobile soit un plan perpendiculaire à l'axe des Z ; l'équation trouvée se réduira à $N = 0$; ou bien, si on veut que le plan donné soit perpendiculaire à l'axe des X , & que sa distance au point de l'origine des abscisses soit $= a$, on aura $L = 0$, X étant $= a$, & Y & Z étant quelconques; ce qui s'exprimera à notre manière par $L^{(a, Y, Z)} = 0$. Or, si dans l'expression générale $L^{(X, Y, Z)}$ on suppose que X surpasse a d'une quantité infiniment petite u , de sorte que $X = a + u$, on aura $L^{(X, Y, Z)} = L^{(a + u, Y, Z)} = L^{(a, Y, Z)} + u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$ à très-peu-près, $= u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$; de même, si on suppose u négative, on aura $L^{(a - u, Y, Z)} = - u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$; d'où je tire $L^{(a - u, Y, Z)} = - L^{(a - u, Y, Z)}$; & remettant pour u sa valeur $X - a$, $L^{(X, Y, Z)} = - L^{(2a - X, Y, Z)}$.

Maintenant, comme les fonctions $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$ doivent avoir un certain rapport avec la fonction $L^{(X, Y, Z)}$, en vertu des équations (A), (B), (C), il est clair que la même condition de $L^{(a, Y, Z)} = 0$ servira aussi à trouver les transformations qui conviennent aux fonctions M & N , lorsque X est supposé plus grand que a ; pour y parvenir je reprens les équations mentionnées, & comparant la première, différenciée suivant la variable Y & divisée par dY , à la seconde, différenciée suivant la variable X & divisée par dX , je trouve $\frac{dL}{dY} = \frac{dM}{dX}$; & de même comparant la première, différenciée suivant Z , & divisée par dZ à la troisième, différenciée suivant X , & divisée par dX , j'ai

$$\frac{dL}{dZ}$$

$\frac{dL}{dZ} = \frac{dN}{dX}$; posons dans ces deux équations $X = a$, de sorte que $\frac{dL(a, Y, Z)}{dY} = \frac{dM(a, Y, Z)}{dX}$, & $\frac{dL(a, Y, Z)}{dZ} = \frac{dN(a, Y, Z)}{dX}$;

or aiant en général $L(a, Y, Z) = 0$, on aura aussi $\frac{dL(a, Y, Z)}{dY} = 0$, & $\frac{dL(a, Y, Z)}{dZ} = 0$; donc, $\frac{dM(a, Y, Z)}{dX} = 0$, & $\frac{dN(a, Y, Z)}{dX} = 0$;

Supposons maintenant dans les fonctions indéterminées $M(X, Y, Z)$, $N(X, Y, Z)$, $X = a + u$, & développons-les, en poussant les series jusqu'aux infinimens petits du second ordre; on aura $M(a + u, Y, Z) = M(a, Y, Z) + u \frac{dM(a, Y, Z)}{dX}$

+ $\frac{u^2}{2} \frac{d^2 M(a, Y, Z)}{dX^2}$, & $N(a + u, Y, Z) = N(a, Y, Z) + u \frac{dN(a, Y, Z)}{dX}$ + $\frac{u^2}{2} \frac{d^2 N(a, Y, Z)}{dX^2}$; & de même, en prenant

u négativement, $M(a - u, Y, Z) = M(a, Y, Z) - u \frac{dM(a, Y, Z)}{dX}$

+ $\frac{u^2}{2} \frac{d^2 M(a, Y, Z)}{dX^2}$, & $N(a - u, Y, Z) = N(a, Y, Z) - u \frac{dN(a, Y, Z)}{dX}$ + $\frac{u^2}{2} \frac{d^2 N(a, Y, Z)}{dX^2}$; d'où l'on déduit, à cause

de $\frac{dM(a, Y, Z)}{dX} = 0$, & $\frac{dN(a, Y, Z)}{dX} = 0$ par hypothèse,

$M(a + u, Y, Z) = M(a - u, Y, Z)$, & $N(a + u, Y, Z) = N(a - u, Y, Z)$, ou bien, restituant pour u sa valeur $X - a$,

$$M(X, Y, Z) = M(2a - X, Y, Z)$$

$$N(X, Y, Z) = N(2a - X, Y, Z)$$

Soient reprises maintenant les formules (D), (E), & supposant que X surpasse a d'une quantité infiniment petite, on commencera par changer l'expression $L(X, Y, Z)$ des termes xL , $x'L$, ou ce qui est la même chose, des termes $xL(X, Y, Z)$, $x'L(X, Y, Z)$ en $-L(2a - X, Y, Z)$, lorsque

X deviendra plus grand que a , & l'on aura par conséquent ces termes transformés en $-x L(2a - X, Y, Z)$, $-x' L(2a - X, Y, Z)$, sur lesquels on opérera comme auparavant, pour en tirer les valeurs de x & x' . Or, puisque les coordonnées qui répondent à x & x' sont les mêmes, que celles qui entrent dans l'expression de L , il est clair que, sans autre opération, il suffira de changer la valeur X de l'abscisse de x & x' en $2a - X$, en rendant en même tems ces quantités x & x' négatives. On changera de même les expressions $M(x, Y, Z)$, $N(x, Y, Z)$ qui entrent dans les termes My , My' , & Nz , Nz' des mêmes formules (D), (E), en $M(2a - X, Y, Z)$ & $N(2a - X, Y, Z)$, & par un raisonnement semblable au précédent, on trouvera que l'abscisse X en tant qu'elle répond aux autres quantités y , y' , z , z' deviendra de même $2a - X$, mais sans que la valeur de ces quantités soit changée.

On conclura donc pour notre cas, que, lorsque le tems t sera tel, que l'abscisse $[X] + pt$ surpassera a , il faudra mettre à sa place l'abscisse $2a - [X] - pt$, & faire en même tems l'espace x négatif, laissant les mêmes les deux coordonnées $[Y] + pt$, & $[Z] + qt$, & les deux autres espaces y , z .

Voici maintenant le changement qu'il en résultera dans les rayons sonores. Que CA (fig. 13.) représente l'axe des X , qui est le même que celui des $[X]$, & qui rencontre perpendiculairement le plan inébranlable AB ; que C soit un centre de rayons sonores déterminé par les trois coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$; & que CD soit un de ces rayons quelconque déterminé par les coordonnées $[X] + pt$, $[Y] + qt$, $[Z] + rt$. Supposons maintenant que t soit augmenté en sorte, que $[X] + pt$ surpassé a , c'est-à-dire que pt surpassé CA , & soit par exemple $= CA'$, le point A' tombant derrière l'obstacle immobile AB ; il faudra, suivant ce que nous venons d'enseigner, chan-

ger la valeur de $[X] + pt$ en $2a - [X] - pt$; ce qui donnera, en supposant $CA = a$ & par conséquent $a = [X] + \alpha$, $[X] + 2\alpha - pt$ au lieu de $[X] + pt$; ou bien, posant $AA' = \theta$ & par conséquent $pt = \alpha + \theta$, $[X] + \alpha - \theta$ au lieu de $[X] + pt$, savoir de $[X] + \alpha + \theta$; d'où l'on voit que le point A' sera transporté en A , les distances AA' & $A'A$ au plan AB étant égales de part & d'autre; donc, comme les deux autres coordonnées perpendiculaires à l'axe CA demeurent les mêmes, le rayon CD sera continué du côté CA dans la direction de la droite DE , dont la position devra être telle qu'elle se trouve dans le plan des deux lignes CD , CA , & qu'elle fasse de plus avec le plan BA l'angle BDE égal à l'angle CDA . Le rayon CD sera donc réfléchi par le plan BA ; en sorte que l'angle de réflexion soit égal à l'angle d'incidence, tout de même que il arrive à un corps parfaitement élastique.

Voilà donc la réflexion du Son, déduite de ses vrais principes, & prouvée d'une manière rigoureuse & exacte, ce que personne n'avoit encore fait. *Voies ce que j'ai dit sur ce sujet Art. 61. des Rech. préc.*

Au reste, si nous n'avons considéré qu'une surface plane, ce n'a été que pour rendre notre calcul moins embarrassant; car il n'auroit pas été difficile de l'appliquer aussi à des surfaces courbes d'une nature quelconque; mais, comme les rayons sonores se multiplient continuellement, & se repandent en tout sens, comme on l'a fait voir (*Art. 50.*), il seroit assés inutile de déterminer les loix de la réflexion de chaque rayon à la rencontre d'un obstacle de figure quelconque. Il suffit pour l'explication des *Echos*, d'avoir prouvé que cette réflexion doit toujours avoir lieu, lorsque l'air est appuié sur un obstacle quelconque inébranlable.

S C O L I E I.

53. Il est visible que, dans les formules (P) , (Q) , (R) , (P') , (Q') , (R') , on peut regarder les expressions (x) $(x + pt, Y + qt, Z + rt)$ &c. comme des fonctions indéterminées de $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$; de sorte qu'en substituant pour (x) , (x') , (y) , (y') , (z) , (z') des fonctions de différente nature, & composées des mêmes variables qui constituent l'exposant de chacune des quantités (x) , (x') &c., on aura les valeurs de x , x' , y &c. données en fonctions indéterminées, ainsi que M. D'Alembert l'a pratiqué le premier dans la Théorie des vibrations des cordes, & ailleurs.

Au reste pour démontrer que ces valeurs de x , y , z satisfont aux trois équations de l'Art. 10., il faudra nécessairement regarder t comme infiniment petit, & développer les fonctions indéterminées comme on l'a pratiqué à l'égard des fonctions L , M , N (Art. 47. ci-dessus), en négligeant tous les termes qui seront multipliés par des puissances de t plus hautes que la quatrième.

S C O L I E II.

34. Si on vouloit se borner à chercher les valeurs de x , y , z par les séries, on y parviendroit fort aisément par les principes de l'Art. 47. Car développant en suites infinies les expressions $\cos. t \sqrt{-ck}$, & $\sin. t \sqrt{-ck}$ de l'équation (D) , & faisant ensuite évanouïr toutes les puissances de k , par les transformations enseignées dans le même Art., on obtiendra une équation qui ne renfermera que les fonctions inconnues L , M , N avec leurs différences; or ces différences pourront toujours se réduire aux quantités finies L , M , N par les opérations connues des inté-

grations

grations par parties. Car, soit par exemple $\frac{1}{2} t^2 c f(x) \frac{d^2 L}{dX^2}$
 $dXdYdZ$ un terme quelconque de l'équation (D), trans-
 formée comme nous venons de la dire, ce terme se ré-
 duira, en négligeant toujours les intégrales à deux seules
 changeantes, à $\frac{1}{2} t^2 c \int \frac{d^2(x)}{dX^2} L dXdYdZ$, & généra-

lement il suffira d'ôter les différenciations aux quantités
 L, M, N , & de les appliquer aux quantités $(x), (y),$
 $(z), (x'), (y'), (z')$, par lesquelles celles-là sont multi-
 pliées. Cela fait, comme l'équation ne renfermera plus que
 les fonctions finies L, M, N , qui, à cause de la quan-
 tité k qu'elles contiennent, ne doivent point entrer dans
 les valeurs de x, y, z , on trouvera ces valeurs, en com-
 parant ensemble tous les termes qui seront multipliés sé-
 parément par L, M, N . On aura donc par là

$$x = (x) + t(x') + \frac{1}{2} t^2 c \left[\frac{d^2(x)}{dX^2} + \frac{d^2(y)}{dXdY} + \frac{d^2(z)}{dXdZ} \right] + \&c.$$

$$y = (y) + t(y') + \quad \quad \quad \&c.$$

$$z = (z) + t(z') + \quad \quad \quad \&c.$$

où les quantités $(x), (y), (z), (x'), (y'), (z')$ devront
 être regardées comme des fonctions indéterminées des trois
 variables X, Y, Z , pour qu'on puisse avoir les valeurs
 des différences $\frac{d^2(x)}{dX^2}, \frac{d^2(y)}{dXdY}$ &c. Or dans le cas où t

est supposé infiniment petit, si on néglige les termes mul-
 tipliés par des puissances de t plus hautes que la quatrié-
 me, & qu'on pratique ensuite sur les fonctions $(x), (y),$
 &c. des réductions analogues à celles qui ont été pratiquées
 sur les fonctions L, M, N dans le calcul de l'Art. 47.,
 il sera aisé de réduire les expressions de x, y, z à des
 fonctions de $X + pt, Y + qt, Z + rt$, comme dans
 le Scolie précédent, ce qui sera une preuve de la justesse
 de nos calculs.

Au reste la méthode, que nous n'avons fait qu'indiquer dans ce Scolie, est générale & peut aussi être appliquée à la résolution d'une infinité d'autres équations de la nature de celles que nous avons examiné dans tout le cours des Recherches précédentes. Mais on trouvera toujours des séries composées de puissances croissantes de t , & qui, par conséquent, ne seront bonnes que tant t aura des valeurs fort-petites.

§. III.

Conjectures sur la loi de l'élasticité des particules de l'air.

55. Nous avons vu que la vitesse du Son, suivant la Théorie, est exprimée par $\sqrt{c} = \frac{\sqrt{2hE}}{T^2D}$, & nous avons vu aussi qu'elle diffère de la véritable d'environ 163 pieds par seconde, quantité qui ne peut raisonnablement être négligée; comment donc concilier sur ce point la Théorie & l'Expérience?

L'expression $\frac{\sqrt{2hE}}{T^2D}$ est fondée sur l'hypothèse ordinaire que l'élasticité des parties de l'air soit exactement proportionnelle à leur densité; mais ne pourroit-on pas supposer que l'élasticité variât dans une autre raison peu différente de celle de la densité simple. Si on vouloit en général supposer E proportionnel à ϕD , comme dans l'An. 11., il n'y auroit qu'à mettre dans nos calculs $E \phi' D$ au lieu de E tout le reste demeurant le même; ce qui ne produiroit d'autre différence dans les résultats, si non que la vitesse du Son seroit augmentée dans la raison de $\sqrt{\phi' D} : 1$.

Soit l'élasticité proportionnelle à une puissance quelconque m de la densité, ce qui paroît le cas le plus naturel;

on

on aura $\phi D = D^m$ & $\phi' D = m D^{m-1}$; d'où, en posant $D = 1$, l'on tire la vitesse du Son $= \sqrt{m} \times \sqrt{c} = 979 \sqrt{m}$ piés par seconde; par conséquent, en prenant 1142 piés par seconde pour l'expression véritable de cette vitesse, il faudra que $979 \sqrt{m} = 1142$, ce qui donnera \sqrt{m}

$$= \frac{1142}{979} \text{ \& } m = 1.3'6'' \text{ en fractions décimales, ou } m$$

$= 1 + \frac{1}{3}$ à très-peu-près. Or, comme l'élasticité se mesure par le poid comprimant, il est clair que si cette hypothèse a lieu dans la nature, il faudra que la densité devenant double, triple, quadruple &c., les poids comprimans croissent comme les nombres $2\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt[3]{3}$, $4\sqrt[3]{4}$ &c. qui surpassent les nombres de la progression arithmétique 2, 3, 4 &c. d'environ $\frac{518}{1000}$, $1 \frac{326}{1000}$, $1 \frac{848}{1000}$.

Ces différences paroissent à la vérité trop fortes, pour qu'on puisse raisonablement supposer qu'elles aient échappées aux savans Phisiciens, qui ont déterminé par l'expérience les loix de la compression de l'air; aussi je ne donne l'hypothèse de l'élasticité proportionnelle à $D^1 + \frac{1}{3}$,

que comme une légère conjecture, & je me contenterai seulement de faire observer, que l'expérience même paroît jusqu'à un certain point favorable à la supposition, que l'élasticité croisse dans une raison plus grande que la densité; puisque on sait que de très-habiles Phisiciens ont trouvé que, lorsque la densité est devenue quadruple de la naturelle, l'air ne se comprime plus que suivant une proportion moindre que celle des poids.

56. Au reste il est clair que si l'hypothèse $P = D$, & en général $P = D^m$ avoit exactement lieu dans la nature, la densité d'une particule d'air deviendroit nulle, lorsque le poid comprimant seroit nul, ce qui paroît renfermer quelque espèce de contradiction; si donc, pour éviter un pareil inconvénient, on suppose que le poid comprimant soit pro-

proportionnel à quelque autre fonction ϕ de la densité, on satisfaira tout-à-la-fois à la Théorie de la propagation du Son, & aux expériences de la compression de l'air, si on peut déterminer ϕ en sorte que $\phi'D$ soit (en y mettant $D = 1$) $= 1 + \frac{1}{3}$, & qu'en même tems ϕD soit assés sensiblement proportionnel à D , tant que D est contenu entre les limites 1 & 4.

C H A P I T R E V I.

Reflexions sur la Théorie des instrumens à vent.

57. **D**ANS l'Art. 52. des *Rech. préc.* j'ai réduit la Théorie des flutes à celle des oscillations d'une fibre élastique d'air, dont les deux extrémités soient fixes, comme dans les cordes sonores; mais cette supposition n'est pas exacte; car on fait que l'air renfermé dans le tuyau communique toujours avec l'air extérieur, ou de deux côtés, comme dans toutes les espèces de flutes, ou d'un côté seulement comme dans les trompettes, les cors de chasse, & dans les tuyaux d'orgue bouchés; je vais donc maintenant avoir égard à ces circonstances.

Considérons d'abord des flutes de forme exactement cylindrique, & supposons que la colonne d'air qui y est renfermée soit soutenue, à ses deux extrémités, par une force égale au ressort naturel de l'air extérieur.

Dénotant par ζ les excursions longitudinales de chaque partie d'air, on aura l'équation $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$; d'où il sera aisé de tirer par le Prob. 1. ci-dessus, les mêmes résultats que dans l'Art. cité, en supposant, comme on l'a pratiqué partout ailleurs, ζ nul, lorsque $x = 0$, & $x = a$, a étant ici la longueur entière de la flute; mais, dans le

cas que nous nous proposons d'examiner, ce n'est plus cette condition qui doit avoir lieu, mais il faut que l'élasticité de la première & de la dernière particule soit la même que l'élasticité naturelle de l'atmosphère, savoir que $c (1 - \frac{d\zeta}{dx}) = c$, ou bien $\frac{d\zeta}{dx} = 0$, lorsque $x = 0$, & $x = a$. Or, puisque dans ces deux points les deux termes $\frac{d\zeta}{dx} M - \zeta \frac{dM}{dx}$ doivent disparaître d'eux mêmes, par la nature de notre méthode, (*Voies Prob. 1.*) il faudra que la différentielle $\frac{dM}{dx}$ y devienne nulle; c'est pourquoi

l'on aura $M = A \cos. x \sqrt{-k}$, & $\sqrt{-k} = \frac{v \pi}{2a}$, & par

conséquent les équations

$$\begin{aligned} \int \zeta \cos. x \sqrt{-k} dx &= \cos. t \sqrt{-ck} \int Z \cos. x \sqrt{-k} dx \\ &+ \frac{\sin. t \sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V \cos. x \sqrt{-k} dx \\ \int u \cos. x \sqrt{-k} dx &= \cos. t \sqrt{-ck} \int V \cos. x \sqrt{-k} dx \\ &- \sqrt{-ck} \sin. t \sqrt{-ck} \int Z \cos. x \sqrt{-k} dx. \end{aligned}$$

Ces équations fourniront une construction à peu-près semblable à celle de l'*Art. 7.*; mais on pourra s'en passer, lorsqu'il ne sera question que de déterminer la durée commune des oscillations des particules de l'air. Car il suffira pour cela de considérer, que les équations trouvées demeurent invariables, lorsqu'on augmente la valeur de t d'un multiple quelconque de $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; d'où il s'ensuit qu'au bout de

chaque intervalle de tems $\frac{2a}{\sqrt{c}}$ les valeurs de ζ & de u reviendront les mêmes, & que par conséquent toutes les particules reprendront aussi la même situation, & le même mouvement; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'endroit cité des *Rech. préc.*, quoique d'après une autre hypothèse.

Cela aura lieu en général pour toutes les valeurs possibles de ν ; mais si on suppose que les valeurs de ν soient renfermées dans la formule particulière $\nu = m \times \mu$, m étant un nombre entier, positif & déterminé, & μ un nombre quelconque entier; il est évident, par la nature des sinus & cosinus, que les valeurs de z & de u reviendront les mêmes après chaque intervalle de tems $= \frac{2a}{m\sqrt{c}}$, & qu'ainsi la durée des oscillations se réduira à la moitié, au tiers, au quart &c., selon que m fera exprimé par 2, 3, 4 &c.

Or dans ce cas il est clair, que si on décrit une courbe, où les abscisses étant x , les ordonnées soient $\cos. x\sqrt{-k}$, cette courbe aura autant de ventres égaux & semblables qu'il y a d'unités dans le nombre m ; par conséquent les quantités Z , V , z , u qui sont multipliées par chacune de ces ordonnées devront former aussi des courbes de pareille forme; autrement le Problème demeureroit indéterminé, ou plutôt indéterminable, puisque on pourroit trouver pour z & u plusieurs valeurs différentes, ce qui seroit absurde.

On voit par là que ce cas répond exactement à celui, que nous avons examiné dans l'Art. 49. des Rech. préc., & qu'il contient par conséquent l'explication des Sons harmoniques.

§8. Supposons maintenant que la flute soit bouchée à l'extrémité opposée à l'embouchure; puisque alors $z = 0$, x étant $= a$, le terme $z dM$ disparaîtra de lui même, & le terme restant $M dz$ donnera $M = 0$, d'où l'on tirera $\cos. a\sqrt{-k} = 0$, & $\sqrt{-k} = (2\nu + 1) \frac{\pi}{4a}$, ν marquant un nombre quelconque entier positif, ou négatif.

Cette valeur substituée dans les deux équations de l'Art. préc., on verra aisément que les termes $\cos. t\sqrt{-ck}$, & $\sin. t\sqrt{-ck}$ ne reprendront les mêmes valeurs, que lorsque t fera

l fera augmenté de $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; ce qui donnera la durée des oscillations double de celle qu'on a trouvé dans le cas précédent.

Ce fait est confirmé par l'expérience , par laquelle on trouve en effet que les tuyaux bouchés donnent justement l'octave du son, qu'ils donneroient étant ouverts. Mais il y a plus ; comme la durée des oscillations ne peut s'accourcir à moins que $2v + 1$ ne devienne le produit de deux nombres entiers & par conséquent impairs , il s'ensuit qu'elle ne pourra devenir que le tiers , ou la cinquième partie , ou &c. de la durée naturelle $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; d'où il résulte qu'une flute bouchée , après avoir rendu le son fondamental , ira immédiatement à la quinte en haut de ce même son , & puis à la double tierce &c. sans passer par aucune des octaves intermédiaires .

Voilà l'explication exacte d'un phénomène assez singulier , que M. Daniel Bernoulli a le premier fait remarquer dans l' *Art. III. de son Mémoire sur les vibrations des cordes* (*Acad. de Berlin 1753.*) ; mais dont ni lui , ni aucun autre , que je sache , n'avoit encore jusqu'ici rendu raison .

59. Lorsque les flutes n'ont pas une forme cylindrique , ou en général , lorsqu'il s'agit des trompettes & des cors de chasse , il semble qu'on pourroit tirer leur Théorie des calculs de l' *Art. 30. ci-dessus* ; cependant voici une difficulté .

On fait , que ces instrumens , quelque figure qu'ils aient , donnent toujours , par une simple variation d'embouchure , tous les sons qui répondent aux nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ &c. & il n'est pas difficile de voir , en appliquant aux formules générales de l' *Art. 28.* les remarques des *Art. précéd.* , que cela demande nécessairement que les valeurs de k soient $1, 2, 3, 4$ &c. comme dans les flutes cylindriques . Or je ne vois point comment l'expression de M de l' *Art. 27.*

Pour-

pourroit fournir des telles valeurs pour k , à moins que les coefficients alternatifs A, C &c., ou B, D &c. ne fussent nuls, ainsi qu'on l'a déjà remarqué dans l'Art. 32.

Au reste quels que soient les mouvemens des particules de l'air dans les instrumens à vent, ils seront toujours renfermés dans les trois équations générales de l'Art. 10., dont nous avons donné une construction approchée dans le Chap. préc. Il est vrai que cette construction ne nous apprendra rien sur la nature des vibrations des particules; mais les équations (D), & (E) font connoître que, pour ces vibrations deviennent synchrones, il faut que toutes les valeurs de $\sqrt{-k}$ soient commensurables entr'elles, afin qu'il y ait un certain intervalle de tems, après lequel les fonctions $\sin. t\sqrt{-ck}$ & $\cos. t\sqrt{-ck}$ reprenant toujours les mêmes valeurs, les équations mentionnées redeviennent aussi exactement les mêmes.

Cette condition cependant n'est point nécessaire, si on suppose que les équations dont il s'agit soient vérifiées indépendamment des quantités $\sin. \sqrt{-ck}$, & $\cos. \sqrt{-ck}$; ce qui a lieu, lorsque chacune des intégrales $\int (xL + yM + zN) dXdYdZ$, $\int (x'L + y'M + z'N) dXdYdZ$, $\int [(x)L + (y)M + (z)N] dXdYdZ$, $\int [(x')L + (y')M + (z')N] dXdYdZ$ s'évanouit d'elle même. Il ne fera donc pas inutile d'examiner ici quelles doivent être les valeurs de x, y, z, x', y', z' &c. pour que ces dernières conditions aient lieu.

60. Pour cela soient substituées au lieu de L, M, N leurs valeurs tirées des équations de condition (A), (B), (C) de l'Art. 45.; & faisant évanouir par des intégrations par parties les différences de L, M, N , on aura d'abord, en négligeant les intégrales à deux seules changeantes qui sont nulles par la nature mêmes des quantités x, y, z , & des fonctions L, M, N , la transformée suivante

$$\int (xL$$

$$\int (xL + yM + \zeta N) dXdYdZ = \frac{1}{k} \int \left[\left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ} \right) L + \left(\frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2x}{dYdX} + \frac{d^2z}{dYdZ} \right) M + \left(\frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY} \right) N \right] dXdYdZ,$$
 où l'on voit que les quantités multipliées par L , M , N , sont les mêmes que celles qui composent les seconds membres des équations différentielles proposées; ce qui ne pourra jamais être autrement, quelque forme que puissent avoir ces équations; puisque il est clair que les nouvelles intégrations par parties, dont on fait usage ici, ne servent qu'à defaire ce qu'on avoit fait par les premières.

On aura donc, en posant α pour une constante quelconque,

$$\int \left[\left(\alpha x + \frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ} \right) L + \left(\alpha y + \frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2z}{dYdZ} + \frac{d^2x}{dYdX} \right) M + \left(\alpha \zeta + \frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY} \right) N \right] dXdYdZ = (\alpha + k) \int (xL + yM + \zeta N) dXdYdZ,$$
 & par conséquent, tant que α ne sera pas $= -k$, on satisfera à l'équation $\int (xL + yM + \zeta N) dXdYdZ = 0$, en faisant séparément

$$(a) \dots \alpha x + \frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ} = 0$$

$$(b) \dots \alpha y + \frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2z}{dYdZ} + \frac{d^2x}{dYdX} = 0$$

$$(c) \dots \alpha \zeta + \frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs de x , y , ζ qu'on pourra exprimer généralement ainsi: $x = A\phi(\alpha, X, Y, Z)$, $y = A\psi(\alpha, X, Y, Z)$, $\zeta = A\chi(\alpha, X, Y, Z)$, les lettres ϕ , ψ , χ marquant des fonctions variables données.

La constante A peut-être quelconque, & même une fonction du tems t qui est ici regardé comme constant, mais les autres constantes qui se trouveront dans les fonctions ϕ , ψ , χ devront être déterminées par les conditions qu'on supposera aux quantités x , y , z ; conditions qui dépendront dans le cas présent de la figure du tuyau qui renferme les particules mobiles de l'air.

A l'égard de la constante α , elle sera susceptible d'une infinité de valeurs, qui seront les mêmes précisément que celles de la quantité k , mais prises négativement; ce qu'on peut démontrer en général de la manière suivante. Les équations trouvées (a), (b), (c) comparées avec les équations fondamentales de l'Art. 10. donnent $\frac{d^2x}{dt^2} = -c\alpha x'$,

$\frac{d^2y}{dt^2} = -c\alpha y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -c\alpha z$; d'où l'on tire l'équation

$\frac{d^2s}{dt^2} = -c\alpha s$, qui comparée avec l'équation en s trouvée

dans l'Art. 45. $\frac{d^2s}{dt^2} = kcs$ donne $-\alpha = k$, & $\alpha = -k$.

En raisonnant & opérant de même sur les autres formules intégrales qui doivent aussi être $= 0$, on trouvera pour x' , y' , z' , comme aussi pour (x) , (y) , (z) , & (x') , (y') , (z') des valeurs qui ne différeront de celles de x , y , z que dans la constante arbitraire, par laquelle les fonctions ϕ , ψ , χ peuvent être multipliées; on aura ainsi
 $x' = B\phi(\alpha, X, Y, Z)$, $y' = B\psi(\alpha, X, Y, Z)$
 $z' = B\chi(\alpha, X, Y, Z)$;
 $(x) = E\phi(\alpha, X, Y, Z)$, $(y) = E\psi(\alpha, X, Y, Z)$
 $(z) = E\chi(\alpha, X, Y, Z)$; &
 $(x') = F\phi(\alpha, X, Y, Z)$, $(y') = F\psi(\alpha, X, Y, Z)$
 $(z') = F\chi(\alpha, X, Y, Z)$.

Maintenant il faut observer que comme les équations (a), (b), (c) ne rendent l'intégrale proposée $= 0$ que tant

tant que α n'est pas $= -k$, & que d'ailleurs les équations (D) & (E) de l'Art. 45. doivent avoir lieu en général pour toutes les valeurs de k , il restera encore à vérifier ces équations dans le cas de $k = -\alpha$; or substituant dans l'équation (D) les valeurs trouvées ci-dessus de x, y &c. il viendra $A \int [L\phi(\alpha, X, Y, Z) + M\psi(\alpha, X, Y, Z) + N\chi(\alpha, X, Y, Z)] dXdYdZ$
 $= (E \cos. t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \sin. t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}) \int [L\phi(\alpha, X, Y, Z) + M\psi(\alpha, X, Y, Z) + N\chi(\alpha, X, Y, Z)] dXdYdZ$;
 ce qui donnera $A = E \cos. t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \sin. t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}$. On aura de même, par l'équation (E), $B = F \cos. t\sqrt{c\alpha} - E \sqrt{c\alpha} \sin. t\sqrt{c\alpha}$, donc

$$x = [E \cos. t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \sin. t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}] \phi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$y = [E \cos. t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \sin. t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}] \psi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$z = [E \cos. t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \sin. t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}] \chi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$x' = [F \cos. t\sqrt{c\alpha} - E \sqrt{c\alpha} \sin. t\sqrt{c\alpha}] \phi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$y' = [F \cos. t\sqrt{c\alpha} - E \sqrt{c\alpha} \sin. t\sqrt{c\alpha}] \psi(\alpha, X, Y, Z)$$

$$z' = [F \cos. t\sqrt{c\alpha} - E \sqrt{c\alpha} \sin. t\sqrt{c\alpha}] \chi(\alpha, X, Y, Z).$$

Il n'est pas difficile de voir ici, que les vibrations des particules seront toutes synchrones à celles d'une pendule simple, dont la longueur soit $= \frac{2h}{\alpha T^2 c} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{D}{E}$; par conséquent, quelles que soient les valeurs de α , le fluide pourra toujours faire des oscillations isochrones d'autant d'espèces qu'il y aura de différentes valeurs de α . Au reste ce cas est celui de l'isochronisme ordinaire, où les forces accélératrices sont proportionnelles aux espaces à parcourir.

61. Supposons maintenant

$$\alpha x + \frac{d^2 x}{dX^2} + \frac{d^2 y}{dXdY} + \frac{d^2 z}{dXdZ} = p$$

$$\alpha y + \frac{d^2 y}{dY^2} + \frac{d^2 z}{dYdZ} + \frac{d^2 x}{dYdX} = q$$

$$\alpha z + \frac{d^2 z}{dZ^2} + \frac{d^2 x}{dZdX} + \frac{d^2 y}{dZdY} = r$$

on aura $f(pL + qM + rN) dXdYdZ = (\alpha + k) f(xL + yM + zN) dXdYdZ$.

Donc, pour que $f(xL + yM + zN) dXdYdZ$ devienne $= 0$, il suffira de faire $f(pL + qM + rN) dXdYdZ = 0$, sans qu'il soit séparément $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, comme dans les équations (a), (b), (c).

Or cette dernière formule étant semblable à la formule $f(xL + yM + zN) dXdYdZ$ qui a fourni les équations (a), (b), (c); on trouvera par des pareils procédés les équations suivantes

$$(p) \dots \beta p + \frac{d^2 p}{dX^2} + \frac{d^2 q}{dXdY} + \frac{d^2 r}{dXdZ} = 0$$

$$(q) \dots \beta q + \frac{d^2 q}{dY^2} + \frac{d^2 r}{dYdZ} + \frac{d^2 p}{dYdX} = 0$$

$$(r) \dots \beta r + \frac{d^2 r}{dZ^2} + \frac{d^2 p}{dZdX} + \frac{d^2 q}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs de p , q , r qui étant substituées ci-dessus donneront des nouvelles valeurs de x , y , z &c.

Il faut remarquer que dans la transformation de la formule $f(pL + qM + rN) dXdYdZ$, on trouvera des intégrales à deux changeantes de même forme que celles qui résultent de la formule $f(xL + yM + zN) dXdYdZ$; il faudra donc les faire évanouir, en supposant aux valeurs de p , q , r , les mêmes conditions qu'à celles de x , y , z ; d'où il s'ensuit que, comme les équations (p), (q), (r) sont d'ailleurs entièrement semblables aux équations (a), (b), (c), on aura de même $p =$

$A\phi(\beta, X, Y, Z)$, $q = A\psi(\beta, X, Y, Z)$, $r = A\chi(\beta, X, Y, Z)$, & de plus que la quantité β aura les mêmes valeurs que la lettre $-k$.

Maintenant au lieu de substituer ces valeurs de p , q , r dans les équations en x , y , z ; je multiplie ces mêmes équations telles qu'elles sont par un coëfficient indéterminé H , & j'ajoute chacune d'elles avec sa correspondante d'entre les trois autres (p), (q), (r), ce qui me donne

$$H\alpha x + (\beta - H)p + \frac{Hd^2x}{dX^2} + \frac{d^2p}{dX^2} + \frac{Hd^2y}{dXdY} \\ + \frac{d^2q}{dXdY} + \frac{Hd^2z}{dXdZ} + \frac{d^2r}{dXdZ} = 0$$

$$H\alpha y + (\beta - H)q + \text{\&c.} = 0$$

$$H\alpha z + (\beta - H)r + \text{\&c.} = 0.$$

Soit donc fait $\beta - H = \alpha$; favoir $H = \beta - \alpha$, & supposant pour abréger $Hx + p = p'$, $Hy + q = q'$, $Hz + r = r'$ on aura

$$\alpha p' + \frac{d^2p'}{dX^2} + \frac{d^2q'}{dXdY} + \frac{d^2r'}{dXdZ} = 0$$

$$\alpha q' + \frac{d^2q'}{dY^2} + \frac{d^2r'}{dYdZ} + \frac{d^2p'}{dYdX} = 0$$

$$\alpha r' + \frac{d^2r'}{dZ^2} + \frac{d^2p'}{dZdX} + \frac{d^2q'}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera comme ci-dessus $p' = A\phi(\alpha, X, Y, Z)$, $q' = A\psi(\alpha, X, Y, Z)$, $r' = A\chi(\alpha, X, Y, Z)$, A marquant une nouvelle constante arbitraire.

Or les conditions qui déterminent les constantes de p , q , r étant les mêmes que celles qui déterminent les constantes de x , y , z , par ce qui a été dit ci-dessus, elles seront encore les mêmes pour les constantes de p' , q' , r' ; d'où il s'ensuit qu'on aura aussi pour α les mêmes valeurs que pour β , favoir les mêmes que celles de la quantité $-k$.

Maintenant comme $x = \frac{p'-p}{H}$, $y = \frac{q'-q}{H}$, $z = \frac{r'-r}{H}$;

on aura en substituant, & prenant deux différentes constantes arbitraires A' , A'' , & marquant par a' , a'' deux valeurs quelconques de $-k$;

$$x = A' \phi(a', X, Y, Z) + A'' \phi(a'', X, Y, Z)$$

$$y = A' \psi(a', X, Y, Z) + A'' \psi(a'', X, Y, Z)$$

$$z = A' \chi(a', X, Y, Z) + A'' \chi(a'', X, Y, Z);$$

formules qui serviront aussi pour les autres variables x' , y' , z' , (x) , (y) &c. en ne faisant que changer les constantes A' , A'' .

Or pour trouver le rapport entre les quantités x , y , z , x' , y' , z' , & (x) , (y) , (z) , (x') , (y') , (z') dépendant du tems t , on remarquera qu'il y a ici deux cas, où les équations (p) , (q) , (r) ne remplissent point la condition proposée de $\int (xL + yM + zN) dXdYdZ = 0$; savoir celui, où k est $= -a'$, & celui où $k = -a''$. Il faudra donc dans ces cas recourir immédiatement aux équations (D) & (E) , & substituant au lieu de x , y , z &c. les expressions trouvées faire en sorte, que ces équations deviennent possibles, lorsque $k = -a'$, & $k = -a''$.

Soient désignées par B' , B'' , les constantes qui répondent aux quantités x , y , z , & par E' , E'' , F' , F'' celles qui répondent aux quantités (x) , (y) , (z) , & (x') , (y') , (z') , & posons d'abord $k = -a'$, il est clair que la formule $\int [L\phi(a'', X, Y, Z) + M\psi(a'', X, Y, Z) + N\chi(a'', X, Y, Z)] dXdYdZ$, évanouira par elle même, suivant ce qui a été démontré dans l'Art. préc.; donc l'équation (D) se réduira comme ci-dessus à $A' \int [L\phi(a', X, Y, Z) + M\psi(a', X, Y, Z) + N\chi(a', X, Y, Z)] dXdYdZ = (E' \cos. t \sqrt{ca'} + \frac{F' \sin. t \sqrt{ca'}}{\sqrt{ca'}}) \int [L\phi(a', X, Y, Z) + M\psi(a', X, Y, Z) + N\chi(a', X, Y, Z)] dXdYdZ$;

d'où

d'où l'on tire $A = E' \cos. t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F' \sin. t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}$. On tirera de même de l'équation (E), $B = F' \cos. t\sqrt{c\alpha'} - E' \sqrt{c\alpha'} \sin. t\sqrt{c\alpha'}$.

Après cela on supposera $k = -\alpha''$, & l'on trouvera par des procédés semblables $A'' = E'' \cos. t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F'' \sin. t\sqrt{c\alpha''}}{\sqrt{c\alpha''}}$.
 $B'' = F'' \cos. t\sqrt{c\alpha''} - E'' \sqrt{c\alpha''} \sin. t\sqrt{c\alpha''}$.

On aura donc,

$$x = [E' \cos. t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin. t\sqrt{c\alpha'}] \phi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [E'' \cos. t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin. t\sqrt{c\alpha''}] \phi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$y = [E' \cos. t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin. t\sqrt{c\alpha'}] \psi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [E'' \cos. t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin. t\sqrt{c\alpha''}] \psi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$z = \&c.$$

$$x' = [F' \cos. t\sqrt{c\alpha'} - E' \sqrt{c\alpha'} \sin. t\sqrt{c\alpha'}] \phi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [F'' \cos. t\sqrt{c\alpha''} - E'' \sqrt{c\alpha''} \sin. t\sqrt{c\alpha''}] \phi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$y' = \&c.$$

$$z' = \&c.$$

On voit par ces formules que le mouvement de chaque particule sera composé de deux mouvemens analogues chacun au mouvement représenté par les formules de l'Art. préc.; d'où il est aisé de conclure, que les vibrations ne seront jamais isochrones, à moins que les mouvemens composans ne soient finchrones entr'eux, ce qui ne pourra arriver que, lorsque les quantités α' & α'' seront commensurables entr'elles.

62. En suivant la méthode que nous venons d'expliquer on pourra supposer de nouveau au lieu des équations (p), (q), (r);

$$\beta p + \frac{d^2 p}{dX^2} + \frac{d^2 q}{dXdY} + \frac{d^2 r}{dXdZ} = P$$

$$\beta q + \frac{d^2 q}{dY^2} + \frac{d^2 r}{dYdZ} + \frac{d^2 p}{dYdX} = Q$$

$$\beta r + \frac{d^2 r}{dZ^2} + \frac{d^2 p}{dZdX} + \frac{d^2 q}{dZdY} = R$$

& ensuite

$$\gamma P + \frac{d^2 P}{dX^2} + \frac{d^2 Q}{dXdY} + \frac{d^2 R}{dXdZ} = 0$$

$$\gamma Q + \frac{d^2 Q}{dY^2} + \frac{d^2 R}{dYdZ} + \frac{d^2 P}{dYdX} = 0$$

$$\gamma R + \frac{d^2 R}{dZ^2} + \frac{d^2 P}{dZdX} + \frac{d^2 Q}{dZdY} = 0;$$

d'où, par des opérations analogues à celles qui ont été pratiquées ci-dessus, on parviendra aux formules suivantes,

$$x = [E' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha'}] \phi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [E'' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha''}] \phi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$+ [E''' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha'''} + \frac{F'''}{\sqrt{c\alpha'''}} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha'''}] \phi(\alpha''', X, Y, Z)$$

$$y = \&c.$$

$$z = \&c.$$

$$x' = [F' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha'} - E' \sqrt{c\alpha'} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha'}] \phi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [F'' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha''} - E'' \sqrt{c\alpha''} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha''}] \phi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$+ [F''' \operatorname{cof.} t\sqrt{c\alpha'''} - E''' \sqrt{c\alpha'''} \operatorname{fin.} t\sqrt{c\alpha'''}] \phi(\alpha''', X, Y, Z)$$

$$y' = \&c.$$

$$z' = \&c.$$

qui donnent les mouvemens des particules composés de trois mouvemens simples, analogues chacun à celui de l'Art. 60.; d'où il s'ensuit que l'isochronisme n'y aura lieu que, lorsque les quantités α' , α'' , α''' qui expriment trois valeurs quelconques de $-k$ seront toutes commensurables entr'elles.

En

En suivant encore la même méthode, on trouvera pour les valeurs de x, y, z, x', y', z' des formules composées de 4, 5, 6 &c. termes semblables donc chacun répondra à une quelconque des valeurs de k ; on pourra donc par ce moyen avoir autant de solutions particulières, qu'il y aura de combinaisons à faire, à une à une, à deux à deux, à trois à trois &c. des valeurs de k , de sorte, que leur nombre étant m , celui de solutions particulières sera $2^m - 1$; mais si le nombre des valeurs commensurables est seulement $= n$, il n'y aura que $2^n + m - n - 1$ de ces solutions qui rendent les oscillations isochrones.

R E M A R Q U E.

63. Si on pouvoit les expressions des valeurs de x, y &c. jusqu'à ce que le nombre de leurs termes fût égal à celui des valeurs de k , on auroit alors une solution générale, & applicable à tous les cas possibles; quoique cette proposition ne soit pas une suite nécessaire de l'Analyse précédente, il est aisé de la démontrer en rigueur par le moyen des principes jusqu'ici établis.

Pour cela je suppose qu'on développe la formule (D) en autant de formules particulières qu'il y a de valeurs de k , & qu'on en tire par la combinaison la valeur de chacune des quantités x, y, z , soit en se servant des règles ordinaires, où en employant une méthode analogue à celle, dont nous avons fait usage dans le *Chap. III. des Recher. préc., Art. 24.*; il est facile de voir que ces valeurs seront exprimées de la manière suivante;

$$x = P' \left[S' \cos. t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin. t\sqrt{c\alpha'} \right]$$

$$+ P'' \left[S'' \cos. t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin. t\sqrt{c\alpha''} \right]$$

&c. &c.

$$\begin{aligned}
& + P^m [S^m \cos. t \sqrt{c \alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c \alpha^m}} \sin. t \sqrt{c \alpha^m}] \\
y = & Q' [S' \cos. t \sqrt{c \alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c \alpha'}} \sin. t \sqrt{c \alpha'}] \\
& + Q'' [S'' \cos. t \sqrt{c \alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c \alpha''}} \sin. t \sqrt{c \alpha''}] \\
& \&c. \quad \&c. \\
& + Q^m [S^m \cos. t \sqrt{c \alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c \alpha^m}} \sin. t \sqrt{c \alpha^m}] \\
z = & R' [S' \cos. t \sqrt{c \alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c \alpha'}} \sin. t \sqrt{c \alpha'}] \\
& + R'' [S'' \cos. t \sqrt{c \alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c \alpha''}} \sin. t \sqrt{c \alpha''}] \\
& \&c. \quad \&c. \\
& + R^m [S^m \cos. t \sqrt{c \alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c \alpha^m}} \sin. t \sqrt{c \alpha^m}];
\end{aligned}$$

posant α^m pour la dernière des valeurs de $-k$.

Les quantités S' , S'' &c. S^m & V' , V'' &c. V^m sont mises pour dénoter les valeurs des expressions $f[(x) L + (y) M + (z) N] dX dY dZ$, & $f[(x') L + (y') M + (z') N]$, lorsque on fait successivement $-k = \alpha'$, $= \alpha''$ &c. $= \alpha^m$. Les autres quantités P' , P'' &c. P^m , Q' , Q'' &c. Q^m , R' , R'' &c. R^m sont différentes pour chaque particule, c'est-à-dire, sont des fonctions variables de X , Y , Z .

Or, si l'on regarde ces fonctions comme indéterminées, on pourra en connoître la valeur par le moïen de la substitution & de la comparaison, ainsi qu'on le pratique dans la méthode connue des indéterminées. Substituons donc au lieu de x , y , z dans l'équation (D) les expressions ci-dessus, & supposant pour abréger que S , V dénotent, en général les valeurs de S' , S'' &c. V' , V'' &c., lorsqu'il y a encore $-k$ au lieu de α' , α'' &c. on aura

$$\begin{aligned}
& [S' \cos. t \sqrt{c \alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c \alpha'}} \sin. t \sqrt{c \alpha'}] f(P'L + Q'M + R'N) dX dY dZ \\
& \qquad \qquad \qquad + [S''
\end{aligned}$$

$$+ [S'' \cos. t \sqrt{c} \alpha'' + \frac{V''}{\sqrt{c} \alpha''} \sin. t \sqrt{c} \alpha''] f(P'' L + Q'' M + R'' N) dX dY dZ$$

&c. &c.

$$+ [S^m \cos. t \sqrt{c} \alpha^m + \frac{V^m}{\sqrt{c} \alpha^m} \sin. t \sqrt{c} \alpha^m] f(P^m L + Q^m M + R^m N) dX dY dZ$$

$$= S \cos. t \sqrt{-ck} + \frac{V}{\sqrt{-ck}} \sin. t \sqrt{-ck}.$$

Equation qui doit être identique en faisant $-k = \alpha'$,
 $= \alpha''$, $= \&c.$, $= \alpha^m$.

Soit donc posé, en général $-k = \alpha^\mu$, le second membre de l'équation deviendra $S^\mu \cos. t \sqrt{c} \alpha^\mu + \frac{V^\mu}{\sqrt{c} \alpha^\mu} \sin. t \sqrt{c} \alpha^\mu$,

& le terme μ^{me} du premier membre étant

$$S^\mu \cos. t \sqrt{c} \alpha^\mu + \frac{V^\mu}{\sqrt{c} \alpha^\mu} \sin. t \sqrt{c} \alpha^\mu] f(P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N) dX dY dZ,$$

pour identifier les deux membres, on supposera que $f(P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N) dX dY dZ$ soit $= 1$, & que toutes les autres formules exprimées généralement $f(PL + QM + RN) dX dY dZ$ soient nulles, $-k$ étant $= \alpha^\mu$ dans les valeurs de L, M, N ; d'où l'on voit que les valeurs de P, Q, R devront être telles que la formule générale $f(P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N) dX dY dZ$ soit toujours $= 1$, lorsque $k = -\alpha^\mu$, & qu'elle soit toujours $= 0$, lorsque k a une autre valeur quelconque.

Or, par ce qui a été démontré dans l'Art. 60., on trouvera d'abord, pour remplir cette dernière condition, les équations suivantes,

$$\begin{aligned} \alpha^\mu P^\mu &= \frac{d^2 P^\mu}{dX^2} + \frac{d^2 Q^\mu}{dXdY} + \frac{d^2 R^\mu}{dXdZ} \\ \alpha^\mu Q^\mu &= \frac{d^2 Q^\mu}{dY^2} + \frac{d^2 R^\mu}{dYdZ} + \frac{d^2 P^\mu}{dYdX} \\ \alpha^\mu R^\mu &= \frac{d^2 R^\mu}{dZ^2} + \frac{d^2 P^\mu}{dZdX} + \frac{d^2 Q^\mu}{dZdY} \end{aligned}$$

d'où il résultera comme dans l'Art. cité

$$P^\mu = A \phi(\alpha^\mu, X, Y, Z); \quad Q^\mu = A \psi(\alpha^\mu, X, Y, Z)$$

$$R^\mu = A \chi(\alpha^\mu, X, Y, Z).$$

Soit maintenant la valeur de $\int [L\phi(\alpha^\mu, X, Y, Z) + M\psi(\alpha^\mu, X, Y, Z) + N\chi(\alpha^\mu, X, Y, Z)] dXdYdZ$, en y posant $-k = \alpha^\mu$, exprimée par D^μ ; on aura pour satisfaire à la première condition $AD^\mu = 1$, & par conséquent $A = \frac{1}{D^\mu}$.

Substituant enfin les valeurs trouvées de P, Q, R , dans les expressions de x, y, z , & posant pour plus de simplicité $E', E'', \&c.$ au lieu de $\frac{S'}{D}, \frac{S''}{D''} \&c.$ & $F', F'', \&c.$ au lieu de $\frac{V'}{D}, \frac{V''}{D''} \&c.$ il viendra

$$x = [E' \cos. t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \sin. t\sqrt{c\alpha'}] \phi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [E'' \cos. t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \sin. t\sqrt{c\alpha''}] \phi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$\&c. \quad \&c.$$

$$+ [E^m \cos. t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{F^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \sin. t\sqrt{c\alpha^m}] \phi(\alpha^m, X, Y, Z)$$

$$y = \&c.$$

$$z = \&c.$$

Par des raisonnemens, & des opérations semblables on tirera de l'équation (E)

$$x' = [F' \cos. t\sqrt{c\alpha'} - E' \sqrt{c\alpha'} \sin. t\sqrt{c\alpha'}] \phi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [F'' \cos. t\sqrt{c\alpha''} - E'' \sqrt{c\alpha''} \sin. t\sqrt{c\alpha''}] \phi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$+ \&c.$$

$$+ [F^m \cos. t\sqrt{c\alpha^m} - E^m \sqrt{c\alpha^m} \sin. t\sqrt{c\alpha^m}] \phi(\alpha^m, X, Y, Z).$$

$$y' = \&c.$$

$$z' = \&c.$$

Voilà, comme l'on voit, une construction générale des mêmes équations que nous avons déjà traité dans le §. 2. du *Chap. préc.* par une voie fort différente, & seulement
par

par approximation; mais il faut avouer que cette construction n'est guères utile pour la connoissance du mouvement des particules de l'air. Car les valeurs de x , y , z sont composées de suites infinies, dont les termes ne sont point convergens, ou du moins ne peuvent point être regardés comme tels, puisque les constantes E , F , que ces termes renferment, dépendent des premières valeurs de x , y , z , & de x' , y' , z' , qui doivent être supposées quelconques.

S C O L I E .

64. Il est clair que la méthode de la Remarque précédente peut aussi être employée dans une infinité d'autres équations de même espèce, & qu'elle s'applique également, soit que le nombre des corps mobiles soit infini, ou qu'il soit fini; de sorte qu'on peut la regarder comme une simplification, & une généralisation de celle, dont nous nous sommes servis dans la *Chap. III. des Rech. préc.*

Au reste cette méthode sert à démontrer la belle Proposition de M. Daniel Bernoulli que, lorsque un système quelconque de corps fait des oscillations infiniment petites, le mouvement de chaque corps peut être considéré, comme composé de plusieurs mouvemens partiels, & synchrones chacun à celui d'un pendule simple. *Voies les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1753.*

Fautes à corriger dans la Dissertation précédente.

Pag. 15 lig. 16; & qui renferme même quelque chose de contradictoire à la nature du Problème; lisez & qui est même incompatible avec les principes de l'Analyse de M. Newton.

Pag. 23 lig. 4; au lieu de R dans le terme $R \sqrt{-ck}$ sin. & $\sqrt{-ck}$; mettez S .

ibid. changez les signes aux deux dernières termes des équations $s = \&c.$, & $r = \&c.$ comme aussi aux termes correspondans des équations qui suivent $\int \zeta M dx = \&c.$, $\int u M dx = \&c.$ Au reste cette faute a été corrigée dans la suite du calcul.

Pag. 25 lig. 16; dans les seconds termes; lisez dans les seconds membres.

lig. 19; dans ces termes; lisez dans les termes de ces membres.

Pag. 32 lig. 27; de la partie $A'S$; mettez de la partie $A'S'$.
lig. suiv.; comme aussi que; effacez que.

Pag. 48 lig. 21 au lieu de $\frac{2h}{T} \times \frac{E}{D}$; posez $\frac{1}{T} \sqrt{\frac{2hE}{D}}$.

Pag. 52 lig. 6; que l'autre; effacez l'autre.

Pag. 59; dans l'équation $r = \&c.$ au lieu de $R \sqrt{ck}$ fin.
 $t \sqrt{-ck}$; mettez $S \sqrt{-ck}$ fin. $t \sqrt{-ck}$.

Pag. 67 lig. 5; & de dy au lieu; mettez & $-dy$ au lieu.
lig. 7; placez le signe $-$ avant le premier terme de la valeur de (Z) . Même correction aux formules des lig. 22 & 23.

Pag. 72 lig. 17; changez le signe $-$ en $+$ avant le dernier terme de l'équation de cette ligne, $\phi(a+y) = \&c.$

lig. 22; mettez $\phi(a+y)$ au lieu de $\phi(a+z)$.

Pag. 96 lig. dernière; $X = hx^m$, posez $X = hx^n$.

Pag. 104 lig. 17; $s + \mu v$ lisez $s + \mu r$.

lig. 21; posez $e^{\sqrt{ck}}$ au lieu de $e^{-\sqrt{ck}}$ après le signe \int dans le dernier terme de l'équation (A) .

Pag. 105 lig. 6; après $\int Z M dx$, ajoutez $\int V M dx$.

Pag. 110 lig. 17; que M soit; lisez que ζ , & M soient.

Pag. 140 lig. 14; $= \frac{\sqrt{3c}}{6}$; lisez $= \frac{\sqrt{7c}}{6}$.

Pag. 146 lig. 16; au lieu de $L(a-u, Y, Z)$; $= \&c.$ mettez
 $L(a+u, Y, Z) = \&c.$

Pag. 157 lig. 13 & 14; à la quinte en haut de ce même Son, & puis à la double tierce; &c. lisez pour plus d'intelligence à la douzième, & puis à la dixseptième &c. de ce même Son.

E S S A I

D'UNE NOUVELLE METHODE

POUR DETERMINER LES *MAXIMA*, ET LES *MINIMA*

DES FORMULES INTEGRALES INDEFINIES.

PAR M. DE LA GRANGE.

POUR peu qu'on soit au fait des Principes du Calcul différentiel, on connoit la méthode de déterminer les plus grandes, & les moindres ordonnées des courbes; mais il est des questions de *maximis*, & *minimis* d'un genre plus élevé, & qui, quoique dépendantes de la même méthode ne s'y appliquent pas si aisément. Ce sont celles, où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans lesquelles une expression intégrale donnée soit un *maximum*, ou un *minimum* par rapport à toutes les autres courbes.

Le premier Problème de ce genre, que les Géomètres aient résolu, est celui de la *Brachystrichone*, ou ligne de la plus vite descente, que M. Jean Bernoulli proposa vers la fin du siècle passé. On n'y parvint alors que par des voies particulières, & ce ne fut que quelque tems après, & à l'occasion des recherches sur les *Isopérimètres*, que le grand Géomètre dont nous venons de parler, & son illustre frere M. Jacques Bernoulli donnerent quelques règles générales pour résoudre plusieurs autres questions de même nature. Mais ces règles n'ayant pas assez d'étendue, le célèbre M. Euler a entrepris de réduire toutes les recherches de ce genre à une méthode générale, dans l'ouvrage intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes: sive solutio Problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Ouvrage original, & qui brille par tout d'une

profonde science de calcul. Cependant, quelque ingénieuse & féconde que soit sa méthode, il faut avouer qu'elle n'a pas toute la simplicité qu'on peut désirer dans un sujet de pure Analise. L'Auteur le fait sentir lui même dans l'Art. 39. du Chap. 2. de son livre par ces paroles: *Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica & lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimique, loco Pd p scribi debere* — pdP.

Maintenant voici une méthode qui ne demande qu'un usage fort simple des principes du Calcul différentiel & intégral; mais avant tout je dois avertir que, comme cette méthode exige que les mêmes quantités varient de deux manières différentes, pour ne pas confondre ces variations, j'ai introduit dans mes calculs une nouvelle caractéristique δ . Ainsi δZ exprimera une différence de Z qui ne fera pas la même que la dZ , mais qui sera cependant formée par les mêmes règles; de sorte qu'ayant une équation quelconque $dZ = m dx$, on pourra avoir également $\delta Z = m \delta x$, & ainsi des autres. Ceta posé je viens d'abord au Problème suivant.

I.

PROBLEME I. Etant proposée une formule intégrale indéfinie représentée par fZ , où Z désigne une fonction quelconque déterminée des variables x, y, z , & de leurs différences $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z$ &c., trouver la relation que ces variables doivent avoir entr'elles, pour que la formule fZ devienne un *maximum*, ou un *minimum*.

SOLUTION. Suivant la méthode connue de *maximis*, & *minimis*, il faudra différentier la proposée fZ , en regardant les quantités $x, y, z, d^2x, d^2y, d^2z$ &c. comme variables, & faire la différentielle, qui en résulte; égale à zero. Marquant donc ces variations par δ , on aura d'abord pour l'équation du *maximum*, ou *minimum* $\delta \cdot fZ = 0$, où, ce qui en est l'équivalent, $f\delta Z = 0$. Or

Or soit Z tel que $\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \&c. + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + R\delta d^3y + \&c. + v\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z + \rho\delta d^3z + \&c.$ il en viendra l'équation

$$fn\delta x + fp\delta dx + fq\delta d^2x + fr\delta d^3x + \&c. + fN\delta y + fP\delta dy + fQ\delta d^2y + fR\delta d^3y + \&c. + fv\delta z + f\pi\delta dz + f\chi\delta d^2z + f\rho\delta d^3z + \&c. = 0;$$

Mais on comprend aisément que $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$, & ainsi des autres; de plus on trouve par la méthode des intégrations par parties $fp\delta dx = p\delta x - \int dp\delta x$, $fq\delta d^2x = q\delta dx - d\delta q\delta x + \int d^2q\delta x$, $fr\delta d^3x = r\delta d^2x - d\delta r\delta x + d^2r\delta x - \int d^3r\delta x$; & ainsi du reste; donc l'équation précédente se changera en celle-ci,

$$(A) \dots f(n - dp + d^2q - d^3r + \&c.) \delta x + f(N - dP + d^2Q - d^3R + \&c.) \delta y + f(v - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c.) \delta z + (p - dq + d^2r - \&c.) \delta x + (q - dr + \&c.) d\delta x + (r - \&c.) d^2\delta x + \&c. + (P - dQ + d^2R - \&c.) \delta y + (Q - dR + \&c.) d\delta y + (R - \&c.) d^2\delta y + \&c. + (\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.) \delta z + (\chi - d\rho + \&c.) d\delta z + (\rho - \&c.) d^2\delta z + \&c. = 0;$$

d'où l'on tirera premièrement l'équation indéfinie

$$(B) \dots (n - dp + d^2q - d^3r + \&c.) \delta x + (N - dP + d^2Q - d^3R + \&c.) \delta y + (v - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c.) \delta z = 0;$$

& ensuite l'équation déterminée

$$(C) \dots (p - dq + d^2r - \&c.) \delta x + (q - dr + \&c.) d\delta x + (r - \&c.) d^2\delta x + \&c. + (P - dQ + d^2R - \&c.) \delta y + (Q - dR + \&c.) d\delta y + (R - \&c.) d^2\delta y + \&c. + (\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.) \delta z + (\chi - d\rho + \&c.) d\delta z + (\rho - \&c.) d^2\delta z + \&c. = 0.$$

Cette équation se rapporte au dernier point de l'intégrale $\int Z$; mais il faut observer, que comme chacun de ses termes

mes comme $p \delta x$ dépend d'une intégration partielle de la formule $\int p d \delta x$, on peut lui ajouter, ou en retrancher une quantité constante. Or la condition, par laquelle cette constante doit se déterminer est qu'elle fasse évanouir le terme $p \delta x$ au point, où commence l'intégrale $\int p d \delta x$; il faudra donc retrancher de $p \delta x$ sa valeur en ce point; d'où résulte la règle suivante. Soit le premier membre de l'équation (C) exprimé généralement par M , & soit la valeur de M , au point où commence l'intégrale $\int Z$, désignée par M , & au point où cette intégrale finit, désignée par M' , on aura $M' - M = 0$ pour l'expression complète de l'équation (C).

Maintenant pour se défaire dans les équations trouvées des différences indéterminées δx , δy , δz ; $d \delta x$, $d \delta y$ &c. on examinera d'abord si par la nature du Problème il y a entr'elles quelque rapport donné; & les ayant réduit au plus petit nombre possible, on fera ensuite le coefficient de chacune de celles qui resteront égal à zero. Si elles sont absolument indépendantes les unes des autres, l'équation (B) nous donnera sur le champ les trois suivantes

$$\begin{aligned} n - dp + d^2q - d^3r + \&c. &= 0 \\ N - dP + d^2Q - d^3R + \&c. &= 0 \\ p - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c. &= 0 \end{aligned}$$

I I.

EXEMPLE. Soit cherchée la courbe brachistochrone dans le vuide. Nommant x l'abscisse verticale, & y , & z les deux ordonnées horizontales, & perpendiculaires l'une à l'autre, la formule qui exprime le temps sera

$\int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{x}}$, laquelle étant comparé à $\int Z$, on a $Z = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{x}}$; & différentiant par δ suivant les règles ordinaires des différentiations, δZ

$$= - \frac{\delta x \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{2x\sqrt{x}} + \frac{dx \delta dx}{\sqrt{x} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} + \frac{dy \delta dy}{\sqrt{x} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} + \frac{dz \delta dz}{\sqrt{x} \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} \text{ donc,}$$

posant pour abréger $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$,

$$n = - \frac{ds}{2x\sqrt{x}} \quad p = \frac{dx}{ds\sqrt{x}}, \quad P = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}, \quad \pi = \frac{dz}{ds\sqrt{x}},$$

& toutes les autres quantités q, r, N, Q &c. = 0.

I I I.

PREMIER CAS. Or si le Problème est de trouver en général, entre toutes les courbes possibles, celle de la plus vite descente, on aura en ce cas les équations

$$n - dp = 0; \quad dP = 0; \quad dP' = 0, \quad \text{favoit}$$

$$- \frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0; \quad - d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0; \quad - d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}}$$

= 0; ces trois équations devant représenter une courbe unique, il faut qu'elles se réduisent à deux seulement; c'est de quoi il est facile de s'affurer par le calcul; car, la seconde étant multipliée par $2 \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$ & ajoutée à la troi-

sième multipliée par $2 \frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, il vient, à cause de $ds^2 =$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad d \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{dx^2}{ds^2 x} \right) = 0, \text{ favoit, en}$$

différentiant & divisant le tout par $\frac{2 \cdot dx}{ds\sqrt{x}}, - \frac{ds}{2x\sqrt{x}} -$

$$d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0 \text{ qui est la première équation.}$$

Présentement, si l'on intègre les deux équations $d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$

$$= 0, \quad \& \quad d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0, \text{ on a } \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \& \quad \frac{dz}{ds\sqrt{x}} =$$

Z

$= \frac{1}{\sqrt{b}}$; d'où l'on tire d'abord $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; ce qui fait voir que la courbe cherchée est toute dans un même plan vertical, & que par conséquent elle est à simple courbure. Pour la mieux connoître rapportons-là à deux coordonnées prises dans son même plan. Que x soit l'une, & t l'autre, on aura $\sqrt{(y^2 + z^2)} = t$, & puisque $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, on aura en intégrant $z = y \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (je n'ajoute point de constante, parce que je suppose que l'axe des x passe par la courbe même); d'où l'on tire $z = t \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$, $y = t \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$, $dy = dt \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dt^2)}$, & enfin $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b} dt}{\sqrt{(a+b)} \times \sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2 + dt^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ce qui se réduit, en posant $\frac{ab}{a+b} = c$, à $dt = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$, équation d'une cycloïde décrite sur une base horizontale par un cercle, dont le diamètre = c .

I V.

Maintenant, si le premier & le dernier point de la brachistochrone sont donnés, il est clair que, les coordonnées x, y, z étant invariables pour ces points, leurs différences $\delta x, \delta y, \delta z, d\delta x, d\delta y$ &c. seront nulles, & par conséquent aussi tous les termes de l'équation (C); la constante c devra donc être déterminée en sorte, que la cycloïde passe par les deux points donnés.

Si le premier point est donné, & que la brachistochrone doit être telle qu'un corps partant de ce point arrive dans le moindre tems à un plan horizontal donné, alors M fera

fera nul de lui même, & l'équation (C) donnera $M' = 0$,
 favoir $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} \delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{x}} \delta y + \frac{dz}{ds\sqrt{x}} \delta z = 0$, équation
 qui devra avoir lieu seulement dans le point où la courbe
 rencontre le plan; or ce plan étant donné de position,
 l'abscisse x qui y répond sera donnée aussi, par conséquent
 on aura $\delta x = 0$, & le reste de l'équation devra être
 vrai quelles que soient δy , & δz . On aura donc $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$

$= 0$, $\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$, $a = \infty$, $b = \infty$, ce qui transfor-
 mera la cycloïde en une droite verticale. Mais si le plan
 donné au lieu d'être horizontal, étoit vertical, & perpen-
 diculaire à l'axe des y , ou des z , on auroit alors δy
 $= 0$ & par conséquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$, $\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$ pour

le premier cas, & $\delta z = 0$, & par conséquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$

$\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$ pour le second; par-là on détermineroit les
 constantes a , & b , & l'on trouveroit que la cycloïde de-
 vroît être telle qu'elle rencontrât le plan donné à angles
 droits.

En général si au lieu d'un plan, on prend une surface
 quelconque pour terme de la brachistochrone, il est clair
 que les δx , δy , δz de l'équation (C) devront avoir
 entr'elles un rapport dépendant de la nature de la surface
 donnée; de sorte, que $dz = Tdx + Vdy$ étant supposée
 l'équation différentielle de cette surface, on aura $\delta z = T\delta x$
 $+ V\delta y$; donc substituant cette valeur de δz dans l'équa-
 tion (C) on aura

$$\left(\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + T \frac{dz}{ds\sqrt{x}}\right) \delta x + \left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}} + V \frac{dz}{ds\sqrt{x}}\right) \delta y = 0;$$

d'où l'on tire séparément $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + T \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$; & $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} + V \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$;

$V d\zeta = 0$. Equations qui font connoître que la surface proposée doit toujours être coupée à angles droits par la courbe cherchée.

Si la brachistochrone doit simplement être terminée par deux surfaces données de position; alors pour remplir l'équation (C) il est nécessaire de faire séparément $M = 0$, & $M' = 0$; d'où l'on tire pour le premier, & le dernier point de la courbe les mêmes conditions qu'on a trouvé dans le cas précédent pour le dernier point seulement; on en conclura donc que la courbe cherchée sera celle, d'entre toutes les cycloïdes possibles, qui rencontrera perpendiculairement les deux surfaces proposées.

V.

SECOND CAS. Supposons maintenant que la brachistochrone doive être toute couchée sur une surface donnée, dont l'équation soit $d\zeta = p dx + q dy$; changeant la caractéristique d en δ , on aura donc $\delta\zeta = p\delta x + q\delta y$, équation qui donne le rapport qu'il doit y avoir en général entre les différences $\delta\zeta$, δy , δx . Substituant cette valeur de $\delta\zeta$ dans l'équation (B), & faisant ensuite les deux coefficients de δx , & de δy chacun $= 0$ on aura pour la courbe cherchée

$$- p d \cdot \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} - \frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$$

$$- q d \cdot \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0.$$

Ces équations reviennent au même, étant combinées avec l'équation à la surface $d\zeta = p dx + q dy$. Car multipliant la première par $\frac{2 dx}{ds\sqrt{x}}$, & la seconde par $\frac{2 dy}{ds\sqrt{x}}$ & les joignant ensemble, on trouve, après toutes les

rédu-

réductions, $-d \cdot \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} = 0$. On prendra donc une de ces équations à volonté, & on la combinera avec l'équation $d\zeta = p dx + q dy$, pour avoir la brachistochrone cherchée.

V I.

A l'égard de l'équation (C) il est clair que tous les termes de cette équation s'évanouiront, lorsque on supposera donnés le premier & le dernier point de la courbe; mais si l'un d'eux étoit arbitraire, alors aiant substitué au lieu de $\delta\zeta$ sa valeur $p \delta x + q \delta y$, on auroit les équations $p \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$, & $q \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, qu'il faudroit vérifier par rapport à ce point. Mais si l'on avoit tracée sur la surface une courbe, à laquelle le mobile dût arriver dans le tems le plus court; supposant cette courbe donnée par l'équation $dy = m dx$, on auroit de même $\delta y = m \delta x$; &, cette valeur de δy étant substituée dans l'équation (C) on feroit $p \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} + (q \frac{d\zeta}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}}) m = 0$, ou bien $(p + qm) d\zeta + dx + m dy = 0$; équation qui renferme les conditions nécessaires pour que la brachistochrone rencontre à angles droits la courbe proposée.

V I I.

REMARQUE I. M. Euler est le premier qui ait donné des formules générales pour trouver les courbes, dans lesquelles une fonction intégrale donnée est la plus grande, ou la plus petite; (*Voies le Traité dont on a fait mention plus haut.*)
mais

mais les formules de cet Auteur sont moins générales que les nôtres; 1.° parce qu'il ne fait varier que la seule changeante y dans l'expression Z ; 2.° parce qu'il suppose, que le premier & le dernier point de la courbe sont fixes. En introduisant ces conditions dans nos formules, elles deviendront entièrement conformes à celles du Prob. V. du Traité cité; il faudra seulement mettre $Z dx$ au lieu de Z , & ensuite $\frac{P}{dx}$, $\frac{Q}{dx^2}$ &c. au lieu de P , Q &c., dx étant constant.

VIII.

REMARQUE 2. Soit supposé $dy = A dx$, $dA = B dx$ &c. $d\alpha = a dx$, $d\alpha = \beta dx$ &c. il est clair, qu'en substituant ces valeurs dans l'expression Z , elle prendra cette forme $X dx$, où X sera une fonction quelconque algébrique des variables finies x , y , α , A , B &c. a , β &c.; faisons donc $\delta X = N' \delta x + n' \delta y + v' \delta \alpha + P' \delta A + Q' \delta B + \text{\&c.} + \pi' \delta a + \chi' \delta \beta + \text{\&c.}$ on aura $\delta Z = \delta \cdot X dx = \delta X dx + X \delta dx = \delta X dx + \frac{Z \delta dx}{dx} =$

$N' dx \delta x + \frac{Z}{dx} \delta dx + n' dx \delta y + v' dx \delta \alpha + P' dx \delta A + Q' dx \delta B + \text{\&c.} + \pi' dx \delta a + \chi' dx \delta \beta + \text{\&c.}$ Or $dy = A dx$, $d^2 y = B dx^2 + A d^2 x$, &c. donc $\delta dy = \delta A dx + A \delta dx$, $\delta d^2 y = \delta B dx^2 + \delta A d^2 x + 2 B dx \delta dx + A \delta d^2 x$, &c.; on trouvera de même $\delta d^2 \alpha = \delta a dx + a \delta dx$, $\delta d^2 \alpha = \delta \beta dx^2 + \delta a d^2 x + 2 \beta dx \delta dx + a \delta d^2 x$, &c.; substituant ces valeurs dans l'expression de δZ , & ordonnant les termes on aura $\delta Z = n \delta x + (p + P A + 2 Q B dx + \text{\&c.} + \pi a + 2 \chi \beta dx + \text{\&c.}) \delta dx + (q + Q A + \text{\&c.} + \chi a + \text{\&c.}) \delta d^2 x + \text{\&c.} + N \delta y + v \delta \alpha + (P dx + Q d^2 x + \text{\&c.}) \delta A + (Q dx^2 + \text{\&c.}) \delta B + \text{\&c.} + (\pi dx + \chi d^2 x + \text{\&c.})$

&c.) $\delta a + (\chi dx^2 + \&c.) \delta \beta + \&c.$ Cette valeur de δZ doit être identique avec celle qu'on trouve précédemment; comparant donc les termes affectés de δdx , $\delta \delta^2 x$ &c. on aura les équations $\frac{Z}{dx} = p + PA + 2QBdx + \&c. + \pi a + 2\chi\beta dx + \&c. q + QA + \&c. + \chi a + \&c. = 0.$

La seconde étant différenciée, & ensuite retranchée de la première, on a $\frac{Z}{dx} = p - dq + \&c. + PA + QBdx - dQA + \&c. + \pi a + \chi\beta dx - d\chi a + \&c. = 0.$ La même équation étant multipliée par d^2x , & ensuite ajoutée à celle-ci multipliée par dx , il vient $Z = pdx + Pdy + \pi d\zeta + qd^2x - dqdx + Qd^2y - dQdy + \chi d^2\zeta - d\chi d\zeta + \&c.$ Différenciant, & effaçant ce qui se détruit, on aura, à cause de $dZ = ndx + Ndy + \nu d\zeta + pd^2x + Pd^2y + \&c.$, $(n - dp + d^2q + \&c.) dx + (N - dP + d^2Q + \&c.) dy + (\nu - d\pi + d^2\chi - \&c.) d\zeta = 0$; équation qui est d'elle même identique, & qui montre par conséquent, que les équations trouvées à la fin de l'Art. I. sont telles, que si on en prend deux à volonté, la troisième s'ensuit toujours nécessairement.

I X.

PROBLEME 2. Rendre la formule $\int Z$ un *maximum*, ou un *minimum*, en supposant que Z est une fonction quelconque algébrique composée des changeantes x, y, ζ avec leurs différences $dx, dy, d\zeta, d^2x, d^2y$ &c., & de la quantité $\Pi = \int Z'$, Z' étant une autre fonction algébrique quelconque des seules changeantes x, y, ζ &c., & de leurs différences $dx, dy, d\zeta, d^2x, d^2y$ &c.

SOLUTION. Soit, en différenciant par δ , & ne regardant que y comme variable, $\delta Z = L\delta\Pi + n\delta x + p\delta dx$

+ $q \delta d^2 x + \&c.$ + $N \delta y + P \delta dy + Q \delta d^2 y + \&c.$
 + $v \delta z + \pi \delta dz + \chi \delta d^2 z + \&c.$ & $\delta Z' = n' \delta x +$
 $p' \delta dx + q' \delta d^2 x + \&c.$ + $N' \delta y + P' \delta dy + Q' \delta d^2 y$
 + $\&c.$ + $v' \delta z + \pi' \delta dz + \chi' \delta d^2 z + \&c.$, on aura, par
 l'hypothèse, $\delta \Pi = \delta f Z' = f \delta Z' = f [n' \delta x + p' \delta dx +$
 $q' \delta d^2 x + \&c.]$, donc $\delta \cdot f Z = f \delta Z = f [n \delta x +$
 $p \delta dx + q \delta d^2 x + \&c.] + f L f [n' \delta x + p' \delta dx +$
 $q' \delta d^2 x + \&c.]$. La première partie se réduira, comme
 dans le Prob. 1., à $f(n - dp + d^2 q - \&c.) \delta x +$
 $(p - dq + \&c.) \delta x + (q - \&c.) d \delta x + \&c.$
 A l'égard de la seconde on la transformera d'abord en
 $f L \times f [n' \delta x + p' \delta dx + q' \delta d^2 x + \&c.] - f [f L$
 $\times (n' \delta x + p' \delta dx + q' \delta d^2 x + \&c.)]$.

Or soit la valeur totale de l'intégrale $f L$ représentée par
 H , prenant cette quantité H pour constante, la transfor-
 mée précédente se réduira à celle-ci

$$f[(H - fL) \times (n' \delta x + p' \delta dx + q' \delta d^2 x + \&c.)]$$

laquelle se transformera aisément, par des intégrations par
 parties, en

$$f[n'(H - fL) - d \cdot p'(H - fL) + d^2 \cdot q'(H - fL) - \&c.] \delta x$$

$$+ [p'(H - fL) - d \cdot q'(H - fL) + \&c.] \delta x$$

$$+ [q'(H - fL) - \&c.] d \delta x + \&c.$$

Pofant donc pour abrégier

$$n + n'(H - fL) = (n), \quad p + p'(H - fL) = (p)$$

$$q + q'(H - fL) = (q) \quad \&c., \quad \&c. \text{ de même } N + N'$$

$$(H - fL) = (N), \quad P + P'(H - fL) = (P)$$

$$P + Q'(H - fL) = (Q) \quad \&c. \text{ comme auffi } v + v'$$

$$(H - fL) = (v), \quad \pi + \pi'(H - fL) = (\pi), \quad \chi + \chi'$$

$$(H - fL) = (\chi) \quad \&c., \text{ on aura en général}$$

$$\delta \cdot f Z = f[(n) - d \cdot (p) + d^2 (q) - \&c.] \delta x$$

$$+ f[(N) - d \cdot (P) + d^2 (Q) - \&c.] \delta y$$

$$+ f[(v) - d \cdot (\pi) + d^2 (\chi) - \&c.] \delta z$$

$$+ [(p) - d \cdot (q) + \&c.] \delta x + [(q) - \&c.] d \delta x + \&c.$$

$$+ [(P) - d \cdot (Q) + \&c.] \delta y + [(Q) - \&c.] d \delta y + \&c.$$

$$+ [(\pi) - d \cdot (\chi) + \&c.] \delta \zeta + [(\chi) - \&c.] \delta d \zeta + \&c. \\ = 0 \quad (D)$$

Equation réduite à la forme de l'équation (A) du Prob. préc. ; donc &c.

X.

COROLLAIRE. Ce seroit la même méthode qu'il faudroit suivre si la quantité Z' renfermoit une autre fonction intégrale indéfinie $\Pi' = fZ''$, enforte que $\delta Z' = L' \delta \Pi' + n' \delta x + p' \delta dx + \&c.$, & $\delta Z'' = n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c. + N'' \delta y + P'' \delta dy + Q'' \delta d^2 y + \&c. + v' \delta \zeta + \pi'' \delta d \zeta + \chi'' \delta d^2 \zeta + \&c.$ Alors l'expression de δfZ seroit augmentée de la formule $fL fL' f(n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)$; or cette formule se réduit d'abord à $f[(H - fL) L' f(n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)]$, & ensuite à $f[(H' - f(H - fL) L') \times (n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)]$, en posant H' pour la valeur totale de l'intégrale $f(H - fL) L'$. Par conséquent il n'y aura qu'à augmenter, dans la formule (D), la valeur de (n) de la quantité $n'' [H' - f(H - fL) L]$, celle de (p) de la quantité $p'' [H' - f(H - fL) L]$, & ainsi des autres.

Il est aisé de voir maintenant le procédé qu'il faudroit suivre si la formule Z'' contenoit encore une autre formule intégrale fZ''' , & ainsi de suite.

X I.

PROBLEME 3. Trouver l'équation du *maximum*, ou du *minimum* de la formule fZ , lorsque Z est donné simplement par une équation différentielle qui ne renferme d'autres différences de Z que la première.

SOLUTION. Quelle que soit l'équation proposée, pourvu qu'elle soit délivrée de tout signe d'intégration, il est clair, qu'en la différentiant par δ , on pourra toujours la mettre

A a

fous

sous la forme suivante $\delta dZ + T\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \&c. + N\delta y + P\delta dy + \&c. + v\delta z + \pi\delta dz + \&c.$; d'où l'on tirera, à cause de $\delta dZ = d\delta Z$, la valeur de δZ exprimée par $e^{-fT} \int e^{fT} (n\delta x + p\delta dx + \&c.)$, & delà $\delta fZ = \int e^{-fT} \int e^{fT} (n\delta x + p\delta dx + \&c.)$.

En suivant les principes établis dans le Problème précédent, on supposera que G soit la valeur totale de $\int e^{-fT}$, & faisant ensuite $n e^{fT} (G - \int e^{-fT}) = (n)$, $p e^{fT} (G - \int e^{-fT}) = (p)$, $q e^{fT} (G - \int e^{-fT}) = (q)$ &c., on trouvera pour l'expression de δfZ une formule tout-à-fait semblable à la formule (D) ci-dessus.

X I I.

SCHOLIE. Les formules qui font l'objet des deux Problèmes précédens, sont analogues à celles que M. Euler a traitées dans le Chap. III. de son Ouvrage sur cette matière.

Le Lecteur qui sera curieux de comparer nos solutions avec celles que ce savant Auteur a trouvées par une méthode différente verra qu'elles s'accordent dans les résultats, en aiant égard à ce qu'on a dit dans l'Art. VII. ci-dessus. Au reste M. Euler n'est pas allé plus loin, & n'a point examiné les cas où la formule Z dépendroit d'une équation différentielle, d'un ordre plus élevé que le premier. Le Corollaire suivant ne laissera plus rien à désirer sur ce sujet.

X I I I.

COROLLAIRE. Supposons que dans l'équation différentielle proposée il se trouve des différences de Z du second ordre; de sorte qu'en différenciant par δ , il vienne $\delta d^2 Z + T\delta d\zeta + V\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \&c.$ Je commence par mettre la caractéristique d avant la caractéristique δ , ensuite je multiplie toute l'équation par une variable indéter-

déterminée α , & j'en prend la somme, en affectant les deux membres du signe f ; après je transforme le premier membre $f(\alpha d^2 \delta Z + \alpha T d \delta Z + \alpha V \delta Z)$ en $\alpha d \delta Z + (\alpha T - d\alpha) \delta Z + f[\alpha V - d \cdot (\alpha T - d\alpha)] \delta Z$, & supposant α tel que $\alpha V - d \cdot (\alpha T - d\alpha) = 0$, j'ai l'équation $d \delta Z + \frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha} \delta Z = \frac{1}{\alpha} f(n \delta x + p \delta dx + \&c.) \alpha$; d'où l'on tire aisément $\delta Z = e^{-\int T' \frac{1}{\alpha}}$
 $f(n \delta x + p \delta dx + \&c.) \alpha$; T' étant mis pour $\frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}$;
 & enfin $\delta \cdot fZ = f e^{-\int T' \frac{1}{\alpha}} f(n \delta x + p \delta dx + \&c.) \alpha$,
 formule qui est dans le cas de celle qu'on a traitée dans l'Art. X.

Par des procédés semblables on trouvera l'expression de $\delta \cdot fZ$ lorsque δZ sera donnée par une équation différentielle du troisième ordre, & au delà, & cette expression sera toujours susceptible de la méthode expliquée dans le Prob. II.

X I V.

REMARQUE. L'équation de condition $\alpha V - d \cdot (\alpha T - d\alpha) = 0$ est du second ordre, & ne peut-être intégrée que dans certains cas particuliers; mais notre solution n'en est pas moins générale. Car, pour délivrer l'équation du *maximum*, ou du *minimum* de l'inconnue α , il ne faudra que la combiner avec la précédente par le moyen de plusieurs différentiations réitérées; il n'y aura de difficulté que la longueur du calcul.

X V.

SCHOLIE. Il est clair que la méthode du Corol. préc. suffit pour déterminer les *maxima*, & les *minima* de toutes

les formules intégrales imaginables; car dénotant par Π la formule proposée, il sera toujours possible d'exprimer Π par une équation différentielle, qui ne renferme aucun signe d'intégration; ainsi l'on aura, en différenciant par δ , une nouvelle équation qui contiendra $\delta\Pi$ avec ses différences $d\delta\Pi$ &c., & on en tirera l'expression intégrale de $\delta\Pi$, & par conséquent l'équation du *maximum*, ou *minimum* par les règles enseignées.

A P P E N D I C E I.

Par la méthode qui vient d'être expliquée on peut aussi chercher les *maxima*, & les *minima* des surfaces courbes, d'une manière plus générale qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Pour ne donner là-dessus qu'un exemple très-simple, supposons qu'il faille trouver la surface qui est la moindre de toutes celles qui ont un même périmètre donné. Aiant pris trois coordonnées rectangles x, y, z , & la surface étant supposée représentée par l'équation $dz = p dx + q dy$, on trouvera pour l'élément de la quadrature $dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$; par conséquent la surface entière sera $= \iint dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, où les deux signes \iint marquent deux intégrations successives, l'une par rapport à x & l'autre par rapport à y , ou réciproquement. On aura donc, suivant notre méthode, $\delta \cdot \iint dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = 0$ ce qui se réduit d'abord à $\iint \delta \cdot dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = 0$ (en différenciant, & supposant dx, dy constantes) $\iint dx dy \frac{p \delta p + q \delta q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} = 0$. Or $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$; donc $\delta p = \left(\frac{\delta dz}{dx}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)$, $\delta q = \left(\frac{\delta dz}{dy}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right)$; donc $\iint dx dy \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \iint dx dy$

$\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dy}\right) = 0$. Maintenant, comme dans l'expression $\left(\frac{d\delta\zeta}{dx}\right)$, $d\delta\zeta$ exprime la différence de $\delta\zeta$, x seul étant variable, il est clair que pour faire disparaître cette différence, il ne faudra considérer, dans la formule $\iint dx dy$ $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{\delta d\zeta}{dx}\right)$, que l'intégration relative à x ; soit donc pris l'intégrale $\int dx \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dx}\right)$, où x seul varie; il est facile de la transformer par des intégrations par parties, en $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \delta\zeta - \int d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \delta\zeta$, ce qui se réduit, en supposant les premiers & les derniers ζ donnés, à $-\int d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \delta\zeta$, la différentielle de $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ étant prise en variant seulement x . Soit, pour abréger, $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = P$; on aura, en multipliant par dy & intégrant de nouveau, $\int dy \int dx \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dx}\right)$, ou (ce qui est la même chose) $\iint dx dy \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dx}\right) = -\int dy \int dx \left(\frac{dP}{dx}\right) \delta\zeta = -\iint dx dy \left(\frac{dP}{dx}\right) \delta\zeta$. On trouvera de même, en n'ayant égard qu'à la variabilité de y , & posant Q pour $\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$, $\int dy \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dy}\right) = Q \delta\zeta - \int dy \left(\frac{dQ}{dy}\right) \delta\zeta = -\int dy \left(\frac{dQ}{dy}\right) \delta\zeta$, & $\iint dx dy \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times \left(\frac{d\delta\zeta}{dy}\right) = -\iint dx$

$\iint dx dy \left(\frac{dQ}{dy} \right) \delta z$. Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle deviendra $-\iint dx dy \left[\left(\frac{dP}{dx} \right) + \left(\frac{dQ}{dy} \right) \right] \delta z = 0$, laquelle devra être vraie indépendamment de δz ; on aura donc en général, pour tous les points de la surface cherchée, $\left(\frac{dP}{dx} \right) + \left(\frac{dQ}{dy} \right) = 0$; ce qui montre que cette quantité $P dy - Q dx$, savoir $\frac{p dy - q dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ doit être une différentielle complète. Le Problème se réduit donc à chercher p & q par ces conditions que $p dx + q dy$, & $\frac{p dy - p dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ soient l'une & l'autre des différentielles exactes.

Il est d'abord clair qu'on satisfera à ces conditions en faisant p & q constantes, ce qui donnera un plan quelconque pour la surface cherchée, mais ce ne sera là qu'un cas très-particulier; car la solution générale doit être telle que le périmètre de la surface puisse être déterminé à volonté.

Si la surface cherchée ne doit être un *minimum*, qu'entre toutes celles qui forment des solides égaux, alors $z dx dy$ étant l'élément du solide, il faudroit que la formule $\iint z dx dy$ demeurât la même pendant que l'autre la formule $\iint dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ varie; on auroit donc à la fois les deux équations $\delta \cdot \iint z dx dy = 0$, & $\delta \cdot \iint dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = 0$, savoir $\iint dx dy \delta z = 0$, & $\iint dx dy \left[\left(\frac{dP}{dx} \right) + \left(\frac{dQ}{dy} \right) \right] \delta z = 0$. Qu'on multiplie la première par un coefficient quelconque k , & qu'on l'ajoute à la seconde, on aura $\iint dx dy \left[k + \left(\frac{dP}{dx} \right) + \left(\frac{dQ}{dy} \right) \right] \delta z = 0$, d'où l'on tire l'équation générale $k + \left(\frac{dP}{dx} \right)$

+ $\left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$, qui aura lieu toutes les fois que $(P + kx) dy - Q dx$ sera une différentielle complete. Donc la question sera réduite à chercher p , & q par cette condition que $p dx + q dy$ étant une différentielle exacte, $\frac{p dy - q dx}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} + kx dy$ en soit une aussi.

L'équation de la sphère est en général $(z - a)^2 + (y - b)^2 + (x - c)^2 = r^2$; ce qui donne

$$dz = \frac{(y - b) dy + (x - c) dx}{\sqrt{r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2}}, \text{ donc}$$

$$p = \frac{x - c}{\sqrt{r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2}},$$

$$q = \frac{y - b}{\sqrt{r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2}}, \text{ donc}$$

$$\frac{p dy - q dx}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} + kx dy = \left(\frac{1}{r} + k\right) x dy - \frac{1}{r} y dx + \frac{b dx - c dy}{r}, \text{ qui est une différentielle complete si } \frac{1}{r} + k = -\frac{1}{r}.$$

A P P E N D I C E 2.

Soit proposé de trouver celui, d'entre tous les polygones qui ont un nombre donné de côtés donnés, dont l'aire est la plus grande. La méthode de ce Mémoire est aussi applicable à ces sortes de questions; car soit y une ordonnée quelconque du polygone, & x l'abscisse correspondante, on aura pour l'élément fini de l'aire, $(y + \frac{1}{2} dy) dx$ comme il est aisé de s'en assurer par l'inspection d'une figure fort simple; par conséquent l'aire entière sera $\int (y + \frac{1}{2} dy) dx$. Donc, suivant notre méthode, $\delta \cdot \int (y + \frac{1}{2} dy) dx = \int [\delta y dx + \frac{1}{2} \delta dy dx + (y + \frac{1}{2} dy) \delta dx] = 0$. Or
chaque

chaque côté du poligone est en général $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; donc on aura $\delta \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx \delta dx + dy \delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$, c'est-à-dire $dx \delta dx + dy \delta dy = 0$, & $\delta dx = -\frac{dy \delta dy}{dx}$; substituant cette valeur de δdx dans l'équation précédente, elle deviendra celle-ci $f[dx \delta y + (\frac{1}{2} dx - \frac{y dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx}) \delta dy] = 0$. Qu'on mette au lieu de δdy son égale $d \delta y$, & qu'on fasse pour abrégier $\frac{1}{2} dx - \frac{y dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx} = \zeta$, on aura la formule $\zeta d \delta y$ qu'il faudra intégrer par parties, afin de faire disparaître la différence de δy . Pour cela je remarque que dans le cas des différences finies, on a $d \cdot \zeta \delta y = d \zeta \delta y + \zeta d \delta y + d \zeta d \delta y = \zeta d \delta y + d \zeta (\delta y + d \delta y) =$ (en dénotant par $\delta y'$ le terme qui suit δy) $\zeta d \delta y + d \zeta \delta y'$; donc $\zeta \delta y = \int \zeta d \delta y + \int d \zeta \delta y'$, donc $\int \zeta d \delta y = \zeta \delta y - \int d \zeta \delta y'$, où (ce qui est la même chose) $\zeta \delta y - \int d \zeta \delta y'$, $d \zeta$ étant le terme qui précède $d \zeta$, & qui par conséquent, est multiplié par δy ; substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle deviendra $\zeta \delta y + \int (dx - d \zeta) \delta y = 0$.

Supposons que le poligone coupe l'axe en deux points, en sorte que le premier, & le dernier y soient nuls, aussi bien que leurs différences δy ; le terme $\zeta \delta y$ qui est hors du signe \int , disparaîtra; & l'on aura simplement $\int (dx - d \zeta) \delta y = 0$; ce qui donnera en général $dx - d \zeta = 0$; c'est-à-dire, en intégrant, $a = x - \zeta = x' - \zeta = x + dx - \zeta = x + dx - \frac{1}{2} dx + \frac{y dy}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx}$; multipliant par dx est réduisant, on aura $a dx = (x + \frac{1}{2} dx) dx + (y + \frac{1}{2} dy) dy = \frac{1}{2} d \cdot x^2 + \frac{1}{2} d \cdot y^2$; & intégrant de nouveau, $2ax + r^2 = x^2 + y^2$. Equation à un cercle,

cle, dont le centre est dans l'axe des x , donc l'on voit que le poligone cherché doit être tel qu'il puisse être inscrit dans la demie circonférence d'un cercle.

Si la base du poligone étoit donnée, alors il faudroit que le dernier δx fût $= 0$; or $\delta x = - \int \frac{dy d\delta y}{dx}$; il faudroit donc que la valeur totale de $\int \frac{dy d\delta y}{dx}$ fût $= 0$ en même tems que celle de $\int [dx\delta y + (\frac{1}{2} dx - \frac{y dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx}) d\delta y]$ est aussi $= 0$. Pour cela soit multipliée la première formule par un coëficient indéterminé k , & ensuite ajoutée à la seconde, on aura

$$\int [dx\delta y + (k \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} dx - \frac{y dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx}) d\delta y] = 0;$$

donc, faisant $k \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} dx - \frac{y dy}{dx} - \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx} = z$, on parviendra, comme ci-dessus, à l'équation $a = x + dx - z$, qui se réduit, en multipliant par dx , à $adx = k dy + \frac{1}{2} d \cdot x^2 + \frac{1}{2} d \cdot y^2$, dont l'intégrale est $ax + b^2 = ky + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2$; équation pour un cercle en général; d'où résulte ce Théorème, que le plus grand poligone qu'on puisse former avec des côtés donnés est celui qui peut être inscrit dans un cercle.

M. Cramer a démontré ce théorème synthétiquement dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1752.

Si l'on veut que les cotés du poligone ne soient pas donnés chacun en particulier, mais seulement leur somme, c'est-à-dire le périmètre du poligone, on fera simplement égale à zéro la différence de l'intégrale $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$; ce qui donnera l'équation $\delta \cdot \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$B b$

$= f$

$$= \int \frac{dx \delta dx + dy \delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0, \text{ laquelle devra avoir lieu}$$

en même tems que l'équation du *maximum*

$$\int [dx \delta y + \frac{1}{2} dx \delta dy + (y + \frac{1}{2} dy) \delta dx] = 0.$$

Multipliant donc une de ces équations, par un coëfficient indéterminé k , & les ajoutant ensemble, on aura en général

$$\int [dx \delta y + (\frac{1}{2} dx + \frac{k dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}) \delta dy + (y + \frac{1}{2} dy$$

$$+ \frac{k dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}) \delta dx] = 0. \text{ Soit supposé } \frac{1}{2} dx +$$

$$\frac{k dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = z, \text{ \& } y + \frac{1}{2} dy + \frac{k dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = u,$$

on aura $\int (dx \delta y + z \delta dy + u \delta dx) = 0$, équation qui se transforme, par la même méthode que ci-dessus, en

$$z \delta y + u \delta x - \int [(dx - d'z) \delta y - d'u \delta x] = 0, \text{ d'où}$$

l'on tire $dx - d'z = 0$, & $d'u = 0$; on aura donc, en intégrant, $x - z = a$, savoir $x + dx - z = a$, & $u = b$, savoir $u = b$; c'est-à-dire, en substituant pour z

$$\text{\& } u \text{ leurs valeurs, } x + \frac{1}{2} dx - \frac{k dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = a, y$$

$$+ \frac{1}{2} dy + \frac{k dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = b.$$

Qu'on multiplie la première par dx , & la seconde par dy , & qu'ensuite on les ajoute ensemble, il viendra

$$(x + \frac{1}{2} dx) dx + (y + \frac{1}{2} dy) dy = a dx + b dy;$$

& en intégrant $\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 = ax + by + r^2$, équation à un cercle en général. Qu'on reprenne les mêmes équations, & qu'on les quarre, après avoir transfosé les

$$\text{termes } x + \frac{1}{2} dx \text{ \& } y + \frac{1}{2} dy, \text{ on aura } -\frac{k^2 dy^2}{dx^2 + dy^2}$$

$$= (a - x - \frac{1}{2} dx)^2, \frac{k^2 dx^2}{dx^2 + dy^2} = (b - y - \frac{1}{2} dy)^2;$$

ces équations étant ajoutées ensemble donnent, $k^2 = (a - x - \frac{1}{2} dx)^2 + (b - y - \frac{1}{2} dy)^2 = a^2 + b^2 - 2ax - 2by;$

+

$+ x^2 + y^2 - (a-x) dx - (b-y) dy + \frac{1}{2} dx^2 + \frac{1}{2} dy^2$
 $= [\text{à cause de } x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2, \& (a-x) dx$
 $+ (b-y) dy = \frac{1}{2} dx^2 + \frac{1}{2} dy^2] a^2 + b^2 + r^2 - \frac{1}{2} dx^2$
 $- \frac{1}{2} dy^2; \text{ donc } \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2 \sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - k^2)}$
 ce qui montre que tous les côtés du poligone doivent être égaux entr'eux, & que par conséquent le poligone doit être régulier.

A l'égard des termes $z \delta y$, $u \delta x$, il est clair que ces termes disparaîtront d'eux mêmes, si on suppose les premiers, & les derniers x , & y donnés; mais si la base du poligone étant donnée, & $= c$, le y qui y répond ne ne l'étoit pas, il faudroit faire u & $z = 0$, lorsque $x = c$; on auroit donc $b = 0$, $c = a$, & la base c deviendroit le diamètre du cercle circoncrit au poligone.

Fautes à corriger dans le Mémoire précédent.

Pag. 173. lign. 16.; Brachyſtochrone; lisez Brachyſtochrone. Faites la même correction dans la suite du Mémoire.

Pag. 174. lign. 1. de calcul; lisez du calcul.

dans la lign. 9. de l'Art. I. les quantités x , y , z , d^2x , d^2y , d^2z , &c.; mettez les quantités x , y , z , dx , dy , dz , d^2x , d^2y , d^2z &c.

Pag. 175. dans la ligne 5. de l'équation (C); changez δx en δz .

Pag. 177. dans la ligne 4. de l'Art. III. au lieu de $dP = 0$, $dP' = 0$; écrivez $-dP = 0$; $-d\pi = 0$.

Pag. 182. dans la ligne 16. de l'Art. VIII. après ces mots l'expression de δZ ; ajoutez pour plus d'intelligence de l'Art. I.

*Application de la Méthode précédente à la solution
de différens Problèmes de Dynamique.*

PAR M. DE LA GRANGE.

M. Euler dans une Addition à son excellent Ouvrage qui a pour titre *Methodus maximorum &c.* a démontré ce Principe que, dans les trajectoires que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

Je me propose ici de généraliser ce même Principe, & d'en faire voir l'usage pour résoudre avec facilité toutes les questions de Dynamiques.

P R I N C I P E G É N É R A L.

Soient tant de corps qu'on voudra M, M', M'' &c. qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, & qui soient, de plus, si l'on veut, animés par des forces centrales proportionnelles à des fonctions quelconques des distances; que s, s', s'' &c. dénotent les espaces parcourus par ces corps dans le tems t , & que u, u', u'' &c. soient leurs vitesses à la fin de ce tems; la formule $Mfuds + M'su'ds' + M''su''ds'' + \&c.$ fera toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

I.

PROBLEME 1. Trouver le mouvement d'un corps M attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces P, Q, R &c. exprimées par des fonctions quelconques des distances.

SOLU-

SOLUTION. Comme il n'y a ici qu'un seul corps M , la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum* sera simplement $Mfuds$; on aura donc, suivant la méthode expliquée dans le Mémoire précédent, l'équation $\delta \cdot Mfuds = 0$, ou, en divisant par M qui est constante, $\delta \cdot fuds = 0$. Or $\delta \cdot uds = u\delta ds + \delta uds$; donc changeant l'expression $\delta \cdot fuds$ en son équivalente $f\delta \cdot uds$, comme on l'a enseigné (*Art. I. Mém. précéd.*) on aura l'équation $f(u\delta ds + \delta uds) = 0$.

Soient p, q, r &c. les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R &c., on aura, comme tous les Géomètres le savent, $\frac{u^2}{2} = \text{const.} - f(Pdp + Qdq + Rdr + \text{&c.})$ donc $u\delta u = -\delta \cdot f(Pdp + Qdq + Rdr + \text{&c.}) = -f(\delta Pdp + P\delta dp + \delta Qdq + Q\delta dq + \delta Rdr + R\delta dr + \text{&c.}) =$ (en changeant $\delta dp, \delta dq, \delta dr$ &c. en $d\delta p, d\delta q, d\delta r$ &c. & intégrant par parties les termes $Pd\delta p, Qd\delta q, Rd\delta r$ &c.) $-P\delta p - Q\delta q - R\delta r - \text{&c.} + f(\delta Pdp - dP\delta p + \delta Qdq - dQ\delta q + \delta Rdr - dR\delta r + \text{&c.})$. Or (*hip.*) $P = \text{fonct. } p, Q = \text{fonct. } q, R = \text{fonct. } r$ &c., on trouvera donc, en différenciant $\frac{\delta P}{\delta p} = \frac{dP}{dp}, \frac{\delta Q}{\delta q} = \frac{dQ}{dq}, \frac{\delta R}{\delta r} = \frac{dR}{dr}$ &c., & par conséquent $\delta Pdp - dP\delta p = 0, \delta Qdq - dQ\delta q = 0, \delta Rdr - dR\delta r = 0$ &c.; donc $u\delta u = -P\delta p - Q\delta q - R\delta r - \text{&c.}$, & $\delta uds = -Pdt\delta p - Qdt\delta q - Rdt\delta r - \text{&c.}$, en mettant au lieu de $\frac{ds}{u}$ son égale dt ; donc l'équation ci-dessus se changera en celle-ci

$$f(u\delta ds - Pdt\delta p - Qdt\delta q - Rdt\delta r - \text{&c.}) = 0 \dots (A)$$

Il faut maintenant chercher le rapport que les différences $\delta p, \delta q, \delta r, \delta ds$ ont entr'elles; ce qui se fera différemment

ment selon les différentes sortes de coordonnées, qu'on emploiera pour représenter la trajectoire. Et premièrement soient prises trois coordonnées rectangles x, y, z ; on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; par conséquent $\delta ds = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz}{ds}$ (en changeant δdx &c.

$$\text{en } d\delta x \text{ \&c.}) \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}; \text{ donc } \int u \delta ds = \int \left(\frac{u dx}{ds} d\delta x + \frac{u dy}{ds} d\delta y + \frac{u dz}{ds} d\delta z \right).$$

Qu'on fasse disparaître dans cette expression les différentielles de $\delta x, \delta y, \delta z$ par la méthode des intégrations par parties, pratiquée dans le Mém. préc., on aura la transformée suivante

$$\int u \delta ds = - \int \left(d \cdot \frac{u dx}{ds} \times \delta x + d \cdot \frac{u dy}{ds} \times \delta y + d \cdot \frac{u dz}{ds} \times \delta z \right) + \frac{u dx}{ds} \delta x + \frac{u dy}{ds} \delta y + \frac{u dz}{ds} \delta z.$$

Il ne s'agit plus que d'exprimer les différences $\delta p, \delta q, \delta r$ &c. par les $\delta x, \delta y, \delta z$. Pour cela on cherchera les valeurs analytiques des lignes p, q, r &c. rapportées aux coordonnées x, y, z , & en prendra leurs différentielles, en mettant δ pour d . Soit supposé en général

$$dp = Ldx + ldy + \lambda dz, \quad dq = Mdx + mdy + \mu dz, \\ dr = Ndx + ndy + \nu dz; \text{ il est clair qu'on aura aussi } \\ \delta p = L\delta x + l\delta y + \lambda\delta z, \quad \delta q = M\delta x + m\delta y + \mu\delta z, \\ \delta r = N\delta x + n\delta y + \nu\delta z. \text{ Donc si on fait pour abrégier}$$

$$PL + QM + RN = \Pi$$

$$Pl + Qm + Rn = \pi$$

$$P\lambda + Q\mu + R\nu = \Psi, \text{ on aura}$$

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{\&c.} = \Pi\delta x + \pi\delta y + \Psi\delta z.$$

Faisant toutes ces différentes substitutions dans l'équation (A), elle deviendra

$$(B) \dots \dots \dots \frac{u dx}{ds} \delta x + \frac{u dy}{ds} \delta y + \frac{u dz}{ds} \delta z$$

$$-f\left(d \cdot \frac{udx}{ds} + \Pi dt\right)\delta x + \left[d \cdot \frac{udy}{ds} + \pi dt\right]\delta y \\ + \left[d \cdot \frac{udz}{ds} + \Psi dt\right]\delta z = 0;$$

Equation qui doit avoir lieu, quelques valeurs qu'on suppose aux différences δx , δy , δz ; c'est pourquoi l'on fera les trois équations suivantes:

$$d \cdot \frac{u dx}{ds} + \Pi dt = 0$$

$$d \cdot \frac{u dy}{ds} + \pi dt = 0$$

$$d \cdot \frac{u dz}{ds} + \Psi dt = 0.$$

Ce sont ces équations qui serviront à déterminer la courbe décrite par le corps M , & sa vitesse à chaque instant.

Si on met dt au lieu de $\frac{ds}{u}$, qu'on multiplie la première équation par $\frac{dx}{dt}$, la seconde par $\frac{dy}{dt}$, la troisième par $\frac{dz}{dt}$, & qu'ensuite on les intègre, on aura $\frac{dx^2}{2dt^2} = a^2 - \int \Pi dx$, $\frac{dy^2}{2dt^2} = b^2 - \int \pi dy$, & $\frac{dz^2}{2dt^2} = c^2 - \int \Psi dz$; d'où l'on tire en chassant dt , & extrayant la racine quarrée

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - \int \Pi dx}} = \frac{dy}{\sqrt{b^2 - \int \pi dy}} \\ = \frac{dz}{\sqrt{c^2 - \int \Psi dz}};$$

Equations, où les indéterminées seront séparées si $\Pi =$ fonct. x , $\pi =$ fonct. y , $\Psi =$ fonct. z .

I I .

REMARQUE. Quant aux termes $\frac{udx}{ds} \delta x + \frac{udy}{ds} \delta y + \frac{ud\zeta}{ds} d\zeta$; on pourra se dispenser d'y avoir égard, en supposant que les deux extrémités de la trajectoire soient données de position; car cette supposition fera évanouir les premiers & les derniers δx , δy , $\delta \zeta$, & par conséquent aussi tous les termes en question. (*Voies l'Art. IV. du Mém. préc.*)

I I I.

COROLLAIRE. Imaginons que le mobile M sollicité par les mêmes forces P , Q , R &c. soit contraint de se mouvoir sur une surface courbe donnée par l'équation $d\zeta = p dx + q dy$; en changeant d en δ , on aura $\delta\zeta = p \delta x + q \delta y$; substituant cette valeur de $\delta\zeta$ dans l'équation (B), & faisant les deux coefficients de δx , & δy chacun $= 0$, on aura

$$d \cdot \frac{udx}{ds} + \Pi dt + [d \cdot \frac{ud\zeta}{ds} + \Psi dt] p = 0$$

$$d \cdot \frac{udy}{ds} + \pi dt + [d \cdot \frac{ud\zeta}{ds} + \Psi dt] q = 0;$$

Deux équations, qui, avec l'équation donnée $d\zeta = p dx + q dy$, suffiront pour résoudre le Problème.

I V.

AUTRE SOLUTION. Qu'on prenne, à la place des deux coordonnées rectangles x , y , un rayon variable x qui tourne autour d'un point fixe dans le même plan des x & y , & dont la position à chaque instant soit déterminée par

par un angle ϕ . Conservant la troisième coordonnée z , qu'on imaginera élevée de l'extrémité du rayon x perpendiculairement au plan de l'angle ϕ , il est facile de trouver que l'élément ds de la courbe sera $= \sqrt{(x^2 d\phi^2 + dx^2 + dz^2)}$; ainsi on aura en différentiant $\delta ds =$

$$\frac{x^2 d\phi \delta d\phi + x d\phi^2 \delta x + dx \delta dx + dz \delta dz}{ds} =$$

$$\frac{x^2 d\phi \delta d\phi + x d\phi^2 \delta x + dx \delta dx + dz \delta dz}{ds}$$

Mettant donc cette valeur dans la formule intégrale $\int u \delta ds$, & faisant disparaître les différentielles de $\delta\phi$, δx , δz , par la voie ordinaire des intégrations par parties, on aura $\int u \delta ds = - \int [d \cdot \frac{u x^2 d\phi}{ds} \times \delta\phi + (d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\phi^2}{ds}) \delta x + d \cdot \frac{u dz}{ds} \times \delta z] + \frac{u x^2 d\phi}{ds} \delta\phi + \frac{u dx}{ds} \delta x + \frac{u dz}{ds} \delta z$.

Après la substitution de cette valeur de $\int u \delta ds$ dans l'équation (A) de l'Art. I., il n'y aura plus qu'à réduire les différences δp , δq , δr &c. aux différences δx , δy , δz . Pour cela soit supposé en général

$$dp = L dx + l d\phi + \lambda dz$$

$$dq = M dx + m d\phi + \mu dz$$

$$dr = N dx + n d\phi + \nu dz,$$

on aura de même

$$\delta p = L \delta x + l \delta\phi + \lambda \delta z$$

$$\delta q = M \delta x + m \delta\phi + \mu \delta z$$

$$\delta r = N \delta x + n \delta\phi + \nu \delta z$$

Donc si on fait les mêmes substitutions que dans la solution précédente, on aura aussi $P \delta p + Q \delta q + R \delta r$ &c. $= \Pi \delta x + \pi \delta\phi + \psi \delta z$, & l'équation (A) deviendra enfin

$$(C) \dots \dots \dots \frac{u x^2 d\phi}{ds} \delta\phi + \frac{u dx}{ds} \delta x + \frac{u dz}{ds} \delta z \\ - \int \left[\left(d \cdot \frac{u x^2 d\phi}{ds} + \pi dt \right) \delta\phi + \left(d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\phi^2}{ds} + \right. \right. \\ \left. \left. \Pi dt \right) \delta x + \left(d \cdot \frac{u dz}{ds} + \Psi dt \right) \delta z \right] = 0.$$

Maintenant si on suppose, comme dans l'Art. II. que le premier & le dernier point de la trajectoire sont donnés, il est clair que les $\delta\phi$, δx , δz qui y répondent seront nulles d'elles mêmes; & que par conséquent, les trois premiers termes de cette équation le seront aussi. Donc pour satisfaire au reste de l'équation, indépendamment des différences indéterminées $\delta\phi$, δx , δz , on fera chacun de leurs coefficients = 0, & l'on aura pour les équations générales du mouvement du corps

$$d \cdot \frac{u x^2 d\phi}{ds} + \pi dt = 0$$

$$d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\phi^2}{ds} + \Pi dt = 0$$

$$d \cdot \frac{u dz}{ds} + \Psi dt = 0.$$

Qu'on mette dans ces équations dt pour $\frac{ds}{u}$, & qu'on in-

tègre la première, après l'avoir multipliée par $\frac{x^2 d\phi}{dt}$, on

aura $\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 d\phi}{dt} \right)^2 = a^2 - \int \pi x^2 d\phi$, d'où l'on tire dt

$= \frac{x^2 d\phi}{\sqrt{(2a^2 - 2 \int \pi x^2 d\phi)}}$; substituant cette valeur dans la

seconde équation; & faisant pour abrégier $\sqrt{(2a^2 - 2 \int \pi x^2 d\phi)}$

$= V$ on aura

$$d \cdot \frac{V dx}{x^2 d\phi} - \frac{V d\phi}{x} + \frac{\Pi x^2 d\phi}{V} = 0,$$

ou, en mettant y pour $\frac{1}{x}$,

$$-d \cdot \frac{V dy}{d\phi} - Vy d\phi + \frac{\Pi d\phi}{Vy^2} = 0,$$

ce qui donnera par la différentiation, en regardant $d\phi$ comme constante, & multipliant par $\frac{\delta\phi}{V}$,

$$-d^2y - \frac{dV}{V} dy - Vy d\phi^2 + \frac{\Pi d\phi^2}{V^2 y^2} = 0,$$

savoir, à cause de $\frac{dV}{V} = -\frac{\pi x^2 d\phi}{V^2} = -\frac{\pi d\phi}{V^2 y^2}$,

$-d^2y - y d\phi^2 + \frac{\Pi + \frac{\pi dy}{d\phi}}{V^2 y^2} d\phi^2 = 0$, équation constructible dans plusieurs cas particuliers.

Enfin la troisième équation étant multipliée par $\frac{d\zeta}{dt}$, & ensuite intégrée deviendra $\frac{d\zeta^2}{2dt^2} = b^2 - \int \Psi d\zeta$, d'où l'on tirera la valeur de dt , laquelle étant comparée à celle qu'on a trouvée plus haut fournira l'équation $\frac{d\zeta}{\sqrt{(2b^2 - 2\int \Psi d\zeta)}} = \frac{d\phi}{Vy^2}$.

V.

COROLLAIRE. Si le corps étoit obligé de se mouvoir sur une surface courbe donnée, alors rapportant cette surface aux trois variables x, ϕ, ζ ; & la supposant exprimée par l'équation $d\zeta = p d\phi + q dx$, on mettroit dans l'équation (C), au lieu de $\delta\zeta$, $p \delta\phi + q \delta x$, ensuite on égaleroit à zéro les coefficients de δx , & $\delta\phi$, & l'on auroit

$$d \cdot \frac{u x^2 d\phi}{ds} + \pi dt + \left(d \cdot \frac{u dz}{ds} + \Psi dt \right) p = 0$$

$$d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x^2 d\phi^2}{ds} + \Pi dt + \left(d \cdot \frac{u dz}{ds} + \Psi dt \right) q = 0,$$

REMARQUE I. Nous avons supposé que les forces P , Q , R &c. étoient comme des fonctions quelconques des distances p , q , r &c.; cependant il est facile de démontrer, par les principes de Dynamique, que les équations trouvées sont générales pour toutes sortes de forces accélératrices; & l'on peut d'ailleurs s'en convaincre par cette seule raison, que les équations dont il s'agit, ne renferment point la loi suivant laquelle les forces P , Q , R &c. croissent ou décroissent, mais seulement les quantités & les directions instantanées de ces forces, comme il est aisé de le voir en substituant pour Π , π & ψ leurs valeurs. Au reste, à examiner les solutions précédentes, il est évident que l'hypothèse de $P =$ fonct. p , $Q =$ fonct. q , $R =$ fonct. r &c. ne sert qu'à rendre $= 0$ la formule intégrale $\int (\delta P dp - dP \delta p, + \delta Q dq - dQ \delta q, + \delta R dr - dR \delta r$ &c.). Or pour cela il suffiroit que les quantités P , Q , R &c. eussent entr'elles un rapport tel, que $P dp \delta p - dP \delta p + \delta Q dq - dQ \delta q + \delta R dr - dR \delta r + \text{\&c.} = 0$; soient donc P , Q , R &c. des fonctions quelconques de p , q , r &c., de sorte que l'on ait par la différentiation $dP = A dp + B dq + C dr$ &c., $dQ = D dp + E dq + F dr$ &c. $dR = G dp + H dq + I dr$ &c.; il est clair qu'on aura également $\delta P = A \delta p + B \delta q + R \delta r + \text{\&c.}$ $\delta Q = D \delta p + E \delta q + F \delta r$ &c. $\delta R = G \delta p + H \delta q + I \delta r$ &c. Substituant ces valeurs dans l'équation de condition, & réduisant on aura $(B - D) \times (dp \delta q - dq \delta p) + (C - G) \times (dp \delta r - dr \delta p) + (F - H) \times (dq \delta r - dr \delta q) = 0$, donc $B - D = 0$, $C - G = 0$, $F - H = 0$, savoir

$$\left(\frac{dP}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dp}\right), \left(\frac{dP}{dr}\right) = \left(\frac{dR}{dp}\right), \left(\frac{dQ}{dr}\right) = \left(\frac{dR}{dq}\right);$$

c'est-à-dire que $P dp + Q dq + R dr$ &c. devra être une diffé-

différentielle complète. Si cette condition a lieu la valeur de $u \delta u$ sera simplement $- P \delta p - Q \delta q - R \delta r - \&c.$; autrement, il faudra encore tenir compte de l'intégrale $\int (\delta P dp - dP \delta p + \&c.)$ pour rendre la formule $\int u ds$ un vrai *maximum*, ou *minimum*; mais les équations qu'on trouveroit alors ne seroient plus les véritables équations du mouvement du corps.

V I I.

REMARQUE 2. Ce Problème est le seul, auquel M. Euler ait appliqué son Principe. Il l'a aussi résolu pour les deux cas, des coordonnées rectangles, & des rayons partant d'un centre fixe. Mais pour pouvoir comparer ses solutions avec les nôtres, il faut remarquer; 1.^o Que M. Euler n'a considéré que des courbes à simple courbure, 2.^o Qu'il n'a cherché le *maximum*, ou le *minimum* de la formule $\int u ds$ qu'eu égard à la variabilité de l'ordonnée y dans le premier cas, & à celle de l'angle que nous avons nommé ϕ ; dans le second; *Voies l'Addition citée au commencement de ce Mémoire.*

Au reste il est clair que par notre Méthode on pourra encore varier la solution de ce Problème en plusieurs autres manières, selon les différentes sortes de coordonnées qu'on choisira pour représenter la trajectoire cherchée.

V I I I.

PROBLÈME 2. GÉNÉRAL. Soit un système quelconque de plusieurs corps, $M, M', M'' \&c.$, qui soient sollicités par tant de forces centrales qu'on voudra, savoir M par les forces $P, Q, R \&c.$, M' par les forces $P', Q', R' \&c.$ M'' par les forces $P'', Q'', R'' \&c.$, & qui agissent, de plus, les uns sur les autres par des forces quelconques d'attraction

traction mutuelle; trouver le mouvement de chacun de ces corps.

SOLUTION. Tout se réduit à rendre la formule $Mfsuds + M'f'u'ds' + M''f''u''ds'' + \&c.$ un *maximum*, ou un *minimum*. On fera donc, suivant notre méthode, $\delta \cdot Mfsuds + \delta \cdot M'f'u'ds' + \delta \cdot M''f''u''ds'' + \&c. = 0$. Or $\delta \cdot Mfsuds =$ (à cause que M est constant) $M\delta \cdot fuds = Mf(u\delta ds + u\delta u dt)$, *Art. I.*, $= \int M(u\delta ds + u\delta u dt)$. On trouvera de même, en substituant toujours dt pour $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., $\delta \cdot M'f'u'ds' = \int (u'\delta ds' + u'\delta u' dt)$, $\delta \cdot M''f''u''ds'' = \int M''(u''\delta ds'' + u''\delta u'' dt)$, & ainsi de suite; on aura donc l'équation

$$(D) \dots \int (Mu\delta ds + M'u'\delta ds' + M''u''\delta ds'' + \&c. + [Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' \&c.] dt) = 0.$$

Maintenant soient p, q, r &c. les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R &c., & p', q', r' &c., p'', q'', r'' &c. celles des autres corps M', M'' &c. aux centres de leurs forces P', Q', R' &c., P'', Q'', R'' &c. Soient, outre cela, f la distance entre le corps M , & le corps M' , & F la force, avec laquelle chaque point de l'un attire chaque point de l'autre, & de même f' la distance entre les corps M', M'' , & F' leur force d'attraction, & ainsi de suite; soient encore g la distance entre le corps M' , & le corps M'' , & G leur attraction, & ainsi pour tous les autres corps; on aura par le Principe général de la conservation des forces vives, l'équation

$$Mu^2 + M'u'^2 + M''u''^2 + \&c. = MV^2 + M'V'^2 + M''V''^2 + \&c. - 2Mf(Pdp + Qdq + Rdr + \&c.) - 2M'f'(P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \&c.) - 2M''f''(P''dp'' + Q''dq'' + R''dr'' \&c.) - \&c. - 2MM'fFdf - 2MM''f'F'df' - \&c. - 2M'M''fGdg - \&c.$$

V, V', V'' &c. étant les vitesses primitives des corps M, M', M'' &c.

Or

Or soit supposé $P = \text{fonct. } p$, $Q = \text{fonct. } q$, $R = \text{fonct. } r$,
 &c. $P' = \text{fonct. } p'$, $Q' = \text{fonct. } q$ &c. $F = \text{fonct. } f$, &c.
 $G = \text{fonct. } g$ &c., on trouvera, par un calcul analogue
 à celui qu'on a fait dans le Prob. 1., l'équation diffé-
 rentielle

$$\begin{aligned}
 (V) \therefore & Mu \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \text{\&c.} = \\
 & - M (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{\&c.}) \\
 & - M' (P' \delta p' + Q' \delta q' + R' \delta r' + \text{\&c.}) \\
 & - M'' (P'' \delta p'' + Q'' \delta q'' + R'' \delta r'' + \text{\&c.}) \\
 & - \text{\&c.} \\
 & - MM' F \delta f - MM'' F' \delta f' - \text{\&c.} \\
 & - M' M'' G \delta g - \text{\&c.}
 \end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver les valeurs des différences
 δds , $\delta ds'$, $\delta ds''$ &c., & cette recherche dépend, comme
 on le voit, de la nature des coordonnées qu'on emploie
 pour représenter les courbes décrites par chaque corps.

I X.

PREMIER CAS. Soient, comme dans l'Art. I., x , y , z
 trois coordonnées rectangles qui déterminent la position du
 corps M dans un tems quelconque, & soient de même
 x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' &c. d'autres coordonnées rectangles
 & parallèles à celles-là pour la position des autres corps
 M' , M'' &c. dans le même tems; on aura, comme dans
 l'Art. citée,

$$\delta ds = \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}$$

& de même

$$\delta ds' = \frac{dx' d\delta x' + dy' d\delta y' + dz' d\delta z'}{ds'}$$

$$\delta ds'' = \frac{dx'' d\delta x'' + dy'' d\delta y'' + dz'' d\delta z''}{ds''}$$

& ainsi de suite.

Qu'on

Qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (D), & qu'on fasse disparoître, comme à l'ordinaire, les différentielles de δx , δy , δz , $\delta x'$, $\delta y'$ &c., on aura, en négligeant tous les termes hors du signe f , qui peuvent être supposés nuls par la Remarque de l'Art. II.

$$\begin{aligned}
 & f \left(M d \cdot \frac{u dx}{ds} \times \delta x + M d \cdot \frac{u dy}{ds} \times \delta y + M d \cdot \frac{u dz}{ds} \times \delta z \right. \\
 & + M' d \cdot \frac{u' dx'}{ds'} \times \delta x' + M' d \cdot \frac{u' dy'}{ds'} \times \delta y' + M' d \cdot \frac{u' dz'}{ds'} \times \delta z' \\
 & + M'' d \cdot \frac{u'' dx''}{ds''} \times \delta x'' + M'' d \cdot \frac{u'' dy''}{ds''} \times \delta y'' + M'' d \cdot \frac{u'' dz''}{ds''} \times \delta z'' \\
 & + \quad \text{\textit{Etc.}} \quad \text{\textit{Etc.}} \\
 & \left. - [Mu \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \text{\textit{Etc.}}] dt \right) = 0. (E)
 \end{aligned}$$

Il ne s'agira plus maintenant que de substituer dans cette équation au lieu de $Mu \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \text{\textit{Etc.}}$ sa valeur tirée de l'équation (V), & de réduire ensuite les différences δp , δq , δr &c. $\delta p'$, $\delta q'$ &c. δf , $\delta f'$ &c. δg &c. aux différences δx , δy , δz , $\delta x'$, $\delta y'$ &c. par une méthode analogue à celle qu'on a pratiquée dans le Prob. préc.; après quoi, si chaque corps est entièrement libre, en sorte que toutes les différences δx , δy , δz , $\delta x'$, $\delta y'$ &c. demeurent indéterminées, on fera chacun de leurs coefficients = 0, & l'on aura trois fois autant d'équations, qu'il y a de corps, lesquelles prises ensemble suffiront pour déterminer toutes les vitesses, & les courbes cherchées: mais si un, ou plusieurs de ces corps sont forcés de se mouvoir sur des courbes, ou des surfaces données, & qu'ils agissent de plus, les uns sur les autres, soit en se poussant, soit en se tirant par des fils, ou des verges inflexibles, ou de quelque autre manière que ce soit, alors on cherchera les rapports qui devront nécessairement se trouver entre les différences δx , δy , δz , $\delta x'$, $\delta y'$ &c. On réduira par-là ces différences au plus petit nombre possible, & on fera ensuite chacun de leurs coefficients = 0 ce qui donnera

donnera toutes les équations nécessaires pour la solution du Problème.

X.

COROLLAIRE. Supposons le système entièrement libre, & que les corps agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque; supposons, outre cela, que tous les corps soient sollicités par trois forces P, Q, R dirigées parallèlement aux coordonnées x, y, z , & qui soient les mêmes pour chacun d'eux; on mettra dans l'équation (V) x, y, z à la place de p, q, r , & l'on aura $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c. = -M(P\delta x + Q\delta y + R\delta z) - M'(P'\delta x' + Q'\delta y' + R'\delta z') - M''(P''\delta x'' + Q''\delta y'' + R''\delta z'') - \&c. - MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - \&c. - M'M''G\delta g - \&c.$ Cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + \&c.$ étant substituée dans l'équation (E) , soit fait $x' = x + X, y' = y + Y, z' = z + Z, x'' = x + X', y'' = y + Y', z'' = z + Z' \&c.$, & par conséquent $\delta x' = \delta x + \delta X, \delta y' = \delta y + \delta Y, \delta z' = \delta z + \delta Z, \delta x'' = \delta x + \delta X', \delta y'' = \delta y + \delta Y', \delta z'' = \delta z + \delta Z' \&c.$; il est clair que les lignes $f, f', g \&c.$ qui marquent les distances des corps entr'eux, dépendront uniquement des lignes $X, Y, Z, X', Y', Z' \&c.$ qui déterminent leur position respective, & qu'ainsi les expressions des différences $\delta f, \delta f', \delta g \&c.$ ne renfermeront aucunement les différences $\delta x, \delta y, \delta z$; on remarquera de plus que ces mêmes différences $\delta x, \delta y, \delta z$ seront absolument indépendantes de toutes les autres différences $\delta X, \delta Y \&c.$ Car il est évident que, l'action mutuelle des corps ne dépendant que de leur position respective, savoir des lignes $X, Y, Z, X', Y', Z', X'' \&c.$, il n'y aura que les seules différences $\delta X, \delta Y, \delta Z, \delta X', \delta Y', \delta Z' \&c.$ de

D d

ces

ces mêmes lignes qui soient liées entr'elles par des rapports donnés par la nature du Problème; d'où il s'enfuit que les termes affectés des différences δx , δy , δz dans l'équation (E) devront être chacun en particulier = 0; ce qui donnera les trois équations générales.

$$\begin{aligned}
 & M d \cdot \frac{u dx}{ds} + M' d \cdot \frac{u' dx'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' dx''}{ds''} + \&c. \\
 & + (M + M' + M'' + \&c.) P dt = 0, \\
 & M d \cdot \frac{u dy}{ds} + M' d \cdot \frac{u' dy'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' dy''}{ds''} + \&c. \\
 & + (M + M' + M'' + \&c.) Q dt = 0, \\
 & M d \cdot \frac{u dz}{ds} + M' d \cdot \frac{u' dz'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' dz''}{ds''} + \&c. \\
 & + (M + M' + M'' + \&c.) R dt = 0.
 \end{aligned}$$

Or $\frac{ds}{u} = \frac{ds'}{u'} = \frac{ds''}{u''} \&c. = dt$, donc ces équations deviendront celles ci

$$\begin{aligned}
 & d \cdot \frac{M dx + M' dx' + M'' dx'' + \&c.}{dt} + \\
 & (M + M' + M'' + \&c.) P dt = 0, \\
 & d \cdot \frac{M dy + M' dy' + M'' dy'' + \&c.}{dt} + \\
 & (M + M' + M'' + \&c.) Q dt = 0, \\
 & d \cdot \frac{M dz + M' dz' + M'' dz'' + \&c.}{dt} + \\
 & (M + M' + M'' + \&c.) R dt = 0;
 \end{aligned}$$

D'où l'on voit que si on prend à chaque instant dans le système un point tel, que sa position soit déterminée par trois coordonnées, l'une parallèle à x , & =

$$\frac{Mx + M'x' + M''x'' + \&c.}{M + M' + M'' + \&c.}, \text{ l'autre parallèle à } y, \& \\
 = \frac{My + M'y' + M''y'' + \&c.}{M + M' + M'' + \&c.}, \& \text{ la troisième pa-}$$

rallèle

Equation, dans laquelle j'ai rejetté tous les termes qui sont hors du signe f , parceque ces termes deviennent évidemment nuls dans la supposition que le premier & le dernier point de chaque trajectoire soient donnés. Or cette équation étant analogue à l'équation (E) de l'Art. VIII.; ne demandera plus que des opérations semblables, pour trouver le mouvement de chaque corps. On en verra des exemples dans les Problèmes suivans.

X I I.

COROLLAIRE. Si le système est entièrement libre, ou qu'il soit simplement assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe, & que toutes les forces sollicitatrices des corps concourent à ce point; prenant ce point pour le centres des raïons vecteurs x, x', x'' &c., & faisant $\phi' = \phi + \Phi$, $\phi'' = \phi + \Phi' &c.$, il est facile de voir que $\delta\phi$ sera absolument indépendante des autres différences $\delta\Phi, \delta\Phi' &c.$, $\delta x, \delta x', \delta x'' &c.$ quelle que soit l'action réciproque des corps les uns sur les autres; il est de plus évident que toutes les différences $\delta p, \delta q, \delta f &c.$ qui entrent dans la valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' &c.$ seront aussi indépendantes de la différence $\delta\phi$; d'où il s'ensuit que tous les termes de l'équation (F) qui se trouveront affectés de la différence $\delta\phi$ après les substitutions de $\delta\phi + \delta\Phi, \delta\phi + \delta\Phi' &c.$ à la place de $\delta\phi', \delta\phi'' &c.$ devront être = 0 séparément du reste l'équation, on aura donc en général, après avoir effacé le $\delta\phi$, l'équation

$$Md \cdot \frac{u x^2 d\phi}{ds} + M' d \cdot \frac{u' x'^2 d\phi'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' x''^2 d\phi''}{ds''}$$

+ &c. = 0, dont l'intégrale est

$$\frac{M u x^2 d\phi}{ds} + \frac{M' u' x'^2 d\phi'}{ds'} + \frac{M'' u'' x''^2 d\phi''}{ds''}$$

+ &c. = const.

(G)
où,

où, en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., & nommant

H la constante

$$Mx^2 d\phi + M'x'^2 d\phi' + M''x''^2 d\phi'' + \text{\&c.} = Hdt,$$

& intégrant de nouveau

$$M \int x^2 d\phi + M' \int x'^2 d\phi' + M'' \int x''^2 d\phi'' + \text{\&c.} = Ht.$$

Il est visible que l'intégrale $\int x^2 d\phi$ exprime l'aire que la projection du corps M décrit autour du centre des forces, & que les autres intégrales $\int x'^2 d\phi'$, $\int x''^2 d\phi''$ &c. expriment de même les aires décrites par les projections des autres corps M' , M'' &c. autour du même centre; donc la somme de chacune de ces aires multipliée par la masse du corps qui la décrit est toujours proportionnelle au tems.

Le Lecteur, qui sera curieux de voir une démonstration de ce Théorème tirée des Principes de Mécanique, la trouvera dans un Mémoire de M. le Chevalier d'Arcy, imprimé parmi ceux de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année 1747.; il y trouvera aussi l'usage de ce même Théorème pour résoudre plusieurs questions de Dynamique.

Au reste nous remarquerons que l'équation (G) renferme le Principe que Mrs. Daniel Bernoulli, & Euler ont appelé *la conservation du moment du mouvement circulaire*, & qui consiste en ce que la somme des produits de chaque corps (M) par sa vitesse circulaire ($\frac{uxd\phi}{ds}$) & par sa distance au centre (x) est constante pendant le mouvement du système. *Voies les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Berlin pour l'année 1745., & les Opuscules de M. Euler imprimés à Berlin en 1746.*

La même équation (G) renferme aussi le Principe de M. le Chevalier d'Arcy, que la somme des produits de chaque corps (M) par sa vitesse (u), & par la perpen-

dicu-

diculaire menée du centre sur la direction du corps $\left(\frac{x^2 d\phi}{ds}\right)$ fait toujours une quantité constante. *Voies les Mémoires de l'Académie de Paris pour les années 1749., 1752.*

XIII.

REMARQUE. Il est aisé de trouver, par la méthode que j'ai donné dans la Remarque de l'Art. VI., que l'équation (V) sera exacte en général toutes les fois que la formule $-M(P dp + Q dq + R dr + \&c.) - M'(P' dp' + Q' dq' + R' dr' + \&c.) - \&c.$ qui exprime la valeur de $Mu du + M'u' du' + M''u'' du'' + \&c.$, fera une différentielle complète. Dans tous les autres cas cette équation ne pourra plus servir à trouver les conditions de la *maximité*, ou de la *minimité* de la formule intégrale $Mfu ds + M'fu' ds' + M''fu'' ds'' + \&c.$; mais elle servira toujours également pour trouver les mouvemens des corps $M, M', M'' \&c.$, quelles que soient les forces dont ils sont animés. Ainsi sans s'embarasser que la formule dont nous parlons soit réellement un *maximum*, ou un *minimum*, on pourra toujours employer l'équation (V) dans quelque hipotèse de forces que ce soit.

XIV.

PROBLEME 3. Trois corps M, M', M'' s'attirent mutuellement par des forces d'attraction F, F', G ; trouver les orbites des corps M', M'' par rapport au corps M regardé comme en repos.

SOLUTION. Les mêmes noms étant conservés que dans l'Art. IX. on fera de plus, comme dans l'Art. X., $x' = x + X, y' = y + Y \&c.$, & l'on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + d\zeta^2)}$
 $ds' = \sqrt{[(dx + dX)^2 + (dy + dY)^2 + (d\zeta + dZ)^2]}$
 ds''

$ds'' = \sqrt{[(dx + dX')^2 + (dy + dY')^2 + (dz + dZ')^2]}$,
 d'où l'on tirera, par la différentiation, les valeurs de δds ,
 $\delta ds'$, $\delta ds''$, qu'il faudra substituer dans l'équation (D) de
 l'Art. VIII.

Mais pour mieux représenter les orbites relatives des
 corps M' , M'' , soient pris, au lieu des coordonnées rectan-
 gles X , Y , X' , Y' , deux rayons vecteurs r , r' , avec deux
 angles correspondans ϕ , ϕ' , tels que l'on ait $X = r \cos. \phi$,
 $Y = r \sin. \phi$, $X' = r' \cos. \phi'$, $Y' = r' \sin. \phi'$; aiant
 fait ces substitutions dans les valeurs de ds' , ds'' , on aura
 $ds' = \sqrt{(ds^2 + 2 dx d \cdot r \cos. \phi + 2 dy d \cdot r \sin. \phi + r^2 d\phi^2$
 $+ dr^2 + 2 dz dZ + dZ^2)}$,
 $ds'' = \sqrt{(ds^2 + 2 dx d \cdot r' \cos. \phi' + 2 dy d \cdot r' \sin. \phi'$
 $+ r'^2 d\phi'^2 + dr'^2 + 2 dz dZ' + dZ'^2)}$.

Maintenant, si l'on veut regarder l'orbite du corps M
 comme connue, on prendra les différences δds , $\delta ds'$,
 $\delta ds''$, en supposant dx , dy , dz constantes; on aura δds
 $= 0$; $\delta ds' = [dx \delta d \cdot r \cos. \phi + dy \delta d \cdot r \sin. \phi +$
 $r^2 d\phi \delta d\phi + r d\phi^2 \delta r + dr \delta dr + (dz + dZ) \delta dZ]: \delta ds'$;
 $\delta ds'' = [dx \delta d \cdot r' \cos. \phi' + dy \delta d \cdot r' \sin. \phi' + r'^2 d\phi' \delta d\phi'$
 $+ r' d\phi'^2 \delta r' + dr' \delta dr' + (dz + dZ') \delta dZ']: \delta ds''$.

Avant que de faire ces substitutions dans l'équation (D)
 de l'Art. VIII., je remarque que les corps M' , M'' dont
 on cherche le mouvement, étant entièrement libres par
 l'hipotèse du Problème, les différences de leurs coordon-
 nées δr , $\delta \phi$, δZ , $\delta r'$, $\delta \phi'$, $\delta Z'$ sont nécessairement in-
 dépendantes entr'elles; d'où il s'ensuit qu'on peut faire
 pour chacun de ces corps un calcul à part, en ne confi-
 dérant à la fois que les variations des trois coordonnées
 r , ϕ , Z , ou r' , ϕ' , Z' .

Qu'on ne prenne d'abord que les trois premières r , ϕ , Z
 pour variables; il est clair qu'on aura $\delta ds = 0$; par con-
 séquent l'équation mentionnée deviendra simplement

$$f(M')$$

$$\int [M' u' \delta ds' + (M_2 \delta u + M' \delta u' + M'' \delta u'' + \&c.) dt] = 0.$$

Pour appliquer cette équation au Problème présent, on commencera par substituer, à la place de $\delta ds'$, sa valeur trouvée ci-dessus, en y mettant, pour plus de simplicité, au lieu de $\frac{ds'}{u'}$ son égale dt ; ensuite on intégrera par parties tous les termes qui renfermeront des différences affectées du double signe δd , après avoir changé ce signe dans son équivalent $d\delta$; cette opération donnera les transformées suivantes

$$\begin{aligned} \int \frac{dx d\delta \cdot r \cos. \phi}{dt} &= \frac{dx \delta \cdot r \cos. \phi}{dt} - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta \cdot r \cos. \phi \\ &= \frac{dx}{dt} (\cos. \phi \delta r - r \sin. \phi \delta \phi) - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times (\cos. \phi \delta r - r \sin. \phi \delta \phi) \\ &= (\text{en rejetant les termes qui sont hors du signe d'intégration, \& qui s'évanouissent toujours dans l'hipotéte de l'Art. II.}) - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times (\cos. \phi \delta r - r \sin. \phi \delta \phi), \\ &\& \text{ de même} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dy d\delta r \sin. \phi}{dt} = - \int d \cdot \frac{dy}{dt} \times (\sin. \phi \delta r + r \cos. \phi \delta r)$$

$$\int \frac{r^2 d\phi d\delta \phi}{dt} = - \int d \cdot \frac{r^2 d\phi}{dt} \times \delta \phi$$

$$\int \frac{dr \delta dr}{dt} = - \int d \cdot \frac{dr}{dt} \times \delta r$$

$$\int \frac{(d\zeta + dZ) d\delta Z}{dt} = - \int d \cdot \frac{d\zeta + dZ}{dt} \times \delta Z.$$

En joignant ensemble toutes ces transformées, & y ajoutant le terme $\int \frac{r d\phi^2}{dt} \delta r$, on aura la valeur de $\int u' \delta ds'$ exprimée par la formule suivante

$$\int \left[(r \sin. \phi d \cdot \frac{dx}{dt} - r \cos. \phi d \cdot \frac{dy}{dt} - d \cdot \frac{r^2 d\phi}{dt}) \delta \phi - \right.$$

— (cos.

$$\left(\text{cof. } \varphi d \cdot \frac{dx}{dt} + \text{fin. } \varphi d \cdot \frac{dy}{dt} + d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{r^2 d\varphi^2}{dt} \right) \delta r - d \cdot \frac{d\zeta + dZ}{dt} \times \delta Z] .$$

A présent, pour avoir la valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$, on fera dans l'équation (V) de l'Art. VIII. toutes les quantités P, Q, R, P', Q' &c. qui representent des forces étrangères = 0, & l'on aura

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = -MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - M'M''G\delta g .$$

Or il est facile de trouver que $f = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{r^2 + Z^2}$, $f' = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} = \sqrt{r'^2 + Z'^2}$, $g = \sqrt{[(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2]} = \sqrt{[r'^2 + r^2 - 2r'r \text{ cof. } (\varphi' - \varphi) + (Z' - Z)^2]}$; d'où l'on tirera, en regardant toujours $\varphi', r',$ & Z' comme constantes, $\delta f = \frac{r\delta r + Z\delta Z}{f}$, $\delta f' = 0$, $\delta g = \frac{r - r' \text{ cof. } (\varphi' - \varphi)}{g} \delta r - \frac{r'r \text{ fin. } (\varphi' - \varphi)}{g} \delta \varphi - \frac{Z' - Z}{g} \delta Z$.

Ayant fait ces substitutions, on ajoutera ensemble les valeurs de $M'f\delta ds'$, & de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$, & l'on aura une formule intégrale, dont chaque terme contiendra une des différences $\delta \varphi, \delta r, \delta Z$, & qui devra être = 0, quelles que soient les valeurs de ces différences. On trouvera donc, en faisant séparément = 0 chacun de leurs coefficients, & divisant par M'

$$-d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} + r \text{ fin. } \varphi d \cdot \frac{dx}{dt} - r \text{ cof. } \varphi d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r'r \text{ fin. } (\varphi' - \varphi)}{g} M'' G dt = 0 .$$

$$d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{rd\varphi^2}{dt} + \text{cof. } \varphi d \cdot \frac{dx}{dt} + \text{fin. } \varphi d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r}{f} MF dt$$

E c

+

$$+ \frac{r - r' \cos. (\phi' - \phi)}{g} M'' G dt = 0;$$

$$d \cdot \frac{d\zeta + dZ'}{dt} - \frac{Z' - Z}{g} M'' G dt = 0.$$

Equations qui se réduisent à la forme de celles de l'Art. IV. en supposant

$$r \sin. \phi d \cdot \frac{dx}{dt} - r \cos. \phi d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r r' \sin. (\phi' - \phi)}{g} M'' G dt = -\pi dt;$$

$$\cos. \phi d \cdot \frac{dx}{dt} + \sin. \phi d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r}{f} M F dt + \frac{r - r' \cos. (\phi' - \phi)}{g} M'' G dt = \Pi dt;$$

$$d \cdot \frac{d\zeta}{dt} - \frac{Z' - Z}{g} M'' G dt = \Psi dt.$$

Et ces équations suffiront pour déterminer l'orbite du corps M' , en supposant connues les orbites des deux autres corps M , M'' .

Qu'on fasse maintenant, dans les expressions de $\delta ds'$, $\delta ds''$, $\delta f'$, δg , les changeantes r' , ϕ' , Z' variables au lieu des r , ϕ , Z ; on trouvera, par des raisonnemens, & des opérations semblables aux précédentes, trois autres équations, qui ne différeront des équations ci-dessus, que parce qu'il y aura r' , ϕ' , Z' à la place de r , ϕ , Z , & réciproquement, & ces équations seront celles de l'orbite du corps M'' .

X V

COROLLAIRE. Si on ne connoissoit pas l'orbite absolue du corps M , alors, pour déterminer les valeurs des quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, il faudroit aussi faire varier les trois changeantes x , y , ζ , dans les valeurs de ds , ds' , ds'' ; ce qui donneroit

$$\delta ds = (dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz) : ds$$

$$\delta ds' = [(dx + d \cdot r \cos. \phi) \delta dx + (dy + d \cdot r \sin. \phi) \delta dy + (dz + dZ) \delta dz] : ds'$$

$$\delta ds'' = [(dx + d \cdot r' \cos. \phi') \delta dx + (dy + d \cdot r' \sin. \phi') \delta dy + (dz + dZ') \delta dz] : ds''$$

On substituerait ces valeurs dans l'équation générale (*D*) de l'*Art. VIII.*, & faisant, après les réductions ordinaires, les trois coëfficiens de δx , δy , δz chacun = 0, on auroit trois équations, par lesquelles on pourroit déterminer les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Au reste ces équations reviendroient au même que celles de l'*Art. X.* en y faisant $P, Q, R = 0$.

X V I.

COROLLAIRE 2. Les équations, qu'on trouveroit par la méthode du Corollaire précédent, ne renfermeroient point les forces F, F', G , mais seulement les changeantes r, ϕ, r', ϕ' avec leurs différences; mais, pour ne pas trop charger de différentielles les équations du mouvement des corps M', M'' , il sera mieux de chercher les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, en considérant directement les orbites absolues de ces deux corps.

Que $x', y', z', x'', y'', z''$ soient les ordonnées rectangulaires des orbites, dont nous parlons; on parviendra à une équation qui sera la même que l'équation (*E*) du Prob. 2., & dans laquelle, à cause que les corps sont libres, il faudra faire les coëfficiens de $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y'$ &c. chacun = 0. Or il est facile de trouver que $f = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}$, $f' = \sqrt{[(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2]}$, $g = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$; pour notre cas il suffit de

E c 2

faire

faire varier x, y, z seulement; on aura donc

$$\delta f = -\frac{x' - x}{f} \delta x - \frac{y' - y}{f} \delta y - \frac{z' - z}{f} \delta z, \delta f' = -\frac{x'' - x}{f'} \delta x - \frac{y'' - y}{f'} \delta y - \frac{z'' - z}{f'} \delta z, \delta g = 0. \text{ On}$$

substituera ces valeurs dans l'expression $-MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - M'M''G\delta g$, & l'on aura (à cause de $x' - x = X = r \cos. \phi$, $y' - y = Y = r \sin. \phi$, $z' - z = Z$, $x'' - x = X' = r' \cos. \phi'$, $y'' - y = Y' = r' \sin. \phi'$, $z'' - z = Z'$)

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = M \left(\frac{M'Fr \cos. \phi}{f} + \frac{M''F'r' \cos. \phi'}{f'} \right) \delta x + M \left(\frac{M'Fr \sin. \phi}{f} + \frac{M''F'r' \sin. \phi'}{f'} \right) \delta y + M \left(\frac{M'FZ}{f} + \frac{M''F'Z'}{f'} \right) \delta z.$$

Mettant cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$ dans l'équation (E), & faisant séparément $= 0$ chacun des trois coefficients de $\delta x, \delta y, \delta z$; il viendra, après avoir divisé le tout par M , & mis dt à la place de $\frac{ds}{u}$,

$$d \cdot \frac{dx}{dt} - \left(\frac{M'Fr \cos. \phi}{f} + \frac{M''F'r' \cos. \phi'}{f'} \right) dt = 0$$

$$d \cdot \frac{dy}{dt} - \left(\frac{M'Fr \sin. \phi}{f} + \frac{M''F'r' \sin. \phi'}{f'} \right) dt = 0$$

$$d \cdot \frac{dz}{dt} - \left(\frac{M'FZ}{f} + \frac{M''F'Z'}{f'} \right) dt = 0.$$

Par-là les valeurs de π, Π, Ψ de l'Art. XIV. deviendront, après quelques réductions fort simples.

$$M'' \left(\frac{G}{g} - \frac{F'}{f'} \right) r' \sin. (\phi' - \phi) = -\pi$$

$$(M + M') \frac{Fr}{f} + M'' \left(\frac{G}{g} \times [r - r' \cos. (\phi' - \phi)] \right)$$

+

$$+ \frac{F'}{f'} \times r' \cos. (\phi' - \phi)) = \Pi$$

$$M' \frac{FZ}{f} + M'' \left[\frac{F'Z'}{f'} - \frac{G(Z' - Z)}{g} \right] = \Psi.$$

X V I I.

PROBLEME 4. Un corps M étant sollicité par tant des forces qu'on voudra P, Q, R &c., & tirant après lui deux autres corps M', M'' par le moien de deux fils de longueurs données; trouver le mouvement de chacun de ces trois corps. On suppose pour plus de simplicité, qu'ils se meuvent tous trois dans le même plan.

SOLUTION. Soient f, f' les longueurs données des fils, c'est-à-dire les distances invariables des corps M', M'' au corps M ; x, y les coordonnées rectangles de la courbe décrite par le corps M , & ϕ, ϕ' les angles que les lignes f, f' forment à chaque instant avec l'axe des x ; prenant x', y', x'', y'' pour les coordonnées rectangles des autres corps M', M'' , on aura $x' = x - f \cos. \phi$, $y' = y - f \sin. \phi$, $x'' = x - f' \cos. \phi'$, $y'' = y - f' \sin. \phi'$; $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2 + 2f(\sin. \phi dx - \cos. \phi dy) d\phi + f^2 d\phi^2$, $ds''^2 = dx''^2 + dy''^2 = dx^2 + dy^2 + 2f'(\sin. \phi' dx - \cos. \phi' dy) d\phi' + f'^2 d\phi'^2$; d'où l'on tire

$$\delta ds = (dx \delta dx + dy \delta dy) : ds;$$

$$\delta ds' = [(dx + f \sin. \phi d\phi) \delta dx + (dy - f \cos. \phi d\phi) \delta dy + f d\phi (\cos. \phi dx + \sin. \phi dy) \delta \phi + f(\sin. \phi dx - \cos. \phi dy + f d\phi) \delta d\phi] : ds';$$

$$\delta ds'' = [(dx + f' \sin. \phi' d\phi') \delta dx + (dy - f' \cos. \phi' d\phi') \delta dy + f' d\phi' (\cos. \phi' dx + \sin. \phi' dy) \delta \phi' + f'(\sin. \phi' dx - \cos. \phi' dy + f' d\phi') \delta d\phi'] : ds''.$$

On substituera ces valeurs dans les intégrales $\int u \delta ds$, $\int u' \delta ds'$, $\int u'' \delta ds''$ de l'équation (D) de l'Art. VIII., & faisant

faisant les transformations, & les réductions ordinaires, on trouvera

$$f u \delta d s = - f \left(d \cdot \frac{d x}{d t} \chi \delta x + d \cdot \frac{d y}{d t} \chi \delta y \right)$$

$$f u' \delta d s' = - f \left(d \cdot \frac{d x + f \sin. \phi d \phi}{d t} \chi \delta x + d \cdot \frac{d y - f \cos. \phi d \phi}{d t} \chi \delta y - \left[\frac{\cos. \phi d x + \sin. \phi d y}{d t} f d \phi - d \cdot \frac{\sin. \phi d x - \cos. \phi d y + f d \phi}{d t} f \right] \delta \phi \right).$$

Et l'on aura pour $f u'' \delta d s''$ la même expression que pour $f u' \delta d s'$ en marquant seulement d'un trait les lettres ϕ & f ; comme il est aisé de s'en assurer par le calcul.

Pour avoir maintenant la valeur de $M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u''$ on aura recours à l'équation générale (V) de l'Art. VIII., laquelle donnera pour le cas présent

$$M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' = - M (P \delta p + Q \delta q + R \delta r) =, \text{ en faisant les mêmes suppositions que dans l'Art. I., } - M (\Pi \delta x + \pi \delta y).$$

Il n'y a plus qu'à mettre ces différentes transformées dans l'équation (D); or si l'on fait pour abrégé

$$M \left(d \cdot \frac{d x}{d t} + \Pi d t \right) + M' d \cdot \frac{1}{d t} (d x + f \sin. \phi d \phi) + M'' d \cdot \frac{1}{d t} (d x + f' \sin. \phi' d \phi') = [x]$$

$$M \left(d \cdot \frac{d y}{d t} + \pi d t \right) + M' d \cdot \frac{1}{d t} (d y - f \cos. \phi d \phi) + M'' d \cdot \frac{1}{d t} (d y - f' \cos. \phi' d \phi') = [y]$$

$$\frac{M' f d \phi}{d t} (\cos. \phi d x + \sin. \phi d y) - M' d \cdot \frac{f}{d t} (\sin. \phi d x - \cos. \phi d y + f d \phi) = [\phi]$$

$$\frac{M'' f' d \phi'}{d t} (\cos. \phi' d x + \sin. \phi' d y) - M'' d \cdot \frac{f'}{d t} (\sin. \phi' d x - \cos. \phi' d y + f' d \phi') = [\phi'].$$

On

on trouve

$$f([x]\delta x + [y]\delta y - [\phi]\delta\phi - [\phi']\delta\phi) = 0 \dots (H)$$

D'où l'on tire par notre méthode

$$[x] = 0, [y] = 0, [\phi] = 0, [\phi'] = 0.$$

Quatre équations qui suffiront pour déterminer le rapport des indéterminées x, y, ϕ, ϕ' au tems t , & par conséquent le mouvement de chacun de trois corps M, M', M'' .

XVIII.

COROLLAIRE 1. Si le corps M étoit mu dans une rainure courbe représentée par l'équation $dy = m dx$; alors il n'y auroit qu'à mettre, dans l'équation (H) , $m dx$ pour δy , & faire ensuite chacun, des trois coefficients de $\delta x, \delta\phi, \delta\phi', = 0$; ce qui donneroit pour les équations du mouvement des corps

$$[x] + m[y] = 0, [\phi] = 0, [\phi'] = 0.$$

Si le corps M étoit, outre cela, obligé de se mouvoir avec une vitesse, dont la loi à chaque point de la courbe fût donnée; alors, comme le mouvement de ce corps seroit entièrement donné, on auroit $\delta x = 0$, & $\delta y = 0$; c'est pourquoi il faudroit supprimer les équations $[x] = 0$, & $[y] = 0$, & mettre, dans les deux autres $[\phi] = 0$, $[\phi'] = 0$, au lieu de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ leurs valeurs données.

XIX.

COROLLAIRE 2. Supposons que les trois corps M, M', M'' , au lieu de se tenir par de fils, soient attachés à une verge inflexible, en sorte que l'angle des lignes f, f' soit constant, & $\angle = \alpha$; on aura donc en ce cas $\phi' = \phi + \alpha$, & $\delta\phi' = \delta\phi$; ainsi il ne faudra qu'écrire, dans l'équation (H) , $\phi + \alpha$ pour ϕ' , & $\delta\phi$ pour $\delta\phi'$, & faisant ensuite

ensuite les coefficients de δx , δy , $\delta \phi$ chacun en particulier $\equiv 0$, on aura

$$[x] = 0, [y] = 0, [\phi] + [\phi'] = 0.$$

X X.

COROLLAIRE 3. Si on veut de plus, dans le cas du Corollaire précédent, que le corps M se meuve dans une rainure courbe dont l'équation soit $dy = m dx$; mettant, comme dans l'Art. XVIII. $m \delta x$ au lieu de δy , & faisant $\equiv 0$ les coefficients de δx , & $\delta \phi$, on aura simplement les deux équations

$$[x] + m[y] = 0, \text{ \& } [\phi] + [\phi'] = 0.$$

Mais si la vitesse du corps M est aussi donnée; en ce cas δx , & δy étant nuls, il ne restera que l'équation $[\phi] + [\phi'] = 0$, dans laquelle il faudra mettre au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs données.

X X I.

COROLLAIRE 4. Si les corps M' , M'' étoient liés par un même fil, de longueur donnée, le long duquel l'autre corps M pût couler librement par le moïen d'un anneau: on pourroit résoudre le Problème de la même manière en faisant les quantités f , f' variables dans les expressions de ds' , ds'' , & de leurs différences $\delta ds'$, $\delta ds''$.

Pour cela il n'y auroit qu'à augmenter la valeur de ds'^2 trouvée ci-dessus (Art. XVII.) de la quantité -2 (cof. $\phi dx + \sin. \phi dy$) $df + df^2$; & ensuite celle de $\delta ds'$ de la quantité $(\sin. \phi dx - \cos. \phi dy + f d\phi) d\phi \delta f - (\cos. \phi dx + \sin. \phi dy - df) \delta df + (\sin. \phi dx - \cos. \phi dy) df \delta \phi - \cos. \phi df \delta dx - \sin. \phi df \delta dy$, divisée par ds' ; c'est pourquoi la valeur de la formule intégrale $\int u' \delta ds'$ seroit augmentée

mentée de $\int \left(d \cdot \frac{\text{cof. } \phi df}{dt} \times \delta x + d \cdot \frac{\text{fin. } \phi df}{dt} \times \delta y \right.$
 $+ \frac{df}{dt} (\text{fin. } \phi dx - \text{cof. } \phi dy) \delta \phi + \left[\frac{d\phi}{dt} (\text{fin. } \phi dx - \right.$
 $\text{cof. } \phi dy + fd\phi) + d \cdot \frac{1}{dt} (\text{cof. } \phi dx + \text{fin. } \phi dy$
 $\left. - df) \right] \delta f$.

Et l'autre formule intégrale $\int u'' \delta ds''$ seroit aussi augmentée de la même quantité, en marquant seulement d'un trait les deux lettres ϕ & f . Par-là l'équation (H) deviendrois de cette forme

(I) . . . $-f[(x)\delta x + (y)\delta y - (\phi)\delta\phi - (\phi')\delta\phi'$
 $+ (f)\delta f + (f')\delta f'] = 0$, dans laquelle

$$(x) = [x] - d \cdot \frac{\text{cof. } \phi df}{dt} - d \cdot \frac{\text{cof. } \phi' df'}{dt}$$

$$(y) = [y] - d \cdot \frac{\text{fin. } \phi df}{dt} - d \cdot \frac{\text{fin. } \phi' df'}{dt}$$

$$(\phi) = [\phi] + \frac{df}{dt} (\text{fin. } \phi dx - \text{cof. } \phi dy)$$

$$(\phi') = [\phi'] + \frac{df'}{dt} (\text{fin. } \phi' dx - \text{cof. } \phi' dy)$$

$$(f) = \frac{d\phi}{dt} (\text{fin. } \phi dx - \text{cof. } \phi dy + fd\phi)$$

$$+ d \cdot \frac{1}{dt} (\text{cof. } \phi dx + \text{fin. } \phi dy - df)$$

$$(f') = \frac{d\phi'}{dt} (\text{fin. } \phi' dx - \text{cof. } \phi' dy + f'd\phi')$$

$$+ d \cdot \frac{1}{dt} (\text{cof. } \phi' dx + \text{fin. } \phi' dy - df')$$

Maintenant, les deux corps M' , M'' étant attachés fixement aux extrémités du fil qui est supposé inextensible, il faut que la somme des lignes f , & f' soit constante; soit cette somme, c'est-à-dire, la longueur totale du fil

$$F f = a,$$

$= a$, on aura $f' = a - f$, & $\delta f' = -\delta f$; on fera donc ces substitutions dans l'équation (1), & mettant ensuite $= 0$ les coefficients des différences restantes δx , δy , $\delta \phi$, $\delta \phi'$, δf , on aura les cinq équations $(x) = 0$, $(y) = 0$, $(\phi) = 0$, $(\phi') = 0$, $(f) - (f') = 0$, lesquelles donneront le rapport des cinq indéterminées x , y , ϕ , ϕ' , f au tems t .

XXII.

COROLLAIRE 5. Si le corps M étoit fixe, ou, ce qui revient au même, si le fil qui joint les deux corps M' , M'' passoit à travers un anneau immobile, on auroit pour lors $dx = 0$, $dy = 0$, & $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, & les équations du mouvement des deux corps seroient

$(\phi) = 0$, $(\phi') = 0$, & $(f) - (f') = 0$; savoir, à cause que $dx = 0$, $dy = 0$, & $f' = a - f$,

$$d \cdot \frac{f^2 d\phi}{dt} = 0, d \cdot \frac{(a-f)^2 d\phi'}{dt} = 0, \quad \&$$

$$\frac{f(d\phi^2 + d\phi'^2) - ad\phi^2}{dt} + 2d \cdot \frac{df}{dt} = 0.$$

Les deux premières équations étant intégrées, donneront

$$d\phi^2 = \frac{A dt^2}{f^2}, d\phi'^2 = \frac{B dt^2}{(a-f)^2}; \quad \& \text{ ces valeurs substituées}$$

dans la troisième, on aura

$$\frac{A dt}{f^2} - \frac{B dt}{(a-f)^2} + 2d \cdot \frac{df}{dt} = 0, \text{ laquelle étant multipliée}$$

par $\frac{df}{dt}$, & ensuite intégrée devient

$$-\frac{A}{2f^3} + \frac{B}{2(a-f)^3} + \frac{df^2}{dt^2} = C, \text{ d'où l'on tire}$$

$$dt = \frac{df}{\sqrt{\left(C + \frac{A}{2f^3} - \frac{B}{2(a-f)^3}\right)}}$$

X X I I I.

COROLLAIRE 6. Si dans le cas du Corollaire précédent les deux corps M' , M'' étoient attachées à une verge droite, & inflexible; alors on auroit $\phi' = \phi$, & $\delta\phi' = \delta\phi$; & les équations $(\phi) = 0$, $(\phi') = 0$ n'en feroient plus qu'une seule, savoir $(\phi) + (\phi') = 0$; on auroit donc simplement les deux équations $(\phi) + (\phi') = 0$, & $(f) - (f') = 0$; c'est-à-dire $d \cdot \frac{(a^2 - 2af^2 + 2f^3)d\phi}{dt} = 0$,

& $\frac{(2f - a)d\phi^2}{dt} + 2d \cdot \frac{df}{dt} = 0$; lesquelles donnent, en

chassant dt , $\frac{(2f - a)d\phi}{a^2 - 2af + 2f^2} + 2d \cdot \frac{df}{(a^2 - 2af + 2f^2)d\phi} = 0$.

Cette équation étant multipliée par $\frac{df}{a^2 - 2af + 2f^2}$, & ensuite intégrée, en regardant $d\phi$ comme constante, deviendra celle-ci

$\frac{d\phi}{2(a^2 - 2af + 2f^2)} + \frac{df^2}{(a^2 - 2af + 2f^2)^2 d\phi} = \frac{d\phi}{A^2}$, qui se réduit à

$$d\phi = \frac{A df \sqrt{2}}{\sqrt{(2[a^2 - 2af + 2f^2])^2 - A^2[a^2 - 2af + 2f^2]}}$$

X X I V.

PROBLEME 5. Trouver le mouvement d'un fil fixe en une de ses extrémités, & chargé de tant de corps pesants qu'on voudra M , M' , M'' &c.

SOLUTION. Aiant pris comme dans l'Art. IX., x , y , z , x' , y' , z' , x'' , y'' , z'' &c. pour les coordonnées rectangles des corps M , M' , M'' &c., on a d'abord l'équation (E). Soit maintenant f la portion du fil interceptée entre l'extrémité fixe, & le corps M ; soient aussi f' , f'' &c. les portions

portions du même fil interceptées entre les corps M & M' ,
 M' & M'' , & ainsi de suite ; on aura les équations

$$f = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$f' = \sqrt{([x' - x]^2 + [y' - y]^2 + [z' - z]^2)}$$

$$f'' = \sqrt{([x'' - x']^2 + [y'' - y']^2 + [z'' - z']^2)}$$

&c. &c.

l'origine des abscisses x , x' , x'' &c. étant à l'extré-
 mité fixe du fil. On tire de là

$$x = \sqrt{(f^2 - y^2 - z^2)}$$

$$x' = x + \sqrt{(f'^2 - [y' - y]^2 - [z' - z]^2)}$$

$$x'' = x' + \sqrt{(f''^2 - [y'' - y']^2 - [z'' - z']^2)}$$

&c. &c.

& par conséquent

$$\delta x = -\frac{1}{x} [y \delta y + z \delta z]$$

$$\delta x' = \delta x - \frac{1}{x' - x} [(y' - y)(\delta y' - \delta y) + (z' - z)(\delta z' - \delta z)]$$

$$= \left(\frac{y' - y}{x' - x} - \frac{y}{x} \right) \delta y - \frac{y' - y}{x' - x} \delta y'$$

$$+ \left(\frac{z' - z}{x' - x} - \frac{z}{x} \right) \delta z - \frac{z' - z}{x' - x} \delta z'$$

$$\delta x'' = \delta x' - \frac{1}{x'' - x'} [(y'' - y')(\delta y'' - \delta y') + (z'' - z')(\delta z'' - \delta z')]$$

$$= \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'} - \frac{y'}{x'} \right) \delta y + \left(\frac{y'' - y'}{x'' - x'} - \frac{y' - y}{x' - x} \right) \delta y' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \delta y''$$

$$+ \left(\frac{z'' - z'}{x'' - x'} - \frac{z'}{x'} \right) \delta z + \left(\frac{z'' - z'}{x'' - x'} - \frac{z' - z}{x' - x} \right) \delta z' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} \delta z'',$$

& ainsi de suite.

Maintenant, si on suppose (ce qui est absolument arbi-
 traire) l'axe des x , x' , x'' &c. vertical ; & que P ex-
 prime la pesanteur absolue des corps ; il faudra mettre
 dans l'équation (V) de l'Art. VIII. δx , $\delta x'$, $\delta x''$ &c.
 au lieu de δp , $\delta p'$, $\delta p''$ &c., $-P$ au lieu de P , P' , P'' &c.,
 & toutes les autres forces Q , R , Q' &c. égales à zéro ;
 on aura donc

Mudu

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c. \\ = P(M\delta x + M'\delta x' + M''\delta x'' + \&c.)$$

Faisant ces substitutions dans l'équation (E) cité ci-devant, & ordonnant les termes, elle deviendra de la forme suivante

$$f([y]\delta y + [y']\delta y' + [y'']\delta y'' + \&c. + \\ [\zeta]\delta \zeta + [\zeta']\delta \zeta' + [\zeta'']\delta \zeta'' + \&c.) = 0,$$

dans laquelle on aura, après avoir mis au lieu de $\frac{ds}{u}$,

$\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c. leur valeur commune dt ,

$$[y] = M \left[d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{y}{x} (P dt - d \cdot \frac{dx}{dt}) \right] - \left[\frac{y' - y}{x' - x} \right. \\ \left. - \frac{y}{x} \right] \times \left[M' (P dt - d \cdot \frac{dx'}{dt}) + M'' (P dt - d \cdot \frac{dx''}{dt}) \right. \\ \left. + M''' (P dt - d \cdot \frac{dx'''}{dt}) + \&c. \right]$$

$$[y'] = M' \left[d \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{y' - y}{x' - x} (P dt - d \cdot \frac{dx'}{dt}) \right] - \\ \left[\frac{y'' - y'}{x'' - x'} - \frac{y' - y}{x' - x} \right] \times \left[M'' (P dt - d \cdot \frac{dx''}{dt}) + M''' (P dt - d \cdot \frac{dx'''}{dt}) \right. \\ \left. + \&c. \right]$$

$$[y''] = M'' \left[d \cdot \frac{dy''}{dt} + \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (P dt - d \cdot \frac{dx''}{dt}) \right] - \\ \left[\frac{y''' - y''}{x''' - x''} - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \right] \times \left[M''' (P dt - d \cdot \frac{dx'''}{dt}) + \&c. \right]$$

&c. &c.

& les valeurs de $[\zeta]$, $[\zeta']$, $[\zeta'']$ &c. seront les mêmes que celles de $[y]$, $[y']$, $[y'']$ &c., en y mettant simplement ζ , ζ' , ζ'' &c. au lieu de y , y' , y'' &c.

On fera donc suivant notre méthode

$$[y] = 0, [y'] = 0, [y''] = 0 \&c. \\ [\zeta] = 0, [\zeta'] = 0, [\zeta''] = 0 \&c.$$

Equa-

Equations qui, avec celles qu'on a trouvé plus haut, suffiront pour résoudre le Problème.

XXV.

COROLLAIRE. Soient les corps M , M' , M'' &c. infiniment petits, & placés à des distances égales les uns des autres; marquant par la lettre d la différence de deux coordonnées consécutives quelconques, on aura en général

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{dy}{dx}, \text{ \& } \frac{y'' - y'}{x'' - x'} - \frac{y' - y}{x' - x} = d \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Soit chaque petit poids, dont le fil est chargé, dm ; soit de plus la somme des valeurs de $dm (P dt - d \cdot \frac{dx}{dt})$ pour toute la longueur du fil désignée par $T dt$, & la somme indéfinie des mêmes valeurs prise relativement à l'abscisse x , marquée par la lettre S de cette manière $S dm (P dt - d \cdot \frac{dx}{dt})$; il est facile de voir que les équations $(y) = 0$, $(y') = 0$, $(y'') = 0$ &c. se réduiront toutes à celle-ci générale

$$dm \left[d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx} (P dt - d \cdot \frac{dx}{dt}) \right] -$$

$$d \cdot \frac{dy}{dx} \times [T dt - S dm (P dt - d \cdot \frac{dx}{dt})] = 0;$$

que de même les équations $(z) = 0$, $(z') = 0$, $(z'') = 0$ &c. se changeront en

$$dm \left[d \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dx} (P dt - d \cdot \frac{dx}{dt}) \right] -$$

$$d \cdot \frac{dz}{dx} \times [T dt - S dm (P dt - d \cdot \frac{dx}{dt})] = 0.$$

Ce seront donc ces deux équations qui serviront à déterminer le mouvement du fil; mais il y faudra encore ajouter une troisième équation qui se déduira de ce que chaque élément

ment du fil, dont l'expression générale est $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, doit demeurer constant, pendant que le fil varie de courbe. Cette équation sera donc

$$d \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = 0, \text{ savoir}$$

$$dx \left(\frac{d dx}{ds} \right) + dy \left(\frac{d dy}{ds} \right) + dz \left(\frac{d dz}{ds} \right) = 0.$$

Dans le cas des oscillations infiniment petites on a $\frac{dx}{ds} = 0$, parce qu'alors chaque point du fil répond toujours à très-peu-près au même point de l'axe; de plus si on regarde le fil comme uniformément épais, & que l'élément de sa courbe $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ soit dénoté par ds ; on aura $dm = ds$, & la formule intégrale

$$S dm (P dt - d \cdot \frac{dx}{ds}) \text{ se réduira à } SP ds dt = (\text{à cause}$$

de $P dt$ constant) $Ps dt$, étant la longueur de la partie du fil qui répond à l'abscisse x ; par conséquent si la longueur totale du fil est l , on aura $T = Pl$, & les deux premières équations deviendront celles-ci beaucoup plus simples

$$ds \left(d \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{dy}{dx} P dt \right) - P dt d \cdot \frac{dy}{dx} \times (l - s) = 0$$

$$ds \left(d \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{dz}{dx} P dt \right) - P dt d \cdot \frac{dz}{dx} \times (l - s) = 0$$

la troisième sera inutile.

XXVI.

SCHOLIE. Si les fils f, f', f'' &c. qui joignent les corps M, M', M'' &c. étoient extensibles, & élastiques, on auroit alors les équations

$$f \delta f = x \delta x + y \delta y + z \delta z;$$

$$f' \delta f' = (x' - x) \times (\delta x' - \delta x) + (y' - y) \times (\delta y' - \delta y) + (z' - z) \times (\delta z' - \delta z);$$

$$f'' \delta f''$$

$$f' \delta f'' = (x'' - x') \times (\delta x'' - \delta x') + (y'' - y') \times (\delta y'' - \delta y') \\ + (\zeta'' - \zeta') \times (\delta \zeta'' - \delta \zeta'),$$

& ainsi de suite.

On trouvera de plus, en appellant F, F', F'' &c. les forces d'élasticité, ou de contraction des fils f, f', f'' que l'équation (V) deviendra

$$Mu \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \text{&c.} \\ = P (M \delta x + M' \delta x' + M'' \delta x'' + \text{&c.}) \\ - F \delta f - F' \delta f' - F'' \delta f'' - \text{&c.},$$

comme il est facile de s'en assurer en appliquant le Principe de la conservation des forces vives, au cas dont il s'agit ici.

On mettra donc dans cette expression de $Mu \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \text{&c.}$ au lieu de $\delta f, \delta f', \delta f''$ &c. les valeurs qu'on vient de trouver, & on la substituera ensuite dans l'équation (E) de l'Art. IX.; ce qui donnera, après avoir ordonné les termes, & mis dt à la place de

$\frac{ds}{u}, \frac{ds'}{u'}, \frac{ds''}{u''}$ &c., une équation de cette forme

$$f \left[(x) \delta x + (x') \delta x' + (x'') \delta x'' + \text{&c.} + \right. \\ (y) \delta y + (y') \delta y' + (y'') \delta y'' + \text{&c.} + \\ \left. (\zeta) \delta \zeta + (\zeta') \delta \zeta' + (\zeta'') \delta \zeta'' + \text{&c.} \right] = 0;$$

dans laquelle

$$(x) = M \left(d \cdot \frac{dx}{dt} - P dt \right) + \left(-\frac{x}{f} F - \frac{x' - x}{f'} F' \right) dt$$

$$(x') = M' \left(d \cdot \frac{dx'}{dt} - P dt \right) + \left(\frac{x' - x}{f'} F' - \frac{x'' - x'}{f''} F'' \right) dt$$

$$(x'') = M'' \left(d \cdot \frac{dx''}{dt} - P dt \right) + \left(\frac{x'' - x'}{f''} F'' - \frac{x''' - x''}{f'''} F''' \right) dt$$

$$\text{&c.} \quad \text{&c.} \quad \text{&c.}$$

$$(y) = M d \cdot \frac{dy}{dt} + \left(-\frac{y}{f} F - \frac{y' - y}{f'} F' \right) dt$$

$$(y') = M' d \cdot \frac{dy'}{dt} + \left(\frac{y' - y}{f'} F' - \frac{y'' - y'}{f''} F'' \right) dt$$

(y'')

$$(y'') = M'' d \cdot \frac{dy''}{dt} + \left(\frac{y'' - y'}{f''} F'' - \frac{y''' - y''}{f'''} F''' \right) dt$$

&c. &c.

& les autres expressions (ζ) , (ζ') , (ζ'') feront les mêmes que les (y) , (y') , (y'') &c., en changeant seulement y en ζ , y' en ζ' , y'' en ζ'' &c.

De cette équation on tirera donc, suivant notre méthode les équations particulières

$$(x) = 0, (x') = 0, (x'') = 0 \text{ \&c.}$$

$$(y) = 0, (y') = 0, (y'') = 0 \text{ \&c.}$$

$$(\zeta) = 0, (\zeta') = 0, (\zeta'') = 0 \text{ \&c.}$$

qui feront celles du mouvement des corps M , M' , M'' &c.

X X V I I.

COROLLAIRE. Si on veut, que les masses M , M' , M'' &c. soient infiniment petites, & placées à des distances infiniment petites les unes des autres; conservant les suppositions faites dans l'Art. XXVI., on aura en général $M = dm$, $f = ds$, $x' - x = dx$, $y' - y = dy$, $\zeta' - \zeta = d\zeta$; & l'on trouvera que les équations ci-dessus se changeront dans les trois suivantes.

$$dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} - P dt \right) - d \cdot \frac{F dx}{ds} \times dt = 0$$

$$dm d \cdot \frac{dy}{dt} - d \cdot \frac{F dy}{ds} \times dt = 0$$

$$dm d \cdot \frac{d\zeta}{dt} - d \cdot \frac{F d\zeta}{ds} \times dt = 0,$$

où la quantité F marque l'élasticité variable de chaque élément du fil.

Si on fait abstraction de la pesanteur P , & qu'on suppose, outre cela, les oscillations du fil infiniment petites, en sorte que l'abscisse x demeure toujours la même pour chaque élément ds ; la première équation se réduira à

$$G g - d.$$

— $d \cdot \frac{F dx}{ds} \times dt = 0$, dont l'intégrale est $\frac{F dx}{ds} = k$;

ce qui donne $\frac{F}{ds} = \frac{k}{dx}$, & cette valeur étant substituée

dans les deux autres équations, on aura, à cause de k constant,

$$d m d \cdot \frac{dy}{dt} = d \cdot \frac{dy}{dx} \times k dt, \quad d m d \cdot \frac{dz}{dt} = d \cdot \frac{dz}{dx} \times k dt.$$

Soit X l'épaisseur du fil, en sorte que $dm = X dx$ (il faudroit mettre à la rigueur $dm = X ds$, mais comme on suppose les vibrations infiniment petites, il est clair que dy & dz seront aussi infiniment petites par rapport à dx , & qu'ainsi ds fera à très-peu-près $= dx$); on trouvera, en différentiant & prenant dt & dx pour constantes,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{k d^2 y}{X dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{k d^2 z}{X dx^2};$$

équations connues.

X X V I I I.

REMARQUE. Les équations trouvées pour le mouvement d'un fil vibrant élastique, ou non, peuvent encore l'être d'une autre manière plus directe, en regardant d'abord le fil comme un assemblage d'une infinité de points mobiles; c'est ce qu'il est bon de faire voir, pour développer davantage l'application de notre Principe général à ces sortes de questions.

X X I X.

PROBLEME 6. Trouver le mouvement d'un fil inextensible, dont tous les points sont sollicités par des forces quelconques P , Q , R &c.

SOLUTION. En conservant les noms donnés dans l'Art. XXV.; soit de plus u la vitesse de chaque élément du fil, & ds le petit espace qu'il parcourt dans le tems dt ; il est facile de voir que la formule du Principe général deviendra

dra $Sdm: fuds$. On fera donc, suivant notre méthode, l'équation $\delta \cdot Sdmfuds = 0$, qui se réduira d'abord (à cause que dm est constant pendant que le fil varie de courbe) à $Sdm\delta fuds = 0$, savoir à $Sdmf(u\delta ds + \delta u ds) = Sdmfu\delta ds + Sdmfu\delta u dt = 0$, en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$.

Maintenant, si on prend pour chaque élément du fil trois coordonnées rectangles x, y, z , comme dans les Prob. 1., on aura aussi $\delta ds = \frac{1}{ds} (dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z)$, & $fu\delta ds = -f(d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta x + d \cdot \frac{dy}{dt} \times \delta y + d \cdot \frac{dz}{dt} \times \delta z)$ en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$; donc l'intégrale $Sdmfu\delta ds$ deviendra, en transposant les signes S, f (ce qui est évidemment permis) $-fSdm(d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta x + d \cdot \frac{dy}{dt} \times \delta y + d \cdot \frac{dz}{dt} \times \delta z)$.

On changera aussi, par la même transposition des signes, la formule $Sdmfu\delta u dt$ en $fSdmu\delta u dt$; & l'on aura l'équation

$$(K) \dots fSdm(u\delta u dt - d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta x - d \cdot \frac{dy}{dt} \times \delta y - d \cdot \frac{dz}{dt} \times \delta z) = 0.$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de $Sdmu\delta u dt$. Or il n'est pas difficile de voir que l'équation (V) de l'Art. VIII. appliquée à la question présente donne $Sdmu\delta u = -Sdm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.)$. On aura donc, en multipliant par dt dont la valeur est la même pour tous les élémens du fil, $Sdmu\delta u dt = -Sdm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.)dt$; ou bien, en mettant,

selon les suppositions de l'Art. I., $\Pi \delta x + \pi \delta y + \Psi \delta z$
au lieu de $P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c.$,

$$Sdm \, du \, dt = -Sdm (\Pi dt \delta x + \pi dt \delta y + \Psi dt \delta z) \dots (X)$$

Cette valeur substituée dans l'équation (K), il viendra
(L) $\dots \dots \dots - \int S \, dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta x$

$$+ \left[d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt \right] \delta y + \left[d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt \right] \delta z = 0.$$

Présentement, comme chaque élément du fil, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, est supposé inextensible, on a, comme dans l'Art. XXV., l'équation

$$dx \left(\frac{d dx}{dt} \right) + dy \left(\frac{d dy}{dt} \right) + dz \left(\frac{d dz}{dt} \right) = 0. \text{ On a de}$$

plus, par la même raison, $\delta \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = 0$,

ce qui donne $dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz = 0$,

savoir (en transposant les deux caractéristiques δ , d)
 $dx d \delta x + dy d \delta y + dz d \delta z = 0$; d'où l'on tire

$$d \delta x = - \frac{dy d \delta y + dz d \delta z}{dx}, \text{ \&, en intégrant, } S d \delta x$$

$= \delta x = \delta'x - S \frac{dy d \delta y + dz d \delta z}{dx}$; $\delta'x$ dénote la

valeur de δx lorsque l'intégrale marquée par S est zéro,

savoir la valeur du δx à la première extrémité du fil. La

substitution de cette valeur de δx dans l'équation (L)

changera l'expression intégrale $Sdm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta x$

en celle-ci $Sdm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta'x - Sdm \left[\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \right.$

$S \left(\frac{dy}{dx} d \delta y + \frac{dz}{dx} d \delta z \right)]$. Or la différence $\delta'x$ étant con-

stante, peut être dégagée du signe d'intégration; donc si

$T dt$ exprime la valeur totale de l'intégrale $Sdm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right)$

+ Πdt), l'expression $S dm (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) \delta x$ se réduira à celle-ci plus simple $T dt \delta x$. Il s'agit maintenant de faire disparaître les différences de δy & δz dans l'autre expression [$S dm (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) S (\frac{dy}{dx} d \delta y + \frac{dz}{dx} d \delta z)$]; c'est de quoi on viendra aisément à bout par la méthode de *l'Art. IX. du Mémoire préc.* Suivant cette méthode, on trouvera que, si $T dt$ représente, comme ci-devant, la valeur totale de l'intégrale $S dm (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt)$, & qu'on fasse, pour abrégér, $T dt - S dm (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) = V dt$, on aura $S dm (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) S \frac{dy}{dx} d \delta y = \frac{V dt dy}{dx} \delta y - S d \cdot \frac{V dt dy}{dx} \times \delta y$, & de même $S dm (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) S \frac{dz}{dx} d \delta z = \frac{V dt dz}{dx} \delta z - S d \cdot \frac{V dt dz}{dx} \times \delta z$: où les termes qui se trouvent hors du signe d'intégration S doivent être pris avec les conditions énoncées à la fin de *l'Art. I. du Mém. préc.*; or la valeur de $V dt$ qui répond au dernier point du fil est nulle, parceque $S dm (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt)$ devient alors $= T dt$, & pour le premier point cette valeur est $= T dt$, parceque $S dm (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) = 0$; donc si on marque par x, y, z les coordonnées qui répondent à ce point, on aura $-\frac{T dt dy}{dx} \delta y$ pour la valeur exacte du terme $\frac{V dt dy}{dx} \delta y$, & $-\frac{T dt dz}{dx} \delta z$ pour celle de l'autre terme $\frac{V dt dz}{dx} \delta z$. Par ces substitutions on aura

donc

donc $S dm \left[\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) S \left(\frac{dy}{dx} d\delta y + \frac{dz}{dx} d\delta z \right) \right] =$
 $-T dt \left(\delta'x + \frac{d'y}{dx} \delta'y + \frac{d'z}{dx} \delta'z \right) - S \left(d \cdot \frac{V dt dy}{dx} \times \delta y \right.$
 $\left. + d \cdot \frac{V dt dz}{dx} \times \delta z \right),$ & l'équation (L) se changera en celle-ci

$$(M) \dots \dots - f \left(\delta'x + \frac{d'y}{dx} \delta'y + \frac{d'z}{dx} \delta'z \right) T dt$$

$$- f S \left[\left(d \cdot \frac{V dt dy}{dx} + dm d \cdot \frac{dy}{dt} + dm \pi dt \right) \delta y + \right.$$

$$\left. \left(d \cdot \frac{V dt dz}{dx} + dm d \cdot \frac{dz}{dt} + dm \psi dt \right) \delta z \right] = 0;$$

d'où l'on tire pour tous les points du fil en général

$$d \cdot \frac{V dt dy}{dx} + dm \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt \right) = 0$$

$$d \cdot \frac{V dt dz}{dx} + dm \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \psi dt \right) = 0,$$

& ces équations, avec celle qui a été trouvée précédemment

$$dx \left(\frac{ddx}{dt} \right) + dy \left(\frac{ddy}{dt} \right) + dz \left(\frac{ddz}{dt} \right) = 0,$$

ferviront pour déterminer le mouvement du fil.

Si on fait dans ces équations $\Pi = -P$, $\pi = 0$, $\psi = 0$, elles reviendront au même que celles de l'Art. XXV., comme il est facile de s'en assurer par un calcul fort simple.

X X X.

SCHOLIE 1. Maintenant, pour satisfaire au reste de l'équation (M) on fera encore $\left(\delta'x + \frac{d'y}{dx} \delta'y + \frac{d'z}{dx} \delta'z \right) T dt = 0$, équation qui appartient uniquement au premier point du fil.

Suppo-

Supposons d'abord ce point absolument fixe, il est clair qu'on aura $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, ce qui rendra nuls tous les termes de l'équation dont il s'agit; donc les équations trouvées à la fin de l'Art. préc. suffiront dans ce cas pour résoudre le Problème.

Mais si l'autre bout du fil est aussi fixe, il faudra faire alors quelques changemens à ces équations. Pour cela soit

reprisè l'équation $\delta x = \delta x - S \left(\frac{dy}{dx} d\delta y + \frac{dz}{dx} d\delta z \right)$;

on trouvera, en intégrant par parties avec l'addition des

constantes nécessaires, $\delta x = \delta x - \frac{dy}{dx} \delta y - \frac{dz}{dx} \delta z +$

$\frac{d'y}{d'x} \delta y + \frac{d'z}{d'x} \delta z + S \left(d \cdot \frac{dy}{dx} \times \delta y + d \cdot \frac{dz}{dx} \times \delta z \right)$. Dé-

signons par x' , y' , z' les valeurs de x , y , z qui répondent à l'extrémité du fil, & rapportons l'équation qu'on

vient de trouver à ce point, on aura en transposant

$$\delta x' + \frac{dy'}{dx'} \delta y' + \frac{dz'}{dx'} \delta z' - \delta x - \frac{dy}{dx} \delta y - \frac{dz}{dx} \delta z -$$

$$S \left(d \cdot \frac{dy}{dx} \times \delta y + d \cdot \frac{dz}{dx} \times \delta z \right) = 0 : \text{ l'intégrale}$$

$$S \left(d \cdot \frac{dy}{dx} \times \delta y + d \cdot \frac{dz}{dx} \times \delta z \right) \text{ étant prisè pour toute}$$

la longueur du fil. Cette équation étant vraie pour tous

les instans du mouvement du fil, on peut la multiplier par

dt , & en prendre l'intégrale relativement au tems t ; on

aura donc en affectant tous les termes du signe \int

$$\int (\delta x' + \frac{dy'}{dx'} dy' + \frac{dz'}{dx'} dz' - \delta x - \frac{dy}{dx} dy - \frac{dz}{dx} dz) dt -$$

$$\int S \left(d \cdot \frac{dy}{dx} \times \delta y + d \cdot \frac{dz}{dx} \times \delta z \right) dt = 0 \dots \dots (N)$$

Equation qui doit avoir lieu en même tems que l'équation

générale (M) en faisant $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, δx , δy , δz

= 0 conformément à l'hypothèse, ce qui la réduit à

$$- \int S \left(d \cdot \frac{dy}{dx} \times \delta y + d \cdot \frac{dz}{dx} \times \delta z \right) dt = 0;$$
 je multiplie donc cette équation par un coefficient indéterminé k , & je l'ajoute à l'équation (M); j'ai (à cause de δx , δy , $\delta z = 0$)

$$\int S \left[\left(d \cdot \frac{V dt dy}{dx} + dm d \cdot \frac{dy}{dt} + dm \pi dt + d \cdot \frac{dy}{dx} \times k dt \right) \delta y \right. \\ \left. + \left(d \cdot \frac{V dt dz}{dx} + dm d \cdot \frac{dz}{dt} + dm \Psi dt + d \cdot \frac{dz}{dx} \times k dt \right) \delta z \right] \\ = 0;$$
 d'où je tire pour le mouvement du fil

$$d \cdot \frac{V dt dy}{dx} + dm \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt \right) + d \cdot \frac{dy}{dx} \times k dt = 0.$$

$$d \cdot \frac{V dt dz}{dx} + dm \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt \right) + d \cdot \frac{dz}{dx} \times k dt = 0.$$

Et la troisième équation sera la même que dans l'Art. préc.

X X X I.

SCHOLIE 2. L'équation (N) étant multipliée par un coefficient indéterminé k , & ensuite ajoutée à l'équation (M), on a en général

$$\int \left[\left(d x' \delta x' + d y' \delta y' + d z' \delta z' \right) \frac{k dt}{dx'} - \right. \\ \left. \left(d x \delta x + d y \delta y + d z \delta z \right) \frac{T + k}{dx} dt \right] \\ - \int S \left[\left(d \cdot \frac{V dt dy}{dx} + d \cdot \frac{dy}{dx} \times k dt + dm d \cdot \frac{dy}{dt} + dm \pi dt \right) \delta y \right. \\ \left. + \left(d \cdot \frac{V dt dz}{dx} + d \cdot \frac{dz}{dx} \times k dt + dm d \cdot \frac{dz}{dt} + dm \Psi dt \right) \delta z \right] = 0.$$

Les termes affectés du double signe $\int S$ fourniront d'abord pour le mouvement général du fil les mêmes équations que dans l'Art. préc.; ensuite les autres termes affectés simplement du signe \int donneront l'équation

$$(d x' \delta x'$$

$$(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z') \frac{k dt}{dx'} -$$

$$(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z) \times \frac{T+k}{d'x} dt = 0.$$

d' où l'on tire les conclusions suivantes.

1.° Si le fil est fixement arrêté à ses deux extrémités, les différences $\delta'x$, $\delta'y$, $\delta'z$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ sont nulles par elles mêmes, & l'équation, dont il s'agit ne fournit aucune condition nouvelle; c'est le cas de l'Art. préc.

2.° S'il n'y a qu'une des extrémités du fil, qui soit fixe, alors on aura simplement $\delta'x$, $\delta'y$, $\delta'z = 0$, ou $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z' = 0$; dans le premier cas, il restera l'équation $(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z') \frac{k dt}{dx'} = 0$, à laquelle on ne peut satisfaire qu'en mettant $k = 0$; dans le second, l'équation restante sera $-(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z) \frac{k + T}{d'x} dt = 0$, laquelle donnera nécessairement $k + T = 0$, savoir $T = -k$.

3.° Si le fil est attaché d'un côté à une verge fixe le long de laquelle il puisse couler par le moien d'un anneau, & que l'équation de la verge soit en général $d'z = m d'x + n d'y$; alors on supposera $\delta'z = m \delta'x + n \delta'y$, ou $\delta z' = m' \delta x' + n' \delta y'$, selon que ce sera le premier, ou le dernier point du fil, qui décrira la courbe donnée, & substituant dans l'équation ci-dessus la valeur de $\delta'z$ ou de $\delta z'$ on en tirera, pour le premier cas, les deux conditions $d'x + m' d'z = 0$, $d'y + n' d'z = 0$, & de plus $k = 0$, si l'autre bout du fil est libre, & pour le second cas on trouvera de même $d x' + m' d z' = 0$, $d y' + n' d z' = 0$, & de plus $T + k = 0$, si le premier point du fil est libre.

4.° Si les deux bouts du fil coulent le long de deux courbes représentées par les équations $d'z = m d'x + n d'y$, $d z' = m' d x' + n' d y'$, on mettra $m \delta'x + n \delta'y$ pour $\delta'z$,
 $H \quad h$
 $\delta'z,$

$\delta'z$, & $m'\delta x' + n'\delta y'$ pour $\delta'z'$, & l'on fera en conséquence $d'x + m'd'z = 0$, $d'y + n'd'z = 0$, $d'x' + m'd'z' = 0$, $d'y' + n'd'z' = 0$.

5.° Si les deux bouts du fil sont attachés l'un à l'autre, enforte qu'il en résulte une courbe rentrente en elle même on aura dans ce cas $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, & l'équation générale se réduira à $-(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z) \frac{Tdt}{d'x} = 0$; d'où $T = 0$ comme dans le premier cas du n. 1.

Toutes ces équations, au reste, devront se vérifier au moyen des constantes qui se trouveront dans les équations générales de l'Art. préc. après leur intégration.

X X X I I.

SCHOLIE 3. Imaginons que le fil soit emporté par un corps de masse finie M' attaché à son extrémité, & animé par des puissances quelconques P' , Q' , R' &c. Il est clair que dans ce cas la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum* ne fera plus simplement $S d'm f u d s$, mais $S d m f u d s + M' f u' d s'$ en nommant u' la vitesse du corps M' , & $d s'$ l'élément de la courbe qu'il décrit. Or cette dernière formule étant traitée comme celle du Prob. 1. donnera pour sa différentielle

$$- M' f \left[\left(d \cdot \frac{d x'}{d t} + \Pi' d t \right) \delta x' + \left(d \cdot \frac{d y'}{d t} + \pi' d t \right) \delta y' + \left(d \cdot \frac{d z'}{d t} + \Psi' d t \right) \delta z' \right];$$

on ajoutera donc cette quantité au premier membre de l'équation générale de l'Art. préc., & l'on aura celle-ci

$$- f \left[\left(M' d \cdot \frac{d x'}{d t} + M' \Pi' d t - k d t \right) \delta x' + \right.$$

$$\left. \left(M' d \cdot \right. \right.$$

$$(M' d \cdot \frac{dy'}{dt} + M' \pi' dt - \frac{dy'}{dx'} k dt) \delta y' +$$

$$(M' d \cdot \frac{d\zeta'}{dt} + M' \Psi' dt - \frac{d\zeta'}{dx'} k dt) \delta \zeta' +$$

$$(d'x \delta'x + d'y \delta'y + d'\zeta \delta'\zeta) \times \frac{T+k}{d'x} dt]$$

$$- \int S [(d \cdot \frac{V dt dy}{dx} + d \cdot \frac{dy}{dx} \chi k dt + dm d \cdot \frac{dy}{dt} + dm \pi dt) \delta y$$

$$- (d \cdot \frac{V dt d\zeta}{dx} + d \cdot \frac{d\zeta}{dx} \chi k dt + dm d \cdot \frac{d\zeta}{dt} + dm \Psi dt) \delta \zeta]$$

$$= 0 \dots \dots \dots (P)$$

Les termes affectés du double signe $\int S$ donneront pour le mouvement du fil en général les mêmes équations de l'Art. XXX., qu'il est inutile de répéter. Les autres termes fourniront l'équation

$$(M' d \cdot \frac{dx'}{dt} + M' \Pi' dt - k dt) \delta x' +$$

$$(M' d \cdot \frac{dy'}{dt} + M' \pi' dt - \frac{dy'}{dx'} k dt) \delta y' +$$

$$(M' d \cdot \frac{d\zeta'}{dt} + M' \Psi' dt - \frac{d\zeta'}{dx'} k dt) \delta \zeta' +$$

$$(d'x \delta'x + d'y \delta'y + d'\zeta \delta'\zeta) \times \frac{T+k}{d'x} dt = 0.$$

Or si le corps M' est libre en sorte que les différences $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta \zeta'$ demeurent indéterminées, on fera

$$M' (d \cdot \frac{dx'}{dt} + \Pi' dt) - k dt = 0$$

$$M' (d \cdot \frac{dy'}{dt} + \pi' dt) - \frac{dy'}{dx'} k dt = 0$$

$$M' (d \cdot \frac{d\zeta'}{dt} + \Psi' dt) - \frac{d\zeta'}{dx'} k dt = 0.$$

Ce sont les équations qui serviront à déterminer le mouvement du corps M' .

Si ce corps étoit contraint de se mouvoir sur une surface donnée par l'équation $d\zeta' = m'dx' + n'dy'$; on mettroit, comme à l'ordinaire, $m'\delta x' + n'\delta y'$ au lieu de $\delta\zeta'$, & l'on en tireroit les équations

$$M' \left(d \cdot \frac{dx'}{dt} + \Pi' dt \right) - k dt +$$

$$\left[M' \left(d \cdot \frac{d\zeta'}{dt} + \Psi' dt \right) - \frac{d\zeta'}{dx'} k dt \right] m' = 0$$

$$M' \left(d \cdot \frac{dy'}{dt} + \pi' dt \right) - \frac{dy'}{dx'} k dt +$$

$$\left[M' \left(d \cdot \frac{d\zeta'}{dt} + \Psi' dt \right) - \frac{d\zeta'}{dx'} k dt \right] n' = 0.$$

A l'égard des termes $(dx'\delta x' + dy'\delta y' + d\zeta'\delta\zeta')$ $\times \frac{T+k}{dx'} dt$ qui appartiennent au premier point du fil, ils fourniront les mêmes conditions que dans l'Art. préc., selon les différentes circonstances du mouvement de ce point. Mais si l'on imaginoit de plus en ce point un autre corps 'M, animé des puissances 'P, 'Q, 'R &c., enforte que le fil fût emporté par deux corps 'M, 'M' fixement attachés à ses extrémités; alors on auroit, pour la formule du *maximum*, ou du *minimum*, $S \cdot d m f u d s + M' f u' d s' + M f u d s$; & l'on trouveroit, en faisant le calcul de la même manière que ci-dessus, que le premier membre de l'équation ('P) seroit augmenté des termes $- M f \left[\left(d \cdot \frac{dx'}{dt} + \Pi' dt \right) \delta x' \right. \\ \left. \left(d \cdot \frac{dy'}{dt} + \pi' dt \right) \delta y' + \left(d \cdot \frac{d\zeta'}{dt} + \Psi' dt \right) \delta \zeta' \right]$; ce qui ne changeroit rien aux formules trouvées pour le mouvement du fil, & de l'autre corps 'M'; mais on auroit de plus l'équation

$$\left[M d \cdot \frac{dx'}{dt} + M \Pi' dt + (T + k) dt \right] \delta x' +$$

('M d .

$$\left[M d \cdot \frac{d'y}{dt} + M' \pi dt + \frac{d'y}{d'x} \times (T + k) dt \right] \delta'y +$$

$$\left[M d \cdot \frac{d'\zeta}{dt} + M' \Psi dt + \frac{d'\zeta}{d'x} \times (T + k) dt \delta \right] \delta'\zeta = 0;$$

d'où l'on tireroit pour le mouvement du corps M des formules analogues à celles qu'on a trouvées pour le corps M' .

X X X I I I.

PROBLEME 7. Résoudre le Problème précédent, en supposant que le fil soit extensible & élastique.

SOLUTION. Soit F le ressort, c'est-à-dire, la force de contraction de chaque élément du fil, on aura en général, par l'équation (V). de l'Art. VIII., $Sdm u \delta u = - Sdm (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c.) - SF \delta f$; ce qui donne, en multipliant par dt , & mettant $\Pi \delta x + \pi \delta y + \Psi \delta z$ au lieu de $P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c.$, & ds au lieu de f ,

$$(Y) \quad Sdm u \delta u dt = - Sdm (\Pi dt \delta x + \pi dt \delta y + \Psi dt \delta z) - SF dt \delta ds.$$

Or $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; donc

$$\delta ds = \frac{dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz}{ds}$$

$$= \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds};$$

donc, mettant cette valeur dans $SF dt \delta ds$, & intégrant par parties avec les constantes nécessaires, on aura

$$SF dt \delta ds = \frac{F' dt}{ds'} (dx' \delta x' + dy' \delta y' + dz' \delta z') -$$

$$\frac{F dt}{ds} (d'x \delta'x + d'y \delta'y + d'z \delta'z) -$$

$$S \left(d \cdot \frac{F dx}{ds} \times \delta x + d \cdot \frac{F dy}{ds} \times \delta y + d \cdot \frac{F dz}{ds} \times \delta z \right) dt.$$

Main-

Maintenant, pour résoudre le Problème, il n'y a plus qu'à mettre dans l'équation (*K*) de l'Art. XXIX. au lieu de $Sdm\delta u dt$ la valeur qu'on vient de trouver, & l'on aura, en ordonnant les termes

$$\begin{aligned}
 & - \int [(dx' \delta x' + dy' \delta y' + dz' \delta z') \frac{F' dt}{ds'} - \\
 & \quad (d'x \delta'x + d'y \delta'y + d'z \delta'z) \frac{F dt}{ds}] + \\
 & \int S [(d \cdot \frac{F dx}{ds} \chi dt - dm \Pi dt - dm d \cdot \frac{dx}{dt}) \delta x + \\
 & \quad (d \cdot \frac{F dy}{ds} \chi dt - dm \pi dt - dm d \cdot \frac{dy}{dt}) \delta y + \\
 & \quad (d \cdot \frac{F dz}{ds} \chi dt - dm \Psi dt - dm d \cdot \frac{dz}{dt}) \delta z] = 0 ;
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire pour les équations générales du mouvement du fil

$$\begin{aligned}
 d \cdot \frac{F dx}{ds} \chi dt - dm (\Pi dt + d \cdot \frac{dx}{dt}) &= 0 \\
 d \cdot \frac{F dy}{ds} \chi dt - dm (\pi dt + d \cdot \frac{dy}{dt}) &= 0 \\
 d \cdot \frac{F dz}{ds} \chi dt - dm (\Psi dt + d \cdot \frac{dz}{dt}) &= 0,
 \end{aligned}$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'Art. XXVII. en mettant π , & $\Psi = 0$, & $-P$ au lieu de Π .

On aura de plus l'équation

$$\begin{aligned}
 (dx' \delta x' + dy' \delta y' + dz' \delta z') \frac{F' dt}{ds'} - \\
 (d'x \delta'x + d'y \delta'y + d'z \delta'z) \frac{F dt}{ds} = 0
 \end{aligned}$$

qu'on traitera qu'on a fait ci-devant l'équation (*P*), & qui donnera par conséquent des conclusions semblables sur le mouvement des deux extrémités du fil. J'en laisse le détail au Lecteur.

PROBLEME 8. Trouver le mouvement d'un corps de figure quelconque, animé par des forces quelconques.

SOLUTION. Soit nommée dm chaque particule du corps, u sa vitesse, & ds l'espace qu'elle parcourt dans le tems dt ; on aura comme dans l'Art. XXIX. $Sdmfuds$ pour la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*.

En suivant la méthode expliquée dans cet Article, on parviendra de même à l'équation (L)

$$- \int Sdm \left[\left(d - \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta x + \left(d - \frac{dy}{dt} + \pi dt \right) \delta y + \left(d - \frac{dz}{dt} + \nu dt \right) \delta z \right] = 0,$$

& il n'y aura plus qu'à substituer dans cette équation les valeurs de dx , dy , dz , & δx , δy , δz convenables à chaque particule du corps donné.

Pour trouver ces valeurs je prens dans l'intérieur du corps un point quelconque fixe, que j'appelle le centre de rotation, & dont je suppose que la position soit représentée par les coordonnées rectangles X , Y , Z ; je rapporte à ce centre chacun des autres points du corps par le moyen de trois nouvelles coordonnées p , q , r prises dans les mêmes axes que les X , Y , Z ; j'ai ainsi $x = X + p$, $y = Y + q$, $z = Z + r$; par conséquent $dx = dX + dp$, $dy = dY + dq$, $dz = dZ + dr$, & de même $\delta x = \delta X + \delta p$, $\delta y = \delta Y + \delta q$, $\delta z = \delta Z + \delta r$.

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des différences de p , q , r pour chaque point du corps; pour cela il faut considérer le mouvement du corps autour de son centre, & déterminer les variations qui en résultent dans chacune des lignes p , q , r . Or il est facile de voir que, quel que soit ce mouvement, il peut toujours être regardé comme formé de trois mouvemens de rotation autour de trois axes perpendiculaires entr'eux, & passant par le centre

centre dont nous parlons; donc si on prend pour les axes de rotation ceux des coordonnées p, q, r ; on trouvera par un calcul très-simple que, tandis que le corps tourne autour de l'axe des r d'un mouvement angulaire dR , la ligne p croîtra de la quantité $q dR$, & la ligne q décroîtra de la quantité $p dR$; que de même, en nommant dQ l'angle de rotation autour de l'axe des q , les lignes p & r deviendront par ce mouvement $p + r dQ, r - p dQ$; & qu'enfin l'angle de rotation autour de l'axe des p , étant dP , il en résultera dans la ligne q un accroissement $= r dP$, & dans la ligne r un décroissement $= q dP$. Donc en ajoutant ensemble toutes ces différentes variations des lignes p, q, r , & exprimant les variations totales par dp, dq, dr , on aura en général

$$\left. \begin{aligned} dp &= rdQ + qdR \\ dq &= rdP - pdR \\ dr &= -qdP - pdQ \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (Q)$$

& par conséquent aussi, en changeant d en δ .

$$\left. \begin{aligned} \delta p &= r\delta Q + q\delta R \\ \delta q &= r\delta P - p\delta R \\ \delta r &= -q\delta P - p\delta Q \end{aligned} \right\}$$

On aura donc par-là

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta X + r\delta Q + q\delta R \\ \delta y &= \delta Y + r\delta P - p\delta R \\ \delta z &= \delta Z - q\delta P - p\delta Q; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dX}{dt} + r \frac{dQ}{dt} + q \frac{dR}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dY}{dt} + r \frac{dP}{dt} - p \frac{dR}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dZ}{dt} - q \frac{dP}{dt} - p \frac{dQ}{dt}, \end{aligned} \right\}$$

d'où l'on tire

$$d \cdot \frac{dx}{dt} = d \cdot \frac{dX}{dt} + r d \cdot \frac{dQ}{dt} + dr \frac{dQ}{dt} + qd \cdot \frac{dR}{dt} + dq$$

$$dq \frac{dR}{dt} \text{ savoir, en mettant pour } dq, dr, \text{ leurs valeurs,}$$

$$= d \cdot \frac{dX}{dt} + r d \cdot \frac{dQ}{dt} + q d \cdot \frac{dR}{dt} - q \frac{dP dQ}{dt} - p \frac{dQ^2}{dt}$$

$$+ r \frac{dP dR}{dt} - p \frac{dR^2}{dt};$$

on aura de la même manière

$$d \cdot \frac{dY}{dt} = d \cdot \frac{dY}{dt} + r d \cdot \frac{dP}{dt} - p d \cdot \frac{dR}{dt} - q \frac{dP^2}{dt}$$

$$+ p \frac{dP dQ}{dt} - r \frac{dQ dR}{dt} - q \frac{dR^2}{dt};$$

$$d \cdot \frac{dZ}{dt} = d \cdot \frac{dZ}{dt} - q d \cdot \frac{dP}{dt} - p d \cdot \frac{dQ}{dt} - r \frac{dP^2}{dt} +$$

$$p \frac{dP dR}{dt} - r \frac{dQ^2}{dt} - q \frac{dQ dR}{dt}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (L), & faisant sortir hors du signe S les quantités $dX, dY, dZ, \delta X, \delta Y, \delta Z, dP, dQ, dR, \delta P, \delta Q, \delta R$, qui sont les mêmes pour chaque point du corps, enfin ordonnant les termes par rapport à $\delta X, \delta Y, \delta Z, \delta P, \delta Q, \delta R$; on aura une équation de la forme suivante

$$f([X] \delta X + [Y] \delta Y + [Z] \delta Z + [P] \delta P + [Q] \delta Q + [R] \delta R) = 0 \dots \dots \dots (S)$$

dans laquelle

$$[X] = Md \cdot \frac{dX}{dt} + S r d m \times \left(d \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{dP dR}{dt} \right) +$$

$$S q d m \times \left(d \cdot \frac{dR}{dt} - \frac{dP dQ}{dt} \right) - S p d m \times \frac{dQ^2 + dR^2}{dt}$$

$$+ S \Pi d m d t$$

$$[Y] = Md \cdot \frac{dY}{dt} + S r d m \times \left(d \cdot \frac{dP}{dt} - \frac{dQ dR}{dt} \right) +$$

$$S q d m \times \frac{dP^2 + dR^2}{dt} - S p d m \times \left(d \cdot \frac{dR}{dt} + \frac{dP dQ}{dt} \right)$$

$$+ S \pi d m d t$$

I i

[Z]

$$[Z] = Md \cdot \frac{dZ}{dt} - Srdm \times \frac{dP^2 + dQ^2}{dt} - Sqdm \times \left(d \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{dPdR}{dt} \right) - Spdm \times \left(d \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{dPdR}{dt} \right) + S\psi dmdt.$$

(M exprime la valeur de Sdm, savoir la masse entière du corps).

$$[P] = Srdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} - Sqdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + (Sr^2dm + Sq^2dm) \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Spqdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - Sprdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times \frac{dQ^2 - dR^2}{dt} - Sprdm \times \frac{dPdQ}{dt} - Spqdm \times \frac{dPdR}{dt} + (Sq^2dm - Sr^2dm) \times \frac{dQdR}{dt} + S\pi rdm dt - S\psi qdm dt$$

$$[Q] = Srdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + (Sr^2dm + Sp^2dm) \times d \cdot \frac{dQ}{dt} + Spqdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sprdm \times \frac{dP^2 - dR^2}{dt} - Sqrdm \times \frac{dPdQ}{dt} + Spqdm \times \frac{dQdR}{dt} + (Sr^2dm - Sp^2dm) \times \frac{dPdR}{dt} + S\Pi rdm dt - S\psi pdm dt$$

$$[R] = Sqdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} + (Sp^2dm + Sq^2dm) \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - Sprdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Spqdm \times \frac{dP^2 - dQ^2}{dt} + Sqrdm \times \frac{dPdR}{dt} + Sprdm \times \frac{dQdR}{dt} + (Sp^2dm - Sq^2dm) \times \frac{dPdQ}{dt} + S\Pi qdm dt - S\pi pdm dt.$$

Cette

Cette équation donnera la solution du Problème en faisant, comme à l'ordinaire, les coefficients des différences marquées par δ , chacun en particulier = 0; comme on va le voir dans les Corollaires suivans.

X X X V.

REMARQUE. On peut simplifier les expressions de $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, $[P]$, $[Q]$, $[R]$, en faisant tomber le centre de rotation dans le centre de gravité du corps. Car alors les intégrales $Spdm$, $Sqdm$, $Srdm$, qui expriment la somme des momens de toutes les particules du corps par rapport à ses trois axes de rotation, deviendront nécessairement égales à zéro, par la propriété connue de ce centre.

A l'égard des autres intégrales Sp^2dm , Sq^2dm &c., il faut observer que leur valeur dépend de la position instantanée du corps, & qu'elle varie, par conséquent, avec le tems t .

En effet $d \cdot Sp^2dm = Sd \cdot p^2dm = 2Spdpdm =$
 (en mettant au lieu de dp sa valeur $rdQ + qdR$)
 $2Sprdm \times dQ + 2Spqdm \times dR;$

on trouvera de la même manière

$$d \cdot Sq^2dm = 2Sqr dm \times dP - 2Spqdm \times dR,$$

$$d \cdot Sr^2dm = -2Sqr dm \times dP - 2Sprdm \times dQ;$$

$$d \cdot Spqdm = Sprdm \times dP + Sqr dm \times dQ +$$

$$(Sq^2dm - Sp^2dm) dR$$

$$d \cdot Sprdm = -Spqdm \times dP + (Sr^2dm - Sp^2dm) dQ +$$

$$Sq^2dm \times dR$$

$$d \cdot Sqr dm = (Sr^2dm - Sq^2dm) dP - Spqdm \times dQ -$$

$$Sprdm \times dR.$$

Ce sont ces équations qui serviront à déterminer les valeurs générales des quantités Sp^2dm , Sq^2dm , Sr^2dm , $Spqdm$, $Sprdm$, $Sqr dm$, qui entrent dans les expressions $[X]$, $[Y]$ &c. de l'équation (S); mais c'est de quoi il ne pa-

roit pas facile de venir à bout à cause de la difficulté d'intégrer ces sortes d'équations.

X X X V I.

COROLLAIRE 1. Or si le corps est entièrement libre, en sorte que les différences δx , δy , δz , δP , δQ , δR n'aient entr'elles aucun rapport déterminé, il faut, pour vérifier l'équation (S), faire les coefficients de ces différences chacun en particulier = 0; ce qui donne les six équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$, $[R] = 0$; par où l'on peut connoître le mouvement du corps à chaque instant. Si on fait dans ces équations $S p d m = 0$, $S q d m = 0$, $S r d m = 0$, selon l'hypothèse de l'art. préc. les trois premières deviendront celles-ci

$$M d \cdot \frac{dX}{dt} + S \Pi d m d t = 0$$

$$M d \cdot \frac{dY}{dt} + S \pi d m d t = 0$$

$$M d \cdot \frac{dZ}{dt} + S \Psi d m d t = 0$$

lesquelles montrent, que le centre de gravité du corps se meut de la même manière que si toute la masse du corps étoit réunie dans ce centre.

Les trois autres équations ne contiendront que les variables dP , dQ , dR , d'où dépend le mouvement de rotation du corps) autour de centre de gravité; ainsi ce mouvement fera tout à fait indépendant de celui du centre de gravité.

Imaginons que le corps ne tourne, qu'autour d'un seul axe, on supposera, dans les équations $[P] = 0$, $[Q] = 0$, $[R] = 0$, deux quelconques des trois variables dP , dQ , dR , égales à zéro. Soient d'abord dQ , dR , = 0 on aura

$$(S r^2 d m + S q^2 d m) d \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\begin{aligned}
& + S \pi r d m d t - S \Psi q d m d t = 0 \\
& S p q d m \chi d \cdot \frac{dP}{dt} + S p r d m \chi \frac{dP^2}{dt} \\
& + S \Pi r d m d t - S \Psi p d m d t = 0 \\
& - S p r d m \chi d \cdot \frac{dP}{dt} + S p q d m \chi \frac{dP^2}{dt} \\
& + S \Pi q d m d t - S \pi p d m d t = 0
\end{aligned}$$

On trouvera de plus, par les formules données à la fin de l'art. prec., $d \cdot S r^2 d m + d \cdot S q^2 d m = 0$; $d \cdot S p q d m = S p r d m \chi d P$, $d \cdot S p r d m = -S p q d m \chi d P$; d'où 1.° $S r^2 d m + S q^2 d m = \text{const.}$ (j'appellerai cette constante A) 2.° $\frac{d \cdot S p q d m}{S p r d m} = \frac{d \cdot S p r d m}{S p q d m}$; savoir $S p q d m \chi d \cdot S p q d m = -S p r d m \chi d \cdot S p r d m$, ce qui donne, en intégrant & réduisant, $(S p q d m)^2 + (S p r d m)^2 = \text{const.}$; soit cette constante $= B^2$, on aura $S p r d m = \sqrt{[B^2 - (S p q d m)^2]}$ donc $\frac{d \cdot S p q d m}{\sqrt{[B^2 - (S p q d m)^2]}} = d P$, d'où $S p q d m = B \sin. (\alpha + P)$; α étant un angle constant tel que $B \sin. \alpha = S p q d m$, au commencement de la rotation du corps; par conséquent $S p r d m = B \cos. (\alpha + P)$; donc si on substitue ces valeurs dans les trois équations ci-dessus on aura.

$$\begin{aligned}
& A d \cdot \frac{dP}{dt} + S \pi r d m d t - S \Psi q d m d t = 0 \\
& B \sin. (\alpha + P) d \cdot \frac{dP}{dt} + B \cos. (\alpha + P) \frac{dP^2}{dt} \\
& + S \Pi r d m d t - S \Psi p d m d t = 0 \\
& - B \cos. (\alpha + P) d \cdot \frac{dP}{dt} + B \sin. (\alpha + P) \frac{dP^2}{dt} \\
& + S \Pi q d m d t - S \pi p d m d t = 0
\end{aligned}$$

La première de ces équations étant multipliée par $\frac{dP}{dt}$, & ensuite

ensuite intégrée donne $\frac{A d P^2}{2 d t^2} + f(S \pi r d m - S \Psi q d m) d P$
 $= \frac{A c^2}{2}$, c étant la valeur de $\frac{d P}{d t}$ lorsque $P = 0$, c'est à dire
 la vitesse primitive de rotation; donc substituant dans la se-
 conde, & dans la troisième équation, au lieu de $d \cdot \frac{d P}{d t}$ & de
 $\frac{d P^2}{d t}$, leurs valeurs, on aura, après avoir divisé par $d t$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{B}{A} \sin. (\alpha + P) \chi (S \pi r d m - S \Psi q d m) \\
 & - \frac{2 B}{A} \cos. (\alpha + P) \chi f(S \pi r d m - \Psi q d m) d P \\
 & + B c^2 \cos. (\alpha + P) + S \Pi r d m - S \Psi p d m = 0 \\
 & \frac{B}{A} \cos. (\alpha + P) \chi (S \pi r d m - S \Psi q d m) \\
 & - \frac{2 B}{A} \sin. (\alpha + P) \chi f(S \pi r d m - S \Psi q d m) d P \\
 & + B c^2 \sin. (\alpha + P) + S \Pi q d m - S \pi p d m = 0
 \end{aligned}$$

& ces équations renfermeront les conditions nécessaires pour
 que le corps tourne librement autour d'un axe immobile.

Si les forces Π , π , Ψ sont nulles, ou constantes, ou
 bien, si elles sont proportionnelles à p , q , r , on a $S \pi r d m$
 $- S \Psi q d m = 0$, $S \Pi r d m - S \Psi p d m = 0$, $S \Pi q d m$
 $- S \pi p d m = 0$; par conséquent $\frac{d P^2}{d t^2} = c^2$, c est à dire

que le mouvement de rotation est uniforme; & les équations
 précédentes se réduisent à $B c^2 \cos. (\alpha + P) = 0$, $B c^2 \sin.$
 $(\alpha + P) = 0$, ce qui donne $B = 0$; on aura donc
 $\sqrt{[(S p q d m)^2 + (S p r d m)^2]} = 0$, ce qui ne peut ar-
 river à moins que l'on n'ait $S p q d m = 0$, $S p r d m = 0$.
 Voilà donc les conditions par lesquelles on déterminera la
 position de l'axe de rotation au dedans du corps. Il est clair
 que ces conditions sont suffisantes pour une telle détermina-

tion; puisque on fait que la position d'une droite qui passe par un point donné ne dépend que de deux variables.

Soient maintenant $dP=0$, $dR=0$, ou $dP=0$, $dQ=0$, dans les équations $[P]=0$, $[Q]=0$, $[R]=0$; on trouvera, par des procédés semblables à ceux que nous venons de pratiquer, les conditions de la rotation du corps autour de deux autres axes :

Dans la supposition de $S \pi r d m - S \Psi q d m = 0$, $S \Pi r d m - S \Psi q d m = 0$, $S \Pi q d m - S \pi p d m = 0$; les équations dont il s'agit seront

$$S p q d m \times d \cdot \frac{dQ}{dt} + S q r d m \times \frac{dQ^2}{dt} = 0$$

$$(S r^2 d m + S p^2 d m) d \cdot \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$S q r d m \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - S p q d m \times \frac{dQ^2}{dt} = 0$$

pour le cas où $dP=0$, $dR=0$, &

$$-S p r d m \times d \cdot \frac{dR}{dt} - S q r d m \times \frac{dR^2}{dt} = 0$$

$$S q r d m \times d \cdot \frac{dR}{dt} - S p r d m \times \frac{dR^2}{dt} = 0$$

$$(S p^2 d m + S q^2 d m) d \cdot \frac{dR}{dt} = 0$$

pour le cas où $dP=0$, $dQ=0$.

Dans le premier cas on aura donc $d \cdot \frac{dQ}{dt} = 0$ c'est à dire que la rotation fera uniforme, & de plus $S q r d m = 0$, $S p q d m = 0$ pour la détermination de l'axe de rotation.

Le second cas donnera pareillement $d \cdot \frac{dR}{dt} = 0$, savoir la rotation uniforme, & $S p r d m = 0$, $S q r d m = 0$ pour la détermination de son axe.

On trouvera donc trois axes fixes, autour de chacun desquels le corps M pourra tourner librement & uniformement,

en

en cherchant dans ce corps la position de trois droites, qui passent par son centre de gravité, & qui soient telles, que $S p q d m = 0$, $S p r d m = 0$, $S q r d m = 0$, $S p q d m = 0$, $S q r d m$, $S p r d m = 0$, savoir $S p q d m = 0$, $S p r d m = 0$, $S q r d m = 0$; p , q , r , étant les coordonnées rectangles qui déterminent la position de chaque particule du corps par rapport à chacune de ces droites; d'où il est aisé de conclure que les trois axes de rotation dont il s'agit sont nécessairement perpendiculaires entr'eux.

Au reste, quelque soit le mouvement du corps autour de son centre de gravité, il y aura toujours un axe instantané de rotation, qui passera par ce centre, & qui sera facile à déterminer dès qu'on connoîtra les mouvemens angulaires dP , dQ , dR ; soient p' , q' , r' les coordonnées qui répondent à chacun des point placés dans l'axe dont nous parlons; il est clair que, ces points devant être immobiles pour un instant, on doit avoir $d p' = r' d Q + q' d R = 0$, $d q' = r' d P - p' d R = 0$, $d r' = -q' d P - p' d Q = 0$; équations dont la troisième est, comme on le voit, une suite nécessaire des deux premières; c'est pourquoi on fera simplement $r' d Q + q' d R = 0$, $r' d P - p' d R = 0$: ce qui, en regardant p' , q' , r' comme variables, & dP , dQ , dR comme constantes, donne une droite, dont la position est aisée à déterminer par rapport aux axes des coordonnées p' , q' , r' .

Dans le premier instant du mouvement on a, en faisant $dP = 0$, $dQ = 0$, $dR = 0$ dans les équations $[P] = 0$, $[Q] = 0$, $[R] = 0$,

$$(S r^2 d m + S q^2 d m) d \cdot \frac{d P}{d t} + S p q d m \times d \cdot \frac{d Q}{d t} - S p r d m \times d \cdot \frac{d R}{d t} + S \pi r d m d t - S \Psi q d m d t = 0$$

$$(S r^2 d m + S p^2 d m) d \cdot \frac{d Q}{d t} + S p q d m \times d \cdot \frac{d P}{d t}$$

+

$$+ S q r d m \times d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi r d m d t - S \Psi p d m d t = 0$$

$$(S p^2 d m + S q^2 d m) d \cdot \frac{dR}{dt} + S q r d m \times d \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$- S p r d m \times d \cdot \frac{dP}{dt} + S \Pi q d m d t - S \pi p d m d t = 0$$

de plus les équations $r' dQ + q' dR = 0$, $r' dP - p' dR = 0$ étant divisées par dt , & ensuite différenciées donnent (à cause de $dP = 0$, $dQ = 0$, $dR = 0$)

$$r' d \cdot \frac{dQ}{dt} + q' d \cdot \frac{dR}{dt} = 0; r' d \cdot \frac{dP}{dt} - p' d \cdot \frac{dR}{dt} = 0;$$

d'où l'on tire

$$d \cdot \frac{dQ}{dt} = - \frac{q'}{r'} \times d \cdot \frac{dR}{dt}; d \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{p'}{r'} \times d \cdot \frac{dR}{dt};$$

ces valeurs substituées dans les équations ci-devant, on a

$$[(S r^2 d m + S q^2 d m) \frac{p'}{r'} - S p q d m \times \frac{q'}{r'} - S p r d m]$$

$$\times d \cdot \frac{dR}{dt} + S \pi r d m d t - S \Psi q d m d t = 0,$$

$$[-(S r^2 d m + S p^2 d m) \frac{q'}{r'} + S p q d m \times \frac{p'}{r'} + S q r d m]$$

$$\times d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi r d m d t - S \Psi p d m d t = 0,$$

$$[S p^2 d m + S q^2 d m - S q r d m \times \frac{q'}{r'} - S p r d m \times \frac{p'}{r'}]$$

$$\times d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi q d m d t - S \pi p d m d t = 0,$$

& en éliminant $d \cdot \frac{dR}{dt}$,

$$\frac{(S r^2 d m + S q^2 d m) p' - S p q d m \times q' - S p r d m \times r'}{S p q d m \times p' - (S r^2 d m + S p^2 d m) q' + S q r d m \times r'}$$

$$= \frac{S \Psi q d m - S \pi r d m}{S \Psi p d m - S \Pi r d m}$$

$$\frac{(S r^2 dm + S q^2 dm) p' - S p q dm \times q' - S p r dm \times r'}{-S p r dm \times p' - S q r dm \times q' + (S p^2 am + S q^2 dm) r'}$$

$$= \frac{S \Psi q dm - S \pi r dm}{S \pi p dm - S \Pi q dm};$$

Equations qui donnent le rapport des coordonnées p' , q' , r' entr'elles, & par conséquent la position de l'axe de rotation au commencement du mouvement.

X X X V I I.

COROLLAIRE 2. Si le corps n'est pas absolument libre, mais qu'un de ses points quelconque soit obligé de se mouvoir sur une surface donnée; alors, prenant ce point pour le centre de rotation, & supposant la surface exprimée par l'équation $dZ = m dX + n dY$, on ne fera que mettre, dans l'équation (S), $m \delta X + n \delta Y$ pour δZ , & l'on aura, au lieu des trois équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, ces deux-ci $[X] + m [Z] = 0$, $[Y] + n [Z] = 0$; les trois autres ne recevant aucun changement. Mais si pour simplifier les expressions de $[X]$, $[Y]$ &c., on veut que le centre de rotation soit le centre de même de gravité du corps suivant la Remarque de l'Art. XXXV.; alors on ne doit plus prendre X , Y , Z pour les coordonnées de la surface proposée, mais $X + p'$, $Y + q'$, $Z + r'$: p' , q' , r' étant les coordonnées qui déterminent la position du point qui se meut sur cette surface par rapport au centre de gravité; on aura donc $dZ + dr' = m(dX + dp') + n(dY + dq')$; & mettant au lieu de dp' , dq' , dr' leurs valeurs $r' dQ + q' dR$, $r' dP - p' dR$, $-q' dP - p' dQ$, & ordonnant les termes, $dZ = m dX + n dY + (q' + nr') dP + (p' + mr') dQ + (mr' - np') dR$; On trouvera par un raisonnement semblable

$$\delta Z = m \delta X + n \delta Y + (q' + nr') \delta P$$

$$+ (p' + mr') \delta Q + (mq' - np') \delta R.$$

donc

donc substituant cette valeur de δZ dans l'équation (S), & faisant les coefficients de différences restantes chacun = 0, on aura les cinq équations

$$[X] + m[Z] = 0; [Y] + n[Z] = 0; [P] + (q' + nr') \times [Z] = 0; [Q] + (p' + mr') \times [Z] = 0; [R] + (mr' - np') \times [Z] = 0,$$

& pour la sixième équation on prendra celle qu'on a trouvée ci-dessus, savoir $dZ = m dX + n dY + (q' + nr') dP + \text{\&c.}$

Mais si on supposoit que le point qui répond aux coordonnées p', q', r' , fût fixement attaché, alors on feroit $dX + dp' = 0, dY + dq' = 0, dZ + dr' = 0$; ce qui donneroit, en mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs, $dX = -r' dQ - q' dR, dY = -r' dP + p' dR + p' dR, dZ = q' dP + p' dQ$; on auroit par la même raison $\delta X = -r' \delta Q - q' \delta R, \delta Y = -r' \delta P + p' \delta R, \delta Z = q' \delta P + p' \delta Q$; & ces valeurs substituées dans l'équation (S), on trouveroit, en faisant les coefficients de $\delta P, \delta Q, \delta R$ chacun = 0, les trois équations

$$\begin{aligned} -r'[Y] + q'[Z] + [P] &= 0 \\ -r'[X] + q'[Z] + [Q] &= 0 \\ -q'[X] + p'[Y] + [R] &= 0. \end{aligned}$$

X X X V I I I.

COROLLAIRE 3. Imaginons que le corps soit posé sur un plan, ou sur une surface quelconque, le long de laquelle il puisse glisser librement, en tournant sur lui même d'une manière quelconque; soient p', q', r' les coordonnées de la superficie du corps, & $dr' = Md p' + Nd q'$ son équation différentielle, il est clair; 1.° Que tandis que le corps à ses divers mouvemens dX, dY, dZ, dP, dQ, dR , chaque point de sa surface parcoura les espaces $dX + r' dQ + q' dR, dY + r' dP - p' dR, dZ - q' dP - p' dQ$; dans la direction des coordonnées X, Y, Z ; 2.° Que

le point d'attouchement étant mobile sur cette surface ; parcourra de plus dans les mêmes directions les espaces dp' , dq' , dr' , savoir dp' , dq' , $Mdp' + Ndq'$; d'où il s'ensuit que les espaces entiers parcourus par le point touchant seront $dX + r'dQ + q'dR + dp'$, $dY + r'dP - p'dR + dq'$, $dZ - q'dP - p'dQ + Mdp' + Ndq'$. Or ce point devant aussi se mouvoir sur une surface représentée par l'équation $dZ = mdX + ndY$, ou bien $d\zeta = m dx + n dy$ (en appelant x, y, ζ les coordonnées de cette surface pour les distinguer des X, Y, Z qui appartiennent au centre de gravité du corps), il faudra mettre dans cette équation au lieu de $dx, dy, d\zeta$ les quantités qu'on vient de trouver ; ce qui donnera après les réductions

$$dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + (p' + mr')dQ + (mq' - np')dR + (m - M)dp' + (n - N)dq'.$$

Cette équation appartiendrait en général à tous les points, dans lesquels la superficie du corps pourroit rencontrer la surface proposée ; mais dans notre cas, où l'on veut que les deux surfaces se touchent, il faudra de plus supposer qu'elles aient les mêmes tangentes dans leurs points de rencontre, c'est-à-dire que $m = M, n = N$; donc l'équation trouvée se réduira à

$$dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + (p' + mr')dQ + (mq' - np')dR.$$

Par les mêmes raisonnemens on trouvera, en considérant les différences marquées par δ ,

$$\delta Z = m\delta X + n\delta Y + (q' + nr')\delta P + (p' + mr')\delta Q + (mq' - np')\delta R.$$

Il n'y aura donc plus qu'à substituer cette valeur de δZ dans l'équation (S), & à égaler ensuite à zéro chacun des coefficients des différences $\delta X, \delta Y, \delta P, \delta Q, \delta R$ ce qui donnera les cinq équations

$$[X] + m[Z] = 0, [Y] + n[Z] = 0; [P] + (q'$$

$(q' + nr') \times [Z] = 0$; $[Q] + (p' + mr') \times [Z] = 0$; $[R] + (mq' - np') \times [Z] = 0$,
 lesquelles étant jointes avec l'équation ci-dessus $dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + \&c.$ serviront à déterminer le mouvement du corps.

Si on vouloit que le corps n'eut à chaque instant qu'un mouvement autour du point touchant, c'est-à-dire, qu'il n'eut aucun mouvement pour glisser le long de la surface sur laquelle il se meut; alors il est clair que les espaces parcourus par le point d'attouchement sur la surface dont nous parlons, & sur celle du corps devoient être exactement les mêmes; il faudroit donc que $dX + r'dQ + q'dR + dp' = dp'$; $dY + r'dP - p'dR + dq' = dq'$; $dZ - q'dP - p'dR + dr' = dr'$; savoir $dX + r'dQ + q'dR = 0$, $dY + r'dP - p'dR = 0$, $dZ - q'dP - p'dR$, & pareillement $\delta X + r'\delta Q + q'\delta R = 0$, $\delta Y + r'\delta P - p'\delta R = 0$, $\delta Z - q'\delta P - p'\delta R = 0$; d'où l'on auroit pour δX , δY , δZ les mêmes valeurs que dans le second cas de l'Art. XXXVII., & ces valeurs substituées dans l'équation (S) donneroient par conséquent aussi les mêmes équations pour le mouvement du corps; mais, avec cette différence, que les coordonnées p' , q' , r' répondroient ici non plus à un point fixe, mais à un point mobile, qui change continuellement de place tant sur la surface du corps, que sur celle le long de laquelle le corps se meut.

X X X I X.

SCHOLIE. Les expressions $[X]$, $[Y]$ &c. sont en général

$$[X] = Md \cdot \frac{dX}{dt} + S \left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt \right) dm$$

$$[X] = Md \cdot \frac{dY}{dt} + S \left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt \right) dm$$

$$[Z] =$$

$$[Z] = Md \cdot \frac{dZ}{dt} + S(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt) dm$$

$$[P] = Sr dm \times d \cdot \frac{dY}{dt} - Sq dm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt) r dm - S(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt) q dm$$

$$[Q] = Sr dm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Sp dm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt) r dm - S(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt) p dm$$

$$[R] = Sq dm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Sp dm \times d \cdot \frac{dY}{dt} + S(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt) q dm - S(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt) p dm.$$

Dans les formules de l'Art. XXXIV. nous avons mis à la place de p , q , r leurs valeurs tirée de l'équation (Q), & cette substitution a introduit les quantités $Sp^2 dm$, $Sq^2 dm$, $Sr^2 dm$, $Spq dm$, $Spr dm$, $Sqrdm$ qui ne peuvent être déterminées que par l'intégration des équations données dans l'Art. XXXV. Or, pour éviter cet embarras, il n'y aura qu'à exprimer les coordonnées p , q , r par d'autres variables, dont les unes dépendent uniquement de la situation du corps, & soient par conséquent mêmes pour chacun de ses points, & les autres au contraire soient différentes pour tous les points du corps, & demeurent toujours les mêmes pendant qu'il change de situation. Pour cela, aiant imaginé deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, qui passent par le centre de rotation, & qui demeurent toujours fixes au dedans du corps. On remarquera, 1.^o Que la position de ces deux axes relativement à un plan fixe quelconque ne dépend que de trois variables qu'on peut nommer P , Q , R ; 2.^o Que la position de chaque point du corps, relativement à ces axes, dépend encore de trois autres variables que j'appellerai ξ , ϕ , ζ ; d'où il s'ensuit que la position de
chaque

chaque point du corps par rapport à un plan fixe quelconque dépendra en tout de six variables $P, Q, R, \xi, \varphi, \zeta$, & qu'ainsi les quantités p, q, r ne seront que des fonctions de ces mêmes variables; fonctions toujours faciles à déterminer par les élémens de Géométrie. Aiant donc trouvé les valeurs de p, q, r en $P, Q, R, \xi, \varphi, \zeta$, on en tirera aisément celles de $d \cdot \frac{dp}{dt}, d \cdot \frac{dq}{dt}, d \cdot \frac{dr}{dt}$, en faisant varier P, Q, R ; on substituera ensuite toutes ces valeurs dans les expressions ci-dessus, & l'on intégrera les termes affectés du signe S , en regardant ξ, φ, ζ comme variables, après quoi il ne restera plus de variables que les P, Q, R qui représentent la position du corps à chaque instant.

Au reste les expressions de p, q, r dont nous venons de parler, peuvent servir aussi à trouver les valeurs des différences $\delta p, \delta q, \delta r$. Soient en général

$$dp = AdP + BdQ + CdR, dq = DdP + EdQ + FdR,$$

$$dr = GdP + HdQ + IdR; \text{ on aura également}$$

$$\delta p = A\delta P + B\delta Q + C\delta R, \delta q = D\delta P + E\delta Q + F\delta R$$

$$\delta r = G\delta P + H\delta Q + I\delta R; \text{ \& par conséquent}$$

$$\delta x = \delta X + \delta p = \delta X + A\delta P + B\delta Q + C\delta R,$$

$$\delta y = \delta Y + \delta q = \delta Y + D\delta P + E\delta Q + F\delta R,$$

$$\delta z = \delta Z + \delta r = \delta Z + G\delta P + H\delta Q + I\delta R.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (L) on aura une équation de la même forme que la (S), dans laquelle les quantités $[X], [Y], [Z]$ seront exprimées comme ci-dessus, & les $[P], [Q], [R]$ auront les valeurs suivantes

$$[P] = SAdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + SDdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$

$$SGdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S[(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt)A +$$

$$(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt)D + (d \cdot \frac{dr}{dt} + \psi dt)G]dm$$

$$[Q] = SB dm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + SE dm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$

$$SH dm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S \left[\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt \right) B + \right.$$

$$\left. \left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt \right) E + \left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt \right) H \right] dm$$

$$[R] = SC dm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + SF dm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$

$$SI dm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S \left[\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt \right) C + \right.$$

$$\left. \left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt \right) F + \left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt \right) I \right] dm.$$

Je laisse au Lecteur le détail de l'application de cette Equation, qui n'aura aucune difficulté, après ce que nous avons dit dans les Corollaires précédens.

X L.

PROBLEME 9. Trouver les loix du mouvement des fluides non élastiques.

SOLUTION. Il est visible que l'équation (*L*), qui a servi pour résoudre le Problème précédent, a encore lieu ici; cette équation étant générale pour une système quelconque de corpuscules *dm*, agités par des forces quelconque *P*, *Q*, *R* &c.

Soit *D* la densité de chaque particule du fluide *dm*, on aura $dm = D dx dy dz$, & l'équation dont il s'agit fera

$$(a) \dots \int S^3 dx dy dz D \left[\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) x \right.$$

$$\left. + \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt \right) \delta y + \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt \right) \delta z \right] = 0;$$

je met l'exposant 3 au signe *S*, pour exprimer les trois intégrations que ce signe renferme, relativement aux trois variables

variables x, y, z intégrations que nous aurons souvent occasion dans la suite de considérer chacune en particulier.

Maintenant, comme le fluide est supposé incompressible, il faut que le volume de chaque particule dm , lequel est exprimé par $dx dy dz$, reste toujours le même; on aura donc $dy dz ddx + dx dz ddy + dx dy ddz = 0$, savoir

$$\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy} + \frac{ddz}{dz} = 0, \text{ ou en mettant } dd \text{ au lieu de } d$$

$$\frac{d dx}{dx} + \frac{d dy}{dy} + \frac{d dz}{dz} = 0 \dots \dots \dots (b).$$

On aura par la même raison $dy dz \delta dx + dx dz \delta dy + dx dy \delta dz = 0$, ou bien $dy dz \delta dx + dx dz \delta dy + dx dy \delta dz = 0$, ce qui donne $d\delta x = -dx \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right)$ & par conséquent

(c) . . $S d\delta x = \delta x = \delta'x - S dx \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right)$;
 $\delta'x$ est la valeur de δx , quand l'intégrale $S dx \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right)$ est nulle; or, comme cette intégrale doit être prise en variant seulement x , il s'ensuit que la quantité $\delta'x$ sera constante par rapport à x , mais variable par rapport à y , & z , c'est à dire que cette quantité fera une fonction de y , & z .

Donc mettant dans l'équation (a) à la place de δx la valeur qui on vient de trouver, l'expression intégrale $S dx dy dz D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta x$ se changera en celle-ci.

$S dx dy dz D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta'x -$
 $S dx dy dz \left[D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) S dx \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right) \right].$

J' écris d'abord le premier membre transformée ainsi :
 $S^2 dy d\zeta S dx D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta' x$, expression qu'on voit bien être équivalente à la proposée. Or soit la valeur totale de $S dx D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right)$ exprimée par $T dt$, il est clair qu'on aura, à cause que $\delta' x$ est constant par rapport à x ,
 $S dx D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta' x = \delta' x S dx D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) = \delta' x T dt$; donc

$$S^2 dx dy d\zeta D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta' x = S^2 dy d\zeta T dt \delta' x.$$

Je mets de même le second nombre sous la forme suivante:
 $S^2 dy d\zeta S dx \left[D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + dt \right) S dx \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta \zeta}{d\zeta} \right) \right]$;
 j'opère sur l'intégrale $S dx \left[D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) S dx \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta \zeta}{d\zeta} \right) \right]$ suivant la méthode de l'Art. IX. Mem. précéd.
 j'aurai en supposant, pour abrégér, $V dt = T dt - S dx D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right)$ la transformée $S dx V dt \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta \zeta}{d\zeta} \right)$, où il n'y a plus qu'un seul signe d'intégration; la formule proposée deviendra donc $S^2 dy d\zeta S dx V dt \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta \zeta}{d\zeta} \right)$, ou ce qui est la même chose $S^2 dx dy d\zeta V dt \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta \zeta}{d\zeta} \right)$, dans laquelle il ne s'agit plus que de faire disparaître les différences de δy & $\delta \zeta$.

Pour cela il est nécessaire de distinguer d'abord les intégrations relatives à la variabilité de y , & de ζ , en mettant cette intégrale sous la forme suivante

$$S^2 dx d\zeta S dy \frac{V dt d\delta y}{dy} +$$

$$S^2 dx dy S dz \frac{V dt d\delta z}{dz}$$

Or par la méthode ordinaire des intégrations par parties, on trouve $S dy \frac{V dt d\delta y}{dy} = V dt \delta y - S dy \frac{dV dt}{dy} \delta y$.

(J'écris $S dy \frac{dV dt}{dy} \delta y$, au lieu de $S dV dt \delta y$ qui lui est égal, pour dénoter que cette intégrale, de même que la différentielle $dV dt$, doit être prise, en ne considérant que la variabilité de y seul). Soit maintenant y la valeur de y lorsque l'intégrale $S dy (\frac{dV dt}{dy}) \delta y$ commence, & y' sa valeur, lorsque cette intégrale finit; & soit exprimé par V ce qui devient V , en y mettant y à la place de y , & par V' ce que la même quantité devient en fatigant $y = y'$; on trouvera, par la Remarque faite à la fin de l'Art. I. M. m. prec., que la valeur complète du terme $V dt \delta y$ fera $V' dt \delta y' - V dt \delta y$.

Mais pour peu qu'on réfléchisse sur la nature de nos formules, il est aisé de voir que quand, $V = V'$, l'intégrale $S dx D (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi \delta t)$ est nulle, & que quand $V = V'$, cette intégrale est précisément $= T$; c'est pourquoi l'on aura $V_0 = T$, & $V' = 0$; donc enfin

$$S dy \frac{V dt d\delta y}{dy} = -T \delta y' - S dy \frac{dV dt}{dy} \delta y.$$

On trouvera par des opérations & des raisonnements semblables

$$S dz \frac{-V dt d\delta y}{dy} = -T \delta y' - S dz \frac{d \cdot V dt}{dy} \delta z;$$

Donc $S^2 dx dy dz V dt (\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz})$ se changera en

$$- S^2 dx dz T dt \delta y' - S^2 dx dz S dy \frac{dV dt}{dy} \delta y$$

$$\begin{aligned}
 & - S^2 dx dy T dt \delta'z - S^2 dx dy S dz \frac{dV dt}{dz} \delta z \\
 = & \text{(en réduisant)} - S^2 dx dz T dt \delta'y - S^2 dx dz T dt \delta'z \\
 & - S^1 dx dy dz \left(\frac{dV dt}{dy} \delta y + \frac{dV dt}{dz} \delta z \right), \text{ donc}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S^2 dx dy dz D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \delta x = & S^2 dy dz T dt \delta'x \\
 - S^2 dx dz T dt \delta'y - S^2 dx dy T dt \delta'z + S^1 dx dy dz & \\
 \left(\frac{dV dt}{dy} \delta y + \frac{dV dt}{dz} \delta z \right), \text{ donc l'équation (a) deviendra} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \dots \dots \dots f(S^2 dy dz T dt \delta'x & \\
 + S^2 dx dz T dt \delta'y + S^2 dx dy T dt \delta'z) + & \\
 f S^1 dx dy dz \left(\left[\frac{dV dt}{dy} + D \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt \right) \right] \delta y, & \right. \\
 \left. + \left[\frac{dV dt}{dz} + D \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \psi dt \right) \right] \delta z \right) = 0; &
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire pour le mouvement de chaque particule du fluide en général

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dV dt}{dy} + D \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt \right) = 0, \\
 \frac{dV dt}{dz} + D \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \psi dt \right) = 0.
 \end{aligned} \right\} \dots \dots (e)$$

Ensuite pour satisfaire au reste de l'équation, on fera

$$(f) \dots \dots \dots S^2 dy dz T dt \delta'x + S^2 dx dz T dt \delta'y + S^2 dx dy T dt \delta'z = 0.$$

X L I.

COROLLAIRE I. La valeur de $V dt$ est $T dt - S dx D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right)$, l'intégrale étant prise en variant seulement x ; on substituera donc cette valeur dans les équations (e); mais, pour pouvoir faire disparaître le signe S , on prendra les différentielles de ces deux équations, en suppo-

supposant x seul variable; ce qui donnera, en mettant pour

$$\frac{dV dt}{dx}, \text{ la valeur } -D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right),$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left[D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \right]}{dy} &= \frac{d \left[D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \pi dt \right) \right]}{dx} \\ \frac{d \left[D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) \right]}{dz} &= \frac{d \left[D \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt \right) \right]}{dx} \end{aligned} \right\} (g)$$

Deux équations qui jointes à l'équation (b) trouvée ci-dessus feront connoître les valeurs de x , y , z pour un tems quelconque.

X L I I.

COROLLAIRE 2. Telles sont les équations, par lesquelles on peut déterminer en général le mouvement d'un fluide non élastique sollicité par des forces quelconques P , Q , R &c. qui agissent suivant des directions quelconques, ou bien par des forces Π , π , Ψ dirigées suivant les lignes x , y , z ; comme il est aisé le voir en examinant les valeurs de ces quantités Π , π , Ψ (Art. I.).

Pour mieux connoître les équations dont il s'agit, exprimons par α , β , γ les vitesses de chaque particule du fluide parallèlement aux coordonnées x , y , z , c'est-à-dire les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on aura en divisant par dt ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left(D \frac{d\alpha}{dt} \right)}{dy} + \frac{d(D\Pi)}{dy} &= \frac{d \left(D \frac{d\beta}{dt} \right)}{dx} + \frac{d(D\pi)}{dx} \\ \frac{d \left(D \frac{d\alpha}{dt} \right)}{dy} + \frac{d(D\Pi)}{dz} + \frac{d \left(D \frac{dy}{dt} \right)}{dx} + \frac{d(D\Psi)}{dx} \end{aligned} \right\} (h)$$

$$\frac{d\alpha}{dx}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \quad \dots \quad (i)$$

On, voit par ces équations, que les quantités α, β, γ sont nécessairement des fonctions, des variables x, y, z qui déterminent la position des particules à chaque instant, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; or dans l'instant dt , il est clair que les variables x, y, z deviennent $x + \alpha dt, y + \beta dt, z + \gamma dt$; donc les variations des quantités α, β, γ dans cet instant ne seront pas seulement $\frac{d\alpha}{dt} dt, \frac{d\beta}{dt} dt, \frac{d\gamma}{dt} dt$, mais

$$\frac{d\alpha}{dt} dt + \frac{d\alpha}{dx} \alpha dt + \frac{d\alpha}{dy} \beta dt + \frac{d\alpha}{dz} \gamma dt,$$

$$\frac{d\beta}{dt} dt + \frac{d\beta}{dx} \alpha dt + \frac{d\beta}{dy} \beta dt + \frac{d\beta}{dz} \gamma dt,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} dt + \frac{d\gamma}{dx} \alpha dt + \frac{d\gamma}{dy} \beta dt + \frac{d\gamma}{dz} \gamma dt;$$

& telles seront les valeurs de $d\alpha, d\beta, d\gamma$; donc si on substitue ces valeurs dans les équations (h), & qu'on suppose, pour plus de simplicité, les forces Π, π, Ψ nulles, ou telles que $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}, \frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, & de plus la densité D constante, on aura, en divisant par D , & marquant toutes les différences par d (ce qui est absolument indifférent ici),

$$\frac{d^2\alpha}{dt dy} + \alpha \frac{d^2\alpha}{dx dy} + \beta \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \gamma \frac{d^2\alpha}{dy dz} + \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}$$

$$\times \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} = \frac{d^2\beta}{dt dx} + \alpha \frac{d^2\beta}{dx^2} + \beta \frac{d^2\beta}{dx dy} + \gamma \frac{d^2\beta}{dx dz}$$

$$+ \frac{d\beta}{dx} \times \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx}.$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt dz} + \alpha \frac{d^2\alpha}{dx dz} + \beta \frac{d^2\alpha}{dy dz} + \gamma \frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy}$$

$$\times \frac{d\beta}{dz}$$

$$\begin{aligned} \chi \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\alpha}{dz} \chi \frac{dy}{dz} &= \frac{d^2\gamma}{dt dx} + \alpha \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \beta \frac{d^2\gamma}{dx dy} + \gamma \frac{d^2\gamma}{dx dz} \\ &+ \frac{d\gamma}{dx} \chi \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dy} \chi \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \chi \frac{d\gamma}{dx}. \end{aligned}$$

Ces équations peuvent s'abrégner en supposant.

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = \mu; \quad \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = \nu; \quad \text{ce qui les réduira à} \\ \left. \begin{aligned} \mu \left(\frac{d\mu}{dt} + \alpha \frac{d\mu}{dx} + \beta \frac{d\mu}{dy} + \gamma \frac{d\mu}{dz} + \right. \\ \left. \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) + \frac{d\alpha}{dz} \chi \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \chi \frac{d\gamma}{dx} = 0, \right. \\ \left. \frac{d\nu}{dt} + \alpha \frac{d\nu}{dx} + \beta \frac{d\nu}{dy} + \gamma \frac{d\nu}{dz} + \right. \\ \left. \nu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) + \frac{d\alpha}{dy} \chi \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \chi \frac{d\beta}{dx} = 0 \right\} \quad (k) \end{aligned} \end{aligned}$$

On peut satisfaire à ces deux équations, en faisant $\mu = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = 0$, $\nu = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0$, $\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = 0$, comme il est facile de s'en assurer; or la troisième de ces conditions est évidemment une suite nécessaire des deux premières; donc on n'aura réellement que deux conditions à remplir, lesquelles pourront s'exprimer plus simplement en disant, que $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ doit être une différentielle complète; & ces conditions jointes avec celle que donne l'équation (i), savoir, en changeant d en d, $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$ serviront à déterminer les mouvements du fluide dans plusieurs cas particuliers.

Ces cas se réduisent à ceux, où l'on suppose que particules du fluide décrivent des courbes invariables; ce qui arrive quand les rapports des vitesses α , β , γ sont indépendants du tems t , c'est-à-dire quand les quantités α , β , γ sont simplement des fonctions de x , y , z , multipliées par une même fonction de t . Car soit mis dans les équations

géné-

générales (h), $\theta\alpha$, $\theta\beta$, $\theta\gamma$, à la place de α , β , γ (θ étant une fonction quelconque de t , & α , β , γ étant maintenant regardées comme des fonctions indéterminées de x , y , z sans t) on trouvera après avoir divisé par θ^2 ,

$$\begin{aligned} & \mu \frac{d\theta}{\theta^2 dt} + \alpha \frac{d\mu}{dx} + \beta \frac{d\mu}{dy} + \gamma \frac{d\mu}{dz} + \\ & \mu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx} = 0 \\ & \nu \frac{d\theta}{\theta^2 dt} + \alpha \frac{d\nu}{dx} + \beta \frac{d\nu}{dy} + \gamma \frac{d\nu}{dz} + \\ & \nu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Or, comme les termes $\mu \frac{d\theta}{\theta^2 dt}$, $\nu \frac{d\theta}{\theta^2 dt}$ sont les seuls qui renferment t , il faut nécessairement qu'ils soient $= 0$ séparément de tous les autres, pour que les équations puissent être identiques; on aura donc $\mu = 0$, $\nu = 0$; ce qui satisfait encore au reste de l'une & de l'autre équation, comme on l'a vû plus haut.

Il y a pourtant un cas, où les équations précédentes peuvent être vérifiées sans supposer $\mu = 0$ & $\nu = 0$; c'est celui où l'on aura $\frac{d\theta}{\theta^2 dt} = \text{const.}$; c'est-à-dire, où

$\frac{1}{\theta} = a - bt$, & $\theta = \frac{1}{a - bt}$, a & b étant deux constantes quelconques; car alors les termes $\mu \frac{d\theta}{\theta^2 dt}$, $\nu \frac{d\theta}{\theta^2 dt}$ se trouveront entièrement indépendants du tems t , ainsi que tous les autres.

Au reste en combinant les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ avec l'équation (i), on peut séparer les indéterminées α , β , γ , & l'on aura

$$\frac{d^2 \alpha}{dx^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2} &= 0 \\ \frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2} &= 0 \\ \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \frac{d^2\gamma}{dz^2} &= 0. \end{aligned}$$

X L I I I.

REMARQUE. Quand on aura trouvé par le moïen des équations de l'Art. préc. les valeurs générales de α , β , γ , il faudra de plus déterminer ces valeurs, en sorte que les particules contigues aux parois du vase, dans lequel le fluide se meut, puissent couler le long de ce parois; soient x' , y' , z' leurs coordonnées, & $d z' = p dx' + q dy'$ l'équation qui représente la figure du vase donné, en mettant, au lieu de dx' , dy' , $d z'$ leurs valeurs $\alpha' dt$, $\beta' dt$, $\gamma' dt$, (α' , β' , γ' dénotent les valeurs de α , β , γ , lorsque x , y , z deviennent x' , y' , z') on aura l'équation $\gamma' = p\alpha' + q\beta'$, qui devra être vraie indépendamment de t .

Dans le cas, où le tems t n'entre point dans le rapport des vitesses α , β , γ , il est clair qu'il n'entrera pas non plus dans l'équation $\gamma' = p\alpha' + q\beta'$; mais alors les valeurs de α , β , γ étant beaucoup moins générales, il pourra arriver que cette équation ne se vérifiera qu'en supposant que les quantités p , q aient certaines conditions, c'est-à-dire, que le vase ait une certaine figure; c'est ce que M. d'Alembert a déjà remarqué dans un excellent Mémoire sur les Loix du mouvement des fluides, imprimé dans le premier Volume de ses Opuscules Mathématiques. Mais ce savant Géomètre prétend de plus que, lorsque le vase aura une autre figure quelconque, le mouvement du fluide ne pourra plus être soumis au calcul; c'est de quoi je ne saurois tomber d'accord avec lui; car il me semble que tout ce qu'il faudroit conclure alors, c'est que la sup-

position particulière de $\mu = 0$, & $\nu = 0$ cesseroit d'être exacte, & que par conséquent les valeurs de α , β , γ dépendroient de la résolution générale des équations (k)

Il est vrai que M. d'Alembert prétend que les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ sont les seules vraiment exactes, pour déterminer les loix du mouvement des fluides; il se fonde sur ce que le rapport des vitesses α , β , γ doit être indépendant du tems t dans les particules, qui coulent le long des parois du vase; d'où il infère qu'il doit l'être aussi en général dans toutes les particules du fluide; mais cette conséquence, si j'ose le dire, ne me paroît point assez juste. En effet on peut très-bien imaginer, ce me semble, des fonctions de x , y , z , telles que la variable t ne disparoisse de l'expression de leur rapport, que lorsque x , y , z deviennent x' , y' , z' , & sont liées par l'équation $d z' = p d x' + q d y'$.

En général il me paroît certain qu'en résolvant les équations (h), (i), par des méthodes analogues à celles que j'ai expliquées dans les *Récher. sur le Son* imprimées ci-devant, on aura une solution applicable à tous les cas possibles, & par laquelle on pourra déterminer le mouvement des fluides qui se meuvent dans des vases de figure quelconque, & qui ont reçu, au commencement, des impulsions quelconques.

Il ne pourra y avoir de difficulté que dans les seuls cas, où le fluide se divisera en se mouvant, & cessera de former une masse continue; mais alors, ayant trouvé par le calcul (ce qui est toujours possible) les endroits, où le fluide doit se diviser en plusieurs portions, on considérera ensuite chaque portion à part, & on en déterminera le mouvement en la regardant comme une masse isolée.

Nous avons observée dans l'*Art. préc.* qu'il y a un cas, où les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ ne sont pas indispensables dans l'hypothèse, que les rapports des vitesses α , β , γ soient

soient indépendants du tems t . M. d'Alembert a fait aussi cette remarque dans l'Art. X. de son Mémoire cité ci-dessus; mais il trouve, par ses formules, que le cas, dont il s'agit est celui, où $\theta = a c^t$, au lieu que suivant les nôtres, ce cas est celui, où $\theta = \frac{1}{a - b t}$. Or cette différence vient d'une légère méprise qui s'est glissée dans les calculs de M. d'Alembert, mais qui n'influe d'ailleurs en rien sur le reste de ses ingénieuses Recherches.

Pour faire sentir la vérité de ce que nous avançons ici, examinons les équations que M. d'Alembert donne dans l'Art. I. du Mém. cité pour les fluides pèsants, qui se meuvent dans un plan. Ces équations sont 1.^o $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$,

$$2.^o \frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta q A' - \theta p B' - pT)}{dx},$$

g est la gravité, θ est une fonction quelconque de t comme ci-dessus, θq , θp expriment les vitesses que nous avons nommées α & γ , & les quantités A , B , A' , B' , T sont telles que $d(\theta q) = qT dt + \theta A dx + \theta B dz$; $d(\theta p) = pT dt + \theta A' dx + \theta B' dz$.

La première de ces équations résulte de l'incompressibilité des particules du fluide, & revient par conséquent au même que l'équation (i) ci-dessus on y faisant $\beta = 0$. A l'égard de la seconde, l'Auteur la tire de cette considération, que les forces verticales, & horizontales perdues à chaque instant par les particules du fluide, doivent se faire équilibre; ces forces sont, selon lui, $g - B\theta p - A\theta q - qT$, $-\theta q A' - \theta p B' - pT$; ce qui donne par le loix générales de l'équilibre des fluides, l'équation dont nous parlons. Or je dis, que suivant les hypotéses de M. d'Alembert, il faut écrire θ^2 au lieu de θ dans les expressions des forces en question. Car il est facile de voir que ces forces

sont en général $g - \frac{d\alpha}{dt}$, $-\frac{d\gamma}{dt}$ savoir $g - \frac{d(\theta q)}{dt}$, $-\frac{d(\theta p)}{dt}$,

c'est à dire $g - qT - \frac{\theta A dx}{dt} - \frac{\theta B dz}{dt}$, $-pT - \theta A' dx - \theta B' dz$; mais $dx = \alpha dt = \theta q dt$, $dz = \gamma dt = \theta p dt$ donc ces quantités deviendront $g - qT - \theta^2 A q - \theta^2 B p$, $-pT - \theta^2 A' q - \theta^2 B' p$.

Ainsi l'on aura à la rigueur l'équation

$$\frac{d(g - B\theta^2 p - A\theta^2 q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta^2 q A' - \theta^2 p B' - pT)}{dx}$$

de laquelle le tems t ne disparoit, que quand θ^2 est proportionel à T , c'est à dire, $\frac{T dt}{\theta^2} = \frac{d\theta}{\theta^2} = \text{const.}$; d'où l'on

tire, comme ci-dessus, $\theta = \frac{x}{a - bt}$; au lieu que selon l'équa-

tion de M. d'Alembert, cela doit arriver lorsque $\frac{T}{\theta} = \text{const.}$

ce qui donne, en intégrant, $\theta = ac$, comme cette Auteur l'a trouvé.

X L I V.

COROLLAIRE 3. Si au lieu de considérer les vitesses α , β , γ on veut considérer les variables x , y , z elles-mêmes, on remarquera que ces variables ne peuvent être que des fonctions du tems t & des valeurs que elles avoient au commencement du mouvement quand $t = 0$, valeurs qui doivent être entièrement arbitraires, pour que la solution du problème ait toute la généralité possible.

Dénotons ces valeurs par X, Y, Z , c'est à dire supposons que les variables x, y, z qui représentent la position de chaque particule du fluide, après un tems quelconque t , soient, au commencement du mouvement, X, Y, Z ; les

dif-

différences de x, y, z s'exprimeront en général de la manière suivante

$$\text{dif. } x = L dX + M dY + N dZ + \alpha dt$$

$$\text{dif. } y = P dX + Q dY + R dZ + \beta dt$$

$$\text{dif. } z = S dX + T dY + V dZ + \gamma dt$$

de sorte que $dx = \alpha dt, dy = \beta dt, dz = \gamma dt$ & $dx = L dX + M dY + N dZ, dy = P dX + Q dY + R dZ, dz = S dX + T dY + V dZ.$

Substituant dans les équations (h), (i), α, β, γ au lieu $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, & supposant d'ailleurs, pour simplifier

le calcul, D constant, & $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{\alpha x}$,

$\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\psi)}{dx}$; on trouvera, après avoir divisé les deux premières par $D dt$, & la troisième par dt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{dy} &= \frac{d \cdot \frac{d\beta}{dt}}{dx} \\ \frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{dz} &= \frac{d \cdot \frac{d\gamma}{dt}}{dx} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (l)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \dots \dots \dots (m)$$

Or $\frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{dy}$ exprime, α comme on fait, le coefficient qu'auroit y dans la différentiation de $\frac{d\alpha}{dt}$, supposé que α fût exprimée par une fonction de x, y, z, t ; & ainsi des autres expressions semblables. Donc, puisque les quantités α, β, γ sont (hip.) des fonctions de X, Y, Z , il faudra substituer dans α, β, γ , à la place des variables, X, Y, Z , leurs valeurs en x, y, z , & différentier ensuite, en prenant x, y, z pour

pour variables; ou bien ce, qui revient au même, différentier d'abord les quantités α , β , γ en faisant varier X , Y , Z , & substituer ensuite, au lieu de dX , dY , dZ , leurs valeurs en dx , dy , dz .

Des expressions de dx , dy , dz données ci-dessus on tire par les règles communes de l'algèbre.

$$dX = \frac{(QV - RT)dx + (NT - MV)dy + (MR - NQ)dz}{K}$$

$$dY = \frac{(RS - PV)dx + (LV - NS)dy + (NP - LR)dz}{K}$$

$$dZ = \frac{(PT - OS)dx + (MS - LT)dy + (LQ - MP)dz}{K}$$

K étant mis, pour abrégé, au lieu de $LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT$

Or $d\alpha$ est la différence de α , qui naît des différences dx , dy , dz , ou bien des différences dX , dY , dZ ; donc on

aura en général $d\alpha = \frac{d\alpha}{dX} dX + \frac{d\alpha}{dY} dY + \frac{d\alpha}{dZ} dZ$; on

aura de plus à cause que *diff. x*, est une différentielle com-

plette, $\frac{d\alpha}{dX} = \frac{dL}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dY} = \frac{dM}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dZ} = \frac{dN}{dt}$; donc

$$d\alpha = \frac{dL}{dt} dX + \frac{dM}{dt} dY + \frac{dN}{dt} dZ;$$

on trouvera de même.

$$d\beta = \frac{dP}{dt} dX + \frac{dQ}{dt} dY + \frac{dR}{dt} dZ$$

$$d\gamma = \frac{dS}{dt} dX + \frac{dT}{dt} dY + \frac{dV}{dt} dZ.$$

substituant, au lieu de dX , dY , dZ , les valeurs trouvées ci-devant, il viendra

$$(QV - RT) \frac{dL}{dt} + (RS - PV) \frac{dM}{dt} + (PT - QS) \frac{dN}{dt}$$

$$d\alpha = \frac{\hspace{15em}}{K} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(NT - MV) \frac{dL}{dt} + (LV - NS) \frac{dM}{dt} + (MS - LT) \frac{dN}{dt}}{K} dy \\
& + \frac{(MR - NQ) \frac{dL}{dt} + (NP - LR) \frac{dM}{dt} + (LQ - MP) \frac{dN}{dt}}{K} dz \\
d\beta = & \frac{(QV - RT) \frac{dP}{dt} + (RS - PV) \frac{dQ}{dt} + (PT - QS) \frac{dR}{dt}}{K} dx \\
& + \frac{(NT - MV) \frac{dP}{dt} + (LV - NS) \frac{dQ}{dt} + (MS - LT) \frac{dR}{dt}}{K} dy \\
& + \frac{(MR - NQ) \frac{dP}{dt} + (NP - NL) \frac{dQ}{dt} + (LQ - MP) \frac{dR}{dt}}{K} dz \\
d\gamma = & \frac{(QV - RT) \frac{dS}{dt} + (RS - PV) \frac{dT}{dt} + (PT - QS) \frac{dV}{dt}}{K} dx \\
& + \frac{(NT - MV) \frac{dS}{dt} + (LV - NS) \frac{dT}{dt} + (MS - LT) \frac{dV}{dt}}{K} dy \\
& + \frac{(MR - NQ) \frac{dS}{dt} + (NP - LR) \frac{dT}{dt} + (LQ - MP) \frac{dV}{dt}}{K} dz
\end{aligned}$$

Donc prenant, dans l'expression de $d\alpha$, le coefficient de dx , dans celle de $d\beta$ le coefficient de dy , & dans celle de $d\gamma$ le coefficient de dz , on aura les valeurs de $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\beta}{dy}$, $\frac{d\gamma}{dz}$

& l'équation (m) deviendra

$$\begin{aligned}
& (QV - RT) \frac{dL}{dt} + (RS - PV) \frac{dM}{dt} + (PT - QS) \frac{dN}{dt} + \\
& (NT - MV) \frac{dP}{dt} + (LV - NS) \frac{dQ}{dt} + (MS - LT) \frac{dR}{dt} + \\
& (MR - NQ) \frac{dS}{dt} + (NP - LR) \frac{dT}{dt} + (LQ - NP) \frac{dV}{dt} = 0;
\end{aligned}$$

ou

ou, (ce qui est la même chose) $\frac{dK}{dt} = 0$, d'où l'on tirera $K = \text{const.}$, savoir

$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = H$,
 H étant une fonction de X, Y, Z , sans t , savoir la valeur de K , lorsque $t = 0$.

A l'égard des deux équations (1), on remarquera que $d \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ est la même chose que $\frac{d \cdot d\alpha}{dt}$; c'est pourquoi il n'y aura qu'à différencier la valeur de $d\alpha$ trouvée ci-dessus, en ne faisant varier que t , & l'on aura

$$d \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2 L}{dt^2} dX + \frac{d^2 M}{dt^2} dY + \frac{d^2 N}{dt^2} dZ$$

de la même manière on trouvera

$$d \cdot \frac{d\beta}{dt} = \frac{d^2 P}{dt^2} dX + \frac{d^2 Q}{dt^2} dY + \frac{d^2 R}{dt^2} dZ,$$

$$d \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} dX + \frac{d^2 T}{dt^2} dY + \frac{d^2 V}{dt^2} dZ.$$

On substituera donc dans ces expressions, comme on a fait ci-dessus dans celles de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, les valeurs de dX , dY , dZ en dx , dy , $d\zeta$, & prenant les coefficients de dy & $d\zeta$ dans la différentielle $d \frac{d\alpha}{dt}$, & ceux de dx dans les deux différentielles $d \frac{d\beta}{dt}$, $d \frac{d\gamma}{dt}$, on aura

les valeurs de $\frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{dy}$, $\frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{d\zeta}$, $\frac{d \cdot \frac{d\beta}{dt}}{dx}$, $\frac{d \cdot \frac{d\gamma}{dt}}{dx}$, lesquelles étant mises à la place de ces quantités dans les équations (1), il nous viendra, en ôtant le dénominateur commun K les deux équations

$$\begin{aligned}
 & (NT - MV) \frac{d^2 L}{dt^2} + (LV - NS) \frac{d^2 M}{dt^2} + (MS - LT) \frac{d^2 N}{dt^2} = \\
 & (QV - RT) \frac{d^2 P}{dt^2} + (RS - PV) \frac{d^2 Q}{dt^2} + (PT - QS) \frac{d^2 R}{dt^2}; \\
 & (MR - NQ) \frac{d^2 L}{dt^2} + (NP - LR) \frac{d^2 M}{dt^2} + (LQ - MP) \frac{d^2 N}{dt^2} = \\
 & (QV - RT) \frac{d^2 S}{dt^2} + (RS - PV) \frac{d^2 T}{dt^2} + (PT - QS) \frac{d^2 V}{dt^2}.
 \end{aligned}$$

Si on met dans ces deux équations aussi bien que dans celle qui a été trouvée précédemment, pour $L, M, N, P, Q, R, S, T, V$, leurs valeurs $\frac{dx}{dX}, \frac{dx}{dY}, \frac{dx}{dZ}, \frac{dy}{dX}, \frac{dy}{dZ}, \frac{dz}{dX}, \frac{dz}{dY}, \frac{dz}{dZ}$, on aura trois équations générales qui ne renfermeront que les changeantes x, y, z avec leurs différences relatives à X, Y, Z, t , & par lesquelles on pourra déterminer la position de chaque particule du fluide à chaque instant de son mouvement,

X L V.

SCHOLIE. Les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}, \frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\psi)}{dx}$, que nous avons supposées dans l'Art. XLII. pour simplifier les formules (h), ont lieu quand toutes les forces Π, π, ψ sont telles que leurs actions sur les particules du fluide se détruisent mutuellement, c'est-à-dire, que les particules du fluide animées par ces forces se sont équilibrées. En effet si le fluide est en repos les vitesses α, β, γ sont nulles, & les équations (h) se réduisent à celles que nous venons de rapporter.

Au reste pour pouvoir faire usage des équations dont il s'agit, il n'est pas nécessaire que les quantités $D, \Pi,$

π , Ψ soient uniquement des fonctions de x , y , z comme il semble qu'on pourroit le conclure de la forme même de ces équations.

Supposons par exemple que les quantités D , Π , π , Ψ renferment, outre les variables x , y , z , encore une quatrième variable s représentée par une ligne quelconque; il est clair que quelle que soit la nature & la position de cette ligne, on pourra toujours exprimer sa différentielle ds de cette manière $A dx + B dy + C dz$; par conséquent la valeur complète de l'expression $\frac{d(D\Pi)}{dy}$, qui n'est autre chose

que le coefficient de dy dans la différentiation de $D\Pi$, sera $\frac{d(D\Pi)}{dy} + B \frac{d(D\Pi)}{ds}$; on trouvera de même

$\frac{d(D\Pi)}{dz} + C \frac{d(D\Pi)}{ds}$, $\frac{d(D\pi)}{dx} + A \frac{d(D\pi)}{ds}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx}$
 $+ A \frac{d(D\Psi)}{ds}$, pour les valeurs complètes des expressions

$\frac{d(D\Pi)}{dz}$, $\frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx}$; substituant ces valeurs dans

les équations ci-dessus elles deviendront

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} + B \frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\pi)}{dx} + A \frac{d(D\pi)}{ds}$$

$$\frac{d(D\Pi)}{dz} + C \frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\Psi)}{dx} + A \frac{d(D\Psi)}{ds}$$

Equations, dans lesquelles les différentielles qui dépendent de chacune des variables x , y , z , s se trouvent séparées.

Je fais cette remarque relativement à un endroit de l'excellent Traité de la Résistance des fluides (Art. 164.)

Si la densité D est constante, les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy}$
 $= \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$ deviennent, en di-

visant par D , $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\psi}{dx}$, lesquelles renferment les conditions de l'équilibre des fluides homogènes.

Supposons que le fluide soit composé de différentes couches, dont chacune soit d'une densité uniforme, & qu'on en cherche l'équation; soient x, y, z les coordonnées de chacune de ces couches, on aura (*hypoth.*)

$$\frac{dD}{dx} dx + \frac{dD}{dy} dy + \frac{dD}{dz} dz = 0. \text{ Or les équations}$$

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}, \quad \frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\psi)}{dx}$$

donnent

$$\Pi \frac{dD}{dy} + D \frac{d\Pi}{dy} = \pi \frac{dD}{dx} + D \frac{d\pi}{dx},$$

$$\Pi \frac{dD}{dz} + D \frac{d\Pi}{dz} = \psi \frac{dD}{dx} + D \frac{d\psi}{dx},$$

substituant dans l'équation ci-dessus les valeurs de $\frac{dD}{dy}$,

$\frac{dD}{dz}$ tirées de celles-ci, & ordonnant les termes il viendra

$$\frac{dD}{dx} (dx + \frac{\pi}{\Pi} dy + \frac{\psi}{\Pi} dz) + \frac{D}{\Pi} [(\frac{d\pi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy}) dy$$

$$+ (\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}) dz] = 0, \text{ savoir en multipliant}$$

par $\frac{\Pi}{D}$,

$$\frac{dD}{dx} (\Pi dx + \pi dy + \psi dz) + (\frac{d\pi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy}) dy +$$

$$(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}) dz = 0.$$

Equation qui exprimera la figure de chaque couche où la densité est uniforme.

Si l'on a $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\psi}{dx}$ c'est-à-dire si les forces Π , π , ψ sont par leur nature telles, qu'elles puissent tenir en équilibre une masse fluide homogène, alors l'équation précédente se réduit à $\frac{dD}{dx} (\Pi dx + \pi dy + \psi dz) = 0$ ce qui donne

$$\Pi dx + \pi dy + \psi dz = 0.$$

Equation générale des couches de niveau, comme il est aisé de le voir, d'où il s'ensuit que dans ce cas chaque couche de niveau fera nécessairement d'une densité uniforme dans toute son étendue.

Tel devoit donc être l'arrangement de différentes parties de la terre si elle avoit été primitivement fluide; car il est aisé de prouver par le calcul, & M. Clairant l'a démontré à l'Art. LIV. de sa Théorie de la figure de la Terre, que les forces Π , π , ψ résultantes de toutes les attractions que les particules exercent les unes sur les autres ont d'elles mêmes les conditions $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\psi}{dx}$.

Pendant un grand Géomètre a crû que il n'étoit pas toujours nécessaire que les surfaces des différentes couches fussent de niveau, & il a donné un autre Principe pour connoître la figure de ces surfaces. Voyés l'Appendice qui est à la fin de l'Essai sur la résistance des fluides cité ci-dessus, & la III. Partie des Recherches sur le système du Monde pag. 226. & suiv. Mais les équations, que son Principe fournit ne sont elles mêmes dans le fond, que celles des couches de niveau. Pour le démontrer d'une manière générale, soit un sphéroïde composé de couches de différentes densités, & dont le rayon soit exprimé généralement par $r + \alpha Z$, r étant une quantité constante dans la même couche, Z étant une fonction quelconque de r , & d'un angle z variable pour tous les points de chaque couche, & α marquant une petite

petite quantité constante. Qu'on réduise l'attraction totale que ce sphéroïde exerce sur chaque particule d'une couche quelconque, à deux forces, l'une verticale, c'est à dire perpendiculaire à la couche, & qui pourra sans erreur sensible être supposée égale à la pesanteur qui tend au centre du sphéroïde; l'autre horizontale, savoir dans la direction même de la couche, laquelle est à peu près perpendiculaire au rayon; & soit nommée la première Π , & la seconde π . Par le Principe de l'illustre Auteur dont nous venons de parler, il faudra multiplier la force horizontale π par $\Delta r d\zeta$ (Δ marque la densité du fluide qu'on suppose être une fonction de r seulement) ensuite la différencier en ne faisant varier que r ; de même il faudra multiplier la force verticale Π par $\Delta (dr + \alpha \frac{dZ}{dr} dr)$ & différencier ensuite en ne faisant varier que ζ ; après quoi on égalera les deux différentielles, ce qui donnera l'équation

$$\frac{d(\Delta r \pi)}{dr} dr d\zeta = \frac{d(\Delta \Pi + \Delta \Pi \frac{dZ}{dr})}{d\zeta} d\zeta dr, \text{ favoir}$$

$$\frac{d\Delta}{dr} \times r \pi + \frac{d(r\pi)}{dr} \times \Delta = \frac{d(\Pi + \Pi \frac{dZ}{dr})}{d\zeta} \times \Delta.$$

Or, en faisant le calcul, on trouvera toujours que les

quantités Π , π , Z feront telles que $\frac{d(\Pi + \Pi \frac{dZ}{dr})}{d\zeta} = \frac{d(r\pi)}{dr}$,

donc il ne restera que l'équation $\frac{d\Delta}{dr} \times r \pi = 0$, qui donne $\pi = 0$, favoir la force horizontale nulle, & par conséquent chaque couche de niveau.

COROLLAIRE 4. Je viens maintenant à l'équation (f). Par la nature des expressions dont cette équation est composée, il est manifeste qu'elle appartient uniquement à la surface postérieure du fluide. Or si l'on suppose qu'il n'y ait point de parois qui soutiennent le fluide, les valeurs de $g'x$, $\delta'y$, $\delta'z$ demeureront absolument arbitraires, & l'équation (f) ne pourra se vérifier qu'en faisant généralement $T = 0$, savoir la valeur totale de l'intégrale $S dx D(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt)$ nulle.

Soient rapportées les équations (e) à la surface postérieure du fluide en y mettant x , y , z au lieu de x , y , z , & supposant l'intégrale $S dx D(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) = 0$, ce qui rend $V = T$, on aura $\frac{dT dt}{dy} = D(d \cdot \frac{dy}{dt} + \Pi dt)$, $\frac{dT dt}{dz} = D(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt)$; donc

$$dT = \frac{dT}{dx} dx + \frac{dT}{dy} dy + \frac{dT}{dz} dz =$$

$$'D[(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) dx + (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt) dy +$$

$$(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt) dz].$$

C'est la valeur de la différentielle de T prise dans la surface dont nous parlons; donc puisque la quantité T y doit être généralement $= 0$, sa différentielle le sera aussi, & l'on aura par conséquent l'équation

$$(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) dx + (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt) dy$$

$$+ (d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt) dz = 0,$$

qui sera celle que la surface postérieure du fluide doit avoir.

On

On trouvera une équation semblable pour la surface antérieure du fluide; car nommant x', y', z' les coordonnées pour cette surface, & V' ce que devient V quand x, y, z deviennent x', y', z' , on aura en général, comme on l'a déjà remarqué (*Art. XL*) $V' = 0$; donc aussi dV' ou $\frac{dV'}{dx'}$

$$+ \frac{dV'}{dy'} dy' + \frac{dV'}{dz'} dz' = 0. \text{ Or } \frac{dV dt}{dx} dx = -D dx$$

$$(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt), \& \frac{dV dt}{dy} = -D (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt),$$

$$\frac{dV dt}{dz} = -D (d \cdot \frac{dz}{dt} + \psi dt); \text{ donc } dV' = -\frac{D'}{dt}$$

$$[(d \cdot \frac{dx'}{dt} + \Pi' dt) dx' + (d \cdot \frac{dy'}{dt} + \pi' dt) dy'$$

$$+ (d \cdot \frac{dz'}{dt} + \psi' dt) dz'] = 0. \text{ Donc en général, quand}$$

le fluide est libre de tous cotés sa surface extérieure doit être déterminée par l'équation

$$(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) dx + (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt) dy$$

$$+ (d \cdot \frac{dz}{dt} + \psi dt) dz = 0.$$

Supposons maintenant que le fluide soit soutenu par des parois fixes de figure quelconque, & dont l'équation soit $d\zeta = m dx + n dy$. Si l'on considère les trois expressions intégrales de l'équation (f) on voit qu'elles renferment chacune deux intégrations; qui se rapportent à y & z dans la première, à x & z dans la seconde, à x & y dans la troisième. Or puisque la relation des trois variables x, y, z est donnée par l'équation $d\zeta = m dx + n dy$ ces différentes intégrales pourront être ramenées toutes à la même forme, c'est-à-dire être rapportées à deux seules changeantes x , & y ; il n'y aura pour cela qu'à mettre dans la première au lieu de $d\zeta$ sa valeur en $x, m dx$,

&

& dans la seconde, sa valeur en y , $n dy$; par-la l'équation (f) deviendra celle-ci

$$S^2 dx dy (m \delta x + n \delta y + \delta z) T dt = 0.$$

Mais puisque $d z = m dx + n dy$, on doit avoir aussi $\delta z = m \delta x + n \delta y$; donc l'équation sera identique, & ne fournira aucune condition; ainsi tout se reduira à faire en sorte que les équations générales (b), (e), satisfassent, après leur intégration, à l'équation donnée $d z = m dx + n dy$.

X L V I I I.

RÉMARQUE. Je ne m'étends pas d'avantage sur cette matière pour ne point passer les bornes que je me suis prescrites dans le présent Mémoire. Au reste par les formules méthodes données dans ce Problème, & dans les précédents, on pourroit encore trouver la solution de plusieurs questions qui concernent les fluides: comme le mouvement d'un fluide enfermé dans un vase mobile, les oscillations d'un corps qui flotte sur un fluide, la résistance qu'un fluide fait à un corps qui s'y meut; & d'autres Problèmes de cette espece.

X L I X.

PROBLÈME 10. Trouver les lois du mouvement des fluides élastiques.

SOLUTION. Par nôtre Principe général il faut que la quantité $S^3 d m f u d s$ soit un *maximum*, ou un *minimum*; donc en faisant les mêmes raisonnemens que dans le Prob. 6., on trouvera l'équation

$$\int S^3 d m (u \delta u dt - d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta x - d \cdot \frac{dy}{dt} \times \delta y - d \cdot \frac{dz}{dt} \times \delta z) = 0.$$

Or

Or si aucune force n'agissoit entre les corpuscules dm , on auroit, conformément à la formule (X) du même Prob. $S^3 dm u \delta u dt = S^3 dm (\Pi dt \delta x + \pi dt \delta y + \Psi dt \delta z)$; mais le fluide étant supposé élastique, on doit regarder chaque particule comme un ressort qui agit de tous côtés sur les particules contigues. Nommant F la force du ressort, & f l'espace par lequel il tend à se dilater, on trouvera en appliquant ici la formule (V) de l'Art. VIII.

$$S^3 dm u \delta u = - S^3 dm (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{Ec.}) - S^3 F \delta f, \text{ ou (en mettant } \Pi \delta x + \pi \delta y + \Psi \delta z \text{ au lieu de } P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{Ec.}, \text{ \& prenant } F \text{ négativement, à cause que cette force tend ici à éloigner les particules)}$$

$$S^3 dm u \delta u = - S^3 dm (\Pi \delta x + \pi \delta y + \Psi \delta z) + S^3 F \delta f.$$

Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, & mettant au lieu de dm sa valeur $D dx dy dz$, on aura donc

$$-f S^3 dx dy dz D [(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) \delta x + (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt) \delta y + (d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt) \delta z] + f S^3 F \delta f dt = 0 \quad (n)$$

Or comme l'action du ressort F consiste à augmenter le volume de chaque particule dm , il est clair il faudra prendre ce volume même pour la valeur de l'espace f , donc $f = dx dy dz$, par conséquent $\delta f = dy dz \delta dx + dx dz \delta dy + dx dy \delta dz$; (en transposant les signes δ , d) $dy dz d \delta x + dx dz d \delta y + dx dy d \delta z$; donc $S^3 F \delta f = S^3 (F dy dz d \delta x + F dx dz d \delta y + F dx dy d \delta z) = S^3 dx dy dz (\frac{F}{dx} d \delta x + \frac{F}{dy} d \delta y + \frac{F}{dz} d \delta z)$; formule, qu'on peut mettre sous cette forme

$$S^2 dy dz S dx \frac{F}{dx} d \delta x + S^2 dx dz S dy \frac{F}{dy} d \delta y$$

$$+ S^2 dx dy S dz \frac{F}{dz} d \delta z.$$

Or $S d x \frac{F}{dx} d \delta x$ se réduit, en intégrant par parties, à $F \delta x - S d x \frac{dF}{dx} \delta x$ (j'écris $d x \frac{dF}{dx}$ au lieu de dF pour dénoter que cette différentielle doit être prise en ne variant que x), & complétant l'intégrale, suivant la remarque que nous avons faite à la fin de l'Art. I. du Mém. précéd.

$F \delta x - F \delta' x - S d x \frac{dF}{dx} \delta x$; on changera de même $S d y \frac{F}{dy} d \delta y$, en $F \delta y - F \delta' y - S d y \frac{dF}{dy} \delta y$; & $S d z \frac{F}{dz} d \delta z$, en $F \delta z - F \delta' z - S d z \frac{dF}{dz} \delta z$; donc

$$S^2 F \delta f = S^2 d y d z (F \delta x' - F \delta' x) + S^2 d x d z (F \delta y' - F \delta' y) + S^2 d x d y (F \delta z' - F \delta' z) - S^2 d y d z S d x \frac{dF}{dx} \delta x - S^2 d x d z S d y \frac{dF}{dy} \delta y - S^2 d x d y S d z \frac{dF}{dz} \delta z + \dots + \dots + \dots$$

$$= S^2 d y d z F \delta x' + S^2 d x d z F \delta y' + S^2 d x d y F \delta z' - S^2 d y d z F \delta' x - S^2 d x d z F \delta' y - S^2 d x d y F \delta' z + S^2 d x d y d z \left(\frac{dF}{dx} \delta x + \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dz} \delta z \right);$$

donc substituant dans l'équation (n), au lieu de $S^2 F \delta f$, l'expression qu'on vient de trouver on aura enfin

$$f(S^2 d y d z F \delta x' + S^2 d x d z F \delta y' + S^2 d x d y F \delta z' - S^2 d y d z F \delta' x - S^2 d x d z F \delta' y - S^2 d x d y F \delta' z) - f S^2 d x d y d z \left(D d \frac{dx}{dt} + D \Pi dt + \frac{dF}{dx} dt \right) \delta x + (D d \frac{dy}{dt} + D \pi dt + \frac{dF}{dy} dt) \delta y + (D d \frac{dz}{dt} + D \psi dt + \frac{dF}{dz} dt) \delta z = 0$$

Equation réduite à l'état qu'exige notre Méthode; supposant donc les coefficients des différences δx , δy , δz chacun = 0; on aura

$$\left. \begin{aligned} D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt \right) + \frac{dF}{dx} dt &= 0 \\ D \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt \right) + \frac{dF}{dy} dt &= 0 \\ D \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \psi dt \right) + \frac{dF}{dz} dt &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (p)$$

& le reste de l'équation donnera

$$S^2 dy dz F' \delta x + S^2 dx dz F' \delta y + S^2 dx dy F' \delta z - S^2 dy dz F \delta x + S^2 dx dz F \delta y + S^2 dx dy F \delta z = 0 \quad (q)$$

L.

COROLLAIRE 1. Les trois équations (p) renferment les loix générales du mouvement des fluides élastiques. Pour faire usage de ces équations on supposera comme dans l'Art. XLII., $\frac{dx}{dt} = \alpha$, $\frac{dy}{dt} = \beta$, $\frac{dz}{dt} = \gamma$, on mettra au lieu de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ leurs valeurs trouvées dans le même Article, & marquant, pour plus de simplicité, toutes les différences par d , on trouvera, après avoir divisé par $D dt$, les trois équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\alpha}{dy} + \gamma \frac{d\alpha}{dz} + \Pi &= -\frac{dF}{D dx} \\ \frac{d\beta}{dt} + \alpha \frac{d\beta}{dx} + \beta \frac{d\beta}{dy} + \gamma \frac{d\beta}{dz} + \pi &= -\frac{dF}{D dy} \\ \frac{d\gamma}{dt} + \alpha \frac{d\gamma}{dx} + \beta \frac{d\gamma}{dy} + \gamma \frac{d\gamma}{dz} + \psi &= -\frac{dF}{D dz} \end{aligned} \right\} (r)$$

dans lesquelles il ne faudra plus que substituer au lieu de F , & de D leurs valeurs en x , y , z , t .

Voici comment on trouvera ces valeurs; F exprime la force du ressort de chaque particule du fluide, laquelle est

ordinairement proportionnelle à la densité; supposons donc, pour plus de généralité, que cette force soit comme une fonction quelconque donnée de la densité, en sorte que $dF = E dD$; on aura $\frac{dF}{dx} = E \frac{dD}{dx}$, $\frac{dF}{dy} = E \frac{dD}{dy}$, $\frac{dF}{dz} = E \frac{dD}{dz}$. Ensuite pour trouver D , on observera que la

masse dm de chaque particule du fluide est $D dx dy dz$, & que cette masse reste toujours la même quelque mouvement que le fluide reçoive; dont la différentielle en faisant varier t , doit être nulle; ce qui donne

$$\frac{d(D dx dy dz)}{dt} = 0, \text{ savoir } \frac{dD}{dt} dx dy dz + \frac{d dx}{dt} D dy dz +$$

$$D dy dz + \frac{d dy}{dt} D dx dz + \frac{d dz}{dt} D dx dy = 0, \text{ ou}$$

$$\frac{dD}{dt} + \frac{d dx}{dt} + \frac{d dy}{dt} + \frac{d dz}{dt} = 0 \dots \dots \dots (s)$$

Or $\frac{d dx}{dt} = d \cdot \frac{dx}{dt} = d\alpha$; donc $\frac{d dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dx}$; on trou-

ve de même $\frac{d dy}{dt} = \frac{d\beta}{dy}$, & $\frac{d dz}{dt} = \frac{d\gamma}{dz}$; de plus

$\frac{dD}{dt} dt$ exprime la variation de D dans l'instant dt ; donc

si on suppose que D soit représenté par une fonction quelconque de x, y, z, t , on trouvera que la valeur com-

plète de $\frac{dD}{dt} dt$ sera $\frac{dD}{dt} dt + \frac{dD}{dx} \alpha dt + \frac{dD}{dy} \beta dt +$

$\frac{dD}{dz} \gamma dt$; on mettra ces valeurs dans l'équation ci-dessus,

& changeant les lettres d en d , & multipliant le tout par

D on aura

$$\frac{dD}{dt} + \alpha \frac{dD}{dx} + \beta \frac{dD}{dy} + \gamma \frac{dD}{dz} +$$

$$D \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) = 0, \text{ ou}$$

$$\frac{d(D)}{dt} + \frac{d(D\alpha)}{dx} + \frac{d(D\beta)}{dy} + \frac{d(D\gamma)}{dz} = 0.$$

Equation par laquelle on connoîtra D , & par conséquent F .

L I.

COROLLAIRE 2. Soit, suivant l'hypothèse ordinaire, $F = D$, par conséquent $E = 1$; & qu'on mette les équations (r) sous cette forme

$$L = -\frac{dF}{D dx}, M = -\frac{dF}{D dy}, N = -\frac{dF}{D dz}, \text{ on aura}$$

$$L = -\frac{dD}{D dx}, M = -\frac{dD}{D dy}, N = -\frac{dD}{D dz}.$$

Supposons encore, $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = V$, on aura

$$\text{(Artic. précédent) l'équation } \frac{dD}{dt} + \alpha \frac{dD}{dx} + \beta \frac{dD}{dy} + \gamma \frac{dD}{dz}$$

$$+ DV = 0; \text{ donc, chassant les quantités } \frac{dD}{dx}, \frac{dD}{dy},$$

$$\frac{dD}{dz}, \text{ par le moyen des équations préc.; divisant par } D,$$

$$\text{\& transposant, on aura } \frac{dD}{dt}, \text{ ou } \frac{d \cdot l D}{dt} = \alpha L + \beta M$$

$$+ \gamma N - V, \text{ ou, pour abrégér, } \frac{d \cdot l D}{dt} = T. \text{ Or les équations}$$

$$\text{ci-dessus se réduisent à } L = -\frac{d \cdot l D}{dx}; M = -$$

$d \cdot l D$

294

$\frac{d \cdot l D}{dy}$, $N = - \frac{d \cdot l D}{dz}$, donc comparant ces équations avec celle qu'on vient de trouver on aura $\frac{dL}{dt} = - \frac{dT}{dx}$; $\frac{dM}{dt} = - \frac{dT}{dy}$; $\frac{dN}{dt} = - \frac{dT}{dz}$; équations, où la lettre D ne se trouve plus. On trouvera encore en combinant ensemble les équations ci-devant $\frac{dL}{dy} = \frac{dM}{dx}$, $\frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dx}$, deux équations qui reviennent au même que les équations (k) de l'Art. XLII. L'on aura donc cinq équations toutes délivrées de la lettre D , dont trois prises à volonté suffiront pour résoudre le Problème.

Si on suppose que le mouvement du fluide soit parvenu à un état permanent; alors on aura $\frac{dD}{dt} = 0$, & par conséquent $T = 0$.

L I I.

COROLLAIRE 3. On peut encore représenter le mouvement du fluide par les variables X, Y, Z, t , comme dans l'Art. XLIV. Pour cela on cherchera d'abord la valeur de D au moyen de l'équation (s) , laquelle en intro-

duisant les lettres α, β, γ , devient celle-ci, $\frac{dD}{dt} + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}$. Or, par les formules de l'Art. cité, on trouve $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{dK}{K}$, par conséquent $\frac{dD}{dt} + \frac{dK}{K}$

dK

$$+ \frac{dK}{K} = 0, \text{ d'où l'on tire } lD + lK = \text{const.}, \text{ fa-}$$

voir $DK = h$, & $D = \frac{h}{K}$. Pour déterminer la constante h , on remarquera, qu'au commencement du mouvement, $dx = dX$, $dy = dY$, $d\zeta = dZ$; donc $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $V = 1$; ce qui donne $K = 1$; d'où il s'enfuit que h doit être égale à la densité D que le fluide a au premier instant de son mouvement.

Aiant trouvé l'expression de D il n'y aura plus qu'à la substituer dans les équations (p); or D étant une fonction de X, Y, Z, t ; sa différentielle, en prenant t constant, sera représentée par $E dX + F dY + G dZ$; ainsi pour avoir les valeurs de $\frac{dD}{dx}$, $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$, il faudra encore substituer au lieu de dX, dY, dZ leurs expressions en dx, dy, dz trouvées dans l'Art. XLIV., ce qui donnera, en supposant

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$

$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$

$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C,$$

$$dD = \frac{A dx + B dy + C dz}{K}, \text{ d'où l'on tire } \frac{dD}{dx} =$$

$$\frac{A}{K}, \frac{dD}{dy} = \frac{B}{K}, \frac{dD}{dz} = \frac{C}{K}; \text{ \& par conséquent suivant}$$

$$\text{l'hyp. de l'Art. L. } \frac{dF}{dx} = \frac{EA}{K}, \frac{dF}{dy} = \frac{EB}{K}, \frac{dF}{dz} = \frac{EC}{K}.$$

On substituera donc ces valeurs dans les équations (p), & l'on aura, en divisant par D qui est $= \frac{h}{K}$,

$$d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt + \frac{EA}{h} dt = 0$$

$$d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt + \frac{EB}{b} dt = 0$$

$$d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt + \frac{EC}{b} dt = 0.$$

Si on suppose dans ces équations $\Pi = 0$, $\pi = 0$, $\Psi = 0$, $\frac{E}{b} = 2g$, elles reviennent au même que celles que M. Euler a trouvé par une voie différente, pag. 6. ci-dessus.

LIII.

SCHOLIE. A l'égard de l'équation (q) qui reste encore à examiner, on prouvera par un raisonnement semblable à celui de l'Art. XLVI. que, si le fluide appuie contre des parois fixes, les trois termes $S^2 dy dz F \delta x + S^2 dx dz F \delta y + S^2 dx dy F \delta z$ font toujours $= 0$ aussi bien que les trois autres $S^2 dy dz F' \delta x' + S^2 dx dz F' \delta y' + S^2 dx dy F' \delta z'$. Mais si on suppose le fluide libre de toutes parts, ou seulement de quelque côté; alors la quantité F devra être nulle à la surface extérieure du fluide dans les endroits, où il est libre; on aura donc, pour cette surface, l'équation $dF = 0$, savoir $\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0$; ou, en mettant, au lieu de $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ leurs valeurs, tirées des équations (p)

$$(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) dx + (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt) dy + (d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt) dz = 0,$$

précisément comme on a trouvé dans l'Art. cité pour les fluides non élastiques.

Fautes à corriger .

Pag. 196., lign. 5. qui a pour titre: *Methodus maximorum* &c., lisez qui a pour titre: *Methodus inveniendi lineas curvas* &c.

Cet Ouvrage est le même que celui que nous avons déjà cité dans le Mémoire précédent.

Pag. 201. ligne antépénultième les mêmes substitutions, lisez les mêmes suppositions.

Pag. 203. lign. 4. multipliant par $\frac{\delta\phi}{V}$, changez le δ en d .

Pag. 204. lign. 17. un rapport tel que $Pdp\delta$, mettez $\delta P.dp$.

lign. 24. $A\delta p + B\delta q + R\delta r$, lisez $A\delta p + B\delta q + C\delta r$.

Pag. 209. lign. 9. & 10. de l'Art. X., changez P' , P'' en P ; Q' , Q'' en Q ; R' , R'' en R .

Pag. 215. lig. pénultième $\delta ds = 0$, lisez $\delta ds'' = 0$.

Pag. 216. lign. première ($Mu\delta u + M'\delta u' + M''\delta u'' + \&c.$) dt lisez ($Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.$) dt .

Pag. 217. lig. 18. $M'f\delta d's'$, lisez $M'su'\delta d's'$.

Pag. 223. lign. seconde, mettez le signe $-$ avant le premier membre de l'équation (H).

Pag. 225. lign. dernière, & $\delta\phi$ pour $\delta\phi$, lisez & $\delta\phi$ pour $\delta\phi$.

Pag. 231. lign. 4. $\frac{d \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt}$, lisez $\frac{d \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt}$.

lign. 14., $Psd t$, étant la longueur &c., lisez $Psd t$, s étant la longueur &c.

Pag. 240. lign. 6. au lieu de $+ d \cdot \frac{dy}{dx} \times kdt$, lisez $+ d \cdot \frac{dy}{dx} \times kdt$.

Pag. 249. lign. 9. dans l'équation (L), lisez pour plus de clarté dans l'équation (L) ci-dessus.

Pag. 261. lign. dernière, changez [X] en [Y].

Pag. 263. lign. 15. Soient en général, lisez pour plus de clarté Soient en général pour chaque point du corps, c'est-à-dire, en regardant ξ , ϕ , ζ comme constantes.

lign. 22. $H\delta q$, lisez $H\delta Q$.

Pag. 266. lign. 9. Je mets de même le second nombre, lisez Je mets de même le second membre.

Pag. 267. lign. 11. devient en fatigant, lisez devient en faisant.

lign. 19. est précisément $= T$, lisez $= T dt$.

Pag. 270. dans les trois formules des lignes 10. 11. 12., changez par-tout la lettre d en d.

Pag. 272. lign. 11. pour que les équations puissent être identiques, lisez pour que les équations soient possibles.

Pag. 276. lign. 2. au lieu de $-pT - \theta A' dx - \theta B' dz$, lisez $-pT - \frac{\theta A' dx}{dt} - \frac{\theta B' dz}{dt}$.

lign. 7. Dans le premier membre de l'équation de cette ligne, lisez qT au lieu de qr .

lign. 12., en intégrant $\theta = ac$, lisez en intégrant $\theta = ac'$.

Pag. 277. lign. 2. dans les équations (h), (i), lisez dans les équations (g), (b).

dans la ligne qui suit l'équation (m) α comme on fait, effacez α .

Pag. 285. Dans les équations des lign. 17., 18., 20. au lieu de $\Pi \frac{dZ}{dr}$, lisez $\alpha \Pi \frac{dZ}{dr}$.

Pag. 290. lig. 19. ajoutez dt à la fin de la ligne.

Pag. 291. dans la ligne (q) changez les deux signes $+$ en $-$.

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA MECHANIQUE.

PAR M. LE CHEV. DAVIET DE FONCENEX.

UN très-grand Géomètre qui s'est appliqué avec un égal succès à reculer les bornes de la Méchanique & à en éclaircir les principes, les a réduit à la Force d'inertie, la Composition des forces, & l'Equilibre : je vais tâcher dans cet Ecrit de démontrer ces Principes d'une manière exacte & rigoureuse, & de satisfaire ainsi à la question si souvent agitée parmi les Géomètres & les Philosophes, *si les loix de la Méchanique sont de vérité nécessaire ou contingente.*

L'homme Célèbre dont je viens de parler remarque à ce sujet, dans l'excellent discours préliminaire qu'il a mis à la tête de son Traité de Dynamique, que la question dont il s'agit se réduit à savoir si les loix de l'équilibre, & du mouvement qu'on observe dans la nature sont différentes de celles que la matière abandonnée à elle même auroit suivie : qu'on me permette cependant ici quelques réflexions qui pourront peut-être servir à répandre un plus grand jour sur cette matière. Il paroît d'abord que l'action du Créateur sur les corps ne rend en aucune façon hipotétique l'exécution des loix de la Méchanique dans l'univers, comme M. d'Alembert semble le supposer dans cet endroit ; puisqu'il nous sera toujours permis de considérer cette action de Dieu comme une nouvelle force qui agit sur les corps : quels que soient alors les mouvemens qui en résultent, ils ne feront

jamais contraires aux principes de la Mécanique qui doivent être immuables par eux mêmes.

En effet les objets des différentes parties des Mathématiques pures, sont également abstraits, & par conséquent susceptibles d'un même degré d'évidence : car pendant qu'on ne considère les corps dans l'algèbre que comme capables de former des nombres, & que la Géométrie ne s'occupe que de leur étendue : on ne leur conserve dans la mécanique que la seule impénétrabilité : & quoique cette science emprunte de l'algèbre la répliquabilité de ces points impénétrables, & qu'elle ait recours à la Géométrie pour en apprécier les mouvemens ; il est toujours visible que ces notions étant également simples & abstraites, les conclusions qu'on peut en déduire devront toujours être marquées au sceau de la certitude & de l'évidence.

Si nous parvenons donc à fonder les loix de la Mécanique sur ces seules considérations purement abstraites & intellectuelles, non seulement elles seront d'une vérité aussi nécessaire que les propositions de la Géométrie, mais il sera encore certain que ces loix seront observées dans la nature : car, comme il est indubitable qu'un cercle aura toujours les propriétés que la Géométrie lui assigne, si réellement il est tel qu'on l'a supposé ; de même quand deux ou plusieurs corps agiront les uns sur les autres d'une manière quelconque, il en résultera nécessairement l'effet qui appartient à cette manière d'agir, & que la mécanique nous enseigne. Il est vrai qu'il est toujours assez difficile de s'assurer dans la pratique, de la manière dont les corps agissent les uns sur les autres ; ou pour me servir du langage des Mécaniciens, il est moralement impossible de connoître exactement toutes les forces qui agissent sur les corps qui nous environnent ; mais la Mécanique, proprement dite, n'en est pas moins certaine, & même moins utile ; & c'est encore ici comme dans la Géométrie,

ou l'on transporte avec succès les théorèmes qu'on démontre sur les figures exactes, à celles qui ne font qu'en approcher sensiblement. Enfin l'Être Suprême peut sans doute alterer à son gré la configuration des corps, comme leur mouvement; mais les loix qu'ils suivront dans leurs nouveaux mouvemens, & les propriétés de leurs nouvelles figures, pourront toujours se déduire de la quantité de ces changemens, conformément aux principes immuables de la Mécanique & de la Géométrie.

En voilà assez pour faire connoître à mes Lecteurs le point de vue, sous lequel j'ai cru devoir considérer cette Science, & la route que j'ai tâché de suivre pour en établir les principes d'une manière qui ne souffrit aucune difficulté. Les trois principes que j'ai indiqué plus haut m'ont fourni la division naturelle de ces Recherches: j'y ai joint une démonstration du principe de l'équilibre du levier absolument indépendante des précédens; ce que j'ai fait d'autant plus volontiers, qu'il paroît assez difficile de décider, si l'on doit plus tôt faire dépendre l'équilibre du levier de la composition des forces, que déduire au contraire ce dernier principe de celui de l'équilibre du levier. La démonstration toute analytique que j'en ai trouvé m'a d'ailleurs paru par sa singularité digne de trouver place ici.

I.

De la Force ou Loi d'inertie.

SI l'on réfléchit sur la manière dont les hommes se forment les idées de l'extension & du mouvement, & sur la méthode qu'ils suivent pour leur donner plus de précision: on verra bien-tôt que comme nous sommes obligés de rapeller toutes les espèces d'extension à la seule

extension linéaire & rectiligne, si nous voulons en évaluer les rapports; de même quand il s'agit de fixer les relations, qui se trouvent entre les différents mouvements, que nous observons dans la nature, il est d'abord nécessaire de les rapporter à une unité commune & déterminée. Déjà accoutumés en Géométrie à considérer la ligne droite comme la plus simple des extensions linéaires, nous nous sommes déterminés pour le mouvant rectiligne & nous avons préféré le mouvement uniforme à cause de l'égalité des espaces décrits en tems égaux, qui nous l'a fait regarder comme toujours semblable à lui même.

Après avoir choisi le mouvement uniforme pour la mesure commune de tous les autres, il a fallu pour en faciliter la comparaison rapporter à des causes vraies, ou imaginaires, les changemens continuels qui arrivent dans l'uniformité du mouvement des corps: si à présent on fait abstraction de ces causes quelles qu'elles soient, le mouvement sera uniforme, & rectiligne par la définition même, & c'est si je ne me trompe dans cette seule abstraction purement mathématique que consiste la loi d'inertie, dont l'énoncé se réduira à dire, que tous les corps, soit qu'ils soient en repos, ou en mouvement, doivent être considérés comme persévérant dans l'état où ils sont, si l'on fait abstraction de tous les changemens qui pourroient arriver dans leurs vitesses & dans leurs directions.

Il est visible qu'un pareil principe n'a pas besoin de démonstration, puisque ce n'est qu'une proposition identique; & pour peu qu'on y réfléchisse, on s'apercevra aisément qu'il est suffisant pour la mécanique, & que cette science n'exige pas qu'on lui donne plus d'extension, & de réalité. En effet quand même les corps seroient capables d'accélérer, ou de retarder d'eux mêmes leurs mouvemens, il est évident que cela ne pourroit se faire que selon quelque loi déterminée, à laquelle il seroit toujours facile d'avoir égard

égard, dès que l'expérience nous l'auroit apprise, de la même façon qu'on calcule les effets de l'attraction, & de la résistance des fluides. En un mot, c'est une chose fort indifférente pour la Méchanique, que le mouvement des corps soit altéré par la nature même de ces corps, ou par quelques causes étrangères; sur tout, si ces causes nous sont inconnues, comme on fait qu'il en est plusieurs, qui le sont encore pour nous, & le seront peut-être toujours.

Il est donc inutile de donner plus d'étendue à la loi d'inertie, & il paroît même qu'elle n'en est pas susceptible. Plusieurs Philosophes ont prétendu à la vérité que c'est une propriété essentielle à la matière de conserver son état, c'est à dire de continuer à se mouvoir avec la même vitesse, & dans la même direction; mais sans examiner ici si c'est mieux conserver son état de se mouvoir uniformément & en ligne droite, que suivant une autre loi & dans une courbe: il me suffira de remarquer que, dans l'entière ignorance où nous sommes sur la nature des corps, le seul moïen qui nous reste pour établir une pareille assertion, seroit de faire voir que cette propriété est une conséquence de l'étendue & de l'impénétrabilité; or je ne pense pas que cela nous soit jamais possible.

En vain dira-t-on qu'on n'aperçoit rien dans l'idée que nous avons de la matière qui puisse lui donner du mouvement, ou le ralentir si elle en a déjà: il suffit que cette propriété n'ait rien de contradictoire pour nous autoriser à penser qu'elle peut en être douée; or je ne vois pas en quoi il seroit plus absurde d'affurer qu'un corps a, ou peut avoir en lui-même de quoi retarder son mouvement, que de dire que cet effet est produit par la seule présence d'un autre corps, quoique fort éloigné, comme le pense une secte de Philosophes fort accréditée aujourd'hui.

Je suis au reste très persuadé que la force d'inertie telle qu'on la conçoit communement, a réellement lieu dans la nature

nature; la régularité du mouvement des Planettes, & une infinité d'autres faits semblent ne pas permettre d'en douter; mais c'est là une vérité d'expérience, une des premières sans doute de celles qui doivent servir de fondement aux sciences physico-mathématiques, mais inutile à la Mécanique, & d'un genre différent de celles qu'il est permis d'admettre dans cette science, à moins qu'on ne veuille, avec quelques Philosophes, la ranger dans la classe des sciences expérimentales.

M. d'Alembert semble se rapprocher de ce sentiment au mot *Force* dans l'Encyclopédie. *La force d'inertie* (dit cet illustre Ecrivain) *n'a lieu, comme l'expérience le prouve, que dans la matière brute, c'est-à-dire dans la matière qui n'est pas unie à un principe intelligent: or après un pareil aveu, notre Auteur n'a sans doute pas prétendu que cette loi fût démontrée même pour les corps abstraits qui sont l'objet de la Mécanique; puisqu'alors la matière y seroit astreinte sans restriction. La démonstration qu'il donne au commencement du Traité de Dynamique tend donc uniquement à établir qu'on ne trouve dans l'idée du mouvement d'un corps aucune raison de variabilité, ce que j'accorderai sans peine, quoique plusieurs Philosophes croient avoir de bonnes raisons pour être d'un sentiment contraire; mais il me semble que l'idée d'une vitesse constante n'y est pas plus comprise que celle d'une vitesse retardée. Je le répète encore: la ligne droite, & le mouvement uniforme ne sont pas plus simples en eux mêmes, que toute autre ligne, & toute autre loi de mouvement: ainsi quand même il seroit certain que les corps ne sont pas capables de se donner le mouvement à eux mêmes, il ne s'en suivroit pas encore qu'ils fussent incapables de retarder celui, qu'ils auroient déjà, comme un grand Géomètre l'a crû; puisque cette conclusion suppose que le mouvement uniforme est celui que les corps suivent d'eux mêmes, & que, s'il est variable, il en faut chercher la cause dans une force active.*

De la composition des forces.

DE quelle nature que soient les causes du mouvement des corps, qu'on comprend sous le nom général de *forces* : il est au moins certain qu'elles n'ont par rapport à nous aucune réalité, que par leurs effets, & que les mouvemens qu'elles produisent, étant les seuls moyens que nous ayons pour nous assurer de leur existence, c'est dans ces mouvemens seuls que nous devons chercher la mesure de leurs rapports. Les forces sont donc à nôtre égard toujours proportionnelles à leurs effets, puisque nous entendons par cette expression bien moins la cause du mouvement que le mouvement même. Mais comment doit-on estimer le rapport des mouvemens de plusieurs corps différens ? On voit d'abord qu'on ne peut considérer dans un mouvement quelconque, que le corps en mouvement, & la vitesse, avec laquelle il se meut : tout se réduit donc à savoir si l'on doit dire qu'une force est double d'une autre, quand agissant toutes les deux sur une même masse, celle-ci lui donne une vitesse double ; ou bien si pour cela elle doit imprimer une vitesse égale à une masse double. Il est évident qu'on peut indifféremment choisir celle qu'on voudra de ces deux définitions, & j'espère de faire voir dans l'article suivant qu'elles ont lieu toutes les deux en même tems ; je me contenterai, en attendant, d'observer ici que ce que j'ai à dire dans cet article sur la composition de forces, sera également vrai dans l'un & dans l'autre cas.

LEMME. Si deux forces égales dont la quantité, & les directions sont exprimées par les lignes CA , CB agissent (*fig. 1. plan. 4.*) sur un corps quelconque C , il est évident

Qq

que

que le corps ne pourra pas obeir à ces deux forces en même tems : car il ne peut pas se mouvoir en même tems selon CA , & selon CB ; il prendra donc une direction CM différente de CA & de CB , & la ligne CM doit nécessairement diviser l'angle ABC en deux également, puisque les forces CA, CB étant égales par la supposition, tout ce qui tend à rapprocher CM de CA tend également à la rapprocher de CB . Cela posé, il est encore évident qu'on peut imaginer une troisième force CM , qui fasse seule sur le corps C le même effet, que CA, CB conjointement. D'autre part la quantité de la force CM ne peut dépendre que de la quantité de CA ou CB , & de la valeur de l'angle ACB , & par conséquent si l'on fait $CA = CB = a$, $CM = z$, $ACB = \phi$, on aura $z = \text{fonct.}(a, \phi)$;

Or la force CM étant de même nature, que la CA , il faut qu'elles contiennent un même nombre de dimensions; ce qui donne $z = CM = \text{fonct.}(a, \phi) = a \text{fonct.} \phi$, parceque la dimension de ϕ est nulle. *

Au reste si quelqu'un n'étoit pas content de ces sortes de raisonnemens, on pourroit d'abord poser comme un principe incontestable & évident par lui même, que pour le même angle ϕ , la force z est toujours proportionnelle à a , ensuite faisant $\frac{dz}{da} = y$, on trouveroit y constant, & par conséquent $z = ay$ ou bien $z = a \text{fonct.} \phi$.

PROBLÈME Trouver la valeur de y ou de $\text{fonct.} \phi$.

Soient menées les lignes (fig. 2. plan. 4.) Cm, Cm, Ca, Cd', Cb', Cb , telles que $ACB = \phi$, $mCm = ACa = aCd' = BCb = bCb' = \frac{d\phi}{2}$ on aura $mCm = ACa' = BCb' = d\phi$, $aCb = \phi + d\phi$, $aCb' = \phi + 2d\phi$, & la

* Il suit de là que, l'angle ϕ demeurant constant, z est toujours proportionnel à a ; on pourroit de même démontrer par cette méthode d'une manière directe & fort naturelle plusieurs théorèmes sur la proportionnalité des côtés des figures, & un grand nombre d'autres propositions de Géométrie, & de Mécanique.

valeur de y qui appartient à l'angle ACB , deviendra $y + d'y = y'$ pour l'angle acb , & $y + 2 d'y + d^2 y = y''$ pour l'angle $a'c'b'$. Soit $d'y = u d\phi$, & $u = V$ lorsque $\phi = 0$, on aura pour l'angle mCm , $y = 2 + V d\phi$; car l'on fait que quand l'angle mCm s'évanouit tout à fait, ζ devient $= 2a$, ce qui donne $y = 2$.

Tout ceci posé; & bien entendu, imaginons que les quatre forces Ca' , CA , Cb' , CB , dont chacune est $= a$, agissent en même tems sur le point C : il est clair (*lemme*) que la force composée de ces quatre forces sera suivant CM , & $= a(y + y')$. Or les deux forces CA , Ca' sont équivalentes à une troisième Ca , qui doit être égale à celle qui résulte suivant CM de l'action simultanée des Cm , Cm , cette force sera donc $= a(2 + V d\phi)$: on réduira de même les forces CB , Cb' à un troisième selon Cb , & $= a(2 + V d\phi)$. On pourra donc substituer aux quatre forces Ca' , CA , Cb' , CB deux autres forces chacune $= a(2 + V d\phi)$, & agissant dans les directions Ca , Cb ; or si ces forces étoient $= a$ elles auroient pour force composée une troisième force dans la direction CM & $= ay'$, donc (*lemme*) cette force composée sera $= ay'(2 + V d\phi)$. d'autre part cette force devra, comme nous l'avons vû plus haut, être $= a(y + y')$. De là résulte l'équation $y'(2 + V d\phi) = y + y'$, & substituant les valeurs de y' & de y'' , $(y + d'y)(2 + V d\phi) = 2y + 2d'y + d^2y$, & ôtant ce qui se détruit $yV d\phi + V dy d\phi = d^2y$, ou bien $yV d\phi = d^2y$. On voit de là que puisque y doit être une quantité finie, il faut que V soit infiniment petite & du même ordre que $d\phi$.

Supposons donc $V = H d\phi$, on aura $d^2y = y H d\phi^2$, dont l'intégrale est généralement $y = Ae^{\phi\sqrt{H}} + Be^{-\phi\sqrt{H}}$: si dans cette équation, & dans sa différentielle, qui est $d'y = \sqrt{H} \cdot d\phi (Ae^{\phi\sqrt{H}} - Be^{-\phi\sqrt{H}})$, on fait $\phi = 0$, cette supposition, qui rend $y = 2$, nous donnera premièrement

Qq^2

A

$A + B = 2$ ensuite $dy = \sqrt{H} d\phi (A - B)$: Or quand $\phi = 0$ on a $dy = \sqrt{H} d\phi = H d\phi^2$, donc $H d\phi = A - B$, ou $A - B = 0$, & par conséquent $A = B = 1$; donc $y = e^{\phi\sqrt{H}} + e^{-\phi\sqrt{H}} = 2 \cos. \phi \sqrt{-H}$. Maintenant lorsque $\phi = \frac{\pi}{2}$ c'est à dire quand l'angle ϕ est égal à la demi-circonférence, on a $y = 0$ donc $\cos. \frac{\pi}{2} \sqrt{-H} = 0$ & par

conséquent $\frac{\pi}{2} \sqrt{-H} = \frac{\pi}{4} (2\mu + 1)$; (μ étant un nombre entier quelconque positif ou négatif). On tire de cette équation $\sqrt{-H} = \frac{2\mu + 1}{2}$ & enfin $y = 2 \cos. \frac{(2\mu + 1)}{2} \phi$.

Or il est visible que tant que l'angle ϕ est moindre que deux droits, la force z ; & par conséquent la valeur de y doit toujours être positive: condition qui ne sauroit avoir lieu à moins que μ ne soit $= 0$, on aura donc enfin y ou *fonct.* $\phi = 2 \cos. \frac{\phi}{2}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE. De là il est aisé de déduire cette conclusion générale, sçavoir que la force composée de deux forces quelconques égales entre elles & inclinées comme que ce soit, est toujours déterminée quant à sa quantité, & à sa direction par la diagonale du rhombe qu'on peut faire sur les lignes qui exprimeroient la quantité & les directions de ces forces.

PROBLÈME 2. *Trouver la quantité, & la direction de la force CG qu'on suppose équivalente à deux autres forces CD, CB qui forment entre elles un angle droit.*

Soit tirée par le point C la ligne droite (*fig. 3. plan. 4.*) EFC , en sorte que $GCB = BCE$, on aura encore $DCG = DCF$: qu'on imagine à présent la force CB divisée

visée en deux forces égales selon CG & selon CE , & la force CD en deux autres dans les directions CF , CG : les deux premières seront (*prop. précéd.*) $= \frac{CB}{2 \cos.BCG}$, & les

deux secondes $= \frac{CD}{2 \cos.DCG}$; nous aurons donc, au lieu de

CD , & CB , quatre autres forces: sçavoir deux dans les directions CE , CF , & deux conspirantes dans la direction CG ; or par la supposition toute l'action doit se faire dans la ligne CG , donc les deux forces selon CE , & CF , qui sont directement opposées doivent être égales, ce qui donne

$$\frac{CB}{2 \cos.BCG} = \frac{CD}{2 \cos.DCG} : \text{ \& celles qui sont selon } CG \text{ de-}$$

vant être égales à CG , on a, $CG = \frac{CB}{2 \cos.BCG} + \frac{CD}{2 \cos.DCG}$.

Si à présent on substitue dans la seconde équation la valeur de $CB = \frac{CD \times \cos.BCG}{\cos.DCG}$ prise dans la première. elle devien-

dra $CG = \frac{CD}{\cos.DCG}$: on aura donc les analogies suivan-

tes $\cos.BCG : \cos.DCG = CB : CD$, $CG : CD =$

$1 : \cos.DCG$; & à cause de l'angle DCB qui est droit,

$\cos.DCG : \sin.DCG = CD : CB$, $CD : CG = \sin.BCG : 1$. La première de ces analogies détermine la direction de la force CG & la seconde la quantité. c. Q. F. T.

PROBLÈME 3. *Trouver la quantité & la direction de la force CM composée de deux autres forces CE , CD , qui forment entre elles un angle quelconque.*

Après avoir tirée la ligne FCG perpendiculaire à CM , qu'on divise CD en deux autres CG , CB , on aura (*prop. préc.*) $CB = CD \times \cos.DCB$, $CG = CD \times \sin.DCB$ (*fig. 4. plan. IV.*) & en divisant de même CE on trouvera $CQ = CF \times \cos.ECB$; $CF = CE \times \sin.ECB$; l'opposition des forces CF , CG , nous donnera l'équation

$CD \times \sin. BCD = EC \times \sin. ECB$, qui détermine la direction : les deux autres forces CQ , CB , qui agissent dans la direction CM donneront $CM = CD \times \cosf. DCB + CE \times \cosf. ECB$, valeur de la force composée.

Si dans cette équation on substitue au lieu de CD sa valeur $\frac{CE \times \sin. ECB}{\sin. DCB}$, tirée de la première, on a

$$CM = CE \frac{(\cosf. BCD \times \sin. ECB + \cosf. ECB \times \sin. BCD)}{\sin. BCD}$$

$$= \frac{CE \times \sin. ECD}{\sin. DCB}, \text{ à cause de } ECB + BCD = ECD,$$

Donc $CE : CD : CM$ sont entre elles comme $\sin. BCD : \sin. ECB : \sin. ECD$, ou comme le sinus des angles opposés. C. Q. F. T.

COROLLAIRE. Les équations qui déterminent CM , sont comme on voit les mêmes que celles, qui expriment le rapport de la Diagonale d'un parallélogramme quelconque à ses côtés ; nous avons donc démontré généralement que la force composée de deux forces quelconques, est toujours exprimée quant à sa quantité, & à sa direction par la diagonale du parallélogramme qu'on peut faire sur les lignes qui représentent la direction, & la quantité des forces composantes.

SCHOLIE I. La démonstration du Prob. 1., dont les deux autres ne sont que des Corollaires assez simples, est comme on voit directe ; & fort courte : je n'ai pas fait difficulté d'y faire usage dès le commencement, des calculs différentiel, & intégral ; parceque l'expression de la force composée de deux forces données, & qui forment entre elles un angle quelconque, contient toujours implicitement ces principes, puisque le rapport de cette force aux composantes peut-être incommensurable. Il est vrai que l'application
de

de ces calculs à la fonction indéterminée qui exprime ce rapport, suppose qu'elle est assujettie à la loi de continuité; mais il est visible qu'on ne sauroit raisonnablement en douter, & que puisque les accroissemens de cette force dépendent de celle de l'angle, ces accroissemens ne se font pas par sauts. Cependant, comme je veux prévenir jusqu'aux difficultés les moins fondées, voici un autre démonstration de la même proposition, entièrement délivrée de ces calculs, & qui ne dépend en aucune façon de cette supposition d'ailleurs si légitime.

Soit (*fig. 2. plan. IV*) mCM un angle, qui soit à l'angle droit comme 1ν , ν étant un nombre entier quelconque, & soit $ACM = BCM$ un angle multiple de mCM , & $= n \times mCM$; & après avoir tiré les lignes Ca , Ca' , Cb , Cb' , telles que $ACa = aCa' = BCb = bCb' = mCM$, qu'on suppose que la force composée de deux forces $= a$, soit $= ka$ pour l'angle mCm ; $= pa$ ou $p^n a$ pour l'angle ACB ; $= p^{n+1} a$ pour l'angle aCb , & enfin que la force composée pour l'angle aCb' soit $= p^{2+2} a$. (on voit que dans ces expressions les nombres n , $n+1$, $2+2$, n'expriment pas des puissances de p , mais servent seulement à dénoter que les forces $q^n a$, p^{n+1} &c. répondent aux angles $2n \times mCM$, $= ACB$, $2(n+1) \times mCM = aCb$, $2(n+2) \times mCM = aCb'$).

Puisque $a'CA = b'CB = mCm$, les deux forces $a'C$, AC seront équivalentes (*hyp.*) à une seule $= ka$ selon aC & par la même raison deux autres forces égales Bc , $b'c$ équivaldront à une troisième suivant bC & $= ka$: or deux forces $= a$ suivant aC , bC donnent pour force composée $p^{n+1} a$, donc les deux $= ka$ donneront $kp^{n+1} a$ dans la direction MC . D'un autre côté: (*hip.*) les deux forces AC , BC donnent $p^n a$ selon BC , & les deux autres $a'C$, $b'c$ agissent comme $p^{n+2} a$ dans la même direction: on aura donc $(p^n + p^{n+2}) a$, $= kp^{n+1} a$, sçavoir, $p^{n+2} - kp^{n+1}$

+ $p^n = 0$; d'où l'on voit que les quantités p forment une suite récurrente, dont l'échelle de relation est $k - 1$; donc on aura généralement $p^n = D x^n + E y^n$, D & E étant des constantes, n étant ici exposant de x & y à la manière ordinaire, & x & y étant les racines de l'équation $u^2 - k u + 1 = 0$, ce qui donne $u = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}$,

& par conséquent $x = \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}$, $y = \frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}$

on aura donc en substituant ces valeurs

$$p^n = D \left[\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)} \right]^n + E \left[\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)} \right]^n.$$

Or soit $k = 2 \cos. \alpha$, on fait que $[\cos. \alpha + \sqrt{\cos. \alpha^2 - 1}]^n = \cos. n \alpha + \sqrt{-1} \times \sin. n \alpha$ & $[\cos. \alpha - \sqrt{\cos. \alpha^2 - 1}]^n = \cos. n \alpha - \sqrt{-1} \sin. n \alpha$; donc $p^n = (E + D) \cos. n \alpha + \sqrt{-1} \times (D - E) \sin. n \alpha$ &, changeant les constantes, $p^n = F \cos. n \alpha + G \sin. n \alpha$.

Or si $n = 0$, on a $p^n = 2$, puisqu'alors l'angle $n \times m C M$ devient $= 0$; donc on a $2 = F$; si $n = 1$, p^n devient par l'hypoténuse $= k = 2 \cos. \alpha$, donc $2 \cos. \alpha = 2 \cos. \alpha + D \sin. \alpha$, & $D = 0$; donc notre formule devient généralement $p^n = 2 \cos. n \alpha$; de plus si $n = 2$ c'est-à-dire si l'angle $n \times m C M$, auquel répond la force composée p^n est égal à deux droits, on doit avoir $p^n = 0$, & par consé-

quent $2 \cos. 2 \alpha = 0$, ce qui fait voir que $2 \alpha = \frac{\pi}{4}$, &

donne finalement $\alpha = \frac{\pi}{4^v}$ donc $p^n = \cos. \frac{n \pi}{4^v} = 2 \cos. \frac{ACB}{2}$

Voilà donc notre proposition démontrée à la rigueur pour tous les angles commensurables avec la demicirconférence, & en faisant voir, ce qui est très-facile qu'on peut toujours prendre l'angle $m C m$ tel que, n & v restant des nombres entiers, l'angle $\frac{n \pi}{4^v}$ ne diffère que d'une quantité aussi peti-

te qu'on voudra d'un angle donné , on pourra prouver sans restriction & avec la dernière exactitude la vérité de cette proposition , par une méthode trop familière aux Géomètres & surtout dans les Ecrits des Anciens , pour que je m'arrête à la développer ici.

REMARQUE. Le Savant M. Daniel Bernoulli à le premier démontré ce principe en 1726. dans les Mémoires de l'Académie de Petersbourg, d'une manière exacte, & fort ingénieuse : mais la longue suite de raisonnemens, & de théorèmes géométriques, & algébriques, par lesquels il est obligé de passer semble ne pas assez répondre à la simplicité si désirable dans la démonstration d'un principe aussi important. C'est sans doute ce qui a engagé M. d'Alembert à traiter de nouveau cette matière dans une dissertation particulière qu'on trouve parmi ses Opuscules imprimés dernièrement. Sa démonstration déjà un peu plus courte & plus simple que celle de M. Bernoulli, exige cependant encore sept, ou huit théorèmes assez compliqués : & si, comme je n'en doute pas, la méthode syntétique que ces habiles Géomètres y ont employé, n'est pas susceptible d'une plus grande simplification ; il faudra convenir que l'analyse dont je me suis servi contient seule le double avantage d'abrégé & de faciliter la solution de ce Problème, & de nous y conduire en même tems d'une manière toujours directe, & lumineuse.

- SCHOLIE 2. J'ai averti au commencement de cet Article que la démonstration que j'allois donner de la composition des forces étoit également concluante, & rigoureuse, soit qu'on estimât les forces proportionnelles aux masses aux quelles elles impriment des vitesses égales, ou qu'on voulût les estimer par les vitesses qu'elles feroient capables d'imprimer à une même masse : il suffira pour s'en convaincre de re-

lire cette démonstration, en substituant au mot *Force* ceux de *Masse*, ou de *Vitesse*.

En effet si on a deux masses $= a$, animées de vitesses égales (*fig. 1. plan. IV.*) dans les directions CA , CB , & qu'on cherche la quantité & la direction de la masse qui animée de la même vitesse leur feroit équilibre, on trouvera (comme dans le *lemme*) que cette direction sera MC , & que la quantité de la masse sera exprimée par $a \text{ fonct. } \varphi$. On verra ensuite que le raisonnement du Prob. 1. n'est apuïé, que sur ces deux principes, savoir que $y = z$ quand $\varphi = 0$, & $y = 0$ quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$: or ces deux propositions sont évidentes pour le cas dont il s'agit, puisque la première ne signifie autre chose, si non que deux masses $= a$ animées d'une vitesse quelconque sont équilibre à deux autres masses aussi $= a$, & animées de la même vitesse dans une direction opposée: & la seconde que deux corps égaux animés de vitesses égales en sens contraire n'ont besoin de l'action d'aucun autre corps pour se faire équilibre.

On verra de même (*lemme*) que si un corps quelconque C est sollicité en même tems par deux vitesses $= a$, dans les directions CA , CB , il restera en repos si on lui suppose en même tems une autre vitesse $= a \text{ fonct. } \varphi$ dans la direction MC , & qu'enfin on a posé avec raison dans le prob. 1, $y = z$ quand $\varphi = 0$, & $y = 0$ quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$; puisqu'il est évident que le corps restera en repos, s'il est animé de vitesses égales en sens contraire, savoir des vitesses $2a$ dans le premier cas, & des vitesses a dans le second.

Si l'on fait les mêmes réflexions sur le raisonnement géométrique du prob. 2., on verra qu'il prouve aussi en toute rigueur, (*fig. 3. planche IV.*);

1.^o Que si, l'angle DCB étant droit, on fait $DCG = \theta$, &

qu'on

qu'on imagine une masse $= m \times \cos. \theta$ animée d'une vitesse quelconque dans la direction DC , & une autre masse $= m \sin. \theta$ animée de la même vitesse selon BC , & finalement une masse $= m$, qui ait encor cette même vitesse dans la direction CG , ces trois masses se feront équilibre.

2° Qu'un corps quelconque C restera en repos, s'il est en même tems sollicité par trois vitesses différentes u , $u \times \cos. \theta$, $u \times \sin. \theta$ dans les directions CG , DC , BC .

I I I.

Du principe de l'équilibre.

Soit qu'on considère les forces comme les causes du mouvement des corps, ou simplement comme l'expression abrégée de ces mouvemens mêmes: il est toujours visible que nous ne saurions les exprimer que par une fonction du corps mù, & de la vitesse avec laquelle il se meut; la force, ou le mouvement d'une masse m animée d'une vitesse u fera donc *fonct.* (m, u) ; il s'agit dans cet article de trouver la valeur de cette fonction, ou ce qui revient au même, étant donnée une masse m animée de la vitesse u , il faut trouver la vitesse dont une autre masse M devoit être animée en sens contraire pour qu'il y eut équilibre.

LEMME. Si un corps C (*fig. 5.*) est animé en même tems de la vitesse V dans la direction AC , & d'une autre vitesse $= u$ selon BC perpendiculaire à AC , & que deux autres corps D & E lui résistent en même tems, savoir D selon DC avec la vitesse $= d$, & E dans la direction EC avec une vitesse $= e$, je dis que le corps C agit sur D avec toute sa vitesse u , & fait sur lui le même effet que s'il étoit animé de la seule vitesse u , & que E n'exista pas; c'est

à dire que si ces trois corps étoient en équilibre, cet équilibre subsistoit encor entre D & C , si on anéantissoit le corps E , & la vitesse V de C . En effet la vitesse V du corps C étant dans la direction AC perpendiculaire à DB , elle ne sollicite pas plus le corps C dans la direction CB que selon CD , & est par conséquent incapable d'augmenter ni d'altérer son action sur D . On en dira de même du corps E qui tend aussi à donner à C une vitesse perpendiculairement à DQ .

PROBLÈME. *Trouver le rapport des vitesses de deux masses qui se font équilibre.*

Soient deux corps P, Q (fig. 6.) chacun de masse $= m$, & animés de la vitesse $= u$ dans les directions contraire PC, QC . il est évident que ces corps se feront équilibre en C . Qu'on fasse à présent l'angle $ACP = \theta$, & ACB droit: on pourra substituer (Art. II. Sch. 2. n. 1) au lieu du corps P deux autres corps, savoir A de masse $= m \times \cos. \theta$, agissant avec la vitesse u dans la direction AC , & B dont la masse $= m \times \sin. \theta$ soit animée selon BC d'une vitesse $= u$: On pourra de même imaginer (Art. II. schol. 2. n. 2.) que le corps Q au lieu de la vitesse u selon CQ soit sollicité par une vitesse $= u \times \cos. \theta$ selon EC , & par une autre vitesse $= u \times \sin. \theta$ dans la direction DC , sans que l'équilibre soit dérangé par l'une, ni par l'autre de ces suppositions; or (lemme précédent.) le corps C agit sur le corps A avec sa seule vitesse $u \times \cos. \theta$, & l'équilibre subsistera entre m & $m \times \cos. \theta$, si on suppose $m \times \sin. \theta$ & $u \times \sin. \theta$ annéantis; donc une masse $= m$ animée de la vitesse $u \times \cos. \theta$ fait équilibre à une masse $m \times \cos. \theta$ animée d'une vitesse $= u$ dans une direction contraire, & par conséquent, puisque $\cos. \theta$ peut représenter une fraction quelconque, il y aura toujours équilibre entre deux corps s'ils sont animés de vitesses réciproques à leurs masses. C. Q. F. T.

COROLLAIRE. Il suit de là qu'une masse A animée de la vitesse a fait équilibre aux masses $B, C, D, \&c.$ animées en sens contraire des vitesses $b, c, d, \&c.$, si $Aa = Bb + Cc + Dd + \&c.$ Car si on divise A dans les parties $x, y, z, \&c.$ proportionnelles à $Bb, Cc, Dd, \&c.$ on trouvera $ax = Bb, \&c.$ On voit encore que pourvû que le produit MV de la masse d'un corps quelconque par sa vitesse demeure constant, son action, ou sa force restera la même quelles que soient M & V , & que par conséquent cette force que nous avons dit être une fonction de M & V sera nécessairement une fonction de MV . Donc pour le cas présent la force de A sera $\Psi Aa = \Psi(Bb + Cc + Dd + \&c.)$ comme nous l'avons fait voir: or l'action des corps $B, C, D, \&c.$ doit encore s'exprimer par $\Psi Bb + \Psi Cc + \Psi Dd + \&c.$ on aura donc l'équation $\Psi(Bb + Cc + Dd) = \Psi Bb + \Psi Cc + \Psi Dd + \&c.$ qui ne sauroit se vérifier en général à moins que la fonction Ψ ne soit telle que $\Psi MV = MV$. D'où l'on tire que la force d'un corps en mouvement est toujours comme le produit de sa masse par la vitesse: [conclusion que le développement de la formule générale $\Psi(m, u \cos. \theta) = \Psi(u, m \cos. \theta)$ tirée du Problème précédent nous auroit également fourni.

SCHOLIE I. La démonstration que je viens de donner du principe de l'équilibre, pourroit paroître indirecte, & défectueuse, parceque je la déduis d'une proposition en apparence plus composée; mais peut-être en jugera-t-on autrement; si l'on réfléchit qu'une vérité ne sauroit être simple à notre égard, qu'autant que nous la concevons moins confusément, & avec plus de facilité, & que ce n'est que dans le cas seul, où un corps est animé de deux vitesses dans des directions perpendiculaires entr'elles, qu'on voit clairement (*lemme*) qu'elles ne sont pas modifiées l'une par l'autre. On rencontre d'ailleurs très-fréquemment en géométrie

mérie des exemples de passages semblables, & (pour citer ici quelque chose d'analogue à mon sujet) de très-grands hommes n'ont pas fait difficulté de tirer l'équilibre du levier droit de celui du levier courbe. Quoiqu'il en soit au reste de la méthode que j'ai suivie, il est au moins certain qu'elle est à l'abri de toutes les difficultés qu'on pouvoit former contre les preuves, sur les quelles cette proposition étoit apuïée jusqu'à présent; preuves qui ont paru si peu convaincantes, que plusieurs habiles Géomètres leur ont préféré celles qu'on tire de l'expérience; & que quelques Philosophes ont osé avancer avec confiance que la méthode des Géomètres étoit absolument insuffisante pour fournir une démonstration de ce principe. *

SCHOLIE 2. Il est visible que, puisque deux masses animées de vitesses en raison réciproque se font équilibre, si une masse A animée de la vitesse a soutient un effort quelconque, comme par exemple celui d'un ressort, la masse B avec la vitesse $\frac{Aa}{B}$ fera équilibre à la même force: & que par conséquent l'effet d'une force p sur deux corp A & B sera de leur donner des vitesses réciproques à leurs masses. C'est sur cette proposition qu'est fondée la formule générale $p dt = m du$; car quoiqu'il soit très permis de ne considérer, avec M. d'Alembert, la quantité p que comme un simple coëfficient de dt , ce n'est cependant que d'après le principe que nous venons d'établir qu'on peut s'assurer que ce coëfficient doit être le même à chaque instant, quand une même force agit sur deux masses différentes.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. On peut conclure de tout ce que nous venons de démontrer, que les propositions qui sont l'objet de la Mécanique ne sont pas moins certaines, &
moins

* Recherches sur les élémens de la matière par M. Formey, &c.

moins évidentes que celles que la Géométrie, où l'Algèbre nous enseignent : Car cette science n'a aucun Problème, auquel on ne puisse appliquer avec succès le principe général qu' on trouve à la tête de la seconde partie du Traité de Dynamique de M. d'Alembert; or il est visible que ce théorème ne suppose absolument que les principes que nous avons établi ci-dessus d'une manière exacte, & entièrement rigoureuse.

I V.

Du Levier.

LA composition des forces suffit comme l' on fait pour démontrer l'équilibre du levier, & réciproquement cette dernière proposition une fois prouvée, on peut facilement en déduire la composition des forces. Elle nous fournit d'ailleurs une démonstration fort-simple du principe des vitesses virtuelles, qu' on peut avec raison considérer comme le plus fécond & le plus universel de la Mécanique : tous les autres en effet s'y réduisent sans peine, le principe de la conservation des forces vives, & généralement, tous ceux que quelques Géomètres ont imaginés pour faciliter la solution de plusieurs Problèmes, n' en sont qu' une conséquence purement géométrique, ou plus tost ne sont que ce même principe réduit en formule. La démonstration de l'équilibre du levier que je vais donner ici, fera donc une nouvelle preuve des principes que j' ai démontré directement dans les Articles précédens.

LEMME. Si (*fig. 7.*) deux forces égales $= p$, (comme par exemple deux poids égaux) agissent dans des directions parallèles sur le levier AB aux points A & B également éloignés du point fixe C . Il est d'abord évident que le

le-

levier fera en équilibre autour du point C , puisque toutes choses sont égales de part, & d'autre: je dis de plus que le point C soutiendra le même effort, que si les forces $p + p_1$ étoient immédiatement appliquée en C ; car cet effort, ou la force qui leur feroit équilibre si elle agissoit en C dans une direction contraire, ne peut dépendre que de la quantité p , & si l'on veut de la distance CA que j'appelle x ; cette force sera donc exprimée par *fonct.* (p, x) , qu'on démontrera $= p \text{ fonct. } x$, comme dans le lemme de l'Art. I.

Qu'on fasse à présent $CA = AE = BD$, & qu'on imagine quatre forces $= p$ appliquées en E, D, C, C , l'action de deux premières sur le point C sera $= p \text{ fonct. } 2x$ par l'hipoté, & l'action des deux dernières sera évidemment $= 2p$; or (*hip.*) les forces E & C sont équivalentes à une force $p \text{ fonct. } x$ appliquée en A ; & C, D font la même chose que $p \text{ fonct. } x$ agissant en B , & par conséquent les forces A, B font sur C l'effort $= p (\text{fonct. } x)^2$: on a donc l'équation $p (\text{fonct. } x)^2 = 2p + p \text{ fonct. } 2x$, qui ne sauroit se vérifier en général à moins que *fonct. } x* ne soit constante, comme il est aisé de s'en convaincre par le calcul, & puisque quand $x = 0$ on doit avoir *fonct. } x = 2*, on aura généralement *fonct. } x = fonct. } 2x = const. = 2*; il suit de là qu'une force $2p$ fait sur une verge quelconque le même effet que deux forces p appliquées sur la même verge à quelles distances que ce soit du point où elle agit pourvu que ces distances soient égales.

PROBLEME. Trouver l'action d'une force quelconque p appliquée en A pour mouvoir le levier EC , autour de C (fig. 8. planche IV.).

- Cette action ne peut être exprimée que par une fonction de p & de la distance $AC = x$, j'appelle cette fonction $\xi(p, x)$ & on verra comme ci-devant qu'elle sera $= p \xi x$:
qu'on

qu'on fasse à présent $AD = AE = z$, il est visible (lemme) que deux forces $= \frac{P}{2}$ appliquées en E & D font sur la verge le même effet que p appliquée en A : or (hip.) l'action de la première sur C , sera $\frac{P}{2} \xi (x + z)$, & l'action de la seconde $\frac{P}{2} \xi (x - z)$: on aura donc l'équation

$$p \xi x = \frac{P}{2} \xi (x + z) + \frac{P}{2} \xi (x - z), \text{ ou}$$

$2 \xi x = \xi (x + z) + \xi (x - z)$ qui doit être vraie quelle que soit z : si l'on fait donc z infiniment petit, & qu'on développe la fonction ξ par les méthodes connues, on trouvera ($\xi' x$, $\xi'' x$, $\xi''' x$ &c. dénotant selon l'usage ordinaire les différences successives de ξx divisées par dx)

$$\xi (x + z) = \xi x + \frac{z \xi' x}{2} + \frac{z^2 \xi'' x}{2 \cdot 3} + \frac{z^3 \xi''' x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

$$\xi (x - z) = \xi x - \frac{z \xi' x}{2} + \frac{z^2 \xi'' x}{2 \cdot 3} - \frac{z^3 \xi''' x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

& par conséquent $2 \xi x = \xi (x + z) + \xi (x - z)$

$$= 2 \xi x + \frac{z^2 \xi'' x}{3} + \frac{z^4 \xi^{IV} x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{z^6 \xi^{V} x}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.$$

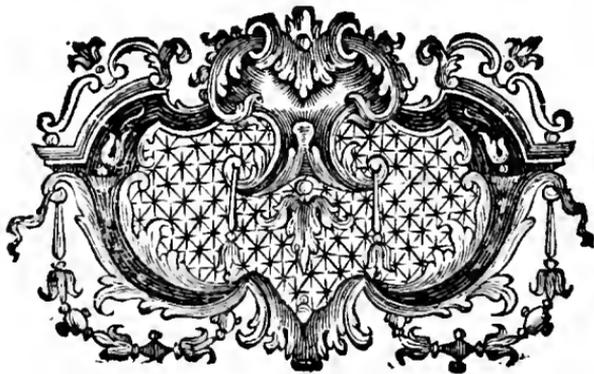
& réduisant, $\frac{z^2 \xi'' x}{3} + \frac{z^4 \xi^{IV} x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{z^6 \xi^{V} x}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c. = 0$:

divisant cette équation par $\frac{z^2}{3}$, on trouvera séparément

$\xi'' x = 0$, $\frac{z^2 \xi^{IV} x}{4 \cdot 5} = 0$, &c.: la première donne en multi-

pliant par dx , & intégrant $\xi' x = H$, & multipliant, & intégrant de nouveau $\xi x = Hx + K$: or comme la force p n'agit point sur le levier pour le mouvoir quand elle est appliquées en C , ξx doit être $= 0$ quand $x = 0$: on

a donc généralement $K = 0$, & $\xi x = Hx$, & par conséquent si deux forces p & P sont appliquées aux deux extrémités du levier AB , ſçavoir p en A à la distance $CA = x$ du point d'appui, C & P à la distance $CB = y$ du même point, leurs actions pour mouvoir le levier en ſens contraire, que nous avons exprimées par $p \xi x$, & $P \xi y$, ſeront HPx , & Hpy , & il y aura par conséquent équilibre, quand $Hpx = Hpy$, ou $px = Py$, ou bien $p : P = y : x$. C. Q. F. D.



A D D I T I O N

A LA PREMIERE PARTIE DES

RECHERCHES SUR LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON

Imprimées dans le Volume précédent.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. D'Alembert aiant fait l'honneur à ma solution du Problème des *Cordes vibrantes*, de l'attaquer sur quelques points, par un Ecrit particulier imprimé dans le premier Tome de ses *Opuscules Mathématiques*; je vais ajouter ici de nouveaux éclairciffemens sur l'analyse de cette solution, qui serviront en même tems de réponse aux objections de cet illustre Géomètre, & de confirmation à ma Théorie.

I.

La solution en question n'est qu'une application de la formule trouvée dans le Chap. III., pour le mouvement d'un fil chargé d'un nombre quelconque $m - 1$ de poids, au cas ou l'on suppose ce nombre infini; c'est cette application qui a paru à M. d'Alembert susceptible de plusieurs difficultés.

1.^o La formule, dont je viens de parler, étant composée d'une suite de termes qui renferment successivement les *sinus* de tous les arcs $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ &c. jusqu'à $\frac{(m-1)\pi}{4m}$; j'ai pris dans le cas de $m = \infty$ ces arcs mêmes pour les valeurs de leurs *sinus*. M. d'Alembert m'objecte que cela n'est permis que pour tout angle

$\frac{r\pi}{4^m}$, r étant un nombre fini, & nullement pour les angles $\frac{(m-1)\pi}{4^m}$, $\frac{(m-2)\pi}{4^m}$ &c. Cette objection prise en elle-même est solide & sans réplique; mais elle perd toute sa force si on la considère par rapport à la formule dont il s'agit; car je vais prouver directement & invinciblement que les expressions $\sin. \frac{\pi}{4^m}$, $\sin. \frac{2\pi}{4^m}$ &c. $\sin. \frac{(m-1)\pi}{4^m}$ doivent être changées en $\frac{\pi}{4^m}$, $\frac{2\pi}{4^m}$, &c. $\frac{(m-1)\pi}{4^m}$ dans le cas de $m = \infty$.

En remontant à l'analyse du Chap. cité, il est aisé de trouver que toutes ces expressions viennent de l'expression générale $\pm 2\sqrt{e} \times \sin. \frac{y\pi}{4^m} \times \sqrt{-1}$ (*Art. XXI.*), qui est celle du coefficient R (*Art. XIX.*), y étant un nombre quelconque entier depuis 0 jusqu'à m . Tout se réduit donc à prouver que, quand $m = \infty$, $R = \pm 2\sqrt{e} \times \frac{y\pi}{4^m} \times \sqrt{-1}$.

Pour y parvenir je remarque d'abord que $R^2 = e(k-2)$, (*Art. XIX.*); je vois de plus que la valeur de k dépend de cette condition que $M^\mu = \frac{a^\mu - b^\mu}{a-b}$ soit $= 0$, lorsque $\mu = m$, a étant $= \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}$, & $b = \frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}$, (*Art. cité*); c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{\left[\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}\right]^m - \left[\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}\right]^m}{2\sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)}} = 0$$

ou simplement

$$\left[\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)} \right]^m - \left[\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)} \right]^m = 0.$$

Or $\sqrt{e} = m \times \frac{H}{T}$, (*Art. XXXV.*), $\frac{H}{T}$ étant une quantité finie; donc $k = 2 + \frac{R^2}{e} = 2 + \frac{R^2 T^2}{m^2 H^2}$; mais R doit être aussi une quantité finie, comme il est aisé de le voir par la nature même du calcul, donc $\frac{R^2 T^2}{m^2 H^2}$ sera une quantité infiniment petite du second ordre dans le cas où $m = \infty$.

Qu'on suppose $\frac{RT}{H} = f\sqrt{-1}$, enforte que $k = 2 - \frac{f^2}{m^2}$, & qu'on mette cette valeur de k dans l'équation ci-dessus, il viendra

$$\left[1 - \frac{f^2}{m^2} + \sqrt{\left(-\frac{f^2}{m^2} + \frac{f^4}{4m^4}\right)} \right]^m - \left[1 - \frac{f^2}{m^2} - \sqrt{\left(-\frac{f^2}{m^2} + \frac{f^4}{4m^4}\right)} \right]^m = 0;$$

équation, qui, en négligeant ce qui se doit négliger à cause de $m = \infty$, se réduit à celle-ci

$$\left(1 + \frac{f}{m} \sqrt{-1} \right)^m - \left(1 - \frac{f}{m} \sqrt{-1} \right)^m = 0.$$

Or on fait qu'une expression telle que

$$\frac{\left(1 + \frac{f}{m} \sqrt{-1} \right)^m - \left(1 - \frac{f}{m} \sqrt{-1} \right)^m}{2\sqrt{-1}}$$

devient, dans le cas de $m = \infty$, égale à $\sin. f$; donc l'équation qu'on vient de trouver est équivalente à $2\sqrt{-1} \times \sin. f = 0$, savoir à $\sin. f = 0$; ce qui donne $f = \frac{\nu\pi}{2}$, ν étant un

nombre

nombre quelconque entier ; donc $\frac{RT}{H} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \sqrt{-1}$,

donc $R = \frac{H}{T} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{e} \times \frac{\sqrt{\pi}}{4^m} \times \sqrt{-1}$.

2.° M. d'Alembert prétend que j'ai tort de regarder en général l'expression fin. $\frac{\pi}{2} \left(\frac{m x}{a} \pm \frac{m H t}{T} \right)$ comme égale à zéro, lorsque $m = \infty$ (*Voies Art. XXXVIII.*).

Je conviens que je ne me suis pas exprimé assez exactement, en disant que $m \left(\frac{x}{a} \pm \frac{H t}{T} \right)$ est toujours égal à

un nombre entier, parceque $m = \infty$; mais ma proposition n'en est pas moins vraie pour cela. Car on voit par

l'Art. XXXVI. que $\frac{m x}{a}$ est mis au lieu de μ qui est de

lui même un nombre entier ; & à l'égard de $\frac{m H t}{T}$, il

fera aussi un nombre entier, en regardant $\frac{H t}{T}$ comme

commensurable avec $\frac{x}{a}$; c'est-à-dire en supposant $\frac{H d t}{T} =$

$\frac{d x}{a}$; supposition qui est évidemment permise, & qui n'ap-

portera pas la moindre limitation à ma solution.

3.° M. d'Alembert attaque aussi les calculs que j'ai fait dans le Chap. VI. pour trouver d'une manière directe & générale la somme d'une suite infinie, telle que fin. $\varphi \times \sin. \theta + \sin. 2 \varphi \times \sin. 2 \theta + \&c.$

La méthode que j'ai employée dans cette recherche est très-simple ; après avoir transformé la suite proposée en deux autres composées de simples *cosinus*, j'ai mis à la place de chacun de ces *cosinus* son expression exponentielle imaginaire, & j'ai cherché la somme de suites résultantes, par la méthode ordinaire de la sommation des séries

géométriques, en supposant le dernier terme nul comme on le fait communément lorsque la série va à l'infini. M. d'Alembert m'objecte que cette supposition n'est point exacte, parceque dans la suite $e^x \sqrt{-1} + e^{2x} \sqrt{-1} \&c.$ le dernier terme est $e^{x\sqrt{-1}}$ quantité qui est infinie au lieu d'être zéro.

Or je demande si toutes les fois que dans une formule algébrique, il se trouvera par exemple une série géométrique infinie, telle que $1 + x + x^2 + x^3 + \&c.$ on ne fera pas en droit d'y substituer $\frac{1}{1-x}$, quoique cette quantité ne soit réellement égale à la somme de la série proposée qu'en supposant le dernier terme x^n nul. Il me semble qu'on ne sauroit contester l'exactitude d'une telle substitution sans renverser les Principes les plus communs de l'Analyse.

M. d'Alembert apporte encore un argument particulier pour prouver que la somme de la suite $\cos. x + \cos. 2x$

$+ \cos. 3x + \&c.$ à l'infini ne peut pas être $-\frac{1}{2}$ comme je l'ai trouvée par mon calcul. Il suppose $x = 45^\circ$,

& il trouve que cette suite devient $\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1,$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, +\frac{1}{\sqrt{2}}, +1 \&c.$ après quoi elle recommence :

or (dit-il) la somme de cette suite finie est, ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou

0 , ou -1 , ou $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ selon qu'on y prendra plus ou

moins de termes. Donc la somme de la suite entière est aussi

ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou 0 , ou -1 , ou $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, selon le nombre

des termes qu'on y prendra, quel que soit d'ailleurs ce nombre de termes fini ou infini, & cette somme ne sera point

$= 0,$

$= 0$, à moins que $m \times 45^\circ$ ne soit $=$ à une infinité de fois la circonférence, ou 135° \rightarrow une infinité de fois la circonférence.

Je répons qu'avec un pareil raisonnement on soutiendrait aussi que $\frac{1}{1+x}$ n'est point l'expression générale de la somme de la suite infinie $1 - x + x^2 - x^3 + \&c.$ parcequ'en faisant $x = 1$ on a $1 - 1 + 1 - 1 + \&c$ ce qui est ou 0, ou 1, selon que le nombre des termes qu'on prend est pair, ou impair, tandis que la valeur de $\frac{1}{1+x}$ est $\frac{1}{2}$. Or je ne crois pas qu'aucun Géomètre voulût admettre cette conclusion.

I I.

Quand même les objections auxquelles nous venons de répondre seroient fondées, M. d'Alembert ne pourroit pas se dispenser de convenir que les résultats de ma Théorie sont nécessairement exacts dans les cas où ces résultats s'accordent avec ceux qu'il a trouvés par la sienne; ce qui arrive quand la corde a une certaine figure au commencement du mouvement. Or toutes les objections que M. d'Alembert m'a faites jusqu'ici sont absolument indépendantes de la figure initiale de la corde; donc, puisque ses objections n'empêchent point ma solution d'être exacte lorsque cette figure a certaines conditions, elles ne l'empêcheront pas non plus d'être exacte en général, quelle que soit la figure initiale de la corde.

Ce raisonnement est simple, & ne peut pas avoir échappé au savant Géomètre dont nous parlons; aussi s'est-il attaché dans la suite à combattre seulement la généralité de ma solution, & à la borner comme la sienne aux courbes assujetties à la loi de continuité. Il se fonde sur ce que
j'ai

j'ai fait usage de la méthode de M. Bernoulli pour trouver la valeur d'une quantité qui dans certains cas est $\frac{0}{0}$, méthode qui suppose que la quantité proposée soit une fonction algébrique.

Mais je le prie de faire attention, que dans ma solution, la détermination de la figure de la corde à chaque instant dépend uniquement des quantités Z & V , lesquelles n'entrent point dans l'opération dont il s'agit. Je conviens que la formule à laquelle j'applique la méthode de M. Bernoulli est assujettie à la loi de continuité; mais il ne me paroît pas s'ensuivre, que les quantités Z & V qui constituent le coefficient de cette formule le soient aussi, comme M. d'Alembert le prétend.

I I I.

Je viens maintenant aux difficultés que M. d'Alembert a faites contre la Théorie de M. Euler, & qui peuvent aussi s'appliquer à la mienne: ce sont celles qui regardent la construction que M. Euler a donnée pour trouver la figure de la corde à chaque instant; construction qui est précisément la même que celle qui résulte de ma Théorie. *Voies l'Art. XL.*

1.° M. d'Alembert prétend que cette construction ne peut satisfaire à l'équation de la corde vibrante $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ à moins que la courbe initiale AMB (*fig. A plan. 3.*) ne soit telle que les fleches $r''\omega$, $r'o'$ de deux arcs consécutifs, & infiniment petits $\rho''R'$, $R'\rho'$, soient égales; où, ce qui est la même chose, que la courbure au point r'' soit la même que le courbure au point r' infiniment proche; ce qui exclut déjà toutes les courbes dans lesquelles le rayon

$T \epsilon$

oscu-

ofculateur change brusquement en quelque point. Voici le raisonnement de M. d'Alembert.

Soit pris (dit-il dans le §. VII. du Mémoire sur les vibrations de Cordes sonores imprimé dans le même volume) $AP = x$ (fig. citée) $PT = t$ sur l'axe AB ; donc regardant x comme constante, & faisant $PT' = PT$, $Tt = t\theta = T'r' = r'\theta' = dt$, on aura $AT = x + t$, $At = x + t + dt$, $A\theta = x + t + 2dt$, $AT' = x - t$, $Ar' = x - t - dt$, $A\theta' = x - t - 2dt$. Or y étant égale, suivant la construction de M. Euler, à la demie ordonnée TR qui répond à $x + t$ plus à la demie ordonnée $T'R'$ qui répond à $x - t$, il s'ensuit que d^2y en ne faisant varier que t est

$$\frac{\theta\rho - tr - (tr - TR)}{2Tt^2} + \frac{\theta'\rho' - t'r' - (t'r' - T'R')}{2Tt^2};$$

$$\text{donc } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{\theta'\rho' + T'R' - 2t'r'}{2Tt^2} =$$

(en menant les cordes $R\rho$, $R'\rho'$) $\frac{-r\omega - r'\omega'}{Tt^2}$. Mainte-

nant faisons t constante & $= PT$, & x variable; prenons $Pp = p\pi = dx$, & supposons $dx = Tt$, ce qui est évidemment permis, nous aurons 1.° $At = x + t + dx$, $A\theta = x + t + 2dx$; 2.° Faisant $T'r'' = r''\theta'' = Pp = Tt$, nous aurons $At' = x + dx - t$, $A\theta'' = x + 2dx - t$; donc, menant la corde $R'\rho''$, on trouvera que d^2y , en ne faisant varier que x , est $-r\omega - r''\omega$; donc $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-r\omega - r''\omega}{Pp^2}$. Il faut donc, pour que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit égal à $\frac{d^2y}{dt^2}$, que $r'\omega' = r''\omega$.

Je répons que, dans l'équation générale $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, d^2y (en ne faisant varier que x) est la différence seconde de trois ordonnées consécutives, dont l'une répond à l'abscisse

$x - dx$, l'autre à l'abscisse x , la troisième à l'abscisse $x + dx$, & que d^2y (en ne faisant varier que t) est la différence seconde de trois ordonnées répondantes à la même x , la première pour le tems $t - dt$, la seconde pour le tems t , la dernière pour le tems $t + dt$; comme M. d'Alembert lui même le dit dans le §. X.; qu'ainsi la valeur de d^2y (en ne faisant varier que t) fera, suivant la construction de M. Euler & la mienne,

$$\frac{tr - TR - (TR - yz)}{2} \quad [\text{en tirant l'ordonnée } yz \text{ telle}$$

$$\text{que } yT = Tt] + \frac{t'r' - T'R' - (T'R' - t''r'')}{2} =$$

$$\frac{tr + yz - 2TR}{2} + \frac{t'r' + t''r'' - 2T'R'}{2} = \quad (\text{en}$$

menant les cordes $zr, r''r')$ $\frac{-Rx - R'x'}{2}$; & que la va-

leur de d^2y (en ne faisant varier que x) sera

$$\frac{tr - TR - (TR - zy)}{2} + \frac{t'r'' - T'R' - (T'R' - t'r')}{2}$$

$$= \frac{-Rx - R'x'}{2}; \text{ donc } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-Rx - R'x'}{2Tt^2}, \frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$\frac{-Rx - R'x'}{2Pp^2} = (\text{en supposant } Tt = Pp) \frac{-Rx - R'x'}{2Tt^2};$$

& l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ devient identique.

2.° M. d'Alembert prétend ensuite que la courbure doit être nulle aux extrémités A & B . Car soit (dit-il, dans le §. VIII.) $PT, \& PT' = AP$, on a (en ne faisant

$$\text{varier que } t) \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{t's' - 2L'Q'}{2Tt^2}$$

$$= \frac{-r\theta + Q'q'}{Tt^2}, \text{ \& non pas } \frac{-r\theta - Q'q'}{Tt^2} \text{ parceque } t's'$$

$-2Q'L' = -2Q'q'$, & que $t's' \& Q'L'$ doivent être prises négativement par leur position, & par la construction de M. Euler.

Maintenant, en ne faisant varier que x , on aura $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ro - Qq}{1 dt^2}$; donc $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne sera pas $= \frac{d^2y}{dt^2}$, si la courbure n'est pas nulle en A .

Ce raisonnement est semblable à celui, auquel je viens de répondre, & se refute par conséquent de la même manière. En effet la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$ au point A n'est pas $\frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{l's - 2L'Q'}{2Tt^2}$, comme le suppose M. d'Alembert, mais $\frac{tr + \zeta y - 2TR}{2Tt^2} + \frac{L'Q' + QL}{2Tt^2} = \frac{Rx}{2Tt^2}$, parceque $L'Q'$ étant égale, & de position contraire à QL , suivant la construction de M. Euler & la mienne, on a $L'Q' + LQ = 0$; de même la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est $\frac{tr + \zeta y - 2TR}{2Tt^2} + \frac{LQ + L'Q'}{Tt^2} = \frac{Rx}{2Tt^2}$, & non pas $\frac{-ro - Qq}{Tt^2}$; donc $\frac{d^2y}{dt^2}$ est toujours $= \frac{d^2y}{dx^2}$ quelle que soit la courbure en A .

3.^o Autre argument de M. d'Alembert pour prouver que la courbure doit être uniforme dans chaque portion infiniment petite de la courbe AMB . Il donne à la différence dt deux valeurs différentes à volonté, & il trouve que pour que la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$ soit toujours la même & égale à celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, il faut que les flèches ro , qui appartiennent à différens arcs infiniment petis $Rr\rho$ soient toujours proportionnelles aux quarrés des portions correspondantes $T\theta$ de l'axe; ce qui ne peut avoir lieu, que dans des arcs de courbure uniforme, comme M. d'Alembert le démontre fort au long dans le §. X. de son Mémoire. A

A cela je répondrai qu'il n'est nullement nécessaire, pour la généralité de ma solution, que les différences dt demeurent indéterminées & puissent être supposées quelconques ; comme je l'ai déjà remarqué plus haut (*n. 2 Art. I.*) Il me suffit qu'on prenne toujours $d t = \frac{T}{H a} d x$, ou, en suppo-

sant avec M. d'Alembert $\frac{H a}{T} = 1$, $d t = d x$; car, comme $d x$ peut être pris aussi petit qu'on voudra, il est évident qu'on n'en trouvera pas moins la figure de corde au bout d'un tems quelconque donné t .

4.^o M. d'Alembert apporte de plus une raison métaphysique pour faire voir en général que le mouvement de la corde ne peut être représenté par aucune construction quand la courbure fait un saut en quelque point M de la courbe initiale. *C'est* (dit-il dans le §. XI.) *que dans ce cas il y a proprement au point M deux rayons osculateurs différens, quoique coincidens quant à la direction, dont l'un appartient à la portion de courbe MR, & l'autre à la portion de courbe MA. Or la force accélératrice en chaque point de la corde étant en raison inverse du rayon osculateur, lequel de deux rayons communs au point M doit servir à déterminer la force en ce point M ? C'est ce qu'il est impossible de fixer, & il l'est par conséquent aussi de résoudre le Probleme dans ce cas-là. En effet supposons que la figure initiale de la corde soit composée de deux différentes courbes ainsi reunies en M ; je demande quelle est la force accélératrice du point M, lorsque la corde commence à se mouvoir ?*

La réponse est bien simple ; la courbe $A M B$ étant continue, il est clair qu'on peut toujours prendre, à quelque point R que ce soit, trois ordonnées consécutives, & infiniment proches $z y$, $R T$, $r t$; or les différences de ces trois ordonnées constituent la valeur de $d^2 y$, à laquelle la force accélératrice du point du milieu R est nécessairement propor-

portionnelle par la nature du Problème, quel que soit d'ailleurs le rayon osculateur en ce point.

5.^o M. d'Alembert fait voir dans le même §., que si la courbure n'étoit pas nulle en B , il s'ensuivroit de la construction de M. Euler, & de la mienne qu'il y auroit un saut dans le $\frac{d^2y}{dt^2}$ qui répond à un point quelconque M lorsque $t = PT$, savoir que la force accélératrice passeroit brusquement, & sans degrés de la valeur qu'elle a en cet instant à une autre valeur, qui différeroit de celle-là d'une quantité du même ordre; ce qui seroit contraire à la nature de la force accélératrice.

Je réponds que cet inconvénient auroit lieu en effet, si les forces accélératrices qui agissent sur chaque point de la corde à chaque instant avoient une valeur finie; mais dans notre cas ces forces sont toujours infiniment petites, puisque on suppose dy infiniment petit, par rapport à dx ; par conséquent l'accroissement de la force du point M sera aussi infiniment petit; ce qui n'a plus rien de choquant.

6.^o M. d'Alembert ajoute encore une nouvelle considération, pour prouver que le mouvement de la corde ne peut être soumis à aucun calcul analytique quand la courbure est finie en A , & B . Qu'on se représente (dit-il §. XII.) la corde au commencement de son mouvement; si la courbure n'est pas nulle en B le rayon osculateur y sera donc fini; par conséquent la force accélératrice y sera aussi finie, & tendra à donner du mouvement au point B ; cependant ce point étant fixement arrêté, est incapable de se mouvoir; ainsi d'un côté $\frac{d^2y}{dx^2}$ est finie lorsque $x = AB$, & lorsque $t = 0$, & de l'autre $\frac{d^2y}{dt^2}$ est toujours $= 0$ au point B quelle que soit la valeur de t La nature en ce point arrête, pour ainsi dire, brusquement le calcul; on a deux forces accélératrices voisines, & infini.

infiniment peu différentes ; l'une au point *B*, l'autre au point infiniment proche de celui-là ; la seconde de ces forces produit un mouvement, la première n'en sauroit produire, quoique par

l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ elle paroisse devoir en produire un,

lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ n'est pas $= 0$; ainsi la loi du mouvement n'étant pas continue pour tous les points de la courbe ne peut être représentée avec exactitude par l'équation dont il s'agit.

A cela je réponds 1.^o Qu'il ne me paroît nullement exact de dire que la force accélératrice est finie en *B*, & tend à donner du mouvement à ce point. Car il est facile de voir que les points *A* & *B*, par où la corde est attachée, ne sont réellement sollicités par aucune force accélératrice perpendiculaire à l'axe ; mais simplement tirés par la force de tension de la corde, laquelle agit presque dans la direction même de l'axe, & qui doit être détruite par l'hypothèse du problème. 2.^o Sans m'embarraffer de la valeur, quelle qu'elle soit, du rayon osculateur en *A* & *B* je considère que le $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui répond exactement à ces points est toujours nul de lui même, suivant ma construction, comme on l'a fait voir plus haut. D'où je conclus que le calcul est parfaitement d'accord avec la nature.

Voilà les principales objections de M. d'Alembert sur la construction que M. Euler & moi avons donnée pour le mouvement des cordes vibrantes. Il me paroît d'y avoir pleinement satisfait, & d'avoir montré en même tems que cette construction a toute la généralité dont la question est susceptible.

Quant aux autres difficultés que M. d'Alembert propose dans le même *Mémoire* contre la Théorie de M. Euler, & qui sont tirées de la considération des fonctions algébriques ; il est clair qu'elles ne touchent point à ma solution ; mais

servent seulement à confirmer ce que j'avois déjà avancé (*Art. XV.*) sur l'insuffisance de la méthode de ces deux grands Géomètres, pour conduire à une Théorie exacte & complète du mouvement des cordes sonores.

Au reste, quelque générale que soit la solution que j'ai trouvée de cet important Problème, je suis bien éloigné de penser qu'elle puisse donner le vrai mouvement de la corde, quand sa figure initiale est composée de deux, ou plusieurs lignes qui font des angles entr'elles; car il est évident que l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ne fau-
roit avoir lieu dans ces cas. Mais il est certain d'autre part, & l'on peut même s'en assurer par l'expérience, que la roideur de la corde, & l'action réciproque de toutes ses parties l'obligeront de prendre aussi-tôt une figure courbe continue, à laquelle on pourra par conséquent appliquer notre construction générale de l'*Art. XLV.* Les vibrations qui suivront les premiers instants, & qui sont les seules qu'il nous importe de connoître, seront donc toujours régulières & isochrones, & leur durée ne dépendra en aucune manière de la figure primitive, mais seulement de la tension, de la longueur, & de la grosseur de la corde, comme on l'a démontré (*Art. XLVI.*); ce qui suffit pour expliquer, pourquoi une corde frappée d'une manière quelconque rend toujours le même son.

*Pour le Mémoire sur les quantités imaginaires
inséré dans le premier Volume*

PAR MR. DE FONCENEX.

J' Ai donné dans le premier Volume un Ecrit , où je traite assés au long des logarithmes des quantités négatives. Cette matière , qui avoit déjà été le sujet d'une controverse fort-vive entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli, a été savamment approfondie par le célèbre Mr. Euler dans le *Mémoires de l'Académie Royale de Prusse pour l'année 1749*. Cet habile Géomètre y fait voir par une méthode , dont j'ai taché de donner un précis dans l'écrit dont il s'agit, que les nombre positifs ont non seulement un logarithme réel , mais encore une infinité d'autres qui sont imaginaires & semblables à ceux qu'il trouve pour les nombres négatifs correspondans : c'est ainsi que ce grand Géomètre satisfait à plusieurs objections très-fortes que Mr. Bernoulli faisoit contre le sentiment de Mr. Leibnitz, & que ce dernier avoit plutôt éludées que résolues.

Cependant la plus grande preuve de Mr. Bernoulli, tirée de la quadrature de l'hyperbole , étoit encore dans toute sa force : c'est pourquoy, quand j'entrepris de traiter cette matière, je crus devoir chercher dans l'hyperbole même une formule générale qui donnât tout d'un coup les logarithmes des quantités positives & négatives : un calcul assés simple me la fit découvrir , & elle s'est trouvée parfaitement semblable à celle de Mr. Euler ; mais les conclusions que j'ai tiré de cette formule , & de plusieurs autres considérations que j'ai détaillé dans mon Mémoire , sont un peu différentes de celles de Mr. Euler. D'abord il me paroissoit

Uu prouvé

prouvé que les logarithmes des nombres négatifs pouvoient à la rigueur être considérés comme réels de même que ceux des nombres positifs, & que par conséquent la logarithmique a deux branches, l'une au-dessus, & l'autre au-dessous de l'axe; mais il me sembloit que ces deux branches n'étoient pas liées par la loi de continuité, ou au moins que les raisons qui l'auroient pût faire croire n'étoient pas convaincantes.

J'apprens qu'avant que Mr. Euler eusse publié ses recherches sur cette matière, elle avoit déjà été le sujet d'une dispute par lettres entre Mr. D'Alembert & lui. Dans les Opuscules que ce grand Géomètre vient de donner au Public, on trouve un savant Mémoire, dans lequel il établit sur de nouvelles preuves, que les logarithmes des quantités négatives sont réels, contre le sentiment de Mr. Euler: enfin il m'a fait l'honneur d'examiner dans une Ecrit particulier la théorie que j'avois proposée dans mon Mémoire. Les réflexions de cet illustre Matématicien ont réveillé ma curiosité sur cette matière que des occupations d'un genre absolument différent, m'avoient empêché de suivre: & je soumetts ici au jugement des Géomètres les nouvelles considérations que la briéveté du tems m'a permis de faire sur ce sujet assés délicat par lui-même.

On entend communément par *logarithmes* une suite de nombres en progression arithmétique quelconque, répondant chacun à chacun, à ceux d'une autre suite de nombres qui forment entr'eux une progression géométrique aussi quelconque; mais comme on peut toujours réduire les logarithmes à être les exposans des puissances successives d'un nombre e pris à volonté, en leur ajoutant seulement une quantité constante, ou en changeant l'origine des x dans la courbe qui exprime le rapport des nombres à leurs log.: il est visible que ce n'est rien lever à la généralité de la définition que nous venons de donner, que de dire simplement que x sera le log. de y quand on aura l'équation $y = e^x$.

Et

Et il paroît d'ailleurs que c'est la seule façon dont on les considère dans le calcul.

Cela posé il est nécessaire de bien distinguer la question Arithmétique de la question Géométrique : car il me paroît évident que l'origine des log. numériques ne permet pas d'en donner aucun aux nombres négatifs, puisqu'à quelle puissance qu'on élève le nombre e il ne sauroit résulter $= -e$.

Je fais bien qu'en faisant que e^{2m} représente un nombre quelconque on trouve $\sqrt{e^{2m}} = \pm e^m$, d'où l'on conclut que $2m$ étant le log. de e^{2m} , m doit aussi bien être le log. de $-e^m$, que de $+e^m$, mais si l'on s'en tient à la première origine de e^{2m} , comme nous le supposons ici, & qu'on veuille faire attention à la théorie des quantités négatives que Mr. D'Alembert a fort-bien développé dans son Ecrit sur les logarithmes & dans l'Encyclopédie, on verra aisément que, puisque e^{2m} vient par la génération même des log. de la quantité $+e$ élevée à la puissance $2m$, & non pas de $-e$ élevé à cette puissance, on ne peut pas dire que $-e^m$ soit réellement la racine carrée de e^{2m} , mais seulement que $-e^m$ élevé au carré produit une quantité égale au même nombre e^{2m} : ce qui ne suffit pas pour la question arithmétique, où on s'est contenté de rapporter tous les nombres à l'indéterminé positif $+e$.

Cette théorie recevra encor un plus grand jour si on considère les logarithmes comme des nombres en progression arithmétique répondant à une progression géométrique : car après avoir choisi, par exemple la progression decuple 1, 10, 100 pour les nombres, & la progression naturelle 0, 1, 2, &c. pour leurs log. ; il est visible que la progression géométrique prolongée tant qu'on voudra ne nous fera jamais parvenir à des nombres négatifs. Envain droit-on que les nombres négatifs peuvent entrer en proportion avec les nombres positifs ; car il est évident que la proportion ne sauroit affecter que la seule quantité, & que le signe

$U u \ 2$

$+ \text{ ou}$

+ ou - ne lui appartient point, mais signifie seulement la différente position des quantités qui en sont affectées, comme Mr. d'Alembert lui-même l'a remarqué. Les nombres 1, -1, -1, 1 ne forment donc pas plus une proportion que ceux-ci -1, 1, 1, 1, & toute la différence qu'on y voit, c'est que dans la première suite le produit des extrêmes est égal au produit des moïens, & non pas dans la seconde, ou pour m'exprimer plus exactement, ces produits sont égaux dans toutes les deux, mais affectés de signes contraires dans la seconde, ce qui ne change rien à la quantité, ni par conséquent à la proportionalité, dans les principes de Mr. d'Alembert même. Enfin quand même on voudroit que le produit des extrêmes étant égal au produit des moïens, les quantités formassent une proportion, cela ne serviroit pas encore au cas présent, où le premier terme de la progression doit être positif = $+e$, & le dernier, le nombre négatif dont on cherche le log., puisqu'il est visible qu'alors le carré du terme moïen n'est pas même égal au produit des extrêmes.

Quant à la preuve qu'on prétend déduire de ce que les deux progressions peuvent être quelconques, elle ne me paroit pas pouvoir s'appliquer ici, puisqu'il s'agit de déterminer le log. de -2 : les log. de 1, 2, 3, 4, &c. étant déjà donnés, c'est-à-dire la progression dans laquelle on doit le trouver étant déjà déterminée. C'est ainsi, par exemple, qu'on ne peut pas dire qu'à la même ordonnée d'une parabole, il réponde différentes abscisses x , $x + a$, $x + b$ &c., quoiqu'on puisse toujours les lui rapporter en prenant l'origine de x à volonté.

On voit donc qu'à considérer les logarithmes arithmétiquement, & en les rapportant toujours à un nombre déterminé e , les nombres négatifs ne sauroient en avoir, & je crois devoir remarquer ici que c'est sous ce point de vue que Mr. Leibnitz, & même Mr. Euler les avoient considérés.

Telle

Telle étoit, dans leur première origine, la nature des logarithmes ; mais les Géomètres ont bien-tôt cherché à transporter ces notions dans la Géométrie : or l'on fait qu'en pareil cas l'expression algébrique devient souvent plus générale qu'on ne le veut, & notre question se réduit à examiner s'il en a été ainsi dans la logarithmique.

L'équation de cette courbe est, comme on fait, $dx = \frac{dy}{y}$.

Je crois d'avoir assez bien prouvé dans mon Mémoire que cette équation nous fait voir que la logarithmique a deux branches, & qu'elles sont même liées par leur expression transcendante, ce qui s'accorde avec le sentiment de Mrs. Bernoulli & d'Alembert ; mais les raisonnemens par lesquels le premier de ces grands Géomètres prétendoit prouver l'entière continuité de cette courbe, & même les nouvelles raisons que le dernier y a ajouté pour fortifier ce sentiment ne me paroissent pas entièrement concluantes.

En effet l'argument tiré de la quadrature de l'hyperbole que Mr. Bernoulli regardoit comme démonstratif, & sur lequel Mr. d'Alembert se fonde aussi le plus, pourroit servir également à établir une théorie contraire : car si on considère la courbe dont l'équation est $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, il est évident qu'elle ne s'étendra point du côté des x négatives, puisqu' alors $y = \frac{1}{\sqrt{-x}}$: qu'on suppose à présent que cette courbe fasse une révolution sur son axe, elle formera un solide dont l'élément sera $\frac{dx}{x}$, & cette solidité sera par conséquent exprimée par $l. x$; or puisque la courbe n'existe pas quand x est négative, le solide n'existera pas non plus, & par conséquent x négative n'a point de logarithme.

Je suis bien éloigné de vouloir conclure de là, & d'une infinité de raisonnemens semblables, qu'on peut aisément imaginer

giner, que la logarithmique n'a point de branche au-dessous de l'axe; mais il me semble que, puisqu'en choisissant à volonté différentes courbes génératrices pour les logarithmes, on peut en déduire des conséquences directement opposées, nous ne devons pas faire beaucoup de fond sur ces sortes de raisonnemens. Cela se rapporte à ce que j'avois déjà observé dans mon Mémoire, que l'intégration change toujours un peu l'équation différentielle au moins quant à sa généralité.

Pour s'assurer donc de la coexistence & de l'union des branches de la logarithmique, il est absolument nécessaire de s'abstenir de toute intégration, & même des quadratures qui les supposent toujours; voici un raisonnement qui ne me paroît sujet à aucun inconvénient.

Soit BP (*Fig. * pl. IV.*) la logarithmique, AQ son axe, $AD = x$, $DP = y$. On trouvera le rayon de la développée qui appartient au point P , $PR = \frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{y}$ &

par conséquent $CR = \frac{2y^2+1}{y}$, $CD = 1+y^2$, donc si on appelle $CD = u$, $CR = z$ on trouvera l'équation $z^2 = \frac{4u - 4u^2 - 1}{1-u}$, qui à chaque valeur de $CD = u$

fournit toujours deux valeurs égales, & de signes différens pour $z = CR$; il suit delà que la développée de la logarithmique a deux branches semblables l'une au-dessus & l'autre au-dessous de l'axe; & que par conséquent, non seulement il en est de même de la logarithmique, mais encore que ces deux branches forment une courbe continue.

Ce raisonnement me paroît être démonstratif, & ne laisser plus aucun doute sur la continuité des deux branches de notre courbe, c'est donc inutilement que je cherchois dans mon Ecrit à trouver une différence entre la continuité dans

des branches de l'hyperbole, & celle de ses aires, puisqu'elles sont aussi bien liées les unes que les autres: il est visible qu'on ne peut pas dire que l'aire qui appartient à l' x négative soit aussi négative, comme le supposoit le raisonnement de l'Art. 11.; je l'avois moi même remarqué un peu auparavant, & c'est avec raison que M. d'Alembert me le conteste, mais je ne saurois convenir avec lui que cela posé l'on ne pût en tirer les conséquences que j'en ai déduit: quoiqu'il en soit cette discussion est inutile ici, puisque nous convenons sur le fond de la question.

Mais que deviendra alors la formule $\phi \sqrt{-1} = l.$ (coff. $\phi \pm \sin. \phi \sqrt{-1}$) trouvée par l'illustre Bernoulli, & que j'ai déduite dans mon Mémoire du rapport constant du secteur hyperbolique au secteur circulaire?

Je répons 1.^o que cette formule peut s'exprimer un peu plus généralement en la changeant en celle-ci $\phi \sqrt{-1} = l.$ (\pm coff. $\phi \mp \sin. \phi \sqrt{-1}$), & en choisissant les signes convenables pour les cas, auxquels on veut l'appliquer: comme je l'avois déjà conclu dans mon Mémoire, de l'origine de cette même formule, aussi bien que de l'intégration directe de

l'équation $dx = \frac{dy}{y}$ que j'ai donnée dans le même écrit, & qui est $y = m e^x$, où m est absolument arbitraire.

2.^o Que si l'on veut dans notre formule conserver toujours les mêmes signes, on trouvera à la vérité des log. imaginaires pour les nombres négatifs, mais pourvu qu'on s'en tienne à l'expression algébrique, & qu'on n'en tire aucune conclusion avant que d'avoir transformé de nouveau la formule, on pourra s'en servir sans crainte d'erreur, comme l'usage continuel qu'on en a fait jusqu'ici le prouve suffisamment.

On peut lire dans mon Mémoire l'origine & le dénouement de cet espèce de paradoxe; j'y ai remarqué que si on cherchoit une appliquée négative dans la branche supé-

rière de la courbe qui appartient à l'équation $y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}$ qui en a évidemment deux égales, on la trouveroit imaginaire : il en est précisément de même dans notre formule $\phi \sqrt{-1} = l. [x + \sqrt{(x^2 - 1)}]$, qui ne sauroit exprimer généralement tous les nombres en faisant seulement varier l' x , mais dans laquelle il faut tantôt se servir de $x + \sqrt{(x^2 - 1)}$ tantôt de $x - \sqrt{(x^2 - 1)}$.

Voilà je pense la vraie raison pour laquelle notre formule ne fournit que des imaginaires pour les log. des nombres négatifs, & je ne saurois accorder à Mr. d'Alembert qu'elle appartienne à une logarithmique dont la soutengeante est imaginaire, puisque Mrs. Bernoulli, Euler, & moi l'avons tous construite d'après certe supposition que le log. de 1 fût = 0, quoique par des procédés fort-différens.

Il est vrai que Mr. d'Alembert attaque le raisonnement géométrique sur lequel j'ai fondé la vérité de certe formule; parceque j'y suppose que les ordonnées du cercle étant toujours aux ordonnées de l'hyperbole comme 1 : $\sqrt{-1}$, il en doit être de même de leurs secteurs : il objecte que la constante qu'on doit ajouter à l'une de ces intégrales, change la proportion de leurs élémens; mais il est visible qu'on n'a point à craindre ici un pareil inconvénient, puisque nous exprimons l'arc de cercle simplement par ϕ , & que l'intégration de l'hyperbole n'exige point de constante.

Un plus grand détail sur cette matière me paroît inutile, & je me contente de renvoyer à mon Mémoire pour les conséquences qu'on peut déduire de cette théorie. J'ai, si je ne me trompe, prouvé ici suffisamment, que les logarithmes tels que Mrs. Leibnitz & Euler les ont considérés sont imaginaires pour les nombres négatifs : & d'un autre côté que la logarithmique a cependant deux branches, comme l'ont soutenu Mrs. Bernoulli & d'Alembert.

DE L'INFINI ABSOLÛ

Consideré dans la Grandeur

P A R L E

P. G E R D I L B A R N A B I T E.

LE mot *infini* appliqué à la quantité peut être pris en deux sens : tantôt il signifie une propriété essentielle à la grandeur, par laquelle on conçoit qu'elle est susceptible d'augmentation & de diminution sans fin ; tantôt il exprime l'élévation actuelle d'une grandeur à la dernière période, pour ainsi dire, de l'augmentation, dont elle est susceptible, où son abaissement jusqu'à la dernière période de la diminution possible. *Une quantité infinie* dit-on communément, *est celle qui a reçu tous ses accroissemens finis possibles : une quantité infiniment petite, celle qui a reçu tous ses décroissemens finis possibles.*

Locke distingue très nettement ces deux significations. Il désigne la première par le mot *d'infinité*, qu'il substitue à celui d'*infini* en puissance, employé par les anciens pour marquer qu'il n'est aucun terme qui borne l'augmentation, où la diminution possible de la grandeur. Il exprime la seconde par le mot simple *d'infini*, c'est à dire de l'*infini* absolu & en acte : & il ajoute que cette sorte d'*infini* dans la quantité est impossible à concevoir, *car, dit-il, une répétition à l'infini ne sauroit jamais représenter l'infini.*

La première idée est très-claire. C'est une suite de la notion même de la grandeur ; quelque augmentation que la grandeur ait reçue, on conçoit, qu'elle peut être encore augmentée, & l'esprit ne voit aucune borne à cette suite possible d'augmentation. Mais pour former la notion de

l'infini absolu, il faudroit allier ces deux idées, qu'une suite d'augmentation ne peut avoir aucune fin, & que pourtant cette augmentation peut parvenir a son comble. Aussi Chambers raisonnant sur les principes de Locke n'hésite pas de dire, que l'idée d'un nombre actuel infini est une absurdité. (a)

Les anciens Géomètres scrupuleusement attachés à la rigueur de la démonstration, & à la clarté des idées, qui en est inséparable, ont heureusement employé la première notion de l'infini dans leurs recherches, & en ont sévèrement écarté l'idée de l'infini absolu, dont les résultats paradoxes sont plus faits pour étonner une imagination avide du merveilleux, que pour satisfaire un esprit ami du vrai.

Cavalleri fut le premier qui osa introduire dans la Géométrie l'infini sous une forme nouvelle, en imaginant le continu composé d'un nombre infini de parties, qui sont comme les derniers termes de la décomposition qu'on peut en faire, en le partageant en tranches parallèles entr'elles, il considéra ces derniers termes, comme les éléments du continu, & les appella *indivisibles*. Mais M. de Montucla dans son excellente histoire des Mathématiques observe que quoiqu'on ne puisse disconvenir que Cavalleri s'énonce d'une manière un peu dure pour des oreilles Géométriques, il est pourtant facile de reconcilier son langage avec la saine Géométrie, par l'interprétation qu'il y donna luy même, lorsqu'il fut attaqué par Guldin, faisant voir que sa méthode n'est autre chose, que celle d'exhaustion des anciens, simplifiée. Le soin donc qu'il eut de dissimuler l'infini, dont il faisoit usage, & de le masquer le plus souvent
sous

(a) Le P. Jacquier dans ses institutions de Philosophie parlant de l'infini mathématique dit qu'il est évident qu'une grandeur infinie répugne de sa nature, & implique contradiction. Le P. Boschovitz dans son traité des sect. Con. p. 465. établit qu'il ne peut exister aucune quantité qui ne soit finie.

3

sous le nom plus doux en apparence d'indéfini, ne doit pas être regardé comme un ménagement nécessaire pour introduire l'idée nouvelle de l'infini absolu, ainsi que M. de Fontenelle voudroit le persuader, mais plutôt comme une précaution, dont il reconnut la nécessité, pour faire sentir, que sa méthode pouvoit être aisément ramenée aux idées exactes de la Géométrie.

On vit encore dans le même siècle la notion de l'infinité sagement employée par d'habiles Maîtres se développer plus, ou moins en différentes méthodes, dont l'heureuse application aux recherches les plus difficiles avança extraordinairement les progrès de la Géométrie, & acquit une gloire immortelle à leurs inventeurs.

Enfin parut le calcul de l'infini qui fut en même tems & le point de réunion des Théories qui l'avoient précédé, & le germe des brillantes découvertes qui l'ont suivi. L'infini soumis aux règles du calcul donna lieu de penser aux personnes peu versées dans ces matières, qu'on connoit l'infini, selon l'expression de M. Voltaire, comme dix & dix font vingt; & quelques Savants regarderent ce calcul comme une preuve convaincante de la réalité de l'infini absolu, & de l'existence d'une infinité de différents ordres d'infini.

Cependant M. Dalembert, qui (au mot différentiel de l'Encyclop) a expliqué la métaphysique de ce calcul avec autant de clarté, que de solidité, fait voir que la supposition qu'on y fait de quantités infiniment petites n'est que pour abrégé, & simplifier les raisonnemens, qu'il ne s'agit point de quantités infiniment petites dans le calcul différentiel, mais uniquement de limites de quantités finies, qu'ainsi la métaphysique de l'infini, & des quantités infiniment petites, plus grandes, ou plus petites les unes que les autres, est totalement inutile au calcul différentiel, où l'on ne se sert du terme d'infiniment petit, que pour abrégé les expressions.

Il remarque en même tems que si ce calcul a eu des ennemis dans sa naissance, c'est la faute des Géomètres ses partisans, dont les uns l'ont mal compris, les autres peu expliqué.

M. Rolle qui fut un des plus ardens à le combattre, ne le rejetta, que parcequ'il ne pouvoit admettre la supposition de grandeurs infiniment petites. Rolle se trompoit en faisant dépendre le calcul de cette supposition, mais il ne se trompoit pas à rejeter la supposition en elle-même.

Leibnitz n'ignorant pas sans doute la force des preuves que la Géométrie même pouvoit fournir contre ces sortes, de grandeur, reduisit ses infiniment petits à n'être que des incomparables, dans le même sens qu'un grain de sable seroit incomparable au globe de la Terre. Cette idée ne s'accorde guere à la vérité avec l'exactitude géométrique des calculs, mais elle fait voir du moins que Leibnitz étoit bien éloigné d'admettre cette sorte d'infini.

Newton, dont la Métaphysique sur ce point, dit M. Dalember, est très-exacte, & très-lumineuse, est parti d'un autre principe, & il n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode de trouver les limites des rapports.

Il paroît donc bien prouvé que ni la synthése rigoureuse des anciens, ni l'analyse sublime des modernes ne portent aucunement sur la supposition de quantités infiniment petites, & ne renferment rien qui tende à établir la réalité de l'infini absolu soit dans la quantité discrete, soit dans la quantité continuë.

Envain le célèbre Fontenelle a entrepris d'élever, comme on dit, l'édifice de l'infini en établissant les différens ordres d'infinis, & d'infiniment petits. Cet édifice au jugement de M. de Montucla & des plus habiles Maîtres, est plus hardi que solide.

J'ai déjà tâché dans la première de mes dissertations imprimées à Paris chez Chaubert de dévoiler le foible de cette Théorie, & je dois répéter ici, pour l'intérêt seul de la vérité, qu'ayant fait communiquer cette partie du manuscrit à un Géomètre du premier ordre, il m'écrivit, que les principes que je combattois, étoient en effet très-faux, & tendoient à jeter du doute sur les vérités de Géométrie; & au sujet d'une autre dissertation il m'écrivit que j'avois réfuté avec grande raison les infinis indéterminables de M. de Fontenelle.

Cette recherche peut n'être pas entièrement inutile. Sans parler de la nécessité d'éloigner de la Géométrie des notions confuses, qui sous un appareil savant, couvrent quelque fois des paralogismes capables d'ébloüir, (b) je remarque simplement que l'infini dans la grandeur n'est pas seulement l'objet de la Géométrie; il est aussi quoique sous un autre point de vue, du ressort de la Métaphysique. L'éclaircissement de cette question pourroit donc servir à former, pour ainsi dire, une nouvelle ligne de communication entre ces deux branches des connoissances humaines; l'impossibilité de l'infini absolu démontrée géométriquement fourniroit à la Métaphysique un principe lumineux, pour établir des vérités de la plus grande importance.

L'objet de ce mémoire est de présenter quelques preuves de cette impossibilité. Je les ai tirées 1. de la formation

(b) L'éditeur des œuvres de Maclaurin parlant de son traité des fluxions (vie de Maclaurin page XIII.) s'énonce en ces termes: „ on ne peut dis-
 „ convenir que les termes d'infini, & d'infiniment petits ne s. ent
 „ devenus trop familiers aux Mathématiciens, & qu'on n'en ait abusé
 „ en Géométrie & en Arithmétique, soit en introduisant & palliant
 „ des absurdités réelles, soit en donnant a ces sciences un certain air
 „ misterieux, & affecté qu'elles ne doivent point avoir. Pour remédier
 „ à ce mal qu'alloit tous les jours en croissant, M. Maclaurin trouva
 „ qu'il étoit nécessaire, en démontrant les principes des fluxions. de
 „ rejeter entièrement tous ces termes sujets à disputes, & de ne sup-
 „ poser que des quantités finies déterminables, telles que celles dont
 „ traite Euclide dans sa Géométrie. &c.

6
mation de la fuite naturelle des nombres. Cette preuve servira aussi de réponse à la seule objection qu'on ait faite contre ma première dissertation. 2. de la notion élémentaire des lignes droites parallèles. 3. d'une propriété de la Logarithmique. 4. des asymptotes de l'hyperbole. 5. des progressions croissantes infinies. 6. des progressions géométriquement décroissantes à l'infini.

Je puis m'être trompé sur le choix des preuves mais le sentiment des Géomètres que je viens de citer, m'autorise à croire que je ne me suis pas trompé sur le fond de la question, en regardant l'impossibilité de l'infini actuel dans la quantité, comme une vérité susceptible de démonstration. Cela seul suffit pour remplir l'objet que j'ai en vue, qui n'est point d'entrer dans des recherches difficiles de Géométrie, mais d'établir une vérité utile, ou du moins de faire naître à quelque habile Géomètre la pensée de l'établir. La grâce que j'ose demander aux lecteurs qui voudront bien jeter les yeux sur cet écrit, est de ne pas juger de la solidité de mes raisonnements sur l'exposé de chacune des preuves en particulier, au cas qu'ils y trouvent quelque difficulté, mais d'examiner la liaison de toutes les preuves entr'elles. Quelque effort que l'on fasse pour s'enoncer avec clarté, on ne peut empêcher que les expressions dont on est obligé de se servir dans des matières un peu abstraites, ne présentent un côté obscur, qui rend la pensée moins intelligible, & ce n'est qu'en tournant ses pensées & en les présentant sous différentes faces qu'on parvient à les caractériser avec assez de précision pour les faire entendre comme on les conçoit.

P R E M I E R E P R E U V E

Tirée de la formation de la suite naturelle des nombres.

J'AI déjà fait usage de cette preuve tirée de la formation de la suite naturelle des nombres dans la dissertation que je viens de citer. La seule objection qui me soit revenue, c'est que n'ayant aucune idée de l'infini absolu nous ne saurions démontrer si cet infini répugne ou non.

Je sens la nécessité d'écarter avant tout cette objection, qui est d'autant plus à craindre qu'elle est plus vague.

Je dis donc que les preuves principales que j'ai employées dans mon essai de démonstr., ne portent point sur l'idée de l'infini considéré en lui même, mais sur des rapports constants entre quantités finies, rapports qui étant essentiels à la suite naturelle des nombres, & subsistant invariablement dans tout le cours de cette suite, prouvent que tout nombre possible est nécessairement fini.

C'est ainsi que l'on regarde comme démontrée la propriété de l'asymptote de pouvoir être prolongée à l'infini sans jamais rencontrer la courbe dont elle approche continuellement, *de maniere* (ce sont les termes de M. Dalemberbert au mot Asymptote) *que sa distance à cette courbe ne devient jamais zéro absolu, mais peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée.*

Cette propriété se déduit non de l'idée même de l'infini, mais d'un rapport constant entré des quantités finies, comme dans l'hyperbole entre la puissance de cette courbe, & tous les rectangles formés par une portion de l'asymptote, & une droite tirée de l'asymptote à l'hyperbole. Or cette propriété étant essentielle à l'hyperbole, l'invariabilité de ce rapport fait connoître évidemment que l'hyperbole & l'asymptote peuvent être prolongées sans fin, & que cependant elles ne peuvent jamais s'approcher de sorte
que

que leur distance devienne absolument nulle. L'obscurité de l'idée de l'infini n'a jamais été un prétexte de douter de la solidité d'une démonstration fondée sur l'invariabilité connue d'un rapport qui toujours subsistant & toujours le même dans le prolongement indéfini de ces deux lignes, ne peut que donner toujours le même résultat.

Tel est le procédé que j'ai suivi dans mon essai sur tout pa. 23. & suiv. je vais y ajouter quelques éclaircissements

1. Soit un assemblage quelconque de termes ou d'unités, je dis que la suite naturelle des nombres est applicable à cet assemblage.

2. Et par conséquent tout nombre possible entre dans la suite naturelle & en fait partie.

3. C'est une propriété essentielle à la suite naturelle d'être formée par l'addition continuelle d'unité à unité.

4. En sorte que dans la suite naturelle tout nombre qui suit un autre nombre, ne peut le surpasser que d'une unité.

5. Tout nombre qui a un rapport fini à un nombre fini est nécessairement fini.

6. Sur ces principes je dis 1. que la suite naturelle des nombres peut être augmentée à l'infini par l'addition continuelle d'unités à unités, en sorte que quelque soit le nombre donné, on pourra toujours trouver un nombre plus grand. Cette proposition n'a pas besoin de preuves. C'est un axiome d'Euclide (arith. l. 1. apud Tacq.) *Quolibet numero potest sumi major*. Je dis 2. que dans cette progression tous les nombres possibles par lesquels on conçoit que la suite naturelle augmente à l'infini, auront toujours un rapport fini aux précédents, & qu'il n'est ainsi aucun nombre possible qui ne soit fini.

Concevons la suite naturelle élevée à un nombre quelconque donné, il est évident que ce nombre quelque grand qu'on veuille l'imaginer, sera un nombre fini, & qu'il pourra être encore augmenté. Or le nombre suivant ne pourra surpasser ce dernier nombre que d'une unité. Donc il aura un rapport fini à un nombre fini, donc ce nombre suivant sera un nombre fini. Et comme ce rapport subsistera sans fin dans tout le cours de la suite naturelle, tout nombre qu'on voudra y ajouter (quelque augmentation qu'on suppose qu'elle ait déjà reçue) ne surpassera le nombre précédent que d'une unité; ce sera donc encore un nombre fini. Or il n'est aucun nombre possible dans la suite naturelle, auquel ce raisonnement ne puisse être appliqué. Donc tout nombre possible est nécessairement un nombre fini; donc &c.

2. Dans la suite naturelle le nombre 2. est nécessairement déterminé à être fini par le rapport qu'il a à l'unité qui le précède, & par le même rapport il détermine le nombre 3. qui le suit à être fini. Ainsi le nombre 2. comme moyen est déterminé à être fini par son antécédent, & il détermine de même son conséquent. Or dans la progression naturelle tous les nombres possibles depuis l'unité sont autant de termes moyens, qui se succèdent & se déterminent toujours selon la même loi. Donc l'unité déterminant le nombre 2. à être fini, & celui-ci son conséquent 3. en vertu du même rapport, cette détermination doit s'étendre, autant que la progression, & par conséquent tous les termes de cette suite, ne peuvent qu'être finis.

3. Si la suite naturelle pouvoit s'élever à un nombre qui ne fut pas fini, il y auroit donc un nombre fini possible, qui ne seroit plus suivi d'un autre nombre fini, mais d'un nombre d'un ordre supérieur. Or il n'est aucun

nombre fini possible, dont le conséquent ne doit être fini, puisqu'il ne peut surpasser que d'une unité son antécédent. Donc il n'est aucun nombre fini possible, qui ne soit suivi d'un autre nombre fini. Donc la suite naturelle ne peut jamais sortir du fini. Donc &c.

Rédisons ces raisonnements en deux mots. Tout nombre qui ne s'élève que d'une unité sur un nombre fini, est un nombre fini. Or par une propriété constante de la suite naturelle, on trouve qu'en continuant le cours de cette suite à l'infini, chaque nombre qu'on y ajoute, ne s'élève que d'une unité sur le nombre fini qui le précède, & cela se trouve sans fin. Donc il n'est aucun nombre possible dans la suite naturelle qui ne soit fini.

Cette marche essentielle à la progression des nombres, fait ainsi dans tout le cours de la suite naturelle le même effet que l'égalité de la puissance de l'hyperbole, & des rectangles correspondants fait dans le prolongement indéfini de cette courbe & de son asymptote; de manière que comme dans ce prolongement indéfini *la distance de l'asymptote à la courbe ne devient jamais nulle, ou zéro absolu*, selon l'expression de M. D'Alembert, ainsi dans le cours indéfini de la suite naturelle tout nombre qu'on ajoute aux autres nombres, ne devient jamais infini absolu, & de même que cette distance peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée sans jamais devenir zéro absolu, ainsi dans la suite naturelle on peut toujours ajouter un nombre plus grand qu'aucun autre nombre donné, sans pouvoir jamais parvenir à l'infini absolu.

J'ajoute que dans la quantité continuë, zéro absolu & l'infini absolu peuvent être considérés comme les limites du décroissement & de l'augmentation de la grandeur, de manière cependant que la quantité ne peut jamais atteindre ces limites, ni coïncider avec elles. La quantité continuë diminuë sans cesse par la division de ses parties;

mais

mais quoique cette division possible n'ait point de bornes, & qu'elle puisse aller à l'infini, il est pourtant impossible que jamais elle réduise la quantité à zéro absolu. D'un autre côté la grandeur peut augmenter par une progression continuelle d'un à deux, de deux à quatre, & ainsi de suite; mais quoique cette progression n'ait point de bornes, & qu'elle puisse continuer à l'infini, elle ne pourra non plus jamais élever la grandeur à l'infini absolu. La marche d'une quantité finie vers zéro absolu, & vers l'infini absolu se trouve ainsi la même dans des directions opposées. Donc l'impossibilité démontrée de réduire une quantité finie à zéro absolu par une progression quelconque de décroissement, semble prouver l'impossibilité de l'élever à l'infini absolu par une progression opposée d'accroissement.

S E C O N D E P R E U V E

Tirée des notions élémentaires de la Géométrie.

SOient les deux droites parallèles (*fig. 1.*) AB , CD , je dis que ces deux lignes peuvent être prolongées indéfiniment, de manière pourtant qu'elles ne pourront jamais parvenir à l'infini absolu, ou en acte; je dis qu'on ne pourra jamais parvenir sur ces lignes à un point quelconque, dont la distance du point A puisse être supposée absolument infinie, & qu'une telle supposition renverse les principes les plus incontestables de la Géométrie.

1. Il est incontestable qu'on peut supposer en Géométrie deux lignes droites exactement parallèles, & qui étant prolongées à l'infini conservent toujours leurs parallélisme.

2. Il suit de cette supposition qu'aucun point de la ligne AB , à quelque distance qu'on le suppose du point A ne pourra jamais coïncider avec aucun point de la li-

gne CD . Car ces deux lignes devant toujours conserver leur parallélisme par la supposition, elles seront toujours & dans tout le cours de leur prolongement à une égale distance l'une de l'autre.

3. Or je dis que de tels principes incontestables en Géométrie sont détruits par la supposition que les lignes AB, CD , puissent être prolongées jusqu'à l'infini absolu où actuel.

4. Si ces lignes peuvent être prolongées jusqu'à l'infini absolu, donc il y aura dans la ligne AB , des points qu'on pourra supposer être à une distance absolument infinie du point A .

5. Cela étant des points C & E de la ligne CD on pourra tirer les deux droites parallèles CG, EB aux points G & B supposés à une distance absolument infinie du point A , de manière, qu'on aura un parallélogramme $CGBE$ formé de deux droites finies CE, GB , & de deux infinies CG, EB .

6. Qu'on élève maintenant sur le côté EB la perpendiculaire TP qui mesure la distance des deux côtés CG, EB où cette distance TP pourra être encore diminuée, ou elle sera absolument nulle?

7. Si la distance TP peut être encore diminuée, donc les points G & B peuvent encore être reculés de plus en plus sur la ligne AB ; donc ces points ne sont pas encore à un éloignement infini du point A .

8. Si l'on fait la distance TP absolument nulle, donc la ligne CG doit coïncider sur la ligne EB .

9. Or la ligne CG ne peut coïncider avec la ligne EB , que celle-ci ne coïncide elle même avec la ligne CD . Car le point u venant à tomber sur le point E , il faut que toute la ligne CG tombe sur la ligne CD , & cela par les axiomes mêmes d'Euclide.

10. Mais la ligne CG & la ligne EB venant ainsi à tomber & à coïncider sur la ligne CD , il est évident que les points G & B de la droite AB doivent rencontrer l'autre parallèle CD . Ce qui détruit la notion des parallèles établies sur les principes les plus incontestables de la Géométrie.

L'expression de quelques Géomètres qui disent que deux parallèles concourent à une distance infinie ne contredit aucunement la démonstration que nous venons de donner. Ce n'est là qu'une façon de s'exprimer pour dire que deux lignes qu'on supposeroit ne pouvoir concourir qu'à une distance infinie pourroient être regardées comme parallèles, parceque leur inclinaison étant infiniment petite seroit comptée pour rien. Mais cette supposition ne prouve pas que deux lignes puissent être prolongées à une distance absolument infinie. Elle ne détruit point non plus la possibilité géométrique de deux lignes tellement situées l'une à l'égard de l'autre que l'inclinaison soit absolument nulle, & qui soient par conséquent exactement parallèles. Or il est évident qu'en déterminant ainsi la notion des parallèles, il est impossible qu'elles concourent jamais à quelque éloignement que ce soit, & on peut encore le montrer de la manière suivante.

Qu'on suppose (*fig. 2.*) AC , BD , tangentes aux deux extrémités du diamètre AB du cercle O ; & par conséquent parallèles. Si l'on suppose en même tems que ces deux lignes prolongées à une distance absolument infinie dans la direction AC , BD doivent enfin concourir à un point infiniment éloigné du diamètre AB , il faudra supposer par la même raison qu'en les prolongeant dans la direction opposée AE , BF , elles devront aussi concourir de ce côté à un éloignement infini. Or les deux lignes AE , BF ne peuvent concourir du côté X sans leur supposer une inclinaison infiniment petite de ce même côté

côté; & elles ne peuvent être inclinées vers X qu'elles ne s'écartent d'autant vers Y . Mais pour concourir aussi de ce côté selon la supposition elles doivent être inclinées l'une vers l'autre. Donc il faudroit les supposer en même tems convergentes & divergentes; ce qui répugne.

TRÔISIÉME PREUVE

Tirée d'une propriété de la Logarithmique.

SOit Ax l'axe de la logarithmique (fig. 3.) $d e p$, $Ad = 1$, $b e = \frac{1}{2}$. Il est démontré que l'axe étant asymptote à la courbe ne peut la rencontrer qu'à une distance absolument infinie, ce qui dans le langage de la plupart des Géomètres veut dire qu'il ne peut jamais la rencontrer, c'est à dire que l'axe ne peut jamais devenir absolument infini. Proposition qui paroissant susceptible de démonstration, peut confirmer de plus en plus l'impossibilité d'une suite composée d'un nombre de termes absolument infini.

Qu'on suppose l'axe Ax absolument infini, & partagé en un nombre actuellement infini de parties égales Ab , $b c$ &c. donc au point x placé à un éloignement infini du point A , l'axe deviendra tangente à la logarithmique. D'autre part il est évident que les ordonnées décroissant dans la progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ &c. l'ordonnée au point x , c'est à dire à un éloignement infini du point A sera égale à l'unité divisée par 2. élevé à la puissance infinie, savoir $\frac{1}{2^\infty}$.

Cela supposé, pour que l'axe puisse devenir tangente à la courbe, il faut que la fraction $\frac{1}{2^\infty}$ qui exprime l'ordonnée, soit égale à zéro absolu, où que d'ailleurs ce soit un infiniment petit incapable de recevoir aucun décroissement

ul-

ultérieur. Car si l'ordonnée $\frac{1}{\infty}$ pouvoit encore devenir plus petite, la distance de l'axe à la courbe pourroit encore diminuer. Ce ne seroit donc pas encore le point du contact, comme on le suppose.

Or l'une & l'autre supposition est impossible. Car 1. cette ordonnée $\frac{1}{\infty}$ loin d'être incapable de recevoir aucun décroissement ultérieur, seroit encore divisible à l'infini. Qu'on conçoive en effet dans un cercle une corde infiniment petite du premier ordre égale à l'ordonnée $\frac{1}{\infty}$, il est évident que l'abscisse correspondante sera un infiniment petit du second ordre, comme le démontre M. D'Alembert (art. différentiel de l'Encyclop.), d'où il conclut que les infiniment petits du premier ordre étant une fois admis, tous les autres en dérivent nécessairement. On fait aussi que les Géomètres pour donner une idée de ce que seroit une quantité absolument infinie, si elle étoit possible, disent que c'est une quantité qui aiant reçu tous les accroissemens finis possibles ne peut plus être augmentée par des quantités finies, mais seulement par des quantités infinies; réciproquement une quantité infiniment petite sera encore susceptible de diminution sans fin par le moyen de quantités infinies. De sorte qu'en admettant un infiniment petit du premier ordre tel que la fraction $\frac{1}{\infty}$ il faut nécessairement reconnoître la possibilité d'un autre terme $\frac{1}{\infty}$

infiniment plus petit que le premier. Donc la fraction $\frac{1}{\infty}$ pouvant encore recevoir une infinité de diminutions, ne fauroit être considérée ni comme zéro absolu, ni comme incapable de recevoir aucun décroissement ultérieur.

2. Si des points A & b du même axe Ax l'on élève les perpendiculaires $AD = Ad = 1$, $bE = \frac{1}{x}$ & ainsi de suite, on aura une autre logarithmique, dont l'ordonnée infiniment petite correspondante au point x sera $\frac{1}{x}$. Or au point x la logarithmique supérieure & l'inférieure devant également toucher leur axe commun Ax , il faudroit que l'ordonnée $\frac{1}{x}$, & l'ordonnée $\frac{1}{x}$ fussent égales entr'elles, que l'une & l'autre fussent égales à zéro absolu, ce qui & répugne. L'ordonnée $\frac{1}{x}$ étant plus petite que l'ordonnée $\frac{1}{x}$ celle-ci est encore susceptible de diminution, donc la distance exprimée par cette ordonnée pouvant encore être diminuée, la courbe pourra être prolongée avant que d'arriver au point du contact, où la distance entre l'axe & la courbe doit être absolument nulle. On pourra faire le même raisonnement sur l'ordonnée $\frac{1}{x}$ d'où il sera aisé de conclure que quelque hypothèse que l'on fasse, il est impossible que l'axe rencontre jamais la logarithmique, mais il devrait la rencontrer s'il pouvoit être absolument infini; & il seroit infini s'il étoit composé d'un nombre de parties actuellement infini. Donc une suite composée d'un nombre actuellement infini de termes est impossible.

QUATRIÈME PREUVE

Tirée des asymptotes de l'hyperbole.

ON m'objectera peut être que de très-habiles Géomètres conviennent avec M. de l'Hopital (Sect. Con. art. 108.) que *les asymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les hyperboles dans leurs extrémités.* Ce qui semble établir la possibilité de l'infini actuel.

Je répons que dans le stile des Géomètres cette supposition ne signifie autre chose, sinon que dans le cours indéfini de l'hyperbole, & de l'asymptote, celle-ci approchant de plus en plus de l'hyperbole la toucheroit enfin, si on pouvoit parvenir au terme de ce prolongement infini, ou pour mieux dire si ce prolongement infini pouvoit avoir un terme quelconque. Ce n'est qu'à cette condition, qu'ils supposent que l'asymptote puisse être regardée comme une tangente infinie qui touche l'hyperbole, puisqu'ils disent que ce cas ne peut avoir lieu qu'à l'extrémité de l'hyperbole, comme s'énonce M. de l'Hopital.

Mais en même tems ces Géomètres ne prétendent point réaliser cette supposition, ni en établir la possibilité * M. de l'Hopital s'en explique nettement art. 102. par ces mots.

c

L'on

* Pour s'en convaincre il n'y a qu'à examiner le calcul qu'on fait d'après cette supposition pour trouver les asymptotes des lignes courbes. Ce calcul consiste à chercher d'abord des formules générales pour la position de toutes les tangentes de la courbe donnée, & à rejeter ensuite dans ces formules plusieurs termes, qui sont regardés comme nuls par rapport à d'autres termes dont la valeur devient par la supposition infiniment plus grande: d'où l'on voit que ce calcul n'est pas absolument rigoureux, & qu'il ne peut par conséquent donner un résultat exact, à moins qu'on ne regarde comme peu exacte la supposition sur laquelle on l'a établi, en sorte que l'erreur de l'hipotèse détruisse tout-à-fait celle qu'on a commis dans le calcul.

L'on voit que l'hyperbole & son asymptote étant prolongées s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini, ou l'on ne peut jamais arriver. C'est à dire que si l'hyperbole & l'asymptote étoient prolongées jusqu'à l'infini absolu, elles se toucheroient; mais comme cette condition est impossible, & qu'on ne peut jamais arriver à l'infini, il est de fait qu'elles ne peuvent jamais se rencontrer. C'est ce que M. de la Chapelle explique avec encore plus de netteté, & de précision dans son traité des

A parler exactement l'asymptote est une droite qui s'approche continuellement d'une courbe de manière que sa distance à la courbe puisse devenir moindre qu'aucune grandeur donnée, sans qu'elle soit jamais zéro absolu. Or cette condition rend fautive la supposition que l'asymptote soit une véritable tangente; mais on la redresse en suite dans le calcul, en faisant, pour ainsi dire, disparaître le point d'atouchement, en sorte que la tangente cesse d'être tangente, & devienne seulement la limite des tangentes, savoir la limite de la courbe même; ce qui est conforme à la nature de l'asymptote.

Il en est ici comme dans la méthode des infiniment petits, où le calcul redresse aussi de lui même les fausses hipotésés que l'on y fait. On imagine par exemple qu'une courbe soit un polygone d'une infinité de petit côtés, dont chacun étant prolongé devienne une tangente à la courbe. Cette supposition est réellement fautive; car le petit côté prolongé ne peut jamais être autre chose qu'une véritable secante: mais l'erreur est détruite par une autre erreur qu'on introduit dans le calcul en y négligeant comme nulles des quantités, qui selon la supposition ne sont qu'infiniment petites. C'est en quoi consiste, ce me semble, la Métaphysique du calcul des infiniment petits, tel que l'a donné M. Leibnitz. La méthode de M. Newton est au contraire tout à fait rigoureuse soit dans les suppositions, soit dans les procédés du calcul. Car il ne conçoit qu'une secante devienne tangente, que lorsque les deux points d'intersection viennent tomber l'un sur l'autre, & alors il rejette de ses formules toutes les quantités que cette condition rend entièrement nulles. Cette méthode exige absolument qu'on regarde comme évanouissantes, c'est à dire comme nulles, les quantités dont on cherche les premières, ou dernières raisons; & c'est ce qui rend souvent les démonstrations longues, & compliquées. La supposition des infiniment petits sert à abrégér, & à faciliter ces démonstrations: mais ce n'est qu'après avoir prouvé en général que l'erreur qu'elle fait naître est toujours corrigée par la manière dont on manie le calcul, qu'il est permis de regarder les infiniment petits comme des réalités, & de les employer comme tels dans la solution des problèmes.

NOTE DE M. DE LA GRANGE.

des sections coniques approuvé par l'Académie Roïale des sciences de Paris sur le témoignage de M. Cassini & D'Alembert. Après avoir établi (n. 89.) que les asymptotes de l'hyperbole prolongées à une très-grande distance, deviennent sensiblement tangentes à cette courbe, il ajoute „ si l'on objectoit que ceci contredit le num. 46., où „ l'on a démontré que les asymptotes de l'hyperbole pro- „ longées tant que l'on voudra, ne rencontreront jamais „ cette courbe, on observera que les asymptotes ne de- „ viennent tangentes, que dans le cas où elles seroient „ actuellement prolongées à l'infini; mais ce cas étant „ impossible, c'est comme si l'on disoit qu'après un très- „ grand prolongement; elles approcheront si fort d'être „ tangentes, que leur différence des tangentes réelles sera „ insensible, & non pas plus petite qu'aucune grandeur „ donnée. (*Il faut entendre qu'aucune grandeur donnée possible, car il est également vrai qu'il n'y a qu'une quantité infiniment petite, si elle pouvoit exister, qui soit plus petite qu'aucune grandeur donnée possible; & que quelque petite que soit une grandeur actuellement donnée, on en peut toujours trouver une plus petite, qui dès lors deviendra donnée, & ainsi à l'infini. Ce qui fait disparaître la contradiction apparente de ces différentes expressions*). Car ceci ne pourroit avoir lieu „ que dans l'infini, c'est à dire qu'au fond il est im- „ possible qu'il ait lieu. Ainsi, quand pour démontrer „ l'égalité de deux grandeurs, on se sert de ce principe, „ que deux quantités doivent nécessairement être égales, si „ leur différence est plus petite qu'aucune grandeur donnée, „ il faut bien distinguer si la limite dont les deux quanti- „ tés approchent continuellement est dans le fini, où dans „ l'infini; dans le premier cas il y aura égalité, parce „ qu'on démontrera l'impossibilité d'assigner aucune diffé- „ rence; mais dans le second cas, il en ira autrement, „ vû que la limite étant supposée à une distance infinie,

„ c'est comme s'il n'y avoit point de limite; donc le
 „ terme de comparaison manquant, le principe n'a plus
 „ lieu, & se fonder dessus est donner dans un paralogisme
 „ très-certain, qui conduiroit à cette contradiction mani-
 „ feste, *que les asymptotes de l'hyperbole ne peuvent jamais*
 „ *rencontrer cette courbe, & que cependant elles la rencon-*
 „ *trent.* J'ai insisté la dessus, conclût M. de la Chapelle,
 „ en faveur des commençants, qui pourroient à cette oc-
 „ casion suspecter le principe de l'égalité de deux gran-
 „ deurs, dont la différence est démontrée plus petite qu'au-
 „ cune grandeur donnée; d'autant plus que je ne connois
 „ aucun Géomètre qui ait fait attention à la nécessité de
 „ sauver les apparences de la contradiction alléguée. Telle
 est aussi, comme on l'a vu, l'idée qu'en donne M. D'Alembert
 lui même au mot asymptote de l'Enciclop. & Volf ne
 s'énonce pas autrement sur le même sujet dans ses éléments
 de Mathématique.

Il est d'ailleurs bien aisé de faire voir qu'en supposant
 comme réel ou possible ce prolongement de l'hyperbole à
 l'infini absolu, où l'asymptote devient tangente, on ne
 peut éviter de tomber en des contradictions manifestes.

1. L'asymptote, comme le dit M. de l'Hopital, ne de-
 vient tangente, qu'à l'extrémité de la courbe. Donc pour
 vérifier cette supposition, il faut allier ces deux choses,
 que l'hyperbole soit actuellement infinie, & que pourtant
 elle ait une extrémité. Or l'idée d'une extrémité quel-
 conque ne détruit-elle pas l'idée de l'infinité? Mais ce
 n'est encore ici qu'un argument métaphysique.

2. Il est démontré que la tangente de l'hyperbole est
 coupée en deux parties égales au point du contact. Donc
 l'asymptote devenue tangente infinie devroit aussi être par-
 tagée au point du contact en deux parties égales. Car
 cette propriété subsistant immuablement dans tout le cours
 indéfini de l'hyperbole, il n'est pas possible qu'elle man-
 que

que tout à coup. Par conséquent si on veut supposer que l'asymptote soit tangente à l'extrémité de l'hyperbole infiniment prolongée, il faut supposer aussi que depuis cette extrémité où l'hyperbole n'arrive qu'après un cours infini, l'asymptote s'étend encore infiniment au delà, afin que la partie qui est au delà du contact, soit égale à celle qui est en deçà. Qu'on ne s'imagine pas que je veuille ici me récrier sur l'idée de l'infini double d'un autre infini. Ce n'est pas là ce qui fait la difficulté. Elle consiste en ce que d'un côté l'asymptote ne peut toucher l'hyperbole qu'à son extrémité, ainsi que le dit M. de l'Hopital, lorsque l'hyperbole a pris tous ses accroissemens finis possibles; & qu'au contraire l'asymptote loin d'être à son extrémité, ne se trouve qu'à la moitié de son cours. Or cela paroît être contre la nature de l'hyperbole. Il suffit de considérer cette courbe dans le cone, pour apercevoir qu'elle doit s'étendre autant que l'asymptote.

3. Pour que l'asymptote touche l'hyperbole, il faut supposer l'hyperbole entre deux extrémités; l'une est le sommet dont elle part; l'autre le point du contact au delà duquel il n'est pas possible que la courbe puisse être continuée; car si elle étoit continuée au delà de ce point, elle devoit couper l'asymptote contre la supposition. On n'évite point cette difficulté en disant avec Fontenelle qu'une quantité infinie ne peut plus augmenter par des quantités finies, mais qu'elle peut être encore augmentée par des quantités infinies. Car en supposant une portion infinie de courbe ajoutée à cette extrémité du contact, il ne seroit pas moins vrai de dire que cette courbe couperoit la tangente au point du contact. Ce qui répugne.

4. Il est démontré, (art. 95., de l'Hopital fig. 40.) que si l'on mène par un point quelconque N de l'hyperbole, une ligne droite Ll terminée par les asymptotes, & qui la rencontre en un autre point n , les parties LN , ln
pri-

prises entre les points de l'hyperbole, & la rencontre des asymptotes seront égales entr'elles. Maintenant que du point N pris à volonté près du sommet de l'hyperbole, on tire une ligne Ll qui aille aboutir à l'extrémité, où se fait le contact de l'asymptote infinie, on devra encore trouver ln égale à LN entre la courbe & l'asymptote. Ce qui répugne à l'idée du contact.

Il paroît qu'on ne peut éviter cette difficulté qu'en disant qu'à cette extrémité la partie ln coïncide soit avec la courbe, soit avec l'asymptote; mais alors cette partie ln étant toute appliquée & sur la courbe & sur l'asymptote, il s'en suivroit que le contact ne se feroit plus en un point, mais dans tout la longueur de la partie ln , ce qui n'est pas moins absurde. Je ne crois pas qu'une preuve de cette nature s'éloigne beaucoup d'une rigoureuse démonstration.

Cette partie ln , qui déborde toujours doit faire le même effet que dans la conchoïde, & empêcher irrevocablement que l'asymptote ne vienne jamais se joindre à l'hyperbole.

CINQUIÈME PREUVE.

Tirée des progressions croissantes infinies.

J'Ai proposé quelques idées sur ce sujet dans mon essai pag. 18. & suiv. Voici quelques autres réflexions que je soumets également au jugement impartial des lecteurs éclairés.

M. l'Abbé de la Caille dans ses leçons de Mathématique si justement estimées, traitant des propriétés de la grandeur considérée dans l'infini, établit d'abord que la grandeur est divisible à l'infini; il le démontre par l'essence même de la grandeur qui est d'être susceptible de plus
&

& de moins, & il ajoute : *par exemple la suite naturelle des nombres 1. 2. 3. 4. croit évidemment à l'infini ; car à quelque grand nombre qu'on conçoive élevé un terme de cette suite, on ne voit pas pour cela que l'on soit plus près de la fin, ce qui ne peut convenir à une suite dont le nombre des termes seroit fini.*

L'expression est très-juste; mais un esprit peu juste pourroit en abuser, & s'imaginer que la suite naturelle des nombres ne pourroit croître à l'infini, s'il n'existoit déjà comme une infinité actuelle de nombres, dont l'esprit pût tirer comme d'un réservoir immense tous les nombres qu'il ajoute successivement à la suite naturelle. Cette idée, dis-je, ne seroit pas assés juste. Pour former la suite naturelle & pour l'augmenter à l'infini, l'esprit n'a pas besoin d'emprunter des nombres tous faits, comme on tire d'un coffre fort les monnoyes qu'on veut dépenser. L'esprit forme la suite naturelle par la puissance qu'il a de répéter ses idées, & d'ajouter ainsi unité à unité. Et comme rien ne limite l'exercice successif de cette puissance, il est clair que la suite naturelle des nombres, peut croître à l'infini par l'addition d'unité à unité sans être jamais bornée.

Cette operation est analogue à celle, par laquelle l'esprit peut diviser à l'infini une portion de quantité continuë. A mesure que l'esprit pousse plus loin la division, le nombre des parties se multiplie; & comme cette division peut aller à l'infini, les nombres peuvent croître à l'infini. Telle est à peu près l'idée que M. l'Abbé de la Caille donne lui même de la formation des nombres: une quantité, dit il, exprimée par des nombres, est une quantité qu'on a conçue partagée en plusieurs parties égales, dont chacune de ces parties considérée seule s'appelle l'unité : idée qui ne s'éloigne pas de la notion que Newton donne du nombre en le faisant dépendre de la manière dont une quantité est contenuë dans un autre quantité. Telle étoit
aussi

aussi l'idée des anciens, comme je l'ai montré dans ma dissertation sur la notion & la divisibilité de l'étendue géométrique pour servir de réponse à la lettre que M. Dupuy m'a fait l'honneur de m'adresser dans le Mercure de Paris. Les idées que je propose dans ce mémoire ne sont qu'une suite des principes que j'ai établi dans cet écrit, & forment un seul corps.

Cette idée de la formation de la suite naturelle, idée claire, & simple, parfaitement conforme à la notion qu'en donnent tous les Géomètres, semble prouver invinciblement que la suite naturelle ne peut jamais parvenir à l'infini absolu.

Cette suite commence évidemment par des termes finis 1. 2. 3. &c. donc si elle peut parvenir à l'infini absolu, il faut qu'en un point, ou terme, quelconque de cette suite, on passe du fini à l'infini; car s'il n'y avoit aucun terme possible où la suite passât du fini à l'infini, il est évident qu'elle demeureroit toujours finie.

Or je dis que ce passage est impossible. 1. Si en augmentant les nombres finis, on pouvoit parvenir à un nombre infini, il faudroit que par cette augmentation successive les nombres finis s'approchassent de plus en plus de l'infini. Car il est évident qu'une quantité ne peut atteindre un terme quelconque, si elle n'approche peu à peu de ce terme. Or selon la remarque de M. l'Abbé de la Caille à quelque grand nombre qu'on conçoive élevé un terme de la suite naturelle, on ne voit pas que l'on soit plus près de la fin. Donc quelque augmentation que l'on suppose dans les termes finis, par lesquels commence la suite naturelle, on ne fera pas plus avancé vers le point du passage du fini à l'infini, qu'on ne l'étoit au commencement même de la suite. Donc la suite est toujours également éloignée de ce point. Donc il est impossible qu'elle y arrive jamais.

2. Reprenons le même raisonnement. Comme la suite naturelle commence par des termes finis, si elle peut arriver à l'infini absolu, il faut de toute nécessité que des nombres finis on passe enfin à un nombre infini, c'est à dire que dans cette suite il y ait un terme quelconque fini, lequel soit suivi d'un nombre infini. Qu'on nomme x ce nombre fini quelconque: par la propriété de la suite naturelle le nombre suivant sera $x + 1$ or x étant fini & $x + 1$ ayant avec ce nombre un rapport fini, ne sera point encore infini, comme on le suppose. Et comme il n'est aucun terme fini possible dans la suite naturelle, auquel ce raisonnement ne puisse être appliqué, il n'y a donc aucun terme fini possible, qui ne soit suivi d'un autre terme fini $x + 1$. Il est donc impossible qu'il s'y trouve aucun terme infini. Donc la suite naturelle ne peut jamais passer du fini à l'infini absolu. Ce raisonnement ne diffère pas pour le fond de quelques autres que j'ai déjà proposé; mais dans la matière dont il s'agit, il n'est peut-être pas inutile de présenter les mêmes idées sous différentes faces.

3. De là il suit que certaines formules concernant les loix de la progression qui sont très-justes dans les nombres finis, semblent manquer de l'exactitude nécessaire, lorsqu'on veut les appliquer à des nombres absolument infinis.

On lit dans des éléments d'ailleurs très-estimés ces propositions avec leurs démonstrations.

La somme des unités prise une infinité de fois est un infini du premier ordre, où est $= \infty$.

Dem. l'unité prise une infinité de fois est une quantité finie qui a reçu tous ses accroissements finis possibles. Donc &c.

La somme des termes de la progression infinie des nombres naturels .1. 2. 3. 4. . . . ∞ est un infini du second ordre,

& est $= \frac{\infty^2}{2}$.

d

Dem.

Dem. cette progression étant infinie, son dernier terme est ∞ , le nombre des termes qui précèdent le dernier est $\infty - 1$. Si l'on appelle S la somme des termes, celle des termes qui précèdent le dernier, sera par conséquent $= S - \infty$ &c.

Arrêtons nous ici, & examinons l'application que l'on fait des loix de la progression à des suites supposées absolument infinies. D'abord on y reconnoit formellement un dernier terme qui est $= \infty$; par conséquent tous les termes qui le précèdent ne peuvent être que des nombres finis; car avant que d'arriver à ce dernier terme la suite n'a pas encore reçu tous ses accroissemens finis possibles. Elle est donc encore dans le genre des quantités finies, & ce n'est qu'au moment où elle reçoit tous ses accroissemens finis possibles qu'elle devient infinie. On établit en suite que le nombre des termes qui précèdent le dernier est $\infty - 1$.

Cette manière d'exprimer les termes d'une suite est très-juste, pendant qu'il ne s'agit que de nombres finis. Il est clair que si l'on fait une progression qui ait un dernier terme $= 10$, le nombre des termes qui précèdent, fera $10 - 1 = 9$ mais cette formule ne peut avoir lieu dans une progression absolument infinie.

On a vu par l'énoncé même des propositions qu'on vient de rapporter, que cette progression a un dernier terme infini, & que le nombre des termes qui précèdent le dernier n'ayant pas encore reçu tous les accroissemens finis possibles, ne peut être infini. Je dis donc que dans cette hipotèse, on ne peut exprimer le nombre des termes qui précèdent le dernier par la formule $\infty - 1$. Car ou cette formule exprime un nombre infini, ou elle n'exprime qu'un nombre fini. Si elle exprime un nombre absolument infini, donc elle n'est pas applicable à un nombre de termes qui n'est que fini. Si elle n'exprime qu'un nombre fini, donc un nombre infini devient fini par

la

la soustraction d'une seule unité, & réciproquement un nombre fini devient infini par l'addition d'une seule unité, ce qui répugne.

Dans la progression finie dont le dernier terme est 10, la formule $10 - 1$ exprime réellement le nombre des termes qui précèdent 10, parceque $10 - 1$ n'est pas 10, mais qu'il devient 10 par l'addition de l'unité. Donc pour conserver l'analogie, si la formule $\infty - 1$ doit exprimer le nombre des termes qui précèdent ∞ , il faut que $\infty - 1$ ne soit pas ∞ , comme $10 - 1$ n'est pas 10, & que cette quantité $\infty - 1$ qui n'est pas infinie devienne ∞ par la seule addition de l'unité comme $10 - 1$ devient 10 par l'addition de l'unité. Mais c'est ce qui répugne. Donc &c.

M. l'Abbé Deïdié dit qu'on peut évaluer les progressions infinies qui vont en augmentant de la même façon que les décroissantes, & qu'alors on trouve des valeurs infinies dont la connoissance n'est qu'une belle speculation. Mais il ne dévoile pas le défaut des suppositions qui en rendroient les résultats contradictoires, ni de quelle manière on doit corriger ces suppositions.

Il ne suit pas delà cependant qu'on doive rejeter les calculs par lesquels on parvient à déterminer les rapports finis qu'ont entr'elles les sommes infinies des suites infinies. Tel est le calcul par lequel on trouve que *la somme d'une infinité de quarrés de termes consécutifs est le $\frac{2}{3}$ du produit du dernier quarré multiplié par leur nombre: que la somme d'une infinité de cubes consécutifs est le $\frac{1}{4}$ du produit du dernier cube par leur nombre &c.* Ces calculs ont leur usage, & il suffit d'en développer la Théorie avec netteté pour s'appercevoir qu'ils ne supposent rien qui ne soit conforme aux idées les plus claires, & les plus simples que nous avons de la grandeur.

Tout nombre peut être la racine de quelque puissance que ce soit. 2 est racine quarrée de 4 & il est aussi racine cubique de 8. Cent est racine quarrée de dix mille, & il est racine cubique d'un million. Plus la racine est grande, plus aussi la puissance supérieure est grande par rapport à l'inférieure; ainsi le quarrée de 2. est la $\frac{1}{2}$ du cube 8, au lieu que dix mille, quarré de cent n'est que la $\frac{1}{100}$ partie d'un million qui en est le cube. Qu'on augmente la racine, on parviendra à un nombre tel, que son quarré ne fera que la cent millionième de la cent millionième partie de son cube. Et comme cette progression n'a aucune borne, la fraction qui exprimera le rapport du quarré au cube pourra toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée quelque petite qu'elle soit.

La formule pour sommer tant de quarrés des termes consecutifs qu'on voudra est celle-ci $f^2 = \frac{1}{3} \omega^3 + \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{6} \omega - \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{6} a$ où a signifie le premier, & ω un dernier terme. Or a , & ω étant de termes déterminés la formule est d'une exactitude rigoureuse. Quand on fait la suite infinie, on substitue ∞ signe de l'infini à la place du dernier terme exprimé par ω , & l'on a $f^2 = \frac{1}{3} \infty^3 + \frac{1}{2} \infty$ &c. & alors la formule se réduit à $f = \frac{1}{3} \infty^3$ à cause que tous les autres termes sont considérés comme infiniment petits à l'égard de $\frac{1}{3} \infty^3$.

D'abord il est clair que la formule ainsi réduite n'est pas d'une exactitude tout à fait rigoureuse puisqu'on néglige des termes positifs portés par le calcul. Il est vrai que ces termes peuvent être considérés comme infiniment petits à l'égard du premier, mais il ne sont pas absolument

ment

ment nuls, ce sont des quantités réelles & positives & non zéro absolu.

Cela supposé pour conserver à ces formules toute l'exactitude dont elles sont susceptibles, il n'est point nécessaire d'admettre des cubes, ou des quarrés absolument infinis représentés par ∞^3 ∞^2 . Car enfin entend-on ce que l'on dit, quand on nomme un dernier cube, un dernier quarré, & qu'on nomme infini ce dernier cube, ce dernier quarré, comme s'il pouvoit y avoir un dernier terme dans une progression, qui ne peut avoir de fin?

Il faut donc exprimer par ce signe ∞ non une quantité absolument infinie, mais une quantité indéterminée, conçue comme surpassant en grandeur quelque quantité finie donnée que ce soit, quelque grande qu'on l'imagine. Puis que la progression des nombres naturels n'a certainement point de fin, il est visible qu'après avoir assigné un terme fini quelque grand qu'il soit, on pourra toujours trouver un terme plus grand à l'infini, il y a donc des quantités indéterminées conçues comme plus grandes que quelque quantité finie qu'on puisse déterminer. Maintenant qu'on exprime cette sorte de quantités par ∞ , qu'on en fasse le quarré ∞^2 , & le cube ∞^3 , cette expression fera connoître que quelque petite que soit une fraction qui exprime le rapport d'un quarré à un cube, on pourra toujours trouver entre ces quarrés & ces cubes indéterminés un rapport exprimable par une fraction toujours plus petite à l'infini.

On voit par cette raison pourquoi on peut, & j'ose même dire qu'il faut retrancher de la formule les termes qui suivent le premier. Si ∞^3 & ∞^2 signifioient un dernier cube, & un dernier quarré au delà desquels il ne pût plus y avoir ni de cubes, ni de quarrés, la fraction

$$\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty} \text{ qui exprimeroit le rapport de ce dernier quarré}$$

à ce

à ce dernier cube ne feroit plus susceptible de diminution. On pourroit bien ainsi négliger dans la formule les termes suivans $\frac{1}{2} \infty^2$ &c. parceque ce seroient des quantités infiniment petites à l'égard du premier $\frac{1}{2} \infty^3$, cependant ces termes n'étant pas absolument nuls, la formule ne seroit pas rigoureusement exacte.

Mais si ∞^3 & ∞^2 représentent non un dernier cube, ni un dernier carré absolument infinis, mais plutôt une suite indéterminée de cubes & de carrés, qu'on peut toujours supposer en vertu de leur indéfinie progression plus grands, qu'aucun cube, & qu'aucun carré donnés, quelques grands qu'on les suppose, alors on verra clairement pourquoi dans la formule il faut retrancher les termes, qui suivent le premier. Ces termes subsistants dans la formule dénotent toujours un rapport quelconque entre le carré, & le cube, rapport exprimable par une fraction quelque petite qu'elle soit. Cette fraction se trouveroit ainsi fixée par la formule même. Or ∞^3 & ∞^2 exprimant une suite de cubes, & de carrés indéterminés toujours susceptibles d'une nouvelle augmentation au delà de quelque terme qu'on puisse imaginer, la fraction qui exprime leur rapport ne peut jamais être fixée, mais quelque petite qu'on la suppose, on peut toujours la prendre moindre à l'infini. Or on ne peut mieux exprimer le cours de cette diminution possible au delà de tout terme donné, qu'en retranchant les termes, qui en borneroient le décroissement successif, & c'est ce que l'on fait en quelque sorte en retranchant de la formule ci dessus les termes qui suivent le premier.

Ainsi l'équation de la formule réduite $f^2 = \frac{1}{2} \infty^3$ ne doit pas être regardée comme une égalité entre deux termes fixes, & permanents de part, & d'autre, tels que seroient deux termes finis, & déterminés, mais plutôt comme la fluxion de deux termes considérés dans un cours indéfini d'au-

d'augmentation, où leur disproportion peut toujours être trouvée moindre qu'aucune quantité donnée.

La notion de ce signe ∞ pris non pour l'infini absolu considéré dans un état fixe, & permanent, mais pour une grandeur indéterminée surpassant tout ce que l'imagination peut embrasser, & conçue comme pouvant s'étendre encore indéfiniment au delà, paroît très-conforme à la manière dont les suites infinies se présentent à notre esprit. Tachons d'en donner une idée claire, en exposant ce qui se passe en nous mêmes, lorsque nous nous attachons à considérer une progression infinie : nous trouverons qu'à cet égard il en est à peu près des opérations de l'esprit comme de celles des sens.

Lorsque du haut d'une colline on jette les yeux sur une vaste plaine dont la vue ne peut embrasser toute l'étendue, on n'a pas de peine à distinguer les premiers objets qui se présentent & à en reconnoître le nombre & la situation. Mais à mesure qu'ils s'éloignent, on commence à les confondre, nous les perdons de vue, sans pouvoir discerner quel est le dernier dans cette confuse multiplicité, qui se dérobe à nos regards : nous cessons de voir, sans que rien paroisse terminé, & ces objets qui nous fuient, ne nous échappent qu'en nous paroissant s'étendre & se perdre à un éloignement, où notre vue s'égaré, & se confond.

C'est à peu près ce qui nous arrive quand nous entreprenons de suivre des yeux de l'esprit une progression infinie. Nous n'avons pas de peine à distinguer nettement les termes représentés par des signes, qui nous sont familiers, & dont nous appercevons tout d'un coup la liaison, & les rapports. Mais aussitôt que l'usage de ces signes commence à devenir trop compliqué; nous n'apercevons plus que d'une vue confuse cette suite de termes; nous les reculons autant que nos conceptions peuvent s'étendre : &

en

en les considérant de ce lointain, nous les voyons se dérober à notre vue, sans que nous puissions fixer aucun dernier terme, qui borne la suite que nous envisageons; nous n'apercevons plus qu'une multiplicité de termes qui faute de signes distincts se confondent à nos yeux, & nous sentons seulement que rien ne peut arrêter leur progression indéfinie.

C'est donc une illusion d'imaginer dans une suite infinie un dernier terme quelconque, comme un point fixe placé à un éloignement infini, dont l'esprit pourroit franchir l'intervalle par des opérations multipliées à l'infini. Ce prétendu point fixe n'est au contraire qu'un point mobile, qui recule à mesure que l'esprit avance, & qui se trouve toujours à un égal éloignement, semblable à ces points lumineux que les rayons du soleil réfléchis de dessus la glace d'un miroir vont tracer sur les objets éloignés: envain celui qui tient le miroir précipiteroit ses pas pour en approcher! Autant qu'il avance, d'autant il les recule.

Maintenant il est bien aisé de faire voir la contradiction où l'on s'engage en supposant ∞^3 & ∞^2 comme le dernier cube, & le dernier carré de la suite naturelle poussée à l'infini. S'ils sont les derniers, on ne peut donc en supposer des plus grands, c'est à dire qu'il ne peut y avoir de plus grand cube que le cube infini représenté par ∞^3 ni de plus grand carrés que le carré infini représenté par ∞^2 . Mais si l'on peut tirer la racine cubique du terme infini ∞^3 , on peut aussi en tirer la racine carrée, & quand même ∞^3 ne seroit pas un carré parfait, il est évident que la racine du carré plus approchant, doit être infiniment plus grande que $\sqrt{\infty^2}$, donc le carré qui résultera de la racine $\sqrt{\infty^3}$ sera infiniment plus grand que ∞^2 , donc entre ces deux termes, il y aura encore une infinité de carrés, par consé-

féquent la fuite naturelle pourra encore fournir une infinité de quarrés après ∞^2 . Donc ce n'est pas le dernier de cette fuite, contre la supposition.

Voici enfin une preuve que je crois démonstrative contre la supposition de la fuite naturelle poussée à l'infini absolu. Les Auteurs expriment cette supposition en ces termes, savoir que la fuite naturelle aiant pris tous ses accroissemens finis possibles devient infinie, & qu'alors son dernier terme est ∞ . Je dis que cette supposition renverse des propositions incontestables touchant les progressions arithmétiques, entre lesquelles est la fuite naturelle des nombres. Il est démontré que dans une progression arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens. Dans la supposition que nous combattons ici la somme des extrêmes est $1 + \infty$ nommant donc n un terme moyen, cette somme sera égale à $n + n + 1$, ou si l'on veut $1 + \infty = 2n$. Donc $n = \frac{1 + \infty}{2}$

$= \frac{\infty}{2}$. Ce terme moyen sera donc infini, mais la fuite naturelle par la supposition, n'est infinie que quand elle a reçu tous ses accroissemens finis possibles; & elle ne peut avoir reçu tous ses accroissemens finis possibles, quand elle n'est encore qu'à la moitié de son cours. Donc &c.

Bornons maintenant la fuite naturelle à ce terme trouvé $\frac{\infty}{2}$. La somme des extrêmes $1 + \frac{\infty}{2}$ sera égale à $2x$ (x signifiant le nouveau terme moyen) & par conséquent $x = \frac{\infty}{4}$ qui sera encore un terme infini trouvé à la quatrième partie du cours de la fuite naturelle. Qu'on revienne toujours en arrière, & en remontant vers l'unité de la même façon; on trouvera une infinité de termes infinis pour former les termes décroissans de la fuite naturelle

relle depuis l'infini jusqu' à l'unité: serie bien différente de celle par laquelle de l'unité on s'élève vers l'infini. Ce ne sera même qu'après une infinité de termes, & qu'après avoir épuisé les fractions $\frac{\infty}{4} \frac{\infty}{8}$ &c. toujours en se rapprochant de l'unité, qu'on parviendra à la fraction $\frac{\infty}{\infty} = 1$. C'est à dire qu'en redescendant de l'infini absolu par tous les degrés de la suite naturelle jusqu'à l'unité, tous les termes se trouveroient infinis à l'exception de l'unité seule.

Il me paroît que cette considération suffit pour faire sentir que le fini, & l'infini dans la grandeur sont, pour ainsi dire, des quantités hétérogènes, qu'il est impossible de jamais rapprocher, en sorte que de l'une on puisse passer à l'autre.

SIXIÈME PREUVE

Tirée des progressions décroissantes à l'infini.

Soit la ligne (fig. 4.) $AB = 1$. Si on coupe cette ligne en deux parties égales au point C , & qu'on partage de même la moitié CB au point D , & ainsi de suite, on aura une progression géométriquement décroissante en raison sousdouble, formée par la suite des divisions, & sousdivisions de la ligne AB , progression qu'on exprime de cette sorte $1 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ &c.

Ainsi dire que cette progression décroissante peut aller à l'infini, ce n'est dire autre chose, si non que la division de la ligne AB en parties sous doubles peut aller à l'infini.

Mais comme une telle division ne peut jamais être actuellement effectuée en entier, la progression qui en résulte

sulte ne peut non plus jamais parvenir à un dernier terme qui la termine. C'est ce que Tacquet démontre rigoureusement dans ses remarques sur la XI proposition du 6. livre d'Euclide.

Lors donc que pour évaluer la somme d'une progression décroissante à l'infini, on écrit $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} \dots 0$; ce n'est pas que le vuide marqué par les points tracés entre $\frac{1}{8}$ par exemple & zéro, doive être conçu comme rempli par une suite actuellement infinie de termes distincts, qui se succèdent l'un à l'autre. Si cela étoit, il faudroit, qu'entre zéro, & le terme qui le précéderoit immédiatement il y eut le même rapport qui se trouve entre le conséquent $\frac{1}{8}$ & son antécédent $\frac{1}{4}$. Or il est visiblement absurde de supposer un rapport sous double entre zéro, & une quantité positive quelconque.

Ainsi par une progression décroissante infinie il faut entendre une suite dont le cours ne peut jamais être borné, mais non une suite, qui après un cours actuellement infini, se trouve complète & composée d'une infinité de termes placés successivement l'un après l'autre, & rangés par ordre depuis le premier jusqu'à zéro. Ces deux idées sont très-différentes, & il importe extrêmement de ne pas les confondre.

On pourroit objecter que le calcul qu'on emploie pour déterminer la somme d'une progression décroissante infinie, semble supposer une suite de termes distincts, qui aillent en diminuant jusqu'à zéro. Telle est dans le cas présent la formule $1 - \frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: 1 - 0 : S$. ou zéro est employé de la même manière que le seroit un nombre positif quelconque, s'il s'agissoit d'une progression finie.

On citera même un Géomètre, qui après avoir reconnu qu'une progression décroissante ne peut avoir aucune borne, non plus que la divisibilité de la grandeur, semble

pourtant reconnoître la nécessité d'assigner un dernier terme à la progression décroissante infinie, pour en évaluer la somme, en disant que comme le premier terme moins le second, est au second; ainsi le premier terme moins le dernier, *qui est presque égal à zéro* est à la somme de ceux qui le suivent.

Mais la justesse de ce calcul ne dépend aucunement de ces suppositions peu exactes. Les Géomètres qui ont suivi la méthode rigoureuse des anciens, en ont établi les principes à un langage qui a toujours besoin d'être ramené à la précision. C'est ce qu'a fait Tacquet Arith. l. 5. c. 4.

Qu'on me permette de proposer en peu de mots quelques idées relatives à ce sujet. Quoique la ligne AB puisse être divisée à l'infini par une suite de divisions en parties fousdoubles, il est clair cependant que cette suite de divisions a une limite qu'elle ne peut passer, & cette limite est l'extrémité même de la ligne AB . Ce point B sera donc aussi la limite de la progression qui résulte de cette suite de divisions.

D'où il suit que quand on supposeroit, que la ligne AB eut pu recevoir toutes ses divisions possibles, ce pendant l'assemblage de cette infinité de parties ne pourroit former que cette même ligne AB ; & les termes de la progression n'étant autres que ces mêmes parties qui résultent de la division de la ligne AB , il s'en suit que la somme de tous ces termes, quand on les supposeroit entièrement développés, ne pourroient non plus former que cette même ligne AB .

L'évaluation d'une progression décroissante infinie, consiste à trouver l'espace, ou le chemin qu'elle devoit parcourir pour atteindre à la limite où elle tend, & où elle arriveroit, si son cours pouvoit jamais être terminé; ou ce qui revient au même à trouver la quantité finie, qui

qui par une suite de divisions, & de sousdivisions en une raison donnée fournit & détermine à l'infini les termes de cette progression.

Or pour trouver cette quantité par le calcul, il n'est point du tout nécessaire de supposer que la progression ait pris actuellement tous les termes dont elle est susceptible: il suffit de connoître le rapport des deux premiers termes, rapport qui devant être continué dans la suite de ses termes devroit aboutir, quand on pourroit la développer entièrement.

Dans une progression finie comme le premier terme, moins le second est au second, ainsi le premier moins le dernier est à la somme de ceux qui le suivent. Dans une progression infinie il n'y a point réellement de dernier terme. On dira donc, comme le premier terme moins le second est au second, ainsi le premier est à la suite de tous ceux qui le suivent: c'est à dire dans l'exemple précédent comme $A B - C B : C B :: A B$, à la somme de tous les termes qui le suivent. $A B$ représente toute la suite des antécédents, parceque quand on supposeroit cette suite entièrement développée, elle ne pourroit s'étendre au delà du point B qui lui sert de limite, & tous ses termes ne pourroient former que cette même ligne $A B$ dont l'étendue est donnée. Or $A B$ considéré comme premier terme de la suite doit avoir à la somme de tous ceux qui le suivent le même rapport qu'il y a entre $A B - C B$ & $C B$. Ce rapport est connu, le premier terme est donné; la quantité qui résulteroit de cette suite infinie de conséquents sera donc connue, sans qu'il faille supposer qu'elle ait jamais pû recevoir tous ses termes possibles.

La position d'un dernier terme quelconque quoique supposé presque égal à zéro, nuirait à la justesse du calcul. Soit $x B$ (fig 5.) ce dernier terme. Donc $A B - x B = A x$

re-

représentera toute la suite des termes suivans. Donc elle seroit bornée au point x ; ce qui est contre la nature de cette progression qui doit passer le point x , & tendre à l'infini vers la limite B .

Tachons d'éclaircir les difficultés qui peuvent rester par l'application de cette Théorie à quelque exemple connu, telle qu'est la solution du fameux problème de Zénon. Quoiqu'il soit dit qu'Achille aille dix fois plus vite que la tortue, Achille ne pourra l'atteindre: car tandis qu'Achille parcourra cette lieüe, la tortue fera la dixième de la seconde lieüe, & tandis qu'Achille fera la dixième de la seconde lieüe, la tortue fera la dixième de cette dixième; & ainsi à l'infini.

Il y a deux manières de résoudre cette difficulté, l'une en tirant du rapport des vitesses des deux mobiles une équation, qui fasse connoître le terme où Achille doit atteindre la tortue. Faisant donc une lieüe = 1 & nommant x le chemin que la tortue aura parcouru lorsqu'Achille la rencontrera, on aura $1 + x$ pour exprimer le chemin de la tortue, & comme Achille va dix fois plus vite, $10x$ exprimera le chemin parcouru en même tems par Achille, & par conséquent $10x = 1 + x$, & en réduisant $x = \frac{1}{9}$ de lieüe; ce qui fait connoître qu'au bout d'une neuvième de lieüe, Achille atteindra la tortue. Ce point sera par conséquent la limite, où la distance des deux mobiles allant avec les vitesses données doit s'évanouir, & où l'un doit par conséquent atteindre l'autre.

La seconde manière consiste à déterminer la somme de la progression décroissante infinie $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$, pour voir le chemin que feroit la tortue en supposant qu'elle parcourut l'une après l'autre toutes ces dixièmes de dixième à l'infini, & qu'elle seroit par conséquent la limite de l'espace, que toutes ces dixièmes devroient former par leur

reunion

réunion, en supposant que cet espace pût être divisé par les pas de la tortue en une infinité de parties sous décuples. On fait donc cette proportion : comme le premier terme moins le second, est au second ; ainsi le premier terme moins le dernier est à la somme de ceux qui le suivent. Mais une progression infinie ne devant point avoir de dernier terme, & sa distance de la limite où elle tend pouvant diminuer au delà de quelque quantité que ce soit, quelque petite qu'on la suppose, on dira $1 - \frac{1}{10} : \frac{1}{10} :: 1 - 0$, ou simplement $1 : f$. d'où l'on tire $9 : 1 :: 1 : \frac{1}{9}$. Ce qui redonne précisément l'espace x trouvé par la première méthode. Cette formule nous apprend que comme une lieue, moins un dixième de lieue, est à un dixième de lieue, ainsi une lieue est à une portion de lieue, telle qu'on pourroit la diviser à l'infini par une suite de divisions, & de divisions en parties sous décuples ; en sorte que quand on pourroit développer actuellement toutes ses parties, & les réunir de nouveau, elles ne formeroient que cette même portion d'espace ou cette neuvième de lieue.

L'artifice consiste donc moins à trouver la somme d'une progression par l'addition d'une infinité de termes, qu'à trouver d'un seul coup par des rapports connus la quantité finie qui est susceptible d'une telle progression.

C'est de quoi l'on se convaincra de plus en plus en lisant les judicieuses réflexions, que l'Abbé Deidié ajoute à la solution du problème de Zénon. „ L'argument de „ Zénon, dit-il, ne pouvoit conclure, qu'en supposant de „ deux choses l'une, ou qu'Achille devoit employer une „ infinité de pas pour faire la première lieue auquel cas „ il ne seroit jamais venu à bout de la faire ; ou que les „ pas qu'il faisoit en parcourant le $\frac{1}{10}$ du dixième, de „ venoient encore dix fois plus petits, & ainsi de suite, „ auquel cas il est sur qu'il n'auroit jamais pû attein-
 „ dre

„ dre la tortüe mais comme l'une & l'autre de
 „ ces suppositions font aussi ridicules qu'impossibles, n'y
 „ aiant point d'homme qui soit obligé de faire une infi-
 „ nité de pas pour faire une lieüe, ni dont les pas puis-
 „ sent devenir de dix fois en dix fois plus petits à l'in-
 „ fini, il s'en suit que le raisonnement de Zénon n'est
 „ qu'un sophisme &c. Mais me dirat-on peut-être, vous
 „ supposés que la tortüe puisse faire $\frac{1}{2}$ de lieüe, ce qui
 „ n'est pas possible, puisque pour faire ce $\frac{1}{2}$ il faut par-
 „ courir une progression infinie $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ &c., autre sophisme
 „ aussi puerile que le premier. Si les pas de la tortüe al-
 „ loient en diminuant à chaque $\frac{1}{10}$ de la même façon que
 „ ces $\frac{1}{10}$, à la bonne heure, mais comme cette supposi-
 „ tion est chimérique, il est tout aussi facile &c.

Ainsi tant s'en faut que la détermination de la somme d'une progression décroissante infinie, ou ce qui revient au même de l'espace que cette progression devrait parcourir en la continuant à l'infini, tant s'en faut, dis-je, que cette détermination dépende du développement actuel de tous les termes dont elle est susceptible, qu'au contraire on n'y arriveroit jamais, s'il falloit y parvenir par la voye de ce développement.

La Théorie des progressions n'est donc fondée que sur des principes incontestablement vrais, que toute grandeur est divisible à l'infini par une suite quelconque de divisions, & de sousdivisions en parties sous multiples, que cette suite, & la progression qui en résulte pouvant continuer à l'infini, ne peut être bornée par aucun dernier terme, que dans son cours indéfini elle avance continuellement vers la limite où elle tend, sans pouvoir s'étendre au delà, qu'en supposant enfin par une sorte de fiction, que tous les termes dont la progression est susceptible, fussent actuellement développés, l'assemblage de tous ces termes ne formeroit que la quantité même qu'ils

qu'ils ont divisée, & qui les a produit par la division de ses parties. Mais cette Théorie ne suppose rien qui prouve la nécessité d'admettre la possibilité du développement actuel d'une infinité de termes successifs, ou coexistants placés entre le premier terme de la progression & zéro; en sorte que la suite soit composée d'un nombre de termes actuellement infini.

D E R N I E R E P R E U V E

Tirée des méthodes d'approximation.

J'Osé même dire qu'un problème dont la solution dépendroit de ce développement actuel, ou de la position d'un terme quelconque infiniment éloigné du premier terme, & par conséquent infiniment petit, deviendroit par cela même impossible. La méthode des approximations à l'infini de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré parfait, en fournit un exemple frappant, & sera une nouvelle preuve de l'impossibilité d'une suite composée d'un nombre de termes actuellement infini.

Il est démontré, que si un nombre n'est pas un quarré parfait, on ne sauroit en tirer la racine exacte en nombres entiers ou rompus. Il est encore démontré que par une suite infinie de fractions, comme $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ &c. employées suivant des méthodes connües, on peut approcher à l'infini de la racine cherchée, de sorte qu'en continuant l'operation, l'on trouvera toujours une valeur si approchante de la racine exacte, que la différence soit moindre qu'aucune quantité donnée, quelque petite qu'elle soit.

Cela supposé si cette suite de fractions pouvoit arriver à l'infini absolu, c'est à dire à un terme infiniment éloigné du premier, & dont le dénominateur fut infiniment grand, la différence entre la valeur trouvée par cette approximation infinie, & celle de la racine cherchée deviendroit infiniment petite, & s'évanouiroit enfin. Donc l'on pourroit parvenir à la valeur exacte de la racine cherchée. Or les Géomètres démontrent que cette valeur exacte est réellement impossible, il s'en suit que toute supposition au moyen de laquelle on y arriveroit, doit être censée impossible. Mais la supposition d'une suite de fractions poussée jusqu'à l'infini absolu, donneroit cette valeur. Donc une telle supposition répugne. Et par conséquent l'impossibilité absolue de trouver une valeur exacte de la racine en question, prouve l'impossibilité de toute fraction dont le dénominateur seroit infiniment grand.

Ces réflexions me paroissent présenter le dénouement d'un paradoxe apparent. S'agit-il de trouver une grandeur déterminée par l'évaluation d'une progression décroissante infinie, le calcul la donne exactement. S'agit-il de trouver une grandeur déterminée par le moyen d'une approximation infinie, le calcul ne la peut donner avec exactitude. C'est que dans le premier cas, le calcul ne suppose point que la progression puisse jamais recevoir tous les termes dont elle est susceptible. Une grandeur donnée est le premier terme de cette progression. Cette grandeur est divisible à l'infini par une suite de divisions & de sousdivisions en une raison quelconque donnée; & les parties qui naissent de ces divisions sont les termes de la progression. Cette même grandeur représente ainsi tous les antécédents qu'elle pourroit faire éclore par une suite infinie de divisions. Mais il n'est aucunement nécessaire de s'embarasser dans toute la suite de cette

progression. La grandeur donnée qui représente la somme de tous les antécédents, fait connoître aussitôt une autre grandeur déterminée qui par une suite de divisions dans la même raison feroit éclore une suite proportionnelle de termes conséquents. Le rapport qui regne dans la progression fait ainsi connoître la grandeur qui représente tous les conséquents par la grandeur qui représente tous les antécédents.

Mais la détermination de la valeur exacte d'une racine cherchée par voye d'approximation supposeroit que le cours de la progression fut épuisé, & dépendroit de la position actuelle d'un terme quelconque infiniment éloigné du premier. Or puisque la progression pouvant aller à l'infini sans aucune borne qui la limite, on pourra toujours avancer de plus en plus vers le terme cherché; mais comme elle ne peut jamais être entièrement épuisée, l'approximation à l'infini ne peut non plus en donner la valeur exacte. On voit ainsi que les résultats du calcul sont parfaitement conformes à la nature des choses.

Il ne seroit peut-être pas impossible de faire l'application de ce principe à la rectification des courbes. Dans la rectification de la Cycloïde, par exemple, l'intégrale qui exprime la valeur de l'arc, présente un rapport déterminé à la corde correspondante du cercle générateur; rapport qui fait connoître que la demi cycloïde est double du diamètre. Dans d'autres courbes où l'expression de l'intégrale donne un quantité dont la valeur exacte n'est pas d'abord déterminée par un rapport fini à une quantité finie, mais qu'on ne peut trouver que par le moyen des suites infinies, la rectification devient impossible. La détermination exacte d'un arc de courbe ne dépend donc point de la somme d'une infinité de différences ajoutées l'une à l'autre. La différentielle de l'arc de la courbe considérée comme côté d'un triangle infiniment

petit, sert à faire connoître en vertu de la ressemblance de ce petit triangle à un triangle donné, le rapport de position qui se trouve en quelque point que ce soit, entre la courbe, & une ligne donnée. De là le calcul intégral tire une valeur de l'arc exprimée par les mêmes signes qui expriment les autres variables. Si l'expression de cette valeur est telle qu'elle renferme un rapport fini à une de ces variables, on a par le moyen de ce rapport la rectification exacte de la courbe. Mais lorsque la détermination de la valeur dépend du développement d'une suite infinie, & qu'on ne peut l'avoir qu'en supposant cette suite parvenue à un dernier terme; elle devient impossible, & prouve par cela même que dans une suite quelconque le développement actuel ne peut jamais s'étendre autant que le développement possible, que ce qui reste à parcourir va toujours indéfiniment au delà de ce qui a pû être actuellement parcouru; & qu'ainsi une suite infinie en puissance ne peut jamais recevoir son entier complément, ni parvenir par conséquent à l'infini absolu.

On n'éluderoit point la force des preuves que je viens d'exposer en refusant le nom de nombre à un assemblage absolument infini d'unités. Quelque nom qu'on veuille lui donner, il est clair que dans cet assemblage l'esprit pourra toujours fixer à volonté un premier terme quelconque, & passer sans interruption de l'un à l'autre en suivant la progression naturelle, sans que rien puisse la borner. Donc s'il existe un assemblage de termes absolument infini, il faudra toujours reconnoître qu'il y a un point dans cet assemblage où du fini l'on passe à l'infini. Donc si un tel passage implique contradiction, comme on a tâché de le faire voir, il faut conclure que tout assemblage composé d'une infinité absolue de termes est réellement impossible, quelque nom qu'on lui donne

qu'on lui refuse . Donc toute hipotése qui tendroit à établir une multiplicité actuellement infinie de termes, ou de parties distinctes devra être censée par cela même impossible . Principe dont les conséquences peuvent être de de quelque usage dans la Philosophie .

Je dois enfin avertir que l'impossibilité de l'infini actuel dans la grandeur, ou dans la quantité soit discrete, soit continue, n'exclût aucunement l'idée de l'infini absolu, en tant qu'attribut de l'être sans restriction. Les Ecrivains les plus exacts ont toujours eu soin de distinguer l'infini métaphysique de l'infini mathématique . M. de Fontenelle lui même reconnoît que l'infini métaphysique, dont il dit que nous avons naturellement l'idée, ne peut s'appliquer ni aux nombres, ni à l'étendue . C'est de l'idée même de cet infini considéré de la manière la plus abstraite que dérive en quelque sorte la puissance que nous avons d'augmenter par la pensée la grandeur à l'infini, en ajoutant unité à unité; de sorte qu'il est toujours vrai de dire que l'infini en puissance suppose l'infini en acte, ainsi que je l'ay dit ailleurs. Mais ce seroit sortir des bornes de ce mémoire, que d'entrer dans des discussions purement métaphysiques .

⁴⁶
ALGEBRÆ PHILOSOPHICÆ
IN USUM ARTIS INVENIENDI
SPECIMEN PRIMUM
LUDOVICI RICHERI.



TABULA CHARACTERISTICÆ

Technico-Philosophice interpretata.

- ⊖ I mpossibile, contradictorium, impossibilitas, con-
tradictio.
- ⊖ Possibile, possibilitas, mera non contradictio
- ⊖ Aliquid, res, realitas late dicta.
- ⊖ Nihil, negativum, merum, negatio stricte dicta

S	{	C	affirmative, positive	Determinatio	positiva
		Determinatum			
	}	⊃	negative	Determinatio	negativa

⊃ Indeterminatum

⊃	{	⊃	positive	Determinabilitas	positiva
		Determinabile			
	}	⊃	negative	Determinabilitas	negativa

⊃ Indeterminabile

⊃	{	⊃	positive	Neceffitas	
		Neceffarium			
	}	⊃	negative	Neceffitas	

⊃ Contingens Contingentia

S	{	S	positive	Mutabilitas	positiva
		Mutabile			
	}	S	negative	Mutabilitas	negativa

S Immutabile Immutabilitas

Nihil & Non \circ
 est, non est. datur. \circ ex §. 3.
 Quodlibet vel Tanrum \circ 4

§. I V.

non S determinatum, determinatio
 a non a vel viceversa \circ (2)
 vel \circ indeterminatum, non determinatum

a , C affirmative, positive
 S ad D eterminatum
 Non a , \circ negative, negatio late

§. V.

Hinc \circ qua \circ S & C 2
 est \circ argum. §.
 C, \circ \circ 3

§. V I.

Hinc Quod C, C est, est
 \circ, \circ §. 2. Quod non est, non est.
 g

§. VI.

(2) Cl. Bulging. in dilucid. Wolf. §. 82. Waller Nic. hic.

* In arte hac philosophandi naturali, simplicissimaque via universalissima & inconcussa scientiarum humanarum fundamenta ex quotidianis, & lucidis observationibus, & experientiis deducta, & nunquam satis expensa ad minima, & irresolubilia elementa reducuntur, & in populares velut, communesque notiores scientificæ cognitionis primitivas, & directrices resolvuntur mira determinationis, & connexionis simplicitate, & sæcunditate illustres. Confer. Christ. Wolf. in Hor. subsec. Marburg. De notionibus directricibus, & genuino usu Philosophiæ; ethices §. 296. & passim Leibnit. præcipue de Philosoph. prim. emend. in actis Ipsi. Nicol. Concin. in orat. de Metaphis. Frobes dissertat. cl. Jacquier &c.

§. VII.

\odot $\overset{S}{\odot}$, \odot *Determinabile*, \odot

S,

(3)
signa vicaria ex \odot

\odot $\overset{S}{\odot}$, \odot *Indeterminabile*, \odot

\odot ad $\overset{C}{\odot}$, \odot *positive*
 \odot , \odot *Determinabile*
negative

argum §. 4.

§. VIII.

Hinc \odot licet \odot est tamen \odot vel \odot *

§. IX.

(3) Carpovius de linguæ perfectione ubi de essentialibus in vicaria mutandis &c.

* In hac, utpote architectonica, velut per calculum qualitarum proprio Marte inveniuntur veritates in philosophia non minus pura, quam in aliis scientiis applicata. Elementis particularium scientiarum instructus, & arte hac inveniendi generali adjutus multa inveniet, quæ ex aliorum scriptis non sine tædio, & temporis dispendio alias haurire vix posset, immo omnibus adhuc ignorata deteget. Non enim solum in mathesi, & scientiis naturalibus, sed & in cæteris etiam disciplinis novas, easque illustres veritates inveniendas superesse summis viris probatum, præfertim indefinita, confusa, incerta radicibus determinando, & connectendo. Huc spectant combinatoriæ Leibnitii, algebrae philosophicæ Hookii, de dirigendo intellectu Lorkii, medicina mentis Tschurnhausen, Cramer de J. Consulto Inventore cum Wolf. epist. gratulat. Wolf. ethic. §. 360.

§. I X.

non C, C vel v^a C) necessarium, necessitas non
 vel C) contingens, contingentia (4) C) C) vel

C) vel C) si ad C) ad characteristicae combinationis præcisionem
 C) C)

§. X.

Hinc C) C), C) C) arg. §§. 2. 8. 1. feu C) qua est
 C) S C) C)

§. X I.

S ad C) C) vel viceversa S) mutabile
 C) S) immutabile

Hinc mutabilitas ex C) C) S) ?
 immutabilitas C) C)

(4) Necessarium unico modo determinabile, unico modo possibile. Unicitas determinabilitatis rationem formalem necessitatis constituit, non vero immutabilitas secundum Scholasticos. Hinc ejus oppositum est impossibile, & aliter se habere non potest. Notiones utique veræ, non vero primitivæ definitiones. Necessitas nullam determinationem supponit, & possibilis ut indeterminati determinabilitatem determinat. Hinc necessarium est determinate determinabile: immutabilitas vero determinationem antecedentem supponit, & an ulterius determinabile sit, nec ne definit. Extra systema veri nominis facile, & circulum committere, & derivationes omittere.

\S^2
 \S vel \S *positive* \cup \cup \cup
mutabile si ab ad
 \S *negative* \cup \cup

§. XII.

Hinc \cup qua \cup \S
 est \S \S
 \cup \S & \S \S argum. §. §. ad §. 10. cit.
 \S

§. XIII.

Hinc \cup \S
 est \S & viceversa &c.
 \cup \S

SCIA-

* En perfectæ analysis exemplum, ex quo intimius scrutanti patebit, quomodo cujuslibet dati principii resolutio, & reductio sit instituenda simplicissima connexionis via, & quomodo methodus naturæ cum methodo mathematicorum dicta perfecte sociari possit: in vera namque, naturali, & non interrupta veritatum concatenatione unum, idemque sunt: subtiliori philosophice pervidendi abstracta in concretis minus attendentes tenuitatis, inutilitatisque causabuntur speculationum præcipue illarum, quæ neque proxime in naturalibus, neque in civilibus usum sint habituræ: tantum tamen abest, ut naturam, subtilitate speculationum, maxime etiam sublimium artificiorum magistri superent, ut in quamplurimis ne adsequantur quidem. Infiniti casus sunt, in quibus nondum eo progressi sumus meditando, quo natu a præivit, & usus sequitur etiam civilis. Liceat ergo hæc saltem spei, & voluptatis gratia adjungere.

$\text{C}\dot{\text{O}}$ $\overset{\text{S}}{\text{O}}$ O $\text{C}\dot{\text{O}}$
 vicaria π ex $\text{C}\dot{\text{O}}$ sumta. Combinatio cum S; hinc

$\text{C}\dot{\text{O}}$ $\overset{\text{S}}{\text{O}}$ O $\text{C}\dot{\text{O}}$

$\text{C}\dot{\text{O}}$ ergo vel $\overset{\text{C}}{\text{O}}$ ex analysi ad S vel O

$\text{C}\dot{\text{O}}$ ex O S seu ex $\text{C}\dot{\text{O}}$ $\overset{\text{non}}{\text{C}}$ O . Hinc $\text{C}\dot{\text{O}}$ $\text{C}\dot{\text{O}}$
 $\text{C}\dot{\text{O}}$ vel $\text{C}\dot{\text{O}}$

$\overset{\text{S}}{\text{S}}$ ex S quod supponitur, si $\text{C}\dot{\text{O}}$ ad oppositum S O
 $\overset{\text{S}}{\text{S}}$ $\text{C}\dot{\text{O}}$ O

$\overset{\text{S}}{\text{S}}$; quare vel $\overset{\text{S}}{\text{S}}$, si $\overset{\text{C}}{\text{S}}$ O

En ergo O , O ; O vel $\text{C}\dot{\text{O}}$, vel S; S vero vel C, vel O

Combinando O cum S enascitur $\text{C}\dot{\text{O}}$ & vel $\overset{\text{C}}{\text{O}}$, vel $\text{C}\dot{\text{O}}$

Determinando $\text{C}\dot{\text{O}}$ $\text{C}\dot{\text{O}}$ oritur $\text{C}\dot{\text{O}}$, dein $\text{C}\dot{\text{O}}$

Determinatum vero si ad oppositum $\text{C}\dot{\text{O}}$, $\overset{\text{S}}{\text{S}}$;

si non S; $\overset{\text{S}}{\text{S}}$ vel $\overset{\text{C}}{\text{S}}$ ex $\overset{\text{S}}{\text{S}}$ O

Huc apprime faciunt, quæ ad §. 51. Ontol. latinæ annotavit Philosophus summus Christ. Wolffius. Conquestus est Leibnitiuſ de tenebris philoſophiæ primæ, conqueruntur de iisdem vulgo tantum non omnes; & Leibnitiuſ quidem jam monuit in Philoſophia prima (utpote architectonica) magis luce, ac certitudine opus eſſe, quam in Mathematicis; atque ideo *ſingularem quandam proponendi rationem* neceſſariam judicavit, cujuſ ope non minus, quam euclidea methodo ad *calculi inſtar* quæſtiones reſolvantur. . . . Sed ſingulariſ illa proponendi ratio noduſ eſt, quem nemo Philoſophorum hæcenus ſolvit, nec quomodo ſolvi debeat Leibnitiuſ innuit, nedum docuit. Nulli tamen dubitamus quod beneficio ſupradictæ analyſeos, & reductioniſ combinatoriæ noduſ illuſ ſimpliciſſima, & univerſaliſſima ratione ſolverimur.

De arte combinandi veterum multi multa dixerunt, & eas explicare, ampliari, ſupplere tentarunt. Ingenioſi utique multum habent in ſuiſ circuliſ, cituliſ, lampadibuſ combinatoriſ, & in variis combinationum artiſciis; aſt determinationem, & derivationem merito deſideres tum in notionibuſ, tum in ſigniſ; hinc eorum characteriſtica notionibuſ confuſiſ, & minus determinatiſ ſuperſtructa, & ſigniſ non eſſentialiter derivatiſ, ſed arbitrariſ conſecta, & tum pantoloſophicis, tum pantometriciſ principiſ ex intima notionum natura deductiſ ad combinationes determinandasi deſtituta tanquam inutiliſ fuit neglecta. Deſectum connexioniſ combinationum confuſe agnoverunt nonnulli; aſt veriæ combinatoriæ univerſaliſ fundamenta ignorarunt, ideſt notionum maxime univerſaliſ analyſim, & reductionem ad primitiva, & ſimpliciſſima. Igquero in ſua Pharo in hanc rem notat „ quod non advertunt combinationum ex datiſ terminiſ poſſibiliuſ multas debere rejici tanquam inutiliſ in ordine ad faciendam ſcientiam; utpote quorum extrema, neque connexionem inter ſe, neque oppoſitionem, neque aliud neceſſitudiniſ genus &c. Acutiſſimuſ recentiorum Leibnit. fundamentum quod tunc juveniſ in ſua combinatoria (edita anniſ 1655. & 1668.) quam perficere non potuerat, neglexit, poſtea in actiſ lipſienſibuſ ad annum 1694. indicavit, quod jam olim pervidit Ariſtoleleſ categoriarum combinationem innuens: tametiſ enim applauſu non vulgari eruditorum fuerit exceptuſ (ars combinatoria) & novaiſ complureſ meditationeſ non pœnitendaiſ, quibuſ ſemina artiſ inveniendi ſparguntur, contineat; atque inter cæteraſ palmariam illam *de analyſi cogitationum humanarum in alphabetum quaſi quoddam* (non chronologicum, ſed genealogicum) *notionum primitivarum*, judicat tamen non ſatiſ eſſe limatum &c. act. erudit. lipſ. ad an. 1491.; poſtea vero in iſdem actiſ ad annum 1694. de philoſophiæ primæ emendatione agens hæc innuit; itaque *peculiaris quaſdam* proponendi ratio neceſſaria eſt, & tanquam ſolum in labyrintho, cujuſ ope non minus quam euclidea methodo *ad calculi inſtar* quæſtioneſ reſolvantur, ſervata nihilominuſ claritate, quæ nec popularibuſ ſermonibuſ quidpiam concedat.

Ex hiſ analyſim philoſophicam iſtituenti patebit, quaenam ſit veriæ algebræ philoſophicæ notio, dignitas, & uſuſ, tanquam Kuhlmani methodica centraliſ, a qua cætera omneſ pendent, & iterum in matrem ſuam ſe filiæ reſolvunt; eſt namque hæc ars inveniendi quaſdam univerſaliſſima tum Philoſophorum, tum Mathematicorum analyſim ſub ſe comprehendens, ut merito Ætioloſophia, & Philoſophia princeps, & architectonica ſit ſalutanda. Nihil enim aliud ſunt cætera ſcientiæ, quam Æthio-

§. X I V.

Ex antecedentibus constat de transitione.

\odot qua \odot effe S
 C, \odot \odot & \odot $<$ C, \odot
 \odot, \odot

\odot vero $<$ \odot Hinc S
 \odot S

S autem $<$ S five fit C
 S \odot

\odot & S effe velut per se S ex principio \odot
 \odot S \odot, \odot vero $<$ C
 \odot

Hinc pro veritatibus \odot quærendum aliud principium
 (\odot connexionis) rationis, convenientiæ, rationis
 sufficientis &c.

sophia characteristica vel immediate, vel mediate applicata, quod perspicacioribus, & intellectu systematico præditis non est paradoxum, licet difficillimum; hinc tentandum mutuis auxiliis quid ferant humeri, quid ferre recusent. Qui vero de his, sive ex sensu proprio præoccupato, sive ex turba auctoritatum statuere, aut existimare velit, ne id se in transitu facere posse speret, sed ut rem pernoscatur, viam nostram paullatim tentet, subtilitati rerum paullatim assuescat, denique minus rectos, atque alte hærentes mentis habitus tempestiva, & quasi legitima mora corrigat, & tum demum (si placuerit) postquam in potestate sua esse cœperit iudicio suo utatur. Hiæc fere Verulam.

Analysis enim veritatum \odot & \odot § finitur in principio \odot
 \odot § in se velut infinita

Nisi ad ens, \odot , omnimode S, C, \odot , § ipsius principii
 ω alpha, & omega recurratur. *

§. X V.

\odot Ratio — *Causa*, unde aliquid
 latissime est vel intelligitur.
 \odot *Rationatum Causatum*, quod ex aliquo **

§. X V I.

Quæ sunt inter se ut \odot & \odot ω *connexa, ordinata*
 non sunt \odot *inconnexa, confusa*

h

* Hinc acute Leibnitius veritates \odot numeris rationalibus Mathematicorum,
 \odot e contra irrationalibus, surdis comparandas esse affirmabat, in
 quibus nisi ad simplicem primitivam unitatem recurratur, approxima-
 tione licet in respectiva unitate velut in infinitum producta, incommen-
 surabilitas semper manet; cujuslibet enim datæ quantitatis, — sive nu-
 meri unitas simplex est mensura adæquata, non vero quælibet alia
 quantitas, seu numerus loco unitatis assumtus &c.

** Quomodocumque tandem sit. Notiones hæ antiquissimis, & scholasticis
 communes; dividebant enim causam in genere in fiendi, essendi, &
 cognoscendi, & nihil ipsis erat sine \odot analytica. Ex his derivandæ,
 & determinandæ innumeræ notiones principii, & principiati; primitivi,
 & derivativi, originis, fundamenti, adjuncti, dependentis, potentie
 activæ, & passivæ, seu facultatis, receptivitatis &c.

ω cum $\begin{matrix} \cup\cup, \cup \\ \cup\cup, \cup \end{matrix} > \bar{\psi}\bar{\psi}$ concatenatio

TA-

Huc spectant quæ de nexu, ordine, harmonia, & musica latius dicta passim
 apud antiquos licet indeterminate satis proponuntur bonum in sensum,
 & usum convertenda; apprime enim observandum necessitatem \cup in-
 ferri non posse ex eo quod necessario dari debeat aliqua \cup . Aliud est
 \cup esse necessarium; aliud est necessario concipiendam esse \cup aliquam,
 quæ cum fit $C\cup$, vel $C\cdot\cup$, exinde \cup erit $C\cup$, vel $C\cdot\cup$;
 hinc vel \S , vel $\dot{\S}$

Hinc ω cum ψ

§. XVIII.

Omnia in mundo esse ω , ψ , ordinata, harmonica, & nullam dari

insulam philosophicam passim apud Philosophos tum veteres, tum recentiores, notione connexionis in latissima significatione sumta. Nota sunt Ciceronis, Sancti Augustini, Scholasticorum verba; cum vero passim a scholasticis maxime in Physicis rationes obtruderentur nihil magis quam inintelligibiles; hinc acutissimus Cartesius dubitationem in-

troduxit ad ψ seu rationes rerum intelligibili modo explicabiles intro-

ducendas; optime namque intellexerat omnia habere rationem convenientem, sufficientem suo modo saltem analogice, & convenienter. Hinc „ nulla res, inquit, existit, de qua non possit quæri quænam sit „ causa cur existat; hoc enim de ipso Deo quæri potest, non quod „ indigeat ulla causa, ut existat, sed quia ipsa ejus naturæ immensitas „ est causa propter quam (ratio) nulla causa indigeat ad existendum. Hujus principii distinctum, & adæquatum usum velut de novo proposuit, & introduxit Leibnitius Philosophus summus; rem postea confecit in variis philosophicis scriptis Aristoteles Hallensis magnus Wolff. Dolendum tamen quod eos sequuti novitatem inventionis, & demonstrationem nimium affectaverint in meram logomachiam, & circulum omnia abitura; quare perspicacissimus Leibnitius axiomatis instar assumendum esse contendebat, a Clarkio licet ad demonstrationem provocatus. *Non oportet enim in disciplinabilibus principiis inquirere propter quid ex se ipsis enim fidem habent, non vero ex aliis, & ex ipsis alia demonstrantur.* Aristot. Hinc patet quid judicandum sit de novis demonstrationibus principiorum contradictionis, & rationis sufficientis Straheleri in examini metaph. Wolff, & in dissert. de exist. Dei, & Hagenii in commen. de method. mathem.

Ex analysi §. 14. Duo dari debent, & dantur principia universalia cognoscendi, quibus positus rerum omnium intelligibilitas ponitur, iisdem sublatis tollitur. In universum tamen observandum cautionem in adplicatione adhibendam; præsertim si tum notiones, tum propositiones non satis determinentur, & determinate, ac primitive inter se connectantur &c. Bullfinger, in Dilucid.

§. XVIII.

$\cup < \begin{matrix} S \\ \cup \end{matrix}$ Hinc $\& \cup, \omega$
 $\cup < \begin{matrix} \cup \\ \cup \end{matrix}$ \cup

$< \begin{matrix} C \\ \cup \end{matrix}$ Ergo \cup inter $\&$ nulla ω
 \cup \cup \cup

$< \begin{matrix} \cup \\ \cup \end{matrix}$ Hinc \S
 \cup \S

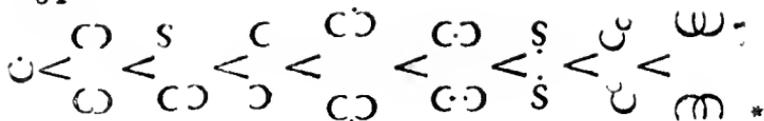
$< \begin{matrix} S \\ S \end{matrix}$ viceversa. Hinc $\begin{matrix} \cup \\ \cup \end{matrix}$
 \cup \cup

$\cup < \begin{matrix} S \\ \cup \end{matrix}$ $< \begin{matrix} C \\ \cup \end{matrix}$ $< \begin{matrix} \cup \\ \cup \end{matrix}$ $\begin{matrix} S \\ S \end{matrix}$. Idem de ω $\begin{matrix} \cup \\ \cup \end{matrix}$, \S &c.
 \cup $\begin{matrix} \cup \\ \cup \end{matrix}$, \S

§. XIX.

⊙ Existentiæ, seu actualitatis signum

ω ⊙, \cup ens Quod esse potest existens.
 \cup ⊙ non ens non potest



\cup vel \cup , \cup \cup est \cup , \cup repugnat

\cup , \cup Hinc \cup interne, & externe

S si est S quoad \cup , existit

\cup Est tamen \cup

\cup Quod existit & determinatum, & positivum est

\cup Involvit \cup , ens fictum

\cup Quodlibet \cup qua tale est \cup

\cup Repugnat ut \cup \cup , \cup \cup

\cup Hinc \cup Hinc velut in se \cup
 \cup \cup \cup \cup

\cup Quare \cup
 \cup \cup five sit sit \cup ; five \cup

\cup

* En combinationis characteristica exemplum, cujus resolutio, & ad principaliora reductio ex antecedentium connexa combinatione instituenda simplicissima, brevissimaque via. Notandum tamen innumeras plurimorum Auctorum definitiones, & propositiones nihil aliud esse, quam puram puram rerum earundem sub diversis nominibus vagam, & sterilem repetitionem, quod jam magnis Viris observatum & authopsi præsertim ex hac arte inveniendi probe patebit.

☽	Ratio		essentia	
		si in SS	☾	
☽	Rationatum		accidentia	
☽		Ordo	Veritas	Perfectio .
	In SS	☾	Hinc	Hinc
☽		Confusio	Falsitas	Imperfectio .



64
OBSERVATIONS

SUR LE COURS DU PÔ

*Avec des recherches sur les causes des changemens
qu'il a souffert.*

P A R M. C A R E N A

L'Art & la Nature ont également eu part aux changemens qui sont arrivés dans le cours du Pô, je me propose dans ce mémoire de fixer la quantité, & l'époque des plus considérables d'entre eux: j'ose me flatter que ces recherches, pourront paroître intéressantes, & que les réflexions que j'aurai soin de faire sur les causes de ces changemens, seront de quelque utilité à l'avancement de la Géographie Physique.

1. POLYBE compare la Région arrosée par le Pô à un triangle, dont la base est le rivage Adriatique, les Alpes, & les Apennins en sont le deux côtés. La longueur de la Chaîne principale des Alpes depuis le Col de Tende, jusqu'à l'extrémité du Golphe Adriatique est de 625 milles; (a) celle d'une partie des Alpes, & des Apennins depuis cette Montagne jusqu'à *Sinigaglia* est de 325; la base enfin, savoir la longueur de la voye Romaine, qui depuis cette Ville conduisoit le long de la Mer Adriatique jusqu'à *Trieste*, est de 375 milles. Elle a donc 1325 milles de

(a) Je substitue ces mesures à celles que donne le texte assez fautif de POLYBE au Liv. II.

Dans tout le cours de ce mémoire je fais usage des anciens milles Romains de 756 toises.

de circuit. STRABON donne à cette plaine 2100 stades ($262\frac{1}{2}$ milles) de longueur sur une largeur à peu près égale entre *Ancone*, & *Trieste*. Il déduit cette dimension de celle des côtés du triangle décrit par POLYBE, dont elle fait la hauteur.

2. C'est une loi assez constamment observée par la Nature que les Montagnes qui se trouvent plus éloignées de la Mer sont les plus élevées, & contiennent aussi la source des plus grands fleuves. Celles de la Suisse, des Grisons, & du Vallais sont les plus hautes de l'Europe, & c'est aussi dans leur partie la plus élevée, que le Rhône, le Rhin, & le Tésin prennent leur naissance. La Chaîne des Alpes qui de là s'étend à l'Est jusqu'à la Mer Adriatique, & au Sud jusqu'au Golphe de Lion, & qui va toujours en décroissant à mesure qu'elle approche de la Mer (a), ne fournit l'origine à aucun autre fleuve, qui soit aussi considérable, que ceux dont nous venons de parler, si nous en exceptons le Pô; mais il est à remarquer que, quoique le Mont *Viso*, dont il prend sa source soit moins haut que celles, qui sont plus avancées dans la même Chaîne, il l'est cependant beaucoup plus que toutes les autres Montagnes, qui lui sont voisines (b); c'est donc là un cas parti-

i

culier

(a) SCHEUCHZER (*Mém. sur le Mont. in. tom. 15. Sugg. Transact. Philos.*) a trouvé par des observations barométriques exactes, que la plus grande élévation du M. Adula ou de S. Gothard, & des Montagnes voisines peut aller à 1400 toises environ de hauteur perpendiculaire sur le niveau de la Mer; & M. NEEDAM a trouvé de même que le partie de M. Tourné sur laquelle il a pû faire ses observations en 1633., sans considérer les hauteurs latérales qui sont plus élevées; Le Mont Iséran 1282. $\frac{1}{2}$; le

Glacier ou le sommet du Mont Cenis 434. De ces observations, & de ce que le M. Tourné est situé presque au milieu de la Chaîne des Alpes, il conclut, que cette montagne doit être la plus haute de l'Europe, & que c'est un erreur de croire que le M. Cenis & le M. *Viso* égalent en hauteur les montagnes qui sont plus avancées dans la Chaîne.

(b) Ce qui a fait exprimer PLINE en ces termes *Padus e gremio montis Vesuli celsissimum. in cacumina clati visendo fonte profectus*, L. III. c. XXI.

culier, qui rentre dans la règle générale, à laquelle il sembloit opposé.

3. PLINE observe, que le Pô reçoit tout au plus trente rivières, & CLUVIER dit qu'il en reçoit quarante, dont quinze se déchargent sur la gauche, & les autres sur la droite de ce fleuve: tous les deux ont cependant raison; car PLINE ne prend en compte que les plus grandes; & de son temps après le *Réno*, le Pô ne recevoit plus que le *Santerno*: les autres fleuves déchargeoient leurs eaux dans la *Padusa*; marais qui s'étendoit le long de la droite du Pô depuis le *Réno*, jusqu'à *Ravenna*.

4. En général il reçoit plus de rivières sur sa droite, mais il en reçoit de plus grandes sur la gauche; parce que la Chaîne des Alpes étant plus haute que celle des Apennins, ces Montagnes contiennent dans leur sein plus d'eau: & le lieu le plus incliné de la plaine se trouve plus près des Apennins que des Alpes; ce qui fait que le cours de ce fleuve est plus éloigné de ces dernières, & que la partie de la plaine qui est à sa gauche est plus grande que celle qu'est à sa droite (a); & les rivières qui découlent des Apennins ayant moins de trajet à faire que celles qui viennent des Alpes, sont aussi reçues dans le Pô avant qu'elles puissent se réunir plusieurs ensemble.

5. Cinq des rivières, qui se déchargent à la gauche du Pô, sortent des lacs enclavés dans les Alpes, que la Nature paroît avoir formé pour servir à en modérer la rapidité: car la pente des Alpes étant fort grande (b) les fleuves qui s'en précipitent surmonteroient souvent leur bords, & pro-

(a) *Universam planitiem ita (Padus) dividit, ut major longe pars ea sit, quæ ad Alpes, & Adriaticum sinum porrigitur. Polyb. L. 11.*

(b) En général la pente des Chaînes de Montagnes est beaucoup plus rapide vers le Sud que vers le Nord. SCHEUCHZ. loco cit. Quant aux Alpes cela est confirmé par cette observation: du Mont S. Gothard à l'embouchure du Rhin il y a en ligne droite 450. milles, & de la même Montagne à l'embouchure du Pô il n'y en a que 180. Donc la descente des Alpes vers l'Italie est de deux fois, & demie plus rapide

produiroient d'impéteufes inondations dans les plaines, fi le courant des eaux n'étoit pas rallenti par ces réceptacles qui lui oppofent une grande réfiftance, & leur permettent en même tems de s'étendre dans un efpace horifontal, qu'on obferve conftamment être d'autant plus grand, que ces rivières font plus confidérables, & que leurs cours eft plus rapide: en effet on voit que le Lac de Genève qui eft traversé par le Rhone & celui de Conftance, qui l'eft par le Rhin, font les plus grands Lacs au delà des Alpes, de même que les plus grands en decà, font le Lac Majeur, qui eft traversé par le Téfîn, celui de Come par l'Adda, & celui de Garda par la Sarca.

6. Le grand nombre de rivières, qui vont décharger leurs eaux en affez grande quantité dans le Pô, le rendent non feulement le plus abondant de l'Italie, mais felon PLINE il n'y en a pas d'autre qui à cours égal reçoive un plus grand accroiffement. „ *Nec alius amnium tam brevi fpatio majoris incrementi eft. Urgetur quippe aquarum mole, & in profundum agitur, gravis terra, &c.* Outre cette quantité, qui eft à peu près conftante, les neiges dont ces Montagnes font couvertes concourent encore à le faire groffir confidérablement dans la faifon des fontes, qui felon PLINE arrivoit au lever de la Canicule: „ *augetur ad canis ortum liquatis nivibus*: POLYBE difoit la même chofe deux Siècles avant PLINE; *Fluit autem maximus, pulcherrimusque ad canis ortum, auctus liquatis nivibus in prædictis montibus.* Le lever héliaque de la canicule à Rome, où écrivoient ce deux Auteurs, fe faifoit du tems de POLYBE le 29. de Juillet, & de celui de PLINE le premier d'Aouft: c'eft en effet fur la fin de Juillet que la fonte des neiges produit cet accroiffement dans le Pô; cependant le lever de la Canicule ne peut plus fervir à en désigner le tems;

(a) Ou Sirius.

car (à cause de la précession des équinoxes), il se fait aujourd'hui seize jours plus tard. Ce fleuve reçoit aussi d'autres accroissemens en automne, & au printemps, qui sont produits par les pluies qui tombent ordinairement dans ces deux saisons de l'année.

7. La longueur de son cours depuis sa source jusqu'à son embouchure est selon PLINE de 300. milles, ce qui est exactement vrai si on ne tient compte que de ses plus grands détours. La distance entre la première & la dernière embouchure étoit du tems de cet Écrivain de 88 milles, & elle répond à celle qu'on trouve entre l'embouchure de la *Fossa Augusta* dans le Port de *Classis*, & celle de la *Fossa Ciodia*, par laquelle le Pô méloit ses eaux avec celles des deux fleuves *Medoaci*, & formoit le Port *Edro*. Il observe aussi que ce fleuve commence à être navigable à *Turin*; POLYBE est d'accord avec lui, en disant que les navires le remontoient par l'embouchure *Olane* l'espace de 250 milles, car cette distance porte entre cette ville & le confluent de la *Duria major*, où le Pô, selon PLINE commence à avoir une plus grande profondeur. (a) Aujourd'hui on le remonte aussi au dessus de *Turin* jusqu'aux confluens de la *Vraita*, & de la *Maira*, mais les barques à voiles ne passent pas au delà du Pont. (a) Je joindrai à ces notions préliminaires sur les cours du Pô en général, deux mots sur les Nations principales qui ont peuplé la Région qu'il arrose, & dont l'industrie où la paresse ont contribué à ses changemens.

8. Les premiers Abitans de l'Italie étant venus par Terre, la Région arrosée par le Pô fut la première à être peuplée.

(a) Plin l, III. c. XVI.

(b) Les Celtes donnerent au Pô le nom de *Pades* dans la partie supérieure de son cours; Celui de *Bodding* dans l'endroit où il commence à être plus profond: c'est la partie du milieu; & à la méridionale des deux branches, dans lesquelles il se divisoit, celui de *Rédans*, dont j'aurai occasion de parler dans la suite.

Ils étoient Celtes d'origine ; dans l'intérieur du Pays ils confervèrent le nom d'*Ombri*, & sur les côtés il se donnerent celui de *Lli-gour* (hommes de Mer), Nom que les Latins changerent en *Ligur*, & *Ligures*. Les Tyrrhéniens abordés aux côtés de la Mer Inferieure chasserent ces Peuples de la Région entre le Tybre & la Macra, dix siècles avant l'Are vulgaire; ayant ensuite traversé les Apennins ils les obligerent à se retirer vers les Alpes, & vers le haut Pô, & ils s'établirent des deux côtés du bas Pô jusqu'à l'*Adige*, ou les *Veneti* s'opposèrent, & mirent des bornes à leurs conquêtes. Les Tyrrhéniens Peuple industrieux & navigateur comme les Phéniciens, desquels ils tiroient leur origine, desséchèrent des grands marais autour du bas Pô, & creuserent des longs canaux, qui ouvrirent au fleuve de nouvelles embouchures, ce qui rendit leur commerce sur la Mer supérieure très-florissant; mais les Gaulois descendus des Alpes, des l'An 600. avant l'Ere vulgaire, s'étant établis dans la plaine, les contraignirent à abandonner ces Régions.

9. Une grande partie de cette Nation méprisant l'agriculture, & le commerce, menoit une vie pastorale, & ne respiroit que la guerre; le Pô, & les autres rivières de cette Région abandonnés à elles mêmes surmontèrent bien tôt leurs bords, & submergerent une partie de la plaine, que les Romains, qui les chassèrent, & soumièrent, ne parvinrent à détécher en partie, qu'avec de très-grands frais; les soins que ces derniers apporterent pour reussir dans leur entreprise servent à nous donner une idée de l'importance de rendre durables ces ouvrages si utiles; car tandis qu'ils construisirent avec une solidité admirable leurs grands chemins; dont quelque partie en cotoyant les fleuves leur servoit de digue, ils creuserent plusieurs grands canaux, entre lesquels étoit fort avantageux celui, qui de *Ravenne* servoit à ouvrir la communication entre les bouches du Pô, du *Tartaro*, de l'*Adige*, & des autres rivières jusqu'à *Al-*

rino dans une longueur de 120 milles. (a) Mais les Nations Barbares qui ravagerent l'Italie dès la fin du iv. siècle, & qui s'y établirent dans les suivans, firent presq' un désert de ce Pays si peuplé & si fertile: le reste des abitans opprimés dans l'esclavage ne pût inspirer que fort tard à ses Maîtres farouches le gout de l'agriculture, de la navigation, & des arts utiles; c'est alors que les rivières, & les canaux comblés du limon qu'ils charioient de ces plaines, débordèrent de rous côtés, & en submergerent de nouveau une grande partie: les Peuples s'étant enfin policés, & les Pays repeuplé on vit les Villes de la Lombardie dès le siècle xi. dessécher les marais, batir des nouvelles abitations sur les lieux que les eaux laissoient à découvert, & creuser des canaux qui en ranimerent le commerce, & en arrosèrent les campagnes.

10. Deux Chaînes de Montagnes, qui du M. *Viso* s'étendent vers la plaine à l'Est dirigent le cours du Pô vers cette plage jusqu'à ce, qu'étant sorti des collines; la pente générale de la plaine déterminée par la courbure des Alpes du Sud au Nord en dirige le cours de ce côté; enfin dans le lieu, où la plaine est le plus retrécié par la continuation des Alpes maritimes (b) d'un côté, & des Alpes Grecques, & Pennines (c) de l'autre, il est obligé de reprendre sa premiere direction.

11. Ces grandes courbures, toujours dépendentes de celles des Montagnes, en allongeant le cours des fleuves, diminuent la vitesse qu'ils acquereroient nécessairement, s'ils descendoient directement à la Mer du sommet des Montagnes dont ils tirent leur origine; ce qu'on doit considérer comme une très-grand avantage, car ces fleuves coulant avec une trop grande rapidité, se creuseroient bien tôt des

(a) L. III. c. XVI.

(b) Les collines du *Monferrat*.

(c) Les collines du *Canavez* qui bordent la *Doira Bautia* jusqu'à *Maffè*.

des lits profonds au dessous du niveau des terres , & deviendroient par là peu propres à la navigation & à l'arrosement des campagnes. Quant à leurs petits détours dans les montagnes , ceux , qui sont déterminés par leurs angles saillans & rentrans , qui multiplient les réactions , & diminuent l'inclination du plan , font perdre aux eaux une partie de la vitesse qu'ils ont acquise dans la descente , & qui produiroit de grands dommages dans les plaines , qu'ils vont parcourir ; ceux qu' ils se creusent dans les plaines par l'inegalité & par l'éterogénéité du sol , qui offre plus ou moins de résistance à leur mouvement , ne produisent pas des avantages egaux ; car au contraire ils les endommagent souvent par leurs variations. C'est à l'art de perfectionner la nature ; où cela est aisé . Mais la théorie n'a pas encore été entièrement établie sur ses vrais principes ; & l'on voit souvent faire à la pratique des efforts inutiles.

12. La partie de la plaine qui est plus proche des montagnes a une pente plus rapide que celle qui approche davantage de la mer , & les fleuves au sortir des montagnes ont encore une grande partie de la vitesse acquise par la descente ; or après qu'ils ont déposé à leur pied les grandes pierres qu'ils en ont détaché & roulé dans les Vallées ils se déchargent des plus petites , jusqu'à ce que le mouvement devenant beaucoup moins rapide , ils déposent le sable : mais comme il est encor trop grand pour que le limon , qu'ils commencent à charier en rongant les plaines , puisse se séparer & se précipiter au fond de leurs lits , loin d'en être élevés , ils se creusent davantage ; il s'ensuit delà que les changemens qu' ils subissent pendant un certain espace ne se font que par corrosion : c'est ce qui arrive à cette première partie du cours du Pô dans le Piémont proprement dit.

13. Concevons les eaux du fleuve parvenues à l'entrée d'une plaine , elles se creuseront un lit dans la partie la plus basse ; &

si dans le long espace qui leur reste à parcourir, elles trouvent un sol gras & fertile, elles se chargeront de limon, pour le déposer un peu plus bas, quand leur différens détours & le peu de pente de la plaine, leur auront fait perdre suffisamment de leur vitesse : le fond du fleuve se réhaussera donc insensiblement, & les eaux surmontant leurs bords se creuseront de nouveaux lits sur la partie de la plaine latérale qui est la plus basse ; si la mer est encore beaucoup éloignée, & que par quelque résistance dans le sol, le fleuve ne puisse y porter droit ses eaux, ces nouveaux lits se réunissent à l'ancien : voilà des isles formées par les branches du fleuve, qui quittera encore par la même raison ces nouveaux lits pour rentrer dans les anciens, ou pour s'en creuser d'autres. Cette plaine réhaussée dans les endroits plus bas, facilite encore ces changemens ; puisque le fleuve ne s'écoulant plus dans une vallée, mais sur une plaine assés unie & rendue de niveau par les différentes couches de limon, dont le sol a été couvert à plusieurs reprises, en inonde une grande partie, submerge les Villes, & les campagnes, & y forme des marais & des lacs. Le Fleuve qui au commencement ne débouchoit dans la mer que par une seule embouchure, y ayant déposé beaucoup de limon est ensuite obligé de se diviser, d'où il se forme des isles d'une figure triangulaire dont un côté est baigné par la mer, & les deux autres par les branches des fleuves : le limon successivement déposé fait de nouveau subdiviser le fleuve & il se forme de nouvelles isles ; ces nouvelles branches enfin qui divergent entr'elles, se réunissent aux premières, d'où il résulte d'autres divisions. C'est par ces différentes variations, que se font les prolongations du continent : & que s'il se trouve dans la mer des isles, qui soient proches du fleuve, elles sont enclavées & réunies au continent qui s'avance vers elles.

14. Tout ce que nous venons de dire est arrivé à notre fleuve ; les faits principaux, que j'ai recueilli à cet effet, en fournissent les preuves les plus convaincantes ; je commencerai donc par prouver l'existence de ces isles, que des Auteurs très-anciens nommoient *Elérides*, & qu'ils plaçoient à l'embouchure de l'*Eridan*. STRABON & PLINE (a) les y cherchoient envain de leur tems ; & l'*eléctrum*, ou l'ambre n'étoit plus connu sur les bords de l'*Eridan* ; mais quoiqu'ils eussent raison de trouver absurde qu'elle pût être produite par les peupliers, qui en bordoient les rives ; il est cependant certain que dans des tems plus reculés on trouvoit cette substance près de ce fleuve, & que les isles *Elérides*, qui en prirent le nom, existoient vis-à-vis de son embouchure ; car ARISTOTE (b) dans son livre des choses merveilleuses les décrit si particulièrement qu'on n'en sçauroit revoquer en doute l'existence. Il nous apprend qu'il y en avoit deux, & qu'elles étoient situées dans le fond du Golphe Adriatique vis-à-vis de l'embouchure de l'*Eridan* ; qu'il y avoit un lac près de ce fleuve, dont l'eau chaude exhaloit un odeur si puante, que les bêtes refusoient d'en boire, & que les oiseaux en le traversant y tomboient morts (c) ; sa circonférence étoit de 200. stades (25. milles), sa largeur de 10. (1. $\frac{1}{2}$ milles) ; sa longueur étoit par conséquent d'environ dix milles (d) :

(a) STRAB. lib. V. PLIN. lib. XXXVII. cap. II.

(b) Ce livre est déjà cité sous son nom par des Ecrivains de la cour de PTOLOMÉE PHILADELPHÉ.

(c) On peut voir dans PLIN. lib. II. c. 93. plusieurs exemples sur ces exhalaisons dans l'Italie. Un lac semblable est celui d'*Ampsancti*, aujourd'hui *Muffii* au dessous de la Ville de *Fricento*.

(d) L'Abbréviateur d'Etienne de Bizance, & TZETZ sur *Lycophron* en parlent aussi. SORTON, Auteur Grec assez ancien, dans les fragmens du livre de *flum. font. ac lac. miraculis*, assure que *circa Eridanum est locus prope Eleérides Insulas aquam habens calidam, gravis odoris, quam nullum animal degustat.*

15. THÉOPOMPE, qui fit plusieurs ouvrages de (a) Géographie estimés par les Anciens, parloit de ces Isles dans une description de la mer Adriatique, qui est citée par le Géographe SCYMNUS de Chio (b). APOLLONIUS de Rhode Bibliothécaire de Ptolomé Philadelphie, dans son poëme des Argonautes, dans lequel il fait usage d'anciennes pièces de Géographie assés exactes, dit que l'Isle *Eléa* étoit la dernière de celles, qui se trouvoient dans le Golphe Adriatique, & qu'elle étoit proche de l'*Eridan*. La fameuse expédition des Argonautes, qu'il y fait parvenir, est de l'an 1353. environ (c). DÉDALE y fit deux Statues, dont une étoit d'étain & l'autre d'airain, on a rapporté à ARISTOTE qu'elles existoient encore dans cette Isle. Il paroît même, qu'on en conservoit le souvenir dans les premiers siècles de l'Ere vulgaire; car AGNELLUS qui écrivoit les vies des Archevêques de *Ravenne* dans le 11. siècle parle d'un endroit dans le territoire de *Comacchio*, acquis par l'Evêque AURÉLIEN vers le 520., qu'on nommoit le *Champ des Idoles* près de l'Eglise de S. Marie de *Pado veteri*, où l'on bâtit depuis le Monastère de *Pomposa* (*Voiez la Carte.*).

16. L'examen des circonstances de la vie de DÉDALE me donne l'an 55. avant la prise de Troye (d), qu'un savant Chronologiste a fixé à l'an 1284. (e), c'est-à-dire l'an 1339. avant l'Ere vulgaire, pour l'époque de son arrivée dans ces Isles; cette époque est la même que celle de l'arrivée des PÉLAGES Thésaliens, qu'ARISTOTE assure en avoir chassé ce fameux Artiste. Ils y bâtirent une Ville à laquelle ils donnerent le nom de *Spine*; nom qui est tiré de
la

(a) Il vivoit du même tems qu'ARISTOTE, dans le IV. siècle avant l'Ere vulgaire.

(b) In *Periegesi.*

(c) PAUSANIAS lib. 9.

(d) DIOD. SIC. lib. 4. PLUT. in *Theseo.*

(e) FREYER Nouv. Observ. Chron. P. I.

la nature du sol de l'Isle, sur laquelle elle fut fondée, & non de celui de l'embouchure du Pô, comme le prétend DÉNYS d'Halicarnasse (a); puisqu'au contraire la Ville donna son nom à l'embouchure (*Spinétique*) (b). En effet ARISTOTE décrit un sorte de pierre (c'est un espèce de pyrite) qui s'enflammoit lorsqu'on la brisoit, & qu'on nommoit *Spinus* (c). Les bains chauds de la *Porretta* sur le bord du *Réno* au midi de *Bologne* (d) sont formés par les eaux, qui sortent en grande quantité d'un rocher de même nature. Lorsqu'on frappe ces pierres on en voit sortir des étincelles, dont le nom grec *Σπιυτες* dérive par conséquent de celui de *Σπιυε* qu'on doit suppléer dans le *Thesaurus lingua græcæ* d'HENRI ETIENNE: PLINE (e) assure que si on laissoit tomber un charbon allumé dans le territoire d'*Aricia* la terre s'enflammoit, que dans la *Sabine* & dans le territoire de *Tiano* une sorte de pierre prenoit feu lorsqu'on l'oignoit: cette région autour du bas Pô abonde en sources sulfureuses, & sans parler des célèbres bains chauds d'*Abano*, dans le territoire de *Comacchio*, il y avoit encore au VI. siècle un endroit, qui s'appelloit *Ignis*, & *Bajas*, situé entre l'*Eridan* & la *Volane* (f).

PLINE assure que dans les Apennins au Sud de Bologne l'an 91. avant l'Ère vulgaire, à la vûe d'un grand nombre des Chevaliers Romains, deux grands rochers s'entrechoquèrent si rudement & avec un si grand bruit que la fumée & la flamme s'en éleva au Ciel, & que dans leur

I 2

chûte

(a) Antiq. Rom. lib. I.

(b) PLIN. lib. III. C. XVI.

(c) Lib. de Mirandis.

(d) LEANDRE ALBERTI qui les vit en donne cette description: *Eseono queste acque calde in grande abbondanza, di sapore salso, da un alto sasso di minera di zolfo. Sopra il gran sasso veggonsi in quà e in là uscire alcune fiammette di fuoco, ivi accendendosi la terra; e spento il fuoco vedesi germinar essa terra, e produrre erbe. Mette capo nel Reno questa acqua, onde non è meraviglia se l'acqua del Reno è tanto sana a beverla.* Pag. 338.Il dit aussi, qu'au Sud de Bologne, près de *Pietramala*, on voit un trou, dont il sort continuellement de grande flammes. pag. 325.

(e) Lib. II. c. 82. (f) AGNELLUS loc. cit.

chûte ils écriasèrent plusieurs Villages (a) : PLUTARQUE dit que dans le Pais habité jadis par les Celtes, un globe de feu (où un bloc de matière en feu) lancé en l'air dans une eruption, tomba dans l'Eridan, & s'y éteignit (b). VALERIUS FLACCUS nous apprend la même chose par ce vers :

Acer & Eridani trepidum Globus ibat in amnem.

Argon. l. V. v. 430.

Voilà l'explication d'une partie de la fameuse fable de *Phaëton*. Les bornes de mon sujet ne me permettent pas d'y insérer ici mes recherches sur la première partie de cette ancienne tradition d'un embrasement qu'éprouva la terre, & sur sa cause : je les réserve à un autre lieu. Les Poètes ayant trop défigurée cette tradition, la rendirent absurde, & pour cela STRABON, PLINE, DIODORE de Sicile la rejettent absolument ; POLYBE n'en décide rien ; LUCIEN dans son *Dialogue de l'ambre*, avec sa naïveté ordinaire la tourne en ridicule, mais dans le *Dialogue de l'Astrologie* il tâche d'en donner une explication morale. Les sentimens des Mitologistes sont partagés sur ce sujet ; mais c'est sans le moindre fondement que nos Historiens, trompés par les impostures d'ANNIUS de Viterbe, ont prétendu trouver dans *Phaëton* le fondateur de Turin.

17. APOLLONIUS de Rhode (c) dit que l'eau du lac, dans lequel tomba Phaëton à demi brûlée, en fut si infecté, que les oiseaux, qui y voloient dessus, n'en pouvant supporter

(a) Lib. II. c. 83.

(b) ΤΖΕΤΖΕ, *Chiliad.* IV. n. 137. après avoir exposé le Conte des Poètes sur Phaëton, dit :

Plutarchus autem solvit naturalius :

Globum igneum terra coltica erupisse,

Extinctum autem, cum in fluentia Eridani incidisset,

Historia mentionem facit (in libro) : quantum examen externorum ?

(c) ΑΡΡΟΛΑΥΤΙΚΗ. lib. V. v. 596, &c.

ter la puanteur, y tomboient morts; & que quand elle débordoit par le soufflé du vent impétueux, *tunc (electri guttæ) in Eridanum provolvuntur frequenter cunctæ, æstuanti fluxu.* Le nom de *Lago-scuro* que conserve un Village entre *Ferrare* & le *Pô grande*, déjà nommé *Lacus obscurus* dans des anciens chartres, indique précisément le lieu où étoit l'étang ou lac obscur (*κέλευθὸς λιμνῆς*), dont cet Auteur fait mention, & qui fut dans les siècles suivans comblé par le limon du fleuve, surtout depuis que la branche, qu'on appelle *Pô grande*, creusa son lit de ce côté.

18. Dans la campagne sulfureuse entre *Cume* & *Pozzuolo*, appelée par les Anciens *Phlegreus Campus*, l'an 1538, après des grands tremblemens, on vit la terre s'ouvrir & jeter une si grande quantité de pierre enflammées & de cendres, qu'il s'en forma une montagne de 4. milles de circuit, & le lac *Lucrin* en fut presque entièrement couvert (a). ARISTOTE (b) nous apprend comment dans la même campagne s'est formée la *Solfatara*; cet Auteur en parlant des tremblemens de terre, donne la description d'une espèce plus particulière (& qu'on peut à plus juste raison appeler un Volcan), laquelle se fait quand la terre après s'être alternativement gonflée & rassise, s'ouvre enfin & élance une quantité de pierres: *Un de ces tremblemens*, dit-il; *bouleversa le Champ Phlegrée, de même qu'une Région Ligustique.* Ces dernières paroles regardent l'origine des fameux *Campi Lapidei* qu'on appelle aujourd'hui le *Crau* entre Marseille & le Rhône; les circonstances fabuleuses, dont les Anciens l'envelopperent, racontant (c) que Jupiter avoit fait pleuvoir une nuée de pierres sur les Liguriens *Albion* & *Bergion* fils de Neptune, tombent aisément: le nom de *berg* signifioit dans la langue Celtique une montagne, & celui d'*Al-*

(a) V. LEAND. ALBERTI *Descriz. Ital. edit. an. 1581. p. 177.*

(b) METEOR. lib. II. cap. VIII.

(c) MELA lib. II. cap. V. APOLLOD. *de Diis* lib. II.

d' *Alben* ou *Alpen*, une montagne fort haute : deux montagnes baignées par la mer s'étant donc ouvertes par la force d'un volcan, élancerent une prodigieuse quantité de pierres, qui retombant, couvrirent une étendue de Pays (a), & abîmèrent plusieurs peuplades de *Liguriens*, qui l'habitoient.

19. Celle des deux Isles *Eléctrides*, sur laquelle les Thésaliens bâtirent la Ville de *Spine*, semble être sortie de la mer par la force d'un Volcan. PLINE en dénombre dix dans l'Archipel, qui sortirent de cette manière, parmi lesquelles celle de *Therastia* aujourd'hui *Santorini*, qui en sortit l'an 237. avant l'Ere vulgaire, porte toutes les marques de l'action du feu ; on en vit sortir une autre à côté de celle-ci l'an 1709. Dans les mers d'Italie, le *Vulcanello* (rocher entre l'Isle de *Lipari* & celle de *Vulcano*), l'Isle d'*Ischia*, celle de *Procida*, & une autre qui sortit dans la mer de *Toscane*, l'an 206. avant l'Ere vulgaire eurent la même origine (b). Ces Isles sont toutes hérissées de rochers ; or telle étoit selon APOLLONIUS de Rhode l'Isle *Eléctride* (c).

20. Le Géographe SCYLAX, qui écrivoit vers l'an 500. avant l'Ere vulgaire (d), mais qui s'est servi dans la description des côtes de l'Italie de mémoires d'environ un siècle plus anciens, dit que la Ville de *Spine* étoit située près du fleuve de même nom, qu' on remontoit pour y parvenir l'espace de 20. Stades (2. $\frac{2}{3}$ milles). Les Géographes EUDOXE & ARTEMIDORE, au rapport d'ETIENNE de Byzance (e) avoient écrit sur cette Ville & sur le fleuve *Spinus*. C'est le fameux *Eridan* des Grecs & des Latins : HÉRODOTE (f) révoqua en doute l'existence d'un fleuve de même nom dans les mers septentrionales, soupçonnant que

(a) De 12. milles de long. sur 10. de larg.

(b) PLIN. lib. II. cap. 87.

(c) *In Insulam asperam Electrida ferebantur.* Argon. lib. IV. v. 581.

(d) Herod. lib. IV. c. 44.

(e) V. *Σπινά.*

(f) Lib. III. c. 115.

que ce nom, qui lui sembloit Grec, eut été forgé par les Poëtes ; & STRABON nie absolument qu'il y ait jamais eu de fleuve de ce nom, & de l'ambre à son embouchure. Cependant quoique PLINE (a) soit d'accord avec lui sur ce point, il assure néanmoins que l'embouchure *Spinétique* étoit autrefois appellée l'*Eridan* (b). Les Grecs qui commerçoient à *Spine* connoissoient cette branche du Pô sous le nom d'*H'εδανός*, & leurs anciens Poëtes, qui célèbrent *Phaëton*, imités par les Latins, l'étendirent à tout le fleuve. Mais ce nom étoit Celtique, & le Celtes ne le donnoient qu'à cette branche, qui se divisoit à *Codrea* (c) sur la droite. Ce lieu dans lequel on trouva quelques Inscriptions qui en confirment l'antiquité étoit encore appelé dans le siècle XI. *Caput de Reda* (d), & PRISCIEN dans ses Antiquités de *Ferrare* assure que le Pô ne se divisoit pas à *Ferrare*, mais quelque mille au-dessous, à *Codrea*, qui avoit ce nom parce que la branche du Pô qu'on nommoit *Eridane* prenoit de là son commencement (e). Plusieurs fleuves dans les païs habités par les Celtes avoient un nom semblable, & j'observe que le long du cours de chacun il y avoit des sources chaudes, & qu'on trouvoit de l'ambre jaune aux embouchures de quelques uns d'entr'eux. Le fleuve *Rérone* qui coule par la Ville de *Vicence* étoit anciennement appelé *Reteno* (f) ; dans le siècle X. il conservoit encore le nom de *Retone* (g) & *Retrone* ; les Vicentins & les Padouans, qui creuserent dans leurs territoires plusieurs canaux dans le siècle XII. & suivans, en changerent beaucoup l'ancien cours :

se

(a) Lib. XXXVII. c. II.

(b) L. III. c. 16.

(c) V. la Carte.

(d) Dipl. an. 1031. apud MURAT. Antich. Estens. P. I.

(e) V. ALBERTI Descr. Ital. p. 342. b.

(f) VENANT. FORTUN. in Vita S. Martini.

(g) Dipl. apud UGHAL. Ital. Sacr. in Episc. Patav. & Cremon.

se déchargeoit autrefois dans le lac d'*Anguillara*, ou de *Vigazuolo*; ELIEN (a) décrivant la pêche des anguilles, qui se faisoit dans ce lac, nomme le fleuve *Ἐρετώνος* (*Eretenus*). Or à la gauche de ce fleuve il y a les fameux bains d'*Abano*: le long du *Rhin* & du *Reno* il y a aussi des sources chaudes. Le *Rodaune*, fleuve qui se décharge sur la gauche de la *Vistule* à trois milles de son embouchure, & qui par la variation des dialectes est appelé *Raddune* & *Reddune*, est l'*Ἠπίδαυρος*, dont on avoit raconté à HERODOTE, qu'il se déchargeoit dans la mer septentrionale (b). Il y portoit autrefois ses eaux, & on recueille encore en grande quantité l'ambre jaune, que la mer rejette sur une langue de terre voisine. Après qu'on ne trouva plus cette production près de notre *Eridan*, les Grecs, & les Romains ensuite, la tiroient des peuples de ces pais septentrionaux (c). La *Duna*, sur laquelle on la chargeoit pour la transporter dans le *Borysthène*, où les Grecs alloient l'acheter, étoit aussi appelée *Rhudon* (d). On a vû ci-dessus les eruptions des Volcans à la droite du *Rhône*, dont l'ancien nom est Celtique; ARISTOTE (e) décrit un lac bouillonnant dans la *Ligurie* aux environs de *Marseille*; son disciple THÉOPHRASTE assûroit, au rapport de PLINE (f), qu'on recueilloit de l'ambre dans la *Ligurie* (g), & que les vagues de la mer la rejetoient sur le Cap du *Pirénée*; au Sud de ce Cap opposé aux embouchures du *Rhône*, une Ville portoit un nom semblable (*Rhode*, aujourd'hui *Roses*); & PLINE fait mention d'une Ville de *Rhoda*, qui étoit jadis à la droite de l'embouchure du *Rhône*, qu'il suppose mal
à pro-

(a) *Histor. Animal.* l. 14. c. 8.

(b) *Lib. III. c. 115.* CLUVER. *Ital. Ant.* l. 1. c. 34.

(c) CLUVER. *German. Antiq.* l. III. c. 34. &c.

(d) MARCIEN HERACL. in *Petipl.*; V. BAYERI *Dissert. de Venedis &c.* in tom. VII. *Acad. Petrop.*

(e) In *lib. de Mirandis.*

(f) L. XXXVII. c. 2.

(g) Ces deux Auteurs nomment *Ligurie* le pais que les Ligures abitoient aussi au delà des Alpes.

à propos avoir été bâtie par les Rhodiens (a). Si cet Auteur n'ajoutoit pas foi à THÉOPHRASTE & à XENOPHANE sur cette production dans ces lieux, & nioit aussi bien que STRABON & plusieurs autres anciens, qu'il y en eut jamais eù à l'embouchure de notre *Eridan*, c'est parcequ'il jugeoit de ce qui étoit autrefois, sur ce qu'ils voyoit de son tems ; mais de même que le limon porté par le *Rhône*, en formant l'Isle qu'on appelle de *Camargue*, détourna de la mer les sources de l'ambre: celui qui fut porté par l'*Eridan* détourna celles qui étoient le long de son cours. C'est ce qu'on apprendra ensuite de la recherche sur la prolongation du continent.

21. Du tems de STRABON, c'est-à-dire environ l'an 18. de l'Ere vulgaire, la Ville de *Spine*, que cet Auteur reconnoit avoir été maritime, étoit située dans le continent à 90. stades (11. $\frac{1}{4}$ mill.) environ de distance de la mer ; d'où je conclus, que dans les vi siècles, qui s'écoulèrent entre le tems des mémoires suivis par SCYLAX (V. n. 20. p.), & celui de STRABON, le fleuve porta à cette embouchure tant de limon, que le continent en fut prolongé de 9. milles, ce qui fait un mille tous les 66. ans. Or en faisant une proportion entre ces tems & les espaces donnés par ces deux Auteurs, il résulte, que l'an 933. cette Ville étoit encore baignée par la mer, & que l'an 1334, vers lequel comme on a vû ci-dessus, on la bâtit, elle étoit éloignée d'environ 9. mille de l'embouchure de l'*Eridan*. En suivant cette proportion je trouve que la distance entre l'emplacement de la Ville de *Spine*, & l'ancienne embouchure de l'*Eridan* étoit de 12. milles au tems de l'embrasement de *Phaëton*, qui arriva dans le siècle XXII. avant l'Ere vulgaire; & en remontant plus haut, je trouve même le lieu de l'ancienne côte aux environs de l'embouchure du Pô au tems du Déluge, dont l'époque, selon le calcul que je fais sur le texte Samaritain, est de l'an 3045. avant l'Ere vulgaire,

1

c'est

(a) Lib. III, c. 4.

c'est-à-dire de huit siècles antérieure à l'embarquement de Phaëton : ces huit siècles donnent environ 13. milles pour la prolongation du continent.

22. Ces deux positions dépendent de celles de la Ville de *Spine*, que je vais tâcher d'établir. Les vestiges de cette Ville sont submergés dans le *Marais de Comacchio* ; SPRETI (a), qui écrivoit au commencement du XVI. siècle, assure que de très-anciens chartres en faisoient mention, & dit qu'il y avoit encore de son tems un endroit à la gauche du *Primaro*, qui portoit le nom de *Volta di Spina*. Les Marais n'avoient pas encore submergé tant de pais : ils n'avoient que 12. milles de circuit, selon ALBERTI, qui nous apprend aussi qu'au milieu de ce siècle XVI on voyoit encore quelques restes de cette Ville dans l'endroit, qu'on appelloit *Dorso di Spina* : ce nom fait voir qu'elle avoit été bâtie sur un endroit élevé, & que le limon du fleuve qui l'entournoit, n'avoit pas encore réhaussé le sol au niveau de cette hauteur ; qu'elle par conséquent avoit été un' isle qui s'élevoit en pointe au-dessus des eaux de la mer (b) ; que cette isle enfin réunie au rivage voisin, qui ne surpassoit que de peu le niveau de la mer, conservoit sur lui presque toute son élévation. L'attention que ces deux Auteurs ont fait à ce que dit STRABON, qu'elle étoit éloignée de 11. milles de la mer, sert à prouver qu'il en étoit de même de leur tems : car si elle en eut été plus ou moins éloignée, ils n'auroient pas manqué de l'observer, & de nous l'apprendre, vûe l'exactitude avec laquelle ils ont donné la description de ces lieux : or les millés dont se servent ces Auteurs sont d'un cinquième plus longs que les anciens milles Romains ; donc ces 11. milles sont égaux à $13\frac{1}{5}$ milles Romains, qu'on trouve précisément sur la Carte de MARGIN entre le *Porto di Primaro* & la *Punta di Human*. La Ville

(a) De Orig. & Amplit. Urb. Raven. l. 1.

(b) V. les Cartes de la Géogr. Phys. de M. BUACHE. (a)

Ville de *Spine* étoit donc située près de cet endroit. A 9 mille de là on a le lieu de l'embouchure de l'*Eridan* pour l'an 1334; à 12 milles, celui de l'embouchure au tems de l'embarquement de *Phaëton*, & cette distance porte à *Confandolo*; enfin à 13 milles on a le lieu de la côte après le Déluge à un mille environ au dessus de *Codrea*.

23. Par tout ce que je viens de dire il est pleinement prouvé que les *Isles Elérides* ont réellement existé, & que le limon porté par le fleuve, les joignit au continent, & le prolongea de 45. milles dans 3045. ans qui se sont écoulés depuis le Déluge jusqu'au tems de STRABON: qu'on cessa de trouver de l'ambre sur l'*Eridan* depuis que le même limon eut comblé le lac salé, dans lequel l'acide du sel marin durcissoit cette substance sulfureuse, qui y découloit abondamment des entrailles de la terre: qu'en séparant enfin les circonstances fabuleuses que l'imagination des Poëtes a ajouté à la tradition de l'éruption d'un Volcan près de l'*Eridan* & de la chute d'une masse enflammée dans ses eaux; on y découvre un phénomène qui donne des grandes lumières à la Géographie physique & à l'Histoire: Je décrirai maintenant en particulier la prolongation formée par toutes les branches du Pô, & les changemens qui sont arrivés soit dans leur cours, soit dans la quantité de l'eau qui y couloit.

1024. Du tems de STRABON le Pô étoit divisé en sept branches depuis environ six siècles, & pendant l'intervalle de tems qui s'est écoulé depuis cet Auteur jusqu'au XI^e siècle, dans lequel le Pô commença à couler par la branche *Pô grande*, le continent ne fut prolongé que de peu à l'embouchure de l'*Eridan*; mais il étoit déjà étendu au delà de l'emplacement du Village de *S. Alberto* (a); car au rapport de l'Auteur d'une Chronique de *Ferrare* (b), il

1 2

y

(a) Voyez la Carte au lieu marqué *Insula Pyreii*.(b) Publiée par MURATORI, *Res. Italic.* Tom. VIII. p. 474. &c.

y avoit en cet endroit un pont sur le Pò, qui joignoit le grand chemin de *Ravenne*; & ce grand chemin étoit le même, que celui qu'*AUGUSTE* fit paver depuis *Rimini* jusqu'à *Ravenne* (a), & qui delà traversant toutes les embouchures du Pò conduisoit jusqu'à *Altino*; cet Empereur avoit de même fait creuser le canal, qui portoit son nom, & qui couloit de la branche *Spinétique* au-dessus du pont (b); & *Ravenne* de ce tems-là étoit encore baignée par la mer, qui y entroit dans le flux par les canaux, qui l'entrecoupoient (c); mais au commencement du vi. siècle elle en étoit déjà éloignée d' $\frac{1}{4}$ de mille (d). Le Roi *ODOACER* en fit creuser un au nord de cette Ville peu de tems après, qu'il y eut établi sa résidence en 476; ce canal joignoit celui d'*AUGUSTE* à une branche du Pò sur laquelle on navigeoit encore dans le siècle xiv. (*Voyez la Carte*) (e). Plusieurs Auteurs du moyen âge nomment cette branche *Baderinus* (f), ou *Fluvius Padenæ* (g); son vrai nom étoit *Paderenus*: le même Roi fit bâtir son palais de *Blachèrne* dans l'isle formée par cette branche, ce qui fait voir, que le sol en étoit assez solide & spacieux. Le *Paderenus* couloit de l'*Eridan* (h) vers *Ravenne*, & il se joignoit sous ses murailles au canal d'*AUGUSTE*, qui avoit traversé cette Ville (i). L'Auteur de la Chronique de *Ferrare*, qui écrivoit vers la fin du xiv. siècle, assure que de son tems il y avoit 7. milles entré cet endroit, & le Port de *Primaro*; les milles dont se sert cet

(a) JORNANDES de reb. Gothic. c. 52.

(b) Chron. Ferrar. loc. cit. l. 1. c. 19. p. 107. & l. 2. c. 10. p. 117.

(c) STRAB. lib. V.

(d) PROCOPE de Bello Goth. lib. I.

(e) Chron. Rav. - Ferr. Ital. l. 1. c. 19.

(f) PAUL. DIAC. Hist. Lang. lib. 3. c. 19.

(g) Chron. Rav. ibid. & Papyr. du siècle VIII. à la suite de l'*Historia Dipl. du Maffei* n. XV.

(h) Un peu au-dessous du Village de *S. Nicolo*. Chron. Ferr. ibid. Voyez la Carte.

(i) AGNELLO loc. cit. l. 1. c. 19. p. 107. & l. 2. c. 10. p. 117.

Auteur font aux anciens milles Romains comme 7. à 8. $\frac{1}{2}$. Dans les Cartes de l'Italie, que MAGIN a composées au commencement du dernier siècle, il y a environ 9. milles Romains anciens entre ces deux endroits; donc le *Pò de Primaro* n'avoit pas prolongé le continent dans ces deux siècles. (a) Mais depuis ce tems la Mer semble avoir regagné dans cet endroit sur le continent; car dans la carte de l'état Ecclesiastique des PP. Boscovich & le Maire on ne voit plus la prolongation formée par le Primaro & dessinée dans la Carte du Magin, ni les deux isles, & les deux bancs de sable vis-à-vis de cette embouchure (*voyés la carte*). Cette discussion sur la longueur du continent confirme la position de la Ville de *Spine* (v. §. 22.).

25. Selon PRISCIEEN PELLEGRIN (b) le village de *Consandolo* étoit appelé *Caput Sandali*, parce que dans cet endroit il se séparoit de la gauche de l'*Eridan* une branche nommée *Sandalus*, qui couloit vers le village, qui porte le nom de *Sandalo*. Le même Auteur (c) décrit ailleurs un ancien canal, appelé *Fossa Bosia*, qui depuis *Consandolo* portoit une partie des eaux du *Primaro* dans le *Pò di Volana* à *Médélane*; (*voyés la carte*) c'étoit l'ancien lit du *Sandalo*, qui prit ce nom d'un certain *Bosius*, qui le fit nettoyer. Il semble (v. §. 22.) que ce fut dans le tems de l'éruption de plusieurs Volcans le long du *Pò*, qu'il se divisa en ces deux branches. On a vû que la première division du *Pò* se faisoit à *Codrea*, dont la branche à la droite étoit l'*Eridan*; l'autre étoit appelée *Sagis*, selon PLINE, qui nomme son embouchure *Sagis Ostium*. Il dit que la *Olane* étoit là première des suivantes, que l'art avoit creusées. (d) L'eau ayant

(a) RUBEUS (Hist. Rav. lib. 5.) qui écrivoit sur la fin du xvi. siècle compte 18 milles entre Ravenne & l'embouchure de Primaro; ce qui revient au même.

(b) Cité par ALBERTI *Descr. Ital.* pag. 392. 6.

(c) Rapporté par MURATORI *Piena esposiz. dei diritti Imp. ed Estensi ec.*

(d) Lib. III. c. XVI.

ayant abondé dans cette dernière, & presque manqué dans la *Sagis*, le nom d'*Olane* fût donné à la première partie de cette branche, & le nom de *Sagis* ne lui resta que du lieu de sa division d'avec la *Olane* jusqu'à la Mer. Ses vestiges sont marqués dans la Carte de MAGIN avec le nom de *Gorgadello*, & selon CLUVIER (a) quelque peu d'eau couloit encore de son tems, c'est à dire au commencement du dernier siècle, de la *Volane* près du lieu de *Marozze*. La Table Théodosienne marque un lieu *Sagis*, dont la position tombe au même endroit, où ces deux branches se divisoient. POLYBE (b) ne fait mention d'aucune autre branche du Pò que de la *Padusa*, (c'est le nom qu'il donne à l'*Eridan*, le long duquel s'étendoit au Sud la *Padusa Palus* des anciens), & de l'*Olane* parcequ'elles étoient de son tems les plus considérables. La branche qui se divise à la droite de *Ferrare* n'exista que depuis le commencement du siècle VIII. de l'Ère vulgaire: les Ravenniens la creuserent pour se défendre de leurs ennemis, & la nommèrent *Fossa*, & *Padus Fossæ* (c); aujourd'hui on l'appelle *Pò di Ferrara*, ou *Pò morto* à cause du peu d'eau qui y coule (voyez la carte). Cette première division du Pò à une petite distance de l'ancienne côte, confirme l'époque du deluge, & ce que j'ai établi au §. 13.: que le limon porté par le Pò à son ancienne embouchure, devoit en peu de tems l'obliger à se diviser; le flux de la Mer contribue le plus à ces divisions proches de l'embouchure: le fleuve, qui après avoir élevé son lit rompt ses bords, creuse les autres, qui en sont plus éloignées.

26. De la gauche de l'*Eridan* se divisa aussi dans la suite une branche qu'on appelloit selon ALBERTI, *Vergens fluvius*, aujourd'hui le *Vergenese*, qui est presque sans eaux

(a) Ital. Antiq. lib. I. c. 35.

(b) Lib. II.

(c) V. Agnel. in *vita Felicis*, & ALBERTI pag. 343. 6.

& se perd dans les marais de *Comacchio*. Son ancienne embouchure, que *PLINE* appelle *Caprasæ ostium*, est la même que celle qu'on appelle *Porto di Magnavacca*. Ces trois branches sont les seules dans lesquelles le Pô se divisoit. Avant que de passer à décrire les autres branches & canaux à la gauche de son cours, je dois rendre compte d'un autre effet considérable produit par ce prolongement de continent, c'est-à-dire de cette suite de marais qu'on appelloit anciennement *Padusa*, & qui desséchés dans quelques lieux, & plus étendus qu'autrefois dans d'autres, ont pris différens noms.

25. *Ravenne* avoit été bâtie sur plusieurs Isles, & au premier siècle de nôtre Ere, elle tenoit déjà d'un côté au continent (§. 24.) cinq siècles après, selon *PROCOPE*; elle étoit éloigné de la Mer de 250. pas; les flottes, & les armées de terre n'en pouvoient que difficilement approcher; les premières arrêtées par les bancs de sable, qui s'éten- doient dans la Mer jusqu'à 30 stades, ou 4.²/₇ milles (a); les dernières par le Pô par les autres fleuves navigables, & par les étangs, dont cette Ville étoit environée. Les eaux de la Mer dans le flux entroient dans les canaux, & se répandoient aussi loin qu'un homme peut marcher dans un jour; (b) on profitoit de ce tems pour la navigation. Cela arrivoit non seulement à *Ravenne*, mais le long de la côte jusqu'à *Aquilée*. Les Romains (c) après qu'ils conqui- rent sur les *Ombriens* la Ville de *Ravenne*, en perfectionne- rent le Port, & *POMPÉE* y établit une flotte (d), qui gar- doit la Mer supérieure & celles du Levant (e). Ce Port étoit si vaste que du tems d'*AUGUSTE* 250 Galeres y deme-
meu-

(a) Sept des stades de *PROCOPE*, & des Auteurs du bas Empire, font le mille.
V. l'Analyse de l'Italie de M. d'ANVILLE.

(b) Les anciens, selon *Vegece* l'étendoient pour les troupes jusqu'à 24. milles.

(c) *PROCOPE*. de bello Goth. lib. 1.

(d) *Cicer.* pro L. Manil.

(e) *Veget.* lib. v. c. 1.

meuroient en station (a); du nom Latin de flotte on l'appella *Portus Classis*. Le grand commerce, qu' on y faisoit peupla beaucoup la ville de *Ravenne*, & celle de *Classis* qu' on bâtit à trois milles au Sud de *Ravenne*. Entre ces deux Villes, sur la *Via Cæsaris*, qui les jognoit, on bâtit depuis celle de *Cæsarea*. (b) Ces trois Villes entouroient ainsi de trois côtés le Port. Vers l'Est il y avoit un'Isle sur laquelle s'élevoit un célèbre *Phare* semblable à celui d'*Alexandrie*. (c) Ce Port fameux avoit déjà été tellement comblé par le limon dans le siècle vi. qu'un Auteur de ce tems (d) dit que les arbres, fruitiers plantés dans des jardins spacieux, occupoient la place des arbres des vaisseaux, qu'y flottoient autrefois. Dès le iv siècle ce Port n'étoit plus fréquenté: car les flottes Impériales relâchoient toujours depuis ce tems au *Portus Eridani* (e) formé par l'embouchure du *Paderenus*, (f) après avoir reçu le canal qui traversoit la Ville.

28. Ce canal contenoit au milieu du v siècle deux parties de l'eau de la *Fossa Augusta*, la troisième couloit dans un autre canal, qu' on en avoit divisé au moyen d'une grande digue de pierre, (g) & qui servoit de fossé à la Ville vers l'Ouest pour la défendre de ce côté, où les marais laissoient un petit passage, au rapport de JORNANDES, qui écrivoit au milieu du vi siècle. La ville de *Ravenne* ainsi située aux milieu des eaux bravoit la fureur des Barbares; c'est pour cela que les Empereurs d'Occident après THÉODOSE I. y firent presque toujours leur résidence, de même que le Roi ODOACER, qui y soutint un siège de trois ans

con-

(a) DIO apud JORNAND. de reb. Gothic. c. 52.

(b) JORNAND ibid.

(c) PLIN. l. 36. c. 12.

(d) FABIVS apud JORNAND. c. 52.

(e) AGNEL passim.

(f) Au commencement du vi. siècle on avoit déjà bâti un autre *Phare*, ou est aujourd'hui la *Rotonda*, qui en prit le nom de *Monasterium ad Pharum*.

(g) Sidon. Apollin. lib. 1. epist. 8.

contre le Roi THÉODÉRIC: le premier après qu'il se rendit Maître de cette Ville en 476, avoit fait creuser le Canal appellé *Fossa Afconis*, qui jognoit le *Padus-Renus* à la *Fossa Augusta*; (voyés la carte), & il en fit à cette occasion creuser un autre (l' An 490) depuis la Mer, où étoit le *Pinetum* (a) jusqu'au Pont *Marmoreus*. (b) L'eau qu'on conduisit dans ce canal étoit celle du fleuve *Bedefis*, qui après avoir coulé entre *Ravenne*, & *Césarée*, débouchoit dans le Port de *Classis*; une autre branche de ce fleuve se déchargeoit dans le même Port, après avoir coulé entre *Césarée*, & *Classis* sous le nom de *Fluvius Pantheon*. Il fournissoit aussi l'eau à *Ravenne* dans un aqueduc que le Roi THÉODÉRIC fit réparer (c), d' où on lui donna dans le moyen âge le nom d'*Aquæductus*, changé depuis en celui de *Ronco*; mais dans les Montagnes il conserve celui de *Bédése*. Ce fleuve & le *Montone* appellé anciennement *Uens*, & *Vitis* (d) qui se déchargeoit autrefois dans la *Padusa*, & tous ces canaux trop multipliés comblèrent de limon le ports de *Ravenne* les uns après les autres, de sorte que les isles & bancs de sable décrits par PROCOPE, & celles qu'on voit dans la carte de la *Romagne* de Magin, furent jointes au continent, & la Mer sur la fin du xvi. siècle étoit déjà éloignée de *Ravenne* de 4. milles, (e) distance qu'on trouve aussi sur la Carte des PP. BOSCOVIC & le MAIRE.

29. Parce que j'ai prouvé ci devant, que le rivage de la Mer étoit anciennement au dessus de *Codrea*, on voit, que tous les fleuves depuis le *Réno* jusqu'à *Ravenne* se déchargeoient autrefois dans la Mer, qui baignoit alors ces Pays, qui sont le long de la droite du *Primaro*. Or tan-

m

dis

(a) Bois du Pin qu'Auguste avoit fait planter pour la Flotte. Rub. hist. Rav.

(b) Il semble qu'il ait été sur le fleuve *Bédése*.

(c) CASSIODOR. in Chron.

(d) LIV. lib. v. PLIN. l. III. c. 25.

(e) RUB. Hist. Rav.

dis que le Pò prolongeoit le continent d'un côté; les fleuves le prolongeoient de l'autre, & remplissoient de limon le long Golphe compris entre les bords du Pò ainsi prolongés, & cette ancienne côté, le long de laquelle ils avoient leurs embouchures. Le *Santerno*, qui en est un des plus considérables, parvint à former une langue de terre jusqu'à l'*Eridan*, avec lequel il conflua, en coupant en deux ce Golphe, dont la partie, qui fût enclavée dans le continent, est le lieu le plus bas des marais entre ce fleuve, & le *Réno*, qui empêchent les rivières de la *Legation de Bologne* de se décharger dans le lit du Pò de *Primaro* élevé de plus en plus sur ces marais par le limon, que le fleuve déposa dans le cours de tant de siècles. L'autre partie du Golphe fût aussi séparée de la Mer par le limon des branches *Messanicus*, & *Paderenus*, qui prolongerent le continent jusqu'à *Ravenne*, tandis, que de l'autre côté les isles sur lesquelles cette Ville étoit bâtie y étoient jointes de la manière qu'on a vû au §. précédent. Le *Messanicus* ayant élevé son lit, répandoit les eaux dans les marais à sa droite, qui en prirent le nom de *Padusa*; AUGUSTE le fit creuser de nouveau pour le rendre navigable jusqu'à *Ravenne*. Le *Paderenus*, dont l'embouchure est celle que *PLINE* appelle *Vatreni ostium*, parvint à se joindre vers le siècle IV. à ce canal d'AUGUSTE au delà de *Ravenne*. Il s'en détacha dans la suite une branche, qui par la nouveauté de son cours fut appelé *Padus Juveniacus*: des chartres du X. siècle en font déjà mention: c'est la partie inférieure du Pò de *Primaro*. Mais enfin les rivières depuis le *Santerno* jusqu'au *Montone* ayant rempli de limon ces marais, ne trouverent pas de résistance à s'ouvrir plusieurs embouchures dans la Mer; car la *Fossa Augusta* comblée de limon n'étoit plus navigable dès le siècle VI., & la voye Romaine, qui lui serroit de digue, étoit peu-à-peu ensevelie sous le sol, qu'il rehaussoit.

30. Les autres soit branches du Pò, soit canaux depuis la branche *Sagis*, furent creusées par les Tyrrhéniens, qui détournèrent le gros des eaux du fleuve dans les marais d'*Adria* appellés *Septem Maria* (voyés la carte). (a) Après la branche *Volane* il y avoit quelques embouchures, que *PLINE* appelle *Ostia plena*. Le lieu de *Co-di-goro* prit son ancien nom de *Caput Gauri*, d'une branche qui se détachoit de la *Volane* avec le nom de *Gaurus fluvius*; Il semble qu'elle ait été appellée anciennement *Neronia Fossa* (b), car la Table Théodosienne à quatre milles de *Sacis* marque *Neroma*: la position de *Corniculani*, qu'elle marque à six milles en deçà d'*Ariano* tombe au passage du *Gaurus*. A six milles de *Co-di-goro* il y a le Village de *Mezzo-Goro*, ainsi appellé parceque quand on le bâtit, il étoit à égale distance entre le commencement du *Goro*, & son embouchure. Cette branche à si fort prolongé le continent, qu'elle a aujourd'hui le double de cours. Sur la fin du *xvi.* siècle le Duc *ALPHONSE II.* de *Ferrare* fit bâtir au rivage de la Mer la maison de *Plaisance* appellée la *Mésola*: (c) aujourd'hui elle en est éloignée de huit milles; mais l'eau a presque manqué dans cette branche. Le Pò d'*Ariano* & les branches suivantes sont nouvelles. Celle que *PLINE* appelle *Carbonaria*, est la branche qui coule du Village de *Corbola*, où les distances marquées dans la Table Théodosienne portent la mansion ad *vii. Maria*; cette branche avec la *Fossa Philistina*, & le fleuve *Tartaro* prolongerent beaucoup le continent, & y enclavèrent les Isles formées par une chaîne de collines, & entr'autres celle, où est bâti *Loreo*, *Lauretum*, qu'on trouve dès le *vii.* siècle dans le nombre des lieux, qui dans les lacunes ce *Vénise* avoient échappé à la domination des

m 2.

Lan-

(a) *PLIN.* lib. *iii.* c. *xvi.*(b) Creusée peut être par ordre de l'Empereur *CLAUDIUS NERON* qui à son retour de la conquête de la Grande Bretagne s'embarqua sur le Pò. *V. DION. CASS.* lib. *60.* & *PLIN.* *ibid.*(c) *RUB. HIST. Rav.* lib. *vi.*

Langobards. PLINE parle du célèbre Port d'*Atria*, dont les Tyrrhéniens, fondateurs de cette Ville, se servoient pour faire sur la Mer supérieure un commerce si grand, qu'elle en prit son nom d'*Atriatique*, changé depuis en celui d'*Adriatique*. Près de cette Ville, qui vit peu-à-peu s'enlever la Mer & le commerce, il y a vers le Sud un petit marais, isolé, (a) qui semble avoir été ce fameux Port comblé par le limon, qui en éloigna la Mer de treize milles.

31. La *Fossa Philistina*; dont le nom indique une des Nations Phéniciennes, qui composoient la Nation connue par les Grecs tous le nom de *Tyrse*, fût creusée par ce Peuple, pour enlever, à ce qu'il semble, aux Thessaliens de *Spine*, avec l'eau de trois anciennes branches du Pô, le commerce, & la défense naturelle qu'ils trouvoient au milieu des eaux. Ce qui leur réussit: & les Thessaliens furent contraints de se retirer dans la Grece. (b) Ce canal conduisoit l'eau du Pô jusqu'à *Adria*; PRISCIEEN en décrit les vestiges depuis *Castelnuovo*, où il se détachoit du Pô, jusqu'à *Cerignano*, & *Mezana*, (c) où le fleuve *Tartaro* y mêloit ses eaux pour déboucher dans la Mer (voyés la carte). Mais dans le tems des Romains les eaux couloient de nouveau en abondance dans la *Volana*, & dans l'*Eridan*; soit qu' Ils eussent réglé la distribution entre ces deux branches, & la *Fossa Filistina*, à fin qu'elles fussent toutes navigables; soit que le Pô pour avoir coulé du tems des Tyrrhéniens trois, ou quatre siècles en plus grande abondance dans cette dernière, en eut élevé le lit, & distribué de nouveau une plus grande quantité de ses eaux dans le deux premières; car du tems de POLYBE l'embouchure *Olane* formoit un Port des plus sûrs de la Mer *Adriatique*, & l'embouchure *Spineuque* du tems de PLINE en formoit

(a) V. Carta del Polesine di Rovigo del BONIFAZIO.

(b) DIONYS HALIC lib. I. STRAB. lib. V.

(c) V. ALBERTI pag. 352. b.

moit un d'assez grande capacité ; l'Empereur CLAUDE descendit sur un grand navire dans l'Adriatique par cette branche ; & au iv. siècle les troupes Romaines embarquées à *Ostiglia* descendoient encore par cette branche & par la *Fossa Augusta* jusqu'à *Ravenne* (a). Depuis le remis des Romains l'eau alla en décroissant dans la *Fossa Philisina*, qu'on trouve encore désignée comme le confin de plusieurs campagnes dans quelques chartres avec le nom de *Pelestina*, ou *Pelestrina* ; & elle cessa d'y couler du Pô depuis le xii siècle ; ses vestiges conservent le nom de *Pistrina*.

32. La direction de ces branches du Pô fait voir que la partie de la plaine, où couloient le *Sagis* & l'*Eridan*, & qui en étoit au commencement la plus inclinée, du tems des Tyrrhéniens avoit déjà été élevé par le limon au-dessus de cette partie, qui est à la gauche du cours de la première ; ce qui est aussi prouvé par la direction du cours de l'eau dans cette suite de canaux creusés par les Romains, sur lesquels, selon PLINE, on navigeoit de *Ravenne* jusqu'à *Altino* ; l'itinéraire d'*Antonin* marquoit aux troupes Romaines cette navigation (b), que CASSIODORE décrit dans une lettre aux Tribuns de la marine de la Province *Venetia*. Ces canaux étoient fort-importans dans ces tems antérieurs à l'invention de la boussole, dans lesquels on craignoit de perdre de vue les côtes : dans les mois orageux on navigeoit en grande sûreté sur ces canaux (c) ; il auroit été fort dangereux de côtoyer le rivage de la mer aux embouchures du Pô, à cause du courans & des bancs de sable, qui varioient beaucoup, & qu'on ne connoissoit pas trop. Entre l'*Eridan* & la *Volane* (voyez la Carte) continuoit la *Fossa Augusta* près d'un lieu de même nom, &

(a) Tab. Theod. segm. IV. edit. Vindob. 1753.

(b) *Ravenna: Inde navigantur septem maria Altinum usque.*

(c) *Cum ventis favientibus mare fuerit clausum, via vobis panditur per amantissima fluviorum &c.* CASSIOD. Var. lib. XII. ep. 24.

& l'eau y couloit de la *Volane* ; car telle étoit la direction d'un *rivus Baderinus* (a). Le lit de cette branche étoit donc alors plus élevé que celui de l'*Eridan*. L'eau de la *Fossa Neronia* couloit de l'autre côté de la *Volana* jusque dans la *Fossa Philistina*, & la pente du sol continuoit même au-delà de l'*Adige* ; car *PLINE* assure, que le Pô mêloit ses eaux avec celles de l'*Adige*, du *Togifonus* & des deux *Medoaci* (b). Ce qui arrivoit au moyen du canal appelé *Sylvus longus* (c), qui depuis *Ariano* les conduisoit par *Corbola* dans le *Tartaro*, & delà traversoit l'*Adige* à *Caput Aggeris* (*Cavarzere*), & après avoir reçu le fleuve *Togifonus* (d), une partie de ses eaux débouchant dans les *Lagunes de Venise*, avoit ouvert la langue de terre opposée & formé le Port de *Brondolo* (e) ; l'autre partie continuoit son cours dans la *Fossa Clodia*, à laquelle venoit se joindre un canal, qui conduisoit une partie de l'eau du *Medoacus major* (*la Brenna*), & du *Medoacus minor* (f) : ces eaux avoient rompu la même langue, & forme l'ouverture qu'on appelle *Porto di Chioggia*.

33. Le limon déposé par ces branches & canaux, produisit une grande inégalité d'élevation dans le sol, dont s'ensuivirent des grands changemens dans leurs cours. Dans la partie de la plaine comprise entre la *Volane* & la *Fossa Philistina*, qui se trouva par cette raison moins élevée que le lit de ces deux branches, il s'en forma une nouvelle, qui aujourd'hui est la plus abondante de toutes. Environ l'an 1150. les habitans des lieux voisins de *Ruina*, envieux de la prospérité, dont jouïssent les cultivateurs de son territoire

(a) Dipl. an. 1013. in Append. *Difesa della S. Sede per Comacchio*.

(b) *His se padus miscet, ac per hæc effunditur*: l. cit.

(c) Chron. Ferrar. l. c.

(d) Ce fleuve, qui avoit sa source dans le territoire de *Padoue* près des bains d'*Abano*, a changé de cours & de nom.

(e) *PLIN.* ibid. V. la Carte du *Padouan* de *MAGIN*.

(f) Les *Padouans* en ont beaucoup changé le cours ; entre *Padoue* & *Pieve di Sacco*, on l'appelle *Fiamicello*. V. *MAGIN* ibid.

toire très-fertile , couperent au-dessus de cet endroit la rive gauche du Pò, qui submergea cette campagne , & fit des grands ravages en s'ouvrant une issue dans la mer ; enfin les Ferrarois avec bien de travail firent des digues tout le long de son cours , & il se creusa son lit. On appella cette branche *la Rotta di Ficarolo* (a). Dès le xiv siècle les eaux y couloient en telle abondance , qu'elles égaloient celles des deux autres branches *Volana* , & *Primaro* (b) ; de nos tems la plus grande partie des eaux du Pò coule dans la dite branche , qu'on appelle par cette raison le *Pò grande* ; elle changea souvent ses embouchures , qui produisirent une telle prolongation de continent , que suivant la Carte des PP. BOSCOVICH & le MAIRE, il y a aujourd'hui 17. milles de distance entre *Ariano* & la partie la plus avancée du rivage voisin. L'*Adige* dans la dernière partie de son cours , c'est-à-dire après s'être dirigé vers l'Est , réhaussé de même beaucoup son lit : delà ces changemens de lit , qu'il a fait entre la *Badia de Vangadizza* & *Cavarzere* (voyez la Carte) , & les fréquentes ruptures qu'il fait à ses rives (c). Ce réhaussément de sol a empêché *la Rotta di Ficarolo* de couler dans le lit de ce fleuve , qui est aujourd'hui plus élevé , que la branche du *Pò delle Fornaci* à *Anconetta* ; car de cet endroit on remonte à force de chevaux le canal de *Loredò* , qui est assez rapide (d) ; les eaux de l'*Adige* coulent aussi dans le *Tartaro* par le canal qu'on appelle *Scortico* , & celle du *Tartaro* dans le Pò par la *Fossa Polifella* (e). Ces canaux , selon PRISCIEN , furent creusés pour décharger au moyen d'une partie de l'eau de
l'Adi-

(a) ALBERTI pag. 345. b.

(b) Chron. Ferrar. l. cit.

(c) Cette branche qu'on appelle l'*Adigetto* est l'ancien lit de l'*Adige* ; qui dans plusieurs Chartres de cette Abbaye est appelé *Adeste veclo* , ou *Flumen veculum*.

(d) Voyage d'Europe tom. VI. p. 782.

(e) On doit observer que ces canaux font presque un angle droit entre les fleuves *Adige* , *Tartaro* & Pò.

l'*Adige* celles des grands marais, qui sont dans ces lieux ; mais ils sont souvent enflés par les eaux de l'*Adige*, du *Tartaro* & du *Menaco* de telle sorte, qu'ils inondent une grande étendue de pays (a).

34. Toutes ces branches du Pô, & ces canaux trop multipliés ont souvent produit des grandes inondations, pour peu que les pluies ayent été abondantes ; celle entr' autres qui arriva l'an 589. fit des terribles ravages (b). Le moyen de les empêcher & d'assurer un lit plus constant au fleuve est de faire en sorte qu'il se divise en moins de branche qu'il soit possible. Cela semble un paradoxe suivant le préjugé commun, que les eaux doivent baisser dans les fleuves à proportion de leur diramation ; que, par exemple, si l'on dérive d'un fleuve un canal d'une capacité égale à celle de son lit, l'eau doive y baisser de moitié ; & au contraire que si on fait confluer dans le lit d'un fleuve une quantité d'eau égale à celle qui y coule ordinairement, l'eau doive s'y élever du double. Mais ceux qui jugent ainsi, n'observent pas que c'est à la vitesse qu'on doit faire le plus d'attention dans le cours des fleuves, & qu'elle croit en raison de la masse des eaux qu'on y fait confluer. M. GENNETÉ (c) a prouvé en dernier lieu par des expériences exactes, que les eaux des fleuves ainsi divisées ne doivent baisser que de peu, & qu'on peut y en faire confluer une assez grande quantité sans craindre des inondations ; car après avoir fait couler dans un canal artificiel une quantité d'eau constante, & avoir marqué la hauteur qu'elle avoit, il y fit confluer dans une autre canal une quantité d'eau égale, & il observa qu'elle ne s'élevoit que d' $\frac{1}{10}$; il joignit un troisième canal, & l'eau ne s'éleva que d' $\frac{1}{20}$, & ainsi de suite ; & au contraire ayant divisé l'eau d'un canal com-

mun

(a) ALBERTI pag. 351. b.

(b) V. Hist. Miscel. lib. XVIII.

(c) Réflexions sur le cours des fleuves.

mm en deux canaux égaux , il observa , que l'eau ne baif-
 foit dans ces canaux que d' $\frac{1}{3}$, dans trois d' $\frac{1}{2}$, dans quatre
 d' $\frac{1}{2}$, & ainfi de fuite. La vîteffe que les eaux d'un fleu-
 ve , qui étoit divisé , acquierent étant réunies , produit en-
 core cet autre avantage , qu'il se fait moins de déposition
 de limon sur le fond du lit. M. GENNETÉ fait espérer un
 autre ouvrage , dans lequel il donnera entr'autres méthodes
 celle de nettoyer aifément les lits des fleuves : il est abfo-
 lument neceffaire de le faire , fi on veut leur affûrer un
 lit constant dans la partie de leur cours , où ils commen-
 cent à le réhauffer.

35. Quant aux autres changemens arrivés au cours du Pô,
 au-deffus de l'endroit , où il fe divife , je n'en marquerai
 auffi que les plus confidérables. Dans le fiécle xi. il cou-
 loit entre *Luzzara* & *Suzara* vers *S. Benedetto* , où il rece-
 voit le fleuve *Lirone* ; & la partie du cours qu'il a au-
 jourd'hui entre *Borgoforte* & *S. Giacomo* , étoit le lit de l'*Oglio* ,
 dans lequel il coula après avoir rompu à la gauche de *Luz-
 zara*. A *Plaisance* , dont il baigne les murailles , il couloit à
 un mille & demi vers le Nord ; car telle étoit la diftance
 du *Portus* ou *Emporium Placentinum* , qu'*ANNIBAL* manqua
 de furprendre , & qui étoit fitué près du fleuve , du mê-
 me côté que la Ville ; la voye Romaine , qui de *Plaisance*
 conduifoit à ce port , fubfiftoit encore dans le moyen âge
 (a) ; le long des murailles de la Ville couloit dans le Pô
 un fleuve appellé *Fons Angufti* , & les fources qui naiffoient
 dans fon lit étoient fi abondantes qu'on le navigeoit au
 grand avantage de la Ville ; dans le fiécle xiv. il y cou-
 loit quelquefois dedans une partie des eaux du Pô & de la
Trebia (b) ; & depuis ce tems , le Pô ayant élevé fon an-
 cien lit au-deffus de celui de ce fleuve , il y transporta
 n routes

(a) *Secus viam publicam , quæ ab urbe Placentia ad Placentinum Portum ducit.*

Dipl. an. 879. publ. par *CAMPI Storia Eccl. di Piac. tom. I.*

(b) *Chron. Placent. in tom. XVI. Rer. Italic. p. 561.*

toutes ses eaux. Près de *Pavie* il couloit autrefois dans cet ancien lit, qu'on appelle *la Rotta*, & qui contient encore une partie de ses eaux; le *Tésin* y confluoit à un demi-mille de *Pavie*; mais le Pô ayant rompu le rivage à sa droite, fit rengorger le *Tésin*, & inonda la campagne voisine; enfin ayant fixé son cours, le *Tésin* y transporta son confluent à 4. milles à l'Est de *Pavie*, & les marais se desséchèrent, & laissèrent à découvert l'isle appelée *Mezano* (a). Entre les confluens de la *Sesia* & de la *Doira Bauia* il a souvent changé de lit. La voye Romaine, qui s'étendoit le long de sa rive gauche entre les Villes de *Quadrata* & *Rigomagus*, l'empêchoit de se jeter sur la plaine; mais le Pô & les eaux qui couloient au-delà de la voye ayant réhaussé le sol, & couvert cette digue, il se détacha depuis ces tems des collines du *Montferrat*, rompit sa rive gauche, se creusa des nouveaux lits & emporta les ruines de *Rigomagus*, rebâti sur la fin du siècle vi. sous le nom de *Tridinum*, après avoir contraint les abitans à transporter leurs abitations plus loin de son bord, où il bâtirent l'an 1210. la Ville de *Trin* (b). Mais ces nouveaux lits ayant été aussi réhaussés, le fleuve reprit son cours dans les anciens; ainsi l'an 1297. il avoit quitté son lit vers *Palazolo*, & s'étoit jetté vers la colline, où est *la Rocca delle Donne* (c). Il l'a souvent changé depuis; & aujourd'hui entre la *Doira* & la *Sesia* il coule presque partout divisé en deux lits. L'an 1610. quantité de pierres ayant éboulé du rocher de *Verruë*, dont il baignoit le pié, il fut contraint de se jeter vers *Crescentin*, où il se creusa le lit dans lequel il coule depuis ce tems; car il ne servit de rien que de lui faire une digue sans en avoir dégagé le

lit

(a) On donnoit dans le moyen âge à ces fortes d'Isles le nom de *Medianum*. MURATOR. Dissert. XXI.

(b) V. IERIC. Dissert. de *Rigomago*, & Hist. *Tridin.* lib. I. p. 14. 64. 65.

(c) *Sommario Comm. Fontaneto*, e *Gabiano* 1745.

lit de ces pierres: il l'emporta à la première inondation (a).

36. Ces changemens, comme j'ai observé au §. 13, sont produits par le peu de pente qu'a le lit du fleuve. A *Turin* il n'est élevé que de 100. toises sur le niveau de la mer (b). Or à cause de tous les petits détours, le plan de son cours depuis cette Ville est long d'environ 300. milles. La descente de l'eau ne seroit donc que de $\frac{4}{11}$ de toise pour chaque mille s'il coulat sur un plan; mais elle est plus grande que cette quantité vers *Turin*, & moindre vers l'embouchure; car comme il dépose dans la partie inférieure de son cours toujours plus de limon, il réhausse de plus en plus, & rend courbe cette superficie sur laquelle il coule; on doit donc la considérer comme composée d'un grand nombre de plans, dont la hauteur va toujours en diminuant; & distribuer cette descente & la vitesse de l'eau en raison de leur inclinaison; mais déstitués d'observations dans d'autres parties de son cours, on ne peut pas la déterminer: les plus importantes seroient celles de la hauteur de sa source, & du lieu où ses eaux reparoissent vers son entrée dans la plaine. En général depuis ce lieu jusqu'à la colline de *Turin*, la vitesse qu'il a, & l'inégale résistance qu'il trouve dans les rives, font qu'il varie beaucoup son lit, en les rongant de côté & d'autre; le long de cette colline, la qualité des rives, & plus encore la quantité de sa vitesse, qu'on peut appeller moyenne, fait qu'il ne creuse, ni ne réhausse pas son lit, qui est en ce lieu assez constant. Mais en se dirigeant ensuite vers l'Est, il commence à le réhausser, ce qui l'oblige souvent à transporter ses eaux de côté ou d'autre des isles qu'il forme.

37. Après m'être étendu sur les changemens du cours du Pô autant que peut permettre le plan de ce Mémoire;

n 2

il

(a) *Alleg. per Crescensino 1741.*

(b) M. NEEDHAM a déterminé la hauteur de la Ville à 101. toises, *Observ. Barometr.*

il me reste à ajoûter quelques observations sur sa source , & sur quelques unes des rivières qu'il reçoit ; & je finirai par indiquer les effets de la prolongation du continent à l'embouchure des fleuves. Le Mont *Viso* , appellé par les Anciens *Vesulus Mons* , s'éleve fort en pointe , & est entouré de tous côtez de rochers escarpez. Quelques jeunes hommes , qui grimperent sur son sommet , rapportoient à ALBERTI qu'il y a une petite place (a) . Vers le milieu de la descente un petit lac , qui au jugement de CLUVIER est très-agréable , & ne déborde jamais , par des conduits souterrains donne l'origine à trois fontaines , qui au-dessous de ce lac sortent du sein de la montagne (b) . Celle qui fort plus bas que les autres , & vers le pied de la montagne , est la plus abondante en eaux , & a été proprement appellée *Padus* (c) . PLINE observe , que *Padi fons mediis dièbus æstivis , velut interquiescens , semper aret* (d) . “ Elle est „ au milieu d'un pré , proche des ruines d'un Chateau , que „ le Roi CHARLES VIII. avoit fait bâtir pour la commo- „ dité du passage de France en Italie „ (e) . Ces trois fontaines se réunissent , & le fleuve se précipite des rochers avec un très-grand bruit ; en roulant des grosses pierres , & est si abondant d'eaux , qu'il pourroit faire tourner une meule ; sans avoir cependant aucun lit constant dans ce sol pier-

(a) Mais il se méprend en disant , que sur ce sommet il y a deux fontaines ; dont l'une donne la source à la *Durance* & à la *Doira* , & l'autre plus basse au Pô. Pag. 384. b. 385. Il copie trop à la lettre le texte de STRABON au liv. IV.

(b) CLUVIER. Ital. Ant. lib. I. c. 35. PLIN. l. c. *Padus e gremio Vesuli montis*

(c) MELA l. II. c. 4. CLUVIER. *ibid.*

(d) L. II. c. 103.

(e) GUICHENON Hist. Général. de la R. Maison de Savoye. Lib. I. c. 3.

C'est le pertuis du M. *Viso* , aujourd'hui comblé de pierres , qui se détachent de la cave de la montagne. Un Auteur de ce tems le décrit ainsi : “ Il y a un nouveau passage bien merveilleux pour entrer au „ pays d'Italie ; c'est par un pertuis qu'on a fait à côté du M. *Visol* par „ une montagne qu'on a percé tout outre puis 14. ans ença , & dure en- „ viron un get d'arbalestre. „ JACQ. SIGAULT *Totale description des passagers des Gaules en Italie* , publiée par CAMUZAT Melang. Hist. p. 162.

pierreux. Enfin après un cours de 21. milles Romains (a), dans la Vallée, dont la plus grande largeur n'excede pas un mille, à son entrée dans la plaine, il se perd entre *Revel* & *Saluces* absorbé par le gravier qu'il y a porté; de sorte qu'en Eté on le passe à pieds secs, & dans les autres saisons de l'année il coule avec peu d'eaux (b). *PLINE* ne s'est pas exprimé avec son exactitude ordinaire en supposant qu'il coule par un conduit souterrain (c): *Condensque sese cuniculo, & in Forovibiensium agro iterum exoriens*; car on sent en passant sur ce gravier le bruit de l'eau dont il est imbibé. Il coule de nouveau vers la fin du territoire de *Revel*, peu loin de l'Abbaye de *Stapharde*; où il reçoit sur sa droite le torrent *Bronda*, & quatre milles au-dessous, un canal, qui conduit une partie des eaux de la *Vraita*, creusé par ordre du Marquis *MAINFROY IV.* de *Saluces* pour arroser la campagne appelée la *Gerbola*, qu'il fit défricher, & ensuite il reçoit cette rivière, & la *Maira*. Les cartes Géographiques marquent un canal de navigation, qui conduit une partie des eaux de la *Siura* dans le *Pô* peu au-dessus de *Carignan*; il avoit été projeté dans le siècle dernier par le célèbre Marquis de *PIANEZZA*, & exécuté dans sa partie entre *Carmagnole* & le *Pô* (d); mais sa mort interrompit cet ouvrage, qui auroit été fort avantageux au commerce entre *Nice* & *Turin*, sur tout depuis qu'on fait de si grands travaux au Port de *Nice*. Delà jusqu'au *Tanaro*, le *Pô* ne reçoit que des torrens. La *Trebia* & les rivières suivantes inondoient une grande étendue de la plaine avant que les Romains eussent fondé leur Colonie de *Plaisance* l'an 218. avant l'Ere vulg. *EMILIUS SCAURUS* qui
 fit

(a) Ou de 14. milles du Piémont.

(b) *CHIESA Cor. Reale.*

(c) Cela a lieu dans le *Rhône*, le *Meise* & le *Negro*, qui coulent sous des rochers dont la Chaîne traverse leur cours. *CÆSAR* de bel. Gall. lib. I. *GÜICHEN.* lib. I. c. 3. *PLIN.* lib. II. c. 103.

(d) On l'appelle le *Navitio*.

fit construire la voye *Emilienne* entre *Rimini* & *Plaisance*, fit écouler ces marais dans le Pò, en creusant un grand canal navigable sur le territoire de *Parme* (e); dont une partie subsiste encore sous le nom de la *Parmigiana*. Je m'éten-drois trop en décrivant les changemens de cours des ri-vières de la *Lombardie*, & les canaux qu'on a fait en dif-férens tems, surtout dans le *Modenois*, le *Bolonois* & le *Ferrarois*; on peut consulter les ouvrages, qu'ont fait à cette occasion *MANFREDI* & *GUGLIELMINI*, & ceux que j'indi-que dans la note (b).

38. Entre les rivières que le Pò reçoit à sa gauche, la petite *Doire* est grossie par le torrent *Cinifella*, qui coule du lac qui est sur la plaine du Mont *Cenis*. Ce lac étoit autrefois beaucoup plus grand (c); c'est parcequ'il occu-poit toute cette plaine, qui a cinq milles de long, sur un de large, que les Romains ne pratiquerent point une voye sur cette montagne; mais une grande partie de ses eaux ayant écoulé, *CHARLEMAGNE* y passa avec son armée en 774. (d). Elle porte toutes les marques des volcans; car il y a autour du lac des cavités en forme de cones renversés, qu'on ne peut attribuer qu'aux exhalaisons du feu; & il semble qu'elle ait pris son nom (*M. Cenisus*) des cen-dres. Les volcans & les tremblemens de terre ont produit des grands changemens dans les montagnes; *PLINE* assure que les Alpes & les Apennins en avoient souvent éprouvé les secousses (e). La configuration de cette montagne in-dique, que le *Grand* & le *Petit* Mont *Cenis* n'en faisoient qu'une seule; & que la voûte qui les joignoit, & couvroit l'abîme d'eau contenu dans son sein, ayant écroulé, laissa à dé-

(a) *STRAB.* lib. V.

(b) *CORRADI*, *Effetti dannosi delle paludi, ec.* Modena 1717. *SILVESTRI*, *Descr. Paludi Adriatiche.* *MURATORI* *Antiq. Italic.* Dissert. XXI.

(c) *Superne in cavis quibusdam locis magnus continetur lacus; duoque fontes &c.* *STRAB.* lib. IV.

(d) *V. EGINHART.* in *V. Caroli M.*

à découvert ce Lac formé par le bassin de la Montagne, qui retint une partie des eaux. (a)

39. PETRUS AZARIUS, qui écrivoit vers la fin du XIV siècle, donne une curieuse description de l'*Orgo*, & la *Doira Bautia* (b). Il observe que ce deux fleuves, quoique peu éloignés, sont tout-à-fait différens. Le premier rend fort fertiles les terres qu'il arrose; quoiqu'il inonde, il a des guez bons & sablonneux; on trouve dans son lit un grand nombre de poissons excellens, & on y recueille quantité d'or en des grains si gros, qu'il en vit un de la valeur de seize florins. „ La *Doira* a sa source dans des Montagnes „ couvertes de glaces éternelles: point d'or dans son lit, „ point de poissons, & de guez dans le Canavez; s'il „ coule dans les champs, il les détruit, si dans la prairies „ il en gâte & brûle les herbes. L'Auteur de la Chronique de *Plaisance* fait une observation semblable sur le rivières *Nura*, & *Trebia*; & dit que le Pô rend fort fertiles les terres qu'il inonde, quoiqu'il cause souvent des grands dommages à ses voisins. (c) PLINE observe aussi que le Pô dans ses inondations, *Agris quamvis torrentior, nil tamen ex ripto sibi vindicans, atque ubi liquit agros, ubertate largior.* ce qu'il faut entendre de la plus grande partie de son cours dans la plaine. Ces différens effets sont produits par les terres, & les sels, ou par l'Ocre, & le sable qu'ils charient dans une partie de leur cours, & déposent dans une autre.

40. La *Doira Bautia* mêloit anciennement ses eaux avec celles d'un Lac, qui étoit formé par le bassin que font les col-

(a) La hauteur de cette Montagne étoit donc plus grande, que celle, qui a été observée à la *Glacière* (v. §. 2. Nota 4), & qui seroit trop petite à l'égard de la distance, où elle est du *Mont Tourné*.

(b) *Lib. de Bello Canepic. in princ. Rer. Ital. tom. xvi.*

(c) *Flumen Nurie, quod distat a civitate per quatuor milliaria, est optimus Fluvius pro terris impingandis, & pro pannis laborandis; non est enim terra ita mala, si irrigetur ab aqua ista, quod non efficiatur optima, & est Fluvius satis magnus. Fluminis Trevia aqua mala est pro terris; nam eas facit macras. Rer. Ital. T. xvi. p. 361.*

collines, qui s'élargissent à *Ivrée*, & se retrécissent de nouveau à *Maffè*. Les Lacs de *Viverone*, & de *Candia* en font des parties, qui ayant une plus grande profondeur, ne laissent point écouler toutes leurs eaux. La partie à la gauche de la rivière étoit plus grande que celle de la droite. AZARIUS, qui le décrit, assure qu'on voyoit dans le Comté de *Mazin*, & près de *Viverone* les murailles des Ports qu'il y avoit sur ce Lac, & les anneaux de fer, auxquels on attacher les bateaux. L'eau de la *Duria*, qui couloit dans le Pô, ayant élargi le détroit de *Maffè*, entraîna avec elle la plus grande partie des eaux du Lac. La Table Théodôsienne en marque un considérable à la source de cette rivière; PTOLÉMÉE l'appelle le Lac *Poenin*, & dit que la *Doria* avoit sa source à côté de ce Lac. (a) Ils ne marquent pas des Lacs si petits que celui de *Ruto*, duquel coule une de ses deux sources. Il semble donc qu'on en puisse conclure que la Vallée de *Courmajeur* dans laquelle coule l'autre source ait été occupée par un Lac dont les eaux se soient de même écoulées. Cette table marque aussi un *Lacus Cusius* à la source d'une rivière sans nom, qui ne peut être autre que la *Sésia*. Il est assez vraisemblable que le Lac, dont coule cette rivière, ait été beaucoup plus grand; un Auteur, qui décrit exactement le Diocèse de *Novare* (b), assure que les Villages qui sont dans le fond de la Vallée de *Sésia* sont assez nouveaux. Le même Auteur décrit un autre Lac de quelques trois milles de long & de large, qui étoit près de la *Sésia*, entre *Prà*, & *Grinasco*, dont l'eau a écoulé avec celle de cette rivière; & une partie du Lac *Majeur*, qui a été remplie par le limon porté par la rivière *Tosa*. Quoique les trois grands Lacs (c) n'aient pas été depuis plusieurs siècles retrécis dans leur longueur par les

(a) Geogr. I. III. c. 1.

(b) CAROL. a BASILICAPETRI, *Novaria*.(c) *Majeur*, de *Come*, & de *Garda*.

les fleuves qui les traversent : les mesures qu'en donnent les anciens, & les modernes étant à peu près égales ; (a) cependant les pierres, & le sable qu'ils y portent, & que leur courant roule bien avant dans le Lac, en rehaussent nécessairement le fond ; ce qui fait que l'eau s'y soutient encore à une hauteur à peu près égale à celle qu'ils avoient il y a deux milles ans, quoique il en écoule par les rivières, qui en sortent, plus qu'il n'y en entre.

Tant de fleuves qui prolongent le continent à leurs embouchures, comme j'ai prouvé à l'égard du Pô, & qui rehaussent de leur limon le fond de la Mer, tandis qu'ils la resserrent de tous côtés, doivent contraindre ses eaux de s'élever sensiblement, & de submerger les Terres qu'elles baignoient, qui deviennent toujours plus basses que le niveau de la Mer. Quelques Naturalistes, qui ont tâché d'établir le contraire, c'est-à-dire, que la Mer s'éloigne toujours plus des côtes, & que les eaux se retirant continuellement dans les cavités de la Terre, laisseront enfin le fond de la Mer en sec : qu'au commencement la Terre sèche ne consistoit que dans un' Isle, dont les bornes s'étendirent jusqu'à former les vastes Continens, qui sont aujourd'hui découverts, ont tiré cette conséquence d'observations trop bornées. M. LINNEUS (b) entr'autres, la déduit de celles qu'il a faites dans le Golphe *Bothnique*. Ce Golphe long & étroit, dans lequel se décharge un grand nombre de fleuves, qui y portent beaucoup de pierres, & de limon, deviendra toujours plus retréci ; & ces fleuves qui descendent de Montagnes fort hautes, & qui après un cours peu long, mais d'autant plus rapide, déchargent leurs eaux dans la Mer, se creusent dans plaine qu'ils parcourent des lits toujours plus profonds (c) mais

o

il en

(a) POLYB. apud STRAB. lib. IV. in fine, Itin. ANTON., VAGLIANO *le Rive del Verliano*, PAULI JOVII *Larii Lac. descr.*

(b) *Dissert. de Tellure habitabili* in vol. II. *Amoenit.*

(c) Les Lacs, qui sont si nécessaires dans ce Pays, y sont fort étendus & en grand nombre.

il en auroit déduit tout le contraire s'il eut observé que même dans la Mer *Baltique* l'Isle de *Rugen* étoit autrefois une partie du continent; que la Mer a beaucoup gagné sur les côtés Occidentales du *Dannemark*, & sur celles de la *Frise*; que dans les *Pays-Bas* l'eau du *Rhin* ayant cessé de couler par l'embouchure du Lac *Flevo* la Mer y entra, & submergea une grande étendue de Pays (a); & sans chercher plus loin des exemples, qu'elle entra de même par l'embouchure du Pô *Vergnese*, y forma un Lac, qui n'avoit encore dans le xvi siècle que 12 milles de circuit, mais qui submergeant de plus en plus les terres voisines, en a aujourd'hui 60.; qu'on voit le long des côtes de la Méditerranée les ruines de plusieurs Villes au milieu de ses eaux &c. La surface de la Terre doit enfin plus perdre que gagner (b); & si la Révélation ne nous enseignoit pas qu'elle ne doit plus éprouver un déluge (c), mais un embrasement (d), on en devoit conclure que dans la suite d'un grand nombre de siècles elle feroit toute couverte par les eaux.

(a) Occupé aujourd'hui par le Golphe appelé *Zuider zee*.

(b) *Mons cadens defluit, & saxum transfertur de loco suo. Lapidés excavant aquæ, & alluvione paulatim terra consumitur*, JOB, XIV. 18. 19.

(c) Genes. IX. v. 11. ec.

(d) PETR. epist. II. v. 7. 10. 12.

Fautes à corriger.

Pag. 28. ligne 7 quarrée, *lisés* quarré.

Pag. 8. ligne 22. démontrent, *lisés* démontrant.

Pag. 47. linea 3. $\overset{\circ}{C} \circ < \overset{\circ}{C} \circ$. lege $\overset{\circ}{C} \circ < \overset{\circ}{C} \circ$

Pag. 51. linea 6. in nota subtiliori *supple* acumini.

Pag. 53. Post Sciagraphiam *adde* titulum progressus gradua-
lis combinatorius.

Pag. 54. linea 25. Isquierdo, *lege* Izquierdo

57. linea 2. \odot , (\odot) .

61. linea 1.

$\overset{\circ}{S} < \overset{\circ}{S}$ Hinc $\& \overset{\circ}{U}, \omega$ lege $\overset{\circ}{S} < \overset{\circ}{S}$ Hinc $\& \overset{\circ}{U}, \omega$

linea 2. $< \overset{\circ}{C} \overset{\circ}{C} \overset{\circ}{C}$ ergo $\overset{\circ}{U}$ inter $\&$ nulla ω , *lege*

$\leq \overset{\circ}{C} \overset{\circ}{C} \overset{\circ}{C}$ ergo $\overset{\circ}{U}$. inter $\&$ nulla ω .

Observandum indiscriminatim a Typhothesis appositum fuisse
 $\tau o <$ pro $\&$, $\&$ *vel*.

Loco $\overset{\circ}{S} < \overset{\circ}{S}$ lege $\overset{\circ}{S} < \overset{\circ}{S}$ ubicumque recurrit.

$\tau o a$, τo non a curvis litteris pingendum erat.

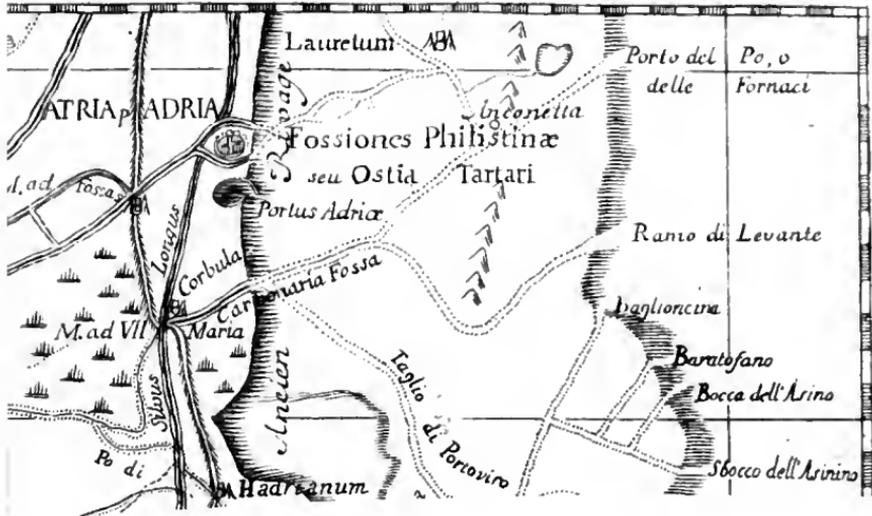
Pag.	69.	lign.	7.	Are	:	:	Ere
	72.		26.	des fleuves			du fleuve
	[78.		15.	da	.	.	de
	90.		1.	les fleuves			ces fleuves
	91.		30.	ce	.	.	de
	92.		11.	tous	.	.	sous
	100.		8.	place	.	.	plaine
	102.	Note	(e)				(e) Plin. lib. II. c. 80.

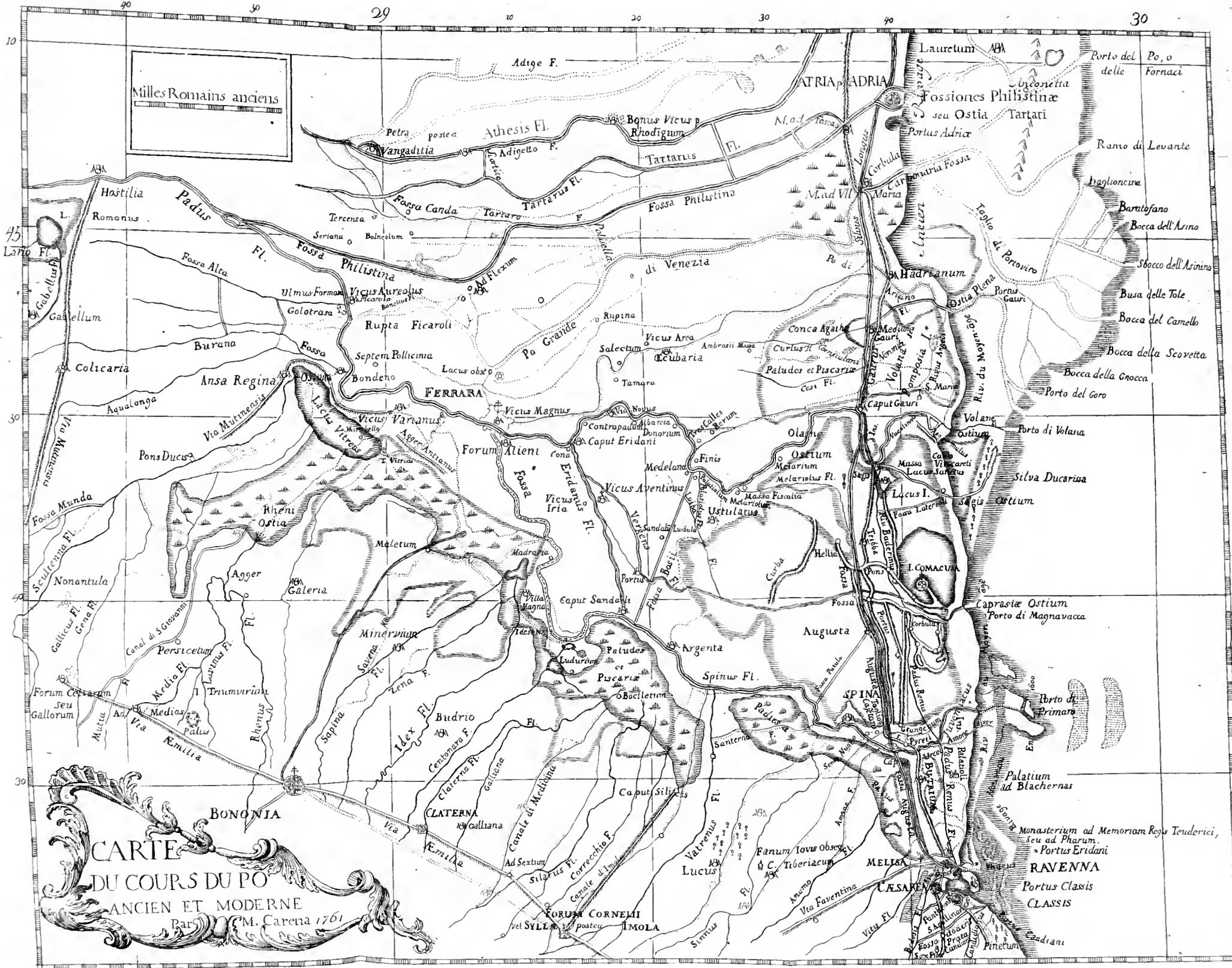
Imprimatur. PISELLI Vic. Gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la Stampa

GALLI per la Gran Cancelleria.







Milles Romains anciens

CARTE
DU COURS DU PO
 ANCIEN ET MODERNE
 Par M. Carena 1761

Hostilia Romanus

Colicaria

Nonantula

Forum Cortanum seu Gallorum

BONONIA

FORUM CORNELII

Fossa Philistina

FERRARA

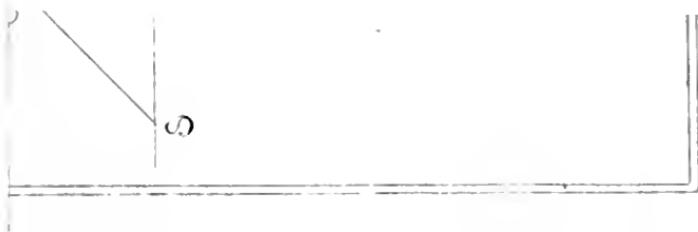
Minervium

Budrio

CLATERNA

IMOLA

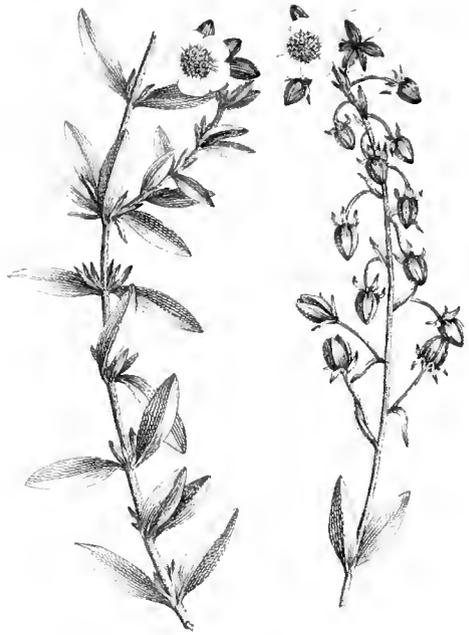
RAVENNA
 Portus Classis
 CLASSIS



T. I.



T. II.



T. III.



T. IV.



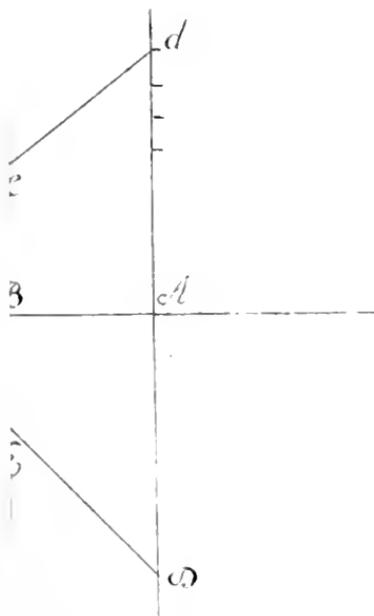
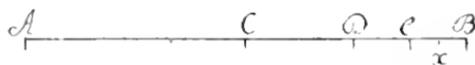
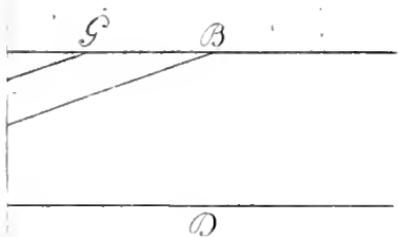


Fig. 1.

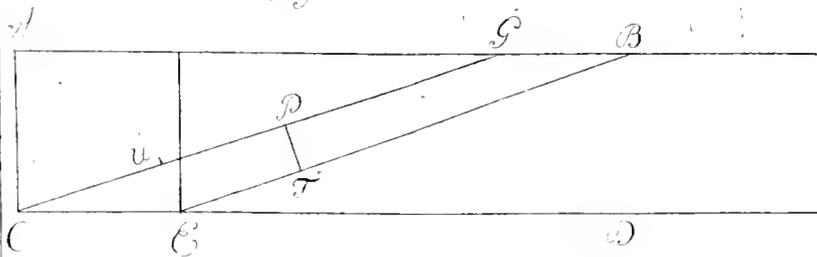


Fig. 2.

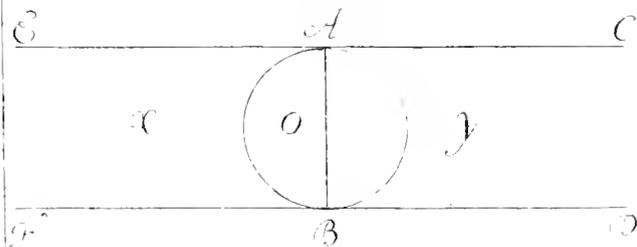


Fig. 4.

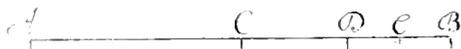
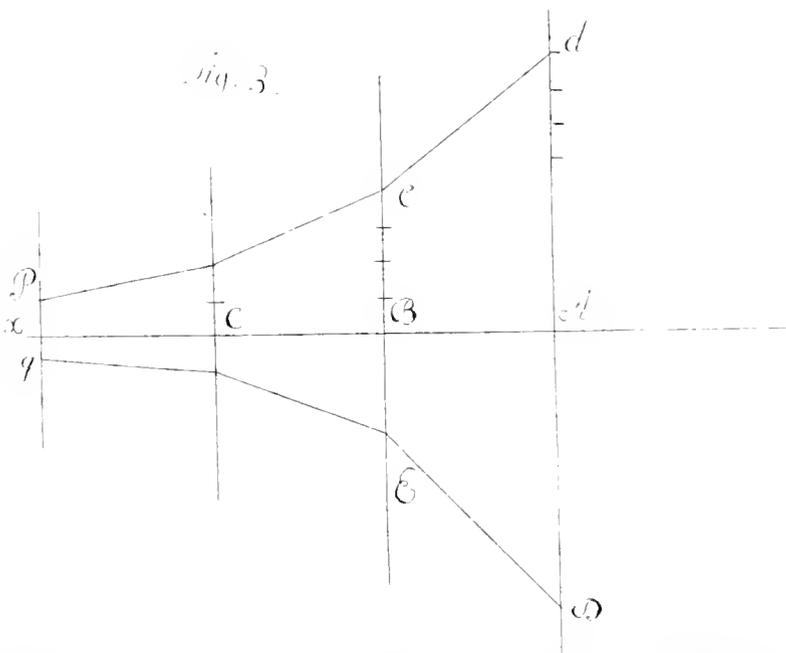
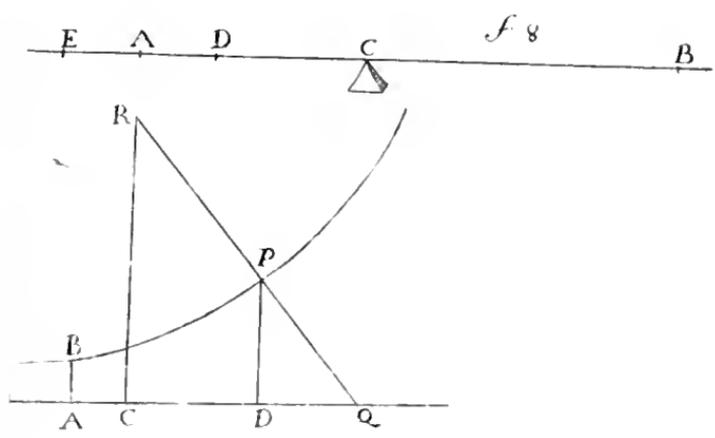
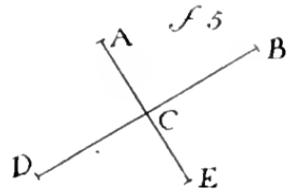
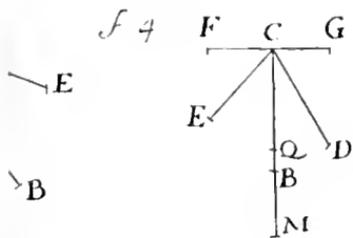
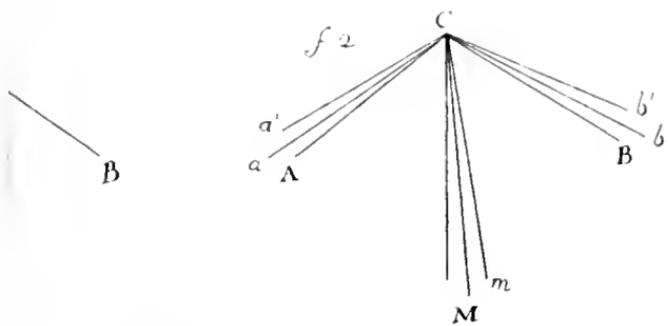


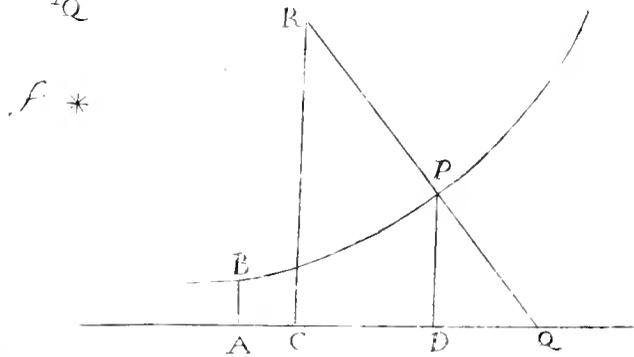
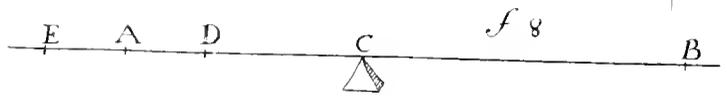
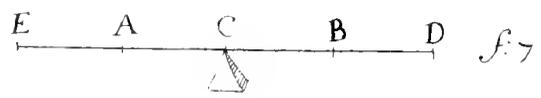
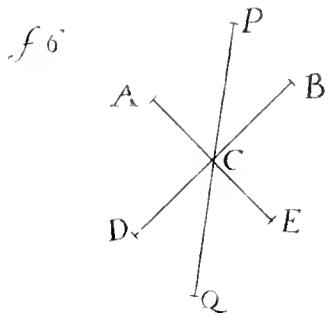
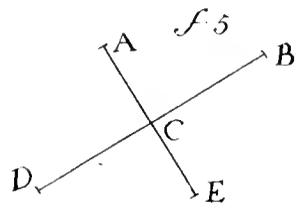
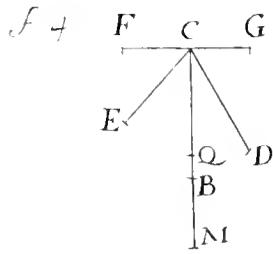
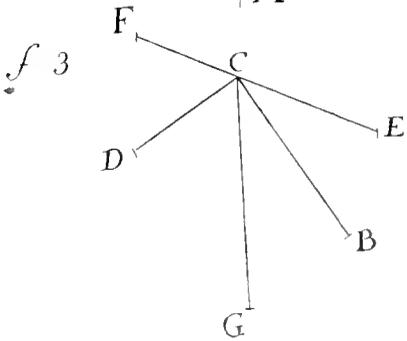
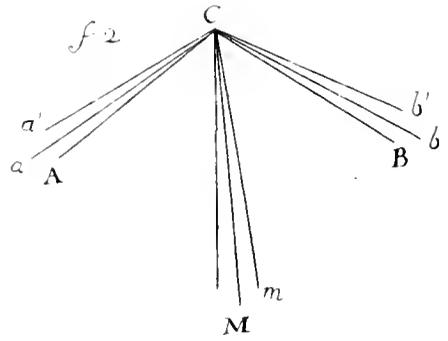
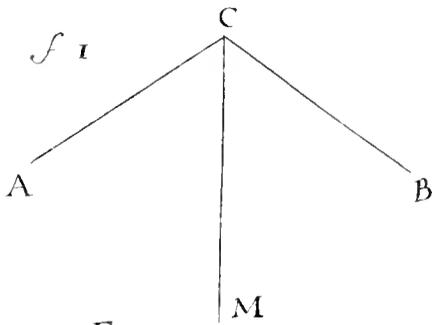
Fig. 5.

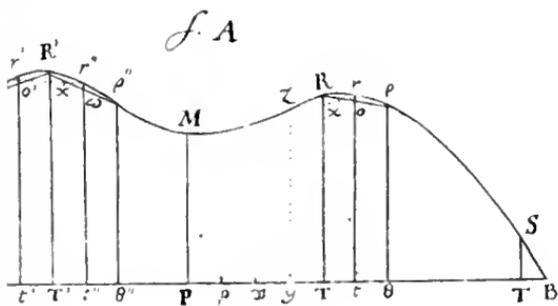
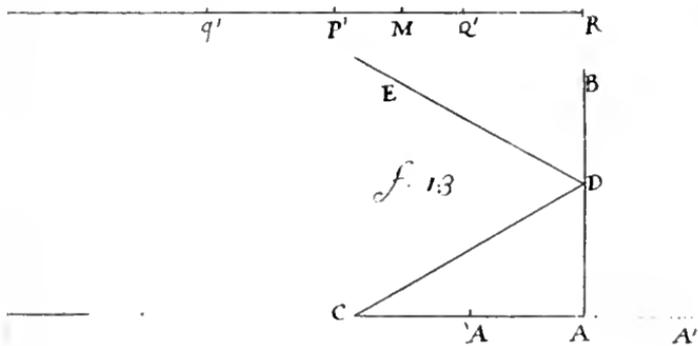
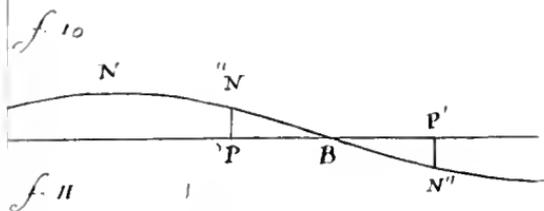


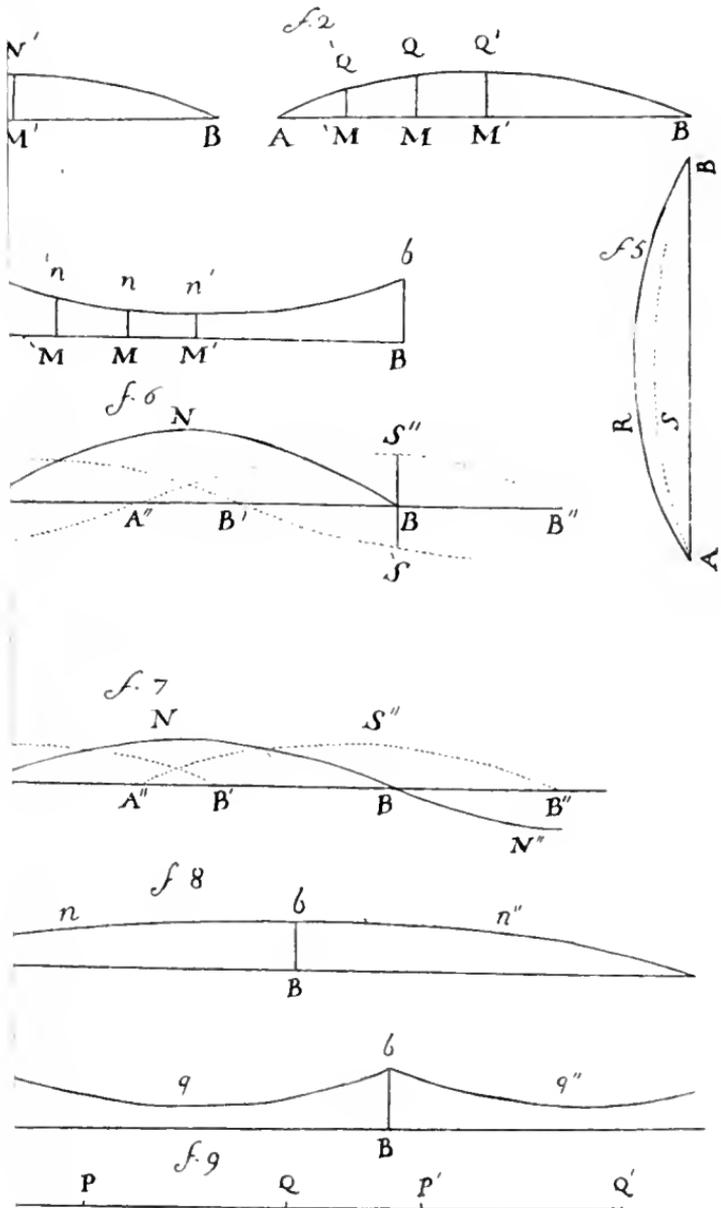
Fig. 3.











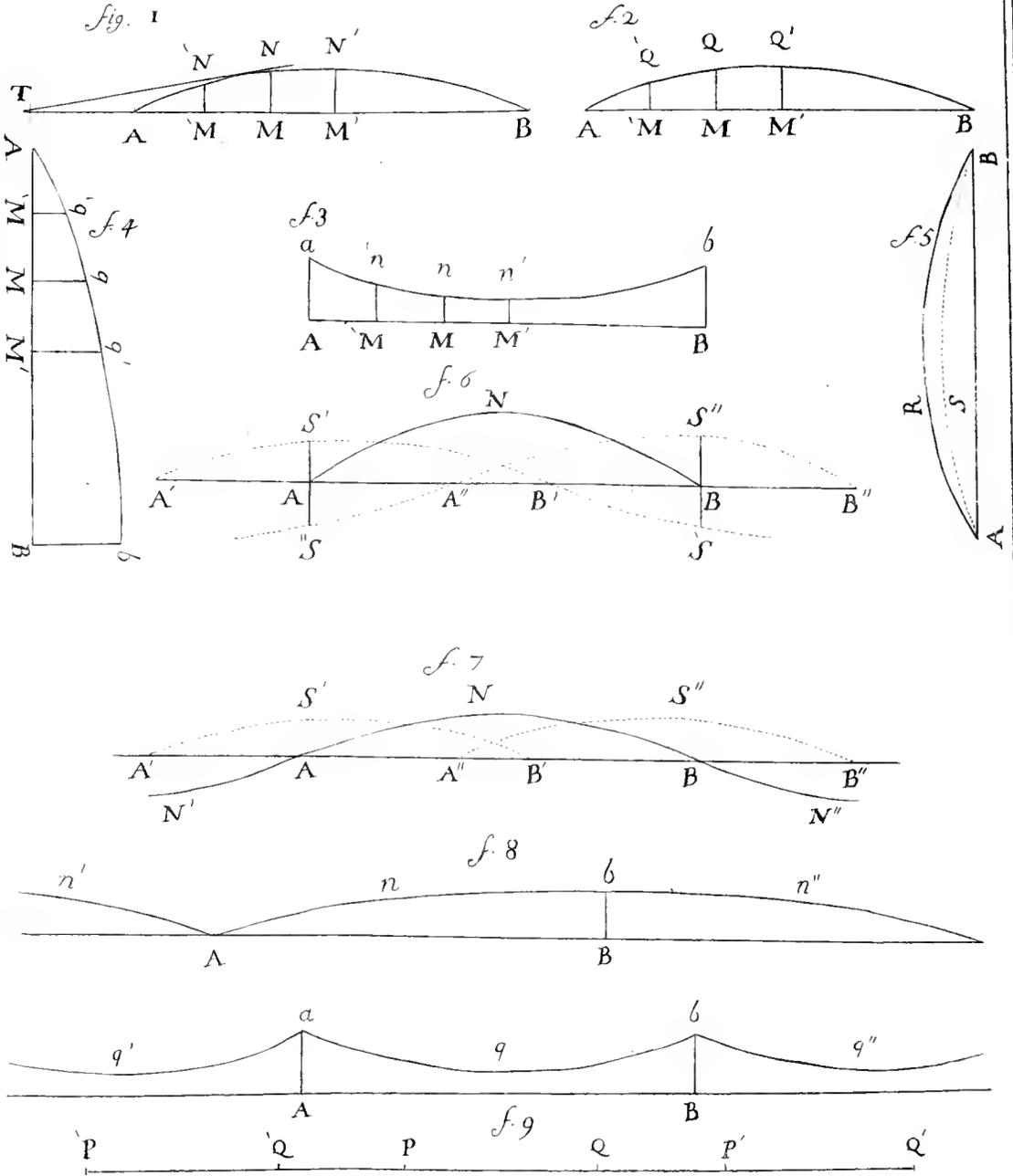
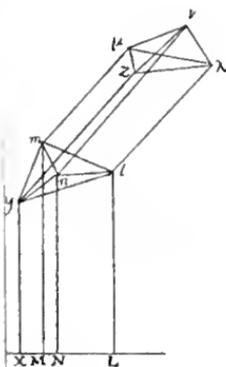
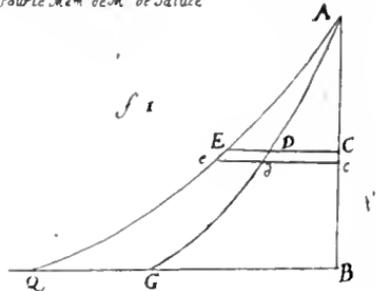
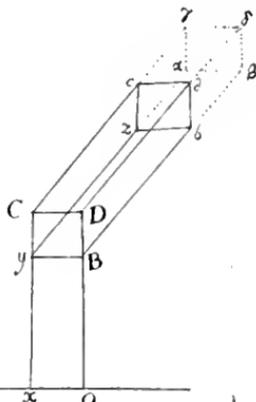


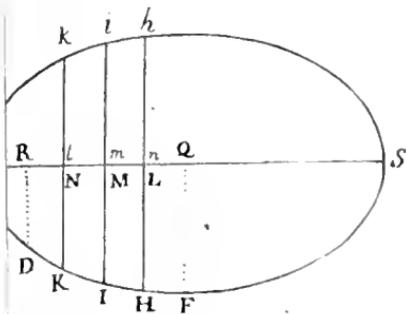
Fig 1



f. 3



B E F G e p y e f g C D



Pour le Mém. de M^r. Euler

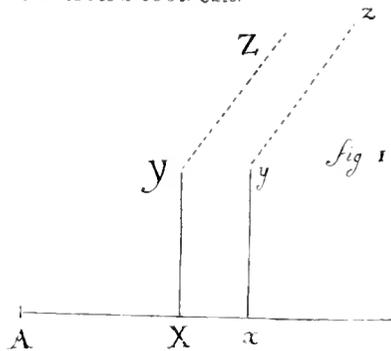
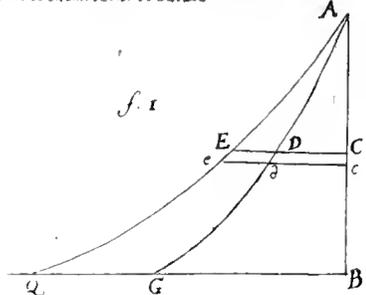


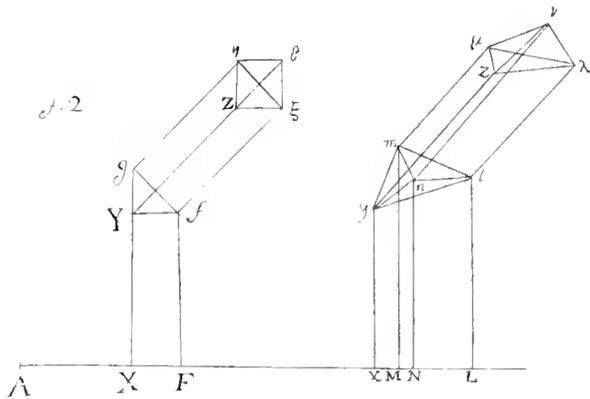
Fig. 1

Pour le Mém. de M^r. de Saluce Planche 1.^o



f. 1

f. 2



f. 3

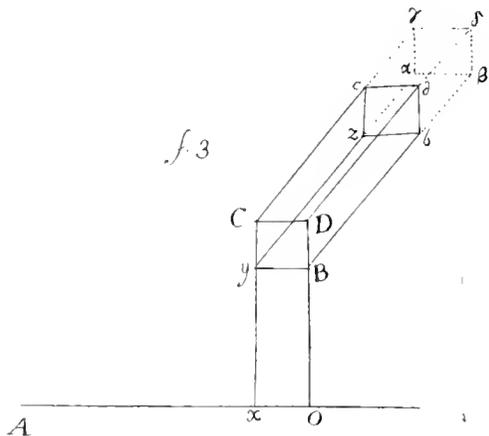


Fig. *



Fig. **

