MISCELLANEA TAURINENSIA

TOMUS V.

MÉLANGES

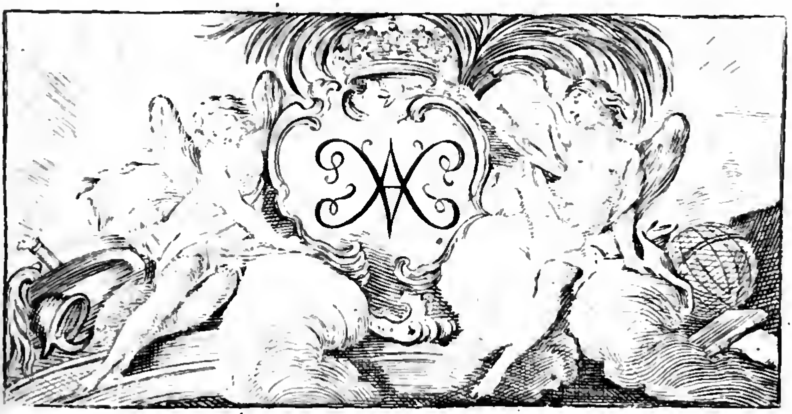
DE

PHILOSOPHIE ET DE MATHEMATIQUE

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1770-1773.



À TURIN

DE L' IMPRIMERIE ROYALE.

AVEC PERMISSION.

SIRE

La Societé Royale de Turin ose paroître aujourd' hui avec d' autant plus de confiance aux pieds du trône de Votre Majesté, qu' en vous offrant le fruit de ses travaux, elle peut s' applaudir de vous *présenter votre propre ouvrage. C' est au zèle éclairé de V. M. pour le progrès des connoissances dignes de l' homme & vraiment utiles à l' humanité, que cette Société doit sa naissance; les graces dont elle fut honorée par le Roi votre Père de glorieuse mémoire, l' empressement que tant d' hommes illustres des nations étrangères ont témoigné de prendre part à ses travaux, de l' enrichir de leurs productions & de s' associer à la gloire, que la faveur d' un Prince, juste appréciateur des sciences & des arts, fait rejaillir sur ceux qui les cultivent. Les sages, les savans de toute l' Europe, qui ont eu le bonheur de Vous approcher, ne nous reprocheront pas ici le langage imposteur de la flatterie. Il doit nous être permis,* SIRE, *de nous en rapporter à leur témoignage, & il est aussi heureux que consolant pour nous de trouver, dans leurs éloges, des interprètes non suspects de nos sentimens. Combien de fois les avons-nous entendus relever avec complaisance, non seulement cet accueil gracieux, où la grandeur ne paroît que pour rendre l' affabilité plus touchante, mais encore ces entretiens suivis, où ils ont été étonnés de pouvoir déployer tout leur génie en raisonnant avec un Prince, éga-*

lement en état de profiter de leurs lumières, & de leur en communiquer. Le trône n'a rien changé à vos dispositions, il n'a fait que laisser à vos vertus le moyen de paroître ce qu'elles étoient, & ajouter à la volonté de faire le bien, le pouvoir de le faire plus efficacement & avec plus d'étendue. La providence a voulu signaler les commencemens de votre Regne par un bienfait inestimable, en accordant le salut de vos peuples au premier usage que vous avez fait du pouvoir suprême qu'elle venoit de vous confier. Nous n'osons entreprendre de peindre les traits sublimes de sagesse & de bienfaisance, qui ont paru dans ces momens décisifs: ils sont gravés dans tous les cœurs, & ils éclatent dans toutes les occasions par ces transports d'allegresse & de reconnoissance, que la présence d'un bon Prince inspire, & qu'il est si aisé de distinguer de ces mouvemens forcés, qui partent de l'envie de plaire, ou de la crainte d'offenser. L'intérêt général de la société humaine ne peut que porter nos confrères étrangers à joindre leurs veux aux notres pour la gloire & la prospérité d'un Souverain qui ne respire que le bien de l'humanité. Regnez, Sire, pour le bonheur de vos peuples, pour jouir de leur amour, pour *le triomphe de la Religion & de la vertu, pour assurer au mérite & aux vrais talens la protection qu' ils attendent de V. M. La Societé Royale tâchera de la mériter par son ardeur à remplir les objets de sa destination, heureuse, si par l' assiduité de ses recherches, elle parvient à ouvrir quelque nouvelle vue d' utilité, qui puisse fournir à V. M. de nouveaux moyens d' exercer sa bienfaisance envers les humains.*

Nous avons l' honneur d' être avec le plus profond respect

SIRE

De V. M.

Les très-humbles, très-obeissants, très-fidelles serviteurs & sujets les Associés de votre Académie Royale des Sciences.

TABLE

Des Mémoires contenus dans ce Volume.

Dans la classe Philosophique.

Dans la classe Mathématique.

Imprimatur.

JOHANNES DOMINICUS PISELLI Ord. Præd. S. T. M.
Vic. gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la ſtampa

GALLI per S. E. il Sig. Conte CAISSOTTI DI S. VITTORIA
Gran Cancelliere.

DE L'ORDRE

PAR LE P. GERDIL BARNABITE.

L' homme a la faculté de comparer ses idées, & de découvrir par ce moyen les rapports qui sont entr'elles, ou entre les objets qu'elles représentent. C'est en quoi consiste la connoissance du vrai. En comparant deux angles droits, j'apperçois que ces deux angles sont égaux, & ce rapport d'égalité est une vérité.

C'est par cette même faculté de comparer les objets, & d'en découvrir les rapports que l' homme s'élève à l'intelligence de l'ordre, de la beauté, & de la perfection.

Lorsqu'en comparant deux objets l'esprit apperçoit un rapport quelconque entr'eux, c'est connoître simplement une vérité, ainsi qu'on vient de le dire. Si la médaille *A*, & la médaille *B*, que j'ai sous les yeux, sont égales entr' elles, en connoissant ce rapport d'égalité, je connois simplement une vérité, & rien de plus.

Lorsqu'en comparant les rapports de liaison, que plusieurs objets ont entr'eux, je découvre un rapport commun qui exige, qu' ils soient liés, ou placés d'une telle maniere, plutôt que de toute autre, tout arrangement ainsi déterminé par un rapport commun me donne l' idée de l'ordre. Je vois une suite de médailles impériales sur une table. César est le premier, Auguste le second. Le rapport de César à Auguste comme à son successeur immédiat, exige que Tibère soit placé après Auguste, & ainsi de suite. Ce rapport de succession immédiate est ainsi le principe déterminant qui fixe la place de chaque médaille, & fournit la raison pourquoi elle est placée en tel endroit, plutôt qu'en tout autre. Or un arrangement où tous les termes sont placés, en vertu d'un principe qui détermine la position de chacun, c'est ce qui constitue l'idée de l'ordre.

Ainſi l'ordre eſt fondé en nature auſſi bien que le vrai. Ils réſultent l'un & l'autre des rapports des choſes. Un ſimple rapport eſt une vérité ; un rapport qui amene un autre rapport forme l'ordre, & la connoiſſance de l'ordre n'eſt, pour ainſi dire, dans l' homme, qu'une extenſion de l' intelligence du vrai.

Il y a cette différence entre la connoiſſance du vrai, & la connoiſſance de l' ordre, que la première (en tant qu'elle ſe borne au ſimple rapport, indépendemment de l' importance, ou de l' excellence de l'objet) eſt ſuivie d'un ſimple acte d'affirmation, par lequel je me dis à moi-même, que la choſe eſt telle que je l' apperçois. Quand j'apperçois l'égalité de deux angles droits, je me dis à moi-même, que deux angles droits ſont égaux, j'affirme cette égalité, & voilà tout. Mais la connoiſſance de l'ordre eſt de plus ſuivie d'un ſentiment d'approbation, par lequel je me dis à moi-même, non ſeulemente que la choſe eſt comme elle eſt, mais de plus qu'elle eſt comme elle doit être. Ce ſentiment d'approbation eſt toujours ſuivi d'un mouvement de complaiſance, puiſqu' il n'eſt pas poſſible de ne pas ſe complaire en ce qu'on approuve.

Il y a donc une ſorte de diſtinction à faire entre la complaiſance qui accompagne la connoiſſance du vrai, (conſidéré comme ſimple rapport, & abſtraction faite de la qualité de l'objet) & celle qui accompagne la connoiſſance de l'ordre. La connoiſſance du vrai eſt ſuivie d'un ſentiment de complaiſance, & de ſatisfaction, parceque l' intelligence tend au vrai, comme à ſon objet, qu'elle fait effort pour le trouver, & que la ceſſation de cet effort, lorſqu'elle parvient à le découvrir, répand dans l'ame cette douce ſatisfaction que la nature a ménagée dans le paſſage du déſir à la poſſeſſion. Mais la vue de l'ordre excite de plus la complaiſance qui accompagne néceſſairement l'approbation ; c'eſt-à-dire cet acte de l'ame, par lequel on ſe dit qu'une choſe eſt telle, qu'elle doit être.

L'ordre facilite les progrès de l' intelligence, & de la raiſon. Ce n'eſt qu'en ſuivant le rapport, & la liaiſon des idées que l'eſprit paſſe d'une vérité connue à une vérité qui ne l' étoit pas. L'eſprit ſaiſit, & retient avec plus de facilité les objets où il apperçoit un certain ordre ; il les diſtingue, & les compare plus aiſément : cette liaiſon les repréſente comme formant un ſeul tout, & par ce moyen l' homme ſe rend capable d'embraſſer un plus grand nombre d'objets par une ſeule vue de l'eſprit, en quoi conſiſte principalement la perfection de l' intelligence.

L' homme ne peut non plus rien exécuter, qu'en vertu d'un certain ordre, par lequel il diſpoſe les moyens d'une maniere convenable à la fin qu'il ſe propoſe. La raiſon a, pour ainſi dire, une double fonction dans l'homme, elle nous a été donnée pour développer les progrès de l'intelligence, & appliquer l'intelligence à l'action, & c'eſt toujours l'ordre qui la dirige ſous ce double rapport, en ſorte qu'on pourroit dire en un certain ſens, que comme le vrai eſt l'objet de l'intelligence, ainſi l'ordre eſt proprement l'objet de la raiſon. *Ratio eſt facultas ordinatrix.* C'eſt ainſi que quelques anciens ont défini la raiſon, & ſous ce point de vue on pourroit dire que le propre de la raiſon eſt de ſuivre l'ordre convenable des idées pour mettre un ordre convenable dans l'action.

Tout ordre, ou arrangement préſente une ſuite d'idées, ou de termes déterminés par un rapport commun. Ce rapport ſe trouve 1° dans les ſuites mathématiques indéfinies, telles que la progreſſion des nombres naturels, ou des nombres impairs &c.

Si je compare les deux termes 1 & 2, & que j'enviſage de combien le ſecond terme excède le premier, ce rapport de différence me fait voir qu'après 2 je dois placer le 3, & ainſi de ſuite.

Si en comparant ces deux termes j'enviſage le rapport géométrique de l'un à l'autre, c'eſt-à-dire que le ſecond contient deux fois le premier, la continuation de ce rapport m'avertit, qu'après le 2 je dois placer le 4, enſuite le 8, & ainſi de ſuite.

Ces ſéries ſont ſansdoute ordonnées, mais, comme elles ſont indéfinies, l'eſprit ne peut jamais ſaiſir la totalité des termes dont elles ſont ſuſceptibles; il ne ſauroit jamais en embraſſer tout l'enſemble d'une ſeule vue, & delà vient que cet ordre, pour ainſi dire, indéterminé, ne ſauroit le ſatisfaire pleinement.

2° Pour déterminer l'ordre qui réſulte des ſimples rapports de quantité, il faut conduire la ſuite juſqu'à un certain point, & enſuite, par des rapports réciproques ou rétrogrades la ramener de l'autre côté au même terme dont on étoit parti.

Soit une ſuite de termes *A. B. C.* dont une raiſon quelconque détermine l'excès de *B.* ſur *A.*, & de *C.* ſur *B.* Cette ſuite continuant à croître iroit à l'infini; & jamais l'eſprit ne pourroit en embraſſer la totalité.

Mais ſi l'on la continue de l'autre côté par une ſuite de rapports inverſes, on aura les termes *D.*, & *E.* qui répondront exactement aux termes *A.*, & *B.* la ſuite ſera ainſi terminée; l'eſprit en ſaiſira la totalité, & la correſpondance des termes *A.*, & *E.*, *B.*, & *D.*, relativement au terme du milieu, préſentera une raiſon claire, & déterminante de leur poſition, en quoi conſiſte l'idée de l'ordre. Voilà pourquoi la correſpondance des termes, d'où nait la ſymmétrie plait naturellement à l'eſprit. Et c'eſt auſſi la raiſon de cette regle générale, que lorſqu'il

I I I	I I I I I
A. B. C.	*A. B. C. D. E.*

y a deux parties ſemblables, & une diſſemblable, il faut placer la diſſemblable au milieu; regle puiſée dans la nature même qui nous en offre des modeles, ſurtout dans la conformation des animaux.

Tout aſſemblage de moyens propres à produire un effet convenablement au but que l'on ſe propoſe, forme un tout ordonné; dans cette ſorte d'aſſemblages l'ordre réſulte du rapport des moyens à la fin; & c'eſt même cette eſpece d'ordre qui nous affecte le plus vivement.

En ce genre l'ordre le plus parfait eſt celui qui réſulte d'une combinaiſon de moyens propres à produire l'effet déſiré le plus *facilement*, le plus *ſûrement*, & le plus *pleinement* qu'il ſoit poſſible.

La facilité doit faire préférer l'ordre, par lequel on arrive au même but avec le moins d'appareil, & de complication de termes, & d'inſtruments; & la ſûreté même du ſuccès dépend en grande partie de la ſimplicité des moyens.

Soit une machine compoſée de dix pieces pour produire un effet qui peut être produit avec une machine de trois pieces, telle que Zabaglia les ſavoit imaginer: je dis que cette premiere machine multiplie les *termes*, ſans multiplier les *moyens*: elle multiplie les termes, puiſqu'elle en renferme un plus grand nombre; elle ne multiplie pas les moyens, puiſque les trois pieces dans l'autre machine font autant d'effet que les dix pieces de celle-ci.

Comparez le ſyſtême de Ptolomée avec l'hypotheſe de Copernic. Il s'agit d'expliquer le cours apparent des Aſtres. Les ſimples rapports de viteſſe, & de diſtance ſuffiſent dans le ſyſtême de Copernic pour ſatisfaire à toutes les apparences; dans le ſyſtême de Ptolomée il a fallu imaginer des cieux particuliers pour le mouvement propre de chaque planete, un premier mobile pour leur imprimer un mouvement commun en ſens contraire, des Epicycles pour expliquer les ſtations, & les rétrogradations. La machine eſt beaucoup plus compoſée, & n'explique rien de plus : elle explique même moins : car dans ce ſyſtême il n'eſt pas poſſible d'expliquer, comment Mars eſt quelques fois plus proche de la terre, que le ſoleil ; ni comment Vénus, & Mercure ſe trouvent en oppoſition avec le ſoleil, ayant la terre entre-deux.

On voit par cet exemple comment il arrive de multiplier les termes, ſans multiplier les moyens. Ce défaut de ſimplicité vient toujours d'un défaut de lumieres. Si une ſeule idée intermédiaire ſuffit pour lier deux idées extrêmes, l'eſprit qui apperçoit la liaiſon des deux extrêmes par le moyen de cette ſeule idée intermédiaire ne rejettera pas la lumiere qui vient le frapper, pour chercher cette liaiſon par des détours qui en rendroient la connoiſſance plus pénible, & moins claire. L'eſprit ne prend cette peine que pour ſuppléer à cette idée moyenne qui lui épargneroit tous ces embarras, & le conduiroit plus directement au but qu'il ſe propoſe. Je pourrois éclaircir cette penſée par l'exemple des différentes démonſtrations que différents Auteurs ont données de certaines propoſitions de géométrie, dont les uns vont directement au but par une, ou deux idées moyennes adroitement ménagées, & les autres n'y parviennent que par de longs circuits qui rendent la démonſtration moins claire, & plus fatiguante.

L'ordre le plus avantageux eſt donc celui qui renferme le *maximum* des moyens avec le *minimum* des termes. C'eſt par le moyen d'un tel ordre qu'on obtiendra la fin qu'on ſe propoſe le plus *facilement*, le plus *ſûrement*, & le plus *pleinement* qu'il eſt poſſible. Un tel ordre eſt le plus conforme à l'intelligence la plus éclairée dont la perfection conſiſte à ſaiſir les rapports qui lient le plus immédiatement les différentes idées. Il a donc en ſoi une raiſon de préférence ſur tout autre ordre, & il eſt en conſéquence l'ordre le plus parfait en ce genre.

L'ordre qui résulte de l'arrangement, ou de la combinaison des moyens relatifs à une fin donnée, peut encore se combiner avec l'ordre de symmétrie dont nous avons parlé ci-dessus.

Dans toute combinaison de moyens il y a une piece qu'on peut regarder comme la principale, & dont l'action doit régler le jeu de toutes les autres ; ou, pour envisager la chose d'une vue plus générale, il y a dans toute combinaison de moyens, comme un centre où tous les efforts de toutes les différentes pieces vont se réunir. Les moyens, ou termes peuvent donc être tellement disposés relativement à ce point, que leur position forme une correspondance de symmétrie, telle qu'on la découvre dans un arrangement où la position de deux termes semblables est déterminée par leur correspondance avec le terme dissemblable qui est entre-deux.

Dans une suite ordonnée indéfinie les termes s'éloignent de plus en plus les uns des autres ; mais l'ordre qui résulte de l'arrangement d'un certain nombre de moyens relativement à une fin donnée exige que les termes se rapprochent pour agir de concert. La meilleure maniere de les rapprocher étant bien connue détermineroit peut-être une correspondance de symmétrie dans la position des termes qui, en qualité de moyens, doivent concourir le plus avantageusement à la fin donnée. Du moins nous en voyons des modeles dans l'organisation des plantes, & des animaux.

Cette correspondance de symmétrie, en liant les parties par des rapports plus marqués, en forme un tout plus régulier, j'oserois prèsque dire, plus identique, & dont l'esprit saisit l'ensemble avec plus de facilité. Peut-être, est ce là le fondement du Rythme poëtique, & de la cadence oratoire. La pensée la mieux conçue est celle qui présente avec plus de force, & de clarté l'ensemble des idées qui la composent. Il faut donc qu' il y ait le plus parfait accord possible entre ces idées ; & cet accord marqué par les expressions qui doivent frapper l'oreille formera un nombre, un rythme, une consonance, d'où resultera l'harmonie.

On ne doit pas être surpris de remarquer une si grande diversité de jugements dans l'application que font les hommes de l' idée de l'ordre aux différents objets qui se présentent à leur considération. Cette diversité vient de plusieurs causes 1° Du défaut de connoissance. Présentez le rouage de la machine la plus ingénieuse à un sauvage ignorant, il ne verra qu'un amas confus de pieces dans un assemblage qui fera l'admiration d'un artiste. C'est que le sauvage, ne connoissant pas la raison déterminante de la position des pieces qui composent la machine, elles ne réveillent aucune idée d'ordre dans son esprit. Une oreille grossiere est peu touchée de la musique la plus harmonieuse. Le *sensorium* faute de délicatesse, ou d' habitude ne distingue point assez les tons qui se succedent, & ne peut par conséquent saisir le rapport qui les réunit pour en former un accord.

2° Delà suit que si le nombre des pieces qui entrent dans un accord quelconque est trop grand, l' esprit, ou l'œil peu exercé ne saisira pas tout d'un coup tous les rapports de ces différentes pieces; cet assemblage paroîtra donc confus, jusqu' à ce que l'esprit ayant acquis peu à peu la connoissance de ces différents rapports parvienne enfin au point d'en saisir l'ensemble & de se représenter d'un seul coup d'œil l'ordre qui regne dans tout l'assemblage.

3° Dans les choses qui sont susceptibles de différents arrangements il y a sansdoute un ordre préférable à tout autre ordre. C'est toujours le plus simple, & celui néanmoins, qui suppose le plus d' intelligence. Une bibliothéque présente des livres arrangés suivant une certaine méthode

thode. Cet arrangement applaudi par les uns ſera blâmé par un homme plus intelligent qui aura en vue un ordre plus convenable. Ce n'eſt pas que la premiere diſpoſition ſoit blâmable comme abſolument mauvaiſe en elle-même ; car tout homme conviendra qu'elle eſt toujours préférable à un tas confus de livres qui ſeroient amoncelés au hazard l'un ſur l'autre. Ce blâme n'eſt donc que relatif, c'eſt-à-dire qu'on blâme l'arrangement actuel d'une bibliothéque en tant qu'excluſif d'un ordre plus convenable qu'on auroit pu lui donner. Et par un abus commun du langage on donne le nom de mauvais à ce qui n'eſt réellement que moins bon.

L'ordre eſt le fondement du beau ; mais le beau dans ſa ſignification ordinaire ajoute à l' idée d'un ordre quelconque, celle d'une perfection, & d'un agrément particulier qui donne un plaiſir mêlé de ſurpriſe, & d'admiration. Delà vient qu' il eſt difficile de fixer dans l'échelle de l'ordre le dégré où doit commencer la dénomination du *beau*. Ce dégré devant être celui où la régularité de l'objet commence à exciter un mouvement de plaiſir mêlé d'une ſorte d'admiration, il eſt aiſé de ſentir, que ce dégré doit être différent relativement aux différents dégrés d' intelligence, aux différentes diſpoſitions, & même aux différentes habitudes de ceux qui en ſont affectés. L' idée du beau eſt une idée complexe du genre de celles que Loke appelle des modes mixtes, qui renferme une idée de régularité dans l'objet, & une idée de plaiſir, & d'admiration cauſée par la vue, ou la perception de cet objet.

La dénomination du beau dans le langage vulgaire ſera donc ſujette aux mêmes abus, & aux mêmes inconvénients que toutes les autres dénominations des modes mixtes ; abus ſur leſquels Loke inſiſte beaucoup dans ſon Eſſai ſur l'entendement humain. Si un objet paroit revêtu d'une qualité brillante qui cause de la surprise & du plaisir, on le nommera *beau*, quoique toute la régularité de l'ordre ne s'y rencontre pas. Au contraire, si à la régularité d'un objet se trouve jointe une qualité qui blesse, & qui étouffe le sentiment de plaisir que la seule régularité seroit capable de réveiller, cette régularité seule ne suffira pas pour qu'on lui donne le titre de *beau*.

La variété du langage, & des opinions au sujet du beau, ne prouve donc point qu'il n'y ait rien de réel dans l'idée du beau, & qu'elle ne soit qu'un effet capricieux, un phantôme du préjugé, & de l'éducation; il est constant qu'il y a un ordre résultant du rapport des choses, & par conséquent fondé en nature: que l'ordre est un objet de l'intelligence, & de la raison: que l'ordre connu est propre à exciter un sentiment d'approbation, & de complaisance: que dans les différents ordres, ou arrangements qui résultent de différentes combinaisons, il y en a de plus parfaits les uns que les autres: que dans cette échelle de l'ordre il y a un dégré où l'ordre connu excite un sentiment de plaisir mêlé de surprise, & d'admiration: que ce dégré doit être différent relativement aux différentes dispositions de ceux qui en sont affectés. Ces principes suffisent pour déterminer ce qu'il y a de réel, & de constant dans la dénomination du beau, & pour démêler en même tems le causes des différentes applications que l'on en fait aux différents objets.

EXAMEN PHYSICO=CHIMIQUE

Sur la couleur des fleurs, & de quelques autres ſubſtances végétales.

PAR M.r LE COMTE MOUROUX.

PREMIÈRE PARTIE.

Si l'étude de la nature a augmenté le nombre des connoiſſances humaines, ſi elle a diſſipé une foule d'erreurs, & déchiré le voile de la préſomption, & de l' ignorance, nous en devons la principale obligation aux progrès, que les Mathématiques ont fait dans nôtre ſiécle: la préciſion, & l'ordre qu'elles inſpirent ayant paſſé dans les autres ſciences naturelles, elles ont fait naître cet eſprit méthodique par lequel on examine un Phénoméne, un fait d'une manière ſimple, & naturelle, & l' analiſe qui en réſulte eſt toujours claire, & conſtamment enchaînée aux loix invariables de la méchanique, & de la phiſique: ainſi nos obſervations combinées deviennent une ſource preſque inépuiſable de principes vrais, & féconds.

La chimie qu'on peut regarder aujourd'hui comme une des branches les mieux cultivées de la phiſique y a répandu un grand jour, & la facilité, qu'elle donne à décompoſer les corps, & à les récompoſer nous fournit journellement des applications utiles pour les arts, & métiers, & nous ne négligerons pas d'obſerver qu'on arrive par ſon moyen à imiter parfaitement bien des productions naturelles, telles que le cinnabre, les ſafrans, le verd-de-gris, le ſouffre, les ſels, les ochres, les chaux métalliques, & nombre d'autres, qu'on pourroit apporter pour preuve, & qui nous démontrent que la nature, quoique très-ſouvent impénétrable à nos yeux, agit cependant toujours d'une manière ſimple, & par des loix univerſelles.

Cela poſé ne doit-on pas croire autant de ſimplicité, & de généralité dans les loix, ſuivant leſquelles ſe fait la végétation, & ſe produiſent les couleurs dans les fleurs, & dans les fruits? Pluſieurs Auteurs célébres nous ont enſeigné par quelle mécanique s'opéroit l'accroiſſement des plantes, & ont cherché à dévélopper d'une manière ſiſtématique leur génération; Ce n'eſt qu'en paſſant, & d'une manière aſſez imparfaite, que quelqu'un d'entr'eux a parlé des couleurs des végétaux, & quoique cet objet ne paroiſſe que de ſimple curioſité, j'eſpére néanmoins, que mes recherches pourront réunir l'agréable à l'utile; C'eſt du moins le but, que je me propoſe.

On ne doit pas s'attendre à un ordre bien rigoureux dans une matière ſi vaſte, & je ne donnerai mes obſervations, que dans l'ordre, ou pour ainſi dire elles ſont nées, & c'eſt à la conſidération attentive, que je fis ſur la vivacité de la couleur d'une fleur, que je me déterminai à en chercher la cauſe, de même qu'à m'aſſurer, ſi ces couleurs ſont inhérentes ou accidentelles.

Les Botaniſtes s'accordent à donner le nom de fleur à cette partie de la plante, qui ſe diſtingue ordinairement des autres par des couleurs particulières, & qui eſt deſtinée à garder les organes de la génération; tel eſt le ſentiment de Vaillant, Ray, Juſſieu, Tournefort, & enfin de la plus grande partie des Botaniſtes, mais ils ne ſont pas allés plus loin dans leur recherches ſur ce qui a rapport à la couleur.

Géofroi entre un peu plus en matière, & prétend que les huiles eſſentielles des plantes pendant qu'elles ſon renfermées dans les fleurs peuvent leur procurer différens mélanges par cette variété de couleurs, qu'elles poſſédent;

(1) il appuye enſuite ſon ſentiment ſur ce qu'une ſeule, & même huile, ſavoir celle du Thim combinée avec différens mélanges d'eſprits acides, volatils, urineux &c., lui a donné toutes les nuances des couleurs depuis le blanc jusqu'au noir; mais la renoncule, le cianum, ou bleuet, la gonfrena globoſa, qui ne contiennent certainement pas d' huile eſſentielle, & auxquelles on ne ſauroit rien déſirer pour l' éclat, & la vivacité de la couleur paroiſſent faire une grande exception à la généralité de ce ſentiment.

Le célébre Halles fut le premier à éclairer la partie de la phiſique qui regarde la végétation, mais occupé ſurtout à démontrer, que l'air eſt néceſſaire pour l'accroiſſement des plantes, & à en meſurer la force en repétant les expériences du célébre Boyle, il n'a pas examiné la partie, qui concerne la couleur des fleurs: il dit cependant (2) au chapitre ſeptième de ſa ſtatique. „ Comme le gout „ exquis des fruits, & l'odeur agréable des fleurs viennent „ des principes aëriens ſubtiliſés, il eſt aſſez naturel de „ penſer que les belles couleurs de ces mêmes fleurs doi„ vent auſſi être attribuées à la même cauſe; car on ſçait „ d'ailleurs, que le terrein ſec favoriſe plus le jeu, & „ contribue plus à la variété de leurs couleurs, que les „ terreins humides, d'où elles tireroient plus de nouriture „ aqueuſe; mais je demande p.° que l'on m'explique quels ſont ces principes aëriens ſubtiliſés, en ſecond lieu que l' on me donne raiſon des fleurs très-bien colorées qui croiſſent dans l'eau; il dit enſuite que les plantes méridionales contiennent une plus grande partie de principes ſubtils aromatiques que les ſeptentrionales, parceque celles-là tirent ſansdoute plus de roſée, que celles-ci, choſe, qu' il ne prouve non plus que la première.

(1) Mémoires de l'Accadémie des Sciences de Paris an. 1707.
(2) Halles ſtatique de Végétaux cap. 7 p. 277.

L' illuſtre Duhamel (3) qui par ſes travaux a beaucoup répandu de lumière ſur le mécaniſme de la végétation n'a non plus que les autres recherché la cauſe de la variété, & des nuances des couleurs des fleurs ; il en a d'ailleurs obſervé très-attentivement la ſtructure ; il parle à la vérité des plantes moins colorées, & malades, que l'on nomme étiolées, dont je parlerai plus bas.

Becher (4) & Sthal (5) ont penſé, que la couleur verte des plantes fût produite par le fer, puiſque l'on ſçait, que des cendres des plantes l'on a retiré du fer, comme Lemery l'a demontré. (6) Becher a même penſé, que le verd étoit la deviſe du regne végétal, ou la caractériſtique, comme il la demande ; car quoique cette couleur diſparoiſſe pendant la deſſication, & la combuſtion des végétaux, elle ne laiſſe cependant pas de reparoître après la vitrification, & c'eſt pour cette raiſon, que le verre végétal pour le nommer ſelon Becher n'eſt pas beaucoup propre à être employé lorſqu' il eſt tout pur tenant beaucoup du verdâtre, outre qu' il ſe décomposeroit fort aiſément, contenant une trop grande quantité d'alkali déliqueſcent. Ces illuſtres Auteurs cependant ne ſont pas entrés dans le détail de la culture des fleurs.

L' immortel Henchel, que j'aurai lieu de citer avec admiration, par ſes illuſtres découvertes ſur l'analogie du régne végétal avec le minéral, s'eſt cependant laiſſé entraîner à douter par rapport à la couleur verte des plantes, il me paroit qu' il étoit plutôt porté à l'attribuer au cuivre, voici ſes termes. (7) „ Ne pourroit-on point à la vüe

(3) Phiſique des arbres.
(4) Phiſica ſubterranea.
(5) *Sthalii fundamenta chymiae dogmatico-rationalis &c. Tom. II.*
(6) Mémoires de l'Accadémie des Sciences de Paris au 13 novembre 1706 p. 411.
(7) Henchel flora ſaturniſans chap. 11 p. 214.

„ de ce verd, qui eſt fixe au feu inférer, que cette cou-
„ leur tire ſon origine d'un mixte minéral, & que le
„ cuivre a de l'affinité avec le régne végétal? (8).

Au reſte la manière vague, dont il s'exprime, fait aſſez connoître qu'il n'eſt pas bien décidé, car il admet d'avoir retiré lui même du fer des cendres des végétaux, & il avoüe, que perſonne n'eſt jamais parvenue à en retirer du cuivre.

Il ne paroit guère plus décidé ſur la nature de ces couleurs, ſavoir ſi elles ſont accidentelles, ou fixes, & inhérentes. Voici ce qu'il en dit en des endroits différens pag. 214. chap. 11. „ Il eſt conſtant que des couleurs
„ fixes de cette nature ne ſont point accidentelles, com-
„ me celles qui ſont produites par la reflexion, & refra-
„ ction, mais elles ſont ſi réelles, & ſi eſſentielles, qu'el-
„ les conſtituent, ou du moins contribuent à conſtituer
„ les corps.

„ Les couleurs dit-il, (pag. 256 chap. 15) des corps na-
„ turels ont une propriété, que nous ne pouvons venir
„ à bout de connoître par le moyen de nos yeux, il faut
„ donc que cette qualité ſoit quelque choſe de bien par-
„ ticulier, puiſque elle fait l'objet le plus eſſentiel de
„ nos ſens; en effet il faut qu'il y ait réellement des
„ cauſes, & des circonſtances bien délicates, qui faſſent
„ que certaines fleurs ont différentes couleurs, que la cou-
„ leur ordinaire de quelques autres change, & qu'elle peut
„ même être changée artificiellement.

„ Qu'on me diſe maintenant, que la couleur eſt un
„ caractère eſſentiel dans les plantes, puiſque ce caractère

(8) Nous obſerverons cependant, que cet argument n'eſt pas excluſif, car le vitriol martial, dont la couleur eſt verte n'eſt cependant autre choſe, que le réſultat de la combinaiſon de l'acide vitriolique avec le fer.

„ eſt ſujet à tant de variations. Mais quand il ſeroit fixe,
„ qu'on m'apprenne quelle en eſt la ſource, quels moyens
„ nous avons pour la découvrir; en un mot les couleurs
„ ſeront produites ſans que nous ſachions comment elles
„ varient, & ſe perdent; comment pouvons nous compter ſur elles, comment pouvons nous comparer la
„ couleur fugitive de la celidoine avec la couleur fixe de
„ l'or?

Après avoir ainſi expoſé ce qui a été dit, & fait par ces illuſtres Savans ſur les fleurs, & ſur leurs couleurs, & après avoir donné la définition généralement adoptée ſur ce qu'ils entendent par fleur, nous allons paſſer à une conſidération préliminaire, qui dépend de l'Analiſe chimique, qui en a été faite.

L'Analiſe des végétaux ſelon Halles ſe réduit à cinq principes, qui ſont

Le ſouffre,

Le ſel volatil,

L'eau,

La terre,

Et l'air.

Dans cette Analiſe tous les élémens de la nature ſont en jeu, de façon, que ceci ne nous éclaire pas beaucoup; je trouve plus ſenſé ce qu'en dit M. Rouelle, ſavoir,

Que la partie colorante verte des plantes eſt d'une nature réſineuſe, puiſque elle ne ſe laiſſe extraire que par l'eſprit de vin, mais, que la partie colorante de leurs fleurs eſt *extracto réſineuſe* étant également ſoluble dans l'eau, & dans l'eſprit de vin; il eſt vrai cependant que ce dernier les altére à raiſon de l'acide qui entre dans ſa combinaiſon; il y a d'autres parties colorantes qui ne ſont ſolubles, que dans l'eau, & qui par conſéquent ſont purement extractives, telle eſt la partie colorante de la terra merita, ou de la racine de curcuma; l'art. de la

teinture

teinture consiste à enlever cette partie colorante au moyen d'un acide, ou d' un alkali, & de le précipiter ensuite avec un alkali, ou un acide; il a reconnu neuf principes dans les végétaux, que je laisserai de décrire, parceque il avouoit lui même qu'on pouvoit encore en reconnoître d'autres.

La plus part de ceux, qui ont examiné les végétaux se sont contentés de parler des huiles essentielles, des sels, comme des principes plus connus; il est certain cependant, que l'on reconnoit dans les plantes différens mixtes de même que dans les fleurs. Nous en avons un exemple dans la fleur du grand soleil, appellée *corona solis*, qui fournit une grande quantité de nitre outre une partie d'alkali fixe; l'on retire du vin le sel de tartre; de certaines plantes, & fleurs un alkali volatil comme dans les cruciféres, l'on retire des esprits de certaines autres; l'on a retiré du fer des cendres de quantité de plantes, & surtout du chéne; du génet l'on en a retiré de l' étain, & si nous en croyons les Chinois l'on a retiré du mercure du pourpier sauvage. (9)

Enfin ces principes ne sont pas encore bien analisés, car l'on parvient à reconnoître différens principes selon la manière qu'on traite les végétaux que l'on analise, comme il est aisé de le voir dans les cendres des plantes obtenues, ou à l'air libre, ou à la façon de Takenius, dont les unes nous donnent un alkali fixe déliquescent, & les autres des sels fixes.

L'on doit cependant remarquer, que le principe colorant a beaucoup d'affinité avec les sels; l'expérience que fit Boherave nous le démontre, puisque ayant fait bouillir

(9) Lettres édifiantes récueil 22 lettre du Père Dentrecolles p. 457, & suivan.

une branche de romarin vingt fois, & plus, il ne lui resta plus aucune couleur, & ayant ensuite brulé cette même branche, il n'en retira plus aucun sel.

Je fis la même expérience sur différentes fleurs, qui après avoir bouilli quantité de fois, ne resterent plus aucunement colorées, & je n' obtins aucun sel de leurs cendres.

Nous avons une autre preuve de l'affinité de la partie colorante avec les sels dans la méthode, dont on se sert pour retirer la laque des végétaux, qui se fait au moyen d'une forte lessive de sel de potasse, & de chaux, & par ce moyen la couleur des fleurs est entièrement enlevée par les sels.

Si l'air est nécessaire pour l'accroissement des plantes, il l'est de même pour les fleurs, puisque l'on voit, que lorsqu'on expose des fleurs fraiches sous la pompe pneumatique elles se fanent, & perdent en partie leurs couleurs naturelles; Boile la croit aussi nécessaire pour développer la couleur.

Quant à la terre nous savons qu'elle contribue autant à la végétation que l'eau, qui attenuant les sels, & les parties les plus subtiles de la terre sont portées dans les vaisseaux capillaires des plantes par l'action de l'air, & que la terre qui est plus ou moins chargée de sels contribue à l'accroissement de la plante plus ou moins rapide.

Le Phlogistique est surément une des parties les plus essentielles des plantes, & il l'est de même des substances métalliques. Henchel en fait une de ses plus fortes preuves pour l'analogie qu' il a démontrée entre les végétaux, & les minéraux; que si dans le régne minéral il donne le dernier dégré de perfection (10) aux terres métalliques, pourquoi ne donneroit-il pas la perfection aussi aux plantes,

(10) Henchel flora saturnisans pag. 196.

& aux fleurs. Baumé eſt d'après Stahl (*) de ſentiment, que le phlogiſtique ſoit le principe des odeurs, & des couleurs. (11)

M. Pott ne fait aucune diſtinction dans ſa lithogeognoſie entre le phlogiſtique, & la couleur, bien ſouvent il les prend pour ſynonimes, comme parlant ſur la terre gypſeuſe, il dit qu'elle contient auſſi un peu de phlogiſtique, ou principe colorant (12), quelque fois il la nomme matière ſulfureuſe, ou colorante, beaucoup volatile.

M. le Comte Saluces penſe de même que le phlogiſtique eſt abſolument néceſſaire pour développer la couleur des parties qui la contiennent, comme il le prouve par un grand nombre d'expériences qu' il a fait à ce ſujet.

Si M. Pott nous a enſeigné une manière ſure d' analiſer les corps les plus durs, tels que les métaux, & les pierres par le moyen d'un feu violent, qui en les décompoſant nous en montre les principes; il eſt choſe très-ſure que l'on ne doit non plus s' écarter de cette méthode pour parvenir à connoître les vrais principes dans les fleurs; c'eſt à l'aide de ce menſtrue, que je ſuis venu à bout de reconnoître le principe qui conſtitue la couleur; perſonne je crois avant moi ne s' eſt ſervi de cette méthode pour les fleurs, comme il eſt aiſé de voir dans la 2e partie (13). Je commencerai en attendant par rapporter un nombre d' obſervations, qui me laiſſoient ſoupçonner que la lumière pût contribuer à la couleur des fleurs.

(*) OEdipus Chym. pag. 97 & ſuiv.
(11) Manuel de chimie pag. 47.
(12) Lithogeognoſie tom. 1 p. 66.
(13) Le même M. Pott ne croyoit pas, que ces couleurs végétales fuſſent dans le cas de ſoutenir un feu violent, car dans l'analiſe, qu' il fait de la terre colorée que on apelle de Scuttgelb il dit qu'elle n'eſt point minérale & qu'elle n'eſt qu'une compoſition artificielle, c'eſt-à dire, une eſpéce d'argille que l'on colore avec la décoction de l'écorce de bouleau, ou des feuilles de tillieul &c. „ l'examen de ces couleurs par „ le feu nous fait voir ce que je viens de dire, car en les calcinant „ on leur fait perdre cette couleur, qui eſt végétale. (Lithogeognoſie Tom. II. pag. 68.)

OBSERVATIONS.

I

Si l'on conſidére les fleurs à calice, lorsqu'elles ſont prêtes à éclore, ordinairement l'on n' y voit du premier moment que du blanc, elles commencent à prendre de la couleur lorſqu'elles s'ouvrent juſqu'à ce que écloſes à leur point de perfection, elles aquierent le plus grand dégré de couleur, cependant les pétales qui ſont immédiatement couverts par le calice reſtent preſque entièrement ſans couleur pendant le tems qu' ils ſont couverts, ſur tout ſi le calice eſt d' une texture forte, comme on a lieu plus particulièrement d'obſerver dans les œillets; c' en eſt de même preſque de toutes les autres eſpéces de fleurs, qui n'ont point de calice, les parties qui ſont à l'abri de la lumière ſont les dernières à ſe colorer, & ne prennent que très-peu de couleur ſi elles ne parviennent à la voir.

II

Si l'on examine la plus grande partie des fleurs colorées, qui ont quantité de pétales (celles qu'on nomme doubles) quoique dans leur point de perfection, ou de vivacité de couleur, on trouve en enlevant les petales les uns après les autres, que ceux qui ſont tout-à-fait couverts ſont toujours d'une nuance plus tendre.

III

L'onguis, ou la partie qui eſt immédiatement attachée au calice eſt tout-à-fait blanche, ou un peu verdâtre, cette différence ſe montre évidemment dans l'artichaut, & ſi l'on remarque quelque couleur plus foncée à la baſe du pétale, elle eſt ordinairement due aux neƈtaires, dont les glandes ſéparent une humeur ſingulière, qui probablement a reçu ſa concoƈtion ailleurs; on peut de même obſerver les différentes nuances dans le verd, ſelon que les parties ſont plus ou moins couvertes; la plus grande partie des feuilles des arbres, des arbuſtes, des plantes, & des herbes nous montrent leur face expoſée au ſoleil d' une couleur plus foncée, que le revers, qui eſt au contraire d'un verd plus tendre, (14) & on obſerve aſſez généralement auſſi, que les plantes, dont les feuilles ont une ſeule face tomenteuſe, ou blanchâtre, cette face eſt preſque toujours l' inférieure, ou la moins expoſée aux rayons du ſoleil.

I V

Il en eſt de même de la plus grande partie des fruits, car la partie qui eſt couverte reſte preſque ſans couleur, & au contraire celle qui ne l'eſt pas, eſt merveilleuſement colorée; ſi ces fruits jouiſſent au ſurplus de la vue immédiate du ſoleil, la face expoſée au midi eſt ſurément plus colorée que celle au Nord, qui ne l'eſt preſque point, ce qu' il eſt très-aiſé de voir dans preſque tous le fruits, & plus particulièrement dans les péches.

V

J'obſerve enſuite, que ſi on coupe tous les noyaux des fruits, les amandes, les pignols, la noix, la noiſette, tous les pepins des poires, des pommes, & des autres

(14) Cette différence de couleur dans les revers des feüilles ne s'apperçoit pas encore toujours dans le mois d'avril, mais elle commence à être ſenſible à la fin de mai, lorſque le ſoleil commence à avoir plus de force, & cette différence s'obſerve encore plus tard dans les montagnes.

fruits on les trouve blancs de même que les graines de mélons, de courges, de concombres, qui donnent des émulſions très-blanches. Enfin les ſémences, & les graines dans la partie intérieure ſe manifeſtent blanches, comme le bled, l'orge, le riz en fourniſſent encore une preuve: & comme l'on a toute la raiſon de croire, que dans cette partie blanche des ſémences toute la plante y ſoit en petit pour ſe former enſuite, & devenir une plante complette, ne pourroit-on pas ſoupçonner avec raiſon qu'originairement la couleur blanche eſt propre à l'embrion, ou à l'enfance de toutes ces plantes, & que ſi elles aquierent avec le tems d'autres couleurs, cela eſt du à d'autres cauſes extérieures, que je tâcherai d'éclaircir, & que je me permets en attendant d'attribuer aux rayons du ſoleil; en continuant ici ces reflexions, j'obſerve, que la partie interne des plantes eſt aſſez généralement plus blanche, que ne le ſont les parties extérieures.

V I

Les parties de la peau de quantité d'animaux, qui ſont les plus couvertes, comme ſous le ventre, dans les entrecuiſſes ſont d'une couleur moins foncée, que ſur le dos, quelque fois même blanches, comme on obſerve dans quantité de vaches noires, dans preſque toute la famille des cerfs, des dains, des chévres ſauvages, dans les caſtors, les renards, & dans les petits gris &c. Il en eſt de même des oiſeaux, comme dans l'Airon, la Bertavelle, l'Hirondelle, la Pie, les Tourterelles &c., le plumet ſous le-ventre eſt toujours moins coloré, que celui du dos, & bien ſouvent blanc.

La plus part des poiſſons offrent un pareil exemple, comme l'on peut voir dans le ton, le ſpada, le hareng, le merlan &c., & dans la plus grande partie des rayes, dans les poiſſons de mer, de même que dans la truite, dans le brochet, & dans quantité d'autres poiſſons d'eau douce.

L'on voit à peu-près la même choſe dans la vipére, dans quelques ſerpens, & dans les lezards.

L'examen des coquillages ſur-tout de ceux de la mer des Indes nous offrent un fait ſemblable.

La partie interne des coquilles à valves ſont preſque toujours d'un blanc émaillé, comme il eſt aiſé de le voir dans les huitres, dans les petoncles, dans les couteaux, & dans les pinnes &c.

V I I

Le celeri, la chicorée, le chardon nous préſentent un fait ſingulier, ces plantes vertes de leur nature, ſi on leur défend la lumiére en les couvrant avec la terre deviennent blanches, & l'on a donné différentes explications de ce phénoméne. Nollet (15) & Schaw (16) prétendent, que c'eſt la privation de l'air, qui ôte le verd à ces plantes enterrées. La laitue, & le choux nous montrent la même choſe, les feuilles les plus centrales ſont ordinairement blanches, & l'on voit par nuance du centre à la ſurface la couleur verte s'augmenter petit à petit; même ſi l'on obſerve avec attention, ce ſont les pointes des feuilles qui commencent à prendre de la couleur.

V I I I.

L'obſervation des plantes, que l'on nomme étiolées paroit appuyer ces reflexions. Ces plantes ſont attaquées d'une

(15) Leçons de phyſique tom. 5 pag. 441.
(16) Schaw. leçons de chimie.

maladie ſingulière, qui reſſemble beaucoup à celle que dans les hommes on nomme *rachitis*, ſelon Du-Hamel les branches de ces plantes s'allongent, la tige eſt petite, & ſans proportion, les feuilles petites, au lieu de la couleur verte, elles ſont plutôt jaunâtres. Si c'eſt un arbre fruitier, qui eſt attaqué de cette maladie, il porte les fruits à la vérité, mais fort petits preſque point colorés, qui ne parviennent jamais à maturité, faute de quelque choſe néceſſaire à ſon accroiſſement; l'on obſerve des plantes de cette nature dans des petites cours entourées de bâtimens fort hauts, & ſur tout ſi les dites plantes ſe trouvent expoſées au Nord. L'on obſerve la même choſe dans les herbes, qui croiſſent ſous quelque pierre, ou tuile très-peu élevées, ou dans les terres très-peu expoſées au ſoleil.

On a porté pour raiſon de ce phénoméne entre autres Du-Hamel (17) que la reſpiration de l'air étant génée, la plante ne peut avoir toute ſa nourriture, faute du mouvement que l'air y donne.

Je penſe qu'on pourroit auſſi en attribuer en partie la raiſon à ce que le ſoleil ne la viſite jamais, & delà il eſt clair, comment la couleur des différentes plantes varie ſelon le climat, & en preuve de cela il ſuffit de voir, que les plus célébres Botaniſtes conviennent avec M. Linneus que par des obſervations ſuivies faites ſur les lieux on parvient à diſtinguer par le port, & la couleur, p. ex. les plantes du Cap de bonne eſpérance, & des autres pays méridionaux des autres plantes Européenes; d'où il ſuit que le ſentiment de ces Botaniſtes, qui penſent, qu'il n'y ait pas dans la nature une telle multiplicité de véritables eſpéces de plantes, que l'on s'imagineroit d'abord, n'eſt point ſans appui, ſi on refléchit ſeulement à la variété des cou-

(17) Duhamel phiſique des arbres.

couleurs, dont une grande partie eſt due à la variété du climat, & à l'endroit plus ou moins exoſé au ſoleil, & que pour cette raiſon la même plante, par exemple, de laitue devient rouge cultivée en plein jour en Sicile, & qu'elle perd ſa couleur étant cultivée dans nos jardins, de même que pluſieurs autres eſpéces de plantes, qui par ces ſeules variations deviennent méconnoiſſables aux Botaniſtes plus éclairés.

Malgré toute la variété qui s'offre dans les couleurs des plantes relativement aux différens climats, on ne laiſſe cependant pas d'obſerver une certaine conſtance dans ces couleurs, & par là on conçoit, que ce n'eſt pas ſans raiſon, que le célébre M. Adanſon a établi ſon neuvième ſiſtème des plantes fondé ſur les couleurs.

Cette différence de couleurs relativement au climat, n'a pas lieu ſeulement dans le régne végétal; nous la voyons de même dans le regne animal, puiſque dans les pays où il fait extrêmment froid, comme en Moſcovie, en Pologne, les ours, les loups, & les renards, qui en hiver ſont blancs, ſont rouges en été, de même que les lièvres, qui dans nos hautes montagnes ſont colorez en été, ſont blancs en hiver, Monſieur de Buffon obſerve que les oiſeaux qui ont les plus vives couleurs dans leur plumage viennent dans les pays chauds. (18) Nous voyons cette différence auſſi dans quelques poiſſons, entre autres, au rapport de Rondelet (19), la Mendola, & le Picarel, qui en hiver ſont blancs, en été deviennent noirs, ou plutôt bigarés.

I X

Quant aux hommes, nous obſervons en général, que tous les negres, les olivâtres, les baſanés, les cuivreux ſe trou-

(18) Hiſtoire naturelle des Oiſeaux diſcours préliminaire p. 22 edit. in 4.
(19) Hiſtoire entière des Poiſſons pag. 34 & 134.

vent dans les pays chauds, que jamais l'on en a trouvé dans les pays froids, même nous ſavons que les Negres depayſés, & dans les climats froids blanchiſſent dans quelques années, & les Européens bruniſſent dans leurs climats chauds, mais je me contenterai de rapporter encore ici une obſervation qui tient toujours à l'action du ſoleil, & de la lumière ſans entrer à diſcuter les opinions des Savans ſur ce qui fait la couleur des Negres, & c'eſt que ces hommes ont la plante des pieds auſſi blanche, que les Européens. (20)

Toutes ces obſervations combinées me portoient toujours plus à croire, que la lumière du ſoleil influë beaucoup ſur les couleurs des corps naturels, & particuliérement des végétaux, des fleurs, des fruits, & même des animaux; je cherchai par conſéquent de m'en aſſurer par des expériences.

Or le ſoleil peut agir de deux manières différentes en ſuppoſant les couleurs attachés à ce principe. 1.° comme fait le feu ſur les couleurs de la porcelaine, qui ne ſont que très-laides quand on les peint, mais qui aquierent le plus grand éclat lorſque le feu vitrifiant ces matières en développe la couleur; de même le ſoleil développant les principes analogues dans les fleurs, les reduiroit à cette beauté, qui fait l'ornément de nos jardins.

2° De voir s'il agit ſimplement comme lumière en introduiſant dans les parties des fleurs des principes colorants ſelon la diſpoſition des mêmes plantes à refléchir certaines parties de la lumière plutôt que des autres, & rapportant cela aux affinités des parties de la lumière avec les parties des corps en queſtion, effet ſemblable à celui que la

(20) Vojez l'Abbé Manet Hiſtoire de l'Affrique Françoiſe, & l'appendix des Mémoires de l'Academie Royale de Pruſſe Tom. II, art. VIII. p. 15.

lumière opére ſur le phoſphore de Bologne (21), ſur lequel l'on ſçait que le feu n' y a aucune action.

Il ne ſera pas au reſte inutile d'obſerver d'avance, que par l'analiſe on découvre, que les fleurs contiennent toute ſorte de ſels, & de parties terreſtres; c'eſt à ces deux principes que je m'arrête en tant que généraux, & je laiſſerai à part les autres que l'on ne peut pas regarder comme colorants; mais venons aux expériences.

Expérience première.

J'ai pris une forte tige de violier rouge, qui étoit plus foncée dans quelques endroits, & qui avoit des petites tâches auſſi de rouge foncé, & lorſqu'elle eut à peine formé les petits boutons, j'ai mis le pôt dans un endroit très-obſcur d'une chambre que j'avois préparée pour cela; j'ai eu ſoin de laiſſer prendre de l'air pendant la nuit à la plante, & je ne l'ai arroſée qu'une fois, le terrein s'étant maintenu aſſez frais; cette plante a beaucoup tardé à donner des fleurs, & je n'ai obſervé lorſqu'elle eſt écloſe preſque aucune couleur dans les pétales, c'eſt-à-dire, elle ne montroit qu'une couleur entre jaune, & verd, cependant on y diſtinguoit les tâches, quoique elles ne fuſſent pas autant foncées que dans celles qui végétoient en plein jour. J'ai cependant remarqué, que la plante avoit beaucoup ſouffert, & que le feuilles étoient fanées, jaunâtres, & qu'il en tomboit quelqu'une, que même de cinq ou ſix pointes boutonées il n'y en eut, que deux qui fuſſent écloſes, la plante mourut dans quelques jours.

D'autres plantes que j'avois auſſi mis dans l'obſcurité, mais qui étoient d'une tige un peu plus foible moururent

(21) *Commentaria Bononientia tom. 2 p. 20 Bartholomæi Beccari. De quamplurimis phosforis nunc primum detectis.*

ſans me laiſſer lieu de rien obſerver ; j'ai vu, que par cette méthode l'on pouvoit auſſi ſoupçonner la raiſon des plantes étiolées, ou malades, faute d'une libre reſpiration de l'air, & j'ai eu recours à l'expérience ſuivante.

Expérience ſeconde.

Entre pluſieurs plantes des mêmes fleurs de l'expérience précédente expoſées en plein air j'ai choiſi une tige aſſez forte, qui avoit déjà les boutons, mais avant qu'ils s'ouvriſſent j'ai couvert la pointe boutonnée d' une cloche de terre verniſée pour lui ôter la vue du ſoleil, la tige, & les feuilles jouiſſoient cependant de toute la lumière, & la reſpiration de la plante n'étoit preſque point génée; j'ai obſervé lorſque la fleur a été écloſe, que les pétales n'étoient que très-peu colorés ſur les bords, & un peu tâchés en rouge, comme j'ai eu lieu d'obſerver dans l'expérience précedente; la plante n'en mourut pas.

Expérience troiſième.

J'ai choiſi une plante de violier cramoiſi foncé, qui a donné quantité de fleurs; je les ai toutes coupées, & il en reſtoit ſeulement 6 à 7 boutons parfaitement fermés, & tout-à-fait verds, j' étois ſur de cette façon de la couleur des fleurs, j'ai fermé cette plante dans une caiſſe de bois couverte de toile cirée pour ôter entiérement la lumière, j'ai pratiqué en divers endroits de la caiſſe des trous, pour y faire circuler l'air : la plante me donna dans dix ou douze jours des fleurs qui étoient pâles tout-à-fait dans les pétales du centre, mais dans l'extérieur elles étoient de couleur de roſe fort tendre, & l'on obſervoit la même choſe dans tous les boutons qui étoient éclos; la tige, & les feuilles vinrent d'un verd plus tendre auſſi.

J'ai tournè ensuite mes vües sur un fait que tout le monde rapporte, & que la plus part des Auteurs (22) débitent, savoir, que la vapeur du souffre ôte entiérement la couleur aux fleurs; j'ai voulu examiner la raison de ce phénoméne, que j'ai trouvé faux en partie, comme il est aisé de le voir par les expériences suivantes.

Expérience quatrième.

Ayant mis du souffre dans un creuset, que j'ai couvert d' un cone de papier, qui portoit à la pointe quatre ou cinq tiges de hyacintes bleues, & ayant allumé le souffre, après deux minutes ces fleurs devinrent tout-à-fait blanches, & dèpourvues de couleur, mais les ayant de nouveau exposées à la vapeur du souffre, dix ou douze minutes après les ayant regardées, j'ai reconnu quelques taches rouges sur la pointe des pétales; je les ai laissé encore un bon quart d' heure & les pétales prirent une couleur rouge dans tout le contour de la largeur d'une ligne, & même plus dans quelque endroit. J'ai observé précisément le même phénoméne dans les fleurs nommées *primula veris*, & *hyacintus moschatus*, qui sont d' un bleu de Roi très-foncé; elles devinrent blanches dans les premiers momens, ensuite les extrémités se colorerent d' un beau rouge, comme dans les hyacintes que j'ai décrit.

Les violettes m' offrirent le même résultat, ainsi que les fleurs de bleuette, de veronique, l' iris silvestris &c., en deux mots toutes les fleurs bleues, & violettes que j'ai expérimentées me donnerent le même rèsultat.

(22) Henchel, Nollet, Schaw.

Expérience cinquième.

J'ai expoſé de même à la vapeur du ſouffre pendant plus d'une heure de tems des violiers, des narciſſes, & des roſes jaunes, des levions des fleurs de genet & de farfara ſans que leurs couleurs ayent ſoufert la moindre altération, & je ſuis bien aiſe de pouvoir aſſurer les curieux qu'on peut conſerver par ce moyen la couleur aux fleurs jaunes quoique deſſechées par l'acide ſulfureux autant de tems que l'on voudra & avec la même vivacité qu'elles peuvent avoir au moment qu'on les détache de la plante : on me pardonnera j'eſpère cette tranſition en faveur de la nouveaute (23).

Expérience ſixième.

La vapeur du ſouffre fit diſparoitre dans peu de tems la couleur rouge des fleurs dont je m'étois ſervi, telles que les roſes, les tulippes, les pavots, les fleurs de paſſion, les violiers, les œillets, &c. mais elles reprirent après quelque tems leur couleur naturelle, j'oſe même dire avec plus de vivacité vers l'extremité, ou la pointe des pétales de la largeur à peu-près de quatre ou cinq lignes comme s'il leur étoit arrivé une éſpéce de concentration des molecules colorantes vers cette partie. Il eſt bon de remarquer ici, qu'ayant eſſayé deux ou trois pointes de violiers rouges de cette plante qui avoit végété à l'obſcur (expérience troiſième) qui étoient à peine colorées d'un rouge tendre, cependant après avoir été quelque tems à la vapeur du ſouffre, la pointe des pétales ſe colora d'un rouge auſſi vif, que celui des autres fleurs, qui avoient végété en plein jour.

(23) Tranſactions philoſophiques.

Expérience ſeptième.

Ayant expoſé quantité d'eſpéces de feuilles vertes, des tiges, des branches, différentes herbes à la vapeur du ſouffre de la même façon que dans les expériences précédentes, la couleur ne changea jamais, elle s'eſt affoiblie quelque peu dans quelques unes, qui cependant reſterent viſiblement vertes.

Expérience huitième.

Toute eſpéce de fleurs blanches de différentes qualités, que j'ai expoſé à la vapeur du ſouffre, ne changérent aucunement, & l'on n'y pouvoit même appercevoir le moindre changement.

Par ce que je viens d'obſerver, je conclus que le ſouffre n'agit ſur les couleurs des végétaux que, comme font les autres acides minéraux, c'eſt-à-dire changeant en rouge le bleu, & le violet des végétaux, altérant un peu la couleur rouge, & n'attaquant pas ni la jaune, ni la verte.

Je dois enfin remarquer qu'en laiſſant expoſées à l'air libre ces fleurs après leur avoir fait ſubir cette tranſmutation, après quelque tems l'on reconnoit de nouveau quelque trace de la couleur primitive. Un fait digne d'obſervation c'eſt qu'ayant eſſayé ſur quantitè de plantes odoriférantes les mêmes expériences, la couleur étoit enlévée dans les premiers moments, mais l'on en ſentoit très-diſtinctement l'odeur: de façon que l'on peut conclure, que le principe odoriférant n'eſt pas attaché au colorant, qui doit avoir un autre principe tout particulier; l'on peut très-aiſément s'en convaincre en faiſant des épreuves ſur les hyacintes, les violettes, & les roſes &c., & toutes les plantes qui ont une odeur aigüe, de même que ſur les fleurs blanches, car quoique celles-ci ne changent point leur couleur naturelle, l'on ſent très-diſtinctement l'odeur de la fleur.

L'enſemble des expériences me confirmoit toujours plus dans l'opinion que j'avois formée, 1° que l'air eſt d'une néceſſité abſoluë à la végétation :

2° que le ſoleil contribuë au developpement des couleurs (*).

3° Que les fleurs contiennent des parties fixes qui donnent les couleurs, ce qui paroît encore confirmé par l'action de l'acide ſulfureux (pag. 29 & ſuiv.), & qu'on ne doit par les regarder comme un ſimple accident du tiſſû, qui produiſe une réflexion déterminée de la lumière.

4° Que tout bien conſidéré la queſtion de l' inhérence des couleurs peût être regardée comme indiférente & ſuſceptible d'arguments pour & contre, ſuivant la manière de l'enviſager : or nous allons continuer notre examen ſous le point de vüe ci-devant (corollaire 3) & nous attacherons à decouvrir principalement la nature des parties colorantes des fleurs.

(*) Je crois qu'on pourroit adopter ici les idées de M. Homberg ſur la lumière, qu'il regardoit comme le ſeul principe actif de tous les mixtes, & qu'il appelloit ſoufre principe. Voyes Mém. de l'Acad. des ſcien. pour l'an. 1705. pag. 89. & ſuiv.

SECONDE PARTIE

Les obſérvations & les expériences dont je viens de rendre compte, m'ayant raſſuré ſur les doutes qui s'élèvoient de toute part contre les idées que je m'étois faites ſur la cauſe productrice des couleurs, ſur la nature de cette cauſe, & ſur les moyens dont ſe ſert la nature pour les devélopper. Je me propoſai d'enrichir autant qu'il feroit en mon pouvoir cette partie de la végétation du plus grand nombre de faits: après l'avoir enviſagée ſous un point de vüe botanique & phyſique je crûs ne pouvoir rien faire de mieux que de l'examiner d'une manière plus intime par les ſecours de la Chimie.

Quelques perſonnes aux quelles je communiquai mon projet ne crurent pas devoir m'y encourager, & je n'ai pas trouvé de motifs bien engageants dans les Auteurs que j'ai conſulté: il étoit queſtion de tenter ſi les couleurs des fleurs ſoutiendroient à la violence du feu de vitrification & ſi elles feroient propres à peindre le verre. M.r Pott Auteur de la Lithogeognoſie dit formellement en pluſieurs endroits que les couleurs végétales ne ſupportent pas le feu de vitrification. M.r Schaw aſſure la même choſe, ainſi que le Baron d'Holbach dans ſes notes ſur Neri, & M.r de Montami enfin, qui dit en pluſieurs endroits de ſon excellent traité de la peinture en Email que l'on doit rejetter toute ſorte de couleurs animales, & végétales comme incapables de ſervir, ne me donnoient pas comme l'on voit de grands encouragemens.

Je communiquai mes idées à mon Ami M.r le Comte de Saluces à qui ces matières n'étoient pas neuves, & j'eus autant de plaiſir alors de voir dans ſon livre de mémoires que je m'étois rencontré avec lui, de ce que j'en ai maintenant de lui en faire honéur; Nous traitames quelque tems cet objet, & une argument qui nous parut toujours decisif est celui que, les verres dont le fondant est un sel alkali végétal, sont toujours verds ou verdatres, pendant qu'ils sont jaunes avec le plomb, pourpre avec l'or, bleuatres avec le cuivre &c., ainsi que l'ont remarqué plusieurs célébres Chimistes.

Or si les végétaux dont on retire le sel alkali pour l'usage des verreries après avoir soufert toutes les opérations qui sont nécessaires pour être reduits en sel & après avoir essuyé le dégré de feu qui est nécessaire pour mettre en fusion les matières vitrifiables, & pour s'y combiner dans l'état de vitrification, portent neantmoins cette teinte aux verres, pour quoi les fleurs, les racines &c. ne fourniroient elles pas jusqu'à un certain point leur couleur naturelle aux verres dans lesquels on les auroit employées après avoir été réduites en sel?

Nous ne savions pas voir de différence entre les parties d'une même plante pour être fondés à penser que les unes fussent composées de parties plus fixes que les autres: la delicatesse des couleurs ne nous autorisoit pas non plus à une telle supposition; de manière que le doute nous paroissoit assés fondé pour ne pas balancer plus long tems à tenter l'expérience, & jé m'y déterminai d'autant plus volontiers qu'ayant répété un grand nombre des expériences, dont Mr Henckel se sert pour prouver la grande alliance qu'il y a entre le régne végétal, & minéral je me trouvois aussi convaincu que lui des principes qui sont contenus dans son excellent ouvrage du *Flora saturnisans*.

La nécessité d'un feu violent, & continuè m'engagea à profiter de celui des fourneaux de la verrerie Royale, nos essais ayant manqué dans le fourneau à vent du laboratoire de Monsieur le Comte de Saluces: J'aurois souhaité de reussir un verre purement végétal pour être à couvert de tout soupçon, ce qui est de la plus grande difficulté car non seulement on n'y parvient que par un feu très-violent, mais ce verre tombe aisément en déliquescence.

Pour remédier à cet inconvenient on acoûtume de le mêler avec quelque matière vitrifiable pour avoir un corps d'une plus grande dureté, cependant malgré cette combinaison ce verre est toujours verdâtre tenant à la matière végétale dont il a été composé, c'est-à-dire aux cendres de Kali, ou d'autres plantes; de façon que dans les fabriques l'on est dans l'usage d'y joindre un peu de Magnesia, ou Manganese qui a la propriété d'éclaircir le verre, & de lui ôter la couleur verdâtre, ce qui l'a fait nommer par quelqu'un le savon du verre. Voyés l'ouvrage de M. Montami.

La fumée qui s'éléve des fleurs que l'on brûle pour les réduire en cendre est si distinctement colorée de la couleur de ces mêmes fleurs que je commençai à douter du succès: je continuai cependant la préparation des cendres d'une grande quantité de fleurs de toute espéce sans oublier celles qui sont parfaitement blanches, & dont le résultat m'intéressoit beaucoup, persuadé qu'elles ne fourniroient aucune couleur au verre: J'en préparai aussi à la manière de Tackenius dans l'espérance de retenir une plus grande quantité de parties colorantes, mais elles n'en furent pas plus chargées après la calcination qui étoit absolument nécessaire pour en chasser toute l'humidité, ainsi je préférai de me servir de la méthode de les brûler en plein air; d'autant plus que j'aperçus par quelques essais que l'humidité qui se deployoit avoit terni les verres que je essayois, & je ne venois pas même à mon but de reconnoître distinctement la couleur que j'avois obtenue des différentes cendres des fleurs.

J'ai commencé par la couleur rouge, ensuite par les autres couleurs principales, & enfin par les fleurs blanches, j'ai changé dans la premiere expérience les proportions, ce qui m'a ſervi de régle pour les autres, & afin que l'on put voir d'un ſimple coup d'œil les réſultats, que j'ai obtenu. J'ai rangé en forme de tables ces expériences où je fairai pourtant les remarques nécéſſaires. Il eſt bon cependant de remarquer, que dans la compoſition de mes verres je ne me ſuis ſervi d'autre matière vitrifiable que de la poudre de Callioux (*ſilex corneus*) ou du criſtal de roche; que pour aider la fuſion, je n'ai employé que du ſel de tartre bien depuré, ayant banni le borax & les autres fondans, comme ſoupçonnés avec raiſon de contenir des parties colorantes. Que pour ôter tout ſoupçon de couleur étrangère, j'ai eſſayé le ſimple caillou & le criſtal de roche avec le ſel de tartre qui me donnerent tous deux un aſſez beau verre tranſparent, & point du tout coloré, dont je me ſuis ſervi quelque fois auſſi pour unir aux ſubſtances végétales calcinées. Dans les tables j'ai toujours marqué caillou, quoique je me ſois ſervi indiſtinctement ou d'une matière ou de l'autre. Les eſſais ont été faits dans des petits creuſets au fourneau de verrerie.

TABLE PREMIÈRE.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Fleurs de Pavots Sel de Tartre.	Une partie. Une partie.	Maſſe. Friable.	Cendrée.	Où l'on reconnoiſſoit quelques points rouges.
Fleurs de Pavots Caillou . . Sel de Tartre.	Deux parties. Deux parties. Une partie.	Un Verre.	Pourpre.	La ſurface du verre étoit un peu verdâtre avec des tâches rouges
Fleurs de Pavots Caillou . . Sel de Tartre.	Une partie. Une partie. Une partie.	Un Verre.	Rouge.	Plus beau que le précédent.
Fleurs de Mauve . . Caillou . . Sel de Tartre.	Une partie. Une partie. Une partie.	Subſtance Vitreuſe.	Rouge, & violette.	De la couleur de la fleur.
Fleurs de Gladieul . . Caillou . . Sel de Tartre.	Une partie. Une partie. Une partie.	Un Verre.	Bleu tendre.	Qui reſſembloit à l'aigue-marine.
Fleurs de Genet. Caillou . . Sel de Tartre.	Une partie. Une partie. Une partie.	Un Verre.	Jaune.	Dont les bords du Creuſet étoient un peu colorés en rouge. *
Fleurs blanches. Caillou . . Sel de Tartre.	Une partie. Une partie. Une partie.	Un Verre.	Point coloré.	Qui avoit l'œil verdâtre comme le verre ordinaire.

(*) La couleur rouge, qui ſe deceloit dans toutes les compoſitions avec le genet, me détermina à ſuivre un travail ſur cette plante, qui a donné des réſultats curieux, comme on pourra voir dans un autre mémoire.

Je laisse juger du plaisir, que j'ai eu du succès de ces expériences, qui me confirmoient dans mon idée, puisque chaque fleur colorée a donné dans la vitrification sa couleur naturelle fort distinctement, & les blanches n'en donnerent point.

J'ai cherché ensuite à examiner si j'aurois reçu les mêmes résultats des autres substances végétales colorées. J'ai examiné la racine de Garance si connüe par sa teinture, la Béterave qui est si colorée, & la Guesde dont on se sert pour la teinture bleüe. J'ai ensuite fait des expériences sur des graines colorées, & sur la substance farineuse des semences. Le *Solanum* fût le fruit, ou plutôt la graine que j'ai examinée; c'est un végétal du Brésil fort coloré en pourpre, que M. le Docteur Dana Professeur de Botanique a fait végéter dans notre climat, & lui a fourni des savantes observations sur la teinture (24).

Le résultat est digne d'attention, car ce *Solanum* colora le verre beaucoup plus, proportion gardée que les cendres des fleurs.

Les substances farineuses donnerent des couleurs aprochantes du blanc émaillé; il m'a paru même d'entrevoir que les fruits, & les graines donnent plus de couleur, ensuite les fleurs, après celle-ci les racines, & les semences très-peu.

(24) Je dois de même faire honneur à M. le Docteur Dana qui se fit un vrai plaisir de me donner ce fruit avec les préparations qu'il en avoit faites en m'instruisant des expériences qu'il avoit entreprises & de leur résultats.

TABLE SECONDE.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Garance. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*4 parties.* *4 parties.* *3 parties.*	*Un Verre.*	*Verd obscur.*	*Avec des petites tâches rouges.*
Betterave. *Verre pulverisé.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Violet.*	*Pas beaucoup clair.*
Isatis sativa. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*4 parties.* *4 parties.* *3 parties.*	*Un Verre.*	*D' un verd obscur.*	*Couleur de la plante.* (*)
Solanum. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*4 parties.* *2 parties.* *2 parties.*	*Un Verre.*	*Pourpre foncé.*	*Plus coloré que celui des fleurs.*
Farine. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*4 parties.* *4 parties.* *2 parties.*	*Substance vitreuse.*	*Blanchatre.*	*Aprochant à l' email.*
Ris. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*4 parties.* *4 parties.* *4 parties.*	*Substance vitreuse.*	*Plus blanche.*	*Aussi émaillée.*
Feves. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*4 parties.* *4 parties.* *2 parties.*	*Substance vitreuse.*	*Un peu verdâtre.*	*Aussi émaillée.*

(*) Cette plante que les François nomment *pastel*, ou *guesde*, & nos artistes *Vaud* donne une teinture bleüe, mais c'est par la chaux vive, & l'alun qu' on l'obtient.

La foibleſſe des teintes colorées de la couleur de la fleur, qui paſſoit dans mes verres m' avoit fait ſoupçonner que par l' incinération & la calcination il ſe fit une grande perte de la matière colorante, attendu la grande évaporation qu' elle ſouffroit, & je voyois d' ailleurs clairement que les chaux des fleurs contenoient beaucoup d' autres parties non colorantes; pour y remedier j'ai tenté de me ſervir des ſucs concrets, & j'ai eſſaïé celui de Pavots extrait avec l' eſprit devin, qui à la verité avoit retenu d'avantage la matière colorante, mais l'umidité qui ſe developpoit rendant mes verres ternes je fus contraint d'abandonner cette méthode.

Je me decidai alors de ſeparer ces principes par des lixiviations repétées pour m'aſſurer de ce qu'il reſulteroit de ces ſucs concentrées & enſuite calcinés: car ainſi que je l'ai remarqué pag. 18. les fleurs reſtoient entierement dépourvuës de couleur après une forte decoction & d'ailleurs j'avois éprouvé que le Marc du *genét* & du *Solanum* que j'avois retiré d'une leſſive reiterée ne donnoit plus la moindre teinture aux verres. Je ne diſſimulerai pas ici le plaiſir que me fit la lettre de M.r le Comte de Saluces du 18. avril 1770., où il traite cet objet, & celle du premier maj qui contient des expériences & des obſervations ſur la racine de garance; je me fais un devoir de rapporter ces articles qu'on trouvera dans la note ſuivante.

EXTRAIT DES ARTICLES DES LETTRES. DE M. LE COMTE DE SALUCES.

D'ailleurs, mon cher Comte, il n' y a dans les fleurs que quelques parties qui ſoient deſtinées à les colorer, & dont on peut faire uſage pour peindre le verre. Voici mon procédé pour les ſeparer d' avec les parties abſolument non colorantes. Faites la decoction de telles fleurs qu'il vous plaira Juſqu' à ce que les pétales ou les feuilles ſoient entierement décolorées, évaporées en lentement l' umidité, & après la deſſiccation, calcinez le ſuc, & vous aurés la partie colorante: calcinés enſuite les feuilles ou le marc de votre ſuc, & vous n'obtiendrés aucune couleur: ce qui prouve que la partie colorante s'eſt combinée avec la

Il me reſtoit à voir ſi les ſels extraits des fleurs auroient, pour ainſi dire, ramaſſé toute la partie colorante, & ſi j'aurois coloré davantage, & avec plus de vivacité les verres, ce qui eſt en effet arrivé avec les ſels des fleurs de Pavot, de Genet, & de Garence qui donnerent des verres très-colorés chacun de la couleur de la fleur, comme on peut le voir dans la table troiſième.

Les expériences ſur les verres ayant parfaitement répondu à mon attente, je voulus eſſayer encore ſi ces couleurs végétales étoient à portée de colorer les chaux métalliques; j'ai pris du *minium*, avec lequel j'ai fait le mélange avec les différentes cendres des fleurs, comme on peut voir dans la table quatrième.

partie ſaline. Eſt ce maintenant le phlogiſtique ou des parties métalliques qui donnent la couleur? Où eſt ce de l'action du premier ſur celles-ci qu'on l'obtient? Paſſons maintenant au ſecond extrait . . . *Vous ſcavés que la vitrification avec les cendres de racine de garance vous a manqué, ce qui ſuivant mes principes me paroiſſoit extraordinaire, j'en ai donc cherché la raiſon & le moyen de faire paſſer cette couleur dans les verres. J'ai imaginé que par un feu vif & ouvert tel qu'il le faut pour la calcination, la partie colorante, qui doit avoir ſelon moi une grande affinité avec le phlogiſtique, étoit preſque toute enlévée; car vous ſavés que cette racine abonde en huile & en parties volatiles. Je commencai donc par mêler une partie de ſel de tartre ſur deux de poudre de garance. Vous connoiſſés la couleur naturelle de cette poudre qui eſt couleur de feuille morte, immediatement elle prit une couleur rouge preſque cremoiſi & manifeſta une odeur tres-vive de champhre. Je ſus fort ſurpris de ces deux effets & ayant mis le tout dans un alembic de verre au bain de ſable, je commencai la diſtillation par un feu doux que je pouſſai par dégré à la derniere violence, & juſqu'à ce qu'il ne paſſoit plus rien dans le recipient. J'obtints par cette diſtillation deux liqueurs, dont la première eſt jaune, & la ſeconde eſt une huile empireumatique véritable, n'ayant pas encore pû examiner la première, le Caput mortuum étoit une ſubſtance grénuë charboneuſe, mais d'une couleur à peu près comme le bleu de Pruſſe très-foncé. C'eſt cette fecule que j'ai combiné avec la moitié de poudre de marbre, & j'ai obtenu un verre coloré rouge jaunatre, très-beau & très-tranſparent.*

TABLE TROISIÈME.

MELANGES.	PROPORTION.	RESULTATS.	COULEUR.	REMARQUES.
Suc de Pavots. *Verre pulverisé.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Rouge.*	*Dont l'humidité l'avoit beaucoup noirci.*
Genet lessivé. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Verd foncé.*	*Comme celui des bouteilles de Bourgogne.*
Solanum lessivé. *Caillou.* *Sel de Tartre.*	*Une partie.* *Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Fort verd.*	*Où cependant il y avoit un soupçon de rouge.*
Sel de Pavots.	*Une partie.*	*Une masse.*	*Rouge.*	*Qui après quelques jours tomba en* deliquium.
Sel de Pavots. *Verre pulverisé.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Un Verre.*	*Rouge.*	*Dont la couleur passa le couvercle du creuset.* (*)
Sel de fleur de Genet *Caillou.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Substance vitreuse.*	*Jaune dorée.*	*Un peu coloré en rouge sur le bords, & émaillée.*
Sel de Garance. *Caillou.*	*Une partie.* *Une partie.*	*Substance vitreuse.*	*Teinte en rouge.*	*Un peu émaillée*

(*) La volatilité fût si grande que le bas du creuset fût aussi coloré en dehors malgré sa grande épaisseur même dans la couleur rouge la volatilité m'a paru plus sensible.

TABLE QUATRIÈME.

Melanges.	*Proportion.*	*Resultats.*	*Couleur.*	*Remarques.*
Fleurs de Pavots Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Maſſe.*	*Rouge.*	*Où le plomb étoit réduit en litharge*
Fleurs d'Iris. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Le plomb fut en partie revivifié.*	*Avec des points bleus.*	*La couleur ſe ſoutint à un plus grand feu.*
Fleurs de Genet. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Une maſſe friable.*	*D'un très-beau jaune*	*Qui à un plus grand feu devint un verre jaune.*
Fleurs blanches. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Maſſe friable.*	*Grisâtre.*	*Aprochant du petit verd.*
Suc de Pavots. Minium.	*Une partie.* *Deux parties.*	*Eſpèce de litharge.*	*Colorée en rouge à la ſurface.*	*Dont l'humidité avoit terni l'eſſai.*
Sel de Pavots. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Subſtance vitreuſe.*	*Un peu co lorée en rouge.*	*Qui ſe ſoutint à un plus grand feu.*
Sel de Genet. Minium.	*Une partie.* *Une partie.*	*Subſtance vitreuſe.*	*Jaune doré.*	*Les bords du creuſet étoient rouges, & émaillés.*

(*) L'on voit que les résultats de ces expériences ſur les chaux métalliques ſont très-conformes aux précédents; que ſi les matières n'ont pas été toutes réduites en verre c'eſt faute du feu violent qui il y auroit fallu pour le verre de plomb, & d'ailleurs le phlogiſtique en revivifie toujours quelque peu.

L'on apperçoit très-aisément d'aprês ces expériences que les sels contiennent la plus grande partie des principes colorants des fleurs, & des autres parties des végétaux à tel point, que avec les sels extraits des fleurs je suis venu à bout de peindre de la porcelaine, de la fayance & de l' émail, & que aussi en se donnant du soin l' on peut colorer du cristal, & imiter de cette façon les pierres fines.

Je finirai ces détails par l'examen que je fis sur le bois pétrifié, substance jadis appartenante au regne végétal, (qui est rangée à présent par les Naturalistes dans le minéral) pour observer si elle contenoit quelques devises de son premier état: l'ayant dont agrégé avec du sel tartre j'ai obtenu un verre très-beau presque transparent couleur d'agathe, où l'on ne reconnoissoit pas la moindre trace de verd. (4)

Tel est le précis des expériences que j'ai fait sur les fleurs, & les autres parties colorées de végétaux (5),

(4) Il n'en est pas de même des os fossiles, qui ne perdent jamais de leur nature, & ne peuvent être jamais rangez dans le regne minéral, puisque on obtient au grand feu par leur distillation une huile empireumatique, & un sel volatil, & le *caput mortuum* mêlé avec la fritte donne un verre blanc & opaque, caractéres distinctifs du regne animal, comme jaurai lieu d'observer dans la suite. Voyez M. Carl. dans son traité du *Lapis Lydius ossium fossilium.*

(5) J'ai tenté plusieurs experiences pour pouvoir ranger celles-ci dans un certain ordre, j'ai tâché avec toute la briéveté de n'omettre aucune circonstance intéressante au sujet, comme aussi de rapporter avec toute l' impartialité les résultats, ce que l'on est dans le cas de vérifier, en refaisant les expériences. Je dois avvertir pour ceux qui voudront se donner la peine de les suivre, qu' il faut avoir un attention toute particulière dans l'administration du feu, puisque attendu la volatilité de la matière colorante, telle cendre, ou tel sel, qui, après un tel tems de feu vous donnera une belle couleur, si vous le laissez quelque heure davantage la couleur s'affoiblit, ce qui arrive aussi aux couleurs métalliques de la porcellaine, & de l'émail. Je ne saurois indiquer des régles précises, c'est la pratique qui doit éclairer là dessus. J'aurois à la vérité pû rendre plus beaux les verres des essais, en changeant les melanges & les proportions; cependant

& il me paroit démontré que la matière colorante dans les fleurs, comme dans les autres parties des végétaux eſt une matière ſolide & inhérente, & qui, par conſéquent n'eſt pas ſujette ſi aiſément à changer.

Nous ne connoiſſons, que les ſubſtances métalliques capables de teindre le verre, n'y auroit-il pas lieu de croire que ce ſont auſſi des parties métalliques qui produiſent la couleur dans les fleurs, & dans les autres parties des végétaux? Que ces parties étant extrêmement diviſibles & ſolubles dans l'eau par le moyen des ſels, ſont dans le cas d'être introduites dans les vaiſſeaux capillaires des plantes, & des fleurs, & qu'à l'aide du phlogiſtique leur couleur en eſt développée, ne devant pas au reſte confondre le phlogiſtique, & la matière colorante, comme a fait M. Pott, puiſque ce ſont deux matières bien différentes à mon avis, l'une pour parler le langage des Anciens étant la matière, & l'autre la forme.

Ce puiſſant reſſort de la nature, cet agent général qui ſe trouve dans tous les corps, pourroit très bien être le fluide électrique; j'ai été charmé de trouver dans le dernier ouvrage du célébre M. Francklin un ſentiment très-conforme (6) „ Je ſuis porté, dit-il, à croire que le „ feu fluide, de même que l'air fluide eſt attiré par les

comme je portois au reſte mon attention ſur les réſultats de la couleur, que les ſubſtances végétales m'auroient donné dans la vitrification, j'ai cru pouvoir m'en diſpenſer d'autant plus, que comme j'ai dit, j'ai banni toutes les matières, qui étoient ſoupçonnées de contenir des parties colorantes.

(6) I hare been rather inclined to think that the fluid *fire* as well as the fluid *air*, is attracted by plants in their growth and becomes conſolidated with the other materials of which they are formed and makes a great part of their ſubſtance: That when they come to be digeſted and to ſuffer in the veſſels a kind of fermentation part of the fire as well as part of the air recovers its fluid active ſtate again and diffuſes itſelf in the body digeſting and ſeparating it. Experiments and obſervations on Electricity and Benjamin Francklin London 1769 Lettre 26 page 346.

„ végétaux, & qu' il s'unit, & fait corps avec les autres „ matières, dont ils ſont formés, & dont il fait dès lors „ la principale partie. „ Il n'eſt pas difficile d'appercevoir que à l'aide de ce feu les végétaux reçoivent un principe vital, & le développement de la couleur; (7) il ſeroit à déſirer que l' illuſtre M. Francklin voulut par ſes ſavantes obſervations examiner cette partie qui lui fourniroit une carriére lumineuſe à parcourir.

De ce que nous voyons que la chaîne étroite, qui lie le regne végétal au minéral, lie encore plus étroitement l'animal au végétal, ne peut-on pas ſoupçonner que cette chaîne s'étend auſſi de l'animal au minéral? de ſorte que ce que j'ai dit plus haut, ne ſoit pas ſans probabilité, ſavoir qu'il n' y a qu'une même cauſe productrice des couleurs dans les trois regnes, puiſque par quelques eſſais, que j'ai fait ſur des ſubſtances animales, j'ai obtenu les mêmes réſultats que dans les végétales.

Je me contenterai de rapporter l'expérience que je fis ſur le ſang, la ſubſtance animale la plus colorée, & la plus belle: les ſentimens de ceux qui ont traité de ſa couleur ſont partagés, quelqu'un a cru de devoir l'attribuer au ſouffre, qui y eſt contenu; quelqu'autre aux ſels; au mercure ſubtil, ſelon Paracelſe. Haller quoique il

(7) Il me paroit que ce n'eſt pas ſans probabilité que on a ſuppoſé le fluide électrique, comme le moteur de la partie colorante; nous en voyons une preuve dans la revivification, & vitrification des chaux métalliques (*a*), comme auſſi dans les taches circulaires colorées, lorſque l'on fait paſſer la commotion electrique à travers des feuilles de différent métaux placés entre deux lames de verre poli. (*b*)

L' expérience de M. Prieſtley ſemble le prouver d'avantage, car ayant fait paſſer l'exploſion électrique ſur la ſurface de l' huile de vitriol, il vit une couleur fort rouge à la ſurface de l' huile qui étoit ſurément due au fer: hiſtoire de l' électricité Tom. 3 pag. 390.

(*a*) Beccaria elettriciſmo artificiale §. 738, e ſuiv.

(*b*) Expériences, & obſervations ſur l'électricité faites à Philadelphie par Beniamin Franklin Tom. 2 pag. 53, & ſuiv.

ait adopté dans les premiers ouvrages le ſentiment de Boherawe ſon maître, c'eſt-à-dire, que la couleur du ſang étoit produite par la denſité des globules. Dans les derniers il a propoſé une opinion tout-à-fait vraiſemblable, c'eſt-à-dire, que la couleur rouge étoit due aux particules ferrugineuſes contenues dans le ſang (8), appuyant ſon opinion ſur les expériences de Geofroi de Lemeri & ſurtout ſur celles du ſavant Menghini, & des Académiciens de Bologne, (9), qui ont trouvé que preſque toute la partie rouge du ſang après avoir été torrefiée au feu, étoit attirable par l'aimant, & avoit toutes les propriétés du fer.

En effet ayant calciné du ſang, j'en ai obtenu une chaux colorée en rouge comme du ſaffran de mars, laquelle a été attirée en partie par l'aimant, ce qui ne me laiſſoit plus aucun doute ſur l'exiſtence du fer (10), ayant donc mêlé parties égales de cette chaux avec du verre pulveriſé dans un creuſet au feu de verrerie, la matière fût réduite en verre, dont la ſurface étoit blanche comme l'eſt ordinairement le verre fait avec des parties animales, mais ayant caſſé le creuſet le verre étoit extrémement rouge en dedans, même la couleur rouge paſſa le creuſet par ſa grande volatilité à peu-près de la même façon, que j'ai obſervé dans l'expérience cinquième ſur le ſel de Pavot Table III.

(8) *Elementorum phiſiologiae.*

(9) *Commentaria Bononientia Tom. II. pag. 2 Vincentii Menghini diſſertatio de ferrearum particularum ſede in ſanguine pag.* 244.

(10) Le Médecins acoûtument de donner des préparations de fer dans les maladies, où la partie colorante du ſang ſe diminue, comme dans les pâles couleurs dans quelques eſpéces de cachexies, dans les hidropiſies &c. Mais il ne ſont pas d'accord ſur la préparation à laquelle ils doivent donner la préférence, il me paroit que le fer du ſang calciné feroit, peut-être, plus analogue, & plus facile à reprendre ſa forme, je laiſſe aux Médecins à décider ſur cet article.

L'on voit par cette expérience qu'il y a un ſeul principe colorant dans les trois regnes. Le verre que j'ai obtenu du ſang, celui que j'ai obtenu du ſel de pavots, & celui que l'on obtient par les ſafrans de mars ſont trois rouges des trois regnes différents, & ſi celui fait avec le ſang, eſt très-analogue à celui du ſafran de mars par le fer que l'on y a reconnu (11), ne pourroit on pas préſumer que celui qui a été compoſé avec les pavots doive ſa couleur à quelque partie métallique auſſi? Et comme j'ai reconnu une grande volatilité dans le principe colorant du ſang, quoique d'aileurs il ſoit inconteſtable que ce principe eſt métallique, on ne doit pas être ſurpris de la même volatilité dans les couleurs végétales, & cette volatilité ne m'empêche pas de les croire métalliques.

Quelques autres eſſais ſur des ſubſtances animales me donnerent des réſultats conformes aux précédentes dont je me reſerve à traiter plus particulièrement.

Les métaux donnent la teinture au verre en différentes couleurs, dont chaque métal lui donne la ſienne particulière; l'or donne au verre la couleur pourpre, l'argent, la jaune, le cuivre une couleur bleuâtre, le fer lui donne un verd foncé, le regule d'antimoine donne la jaune, l'étain

(11) La couleur rouge du grenat du jaſpe rouge du porphire, de la terre rouge d'Angleterre, que l'on demande beauté, & quantité d'autres ſubſtances du regne minéral, dans leſquelles on reconnoit très-diſtinctement le fer, & à qui l'on doit la couleur rouge paroit en fournir une autre preuve.

(12) Je ne doute pas, que les belles couleurs du plumage de certains oiſeaux viennent du même principe. M. De Buffon obſerve très-bien, que les pays chauds fourniſſent une plus grande variété de couleurs. (c) Il me paroit d'y entrevoir la même raiſon, que dans les plantes; une plus grande chaleur développe davantage les principes colorants, qui ſont métalliques dans tous les regnes. C'eſt le ſujet du prix de l'Académie de Berlin propoſé pour l'année 1772 que d'éclaircir la raiſon de la couleur du plumage des oiſeaux, & dont je ſuis bien curieux de ſavoir la réſolution.

(c) Buffon hiſtoire des oiſeaux Tom. I. diſc. prélim. p. 22.

l'étain & le zinc leur donne une couleur laiteuſe, les différentes terres colorent le verre, & par la couleur qu'elles donnent, nous connoiſſons les parties métalliques qui ſont contenues dans ces terres.

Si nous examinons les pierres colorées, l'on a grande raiſon de croire qu'elles doivent leurs couleurs au même principe, c'eſt-à-dire aux parties métalliques, tel eſt le ſentiment du célébre Chevalier Linné (13), & de

(13) „ Quartzum enim, & ſpatum, dum in metalla habitant colorata re-
„ perimur, color autem eorum cum rubigine ſeu ocra ipſius me-
„ talli ſemper concidit ocra enim ferri, quae aut brunea, aut lutea,
„ aut rubra eſt, lapides iiſdem tingit coloribus. Ocra cupri quae ab
„ accido fit viridis, ab alkali cyana aut viridi, aut violaceo lapides
„ tingit colore. Hae ocrae, quoniam vulgares ſunt, ita etiam hi
„ colores lapidum vulgariſſimi.

Le même Linné dit dans un autre endroit, *omnis fere color in Regno lapideo a metallis ſuam ducit originem, hinc Boherawius* (d), *gemmae inquit pellucidae quidem, ſed eximio nitentes colore videntur materiem habere ceteris ſimilem, ſed pigmentum metalliam in primis aut & alium fixmm, & fiſſile in ipſa nativitate, quam intime permixtum, unitumque illa quippe evincit colorum ſimilitudo, atque artificioſa gemmarum confectio.*

„ Ferrum dat vitriolum vitride, ſed ocram luteam, quae urtione
„ rubra evadit, & hinc rubinus ruber. (e)
„ Cuprum dat vitriolum caeruleum, ſed ocram vividem ab acido,
„ ut in ſmaragdo, ocram caeruleam ab alkali fixo, ut in Zaffiro,
„ Cyanam ab alkali volatili, ut in Beryllo.
„ Plumbum dat vitriolum album, ſed ocram albido flavam, ut in
„ topatio.
„ Biſmutum dat ocram rubicundam, ut in hiacynto, ergo vidi-
„ mus colorem criſtallorum dependere ab ocra ipſius metalli figu-
„ ram autem a ſalibus. Linnei ammenitates Accademicae Martini
„ Kaller de criſtallorum generatione p. 471 Tom. V.

(d) Boherawe chem. 1, 54.

(e) Quant aux Rubis, Libavius a cru qu'on devoit en attribuer ſa couleur à l'or nous ſavons que l'on en trouve dans les mines d'or, ou bien tout près, & ſur cette particularité il a dit que l'on pouvoit très-bien imiter la couleur du Rubis, en mêlant avec le criſtal une teinture d'or réduite en liqueur ou en huile par la diſſolution. Voyez Libavius. Lib. 2 chap. 35.

Il ſe peut très-bien que la vapeur de l'or pénétrant ces pierres criſtallines, puiſſe leur donner cette couleur comme l'expérience nous le fait voir, dans les pierres artificielles, comme il y a plus de probabilité que le grenat, le jaſpe, l'ématite, la cornaline doivent leurs couleurs an vapeurs du fer; dont on connoit l'exiſtence.

M. De Romé Deslile (14), il n'eſt pas difficile de concevoir de la manière, que les ſpaths les quarts, les criſtaux, & les pierres ſe colorent par les vapeurs métalliques, ſi l'on examine la manière dont ſe forment les métaux, auxquels les ſpaths, & les quarts ſervent de matrice, l'on peut conſulter à ce ſuiet un ſavant mémoire de M. Eller dans les mémoires de l'Academie de Pruſſe an. MDCCLIII. Tom. IX. pag. 3.

Cependant comme le fer eſt plus généralement repandu dans la nature ſoit dans le régne minéral, où l'on ne ſauroit trouver que très-peu de corps qui n'en contiennent pas; ainſi que nous les voyons dans les pierres, les marbres, les terres, les argilles &c., ſoit dans le régne végétal & animal, où on le reconnoit très-diſtinctement dans quantité de plantes, & d'animaux (15), il pourroit bien être la ſource de toutes les autres couleurs végétales; que ſi on lui a déjà attribué la verte du régne végétal en gros, il ne feroit pas mal à propos de lui at-

(14) Le ſentiment de M. Romé Deslile dans ſon traité de la Criſtallographie eſt très-conforme a celui du Chevalier Linné ſur la raiſon de la couleur dans les criſtaux, & dans les pierres précieuſes due aux ſubſtances métalliques. „ Tous ces criſtaux colorés (dit-il p. 184) „ ſe forment pour l'ordinaire dans les mines, & doivent leurs couleurs à des émanations métalliques, qui s'y incorporent dans le „ temp qu' ils ſont encore fluides, ou qui s'attachent a leur ſurface, „ lorſque ces criſtaux ont pris trop de conſiſtance pour s'en laiſſer „ pénétrer.

A l' égard de la couleur des pierres précieuſes (dit-il pag. 196.) „ La plus part des Naturaliſtes l'ont attribué comme celle des criſtaux aux vapeurs métaliques, qui circulent dans les mines, ou au „ mélange de quelque diſſolution des ſubſtances minérales, mais ces „ Auteurs ont été peu d'accord l'eſpéce de métal qui coloroit telle, „ ou telle pierre.

Il rapporte enſuite le paſſage de Chevalier Linné que je viens de citer.

Eſſai de Criſtallographie par M. De-Romé Deslile à Paris 1772.

(15) L'on pourra conſulter les Commentaires des Savants Académiciens de Bologne pour voir des expériences très-curieuſes ſur le fer retiré des plantes, & des animaux Comm. Bonon. Tom. II. pars I. p. 109.

tribuer les autres aussi, puisque nous savons, que, outre la grande facilité qu' il a d'être attaqué par tous les menstrues, ce qui prouve sa grande divisibilité, nous voyons qu' à l'aide de différentes opérations l'on parvient à en tirer toutes les couleurs, ainsi que M. le Comte de Saluces le prouve dans un ouvrage qu' il prépare sur ce sujet.

Il me paroit d'entrevoir que la nature toujours simple dans ses opérations a établi un même principe colorant dans les trois régnes, au moyen de cette admirable chaîne qui en lie toutes les parties; que ce principe est métallique; que dans le régne végétal ces parties réduites en forme savoneuse sont introduites dans les (16) plantes, & y décélent leur couleur; que dans le corps minéraux, enfin elle est apportée par les vapeurs volatiles.

Que la cause de son développement n'en est qu'une seule aussi, c'est-à dire, le phlogistique.

Cette partie de la phisique mérite assez d'être approfondie, & nous offre un champ vaste pour augmenter le nombre de nos connoissances.

J' espére que la nouveauté du sujet fera acueillir favorablement ce mémoire, & je me reserve à faire des plus amples observations, pour mettre la matière dans son plus grand jour.

(16) C'est encore là la pensée de M. le Comte de Saluces, savoir que la nutrition se fait dans les plantes par intursusception, & que le suc nécessairement doit prendre cette nature au moyen des sels, & de l'eau pour passer dans tous les plus petits vaisseaux, & y être distribués dans toutes les parties de la plante sans les endommager.

CAROLI ALLIONII

AUCTARIUM

AD SYNOPSIM METHODICAM STIRPIUM

HORTI REG. TAURINENSIS.

Exhibet hoc opusculum enumerationem plantarum, quibus Hortus Regius Taurinensis auctus est ab anno 1762, *quo prodiit Miscellaneorum Taurinensium Tomus alter. Ut autem in hoc auctario commode Tyrones, & Botanici stirpes, quas addidi, reperire possint, paucis omnino mutatis eamdem methodicam dispositionem servavi, similiterque species ad Linnaena genera tenaciter retuli. Nominibus quoque* trivialibus *usus sum Cl.* LINNAEI, *sed illae stirpes, quas* LINNAEUS *non habet, indicantur nominibus, quae a Cl. Viris* JACQUIN, & CRANTZ *mutuatus sum, aut ipse assignavi, si nullum adhuc haberent. Opportunum porro judicavi huic auctario iterum inserere stirpes quasdam in synopsi jam recensitas, quae nullum tunc temporis* triviale *nomen habebant. Quae minus notae aut novae sunt, brevi descriptione ita definiuntur, ut saltem certo nunc internosci possint; alio autem loco, & copiosius, & icone illustrabuntur.*

CLASSIS PRIMA.

Plantae flore monopetalo simplici.

I. MONOSTEMONES.

Boërhavia erecta. L.
  diffusa. L.
Najas major * (1)
  minor * (2)

II. DISTEMONES.

A. GYMNOSPERMAE.

Salvia indica. L.
  hispanica. L.
  disermas. L. (3)
  serotina. L. (4)
  haematodes. L.
  aurea. L.
  acetabulosa. L. (5)
  pomifera. L.
  pinnata. L.
  sylvestris. L.
  syriaca. L. (6)
  aegyptiaca. L.
  lyrata. L.
  clandestina. L. * (7)
  ceratophylloides. L.

(1) *Fluvialis latifolia fructu minus obtuso monospermo* MICH. *gen. p.* 11 *T.* 8 *f.* 2.

(2) *Fluvialis minor foliis angustissimis denticulatis, deorsum reflexis, fructu acuto tenuiori monospermo* MICH. *gen. p.* 11 *T.* 8 *f.* 3.

(3) Haec est *salvia villosa, & viscosa foliis lanceolato-ovatis versus petiolum angulatis Misc. Taur. Tom. II. p.* 49, quam Cl. ARDUINI notam fecit *spec. I. p.* 9 *T. I.* Huius autem Cl. Viri liber anno 1759 editus ad manus nostras tunc nondum venerat.

(4) Haec est *salvia Americana Chia dicta Misc. Taur. Tom. II. p.* 49 etiam ab ARDUINI descripta *spec. I. p.* 10 *T.* 2.

(5) *Salvia or. foliis subrotundis acetabulis moluceae Tourn. cor. pag.* 10 *& Misc. Taur. p.* 49.

(6) *Syriaca* L. non differt ab *Aegyptiaca* L. *mantiss. p. 26 n. 36,* sed ARDUINI synonimon sub *Syriaca* positum in *syst. p. 65 n.* 18 pertinet ad *salviam disermas* L.

(7) *Clandestinam salviae verbenacae* varietatem esse puto, cum eam in horto Taurinensi cultam non modo flores ex purpureis caeruleos, sed omnino ampliores, quales in *Verbenaca* occurrunt, protulisse viderim.

nivea. (8)
caesia. (9)
Ziziphora capitata. L.
Verbena carolina. L.
mexicana. L.
indica. L.
curassavica. L.
nodiflora. L.
jamaicensis. L.
orubica. L.
supina. L.
Monarda punctata. L.
clinopodia. L.
fistulosa. L.

B. MONANGIAE.

Amethystea caerulea. L.
Pinguicula vulgaris. L. *
Utricularia vulgaris. L. *

C. DIANGIAE.

Veronica longifolia. L. *
spuria L.
scutellata. L. *
aphylla. L. *
bellidioides. L. *
peregrina. L.
Virginica. L.
fruticulosa. L. *
prostrata. L. *
latifolia. L. *

D. FRUCTU PULPOSO.

Jasminum humile. L.
Phillyrea angustifolia. L. *
media. L. *

III. TRISTEMONES.

A. HYPOCARPIAE.

Montia fontana. L. *

B. EPICARPIAE.

1. *Flore calyculato.*
Melothria pendula. L.
Cucumis anguria. L.
prophetarum. L.
chate. L.
Momordica operculata. L.
Bryonia laciniosa. L.
2. *Calyce destitutae.*
Crocus vernus. *
Iris Xiphium. L.
florentina. L.
foetidissima. L.
tuberosa. L.
sibirica. L.
Valeriana sibirica. L.

(8) Hoc triviali nomine indicatur *salvia cretica angustifolia* CLUS. *hist.* 343 cuius folia brumali praesertim tempore alba omnino, & nivea evadunt.

(9) *Horminum subrotundo folio fl. caesio hispanicum* BARREL. *ic.* 200.

veſicaria. L. *
coronata. L. *
celtica. L. *
dentata. L. *
rubra L. *
anguſtifolia * (10)

Gallium mollugo. L. *
uliginoſum. L. *
rubrum. L. *
ſpurium. L. *
ſilvaticum. L. * (11)
paluſtre. L. *
ſaxatile. * (12)
lucidum. * (13)
cinereum. * (14)

IV. TETRASTEMONES.

A. Gymnodispermae.

1. *Flore plano.*

(10) *Valeriana rubra anguſtifolia* Bauh. *pin.* 165 nullo modo pro varietate *valerianae latifoliae marinae* haberi poteſt. Sic etiam ſpecie inter ſe differunt *veſicaria*, *coronata*, *dentata*.

(11) Eſt *Galium montanum latifolium ramoſum* Tourn. *inſt.* 115 & *Miſc. Taur. p.* 51 *Galium* autem *ariſtatum L.*, & *Galium bericum* Turra *diar. ital.* 1764 *p.* 119 fortaſſe referri debent ad *Galium ſilvaticum L.* Certe ad hoc pertinet *Rubia laevis linifolia floribus albis montis virginis* Bocc. *mus. p.* 83 *t.* 75. uti probat icon a Boccone data, & locus natalis. In collibus enim Taurinenſibus abundat *Galium ſilvaticum*, & ex Etruria accepta ſpecimina *Rubiae levis linifoliae* ad idem *Galium* ſpectant.

(12) *Galium foliis ſenis ellipticis, petiolis breviſſimis unifloris* Hall. hiſt. n. 718, & *Galium ſaxatile ſupinum molliore folio* Jussi. Acad. *ſcien. Paris* 1714 ad noſtrum Galium pertinent; num eamdem ſtirpem intelligat Cl. Linnaeus, dubitari poteſt.

(13) *Galium caule herbaceo, foliis ſenis ſubulatis incurvis, fructibus nigris rugoſis oblongis incurvis.* Hoc eſt *Galium foliis ſenis rigidis obſcure virentibus, floribus purpuraſcentibus e ſummo caule prodeuntibus enum. nic. p.* 4 Nitide, & ſplendide tota planta viret. Folia ſemiteretia margine revoluto ſcabriuſculo, ſed ſcabritie vix tactu percipienda. Primum ſena, deinde 5 aut. 4 folia ſunt. Ad radicem valde ramoſum eſt, ſed rami eriguntur ſoepius ſimplices, panicula florum terminati. Flores, quos in horto olim dedit ſubrubentes, nunc albos praebet.

(14) *Galium caule ſublignoſo, foliis ſenis longe ellipticis, rigidis, ſerrato aculeatis, fructibus ovatis laevibus albeſcentibus.* In vineis *Saurgii*

tenuifolium. * (15)
Valantia muralis. L. *
hispida. L.
aparine. L. *
cruciata. L. *
articulata. L.
glabra. L. *
2. *Fl. infunduliformi.*
Crucianella latifolia. *
Spermacoce tenuior. L.

B. GYMNOTETRASPERMAE.

1. *Galea plana.*
a. *Parum fixa.*
Mentha viridis. L. *
gentilis. L.
sylvestris. L. *
piperita. L.
exigua. L. *
Origanum creticum. L.
onites. L.
Thymus mastichinus. L.
cephalotos. L.
alpinus. L. *
patavinus. L.
piperella. L. *
pannonicus. * (16)
Hyssopus nepetoides. L.
lophantus. L.
satureja capitata. L.

nascitur elegans haec *Galii* species rore glauco obducta, quo deterso lucide viret, non tamen obscuro atque intenso virore. Caules obscure tetragoni. Folia longe elliptica, in fine ampliora, & alba notabili spina praedita. Rami ad angulum rectum ex caule solent discedere, evidenter articulatis internodiis. Panicula ramos, & caulem terminat extremis pedunculis saepe trifloris uno abortiente; semina prae reliquis huius generis magna sordide albescentia glabra, sed ex magna maturitate rugas contrahunt. Non est *Galium glaucum* L., cuius folia linearia sunt longiora, non patentia, non serrato aculeata, ut omittam in *Glauco* ramos potius terminari umbella florum, quam panicula.

(15) *Galium herbaceum procumbens diffuse ramosum, foliis senis linearibus mollibus, fructibus nigris rugosis subrotundis. Galium foliis senis rigidis diffuse rambrum floribus albis e summo caule prodeuntibus enum. nic. p.* 5 Folia radiatim utique extant, sed rigida non sunt, mollia, & flexilia, nitida, sed non splendentia linearia, leviter serrulata cum spinula, ad ramos saepe octona. Caules acute quadranguli diffuse ramosi, singulis ramis panicula florum terminatis. Pedunculi biflori.

(16) *Thymus foliis ellipticis hirsutis* HALL. *hist.* 236.

b. *Profunde secta.*

Lavandula staechas. L. *
Syderitis montana. L. *
syriaca. L.
canariensis. L.
hyssopifolia. L. *
cretica. L.
Marrubium alysson. L. *
candidissimum. L.
crispum. L.

2. *Galea concava.*

Lamium garganicum. L. *
maculatum. L. *
laevigatum. L. *
Stachys maritima. L.
recta. L. *
annua. L. *
Dracocephalon peregrinum. L. (17)
ruyschiana. L. *
virginicum. L.
thymiflora. L.
Leonurus tartaricus. L.
sibiricus. L.
Phlomis herba venti. L.
nissolii. L.
nepetella L.
Prunella hyssopifolia. L. *
Cleonia lusitanica. L.
Prasium majus. L.
Ballota alba. L.
suaveolens. L.
Betonica alpina. (18)
danica. (19)
Nepeta nepetella. L. * (20)
italica. L.
tuberosa. L.
violacea. L.
hirsuta. L.
lanata. J.
Melissa cretica. L.
Horminum virginicum. L.
pyrenaicum. L. *
Scutellaria peregrina. L. (21)
lateriflora. L.
alpina. L. *

(17) *Dracocephalon foliis ex lanceolato linearibus, rarius dentatis spinulosis floribus gemellis Martini.* HALL. *gott. p.* 335, *& Msc. Taur. p.* 52.

(18) *Betonica foliis ovatis rotunde crenatis, spica ovata compacta* HALL. *hist. n.* 265 *Betonica foliis hirsutis floribus purpureis amplissimis* ZANON *hist. p.* 46 *t.* 30, *& Misc. Taur. p.* 52.

(19) *Betonica maior danica* PARK *thes.* 615.

(20) *Cataria tenuifolia* CLUS. *hist.* XXXIII, *& Misc. Taur. p.* 52.

(21) *Cassida caule quadrangulo rubente teucrii serrato folio fl. caeruleo labro albo* TILLI *pis*, *& Misc. Taur. p.* 52.

3. *Galea nulla seu flore unilabiato.*

Teucrium campanulatum. L. (22)
hircanicum. L. (23)
iva. L. *
fruticans. L. *
lucidum. L. *
Ajuga orientalis. L.

C. MONANGIAE.

Browalia elata. L.
Scoparia dulcis. L.
Capraria gratioloides. L. (24)
Tozzia alpina. L. *
Hebenstretia dentata. L.

D. DIANGIAE.

1. *Corolla non labiata.*

Plantago media. L. *
alpina. L. *
indica. L.
maritima. L.
albicans. L. *
lusitanica. L.
serpentina. L. * (25)
Cuscuta europaea.

2. *Corolla labiata.*

a. *Calyce quadrifido.*

Euphrasia odontites. L. *
lutea. L. *

b. *Calyce quinquefido.*

Pedicularis tuberosa. L. *
flammea. L. *
palustris. L. *
hirsuta. L. *
comosa. L. *
rostrato spicata. C. * (26)
Antirrhinum orontium. L. *
alpinum. L. *
arvense. L. *
bellidifolium. L. *
supinum. L. *
aegyptiacum. L.

(22) *Teucrium supinum palustre apulum glabrum foliis laciniatis fl. albo. D. Michelii* TILLI *pis. Misc. Taur. Tom. II. p.* 53.

(23) *Teucrium foliis cordatis crenatis petiolatis, spicis oblongis densissimis . . . ex Hircania Martini* HALL. *comm. Gotting.* 1752, *& Misc. Taur. Tom. II. p.* 53.

(24) Haec est *Lindernia* a me descripta *Misc. Taur. Tom. III. p.* 178, quam a *Caprariae* genere differre demonstravi.

(25) *Plantago gramineo folio maior* TOURN. *inst.* 127, quae mihi videtur ab *alpina*, *coronopo*, aliisque distinguenda.

(26) Celeb. LINNAEUS nostram, quae est *rostrato spicata* Cl. CRANZII, refert ad *incarnatam* in speciebus plantarum, sed notae huic tributae nostrae adamussim non respondent.

geni-

genistifolium. L. * (27)
elatine. L. *
Scrophularia lucida. L. *
sambucifolia. L.
scorodonia. L. *
frutescens. L.
peregrina. L. *
auriculata. L.
Digitalis purpurea. L.
obscura. L.
canariensis. L.
grandiflora * (28)
parviflora * (29)
Gratiola officinalis. L. *
Erinus alpinus. L. *
Chelone glabra. L.
Martynia annua. L.
Bignonia capreolata. L.
Lantana aculeata. L.
Ruellia clandestina. L.

V. PENTASTEMONES.

A. MONOSTYLE.

1. *Gymnomonospermae.*

Sesamum indicum. L.
Plumbago zeylanica. L.
Basella alba. L.
Mirabilis longiflora. L. (30)
dichotoma. L.

2. *Gymnotetraspermae.*

a. *Squamulis in fauce.*

Anchusa sempervirens. L.
undulata. L.
angustifolia. L. *
Borago officinalis. L.
indica. L.
africana. L.
Cynoglossum cheirifolium. L.
apenninum. L.
virginicum. L.

b. *Fauce nuda.*

Pulmonaria officinalis. L. *
angustifolia. L. *
Cerinthe major. L. *
Onosma echioides. L. *
Echium creticum. L. *
violaceum. L.
Heliotropium peruvianum. L.
Myosotis nana * (31)

(27) *Genistifolium ab antirrhino linaria* vere differre non puto.
(28) *Digitalis lutea magno flore* BAUH. *pin.* 244.
(29) *Digitalis flore minore subluteo angustiore folio.* BAUH. *hist. II. p.* 814. Hae duae stirpes revera inter se differunt, ita ut duas distinctas species constituant, sicuti recte monet in *historia plantarum* Celeb. HALLER.
(30) *Mirabilis foliis viscidis villosis, tubo floris cylindrico villoso foliis longiore* ZINN. *comm. gotting. Tom. V.*, & *Misc. Taur. p.* 14.
(31) *Echium scorpioides alpinum nanum supinum* BOCC. *mus. pag.* 149. *T.* 107.

3. *Monangiae.*

a. *Valvis duabus.*

Anagallis latifolia. L.
Menyanthes nymphoides. L. *

b. *Valvis quinque.*

Soldanella alpina. L. *
Androſace maxima. L.
laſtea. L. *
Diapenſia helvetica L. * (32)
Aretia alpina L. *
punctata. * (33)
Azalea procumbens L. *
Hottonia paluſtris L. *
Cortuſa matthioli L. *
Coris monſpelienſis L. *

c. *Valvis decem.*

Primula farinoſa L. *
hirſuta. * (34)
Lyſimachia ephemeron L.
linum ſtellatum L. *
nemorum L. *

4. *Diangiae.*

Spigelia anthelmia L.
Vinca roſea L.
Datura metel L.
faſtuoſa L. (35)
ferox L.
Hyoſcyamus aureus L.
Nicotiana ruſtica L.
glutinoſa L.
fruticoſa L.
Verbaſcum arcturus L.
thapſoides L. *
Ipomea pes tigridis L.
tamnifolia L.
violacea L.
bona nox L.
lacunoſa L.
tuberoſa L.
curaſſavica. (36)
Evolvulus alſinoides L.
linifolius L.

5. *Tri-aut Pentangiae.*

Convolvulus lineatus L. (37)
cantabrica L. *
ſcammonia L.

(32) *Diapenſia helvetica* L. cum *Androſace lactea* omnino ad ARETIAE genus pertinent.

(33) *Aretia foliis craſſis rugoſis gramineis, ſcapis multifloris* HALL. *hiſt. n.* 619 *t.* 17.

(34) *Primula foliis ciliatis dentatis, ſcapo paucifloro* HALL. *hiſt. n.* 613.

(35) *Stramonium aegyptiacum flore pleno intus albo foris violaceo* TOURNEF. *inſt. p.* 118 *Miſc. Taur. Tom. II. p.* 55.

(36) *Convolvulus ſcammonii folio ſubrotundo flore albo umbone nigro curaſſavicus* HERM. *par. bat. cat. p.* 6.

(37) *Convolvulus ſerpens maritimus ſpicaefolius* TRIUMF. *obſ. p.* 91, & *Miſc. Taur. p.* 55.

umbellatus L.
ſoldanella L.
cneorum L.
purpureus L.
batatas L.
pes caprae L.
carolinus L.
jalapa L.
Lobelia cardinalis L.
ſiphilitica L.
inflata L.
urens L.
Jaſione montana L. *
Phyteuma hemiſphaerica L. *
orbicularis L. *
pauciflora L. *
ſcheuchzeri. * (38)
Campanula perfoliata L.
hybrida L. *
rapunculoides L. *
rotundifolia L. *
medium L. * (39)
cervicaria L. *
pyramidalis L.
elatines L. *
ceniſia L. *
alpeſtris. * (40)
rhomboidalis L. *
petraea L. (41)
barbata L. *
Trachelium caeruleum L.
Polemonium caeruleum. L.

6. *Fructu pulpoſo.*

Atropa zanoni. (42)
Nolana proſtrata L.
Solanum mammoſum L.
verbaſcifolium L.
ſanctum L.

(38) *Rapunculus foliis imis longe petiolatis caulinis linearibus integris, bracteis linearibus duabus imis longiſſimis* HALL. *hiſt. n.* 682, ſed ad hanc *Rapunculi* ſpeciem non pertinet *Rapunculus alpinus caeruleus anguſto raro ſubinde dentato folio* MICHELII *Hort. Piſ.*, & *Florent. p.* 40, & FERDINANDI BASSII *Comm. Bonon. Tom. IV. p.* 289 *t.* 1 *f.* 2.

(39) *Campanula hortenſis folio, & flore oblongo* BAUH. *pin.* 94 *Miſc. Taur. p.* 55 olim a Cl. LINNAEO cum *barbata* coniuncta.

(40) *Campanula foliis hiſpidis, caule unifloro. Spec. p.* 8 *t.* 8 *f.* 2. Hanc pro varietate *barbatae* habet Cl. HALLER.

(41) *Campanulae glomeratae* inſignis varietas videtur. Ex *M. Baldo* in Hortum Taurinenſem illata planta viva, & culta *glomeratae* omnino ſimilis evaſit.

(42) *Solanum ſpinis carens, melongenae facie, fructu rotundo* ZANON. hiſt. T. 158 Calyx, flos, & fructus, qui eſt pomum biloculare, iubent, ad *mandragorae* genus plantam hanc revocare.

paniculatum L.
carolinense L.
radicans L.
virginianum L.
aethiopicum L.
fuscatum L.
guineense L.
diphyllum L.
trilobatum L.
melanocerasum. (43)
insanum L.
capsicoides. (44)
Physalis pruinosa L. (45)
viscosa L.
Capsicum frutescens L.
baccatum L.
Lonicera caerulea L. *
pyrenaica L. *
alpigena L. *
Lycium barbarum L.
Rhamnus frangula L. *
alaternus L. *
alpinus L. *
Sideroxylon spinosum L.

B. DISTYLAE.

Gentiana lutea L. *
cruciata L. *
punctata L. *
pneumonanthe L. *
acaulis L. *
verna L. *
bavarica L. *
Swertia perennis L. *
Stapelia variegata L.

(43) *Solanum guineense fructu magno instar cerasi* DILL. *elth.* 336. Haec solani species in vulgare nigrum. cultura numquam abit ab eo distincta. Dixi *melanocerasum*, *ut guineense* nomen triviale alteri stirpi assignatum servarem.

(44) *Solanum caule aculeato fruticoso, foliis pilosis, ovatis sinuato lobatis, pedunculis unifloris.* Elegantis huius solani; cuius nullam apud Auctores mentionem video, semina ad me missa hoc anno fuerunt a Cl. Guatteri Parmensi bot. Prof. sub nomine *solani capsicoidis ex h. Patavino.* Tota planta spinosa est caule, foliis, ramis, petiolis, pedunculis, & calyce. Caules rotundi ramosi saepe longis tenuibusque pilis instructi. Folia lucide virent & iuniora undique pilosa, subtus aculeata; supra ad costam unam alteramque spinulam habent. Flos albus patens, non tamen rotatus, magnus, pendulus, quem sequitur magnus fructus laevis croceus; e caule infra folium unus aut alter pedunculus nasci solet.

(45) *Alkekengi barbadense nanum alliariae foliis* DILL. *elth. p.* 10, *& Misc. Taur. p.* 56.

hirſuta L.
Cynanchum monſpeliacum L.
aphyllum L.
Aſclepias nigra L.
nivea L.

VI. HEXASTEMONES.

Aloe carinata (46)
Verucoſoſpinoſa (47)
ſuccotrina. (48)
maculata. (49)
glauca. (50)
margaritifera L. (51)
Hyacinthus muſcari.
comoſus L. *
ſerotinus L.
botryoides L. *
Aſphodelus luteus L.
fiſtuloſus L.
ramoſus L. *

Convallaria bifolia L. *
Dracaena draco L.
Ariſtolochia longa.

VII. OCTOSTEMONES.

Daphne gnidium L. *
Dioſpyros virginiana L.
Vaccinium oxycoccos L.
myrtillus L. *
vitis idaea L. *
uliginoſum L. *

VIII. ENNEASTEMONES

Rheum compactum L.

IX. DECASTEMONES.

Cotyledon orbiculata L.
Jatropha goſſypifolia L.
curcas L.
Adoxa moſchatellina L. *

(46) *Aloe Africana ſeſſilis foliis carinatis verrucoſis* DILL. *elth. p.* 10.

(47) *Aloe Africana humilis, ſpinis inermibus, & verrucoſis obſita* Comm. *prael. p.* 77.

(48) *Aloe ſuccotrina anguſtifolia fl. purpureo* Comm. *hort.* 1. *p.* 91.

(49) *Aloe Africana caleſcens foliis ſpinoſis, maculis ab utraque parte albicantibus notatis* Comm. *hort.* 11 *p.* 9.

(50) *Aloe Africana foliis glaucis margine, & dorſi parte ſuperiore ſpinoſis fl. rubro* Comm. *prael. p.* 75.

(51) *Aloe Africana folio in ſummitate triangulari margaritifera flora ſubviridi* Comm. *hort.* 11 *p.* 10.

Pro varietatibus aliarum aloes ſpeciebus habet Cl. LINNAEUS, ſed mihi videntur conſtanti foliorum forma, habitu atque etiam floribus diſtinctae ſpecies, quas in Horto Gottingenſi diſtinxit Cl. HALLER.

Anacardium occidentale L.
Arbutus unedo L. *
uva urſi L. *
alpina L. *

X. POLYSTEMONES.

Mimoſa plena L.
aſperata L.
caſta L.
nilotica L.
arborea L.
Poterium ſanguiſorba L. *
hybridum L.
ſpinoſum L.
Styrax officinale L. *

CLASSIS II.

Plantae flore monopetalo floſculoſo.

I. ANTHERIS DISJUNCTIS

Dipſacus ſativus.
Scabioſa cretica L.
ucranica L. (52)
tranſylvanica L. *
prolifera L.
gramuntia L.
africana L.
ſilvatica L. *
palaeſtina L.
marilandica. (53)
Globularia cordifolia L. *
alypum L. *
nudicaulis L. *
Cephalanthus occidentalis L.

(52) *Scabioſa foliis planis carnoſis, inferioribus pinnatis, ramorum integerrimis linearibus* GMEL. *lib. II. p.* 213, *& Miſc. Taur. p.* 58.

(53) Hoc nomine ex Anglia primum, deinde etiam ab amico optimo Ioh. MARSILLI Bot. Prof. Patavino miſſa ſcabioſa eſt diffuſe ramoſa ſimilis ucranicae, ſed ab ea vere differens. Humilior eſt foliaque habet omnia pinnata. Flores uniformes vix inaequales ſegmentis erectis, quinquefidi, breviores calyce floris, qui petiolatus eſt in quinque ariſtas rigidas rubentes florem ſuperantes diviſus. Calix fructui immediate impoſitus membranaceus planus 5 dentatus, & dentibus longe ariſtatis. Eſt ne *ſcabioſa divaricata* Cl. JACQUIN in horto Vindobonenſi? Decernere non licet cum ſplendidum hoc opus nondum poſſideam. Noſtrae ſeminibus reſpondent ſemina ab hoc Illuſtri viro ſub hoc nomine accepta, quae in horto ſata non germinarunt.

Parthenium hyſterophorus L.
Ambroſia triſida L.
elatior L.
maritima L. *
peruviana. (54)
Xanthium ſtrumarium L. *

II. ANTHERIS COALITIS.

A. Capitatae.

Sphaeranthus indicus L.
Onopordon arabicum L.
acaulon L.
Cynara humilis L.
cardunculus L.
Arctium carduelis L.
Carduus ſyriacus L.
paluſtris L. *
tuberoſus L. *
tataricus L. *
caſabonae L.
ſerratuloides L. *
acaulis L. *
defloratus L. *
pyrenaicus L. *
eriſithales J. *
Serratula glauca L.
coronata L. *
centauroides L.
babylonica L.
Carthamus lanatus L. *
Atractylis cancellata L. *
Cnicus cernuus L.
oleraceus L. *
Carlina acanthifolia. * (55)
lanata L. *
Centaurea glaſtifolia L.
orientalis L.
phrygia L. *
argentea L.
ſicula L.
ſplendens L. *
alpina L. *
nigra L. *

(54) *Ambroſia caule perenni fruticoſo, foliis ſubtus tomenroſis bipinnatis, pinnulis pinnatifidis, exterioribus majoribus.* Jam decem abhinc annis in h. T. vivit fragrantiſſima haec Ambroſiae ſpecies, cujus ſemina *Ambroſiae peruvianae* nomine tranſmiſit Cl. Bernardus Iuſſiaeus.

(55) *Carlina acaulis foliis tomentoſis ſemipinnatis, plicatis, pinnis ſemi bilobis pungentibus.* In alpibus valdenſium frequens eſt haec Carlinae ſpecies Acaulis uniflora, magnum habens florem, cujus lucidae ſquamae albae ſunt. Folia onopordi. Ejus integram deſcriptionem dabo in Enum. ſtirpium Pedemontii. Neque eſſe *pyrenaica* L., cui Cl. Auctor caulem tribuit multiflorum, atque folia decurrentia.

sempervirens L. *
rhapontica L. *
cineraria L.
conifera L. *
amara L. *
benedicta L.
uniflora L. *
lippi L.
pullata L.
triumfetti (56)
tingitana L.

B. Discoideae.

1. *Semine nudo.*

Carpesium cernuum L. *
Tanacetum crithmifolium L.
Cotula grandis L.
turbinata L.
aurea L.
Artemisia arborescens L.* (57)
annua L.
rupestris L. *
glacialis L. *
crithmifolia L.
vallesiaca * (58)
lobelii * (59)
Filago germanica L. *
leontopodium L. *

2. *Semine pappis coronato.*

Gnaphalium sylvaticum L. *
orientale L.
undulatum L.
luteo-album L. *
obtusifolium L.
uliginosum L. *
supinum L. *
alpinum L. *
Chrysocoma linosyris L. *
coma aurea L.
cernua L.
Eupatorium Chinense L.
Conyza squarrosa L. *
saxatilis L. *
rupestris L.
Baccharis ivaefolia L.
Tussilago alpina L. *
frigida L. *
alba L. *

3. *Sem. aristis coronato.*

Ageratum altissimum L.

(56) *Cyanus alpinus maior foliis incisis* Triumf. *obs. p. 26. A Centaurea montana* differt non modo foliis constanter profunde pinnatifidis; verum etiam ciliis squamarum albis, quae nigra in *montana* sunt.

(57) *Absinthium arborescens* Lob. *ic.* 753, *& Misc. Taur. p.* 58.

(58) *Artemisia foliis tomentosis multifidis, floribus erectis longe spicatis pene sessilibus* Hall. *hist. n.* 128.

(59) *Abrotanum odoratum humile dense fruticosum* Lob. *ic.* 769.

cony-

conyzoides L.
Xeranthemum annuum L. *
Bidens bullata L. * (60)
Spilanthus oleraceus L.
Athanasia annua L.
crithmifolia L.

C. Radiatae.

1. *Sem. nudo.*

a. *Placenta paleacea.*

Helianthus tuberosus L.
divaricatus L.
Buphthalmum aquaticum L. *
spinosum L. *
maritimum L. *
salicifolium L. *
Silphium perfoliatum L.
alternifolium. (61)
Siegerbeckia occidentalis L.
Achillea magna L. *
macrophylla L.
erba rotta. * (62)
atrata. *
ligustica. * (63)
Anthemis cota L.
cotula L. *
valentina L.
Anacyclus valentinus L. *
creticus L.

b. *Placenta nuda.*

(60) *Bidens foliis ovatis, & tripteris, caulibus hirtis brachiatis* Hall. *gott. p.* 383., & *Misc. Taur. p.* 59.

(61) *Silphium foliis alternis, ovatis, sinuatodentatis, subtus asperis, radicatibus longissime petiolatis.* Altitudine sua, & florendi forma ad *perfoliatum* accedit, sed pluribus differt, quod ad fructificationem simile. Semiflosculos habet aureos bidentatos, & calycem floris ex squamis trium ordinum omni ex parte appressis, cum in *perfoliato* duorum ordinum sint, & in summo solutae, & reflexae. Caulis in *alternifolio* teres glaber: semina radii in *alternifolio* duabus aristis instructa.

(62) *Achillea foliis cuneiformibus, integris odoratis, in apice dentatis spec. pedem. Tom. II. f.* 4.

(63) *Achillea foliis pinnatis, pinnis acute pinnato dentatis, planis, glabris.* In maritimis Liguriae provenit perennis haec achilleae species. Caules sunt sublignosi, cubitales, foliosi, & ramosi, striati, glabri aut subhirsuti. Folia caulina, & maiora pinnata pinnulis aequaliter cum nervo confluentibus; ramea simpliciter pinnato dentata, dentibus plerumque simplicibus, qui in caulinis maioribus saepe dentem unum accessorium habent. Flores in extremis ramis umbellati albi. Semiflosculi albi tridentati cordati. Odore vehementi *Achillae agerati* donatur.

Milleria quinqueflora L.
Othonna cheirifolia L.
Polymnia uvedalia L.
Calendula pluvialis L.
hybrida L.
Chrysanthemum alpinum L. *
millefoliatum L.
italicum L. (64)

2. *Sem. pappis coronato.*

After amellus L. *
tenellus L.
acris L. *
divaricatus L.
annuus L.
tradescanti L.
Inula crithmifolia L. *
salicina L. *
montana L. * (65)
bifrons L. *
oculus christi L. *
Erigeron bonariense L.
acre L. *
phyladelphicum L.
siculum L.
alpinum L. *
viscosum L. *
foetidum.
Senecio aegyptius L.
doria L.
viscosus L. *
doronicum L. *
elegans L.
sylvaticus L. *
lividus L.
byzantinus L.
siculus. (66)
Solidago uniflora. * (67)
flexuosa L.
alpina L. *
Arnica montana L. *
scorpioides L. *
clusii. * (68)
Doronicum bellidastrum L. *

3. *Sem. aristis coronato.*

Arctotis tristis L.
Zinnia multiflora L.
pauciflora L.
Verbesina alata L.
pseudoacmella L.
acmella L.
nodiflora L.
Coreopsis leucanthema L.
bidens L. *
tripteris L.

(64) *Chrysanthemum italicum* LINN. *syst. nat. n.* 10, & *Chrysanthemum achilleae n.* 22 unam, & eamdem stirpem constituunt.
(65) *After montanus hirsutus* LOB. *ic.* 350, & *Misc. Taur. p.* 60.
(66) *Iacobea sicula chrysanthemi facie* BOCC. *rar. p.* 66.
(67) *Solidago foliis tomentosis ovatis, & semipinnatis* HALL. *hist. n.* 70.
(68) *Arnica foliis ovatis alternis integerrimis* HALL. *hist. n.* 91.

lanceolata L.

D. PLANIPETALAE.

1. *Sem. nudo.*

a. *Placenta. nuda.*

Lapſana zacinthа L. *

b. *Placenta paleacea.*

Scolymus hiſpanicus L. *

2. *Sem. pap. aut ariſtis coronato.*

a. *Placenta nuda.*

Leontodon hirtum L. *

Hieracium aurantiacum L. *

dubium L. *

kalmi L.

ſabaudum L. *

paludoſum L. *

villoſum L. *

cerinthoides. * (69)

glaucum * (70)

ſtaticifolium * (71)

taraxaci L. *

intybaceum. * (72)

Crepis ſibirica L.

alpina L. *

rubra L.

biennis L. *

pulchra L. *

dioſcoridis L. *

auſtriaca L. * (73)

Hyoſeris hedypnois L.

(69) Vere differt a HIERACIO *villoſo L.* cui caeteroquin ſimile eſt. Foliorum ſuperior ſuperficies glabra, & in ambitu tantum piloſa Calyx fere calyculatus, ex ſquamis linearibus acutis in apice compoſitus, nigris brevibus denſiſque pilis hirtus, non habens villum ſericeum, uti *Hieracium villoſum* L.

(70) *Hieracium foliis lanceolatis glaucis, caule brachiato multifloro* HALL. em. 11 n. 96. A ſequenti omnino eſt diſtinguendum, folia longiſſime elliptica acuto fine, glauca, obiter denticulata, ambitu, & coſta piloſa. Calyx ovatus, ex ſquamis multorum ordinum denſe appreſſis, viridibus, in ambitu tomento albicantibus: ſemina aliquantum incurva, oblonga, ſtriata, coronata pappo ſimplici ſeſſili.

(71) *A porrifolio* L., & *glauco* ſeparandum. *Porrifolii* iconem, & deſcriptionem dedit Cl. JACQUIN. *Staticifolium* folia habet remote, et obiter denticulata, concava, fere linearia, nunquam piloſa. Rami, & pedunculi ſatis ſquamoſi. Calyx calyculatus ad baſim, ſquamis parvis fere capillaribus. Calyx verus e unico ordine ſquamarum viridium dorſo obſcurius virente.

(72) *Hieracium foliis oblongis, aſperis, lanceolatis, dentatis, calyce hirſutiſſimo Hall. hiſt. n.* 41.

(73) *Eſt Hieracium Pyrenaicum* L. β. γ. δ.

radiata L.
cretica L. *
ſcabra L.
lucida L.
Sonchus paluſtris L. *
tenerrimus L. *
alpinus L. *
arvenſis L. *
floridanus L.
Prenanthes purpurea L. *
altiſſima L.
Lactuca canadenſis L.
ſcariola L. *
ſaligna L. *
auguſtana. * (74)
Scorzonera picroides L. *
graminifolia L.
Tragopogon picroides L.
porrifolium L. *
crocifolium L. *
dalechampii L. *
lanatum L.
Geropogon glabrum L. *
hirſutum L. *
b. *Placenta ſquamis diſtincta.*
Seriola aethnenſis L. *
Hypochaeris radicata L. *
Catanauche lutea L.
c. *Placenta villoſa.*
Andryala integrifolia L. *
ſinuata L.
lanata L. *

CLASSIS III.

Plantae flore dipetalo.

Circaea alpina L. *
Callitriche verna L. *
autumnalis L. *
Muſa paradiſiaca L.

CLASSIS IV.

Plantae flore tripetalo.

Commelina erecta L.
communis L.
Phoenix dactylifera L.
Hydrocharis morſus ranae. L.*
Stratiotes aloides L.
Aliſma parnaſſifolia L. *
ranunculoides L. *
Sagittaria ſagittifolia L. *
Triglochin paluſtre L. *
Empetrum nigrum L. *

(74) *Lactuca foliis integris, dentatis, acute hamatis, coſta laevi.* Naſcitur in valle *Auguſtae praetoriae.* Niſi fuerit *Lactuca longo, & valde anguſto folio* BAUH. *hiſt.* II. *p.* 999. *Sive Lactuca folio oblongo, acuto* BAUH. *pin.* 123. non memoratur, *ſed* BAUINORUM brevis deſcriptio, & icon omnino non reſpondent.

CLASSIS V.

Plantae flore tetrapetalo cruciformi.

I. TETRASTEMONES.

Ptelea viſcoſa L.
    trifoliata L.
Cornus ſuccica L.
Potamogeton compreſſum L.*
    gramineum L. *
    perfoliatum L. *
    denſum L. *
Trapa natans L. *
Oldenlandia corymboſa.
Ludwigia alternifolia L.

II. HEXASTEMONES.

A. Siliculosae.

Draba aizoides L. *
    pyrenaica L. *
    hirta L. * (75)
    muralis L. * (76)
Lunaria annua L.
Myagrum orientale L.
    paniculatum L.
    perenne L. *
    rugoſum L. *
    ſaxatile L. *
Vella fruteſcens L.
    annua L.
Iberis rotundifolia L. *
    ſaxatilis L. *
    pinnata L. *
    cretica L.
    garexiana * (77)
Alyſſum utriculatum L. *
    gemonenſe L.
    alpeſtre L. * (78)
    campeſtre L. *
    argenteum * (79)
Clypeola maritima L. *

(75) Ad hanc ſtirpem referendae ſunt *Draba auſtriaca* L., *ſtellata*, *incana* L., & Oed. *ic.* 242. Folia enim pro locorum varietate modo integerrima ſunt, hirſuta, ant tomentoſa; alias autem ampliora, pene glabra, & dentata.

(76) *Myagroïdes ſubrotundis ſerratis foliis, fl. albo* Barrel. *ic.* 816.

(77) *Iberis perennis foliis linearibus, obtuſis, integerrimis.*

(78) *Clypeola perennis incana, foliis ſubrotundis, calyce deciduo, ſiliculis ovato acutis Miſc. Taur. p.* 62. 55.

(79) *Alyſſum argenteo folio, floſculis luteis,* Zan. *hiſt. p.* 16. *Differt ab Alyſſo montano*, cui proximum eſt, caule annuo ramoſo, habitu ramoſo erecto, foliis ſupra viridibus, petalis ovatis non inciſis, fructu ſubrotundo plano non emarginato, ſemine

Peltaria alliacea L. *
Cochlearia draba L. *
Lepidium ruderale L. *
virginicum L.
alpinum L. *
perfoliatum L.
petraeum L. *
ſpinoſum A. (80)
cardamines L.
Thlaſpi perfoliatum L. *
montanum L. *
alpeſtre L. *
Biſcutella auriculata L. *
didyma L. *
Anaſtatica hierochuntica L.
Bunias cakile L. *
aegyptiaca L.
balearica L.

B. SILIQUOSAE.

Iſatis luſitanica L.
Ricotia aegyptiaca L. (81)
Dentaria pentaphyllos L. *
bulbifera L. *
Sinapis laevigata L. *
pubeſcens L.
erucoides L.
braſſicata L.
juncea L.
pyrenaica L. *
incana L.
orientalis.
Braſſica erucaſtrum L. *
eruca L. *
alpina L. *
Arabis alpina L. *
pendula L.
turrita L. *
canadenſis L.
bellidifolia L. *
caerulea. * (82)
ſcabra. * (83)

marginato membrana phaenicea, plano. *Alpeſtre* autem humilius argenteo eſt, & decumbit, atque perenne eſt cauliculis plurimis ſimplicibus, habet folia magis rotunda, ſiliquam ovato acutam drabae inſtar, aliquantum tumentem, ſemina non marginata.

(80) Eſtne *Lepidium didymum* L.?

(81) *Lunaria foliis pinnatis, foliolis laciniatis*, ROY. *Leid.* 33., *et Miſc. Taur. II. p.* 62. *n.* 57.

(82) *Leucojum foliis oblongis, dentatis, ſpica nutante* HALL. *hiſt.* 445. Tum haec, cum bellidifolia ad Arabis genus non videntur pertinere.

(83) *Arabis multicaulis foliis radicalibus, ſcabris, dentatis, dentibus ciliatis.* HALL. *hiſt. n.* 453.

Cardamine impatiens L. *
parviflora L. *
resedifolia L. *
asarifolia L. *
amara L. *
bellidifolia L. *
Hesperis africana L.
tristis L.
Cheirantus fenestralis L.
chius L.
annuus L.
sinuatus L. *
alpinus L. *
silvestris C. *
tristis L.? * (84)
Erysimum officinale L. *
barbarea L. *
repandum L.
Sisymbrium polyceratium L.
tenuifolium L. *
sylvestre L. *
orientale L.
pyrenaicum L. *
monense L. *
palustre L. *
terrestre L.
murale L. *
barbareae L.
loeselii L.
Cleome dodecandra L.
violacea L.
pentaphylla L.
arabica L.
gigantea L.
Gledisia triacanthos L.
inermis L.

III. OCTOSTEMONES.

Oenothera parviflora L.
fruticosa L.
pumila L.
Gaura biennis L.
Ruta chalepensis L.
Moerhingia muscosa L. *

(84) *Cheiranthus caule ramoso, diffuso, foliis linearibus acutis, sinnato dentatis, petalis linearibus crispis.* Totaplanta asperiuscula est cinereo incana, & caulibus ramosis fere decumbit. Folia sunt concava duobus, aut tribus dentium paribus pinnata, & sinuata, ramea uno alterove dente notantur, demum integerrima. Rami in longo racemo florigeri floribus alternis sessilibus. Calyx tubulosus connivens duobus foliolis basi gibbis. Petala linearia apice emarginata sulphureo viridia per aetatem luride purpurascentia venosa venis fuscis, margine crispo, denticulato. Siliqua rotunda, torosula, praelonga apice crassiori, stigmatis divisione tantum signata. Est ne vere *Cheiranthus tristis* L. Sed noster noctu non tristem, sed gratum odorem exhalat, qui accedit ad Geranii tristis fragrantiam.

Sapindus ſaponaria L.
Elatine alſinaſtrum. *
Myriophyllum verticillatum L.*
ſpicatum L. *

IV. POLYSTEMONES.

A. Monostylae.

Euphorbia peplis L. *
deudroides L. *
characias L. *
pithyuſa L. *
exigua L. *
paralias L. *
epithymoides L.
portlandica L.
linifolia. (85)
Papaver cambricum L.
argemene L. *

B. Polystylae.

Tormentilla reptans L.
Thalictrum cornuti L.
ſimplex L. *
Clematis viticella L.

CLASSIS VI.

Plantae flore tetra-aut pentapetalo papilionaceo.

I. TETRAPETALAE.

A. Hexantherae.

Fumaria veſicaria L.

B. Octantherae.

Polygala chamaebuxus L. *

C. Decantherae.

1. *Uniloculares.*

Trifolium incarnatum L. *
melil. cretica L.
melitotus indica L. *
melitotus minima. (86)
reſupinatum L. *
alpeſtre L. *
ſubterraneum L. *
alpinum L. *
fragiferum L. *
ſtellatum L. *
ochroleucum L. *
apulum. (87)

(85) *Tithymalus lini folio maior Italicus* Barrel. *ic.* 821.
(86) *Melitotus minima, recta lutea, ſiliquis craſſis, curtis in capitulum congeſtis, ſemine foenugraeci* Mor. *ox. n. ſ.* 17. *f.* 9.
(87) *Trifolium annuum apulum rotundifolium glabrum, foliis alba macula notatis, fl. purpuraſcente, calyce veſicario* Tilli Pis. *tab.* 49. *f.* 4.

saxatile

saxatile. (88)
Lotus jacobaeus L.
creticus L.
arabicus L.
peregrinus L. *
angustissimus L. *
maritimus L.
siliquosus L. *
Arachis hypogaea L.
Anthyllis montana L. *
cytisoides L.
Medicago marina L. *
circinata L.
laciniata L.
arborea L.
muricata L. *
Ononis fruticosa L.
minutissima L. *
cherleri L. *
crispa L.
foetens * (89)
columnae * (90)
viscosa L.
alpina * (91)
Cytisus sessilifolius L. *
cajan L.
hirsutus L. *
argenteus L. *
nigricans L. *
supinus L. *
austriacus L.
Genista canariensis L.
germanica L. *
candicans L. *

(88) *Trifolium saxatile hirsutissimum* BAUH. *prodr.* 143. Ex radice caules plures ramosi procumbentes trium, aut quatuor unciarum longitudine. Foliorum vaginae striatae amplexicaules caudatae. Foliola ex ovatis cordata, emarginata, nervosa, denticulata subtus subincana. Capitula florum axillaria, & terminalia, laxa; calyces molli, & denso tomento tecti, non inflati, dentibus rectis, non reflexis. Nascitur in summis alpibus Tarantasiae.

(89) *Anonis spinis carens purpurea* BAUH. *pin.* 329. *Anonis non spinosa* CLUS. Constanter inermis, ramis, & calyce praesertim multum villosis. Folia mollia, subtiliter pilosa. Ramos spica florum terminat. Flores gemini petiolati; fructus calyce brevior hirsutissimus. Vexillum reflexum fere planum, carina angulo obtuso inflexa. In ononide vulgari stipulae longe minores, hamatae; fructus minus hirsutus calyce longior, carina floris ad angulum rectum inflexa. Flores solitarii.

(90) *Ononis lutea silvestris minima* COL. *ecphr.* 1. *p.* 304.

(91) *Ononis glabra inermis, vaginis foliorum cristatis, pedunculis longissimis unifloris spec. ped T. X. f.* 3.

sagittalis. L. *
sibirica. (92)
hypericifolia L. *
radiata L. *
Phaseolus maximus L.
radiatus L.
farinosus L.
Dolichos biflorus L.
lignosus L.
unguiculatus L.
minimus L.
Hedysarum coronarium L. *
caput galli L. *
maculatum L.
junceum L.
alpinum L. * (93)
canescens L.
hirtum L.
gangeticum L.
Vicia pisiformis L. *
onobrichioides L. *
lathyroides L. *
hybrida L.
biennis L.
sepium L. *
cracca L. *
bithynica L. *
Ervum monanthos L.
Orobus pyrenaicus L. *
Lathyrus angulatus L. *
hirsutus L. *
sylvestris L. *
tuberosus L. *
setifolius L. *
odoratus L.
annuus L.
palustris L.
heterophillus L. *
Pisum ochrus L. *
arvense L. *
Colutea frutescens L.
perennans J.
Indigofera psoraloides L.
glabra L.
Erythrina crista galli. L.
corallodendrum L.
Abrus precatorius L.
AEschinomene sesban. L.
Crotalaria retusa L.
verrucosa L.
incana L.
juncea L.
alba L
Clitoria ternatea L.
Coronilla cretica L.
argentea L.

(92) Indicatur in Catal. plantarum horti Turicensis. Videtur differre a *Genista tinctoria* L. caule perenni, fruticoso, 5. aut etiam sex pedum altitudinem habente.

(93) *Hedysarum alpinum*, & *obscurum* L. unam, eamdemque plantam constituunt.

glauca L.
juncea L.
minima L. *
valentina L.
Ornithopus ſcorpioides L. *
compreſſus L. *
perpuſillus L.
Hippocrepis comoſa L. *
multiſiliquoſa L. *
Lupinus varius L.
luteus L.
Scorpiurus vermiculata L. *
muricata L. *
Phaca alpina L. *
auſtralis L. *
2. *Biloculares.*
Aſtragalus ſulcatus L.
campeſtris L. *
tragacantha L. * (94)
monſpeſſulanus L. *
boeticus L.
hamoſus L. *
galegiformis L.
cicer L. *
ſeſameus L.
onobrichis L. *
microphyllus L. *
contortuplicatus L.
alpinus L. *
depreſſus L. *

II. PENTAPETALAE.

Spartium ſpinoſum L. *
Pſoralea pinnata L.
glanduloſa L.
paleſtina B. (95)
Cercis canadenſis L.
Anagyris foetida L. *
Caſſia obtuſifolia L.
marilandica L.
tora L.
nictitans L.
emarginata L.
liguſtrina L.
planiſiliqua L.
Poinciana pulcherrima L.

(94) Tragacantham, quae ad maris litus naſcitur, eamdem cum *alpina* plantam eſſe Cl. viri affirmant. Nollem ab his ſummis viris diſſentire, cum non liceat illius cum noſtrate perfecta ſpecimina comparare; reperio folia *maritimae* ſericea eſſe, non hirſuta, minora, & ſubrotunda.

(95) Novam hanc *pſoraleae* ſpeciem debeo praeſtanti, & amiciſſimo viro FERDINANDO BASSIO, qui eam in *Commentariis Bononienſibus* deſcripſit.

CLASSIS VII.

Plantae flore pentapetalo, & Gymnodispermae.

A. SEM. AD PLACENTAM COMMUNEM CONJUNCTIS.

Eryngium amethystinum L. *
alpinum L. *

B. MANIFESTA UMBELLA.

1. *Sem. gibbis striatis.*
a. *Petalis aequalibus.*

Phellandrium mutellina L. *
aquaticum L. *
Bunium bulbocastanum L. *
Ligusticum peregrinum L. *
nodiflorum * (96)
ferulaceum * (97)
Sium nodiflorum L. *
latifolium L. *
Sison ammi L.
segetum L.
amomum L. *
Cicuta virosa L.
Anethum pusillum. (98)
Cuminum cyminum L.
Selinum silvestre L. *
palustre L. *
carvifolia L. *
monnieri L.
Bupleurum odontites L. *
rotundifolium L. *
ranunculoides L. *
stellatum L. *
fruticosum L.

(96) *Angelica alpina ad nodos florida* TOURN. *inst.* 313.

(97) *Ligusticum alpinum perenne ferulae folio, floribus albis* SEGU. *Veron. II. p.* 41. Nostram stirpem accurate refert icon. cl. SEGUIERII, atque consentit descriptio. Involucrum autem universale habere negat cl. SEGUIER., sed cum facile caduca sint, verisimile est illud praestantem hunc Virum idcirco non adnotasse. Habet autem involucrum universale, & particulare. Fructus tribus costis acutis, semialatis in dorso percurritur. *Ligusticum* SEGUIERII citatum ad SELINUM *carvifoliam* suam refert cl. LINNAEUS, sed huius SELINI nomine aliam a stirpe SEGUIERII celeb. LINNAEUM intelligere probant ea pauca, quae ad indicandam stirpem afferuntur.

(98) Simile est *Anetho graveolenti*, sed palmaris altitudinis, & pusillum, an mera varietas? Video commemorari in *catalogo plantarum horti Turicensis.*

gerardi. * (99)
Athamanta cervaria L. *
meum L. *
ſibirica L.
b. Petalis inaequalibus.
Carum Bunius L. *
Seſeli annuum L. *
ammoides L.
elatum L. *
pumilum L. *
hippomarathrum L.
pimpinelloides L. *
montanum *
pratenſe C. *
ſaxifragum L. *
Pimpinella peregrina L.
aniſum L.
Oenanthe crocata L. *
prolifera L.
globuloſa L.
Echinophora ſpinoſa L. *
Conium africanum L.
rigens L.
Ammi majus L. *

copticum L.
Coriandrum ſativum L.
teſticulatum L. *
aquilegifolium. (100)
2. *Sem. gibb. & alatis.*
a. *Alis duabus.*
Angelica atropurpurea L.
b. *Alis quatuor, & ultra.*
Laſerpitium ſimplex L. *
gallicum L. *
mutellinoides C. *
Aſtrantia minor L. *
3. *Sem. planis alatis.*
Paſtinaca lucida L. (101)
Tordylium anthriſcus L. *
officinale L. *
nodoſum L. *
latifolium L. *
Heracleum ſibiricum L.
Ferula communis L. *
nodiflora L. *
Thapſia villoſa L.
garganica L. (102)
4. *Sem. aſperis.*

(99) *Bupleurum involucris, & involucellis pentaphyllis acutis, foliolis lineari ſubulatis* GER. galloprov. p. 23. f. 9.

(100) *Liguſticum alterum Lobelii* DALECH. *hiſt.* 744. Diverſiſſima planta eſt a *Liguſtico auſtriaco*, cuius ſynonimum habetur a cl. LINNAEO *Syſt. nat. p.* 211. Huius iconem, & deſcriptionem dabo in *enum. ſtirp. pedem.*

(101) *Paſtinaca folio quaſi libanotidis latifoliae* BOERH. *ind.* I. 67., & *Miſc. Taur. p.* 67.

(102) *Thapſia, ſive turbith garganicum ſemine latiſſimo*, BAUH. *hiſt.* III. 2. 50., & *Miſc. Taur. p.* 67.

Caucalis leptophylla L. *
daucoides L. *
latifolia L. *
maritima (103)
5. *Sem. villosis, nec rostratis.*
Daucus gingidium L. *
visnaga L.
muricatus L.
mauritanicus L. *
gumnifer. (104)
Bubon rigidius L.
macedonicum L.
b. *Sem. rostratis.*
Scandix anthriscus L. *
australis L. *
Chaerophyllum temulum L. *
coloratum L.
bulbosum L.

CLASSIS VIII.

Plantae flore pentapetalo, nec Gymnodispermae.

I. FILAMENTIS IN UNUM TUBUM CONJUNCTIS.

Waltheria indica L.
americana L.
Hermannia hyssopifolia L.
Melochia pyramidata. L.
corchorifolia L.
Geranium vitifolium L.
carolinianum L.
macrorhizum L.
ciconium L. *
althaeoides L. *
papilionaceum L.
phaeum L. *
columbinum L. *
grossularioides L.
peltatum L.
acetosum L.
moschatum L. *
rotundifolium L. *
hybridum L.
coriandrifolium L.
maritimum L.
dissectum L. * (105)
sibiricum L.
Sida crispa L.
cristata L.
rhombifolia L.
occidentalis L.
periplocifolia L.
alnifolia L.

(103) *Caucalis involucro universali diphillo, partialibus pentaphillis* GER. *galloprov. p.* 237. *f.* 10.

(104) *Daucus maritimus lucidus, gummifer* TOURN. *inst.* 308. *Pastinaca tenuifolia, lucida, gummi manans*, BOCC. *mus.* 2. *p.* 30. *f.* 20.

(105) *Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculis brevioribus, caule erecto*, HALL. *helv. p.* 366., & *Misc. Taur. p.* 67.

indica L.
asiatica L.
umbellata L.
americana L.
triquetra L.
Malachra capitata L.
Napaea hermaphrodita L.
Alcea ficifolia L.
Malva capensis L.
peruviana L.
americana L.
coromandeliana L.
parviflora L.
moschata L. *
sherardiana L.
aegyptiaca L.
crispa L.
limensis L.
Lavatera triloba. L. *
micans L.
olbia L *
cretica L.
Gossipium hirsutum L.
barbadense L.
arboreum L.
Urena lobata L.
Pentapetes phaenicea L.
Hibiscus moscheutos L.
sabdariffa L.
manioth L.
trionum L.
cannabinus L.
ficulneus L.
pentacarpos L.
malvaviscus L.
spinifex L.
laevis. (106)
autumnalis. (107)

(106) *Hibiscus glaber, foliis trilobis hastatis, fructu cylindrico calyce breviori, seminibus hirsutis.* Radix perennis, ex qua caules herbacei purpurascentes humanae altitudinis, flores singulares ex summis alis foliorum *hibisco syriaco* similes, pedunculi petiolis aliquantum longiores. Calyx exterior ex 13., aut 14. foliolis, interior inflatus campanulatus ad $\frac{1}{3}$ quinquefidus. Fructus quinquelocularis polyspermus.

(107) *Hibiscus caule herbaceo foliis ovatohastatis, asperis, calyce interiori tubulato, fructus apice recto.* Similis est *hibisco palustri*, sed altius assurgit, & autumno floret, differt foliis non laevibus, neque subtus molli tomento albicantibus; potius horizontalibus, quam deflexis. Calyx floris interior in *palustri* campanulatus, basi ventricosus, & flos roseus unguibus albis. In nostro flos albus, unguibus purpureis, substantiae firmae, nervosae. Fructus in *palustri* subrotundus, tuberosus, apice intorto, & pli-

II. FILAMENTIS BASI COALITIS.

Hypericum quadrangulum L.*
hirſutum L. *
humifuſum L. *
coris L. *
criſpum L. *
tomentoſum L. *
montanum L. *
hircinum L.
pulcrum L. *
nummularium L. *
elegantiſſimum C. *
Croton argenteum L.

III. FILAMENTIS OMNIBUS LIBERIS.

A. Tetrastemones.

Melianthus major L.
minor L.

B. Pentastemones.

1. *Monoſtylae.*

Ribes uva criſpa L.
Ayènia puſilla L.
Viola arboreſcens L. *
arvenſis * (108)
Ruppii * (109)
pinnata * (110)
ceniſia L. *
Impatiens balſamina L.
noli tangere L. *.

2. *Triſtylae.*

Polycarpon tetraphillum L. *
Telephium imperati L. *
Andrachne telephioides L.
Corrigiola littoralis L.
Turnera ulmifolia L.
Tamarix gallica L. *
Clutia pulchella L. *
Rhus toxicodendron L.

cato. Neutram ex his duabus hibiſci ſpeciebus apud Auctores reperire licuit. Primus *virginici*, alter *paluſtris* nomine miſſus eſt.

(108) *Viola bicolor arvenſis* Bauh. *pin.* 200., & *Miſc. Taur. p.* 63. Hanc a tricolori ſejungendam putavi, atque eamdem etiam nunc opinionem teneo, diſtinctamque propoſuit celeber. Hallerus hiſt. pl. n. 569.

(109) *Viola caule erecto multifloro, foliis ovato-lanceolatis ſerratis* Hall. *hiſt.* 562.

(110) *Viola pinnata*, quae quotannis ſemina perficit in horto Taurinenſi, imperfecta plerumque petala habet; ſemel autem, atque iterum florem perfectum monſtravit, qui reſpondet deſcriptioni, quam dedit in hiſt. plantarum doctiſſimus Haller.

glabra

glabra L.
laevigatum L.
Paſſiflora minima.
3. *Pentaſtylae.*
Statice limonium L.* (111)
ſinuata L.
ſpecioſa L.
cordata L.*
Linum tenuifolium L.*
catharticum L.*
maritimum L.*
alpinum L.*
perenne L.
narbonenſe L.*
gallicum L.*
Sibbaldia procumbens L.*
Craſſula tetragona L.
cultrata L.
obvallata L.
portulacaria L. (112)

B. HEXASTEMONES.

Frankenia pulverulenta L.

C. OCTOSTEMONES.

Acer campeſtre L.*
pſeudo-platanus L.*

D. DECASTEMONES.

1. *Monoſtylae.*
Pyrola rotundifolia L.*
uniflora L.*
minor L.*
ſecunda L.*
Rhododendrum ferrugin. L.*
Tribulus ciſtoides L.
Zygophyllum fulvum L.
Melia ſempervirens (113)
Guilandina bonduc L.
Fagonia cretica L.
2. *Diſtylae.*
Dianthus carthuſianorum L.*

(111) *Limonium maritimum majus* BAUH. *pin.* 192. *&* *Miſc. Taurin.* *p.* 68.

(112) *Craſſula portulacae facie arboreſcens* DILL. *elth.* *p.* 120. *t.* 110. *&* *Miſc. Taur.* *p.* 69.

(113) *Azedarach ſempervirens*, *&* *florens* TOURNEF. *inſt.* 616. habet pro varietate *Azedarach* Cl. LINNAEUS. Obſervo in *Azedarach* pinnas ſemper oppoſitas, folia lucida eſſe acutius, & minus profunde dentata, firmioris ſubſtantiae, fructus rotundos; in *ſempervirenti* pinnas non ſibi ex adverſo reſpondere, magnis dentibus ita profunde ſectas eſſe, ut etiam lobatae videantur, racemum fructuum triplo, & quadruplo longiorem eſſe; fructus ovatos.

glaucus L. *
ſuperbus L. *
alpinus L. *
virgineus L. *
monſpeliacus L. *
Saponaria lutea L. *
Gypſophila perfoliata L.
Saxifraga aſpera L. *
autumnalis L. *
ceſpitoſa L. *
Stellaris L. *
cuneifolia L. *
hypnoides L. *
androſacea L. *
caeſia L. *
multiflora. * (114)
purpurea. * (115)
oppoſitifolia L. *
biflora. * (116)

(114) *Saxifraga foliorum ora cartilaginea, caule triplicato ramoſo, petalis immaculatis*, HALL. *hiſt. n.* 977.

(115) *Saxifraga caule reptante, foliis quadrifariam imbricatis acutis glabris; an ſaxifraga alpina ericoides fl. purpuraſcente* TOURN. *inſt.*

(116) *Saxifraga foliis imbricatis, ovatis, caulibus reptantibus, bifloris*, HALL. hiſt. n. 981. Hae tres ſaxifragae *oppoſitifolia, purpurea*, & *biflora*, affines maxime ſunt, diverſas autem tres ſpecies conſtituunt. *Oppoſitifolia*, quae reſpondet *ſaxifragae alpinae, ericoidi fl. ceruleo*, folia habet glabra ciliata, ovata, laxe imbricata, in cauliculis confertiora; petala ovata, lineata, caerulea, aut purpuroviolacea, ſtaminibus fere longitudine petalorum. Ea, quam voco *purpuream* folia habet denſe imbricata in ramis decumbentibus, & in cauliculis florigeris diſſita, ſed glabra, apice acuto, & reflexo, caules quadrifloros, aut trifloros fere nudos, ſtylis, & ſtaminibus purpuraſcentibus petala longitudine ſuperantibus, atque haec eſt fortaſſe varietas a Cl. LINNAEO in flora lapponica memorata; petala vivide rubra ſunt, non lineata, ex ovatis longe acuta, patentia. *Biflora* autem, quam deſcripſit Cl. HALLER, & cui reſpondet icon *Oederi tab.* 34. viſcoſa eſt; habet folia non ciliata, ſed villoſa, in ſummis cauliculis potius alterna, quam oppoſita, acumine non reflexo. Flos roſeus, petalis ovatis, acutis, ſtamina tubis multo breviora, quae in oppoſitifolia petalis ſubaequalia ſunt, in purpurea petalis longiora. *Oppoſitifolia* ſolet habere caules unifloros; *biflora* duos plerumque in ſummis cauliculis ſubſeſſiles flores, purpurea tres, aut quatuor umbellatos longe pedunculatos poſſidet. Has omnes ſaxifragae ſpecies cum aliis exhibebo icone *in Enum. ſtirp. Pedemontii.*

mufcoides. * (117)

3. *Triftylae.*

Arenaria trinervia L. *

tenuifolia L. *

ciliata L. *

tetraquetra L. *

biflora L. * (118)

maritima. * (119)

lanceolata. * (120)

obtufa. * (121)

flaccida. * (122)

Cherleria fedoides L. *

Drypis fpinofa L.

Stellaria nemorum L. *

graminea L. *

Silene pendula L.

mufcipula L. *

armeria L. *

fruticofa L.

gigantea L.

noctiflora L. *

antirrhina L.

nocturna L. *

vallefia L. *

cretica L.

virginica L.

faxifraga L. *

acaulis L. *

bupleuroides L.

viridiflora L.

polyphylla L.

(117) *Saxifraga foliis mollibus, ellipticis, fubhirfutis, caule paucifloro,* HALL. *hift. n.* 985.

(118) *Alfine caule recto, proftrato, foliis ovatis,* HALL. hift. n. 877.

(119) *Maritima a campeftri* diftinctam fpeciem conftituit. *Maritima* certe decandra, *campeftris* pentandria. Flos in maritima major ex petalis ovatis, purpureis, per aetatem albidis, & diu perfiftentibus, fructus in cornu productus multum extra calycem. Semina leucophaea margine pellucido aucta. In campeftri fructus vix calyce major, femina angulata, obfcura fine ullo margine, ut alia omittam difcrimina.

(120) *Arenaria foliis, & calycibus lanceolatis, trinerviis.* Apud auctores rei herbariae defcriptam non reperi. Radix perennis cefpitofa. Cauliculi ex ramis procumbentibus eriguntur digitales, folia oppofita, erecto patentia glabra raro fubhirfuta, firma, acuto fine. Calyx ex foliolis fimilibus, fed concavis, flos patens albus, calyce paulo major, petalis integerrimis. Stamina decem, antheris purpurafcentibus.

(121) *Alfine foliis linearibus obtufis, calycibus vifcidis,* HALL. *hift.* 863.

(122) *Alfine caule flaccido dichotomo, foliis linearibus acutis,* HALL. *hift.* 864.

niceenſis * (123)
portenſis L.
paradoxa L. (124)
porrigens L. (125)
Cucubalus otites L. *
tartaricus L.
cutholicus L.
4. *Pentaſtylae.*
Coriaria myrtifolia. L. *
Sedum ſtellatum. L. *
acre L. *
daſiphyllum. L. *
reflexum. L. *
anacampſeros. L. *
ſexangulare. L. * (126)
Agroſtemma caeli roſa. L. *
coronaria. L. *
flos jovis. L. *
githago. L. *
Lychnis chalcedonica. L.
flos cuculi. L. *
dioica. L. *
alpina. L. *
Ceraſtium perfoliatum. L.
dichotommum. L.
manticum. L. *
alpinum. L. *
arvenſe. L. *
vulgatum L. *
Forskohlea aegyptiaca. L.
5. *Decaſtylae.*
Phytolacca icoſandra. L.
E. POLYSTEMONES.

(123) *Silene villoſa, & viſcoſa, foliis linearibus obtuſis, petalis ſemifidis, fructibus ovatis, calycibus decemſtriatis.* In agro Niceenſi naſcitur haec ſilene, quae ab auctoribus praetervisa mihi videtur. Caules infirmi vix erecti. Folia linearia craſſiuſcula ſulcata, caulis de more gentis in pedunculos dichotome finditur. Calyces decemſtriati ſtriis viridibus, non inflati tubuloſi, petala ſemifida coronata ſquamis ſubrotundis extus pallide flavo purpuraſcentia, intus albida, & per diem intus convoluta, ungues pallide luteſcentes. Antherae didymae luteovirides. Styli tres cum ſtigmatibus hirſutis, tota planta villoſa, & viſcoſa eſt.

(124) *Silene viſcoſa alpina, foliis omnibus planis, ac prorſus glabris, petalis anguſtis, intus candidis, extus ex viridi luteolis profunde bifidis, diviſionibus divaricatis linearibus, nectariis exſtantibus, ac tribus longiſſimis purpuraſcentibus ſub ſolo ſpiraliter convolutis,* MANETTI *ſpicil. n.* 1005, *& Miſc. Taur. p.* 69.

(125) Hanc *Gypſophilae chalepenſis*, nomine jamdudum miſit Cl. GOVAN, ſed omnino ad *gypſophilae* genus pertinet.

(126) *Sedum foliis teretibus ternatis, caulibus ſimplicibus trifidis* HALL. *enum. n.* 107, & *Miſc. Taur. p.* 70.

1. *Monoſtylae.*
Portulaca anacampſeros. L.
racemoſa. L.
fruticoſa. L.
Ciſtus laurifolia. L. *
incanus. L. *
monſpelienſis. L. *
ledifolius. L. *
guttatus. L. *
ſerpillifolius. L. *
apenninus. L.
tuberaria. L. *
thymifolius. L. *
polifolius. L. *
aegyptiacus. L.
laevipes. L. *
ſalicifolius. L. *
ladaniferus. L.
roſens. * (127)
arabicus. L.
piloſus. L. *
Triumfletta lappula. L.
ſemitriloba. L.
Corchorus aeſtuans. L.
Capſularis L.
Prunus lauroceraſus. L.
padus L. *
pumila L.
avium L. *
Canadenſis. L.
Amygdalus pumila. L.
Pſidium pyriferum L.
2. *Diſtylae.*
Agrimonia repens. L.
Crataegus azarolus. L.
3. *Triſtylae.*
Reſeda odorata. L. (128)
phyteuma. L. *
undata. L.
Aconitum napellus. L. *
Cammarum. L. *
Delphinium peregrinum. L. * (129)
grandiflorum. L.
Paeonia officinalis. L. *
4. *Pentaſtylae.*
Aquilegia canadenſis. L.
alpina. L. *
Nigella arvenſis. L. *
Meſpylus pyracantha. L. *

(127) *Heliantathemum folio ampliori, fl. roſeo Sherard. Phil. Tranſ. n.* 383. HALL. *gott. p.* 114.

(128) *Reſeda foliis integris, floribus odoratis.* HALL. *gott.* 93, & *Miſc. Taur. p.* 70.

(129) *Delphinium nectaris diphillis, floribus ſolitariis, foliis multipartilis, foliolis lineari acuminatis, enum. nic. p.* 200, & *Miſc. Taur. p.* 81. A *peregrino* olim ſeparavi eo, quod monophylla nectaria *peregrino* tribuiſſet Cl. LINNAEUS. Sed noſtrum eſt vere *peregrinum* Cl. LINNAEI, ut per literas etiam certiorem me fecit.

chamaemefpilus. L. *
amelanchier. L. *
cotoneafter. L. *

5. *Polyftylae.*

Spiraea opulifolia. L.
Helleborus hyemalis. L. *
foetidus. L. *
Potentilla alba. L. *
grandiflora. L. *
caulefcens. L. *
aurea. L. *
opaca. L. *
penfylvanica. L.
valderia. L. *
intermedia. L. *
norvegica. L. (130)
Geum reptans. L. *
virginianum. L.
Fragaria fterilis. L. *
Rubus fruticofus. L. *
faxatilis. L. *
Rofa pendulina. L. *
lutea. (131)

CLASSIS IX.

Plantae flore hexapetalo.

I. DIANTHERAE.

Orchis militaris. L. *
mafcula. L. *
coriophora. L. *
latifolia. L. *
abortiva. L. *
Satyrium nigrum. L. *
hircinum. L. *
viride. L. *
Ophrys fpiralis. L. *
minima. L. *
Alpina. L. *
Serapias latifolia. L. *
grandiflora. L. *
lingua. L. *
longifolia. L. * (132)

II. TRIANTHERAE.

Sifyrinchium bermudiana. L.
Ixia corymbofa. L.
bulbifera. L.
crocata. L.
Wachendorfia thyrfiflora. L.

(130) *Potentilla foliis ternatis, hirfutis, caule recto, umbellifero*, HALL. *gott. p.* 108, & *Mifc. Taur. p.* 224.

(131) *Rofa lutea fimplex.* BAUH. pin. 636.

(132) *Epipactis foliis enfiformibus, labello obtufo, per oras plicato,* HALL. *act. helv. t. IV. p.* 111, & *Mifc. Taur. p.* 72.

III. HEXASTEMONES.

MONOSTYLAE.

1. *Flore fructui impoſito.*

Hemerocallis flava. L.
fulva. L.
Amaryllis lutea. L.
belladonna. L.
atamaſca. L.
ſarnienſis. L.
Pancratium maritimum. L.
Leucojum vernum. L. *

2. *Flore fructum cingente.*

Alium fiſtuloſum. L.
Schoenopraſum. L. *
ſeneſcens. L. *
oleraceum. L. *
victorialis. L. *
magicum. L.
ampelopraſum. L.
paniculatum. L. *
chamaemelys. L.
pallens. L. *
Fritillaria meleagris. L. *
Uvularia amplexifolia. L. *
Tulipa gallica. L. *
Ornithogalum luteum. L. *
Anthericum annuum. L.
calyculatum. L. *
aſphodeloides. L.
ſerotinum. L. *
liliaſtrum. L. *
Veratrum album. L. *
Albuca major. L.
Medeola aſparagoides. L.
Peplis portula. L. *

IV. POLYSTEMONES.

Lythrum ſalicaria. L. *
hyſſopifolia. L. *

CLASSIS X.

Plantae flore polypetalo.

Cactus curaſſavicus. L.
repandus. L.
ficus indica. L.
melocactus. L.
Meſembryanthemum loreum L.
cryſtallinum. L.
ſplendens. L.
acinaciforme. L.
nodiflorum. L.
noctiflorum. L.
calamiforme. L.
deltoides. L.
barbatum. L.
uncinatum. L.
forficatum. L.
ringens. L.
tortuoſum. L.
Sempervivum arboreum. L.
tectorum. L. *
arachnoideum. L. *
montanum. L. *
Adonis autumnalis. L.
aeſtivalis. L. *
Anemone pulſatilla. L. *

ranunculoides. L. *
alpina. L.
baldenſis. L. *
ſulphurea. L. * (133)
halleri. * (134)
narciſſiflora. L. *
Atragene alpina. L. * (135)
Butomus umbellatus. L. *

CLASSIS XI.

Plantae flore apetalo exceptis graminibus.

I. FILAMENTIS COALITIS.

Thuja orientalis. L.
Pinus ſylveſtris. L. *
pinea. L.
picea. L. *
cembra. L. *
Juniperus ſabina. L. *
oxycedrus. L. *
Taxus baccata. L. *

II. FILAMENTIS DISTINCTIS.

A. Juliferae.

Salix caprea. L. *
reticulata. L. *
herbacea. L. *
retuſa. L. *
Betula alba. L. *
Populus balſamifera. L.
Quercus coccifera. L. *
ilex. L. *

B. Non Juliferae.

1. *Monantherae.*

Hippuris vulgaris. L. *
Blitum virgatum. L. *

2. *Diantherae.*

Fraxinus excelſior. L. *

3. *Triantherae.*

Phillanthus niruri. L.
Ortegia dichotoma. * (136)
Axyris hybrida. L.

(133) *Anemone tubis caudatis, involucris multifidis foliis hirſutis, pinnatis, pinnis acute lobatis* Hall. *hiſt. n.* 1147.

(134) *Anemone tubis caudatis, involucris multifidis, foliis hirſutis, pinnatis, pinnis latis lobatis* Hall. *hiſt.* 1148.

(135) In editis alpium humilis, nec ſcandit. In horto culta trium, & quatuor pedum altitudinem ſcandendo acquiſivit. Non igitur differt *Atragene clematides C.*

(136) *Ortegia dichotoma Miſc. Taur. tom. III. p. 76.* Num *Ortegia dichotoma* noſtra ſit *Hiſpanica* L. ſtatuere nondum ſcio, collata etiam deſcriptione, quam Cel. Linnaeus dedit in poſtrema ſyſtem. nat. editione pag. 74.

Minuartia

Minuartia campeſtris.
Mollugo verticillata. L.
Oſyris alba. L. *

4. *Tetrantherae.*

Iſnardia paluſtris. L. *
Hippophae rhamnoides. L. *
Myrica cerifera. L.
Urtica dodartii. L.
pilulifera. L. *
nivea. L.
balearica. L.
divaricata. L.
Alchimilla vulgaris. L. *
alpina. L. *
pentaphyllea. L. *
Illecebrum paronychia. L. *
achyranta. L.
Camphoroſma monſpeliaca. L. *
Rivina humilis. L.
Buxus ſempervirens. L. *

5. *Pentantherae.*

Salſola fruticoſa. L. *
muricata. L. (137)
Theſium linophyllum. L. *
alpinum. L. *
Achyranthes lappacea. L.
indica.
ſicula. (138)
lanata. L.
Herniaria hirſuta. L.
Atriplex roſea. L.
ſibirica. L.
Chenopodium ariſtatum. L. *
viride. L. *
urbicum. L. *
polyſpermum. L. *
album. L. *
auguſtanum. * (139)
Amaranthus hybridus. L.
caudatus. L.
hypochondriacus. L.
graecizans. L.
albus. L. *
ſanguineus. L.
polygonoides. L.
viridis. L.
Beta cycla. L. *
maritima. L. *
Govana domingenſis. L.
Pharnaceum cerviana. L.

6. *Hexantherae.*

Smilax ſalſaparilla. L. *

(137) *Baſſia Aegyptiaca, Miſc. Taur. tom. III. p.* 178.

(138) *Siculam indicae* varietatem putet Cl. LINNAEUS; ſed mihi diſtinctae ſpecies videntur.

(139) *Chenopodium foliis ſubulatis ſericeis, florum glomerulis geminis,* HALLER. *hiſt. n.* 1575.

Rumex aegyptius. L.
sanguineus. L.
aquaticus. L. *
roseus. L.
luxurians. L.
digynus. L. *
spinosus. L.
arifolius. * (140)

7. *Octostemones.*

Chrysosplenium alternifolium. L. *
Polygonum pensylvanicum. L.
maritimum. L. *
viviparum. L. *
virginianum L.
strictum. * (141)
alpinum. * (142)
Stellera passerina. L. *
Rhodiola rosea. L. *
Trianthema portulacastrum. L.

8. *Decastemones.*

Nyssa aquatica. L.
Datisca cannabina. L.
Scleranthus annuns. L. *
perennis. L. *

9. *Polyantherae.*

Ceratophyllum demersum. L.*
Theligonum cynocrambe. I.*
Mercurialis tomentosa. L.
Dalechampia scandens. L.
Tetragonia fruticosa. L.
Aizoon canariense L.
hispanicum. L.
Glinus lotoides. L.

CLASSIS XII.

Plantae flore apetalo Gramina.

II. TRISTEMONES.

A. Monostylae.

Nardus stricta. L. *
Cenchrus racemosus. L. *
echinatus. L. *
Lygeum spartum. L.
Zea mays. L.
Coix lacryma job. L. *
Cyperus flavescens. L. *
fuscus. L. *
rotundus. L.

(140) *Lapathum acetosum, sexu distiactum, foliis planis, cordiformibus,* Hall. *gott. p.* 16, *& emend.* 1. *n.* 18, *& Misc. Taur. p.* 74. *Historiae autem* Cl. Halleri *n.* 1598.

(141) *Polygonum foliis ovato lanceolatis, glabris, spica strigosa, vaginis ciliatis,* Hali. *hist. n.* 1555.

(142) *Polygonum caule erecto, foliis ovato lanceolatis, subhirsutis, spicis paniculatis,* Hall. *hist. n.* 1564.

papyrus. L.
glomeratus. L. *
ſpadiceo viridis. (143)
Scirpus acicularis. L. *
michelianus. L. *
triqueter. L. *
ſylvaticus. L. *
holoſchaenus. L. *
lacuſtris. L. *
maritimus. L. *
mucronatus. L. *
Eriophorum polyſtachion. L.*
varginatum. L. *
Schoenus mariſcus. L. *
nigricans. L. *
albus. L. *
compreſſus. L. *
Carex dioica. L. *
muricata L. *
remota. L. *
leporina. L. *
veſicaria L. *
flava. L. *
globularis. L. *
atrata. L. *
Typha anguſtifolia. L. *
latifolia. L. *
Sparganium erectum. L. *

B. Distylae.

Phalaris oryzoides. L. *
paradoxa. L. *
utriculata. L. *
Panicum coloratum. L.
capillare. L.
hirtellum. L. *
Phleum arenarium. L. *
pratenſe. L. *
alpinum. L. *
Alopecurus monſpelienſis. L. *
Milium paradoxum. L. *
effuſum. L. *
Agroſtis verticillata. L. *
ſtolonifera. L. *
indica. L.
miliacea. L. *
interrupta L. *
Aira caerulea. L. *
Melica altiſſima L.
Poa alpina. L. *
Gerardi. * (144)
Briza eragroſtis. L. *
Dactylis glomerata. L. *
Cynoſurus aureus. L. *
indicus L.
echinatus L. *
coracan. L.

(143) *Cyperus parvus panicula conglob., ſpicis compreſſis ſpadiceo viridibus Segu. ſupp. p. 66.*

(144) *Poapanicula erecta, ſpiculis trifloris glabris, corollis acuminatis, calyce diplo longioribus* Ger. *galloprov. p. 91.*

Festuca amethystina. L. *
ovina. L *
Bromus mollis. L. *
squarrosus. L. *
Stipa capillata. L. *
juncea. L. *
Arundo calamagrostis. L. *
Elymus sibiricus. L.
canadensis. L.
Hordeum zeocriton. L.
distichon. L.
Triticum hybernum. L.
polonicum. L.
repens. L. *
junceum L. *
AEgilops ovata. L. *
Andropogon hirtum. L. *
Holcus lanatus L. *
sorghum. L.
saccharatus. L.
spicatus L.
Tripsacum hermaphroditum. L.
dactyloides. L.

III. HEXASTMONES.

Oryza sativa. L.
Juncus articulatus. L. *
bufonius. L. *
trifidus. L. *
effusus. L. *
acutus. L. *
bulbosus. L. *
niveus. L. *
compressus. J.
Acorus calamus. L. *

CLASSIS XIII.

Plantae flore imperfecto, seu potius inconspicuo.

Marsilea quadrifolia. L. *
natans. L. *
Marchantia polymorphia. L. *
Lycopodium annotinum. L. *
complanatum. L. *
Equisetum palustre. L. *
fluviatile. L. *
Ophioglossum vulgatum. L. *
Osmunda lunaria. L. *
Acrosticum maranthae. L. *
thelypteris. L. *
Pteris cretica. L. (145)
Asplenium adiantum nigrum. L. *
Polypodium fontanum. L. *
phegopteris. L. *
regium. L. *
Pteris cretica. L.

(145) *Lingua cervina foliis costae innascentibus*, Tourn. *inst.* 544.

REFLE-

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

DE ELECTRICITATE.

Quum muneris mei ratio jam longius a generali physica me avocet, & temporis mei partem anatome, partem aegrorum cura sibi vindicet, constitui subsecivis horis ex adversariis meis ea depromere, quorum perficiendorum jam pauca spes superesset.

ARTICULUS PRIMUS.

De Symmeriana electricitate.

Mense aprili anni 1770 quum domum Cl. Marchionis Berset convenissent Equites Lovera, & Debutet, ut experimentis electricis operam darent, ab eorum uno observatum est phialam, quae onerata fuerat, postquam, communicatione oppositarum superficierum per arcum deferentem instituta, penitus deonerata esset, mora, & quiete paucorum minutorum novam succutiendi vim recipere, quae si rursus, instituta oppositarum facierum communicatione, deleretur, nova iterum post aliquod tempus prodiret ita tamen, ut succussiones, quae ex successive genita electricitate producerentur, pedetentim minores essent, ac tandem quocumque temporis intervallo nullae amplius haberi possent.

Quum id mihi phaenomenum a Cl. Viris humaniter narraretur, principio paradoxum, ac vix credibile visum est, quin potius aut prima vice imperfecte deoneratam phialam fuisse, aut alium errorem admissum suspicabar.

Quum vero & phaenomeni veritatem propria observatione perspectam habuissem, & ejus caussam animo versarem, demum intellexi experimentum hoc maximam analogiam praeseferre cum alio a me alia occasione proposito, quod nempe si bina vitra in unum juncta, & instar simplicis vitri armata onerarentur, tum, instituta oppositarum facierum communicatione, inductum onus tolleretur, etsi exinde quamdiu juncta vitra perstabant, electricitatis residuae indicia nulla praeberent, si tamen ab invicem divellerentur, valde electrica se ostenderent. (1)

Inde vero colligebam electricitatum, quae in armata vitra congeruntur, partem aliam liberam ad vitrorum superficiem esse, eamque esse, quae, inducta communicatione ad aequilibrium se componens succutiat; partem aliam earum electricitatum altius in vitri poros pervadere, hanc nonnisi lente sive a vitri, sive ab aliorum coërcentium poris se expedire, ideo succutiendo ineptam esse, nec quamdiu vitra juncta perstant ullum sui indicium exhibere, quod oppositae electricitates oppositis vitris inhaerentes se invicem retineant, cohibeantque. Disjunctis vitris, sublataque earum electricitatum in se invicem actione, utramque pedetentim, ac tarde se expedire, sic signa electrica producere, & diuturnam eorum vitrorum tum ad se invicem, tum ad alia corpora adhaesionem efficere. (2)

Itaque concludebam in novo hoc experimento eodem fere modo rem se habere. Electricitatum scilicet, quae in phialam congerebantur, partem eam, quae ad ipsius phialae superficies libera erat, inducta communicatione, se ad aequi-

(1) Miscel. tom. III §. 62.
(2) Ib. §. 69, 70.

librium componere, ac ſuccutere; eam vero, quae altius in vitri poros penetraverat, quaeque eorum reſiſtentia irretita erat, nonniſi lente prodire, prodeuntem in armaturas paullatim colligi, collectam novae ſuccuſſioni efficiendae aptam eſſe.

Ut igitur experimentum iſtud ex noſtra hypotheſi de Symmeriana electricitate in vitri poris deliteſcente feliciter explicatur, ſic viciſſim ab eodem novum argumentum ad eam hypotheſim fulciendam videtur accedere.

Enim vero calore vitrorum Symmerianam electricitatem augeri obſervavi, idque tum tribuebam humori, quem vi caloris expelli arbitrabar; (3) poſtquam vero cognovi ex propriis, & ex variis Anglorum experimentis vitra calore deferentia fieri (4), inde etiam meam illam hypotheſim confirmari deprehendi. Nam prout vitra majori calore magis meabilia fiunt, neceſſe eſt inductam electricitatem facilius, altiuſque in ipſorum poros pervadere, quae quum, frigefactis vitris, pari facilitate ab ipſis erumpere amplius non poſſit, pedetentim prodiens vehementiora Symmerianae electricitatis phaenomena exhibebit.

Viciſſim quo calidiora ſunt vitra, dum onerantur, eo ineptiora ſuccutiendo evadunt, ut ex Frankliniano experimento de phialis ebulliente aqua plenis. (5) Enim vero ea electricitas, quae in vitri ex calore meabilis poros irrepſit, iis poſtea irretita ſimul ac ſemel erumpere non poterit, ac ſuccutiendo inepta erit. Quum igitur calor Symmerianam electricitatem augeat, Franklinianam minuat, inde utriuſque diſcrimen confirmatur.

Immo vero cenſerem vitrum, inferiori armatura conſtanter cum ſolo communicante, ex ſuperioris ſuperficiei

(3) L. c. §. 97 in not.
(4) Vid. Pryestley hiſtoire de l'electricité III p. 234.
(5) Vid. Pryestley l. c. II p. 430, III p. 307.

frictione electricum factum, atque adeo sola Symmeriana electricitate imbutum, & succutiendo ineptum, (6) imposita tamen superiori faciei, quae fricata fuit, armatura, post aliquod tempus succutiendo aptum fieri ob Symmerianam electricitatem paullatim explicatam, & in armaturis collectam.

Existimo etiam secundam, tertiam &c. succussionem eo majores futuras, quo vitrum calidius fuit, quum oneraretur, quo majus onus accepit, quo diutius id servavit, quum eae omnes conditiones majorem in vitri substantiam electrici fluidi quantitatem adigant.

Quod vero ab Anglis, ut dicebam, demonstratum est, vitrum ex calore igni electrico meabile fieri etiam antequam eorum experimenta comperta haberem, parum dissimili experimento cognoveram. Scilicet onerati vitri faciem inferiorem altera manu tangebam, superiorem extremo uno vitri tenuis quinque transversos digitos longi, cujus extremum alterum opposita manu apprehendebam: si tubus frigefactus esset, nec ictum ullum excipiebam, nec deonerabatur vitrum; si igne candefactus esset, ipsumque uno extremo forcipe prehensum extremo altero ad armaturam vitri superiorem admoverem, ictum experiebar, quo vitrum ipsum omnino deonerabatur.

Illud similiter ex proprio experimento cognoveram, quod postea a Cl. Pryestleyo observatum esse comperi; ligna quamdiu ex igne admodum calent deferentia esse. (7) Nam cilindrum ligneum recens excalefactum frustra fricabam, quamdiu calorem servabat; nec enim ullam ex eo affrictu electricitatem recipiebat, maximam vero ex frictu acquirebat, postquam susceptum calorem amisisset.

(6) Vid. Miscel. tom. III §. 71.
(7) Pryestley III p. 233.

ARTICULUS SECUNDUS.

De experimentis electricis in poculo metallico institutis.

Experimenta quaedam narrat PRYESTLEYUS in poculo stanneo electrico unius mensurae (*une pinte*) capaci a se instituta ex Franklini monitu, per quae compererit fila, aut globos ex subere intra id vas electricum demissa ex ipsius electricitate nec commoveri, nec se invicem repellere, inde educta electricitatem aliquam, sed exiguam ostendere, eo tamen majorem, quo remotius a fundo latera vasis contigissent. (8) Phialam vero, cujus exterior armatura poculi fundo incumberet, uncus manu hominis solo insidentis detineretur, ex congesta in poculum electricitate non onerari, aut minimum onus recipere. (9) Ex quibus concludit attractionem poculi electrici attractioni sphaerae cavae similem esse, nec corpora electricitatem ex una parte recipere posse, nisi in partem aliam ipsam emittere queant. (10)

Ad horum phaenomenorum caussam persequendam, mihi aptissima machinula visa est, quae ex metallico filo ad utrumque extremum acuminato, & ad contrarias partes flexo, tum supra apicem metallicum librato conficitur, (11) quaeque vi fluidi electrici per acuminatos apices erumpentis eadem ratione in gyrum agitur, qua Segneri molendinum ab erumpente aqua circumvolvitur. (12) Hujus itaque electrici molendini motus ad fundum vasis metallici

(8) III p. 461, 462.
(9) Ib. p. 462, 463.
(10) Ib. 463, 464.
(11) Vid. PRYESTL. l. c. II p. 435, 436.
(12) Vid. mem. de l'Acad. de Berlin tom. X p. 227 & seq.

explorare adgressus sum. Usus vero sum vase metallico peramplo, caldario scilicet aheno aliquot pedes alto, totidemque amplo. Hisce experimentis humaniter interfuit, immo ipsorum aliqua aut excogitavit, aut perfecit Vir ingeniosus, & in mechanica versatissimus Eques DEBUTET, quae hujusmodi sunt.

Experimentum primum.

Machinulam ad fundum aheni constitui, ut cum ipso communicaret; ahenum vero undique insulatum erat. Electricitatem ope fili metallici a catena ad ahenum, vel ad machinulam duxi. Nulla inde machinulae rotatio, quod videbatur convenire cum sententia eorum, qui affirmant corpora ad metallici vasis fundum nullam electricitatem recipere: hinc enim proclive est concludere machinulam electricam non fieri, nec propterea in gyrum agi posse.

Experimentum secundum.

Quum vero dubitarem, machinulam electricam quidem fieri, sed ideo non moveri, quod fluidum electricum ab ejus acuminatis extremis in latera aheni aeque electrici ferri non posset, proindeque quiescere non quidem electrici fluidi defectu, sed quod hoc ipsum fluidum intra eamdem omnino stagnaret, coronam ex charta inaurata confeci diametro unius pedis, aut ultra, eamque circa molendinum ita constitui, ut molendinum ejus centrum occuparet. Corona haec nec cum molendino, nec cum aheno communicabat, sed per filum metallicum in hominem solo insidentem electricitatem, si quam reciperet, disperdere poterat. Rebus ita constitutis, & electricitate ad ahenum impulsa molendinum perniciffime in gyrum agebatur. (13) Oportuit ergo molendinum a fundo aheni electricitatem recipere, quum ex eadem per acuta extrema in ambientem metallicam coronam emissa in gyrum ageretur. Falsum igitur corpora ad fundum vasis metallici nullam electricitatem recipere, sed potius dicendum, eorum electricitatem ab aequali laterum ipsius vasis electricitate ita reprimi, ut motum nullum habeat, sicque suae praesentiae indicia nulla praebeat.

Quod si educta corpora vix ullam electricitatem ostendunt, id indicio est ea corpora, dum educerentur, acquisitam electricitatem amisisse verosimiliter ex eo, quod lege a Cantono, & AEpino detecta (14), fundus, & latera vasis in ea corpora jam ab ipsis disjuncta contrariam electricitatem inducere nitantur, proindeque receptam ejusdem nominis electricitatem ab iisdem expellere.

Experimentum tertium.

Machinulam ad fundum aheni supra poculum vitreum parum altum insulavi, ut sic parum ab ejus fundo abesset. Ahenum item insulatum erat. Electricitatem ad machinulam deduxi, quin ahenum ullam reciperet. A recepta electricitate in gyrum acta est, paullatim vero ejus celeritas imminuta est, ut tandem omnino quiesceret: tum per admotum digitum ab aheno scintillam eduxi, inde molendinum pristinum motum, pristinamque velocitatem recepit, quae paullatim languens, nova ab aheno educta scintilla, restaurata est, & ita deinceps.

Ex quo apparet, ex electricitate machinulam ad fundum aheni in gyrum agi, dum per acuminata extrema in aheni

(13) Experimentum hoc proposuit Eques DEBUTET.
(14) Vid. PRIEST. l. c. II p. 18, & seq.

latera machinula se exonerat: prout latera aheni ex congesta electricitate magis resistunt fluido ab iis extremis advenienti, & ejus fluidi fluxum, & machinulae celeritatem retardari; demum fluido aeque denso in aheni parietibus exsistente ac in ipsa machinula jam nullum ejus fluxum a machinula ad ahenum fieri posse, sicque machinulam quiescere nisi, educta per admotum digitum aheni electricitate, novae electricitati a machinula excipiendae ipsum ahenum iterum aptum evadat.

Experimentum quartum.

Machinula, ut prius ad fundum aheni insulata est, ut tamen ex ipsa ad manum hominis solo insidentis filum deduceretur. Ahenum item insulatum est. Electricitas autem ad ipsum ahenum deducta. Continuo molendinum in gyrum actum est eadem velocitate, eademque directione ac prius, sive electricitas ad ahenum deducta positiva esset, sive negativa.

Ut igitur in priori casu ex electricitate ab acuminatis extremis machinulae in aheni latera effluente machinula in gyrum agebatur, ita in postremo hoc ab electricitate ex aheni lateribus in acuminata machinulae extrema adveniente haec ipsa machinula movebatur. Ex quo confirmatur differentiam inter electricitatem machinulae, & laterum aheni, aut ambientium corporum eam esse, quae fluxum electrici fluidi ab ipsa, aut in ipsam efficiat, sicque eamdem in motum agat.

Confirmatur item, quod alio experimento jam constiterat, (15) contrarium motum fluidi modo erumpentis, modo subeuntis per extrema machinulae eamdem tamen directionem ipsi machinulae impertiri.

(15) Pryest. l. c. II p 435, 436, III p. 137, 138, 140.

AR-

ARTICULUS TERTIUS

De AEPINI *experimentis, in quo aërea lamina electrico vapore oneratur.*

Elegans AEPINI experimentum de aërea lamina oneranda in hunc modum institui.

Tabulas ligneas binas amplitudinis pedum $8 \frac{1}{3}$ charta inaurata cooperui, alteram alteri superposui situ parallelo, ut faciebus inauratis sibi mutuo obverterentur. Inaurata charta superioris tabulae ab inferiore ejus facie in superiorem producebatur, quo commodius electricitatem a globo advenientem recipere posset. Tabulis hisce interposui frustula vitrorum diversae crassitiei, ita ut inauratae facies modo 11 lineis, modo 19, modo 36 distarent. Ad minimam eam 11 lin. distantiam onerabantur armaturae, vel si mavis lamella aërea ipsis interposita, modo tempestas valde sicca esset, indeque succussio & ictus satis validus habebatur. Si tempestas minus sicca, minusque opportuna experimento esset tabulae ad 19 lin. distantiam constituendae erant, ut onerari possent, ictumque praebere, qui minor etiam, quam in praecedente distantia percipiebatur. Si demum tabulae ad 36 lin. distantiam collocarentur, armatura quidem inferioris tabulae contrariam superiori electricitatem recipiebat, ut, insulata inferiori ea tabula, facile deprehendebatur, sed ita exigua utriusque armaturae electricitas erat, ut sensibilem ictum non praeberet.

Quando lamella aërea onerabatur, constanter observavi, quod ab AEPINO jam fuerat animadversum, electricitatem armaturae superioris cum globo communicantis vehementiorem fuisse contraria electricitate oppositae armaturae communicantis cum solo.

Quando vero tabula inferior insulata erat, ejusque communicatio cum solo per admotam manum perficiebatur post inductum onus auferendam, tunc alterno tabularum contactu observabam scintillas ab ipsis eliciendas celeriter decrescere. Scilicet attactu superioris armaturae non solum excessum ipsius electricitatis supra electricitatem inferioris armaturae auferebam, sed multo etiam plus, ita ut ejus electricitas electricitate inferioris armaturae multo minor evaderet. Vicissim quum inferiorem armaturam tangebam, non solum ejus electricitatem electricitati superioris aequabam, sed multo minorem etiam efficiebam, ut sic duobus, tribusve alternis hujusmodi attactibus totam penitus electricitatem exstinguerem.

Et haec quidem inaequalitas electricitatum etiam in onerato vitro deprehenditur. Notum enim est corpus ex filo serico pendulum inter binas armaturas vitri onerati, & insulati tamdiu oscillare, donec electricitas penitus exstincta sit. Verumtamen si inter oppositas electricitates absoluta aequalitas requireretur, nunquam eo modo vitrum exonerari posset: nam ubi ad eam aequalitatem perventum esset, pendulum quiesceret, nec ex una armatura electricitatem haurire posset, nisi eodem tempore par quantitas electricitatis ex opposita armatura educeretur.

Quae omnia ab AEpino feliciter explicantur. (16) Enimvero determinata quantitas electricitatis intra datam armaturam seorsim spectatam colligi potest; sed hujusmodi electricitas exigua est, si comparetur cum illa, quam eadem armatura recipit, quando oppositae armaturae contraria electricitate attrahitur, ac retinetur, quae tamen attractio

(16) Vid. PRYEST. II p. 90.

eo minor eſt, quo oppoſita armatura contrario modo electrica magis remota eſt, craſſiorique coërcente corpore ab eadem ſeparatur. Jam vero quando lamella aërea oneratur, oppoſitae armaturae ad ingentem, ut vidimus, diſtantiam collocari debent, ne oppoſitae electricitates per ipſum aërem ſponte permiſceantur. Hinc modica eſt contrariarum electricitatum in ſe invicem actio, perinde ac in craſſiori vitro contingit; propterea, ut electricitates in armaturas tanta quantitate congeri poſſint, quae mediocri ictui ſufficiat, neceſſe eſt amplitudinem earum augere, unde electricitas, quam ſingulae per ſe recipere poſſunt, major evadit, & ſenſibilem acquirit proportionem ad eam, quae ex electricitatis contrariae in oppoſita armatura reſidentis actione allicitur.

Hinc mirum non eſt priori electricitate (quam per ſe, & ſeorſim ſpectatae ſingulae armaturae recipere, & emittere poſſunt) ex una armatura per attactum ſublata, ſenſibilem inter electricitates oppoſitas differentiam naſci, & ex alterno hujuſmodi contactu cito omnem electricitatem exſtingui. Hinc etiam intelligitur, cur homo, ut advertit AEpinus, qui hujuſmodi aëream laminam inſulatus deonerat, electricus reperiatur eadem electricitate, quam ſuperior armatura poſſidebat, in quam adveniens electricitas congeſta eſt.

Porro quaeſitum eſt, num ſuccutiens electricitas in armaturis reſideret, an in coërcente corpore, quod armaturis interjicitur. Argumenta alibi adduxi, ex quibus confici videtur revera in armaturis poſitam eſſe. (17) His alia addidit Priestleyus, quae eamdem opinionem confirmant. (18) Quum vero maximum argumentum, quo

(17) L. C. Tom. III §. 75 & ſeq.
(18) L. C. III a p. 434 ad 440.

contraria opinio fulcitur, ex FRANKLINIANO experimento desumatur de vitro onerato, cujus armaturae si certa lege auferantur, mutenturque, succussio nihilo minor habetur. Hinc peropportunum fore existimavi ad hanc quaestionem dirimendam, si e converso iisdem manentibus armaturis, mutataque interjecta iisdem coërcente lamina, succussio haberi posset; quumque id in lamella aërea commodissime fieri posse praeviderem, in eum maxime finem elegans AEPINI experimentum, ut superius exposui, iterandum suscepi.

Itaque aëream laminam, ut prius, inter oppositas armaturas oneravi; dein omnem apparatum ex uno in aliud cubiculum transtuli: qua translatione, & motu omnis aër armaturis interjectus mutari debuit; & tamen nihil inde succutiendi vim debilitatam esse observavi. Unde videtur confirmari succutientes electricitates, in armaturis praesertim, positas esse.

Equidem in animo habebam oleum phiala tenui, lataque includere, cujus oppositae planae, ac latae facies deferentes essent, reliquae partes coërcentes, oleum sic inclusum onerare, postea vas leniter agitare exploraturus, num sic electrica succutiendi vis deleretur. Verumtamen quum oleum fluidum, ac divisibile, perinde ac aër, sit, propterea & ingens crassities, & maxima amplitudo in olei lamella similiter ac in aërea requireretur, ut sensibile onus reciperet: hinc nonnisi vasis peramplis ad hoc ipsum paratis tale experimentum perfici posset (19).

Taurini die 13 *julii* 1773.

(19) PRYESTLEYUS absque successu olei laminam onerare tentavit l. c. III p. 245.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

DE RESPIRATIONE.

Quum olim caussam investigarem cur flamma in interclusso aëre deficiat, & intereat rei affinitate adductus sum, ut caussam quoque inquirerem, cur animalia ab interclusso aëre similiter enecentur. Quo factum est, ut in varias quaestiones incurrerem ad respirationem pertinentes, & varia etiam ad eas solvendas inirem experimenta, quae omnia eo ordine exposui, quo se mihi primum obtulerunt. Quum eadem recolerem, ac retractarem, existimavi equidem, si in meliorem ordinem digererem, & cum aliorum Cl. Virorum experimentis conjungerem, & compararem, magnum inde praesidium erui posse ad multas & difficillimas, de hac re quaestiones elucidandas. His itaque mihi incumbendum constitui, neque verebar, ne cuipiam fortasse viderer in argumento parum anatomico, atque adeo a munere meo alieno versari, de respiratione agens, quum non modo nemo illorum, qui universum anatomes ambitum complexi sunt, principem hanc actionem humani corporis praeterire potuerit, sed & maximi hujus aetatis anatomici WINSLOVIUS, FERRENIUS, HALLERUS *ipsam* *ex proposito, & peculiaribus quidem opusculis persequuti sint; quum* FANTONUS *cathedrae nostrae anatomicae ornamentum & decus non solum in dissertationibus anatomicis eleganter, & ingeniose, ut cetera, id pertractaverit, sed peculiarem etiam librum pollicitus sit, in quo multa ex iis problematibus, quae nunc ego adgredior, sibi solvenda proposuerat.* (*) *Si vir eximius pro ea, qua excellebat, ingenii acie, & ubertate doctrinae, quod promiserat perfecisset, perexiguus sane meis disquisitionibus locus relictus esset, quemadmodum ex iis, quae in dissertationibus anatomicis interspersit, quae quidem mihi saepe erunt laudanda, conjectare licet. Hi vero qualescumque conatus nisi praestabunt, ut lucubrationes tanti viri minus desideremus, at saltem meam in perutili studio diligentiam significabunt. Meliora fortasse, certioraque fuissem allaturus, si varia, quae in hanc rem mihi tentanda proposueram, experimenta exsequi potuissem, sed aliis aliisque curis distractus usque adeo distuli, dum Regia Societas quintum hoc volumen prope editura esset. Quare occasionem captare constitui meditationes has, quoad fieri potuit emendatas, evulgandi, accuratiora imposterum, & ex propriis experimentis, & ex doctorum virorum animadversionibus allaturus.*

(*) Anatomia corporis humani p. 351.

CAP. I.

De Problemate HARVEJANO, *& de caussa inchoandae respirationis.*

I Olim problema doctis viris HARVEUS proposuit, qui „ fiat, ut foetus in lucem editus, & membranis inte- „ gris opertus, & etiamnum in aqua sua manens aliquot „ horas citra suffocationis periculum superstes sit, idem ta- „ men secundinis exutus, si semel aërem intra pulmonem „ attraxerit, postea ne momentum quidem temporis absque „ ea durare possit, sed confestim moriatur; similiter, quum „ in sectione caesarea foetus horis compluscululis post matris „ obitum eximitur, vitalis tamen reperitur, simulac vero „ eo semel gavisus fuerit, etiam in easdem secundinas re- „ positus, illico ob hujus carentiam suffocetur. (*a*)

II Ex eo tempore plerique anatomici ejus problematis solutionem adgressi sunt. Et quidem alii infantes a matre divulsos respiratione carere non posse docuerunt, quod ejus sanguinem aëre imbutum non amplius accipiant, sicque respiratione egeant, qua sanguini necessariam aëris quantitatem haurire possint. (*b*) Censuerunt alii inductam spirandi necessitatem mutationi in pulmonibus factae tribuendam esse, qui prius densi, aqua graviores, ex respiratione se-

(*a*) *Certum est per nostra, & per magnorum dudum virorum experimenta foetus nuper ex utero matris excisos, inque amnio relictos mediis in aquis vivere, neque perire, nisi eo tempore, quo alioquin credibile fuerit tenerum animal aliunde periturum, post aliquot nempe horas, aut altero demum die* Cl. HALLER el. phys. III p. 314. *Veritas facti ab Harveo propositi confirmatur sectionibus caesareis, & memorabili exemplo Vanderwiel de milite, qui uterum cum foetu e gravida exclusum ad tribunum detulit, ubi solutis membranis vivus puer lucem vidit.* BERGERUS de nat. hum. lib. II cap. 3 p. 499.

(*b*) BORELLUS de mot. anim. prop. cxviij.

mel inchoata variores levioresque evadant; ea nempe ex mutatione fieri, ut jam sanguinem copiosius admittant, qui per ipsos trajici absque respiratione non possit. Propterea ex ejus sanguinis congestione animalia suffocari, quum primum spirandi facultas iisdem adimitur. (c) Sunt qui obliquitatem ovalis foraminis ductusque arteriosi in suffocationis caussam adduxerunt, (d) aut a respiratione dilatata pulmonalium arteriarum orificia. (e) Sunt qui eam suffocationem tribuerunt occlusioni ovalis foraminis, ductusque arteriosi, propter quam, praetermisso pulmone, sanguis circulum obire amplius non possit. (f) Sunt demum qui velint foetum in utero ab aëris pressione non affici, nec eidem sustinendae vires ejus sufficere, nisi respirando elasticum aërem hauriat, qui exteriori aëri contranitatur: hinc, nisi respiret, ab externa pressione suffocari. (g)

III Ad primum quod spectat non video, cur foetus a matre sejunctus, & intra amnion relictus respiratione carere possit; posteaquam aperto amnio semel respiravit, amplius non possit. Neque enim credibile est membranas a matre separatas sanguinem aëre imbutum foetui suppeditare: similiter foetus caesarei, qui vivi educuntur, humores novo aëre imbutos a matre jam mortua, atque adeo non respirante excipere non potuerunt. Addit BERNOULLIUS, si ex hac caussa morerentur, quibus spirandi facultas adimitur, tardius saltem esse interituros. (h) Demum PITCARNIUS observat, catulum, obstructo ore, & sublata re-

(c) TRUSTON de respir. usu diatriba a p. 104 ad 107.
(d) Idem l. c. p. 107, 108.
(e) Vide apud HALLERUM l c. p. 315, 316.
(f) DIONIS Anatom. de l'hom. p. 445: Qui homines quosdam strangulationis vim elusisse putat, quod vias foetus adhuc apertas sanguis repetere potuerit. Eadem est opinio BERNOULLI in disputatione, quae exstat in collect. HALLERIANA p. 638.
(g) BERGERUS l. c. p. 499.
(h) L. c. p. 625, 626.

spira-

ſpiratione, haud minus perire, licet per tranſfuſionem ſanguinem interim commutet cum alterius animalis libere ſpirantis ſanguine, ſicque ſanguinem accipiat aëre divitem (*i*).

IV. Ad alterum reſpondet Celeber. HALLERUS haud ita ſubito, nec ex paucis reſpirationibus recens nati pulmonem mutari; quin imo etiam poſt pluſculas reſpirationes avium pulmonem ne quidem natare. (*k*) Quoniam vero mora in variori aëre paullatim pulmones iterum denſiores evadunt (*l*), haud impoſſibile eſſet, aëre paullatim ad majorem raritatem perducto, ac interim per partes renovato (*m*), priſtinam pulmoni denſitatem reſtituere, atque adeo animalia a ſpirandi neceſſitate liberare, ſi ab ea ſola cauſſa haec neceſſitas penderet.

Obliquitas ductus arterioſi, & ovalis foraminis, obſervante DAOUSTENE (*n*), a reſpiratione non mutatur, augeturve, nec propterea in cauſſam afferri poteſt, cur ſemel coepta reſpiratio ejuſdem perennandae neceſſitatem inducat.

V. Dilatatio arteriarum pulmonalium augebit quidem ſpirandi neceſſitatem, ſeu eamdem urgentiorem efficiet; ſed quum ea mutatio a paucis reſpirationibus exſpectanda non ſit, idcirco primae illius neceſſitatis, quae poſt paucas reſpirationes naſcitur, cauſſa eſſe nequit.

Nec etiam phoenomeni explicatio peti poteſt a clauſo foramine ovali, ductuque arterioſo, quae nonniſi progreſſu temporis, diuturniorique reſpiratione demum clauduntur (*o*).

(*i*) De cauſſis diverſ. molis §. 19. Id etiam experimentum a DUVERNEYO refertur. Oeuvres anatom. II p. 82.

(*k*) L. c. p. 314.

(*l*) GUIDEUS tranſ. philoſ. n. 122 MUSSCHEMB. in Florent. p. 51, 52 not. 2.

(*m*) Vid. Miſc. Taur. II p. 186.

(*n*) In diſput., quae exſtat in collect. HALLER. p. 689.

(*o*) BERGERUS de natur. hum. p. 498. *Quando nunc reſpiravit animal, non quidem continuo aut ductus arterioſus cl·aditur, aut foramen ovale* HALLER. l. c p. 315. Confer. eumdem op. min. I. p. 440.

Postremo ex pressione aëris, ac necessitate elastici fluidi in sanguine respirandi necessitas deducenda non est, quum & in utero ac membranis comprehensus foetus mediatam quidem, sed minime dubiam aëris pressionem patiatur, & foetus humores jam elastico aëre referti sint, ut alibi constabit (*p*).

VI At vero longe probabilior HARVEJANI problematis solutio se offert ex obstetricantium constanti observatione petita, qui tradunt, in partu foetum interfici, quoties funiculus umbilicalis ante caput ita propendet, ut inter ipsum, & uteri ostium comprimatur prius, quam infans, exerto capite, & auram captare, & respirare potuerit (*q*), ea nimirum ex observatione colligitur ex intercepto placentam inter & foetum vel in ipso utero commercio, infantem interfici, si interim respirare non possit. Hinc BOHNIUS existimat foetus, quos vulgo mulierculae ex funiculo circa collum circumvoluto inter pariendum strangulari sibi persuadent, non quidem ex strangulatione suffocari, sed potius ex nimia circumducti funiculi tensione, aut pressione, ex qua cum placenta commercium intercipiatur: siquidem respiratione hactenus impune caruerint, & etiam nunc carere possint, commercio cum placenta, quamdiu respirandi facultas non datur, sine vitae dispendio non possint (*r*).

VII Equidem nonnulli opinati sunt, sublato cum placenta commercio, respirationem tantopere necessariam evadere ex eo, quod foetus, qui sanguinem matris aëre refer-

(*p*) Vid. infra cap. III.

(*q*) ROEDERER art. obst. p. 99, 198, 296, 306, 307. Funiculus etiam a pectore aut pelvi contra uteri ostium compressus, intercepto sanguinis circulo, foetum interficit (ib. p. 112). Eadem observatio a MERYO proposita fuerat. (Mem. de l'Acad. T. X), & a MAURICEAUX (Malad. des fem. cap. xxxvi) MONRO (essais d'edimb. II p. 196) HEBENSREIT (puthol. funic. umbil. §. 10.)

(*r*) Infantic. p. 358.

tum excipere nequit, nisi respirando aërem hauriat, quo ipsius humores imbui possint, ex penuria aëris in eisdem humoribus moriatur (*s*). At eam alii opinionem gravissimis difficultatibus premi superius observavimus. Quare longe verosimilior hujus phoenomeni explicatio videtur, quam tradidit DAOUSTENC ex mechanica necessitate deductum, scilicet ligatis arteriis umbilicalibus majorem resistentiam opponi sanguini in inferiorem aortam influenti, qui prius libere in placentam effundebatur: hinc sanguinem in aorta inferiori congestum resistere sanguini per ductum arteriosum advenienti, qui propterea majori nisu in pulmonales ramos irruat. Similiter ligatam venam umbilicalem efficere, ut copia, & impetus sanguinis in dextram auriculam advenientis minor sit, qui propterea facilius coërceri possit ab aucta jam copia sanguinis per pulmonales venas in sinistram auriculam influentis; ex utraque vero caussa impetum & copiam sanguinis ad pulmonem tantopere augeri, ut absque respiratione transmitti non possit: hinc ex sanguine in pulmonibus cohibito, ac congesto infantem suffocari, nisi per respirationem explicato pulmone ipsius trajectus adjuvetur liberiorque reddatur (*t*).

VIII Sic etiam ob ligatas arterias umbilicales oppletioni pulmonum, & capitis, recens natos infantes obnoxios esse olim COWPERUS adnotavit (*u*), & ex eadem porro caussa *sanguis inferioris aortae arterias pelvis pedumque di-*

(*s*) MERY l. c. MAURICEAUX l. c.

(*t*) In disp. quae habetur in collect. HALLER p. 688. *Interituros, qui ante pulmonum expansionem etiam nativitati proximi oppressa vel strangulata vasa umbilicalia habent, quum ex altera parte, qua venam, intercepto ejus flumine, ventriculi cordis anterioris vacuitas, ex altera autem parte, qua arterias, oppressis earum canalibus, plenitudo ventriculi cordis posterioris, ac depletio ejus impedita, hinc subitanea mors necessario consequatur.* HEBENSTREIT l. c. § 9.

(*u*) In append. ad anatom. hum. corp. n. 59.

latat (*x*), *unde inferiores artus insigniter augentur* (*y*). Ex venae autem umbilicalis ligatura icterum recens natorum proficisci suspicatur Cl. MORGAGNUS (*z*). An vero ex eadem etiam caussa lac in mammis recens natorum, ex aucto scilicet sanguinis impetu in mammarias arterias?

IX Quemadmodum vero ligato funiculo augetur impetus sanguinis ad pulmones, sic vicissim per respitationem liberiori parata via sanguini in pulmonem advenienti, ejus impetus a funiculo avertitur. Hinc est, ut funiculi ligaturam licet tutiorem, minimeque omittendam, haud tamen necessariam esse Cl. viri contenderent (*a*), quod nempe sanguis multo minori impetu ad ipsum pellatur, postquam per respirationem explicato pulmone, in hunc copiosius liberiusque detorquetur.

X Ex quibus jam solvitur problema HARVEJANUM, cur nempe infans, ubi semel respirando aërem hauserit, eodem deinceps carere non possit, (I) scilicet per respirationem sanguis a funiculo avertitur (IX); defectu vero sanguinis, & aëris contactu tum funiculus, tum placenta refrigerantur: & immeabilia fiunt (*b*). Hinc nec sanguis

(*x*) HALLER pr. lin. §. 913, 948.
(*y*) Ib. §. 952.
(*z*) De caus., & sedib. ep. xlviij §. 60.
(*a*) Primus hanc observationem proposuit Cl. FANTONUS, (anat. corp. hum. p. 261), quae multo magis in brutis obtinet, quam in homine. Confer Cel. HALLERUM cl. phys. viij p. 1 p. 441, & seq.
(*b*) Pulcherrimae sunt, & ad rem nostram apprime faciunt ROEDERERI observationes, quibus constat, extracto foetu, nec compresso funiculo, calorem primum, dein pulsum in hoc exstingui, in locis primum ab umbilico magis dissitis, inde pedetentim in propioribus; idque intra pauca minuta contingere, si placenta educta, & frigido aëri exposita sit, paullo tardius, si foetus, funiculus, & placenta intra tepidum demergantur, vel si placenta ad uterum adhuc adhaereat. Ex quibus concludit *proculdubio pulsus in fune, quum natus est infans, cessat propter novam partim circulationis in infante a respiratione rationem, partim propter externi aëris, a quo funis afficitur, contactum*. Vid. Auct. icon. uter. hum. tab. vj p. 27, 28. *Canalibus umbilicalibus refrigeratis, sanguis, quem continent, omnem mox vitalitatem deponi- congelascit* BOHNIUS l.

funiculi viam, quam ob inchoatam respirationem deseruit, repetere poterit, nec propterea infans respiratione deinceps carere (VII).

XI Hinc est, ut per respirationem recens natus novam alacritatem acquirat (*c*): sic enim sanguini aegrius, ac tardius per resistentem funiculi, ac placentae viam circumeunti nova ac liberior paratur, unde expeditior per universum corpus ipsius circuitus evadit. Hinc etiam ratio eruitur, cur debilis infans, quamdiu non respiravit citius reficiatur, si funiculus non fuerit deligatus, & cur cauti obstetricantes non prius vinciant, quum coeperit respirare (*d*), ne videlicet per ligaturam nova sanguini debiliter moto resistentia opponatur, ex qua debilis circuli vires ita opprimantur, ut metuendum sit, ne penitus fatiscant (VII).

XII Quum, intercepto per funiculum circuitu, foetus necessario pereat, nisi respiret (VI); hinc perperam nonnulli ex nodis in funiculis foetuum quorumdam repertis eos nonnisi per os nutriri potuisse concludunt (*e*). Etsi enim per os nutriri aliis argumentis satis fuerit evictum (*f*); ex ea tamen observatione sententia haec nequit confirmari: nam si nodi ejusmodi fuissent, ut sanguinis trajectum per funiculum impedirent, non solum nutrimentum sustulissent, sed & suppresso sanguinis circuitu (VII) foetum enecassent (*g*).

(*c*) Solus inter catulos caesareos robur demonstravit, qui respiraverat (HALLER el. phys. III p. 318) nova alacritas animalis post capturn aërem (ib. viij p. II p. 162) si ovum serpentis frangatur, quum exclusioni proximus est, serpens apparet in spiram contortus, & immotus, sed postquum bis terve ore hiaverit, aëremque hauserit, vividos motus habet. Aër repente machinam in motum ciet. DUVERNEY l. c. p. 573.

(*d*) ROEDERER el. art. obst. p. 167, HEBENSTREIT l. c. §. 10.

(*e*) Petit Mém. de l'Acad. an. 1718 HEISTER comp. anat. p. 316.

(*f*) Vid. HALLERUM phys. el. viij p. I p. 201 & seq.

(*g*) Haec observatio MONROI est. Essais d'EDIMBOURG II p. 196.

XIII Ex propofito igitur phoenomeno (VI , VII) conſtat, *magnam partem ſanguinis in foetu rectius ad umbilicales arterias duci , & a pulmone onus averti* (*h*), ac propterea placentam tamquam diverticulum ſanguinis conſiderari poſſe, dum pulmo ex aëris defectu nequeat dilatari (*i*). Etſi enim in oviparis deſit , hinc diverſa in ipſis oeconomia admittenda videatur (*k*). Attenta tamen obſervatio demonſtrat aliquid analogum ipſis reperiri , quod eidem officio inſerviat. Revera NEHEDAMIUS refert *in ovo etiam tunicas inſigniter craſſeſcere , & ſpeciatim in ovo anſerino albuminis tenuioris tunicam , ſub finem incubationis exiguas quaſdam carneas papulas ſibi interſperſas ubique oſtendere iis fere ſimiles , quae in equa occurrunt* (*l*). Eae igitur tunicae , & vaſa per eas diſtributa in ipſis etiam oviparis detorquere ſanguinem a pulmone poterunt , & vicariam placentae viviparorum operam praeſtare , quod confirmatur elegantiſſimis perſpicaciſſimi HALLERI obſervationibus , qui nempe vidit in pullo incubato tum demum pulmonem , & dextrum ventriculum evolvi , quum membrana umbilicalis , & rami arterioſi per ipſam diſtributi , immutabili ovi longitudine terminati , minus extenſiles evaſerunt , & magis reſiſtunt ſanguini per inferiorem aortam advenienti : ex hac enim reſiſtentia fieri cenſet Vir ſapientiſſimus , ut dextra auricula juxta derivationis leges in dextrum ventriculum facilius ſe exoneret , quam in ſiniſtram auriculam ; propterea & ipſum auriculam dextram & ventriculum dextrum , & pulmonalem arteriam evolvi ac dilatari , majoremque ſanguinis quantitatem ad pulmonem pelli (*m*).

(*h*) HALLER pr. lin. §. 924.
(*i*) NEEDHAM. de formi foetu in Bribl. MANGET 1 p. 558.
(*k*) Id. ib.
(*l*) Idem p. 545.
(*m*) *Formation du cœur* II p. 100, 101, 102.

XIV An non igitur quantitas ſanguinis ad pulmonem appellentis ſenſim aucta, tandem tanta erit, ut non neque libere abſque reſpiratione tranſmitti amplius poſſit? An non quum primum ex hac cauſſa gravari incipiet pulmo, anxietatem aliquam pullus experietur, primoſque reſpirandi ſtimulos percipiet? An non adeo tum demum incipiet reſpirare, quum ab umbilicali membrana repulſus ſanguis, majorique copia ad pulmonem delatus, quam ut commode tranſmitti poſſit anxietatis ſenſum excitare in eodem incipiet?

XV Haec aut his ſimilia in homine etiam & vivaparis locum habere obſervatio ſuadet: nam in his etiam, progrediente geſtatione, placentae ad foetum proportio minuitur (*n*), & magna pars foraminis ovalis obturatur, ut ſolus, tranſverſim ovalis, obliquus aditus liber ſit, qui in maturo foetu $\frac{1}{15}$ venae cavae vix ſuperet (*o*), ex quibus cauſſis ventriculus cordis dexter juxta derivationis leges explicatur (*p*), ſicque quantitas ſanguinis, & impetus in pulmones gradatim augetur. Quapropter non inveroſimile eſt, tum demum foetum ad reſpirandum ſollicitari, quum tanta quantitas ſanguinis ad pulmonem affluit, ut aegrius tardiuſque per ipſum tranſmittatur.

XVI Hinc aliquod robur ad illorum opinionem videtur accedere, qui foetum reſpirandi deſiderio ad exitum excitari docuerunt (*q*). Quoniam enim in utero reſpirare

(*n*) Astruc. *Art. d'accoucher* p. 210.

(*o*) Haller pr. lin. §. 922, aut ad ſummum $\frac{1}{10}$ el. phyſ. viij p. II p. 14.

(*p*) Id. pr. lin. §. 922.

(*q*) Fabricius ab Aquapendente. Vid. Harveum de partu p. 338. Pechlinus cap. xij, Bohnius circ. anat. progym. III Bergerus l. c. lib. II cap. III p. 492, Diemerbroek. anat. lib. 1 cap. XXXV p. 314 Lieutaud el. phyſ. p. 196.

nequit, quum primum majori copia ſanguinis per compreſſos pulmones difficilius traſmittendi gravari incipiet, anxius, inquietuſque evadet, primoſque in paritura pariendi ſtimulos excitabit, quae cauſſa partus a natura petita (XV) videtur confirmari obſervatione infantum, qui mortua jam matre ſponte prodierunt (*r*): neque iis difficultatibus obnoxia eſt, quibus ceterae, quae ſolent proponi (*s*), quamquam non diffitear, cauſſas etiam alias tum in ipſo foetu, tum praeſertim in matre (*t*) ad hanc actionem excitandam concurrere.

XVII Ex quibus jam conſtat, quae nam ſit primae reſpirationis cauſſa. Nempe maturus foetus, qui vel in ipſo utero jam moleſtia aliqua ex copioſius ruente in pulmones ſanguine affici incoeperit (XV), quum primum prodierit, & reſpirandi facultatem adeptus fuerit, ob idipſum reſpirabit, ut liberiori facto ſanguinis per pulmones circuitu, quum moleſtiam avertat, qui porro ſtimulus in neceſſitatem convertetur, quum ex ipſa reſpiratione, aut frigore, aut vinculo, ſublato cum placenta commercio (X), tanta quantitas ſanguinis ad pulmonem urgebitur, ut niſi reſpi-

(*r*) Harveus l. c. p. 345 Haller el. phyſ. viij P. I p. 420.

(*s*) Uti moles pondusve foetus, alimenti defectus. Vide Harveum l. c. p. 346 *Hiſt. naturel* Tom. IV p. 129. & ſeq. Diemerbroekius, qui infantem prodire contendit ex eo quod, ejus calore ſenſim aucto, tandem reſpirationis refrigeria opus habeat, haec addit „ *illum autem* „ *caloris incrementum aeque contingit in parvo foetu, qui ſatis diu in* „ *utero haeſit, quam in magno, atque hinc cujuslibet maturi foetus ſive* „ *magni, ſive parvi eadem eſt cauſſa majoris calcitrationis, & partus.* l. c. p. 314.

Neque vero opponi poteſt foetum aërem deſiderare non poſſe, cujus nullam habeat notionem (de Buffon. l. c. 124.) nam ſufficit eumdem, gravato pulmone, inquietum eſſe, ut matrem motibus ſuis ad patrem ſtimulet, idemque caecus appetitus, natum infantem ad reſpirandum incitabit, qui ad ſurgendum papillam invitat, aliaſque magis compoſitas actiones edendas, quarum nec effectum novit, nec inſtrumenta.

(*t*) Ut menſtruae evacuationis molimina De Buffon l. c.

respirare pergat, eumdem suffocari necesse sit (VII): jure igitur affirmarunt Viri Cl. ob eamdem caussam perennare respirationem, ob quam semel inchoavit (*u*); jure etiam statuerunt caussam hanc talem esse oportere, ut non fortuito, sed constanter, ac necessario animalia ad eam actionem edendam impelleret (*x*).

XVIII An igitur ob dolores, quos in partu, & post ipsum ex novi elementi injuriis infans patitur ad quiritandum, atque adeo ad respirandum impellitur (*y*)? At pullus intra ovum pipit nulla exteriori molestia affectus, & animalia etiam muta aërem captant (*z*), & hujusmodi caussa tumultuariae musculorum contractioni potius, quam ordinato respirationis motui excitando apta esset; unde Cl. FANTONUS existimare se ajebat ob voluptatem potius, quam ob dolorem animal recens natum ad respirandum impelli (*a*). An ob liberatos a pressione nervos diaphragmaticos animal primum respirat (*b*)? At in avibus, quibus nullum diaphragma, respiratio haud minus certum exordium habet (*c*). An ob nisum ad emittendas feces respiratio incipit (*d*)? At eae feces in avibus nullius fere momenti sunt (*e*), easque vel intra uterum deponere potest foetus, & reapse deponit (*f*), ut propterea meconii excretio pro effectu po-

(*u*) FANTON. l. c. p. 351 MARTIN essais d'Edimb. 1 p. 202.
(*x*) *Soli etiam casui quadrupedum, aviumque vitam committere nolim, ut motui alicui temere ex sensu incommodi facto . . . . Oportet autem ejusmodi caussam invenire, quae neque late pateat ac ferarum spiritalia saecla.* HALLER el. phys. III p. 317.
(*y*) BORELLUS prop. CXVII. TRUSTON l. c. p. 115, 116.
(*z*) HALLER l. c p. 316
(*a*) L. c. p. 350, 351.
(*b*) MARTIN l. c. p. 202: alii, quos recenset Cl. HALLERUS l. c. p. 317 n. 6.
(*c*) Uti adnotat HALLERUS loc. ult. cit.
(*d*) TRUSTON l. c. p. 117.
(*e*) HALLER l. c p. 316.
(*f*) *Mihi quidem non raro contigit feces in liquore amnii contentas, in ventriculumque resorptas invenire.* NEEDHAM l. c. p. 553. Similia observavit Cl. HALLERUS l. c. p. 318.

tius quam pro caussa respirationis habenda sit. An aër pondere suo in nuper nati pulmonem descendens ipsum ad respirandum sollicitat (*g*)? An potius irritatis naribus, excitataque sternutatione eumdem respirare cogit (*h*)? At nuper natum animal *non respirat, si langueat*, etiamsi *is languor ponderis necessarium effectum morari non possit* (*i*), saepissimeque non sternutat (*k*), aut certe a sternutatione respiratio exordium non ducit.

An demum motus, quo animal cibum quaerit, is est, quo veluti inscius primum aërem hauriat? At motus quo cibum quaerimus, aut deglutimus, a motu respirationis valde differt (*l*), deinde pullus statim ac exclusus est cibum non quaerit (*m*), nec infans praesertim abortivus (*n*), quum tamen a nativitate statim soleat respirare (*o*). Postremo pullus longo ante exclusionem tempore rostrum aperit, & claudit, quasi cibum quaerens, quum nonnisi postremis diebus & respiret, & pipiat (*p*).

XIX. Caussa igitur respirationis est mutatio sensim nata in placenta, & corde foetus progressu gestationis, multoque magis sublatum cum placenta commercium, ex quo tanta quantitas sanguinis in pulmonem urgetur, ut absque

(*g*) Bernoullius l. c. p. 625 626. Pitcarnius l. c. §. 15.
(*h*) *L'Anatom.* d'Heister II p. 115.
(*i*) Haller l. c. p. 317
(*k*) *OEconom. animal par* M. Sigaud II p. 40.
(*l*) *Deglutiri absque respiratione adeo male negatur, ut cum respiratione deglutiri nequeat.* Haller el. phys. VIII p. I p. 201, 202.
(*m*) Aliquamdiu nutritur vitelli colliquamento. Haller form. du coeur p. 158. *Pulli ovi corticem ea parte percutiunt, qua respiratione opus habent, hoc agentes potius a respiratione, quam a cibi indigentia coacti, quum, statim ac e cortice exclusi sunt, respirent; sine cibo autem biduo, diutiusque consistant.* Fabricius ab Aquapen. l. c.
(*n*) *Massae vegetabili similis continuo somno indulget, vagitum non edit, cibum non appetit.* Roederer. el. art. obst. §. 205.
(*o*) Statim respirat vel ante septimum mensem natus. Pitcarnius l. c. §. 19.
(*p*) Jam hora 190 aperto rostro cibum quaerit (Haller for. du coeur II p. 50) quum nonnisi hora 451 primum pipiat (ib. p. 53.)

respiratione per ipsum nequeat transmitti. (XVII) Propterea canalis arteriosus, aut foramen ovale, utcumque apertum (*q*) neque sanguinem a pulmone avertere poterit, neque animal a spirandi necessitate immunem reddere. Et quidem eae viae superstites necem a strangulatione non praecavent (*r*), *& foramen ovale etiam si amplissimum numquam tamen plenum otium pulmonis faceret, quum venae cavae sanguinem* $\frac{1}{10}$ *fere minuat* (*s*), & eaedem viae in amphibiis quibusdam sic dictis, & in aquaticis quibusdam avibus, etsi perpetuo apertae maneant, suffocationem tamen ab intercepta earumdem respiratione non impediunt (*t*).

XX. Qui autem putarunt ab earum viarum obstructione solummodo spirandi necessitatem afferri, quum viderent in nuper natis eas vias haud ita subito claudi, propterea dubitarunt de veritate phaenomeni ab HARVEO propositi (I), nec ita subito fieri crediderunt, ut infans facultatem amitteret, per quam hactenus aëre carere impune potuerat (*u*); quum tamen, ut diximus, commercium cum placenta ob inchoatam semel respirationem interceptum illi facultati au-

(*q*) Quale illud a Cl. MORGAGNI observatum in infante quindecim dierum, in quo valvulam dicit penitus defuisse (l. c. ep. XLVIII §. 63) & simile LIEUTAUDII (*essai anat.* p. 326) & demum illud Albini in anu decrepita, quod cum corde increverat, & per aetatem augeri perexerat (anat. Acad. lib. I c. IX p. 34.

(*r*) *In nostris, & aliorum experimentis apertum in homine, inque animali id foramen mortem ab aquis minime moratum est, neque necem a strangulatione, aut a suffocatione sequentem avertit* HALLER. el. phys. III p. 252; similia iterum ib. VIII p. II p. 159. Inutilis *foret levis ille hiatus tanto sanguini transmittendo.* BARTHOLIN. anat. p. 410.

(*s*) HALLER l. ul. cit. p. 14.

(*t*) Id. ib. III p. 270, & in BOERH. not. 14 ad §. 691.

(*u*) BOERHAAVE in prael. ad §. 691 instit. ad verbum *mutatur.* Contra DIEMERBROEKIUS ne in amnio quidem contentum equinum pullum vel ad horae semiquadrantem extra uterum vivere affirmat, & erroris HARVEUM redarguit (l. c. lib. I cap. XXXV p. 315). Verosimiliter talis eventus frigori tribuendus, cui secundinae extra uterum fuerunt expositae.

ferendae par ſit (X). Alii putarunt per eas vias utcumque apertas ſanguinem moveri amplius non poſſe ; cur autem moveri non poſſet, cauſſam quaeſiverunt in earum viarum obliquitate (*x*), Alii demum eas vias ſufficere cenſuerunt ſuffocationi praecavendae (*y*); imo impedito earum coalitu per frequentem recens natorum in tepidam ſubmerſionem vera amphibia effici poſſe ſperarunt (*z*); quod tamen & me olim fruſtra in recens natis felibus tentaſſe memini, & fieri non poſſe propoſita ratio (VI VII) pleniſſime evincit.

XXI Equidem eae viae foetui peculiares, ſi apertae maneant, quum oneris partem a pulmone avertant, etſi plenum ipſius oſſium facere nequeunt (XIX); efficient tamen, ut animalia paullo diutius reſpiratione carere poſſint, quam cetera, in quibus eae viae jam fuerint coalitae (*a*); ex quo apparet, cur recens nata animalia, ſi in-

(*x*) *Quaeritur quae ſit cauſſa, cur intercepto infantis in lucem editi ſpiritu, illius ſanguis, etſi per pulmones moveri nequeat, per antiquas tamen illas vias tranſire non conetur: hoc enim ſi fieret, videtur per aliquod ſaltem longius temporis ſpatium non moriturum.* THRUSTON l. c. p. 102. Vide ſupra 2, 3.

(*y*) Auctores ſupra citati §. 2, not. *f* tum MUSCHEMBROEKIUS, qui feles recens natos in vacuo inflari, proſterni, vomere, ſed non mori contendit (In Florent. p. 56, col. Acad.) & alibi. *Feles*, inquit, *etiam octo diebus poſt nativitatem non moriuntur in vacuo, nec alia quibus foramen in corde ovale, tum canalis in pulmonibus arterioſus patet.* Introd. ad Philoſ. nat. §. 2166.

(*z*) *An conſuetudine fieri poſſit, ut ſanguis antiquas ſemitas repetat, mihi nondum compertum eſt, quamvis illud fieri*, ſed rariſſime poſſe urinatores, & animalia quaedam alia non contemnendo prorſus argumento ſint. THRUSTON l. c. p. 110. Fieri poſſe, & inde amphibia parari. BOERHAAWE loco ultimo citato, & Cl. De BUFFON, qui experimentum inſtituit hiſt. natur. IV, p. 176.

(*a*) Nuper nata animalia difficilius ſtrangulari, BOHNIUS infant. p. 355. Quum ligata fuiſſet aſpera arteria, poſt 10 minuta aëre opus habebant (ex BIRCH) HALLERUS el. phyſ. III, p. 316, not. *t*) aut poſt 24 demum horas (ex SENAC. ib. p. 314, n. *i*) quod incredibile videtur, niſi ſyncope, aut alia fortuita cauſſa acceſſerit. Feles recens natae 7 minutis in vacuo pereunt. BOYLE ex p. pneum. tit. IV, & de relat. inter aërem, & flam. vital. animal. exp. VI.

firmissima fuerint, ad horas aliquot respirationem non moliantur (*b*); quum enim necessitas respirationis ex vi, & impetu circumeuntis sanguinis dependeat, atque ob idipsum submersi, syncoptici, convulsi homines ad tempus interdum satis longum respiratione carere possint, quin enecentur (*c*), eo potiori ratione hoc privilegio eos gaudere necesse est, quibus ob nondum obstructas memoratas vias minus urgens necessitas respirationis incumbit. (*d*)

(*b*) *Quando infans languet aliquo neque minimo tempore absque respiratione perdurat.* HALLER el. phys. III, pag. 225, 317.

(*c*) Confer HALLERUM l. c. p. 266. DIEMERBROEK l. c. lib. II cap. XIII.

(*d*) Huc spectare videntur historiae a BOHNIO propositae de recens natis puellis, quae quum sub terram sepultae fuissent, viventes inde protractae fuerunt, etsi earum altera per septem horas delituisset (l. c. p. 355, 356) advertit siquidem ipse BOHNIUS *infirmum aliquando excludi partum, ut omni sensu, motu, ac respiratione per aliquot momenta, seu notabile tempus destitui videatur, inde quasi syncopizantem vitam in apricum poni.* (Ib. p. 352). Et paullo post. *Simile quid his fieri concipiendum, quod in hystericae, & hypochondriacae suffocationis nonnullis speciebus, & animi deliquio contingere observamus in his nimirum affectibus inspirationem aëris evidenter interpolari per notabile tempus sine vitae cum morte commutatione* (p. 354, 355.) Huc spectare quoque videtur similis historia a BOERHAAVIO relata (prael. l. c.), nisi quod in hac relictus funiculus cum secundinis, & cum infante sepultus ad eius vitam servandam conspirare potuerit.

HALLERUS catellum recens natum, qui tamen respiraverat per dimidiam horam in tepida vixisse vidit, (sur la resp. exp. 123) & animalia recens nata diutius vim vacui ferre advertit, (el. phys. III, pag. 314); eademque est observatio DUVERNEY (l. c. II, p. 89) experimenta etiam BUFFON. (vid. supra n. X) ad diuturniorem tantum respirationis suspensionem pertinent, nec aliter videntur interpretanda experimenta MUSCHEMBROEKII superius not. V. memorata.

C A P. II

In quo nam posita sit necessitas, in quo utilitas respirationis.

XXII Aërem respiratum non aliam ob caussam respirationi ineptum evadere ostendi, nisi ob noxios admixtos vapores, qui & animalibus infensi sint, & flammam suffocent, & odore foetido se prodant. Nam eamdem aëris quantitatem multo diutius respirationi inservire per experimenta comperi, si condensetur, quam si in majus spatium fuerit expansa, quod apprime respondet vaporum indoli, qui multo tardius per densiorem aërem expanduntur, eumque propterea tardius ita inquinare possunt, ut respirationi ineptum reddant (*e*).

XXIII Etsi autem vapores, qui respiratum aërem inficiunt, ipsius elasticitatem imminuant; hanc tamen elasticitatis jacturam noxiorum ipsius effectuum caussam haud esse demonstravi, quum & exigua sit, & in condensato, interclusoque aëre animalia moriantur quo tempore interclusi aëris pressio atmosphaerae pondere multo adhuc major exsistit, & in aperto etiam aëre, ubi non elasticitate, sed pondere aëris pulmones distenduntur, vapores exitiales sint (*f*). Addere possumus vapores alios, qui multo magis elasticitatem aëris infringunt, minus tamen esse perniciosos.

XXIV Itaque ex consideratis phaenomenis animalium in intercluso aëre exstinctorum, verosimile censui vi irritante

(*e*) Miscel. tom. II, p. 199, §. 21, 24.
„ Aër non renovatus perpetuo evadit lethalis non ob calorem, vel rare-
„ factionem, densitatemve, sed ob aliam occultam caussam. Boer.
„ inst. §. 203.

(*f*) L. c. §. 44, 49.

eum aërem nocere, propter quam bronchia, forte etiam pulmones convellantur, & ingressuro aëri resistant; eodem nimirum nocere modo, quo BOERHAAVIUS, & SAUAGIUS mephitidis aut accensi sulphuris vapores suffocare existimarunt (*g*).

XXV. Et si vero pulmones sensu, & irritabilitate carere videantur, id de externa tantum ipsorum superficie verum esse probabile est, quum interna vivido sensu instructa sit, pari modo, quo externa cordis, & intestinorum superficies parum sentit, interna exquisitissimo sensu pollet (*h*), & revera sulphuris accensi vapores, aliique, qui suffocationem afferunt, si per inspirationem hauriantur, absque damno in pectoris cavum immittuntur (*i*), quo solo experimento probatur inter sensum externae internaeque pulmonum faciei maximum discrimen intercedere (*k*).

XXVI. Hactenus quidem fibrae verae carneae in ipso pulmone demonstratae non sunt; certum tamen est fibras musculares ab ipsa deorsum cartilagine cricoidea descendentes, & infra divisionem bronchiorum deductas in pulmone evanescere (*l*); motus vero pulmonis in ranis aliisque frigidis animalibus, qui etiam aperto thorace perseverat, absque hujusmodi musculari structura explicari non potest, cujus vi intrusus in pulmonem aër a pulmone ipso possit expelli (*m*).

XXVII. Iis autem muscularibus fibris resolutis pulmonum actionem laedi, aut tolli innuunt experimenta in brutis

(*g*) L. c. §. 48.
(*h*) HALLER. el. phys. I p. 489.
(*i*) LANGRISH expériences sur les bêtes.
(*k*) De sensu internae membranae trachaeae, quae ipsa in pulmonem propagari videtur. Confer HALLERUM el. phys. III, p. 148.
(*l*) HALLER. pr. lin. ed. ul. §. 238 el. phys. III. p. 147.
(*m*) Confer MALPIGH in posth. p. 8, MORGAGNI adverf. anat. V 29. p. 159.

viventibus instituta dum ligato nervo recurrente respiratio laeditur, & rarissima fit, quamquam ab eo nervo nihil ad septum veniat (*n*), & respiratio similiter laeditur ligatis nervis octavi paris (*o*), a quibus maxima ex parte dependet (*p*); eaque propterea laesio fibrarum pulmonalium paralysi videtur ascribenda (*q*): similiter resolutis propter cerebri morbum pulmonum fibris natum asthma tribuunt MORGAGNUS (*r*), & WILLISIUS (*s*).

XXVIII. Contra a spasmodica earum fibrarum contractione id asthma oriri videtur, quod convulsivum dicitur, quodque subito invadit, & dimittit sine phlegmatis excretione, frequentesque habet recursus (*t*), quod confirmatur eorum observatione, qui si retrorsum caput moverent statim anheli fiebant; quod nimirum feri acris colluvies, quae deinceps cerebrum dissecando inventa est, dum caput reclinarent, versus nervorum pulmonalium originem relapsa illos vehementius urgeret (*u*). Ex constrictis etiam convulsisque pulmonum fibris dyspnoeam repetit RYDLEYUS, quae diu hominem vexavit, qui in cellam vinariam, ubi cerevisia fermentabat, imprudenter intraverat, quique sine tussi diu ita mansit anhelosus, ac si omnia, ut aje-

bat,

(*n*) HALLER in BOER. IV p. 61 n. 5, & ibid. p. 100, not. 17.
(*o*) Idem irritab. p. 225 exp. 182, & p. 226 exp. 185.
(*p*) Idem irritab. p. 231 exp. 193, BARTH. anat. p. 423, 425.
(*q*) Nam ii nervi pulmoni prospiciunt, non diaphragmati, ceterisve respirationis musculis. DUVERNEY posth. II, p. 41. Animalia sectis nervis cardiacis pereunt, quia pulmonum nervis, qui eadem vagina includuntur simul detruncatis, eorum inflammatorius tumor invadit. CHIRAC. de mot. cordis specim. analyt. a p. 105 ad 109.
(*r*) De sedibus epist. XV, §. 6, 7.
(*s*) Ex tali caussa WILLISIUS modo convulsiones repetit, modo paralyses, & harum alterutras modo in ipsis pulmonum intimis fibris, modo in diaphragmate statuit, aliisque musculis respirationi inservientibus, MORGAG. l. c. §. 5.
(*t*) De GORTER systema prax. §. 331. HALES statique des animaux exp. XII, §. 17, p. 75.
(*u*) MORGAGNI l. c. §. 4.

bat, intra pectus coarctarentur (*x*): propterea verosimile est pulmonalem etiam vaporem, quo interclusus aër inquinatur, similem bronchiorum convulsionem inducere, & animalia in eo posita ex convulsivo asthmate interire.

XXIX Ex tali autem vi irritante respirati aëris (III) etiam deducitur, cur animalia diu spiritum cohibere non possint: nempe eadem caussa, quae efficit, ut animalia in intercluso aëre intereant, efficit etiam, ut ab aëre per diuturniorem inspirationem retento suffocentur (*y*). Hinc ergo necessitas alterni inspirationis, & exspirationis motus, ut aër vaporibus inquinatus expellatur, & novo aëri per subsequentem inspirationem hauriendo locum cedat (*z*).

XXX Rem mirifice confirmat Hookianum ingeniosissimum experimentum, in quo aperto pectore, perforatisque pulmonibus, duplici folle per trachaeam aër in pulmones jugiter ita immittitur, ut, dum per pulmonis vulnera aër elabitur, novus continue impulsus succedat, sicque, & pulmonem in perpetua distensione servet, & defecturam animalis vitam diutissime sustineat (*a*).

XXXI Equidem fuerunt, qui contenderent, non esse necessarium in eo experimento, ut pulmo perforetur, aut saltem perforati pulmonis nullam mentionem habuerunt (*b*);

(*x*) Observ de asthmate p. 139, 140.

(*y*) Haller el. phys. III, p. 258, 259. Ubi calculo instituto demonstrat, tantum interclusi aëris intra datum tempus vitiari, quantum eo tempore per repetitas inspirationes haustum fuit.

(*z*) Duverney l. c. p. 84.

(*a*) Vid. Boer. praelec. I p. 452, §. 203 ad verbum *reciproce*, & IV p. I p.32 ad verbum Hookii Stewenson essais d'Edimbourg VI p. 472, 473 per integram horam animalis vitam in eo experimento sustentari. Hallerus el. phys. III p. 248 ad duas, & plures. Baglivius, qui simile experimentum instituit de fibra motrice p 294.

(*b*) Perforati pulmonis non meminit Rydleyus (obs. de asth. p. 141) ubi Hookii experimentum repetiit, nec Baglivius, sed is per intervalla aërem immisit, nec pulmones in perpetua distensione servavit (de fibra motrice app. p. 294): nec Muschembroekius; indeque factum videtur, ut observaverit experimentum non succedere, nisi follis per *aliquot reciprocationes moveatur.*

quae tamen omnino eſt neceſſaria, ſi diutius animalis vita per novum aërem admiſſum fuerit ſuſtentanda, ſecus aut per vices pulmonem inflare, aut aërem alterne in pulmonem immittere, alterne ab ipſo haurire, oportebit, nec propterea pulmo conſtanter inflatus ſervabitur, quo tamen inprimis ingenioſiſſimum hoc experimentum videtur ſpectare. Hanc ipſam animadverſionem BOERHAAVIUS propoſuit, quod nempe HOOKIUS, ſi diutius experimentum protrahere vellet, cogeretur fodicare pulmonem, ut, veteri aëre expulſo, novum recentemque in ejus locum impelleret (*c*).

XXXII Quod ſi in eum tantum finem experimentum inſtituatur, ut pulſo ex pulmone ſanguine in cor, ſopitus cordis motus exſuſcitetur in ſtrangulatis ſuffocatiſve animalibus, vehemens per os aëris inſufflatio ſufficiens erit, quum ſemel ſufflaminatus cordis motus ſponte deinceps perennet, & reſpirationis organa integra ſint, ſicque exſuſcitatum motum ſervare queunt (*d*), ſecus ac in HOOKII experimento, in quo aperto pectore reſpiratio haberi amplius non poteſt, cui ut ſuppleatur, & vita ſuſtentetur non tantum diſtendi pulmo debet, ſed renovato aſſidue aëre repleri: unde omnino neceſſarium eſt, ut veteri foedatoque aëri per fodicatum pulmonem effugium concedatur, ex quo novo aëri in ipſum continue immittendo aditus patefiat.

XXXIII Igitur exſpiratio non propterea eſt neceſſaria, quod ſanguis per pulmonem conſtanter inflatum tranſmitti

(*c*) L. c. & DUVERNEYUS II, p. 84, STEWENSON l. c., LOWERUS de corde p. 162, 163.

(*d*) Quo ſenſu interpretatus fuiſſe videtur HOOKII experimentum THRUSTONUS, qui ipſum comparat cum experimento CROON, quo ſuffocatum pullum gallinaceum, immiſſo per trachaeam aëre, ſuſcitavit, & cum alio NEHEDAMII, qui ſtangulatum canem immiſſo per ductum thoracicum flatu revocavit. (DIATRIBA p. 77).

non possit (*e*), ut multi censuerunt, sed ut foedato aëri, ac irritanti novus, blandusque succedat. Hinc quemadmodum in hoc experimento animal, perpetuo inflato pulmone, vivit, ex eo quod aër novus assidue immittatur, sic vicissim in intercluso, nec renovato aëre perit, quamvis inspirationis, & exspirationis motus alternet. Hinc, ceteris paribus, respiratio tardior celeriorve est prout aër densior rariorve, citius, tardiusve pulmonali vapore inquinatur, & in animalibus, qui interclusum, propriisque vaporibus jam inquinatum aërem respirant, celerrima evadit.

XXXIV. Quum vero in pulmone sanguis plurimum evaporet, inde colligi potest ibidem eumdem refrigerari. Equidem in hac quaestione parum adeo consentiunt physiologorum celeberrimi, ut in sententias oppido contrarias abeant. Alii nimirum cum Galeno munus sanguinem refrigerandi pulmoni tribuunt (*f*). Alii contra in pulmone sanguinem calefieri affirmant (*g*); utrique vero ab eadem observatione discedunt: animalia omnia calida duplici cordis ventriculo, & pulmonibus instructa esse, secus vero frigida aut carere pulmonibus, aut tales habere, qui nonnisi partem sanguinis e corde ejecti excipiant, atque transmittant. Hinc qui refrigerari in pulmone sanguinem existimant, iis tantum animalibus pulmonem datum esse constituunt, quorum sanguis ob calorem, quo afficitur, re-

(*e*) Ob caussas varias apud varios auctores BORELLUM (prop. CXIX) SAUAGIUM (effets de l'air p. 44, & seq.) & BOERHAAVE (inst. §. 619). At ex hoc ipso experimento demonstrat HALLERUS, per pulmonem constanter inflatum sanguinem commode transmitti (el. phys. III, p. 255) tum ex argumentis aliis (ib. pag. 257, 258).

(*f*) Refrigerationem pro praecipuo scopo respirationis habuit HAMBERGERUS (HALLER in BOERH. I, p. 433, not. *q*) & alii multi (apud eumdem el. phys. III, a p. 342, ad 344) tum DAOUSTENC (disp. p. 681, § 41) HUXHAM (proleg. de aëre p. IV) NEHEDAM (in biblioth. Manget. I. p. 566).

(*g*) Auctores citandi nota seq.

frigerio egens eſt (*h*). Qui contra calefieri opinantur, ideo animalia calida eſſe docent, quod ſanguis, dum per ipſorum pulmones trajicitur, plurimum calefiat, eaque propterea frigeſcere, quorum ſanguis aut omnino non, aut ex parte tantum pulmonis vires experitur (*i*); hancque opinionem confirmant ex alia neque incerta; in pulmone maximum fieri attritum ſanguinis ad vaſa, ex quo maximus in eodem calor excitetur (*k*).

XXXV Verumtamen attritus in pulmone non quidem major, ſed minor potius, quam in ceteris partibus: neque enim attritus aut copiae tantum, aut velocitati ſanguinis reſpondet (*l*), ſed omnino pendet a reſiſtentia viae, per quam movetur, & ab exceſſu celeritatis majori minorive ſanguinis a tergo urgentis ſupra praecedentem ſanguinem, unde adverſus vaſorum latera poſterioris ſanguinis vis reflectatur. Verum in animalibus, quamdiu reſpirant, via per pulmonem omnino libera eſt, & brevis, & minimae ſunt reſiſtentiae (*m*). Hinc vis ventriculi cordis dextri ſanguinem per pulmonem pellentis multo minor a natura conſtituta eſt, quam ſiniſtri (*n*); ex quo conſici-

(*h*) Boerhaave (in prael. ad §. 200, 7 ad verbum calor. I, p. 437.) (Buffon hiſt. natur. IV. p. 129 &c.)

(*i*) Plerique auctores citati nota *b*.

(*k*) Ex Halesio in ranae pulmone celeritatem ſanguinis 43 majorem eſſe, quam in reliquo corpore, hinc majorem attritum, & majorem calorem gigni (Scwenke (Hematol. p. 15). Attritum, & fluiditatem majorem in pulmone ponit Boerhaave (inſt. §. 200, 7, & 206, 208,) (& in prael. hic): Winslow (de pector. §. 154) Daoustenc (diſp. p. 547) Muschemb. (diſp. p. 612) Keillius (de ſecret. p. 60, 61).

(*l*) *Sauvages ſur l'inflam.* §. 82.

(*m*) Ex eo ipſo, quod obſervante Halesio ſanguinis velocitas in ranae pulmone 43 major ſit, ingenioſe concluſit Cl. Hallerus, minorem ibi reſiſtentiam adeſſe, quum ab eadem unici cordis vi quaquaverſus ſanguis pellatur. In Boerh. I, not. *r.* ad §. CCXV.

(*n*) Winslow de pectore §. 51.

tur exiguum in pulmone attritum haberi (*o*). Huc accedit pulmonem viscus suapte natura molle, cedens, spongiosum esse, & pulmonalem arteriam ceteris molliorem, ac propterea minime aptam calori ex attritu excitando (*p*).

XXXVI. Rursus observat LOWERUS in HOOKII saltem experimento, in quo constanter pulmo inflatus perstat (IX), minimum in ipso attritum haberi, quum interim animal aeque caleat (*q*); & in pullo progressu incubationis calorem ex interna caussa nasci animadvertit STEWENSONUS, licet nulla adhuc sit respiratio (*r*); & demum adnotat Cl. HALLERUS pulmone obstructo, ulceroso, pene deleto, morbosum tamen calorem prodire (*s*).

XXXVII. Contra refrigerari in pulmone sanguinem vel ipse perpetuus frigidi aëris, ac fere immediatus, & quidem per amplam pulmonis superficiem ad sanguinem attactus, suadere videtur, ex quo plurimum caloris in eum aërem diffundi debet, ac dissipari (*t*), & HALESIUS quidem quantum inde caloris sanguini decedat, subductis

(*o*) Ab aëre impetum fieri in pulmonem, aut sanguinem in eodem comminui negat BERNOULLI (disp. p. 621). LOWERUS (de corde p. 163). Attritum in pulmone non esse majorem. HALLER. (el. phys. III a p. 235 ad 238) & parum tribuendum esse aëris pressioni (ib. p. 358. n. *r*, *s*) nec calorem in eodem generari (ib. p. 360).

(*p*) *Contra majorem in pulmone attritum nuper Cl.* GUENET *dissertationem scripsit, in qua & parvitatem visceris, & paucitatem vasorum, & minus spatium percursum, & molliorem pulmonis arteriam considerat.* HALLER in addend. t. VIII el. phys. p. 162.

(*q*) De corde (p. 163) eadem est observatio STEWENSONI (essais d'Edimbourg VI, p. 472, 473, & seq.).

(*r*) Siquidem gallina ova deserere potest per tempus, quod refrigerandis ovis sufficeret, nisi internam caloris caussam haberent (l. c. p. 479)

(*s*) Pr. lin. §. 278, edit. ul. el. phys. II, p. 58, 312, 318.

(*t*) Aliqua pars caloris transit in aërem. HALLER. in BOER. n. *q*. ad § 200, I, p. 433, & prim. lin. § 278, calorem sanguinis ex suppressa respiratione intra semihoram 1 273 augeri.

calculis investigavit (*u*). At non ea tantum ex caussa refrigeratur in pulmone sanguis, quod frigidum aërem contingat, sed ex eo maxime, quod plurimum exhalet; a qua exhalatione vel in ipso vacuo corpora vehementer refrigerari a Cl. CULLENIO nuper est demonstratum (*x*).

XXXVIII Hinc provide natura videtur utramque utilitatem & refrigerii, & exhalationis pulmoni tribuisse: nam quo calor major est, eo plures etiam progigni debent partes per exhalationem eliminandae. Ex quo intelligitur cur respiratio, ceteris paribus, eo celerior sit, quo calor sanguinis major est (*y*), & item eo celerior, quo magis calor aëris ad sanguinis calorem appropinquat (*z*).

XXXIX Inde vero phoenomenon aliud commode explicari posse videtur; quod a DOUGLASSIO est observatum: sani nimirum hominis calorem eumdem propemodum remanere, quicumque fuerit calor ambientis aëris, aut balnei, in quod homo fuerit demersus (*a*), quod sane vi-

(*u*) HAEMASTAT exp XIII a p. 82 ad 88. Calculum hunc parvi facit SENAC. (du coeur II, p. 256): de hoc etiam HALLER. el. phys. III, p. 346.

(*x*) Vid. Miscel. II, p. 143, & seq. Inde caloris deperditio multo major HALESII aestimatione.

(*y*) Quum calescimus, magnas, & frequentes respirationes edimus; contra quum frigore vexamur, lentas, & parvas: ergo respiratio non ad calefaciendum sanguinem, sed ad eumdem refrigerandum data est. STEWENSON (essais d'Edimbourg VI, p. 479) In ardentibus febribus cum rubore faciei, respiratione frequenti, pulsu pleno, & frequenti, aperta fenestra, frigidiorique aëre respirato, rubor minuebatur, pulsus minus plenus, respiratio minus frequens evadebat, etsi stragula eadem perstarent, (id. ib.). Similia apud NEHEDAM, (in biblioth. Mang. I, p. 566).

(*z*) Si aër frigidus, respiratio sensibilis, ac fere suspensa, contra si ambiens calidus, respiratio fortior erit, ac frequentior. POISSONERIUS (traité des fiévres de s. DOMINGUE p. 25, SIGAUD. II, p. 61, 62. Similia STEWENSON essais d'Edimb. VI, p. 320, DIEMERBROEK lib. II, c. 23, p. 416.

(*a*) Essai sur la genération de la chaleur dans les animaux, qui liber ex Anglico conversus, & adjectus versioni. Differt. MARTINI p. 253, & seq. Eius observatio nuper confirmata est a BRAUNIO. Nova commen. Acad. Petrop. tom. XIII, p. 420, 423.

detur repugnare notissimis calefactionis, ac refrigerationis legibus. Nam quum intrinseca caussa in homine, aliisque animalibus assidue calorem gignat, eo plus caloris in ipso accumulari oporteret, quo minus is calor per vicina corpora dissipatur; quum vero eo minus dissipari debeat, quo ambientium calor major est, & animalis calori proximior, major propterea etiam esse deberet caloris ex interna caussa nati retentique accumulatio.

XL. Douglassius quidem eam animalis caloris constantiam tribuit mutationi, quam ex calore subeunt vasa capillaria, quae inde dilatata laxataque minori cum attritu sanguinem transmittant, unde minor calor producatur (*b*), sed multo simplicior ex respiratione ejus phoenomeni explicatio deducitur, quum, quo calidior sanguis est, eo citatior fiat respiratio, hinc & plus sanguinis per pulmonem trajici debeat, & eodem tempore plus frigidi aëris in pulmones attrahatur citius expellendus, & plures exhalationes ex sanguine erumpant (*c*), quibus eo magis refrigeretur (IX), ut sic eadem necessitas mechanica, quae magis citato sanguinis motu citatiorem respirationis motum efficit, ut is sanguis ea majori celeritate per pulmonem transmitti possit, efficiat etiam secundario, ut idem sanguis plus caloris disperdat, sicque aequabilem fere sanguinis calorem servet. Similis in hoc sanguis mihi esse videtur ebullienti aquae, quae quocumque addito calore, ulterius calefieri nequit, dummodo evaporare possit: nam prout major calor additur aucta proportionaliter exhalatio parem ejus quantitatem dissipat: sic pro ut sanguinis calor auge-

(*b*) L. c. p. 272, & seq.
(*c*) Minime dubium videtur aërem per respirationem renovatum evaporationem sanguinis promovere, non secus ac renovatus per ventum majorem efficit evaporationem liquorum, qui eidem exponuntur, & in Hookii quidem experimento respirationis vices gerit artificialis ventus per pulmonem trajectus, vaporemque pulmonalem abripiens.

tur, & calor ipſe, & citatior reſpiratio (XVII) copioſiorem exhalationem producet; quare proportionaliter major fieri debet caloris deperditio, & propemodum uniformis ſanguinis calor ſervari (XVII).

XLI Illud vero propoſitam ſententiam refellere videtur, quod ſanguis venoſus arterioſo calidior per certa experimenta non fuerit demonſtratus, quod tamen eſſet neceſſarium, ut conſtaret, arterioſum ſanguinem a pulmone refluum concepti caloris partem in eo viſcere depoſuiſſe (*d*). At, ſi quod diſcrimen caloris inter arterioſum venoſumque ſanguinem eſt, illud eſt, quod ex uno tantum ſanguinis per pulmonem trajectu proficiſcitur, quum ad ſingulas circuitiones ſanguis per pulmonem agatur. Jam vero tempus, quod in unoquovis per pulmonem trajectu ſanguis inſumit, exiguum eſt (*e*), exiguamque afferre poteſt caloris jacturam (XVI). Nihil mirum igitur adeo parum inter ſe conſentire experimenta, quibus viri Clariſſimi eamdem inveſtigarunt (*f*). Perſpicuum nimirum eſt quodcumque aut in celeritate ſanguinis, dum educeretur, aut in materie, figura, calore vaſorum, quibus excipiebatur, aut in promtitudine thermometrorum, quae adhibebantur (*g*), diſcri-

(*d*) Haller in Boerh. not. *q* ad §. 200 inſtit. I, p. 433, & in prim. lin. §. 282, & el. phyſ. III, p. 346.

(*e*) Ex calculo Cl. Halleri quaelibet unda ſanguinis 12 pulſuum intervallum in pulmone trajiciendo abſolvit. In Boer. not. *g* ad §. 208, I, p. 457.

(*f*) Sanguinem venae jugularis calidiorem invenit Stevensonus ſanguine carotidis, ſed differentia nimia fuit, ut in eo experimento ſe errorem admiſiſſe auctor dubitet. Eſſais d'Edimb. VI, p. 454. Calidiorem etiam invenit David. in diſp. quae praemium Acad. de Rouen obtinuit, p. 98, frigidiorem contra duobus tribuſve gradibus invenit Schwencke hemtol. p. 30, 31, & Arbuthnot de aëre p. 60. Quum Cl. Sigaud experimentum bis coram idoneis teſtibus coepiſſet ſe nullum diſcrimen inveniſſe affirmavit. Oeconom. animal. I, p. 313.

(*g*) Notum eſt quam tarde thermometra in primis paullo majora ultimos caloris gradus excipiant, quum jam calorem ambientis medii calori proximum acquiſiverunt.

discrimen experimento turbando suffecisse, & alium aliumque exitum producendo (*h*). Etsi vero paucos tantum caloris gradus singulis per pulmonem circuitionibus sanguis amittat, quum tamen pluries in hora universa sanguinis massa eam viam relegat, id vel satis esse poterit ejus fervori temperando, eidemque intra certos limites continendo (XIX): sic intra certos limites contineretur calor penduli ex calidiori medio in frigidius oscillantis, etsi discrimen ex quovis itu vel reditu productum parum sensile esset. Profecto videretur natura temere pulmonem calidis praesertim animalibus concessisse (XIII), si ad calorem moderandum nihil pulmo conferret.

XLII Illud etiam propositae opinioni adversari videtur (*i*), quod animalia vivere possint in aëre ipsorum sanguine calidiori (*k*). Ut animalia in eum aërem translata aequalem primum ipsi calorem concipiant necesse est, quemadmodum cetera inanimata corpora in eum immersa, mox ex continuata actione caussae nativum in ipsis calorem producentis novo calore cumulabuntur, quo ambientis calorem superabunt; quum vero ambientis calor jam consueto major, & animalibus incommodus sit, si interim novam hanc caloris accessionem, quam ex interna caussa assidue accipiunt, disperdere per respirationem non possint (*l*),

(*h*) In pulmone sanguinis calorem servari Boerh. inst. §. 200, 7, nec calefieri, nec refrigerari Bernoulli disp. p. 642: eademque est opinio Cl. Poissonerii, & Sigaud. (oeconom. animal. II, p. 59, 60.

(*i*) Bergerus de natura humana, p. 54.

(*k*) Calor ordinarius in tepidariis Russicis est $106\frac{1}{2}$ Farenheith., maximus 116 (Braun. l. c. p. 431) Cl. Righmannus tamen calorem 125 ferre potuit (ib.) quod sane mirum, quum canes ex calore 115 perierint (ib. p. 432).

(*l*) Demonstratum a Cullenio est, evaporationem, qualis per pulmonem fit, non solum aptam esse citius refrigerandis corporibus, verum etiam per ipsam ad calorem minorem, quam sit ambientis calor evaporantia corpora perduci posse.

consequens est, ut ex nimio congesto calore in vitae discrimen adducatur (*m*). Si igitur respiratio utilis semper est ad aequabilem sanguinis calorem servandum (XIX), hic maxime videtur necessaria ad praecavendum, ne calor jam maximus, & funesto proximus adaugeatur, necemque animalibus inferat. Hinc in eo calore animalia vehementius frequentiusque respirant, ut eo efficacius imminens periculum avertant (XVII).

XLIII. Ex hactenus dictis jam licet definire, in quo necessitas respirationis, in quo ipsius utilitas sit collocanda (*n*). Nempe necessitas respirationis in eo ponenda est; quod in exspiratione quidem compressus pulmo sanguinem non transmittat, in diuturna autem inspiratione aër non renovatus, vaporibusque onustus, convulsionem in pulmone excitet, unde similiter transmittendo sanguini ineptus evadat (III). Neque multum ab hac necessitate utilitas respirationis videtur distare, neque alium finem natura in condendo pulmone sibi proposuisse, nisi ut irritantem molestumque vaporem, qui ad exspirationem nos cogit, expelleret, & conveniens inde sanguini refrigerium afferret (XIII, & seq.)

XLIV. Et utrique quidem utilitati consuluisse videtur in construendo calidorum animalium pulmone: in his enim quum ob majorem attritum, caloremque exhalatio major requireretur & refrigerium; idcirco omnem sanguinem per pulmonem trajici voluit. In frigidis vero animalibus ob idipsum partem tantum sanguinis ad pulmonem videtur

(*m*) Ex seri coagulatione, sanguinis corruptione &c.

(*n*) „ Sed a necessitate respirationis differt ipsius utilitas: illam natura vitasset pulmone, aut nullo facto, aut tali, qualis in foetu est. HALLER pr. lin. §. 276. Compendiosa natura unicum cordis sinum effecisset, quum ad generalem circulationem nil conferat proelum pulmonicum. FANTON. edit 2, p, 341. Similia BORELLUS part. II, prop. 3, p. 240, BERNOULLI disp. §. 4, p. 631.

distribuisse; quod altera respirationis utilitas, nempe refrigerium, in ipsis locum non haberet; altera autem, seu exhalatio minus urgeret, quam in calidis, neque adeo constans, aut copiosa requireretur.

XLV Et tamen in his ipsis animalibus exhalationi naturam prospexisse constat, eumque imprimis usum eorum pulmoni tribuisse (o). Et revera ranas sub aquis ligatas interire observavi, & sive sub aquis, sive in intercluso corruptoque aëre respirare, & magno labore aquam, vel corruptum aërem haurire, & licet primum in intercluso aëre, ipso adhuc integro, nonnisi per intervalla ad superficiem aquae ascendant respirandi caussa, sub finem, aëre jam foedato, magno nisu constanter ad aquae superficiem se sustinere, ut ibi frequenti, ac laboriosae respirationi incumbant, iisdem nimirum symptomatibus affici, quibus calida animalia in similibus adjunctis vexantur, ac tandem interire; durationem vero vitae earumdem interclusi aëris quantitati respondere (p).

XLVI Jam vero quum in his animalibus, etiam intercepta per pulmonem via sanguinis circulus perseverare queat, evidens est talem anxietatem, & respirandi conatum, & laboriosam respirationem in intercluso aëre, ac natam inde suffocationem non aliunde nisi ex sublata respirationis utilitate esse repetendam, adeoque suppressos vapores ab aëre jam ipsis saturato (q) eos esse, qui pulmonem vellicent (r), eamque respirandi necessitatem indu-

(o) Opinionem Entii, qui putatitios ranae pulmones esse contendebat, refutat THRUSTON Diatriba p. 142, MALPIGHIUS l. c. p. 10.

(p) Miscel. Taurin. II, §. 11.

(q) Respiratum aërem exitialem esse, quod perspiratione pulmonali jam saturatus ipsam supprimat, FRANKLINUS (trans. philos. an. 1766, V. journal encyclop. ejus anni 15 novembris).

(r) Aërem a ranarum respiratione similiter inquinari, ac a respiratione calidorum animalium, vel ex eo confirmatur, quod is aër flammam similiter exstinguat. Misc. I, p. 48.

cunt (*f*), forte etiam reliquum sanguinem inquinent, iisdemque tandem interitum inferant.

XLVII Boerhaawius censuit ad eruendam utilitatem respirationis plurimum lucis afferre posse considerationem animalium in aëre interclusorum (*t*), sed in his mors non tam sublatae respirationis utilitati, quam impeditae necessariae sanguinis transmissioni tribuenda est. Quare speravit Cl. Hallerus ex animalibus, quibus viae foetus apertae perstant, ejus quaestionis solutionem potius esse exspectandam (*u*): sed amphibia animalia, de quibus agimus, minorem adhuc habent respirandi necessitatem, quum sanguis per ipsorum pulmonem transmitti non debeat, propterea aptissima solvendo problemati mihi videntur, & propositae sententiae confirmandae.

XLVIII Et hunc quidem praecipuum pulmonis usum esse, ut perspirationi inserviat, jam olim Galenus docuerat (*x*): ejus tamen opinionem recentiores plerique deseruerunt, quod hujusmodi halitum mere aqueum esse arbitrarentur (*y*). Verumtamen non mere aqueum esse ostendunt perspirati per cutem humoris acrimonia, & morbi ex eo

(*f*) Quum ranae etiam aperto pectore respirare pergant, curiosum esset in corrupto aëre pulmonis motum in ipsis observare.

(*t*) „ Interim aër praeter modo dicta aliquid respiranti praestat: nam non „ renovatus perpetuo evadit lethalis non ob calorem, vel rarefa„ ctionem, densitatemve, sed ob aliam occultam caussam. Instit. §. 203.

(*u*) „ Si foramen ovale ampliter in adulto homine, ut videtur posse, non„ nunquam pateret, diligens annotatio hujusmodi fabricae posset „ aliquid forte lucis ad pulmonum utilitatem accendere. El. phys. VIII, p. II, p. 14.

(*x*) De usu partium lib. VI, cap. 16. Ignis & animalium respectu hunc esse aëris usum, ut exhalantes partes excipiat. Morgan. (essais d'Edimb. IV, p. 595). Vide consentientes auctores apud Hallerum (el. phys. III, p. 355, n. *a*).

(*y*) Boerh. instit. §. 202, & in praelect. hic ad verbum *fuliginis* I, p. 448, & iterum in prael. ad §. 203 ad verbum *renovatus* I, p. 451, Borellus prop. 97, p. 281.

repercuſſo, & ſimilitudo ejuſdem cum urina, & odor, per quem canes dominum facile diſtinguunt (z), & morbi, qui ex hominibus in anguſtum ſpatium ſtipatis naſcuntur (a), & reſpirati aëris indoles animalia ſuffocans, ac flammam exſtingens, & foetor ipſius aëris a LAGHIO obſervatus (b). Neque exiguam eſſe ejus halitus pulmonalis quantitatem ex HALESII experimento conſtat, quo aequalis propemodum cutaneae perſpirationi ſtatuitur (c). Ex his eruitur in pulmone non alkaleſcentiam produci, ut HELMONTIUS exiſtimaverat (d), ſed alkaleſcentes putridas partes calore, & attritu in ſanguine genitas per pulmones exhalare, ideo alkaleſcentiae indicia in eodem potiora haberi. Et animalia frigida, quibus attritus minor eſt, minorque perſpirationis pulmonalis neceſſitas, aliquamdiu reſpiratione carere poſſe (XXIV), & inſecta abſque pulmone per trachaeas in univerſum corpus diſperſas eamdem perſpirationem, eamdemque utilitatem conſequi (e), ac demum ſtirpes, abſque ullo

(z) HALLER. el. phyſ. II, p. 37, 38, III; p. 3, 354 ab ſ ad a.
(a) HALLER. el. phyſ. l. c., & pr. lin. §. 290, 267.
(b) Vid. Miſcel. II, p. 199.
(c) Vid. eſſais d' Edimb. II, p. 495.
(d) HELMONT Blas humanum §. 45, p. 180. Confer BOERH. inſtit. § 211, & in prael. hic ad verbum *volatile* I, p. 460.
(e) De his PERRAULT eſſais III, p. 278, 279, DUVERNEY poſth. p. 83, 86, LYONNET oſſervaz. alla teologia degl' inſetti del signor LESSER I, p. 105, 106, 108, II, p. 73. Per eas trachaeas aërem recipere, & emittere ex dilatatione, & conſtrictione corporis alterna, qua aliquot gaudent PERRAULT (l. c. p. 278), tum ex eo quod oleo inunctae pereant, obſtructis ſcilicet ſtigmatibus (ib. p. 277). Pleraque inſecta aquatica frequenter ad aquae ſuperficiem feruntur, & caudam emittunt, ut reſpirent; ſi aqua cooperiatur, ſundum petunt, & pereunt (LYONNET l. c. p. 105). De modo vero, quo aërem per trachaeas exſugant, dein expellant, conjecturas propoſuit FANTONUS (edit. II, p. 340). Jam vero quum vacuum multa inſecta impune ferant, hirudo (BOYLE phyſ. pneum tit. 17, exp. 2, p. 456) papiliones (ib. tit. 19, exp. 6), vermes ſponte in lacte nati, (id. phyſico mech. cont. II, not. X, exp. 10), inſecta hexapoda, quae liliorum floribus nutriuntur (MUSSCH. in Florent. p. 48, 49), ſcarabaeus, impennis, tardipes (id. introd. §. 2166). Quum etiam ab interclusſo aëre non laedan-

hujusmodi machinamento (*f*), per amplam foliorum superficiem hanc ipsam exhalationem emittere, quae propterea eo sensu non male cum exhalante superficie pulmonum fuerit comparata, quod vicariam his ipsis utilitatem afferat (*g*).

tur (Basin. apud Haller. in Boerh. IV, p. 90, not. 39 sub fin.) contra oleo inuncta pereant, perspicuum est non tam defectu aëris perire, quam ex coërcito intra corpus insenso humore, qui per stigmata exhalare debuisset: nam ea exhalatio oleo coërcetur, in vacuo liberior evadit, spatium autem vacuum, aut etiam aëre plenum licet exiguum nonnisi tardissime exhalante parvorum animalculorum vapore ita repleri poterit, ut novum erupturum vaporem coërceat.

Quod si quaedam insecta in vacuo moriuntur, id tribuendum videtur caussae a Lyoneto propositae, ea nempe ab interno humorum aëre exitum non inveniente, sublata externi aëris pressione suffocari l. c. I p. 105; sed ut eo revertamur, unde discessimus, chrysallides saltem aliquas non respirare, quamquam trachaeis instructae sint, Lyonnetus demonstrat (l. c. p. 102, 103) & censet stigmata in iis aperta inservire tantummodo ad excedentis humoris evaporationem (ib. p. 103); quod pro certo haberi posset, si constaret has etiam chrysallides oleo inunctas perire, quemadmodum de chrysallidibus generatim docuit Reaumurius (hist. des insect. I, p. 401),

Ex quibus illud erui posse videtur etiam quando insecta respirant, trachaeas eidem usui inservire, sed alternam in eisdem aëris admissionem, & expulsionem copiosiori evaporationi favere, qualis exspectari debet ab animali magis vivido, quam sit chrysallis.

(*f*) Easdem esse fistulas, quae devehant succum nutritium, & aërem (Borel. epist. ad Malpigh. in posth. p. 25) qualis est etiam conjectura Cl. Duhamel (physique des arbres I, p. 43, 173) qui censet officium, quod a Malpighio trachaeis stirpium, sic dictis, tribuitur, sola analogia inniti, nec satis demonstratum esse (ib. p. 44): idemque adnotat aërem non solum per ea vasa, sed etiam per vasa stirpium propria, seu lymphatica facile transmitti (ib. p. 77), & existimat ipsum aërem stirpes subire succo nutritio admixtum, interdum per folia, copiosissime vero per radices (ib. p. 173, 177).

(*g*) Grew. Duvernet II, p. 89, Hales statique des veget. passim. Hinc est, ut in Papini experimento stirps pereat, si integra vacuo includatur; diutissime vivat, dummodo folia extra vacuum recipiens in liberum aërem emergant (Duhamel. l. c. p. 169, 170.) Hinc etiam est, ut non in vacuo solum, sed etiam in intercluso aëre stirpes pereant. (Confer Boyle experimenta physico-mech. cont. II, Musch. introd. §. 2171), mucor tamen in intercluso aëre vivat, nisi vasa, quibus includitur, admodum sint angusta (com. Bonon. III, p. 42, 43).

XLIX. Alia proculdubio pulmonum, & respirationis utilitas vox est, quae exspirati aëris actione absolvitur (*h*). Haud tamen videtur natura hunc finem aut solum, aut primario sibi proposuisse in pulmone efformando. Nam & pulmo qualis frigidis animalibus datus est, voci efformandae suffecisset (*i*); & animalia sunt pulmone instructa, quae tamen vocem nullam edunt (*k*), & insectorum tracheae pulmonis vices gerentes, voci tamen non inserviunt (XXVII). Demum frigida animalia, quae unico cordis ventriculo instructa sunt, respiratione carere diutissime possent, si nullam aliam praeter vocem, & natatum a pulmone utilitatem acciperent (XXV).

L. Alias secundarias, easque manifestas respirationis utilitates, suctum, olfactum, excreatum, sternutationem, oscitationem consulto omittimus, de quibus conferri merentur, quae luculentissime a Cl. Viris tradita habentur (*l*). Una tantum restat in controversia posita respirationis utilitas, aëris scilicet elastici in sanguinem ingressus, quam tanti fecerunt recentiores nonnulli, ut in hunc imprimis finem conditum esse existimarent: ex tali enim aëris cum sanguine miscela sanguinis fluiditatem (*m*), colorem (*n*) ca-

scilicet in spatio clauso, sive vacuo, sive aëre pleno foliorum perspiratio cohibetur, ubi semel illud spatium exhalante vapore fuerit refertum, nisi stirps admodum exigua sit, quemadmodum mucor, quae nonnisi tardissime interclusum spatium suis exhalationibus replere possit, uti de insectis dictum not *v* praeced. Confer Misc. II, §. 44, p. 196.

(*h*) Vocis modulationi, & olfactui NEHEDAM. p. 566, c. 1, Bibliot.

(*i*) Vox buffonis clara, & dulcis. PERRAULT. (l. c. p. 135.)

(*k*) Camaleon, testudo. PERRAULT. (l. c.). Testudo animal absolute mutum BOMAR. diction. V, p. 467.

(*l*) Confer HALLERUM el. physf. III.

(*m*) THRUSTON. l. c. p. 62, 63, aliique permulti, quos HALLERUS recenset el. phys. III, p. 331, 332 a not. d ad k.

(*n*) LOWERUS, ELVETIUS, alii.

lorem (*o*) imo & progreſſivum (*p*), inteſtinum motum, & vitam ipſam pendere nullatenus dubitarunt, aliis ita adverſantibus, ut vel ipſius aëris elaſtici in ſanguine praeſentiam omnino inficiarentur (*q*). De qua quidem quaeſtione non prius licet differere, quam de aëre liquorum generatim nonnulla a phyſicis petita attulerimus.

CAP. III

De aëre liquidorum, in ſpecie de aëre ſanguinis.

LI Aër in liquidis pleriſque continetur (*r*), ita diviſus, ut bullarum ſpecie conſpici non poſſit. Sublato aëre externo ab ipſorum poris erumpit, bullaſque conſtituit (*s*), ejus quantitas in liquidis variis definita hoc pacto eſt (*t*): ac praeterea obſervatum liquida, e quibus hauſtus aër eſt, eumdem iterum ſorbere, principio celerius, dein tardius (*u*),

(*o*) MALPIGHI, l. c. p. 18. FANTON edit. II, p. 343. DUVERNEY II, p. 478, & 507, 509.
(*p*) MERY mem. dell' Acad. 1700, p. 222, 223.
(*q*) BOERH. in prael. §. CCI, p. 443, I ad verbum *oſcillatione*.
(*r*) BOYLE phyſico mech. ab exp. 20 ad 25 p. 43, & ſeq.
(*s*) BOYLE l. c. MUSCHEMB. introd. §. 2162.
(*t*) BOYLE l. c. exp. 24, BOERHAAWE ch. 1 p. 273, MUSCHEMB. l. c. §. 2165. In aqua HALESIUS poſuit $\frac{1}{54}$ vol. (ſtatique des végétaux append). NOLETIUS $\frac{1}{30}$ (Mém. de l'Acad. 1743 p. 215). Forte diverſitas in exp. a diverſitate caloris.
(*u*) In aquam nonniſi decem horis penetrat (MUSCHEMBROEK diſp. §. 2) Quum MARIOTTE nonniſi 20 diebus penetrare in aquam docuiſſet, NOLLETIUS autem 6 diebus (l. c.), concludit du Tour id conſtans non eſſe, ſed pendere a quantitate aquae, & ab amplitudine ſuperficie per quam aër ingreditur (Mém. préſentée 11 p. 448). Confer NOLLETIUM leçon X exp 20, MUSCH. introd § 1478. HAUKSBEE II p. 479. DEMAREST ib. p. 407, BOERHAAWE (ch. I p. 273, MAIRAN *de la glace* p. 191.

ac demum ipſo ſaturari, ut nullum recipere amplius poſſint (*x*). Educto aëre liquidorum volumen non minuitur (*y*), nec eodem in liquida ſubeunte horum volumen augetur (*z*). Augetur autem interea dum erumpit adeo, ut liquida tunc temporis ſpecifice leviora fiant (*a*): etſi vero liquida aëre ſaturata ſint, haud minus incompreſſibilia ſunt, quam illa, quae aërem nullum continent (*b*), aër hic non ſolum ſublata externa preſſione e liquidis prodit, ſed etiam calore (*c*), aut igne electrico (*d*), aut congelatione (*e*), aut percolatione (*f*), aut ex alto delapſu (*g*).

LII Ex quibus perſpicuum eſt aërem ſola gravitate aut elaſticitate ſua liquidorum poros ſubire, donec uniformiter per ipſa fuerit diſtributum (*h*). Hinc 1° prout ſenſim in poros ſubeuns aër denſior ſit ejuſdem ſubeuntis celeritas imminuitur, donec tandem denſitas, & elaſticitas recepti in poros aëris denſitati, & preſſioni ambientis aequalis evaſerit, quando liquida jam nullum amplius aërem admittunt, eoque ſaturata dicuntur. 2° Aër hujuſmodi quoniam in poros liquidorum incompreſſibilium recipitur, in-

(*x*) Auctores mox cit., Boerhaawe praelec. ad § CCI p. 441 ad verbum *elaſtice*.

(*y*) Hales l. c exp 2 n 7 p. 337, 338.

(*z*) Mairan l. c. p. 138, Musch. introd. § 2165.

(*a*) Boyle l. c. exp. 25, Musch. l. c. § 2165.

(*b*) Eller Acad. de Berlin 1750 p. 69, 70, 71.

(*c*) Mairan l. c. p. 185. Boerhaawe ch. 1 p. 274 exp. 6 Mussch. introd. § 1455.

(*d*) P. Beccaria el artif. § 400 let. VI, §. 188.

(*e*) Mairan l. c. a p. 287 ad 290.

(*f*) Du-Tour l. c p. 492, 493.

(*g*) Muschemb. introd. § 1477.

(*h*) Partes aëris inſtar ſpongiae aqua repleri (Muschembroek introd. II, § 1480) aërem aquae poros ſubire, uti vini ſpiritus eoſdem ſubit (Mairan l. c. p. 135), ſola gravitate liquorum poros ſubire (Du-Tour l. c. p. 477), tum Venel ex eo in primis, quod agitatione is aër excuti nequeat, quum revera aquae pori ob agitationem locum quidem mutent, ſed nec coarctari, nec deleri poſſint (Mem. preſentées II, p. 88).

compressibilis esse debet: nam comprimi nequit, quin pori, quibus continetur, coarctentur, atque adeo quin liquidum ipsum comprimatur. 3° Et similiter liquidorum volumen ipsis adjectum augere nequit, quum in interstitia partium tantummodo recipiatur. 4° Quoniam vero in liquidorum poros aër hic nonnisi lente penetrat, necesse est resistentiam pati ab angustia pororum, quos subit. 5° Eamdem resistentiam, quam paritur aër exterior, ut poros pervadat, pati debet aër poris inclusus, quando ab iisdem erumpere nititur. 6° Hinc dum praevalente vi sua erumpit, angustia pororum impeditus, liquida expandet in majus volumen, undas, & bullas in iisdem excitabit. 7° Id vero fit quotiescumque elasticitas aëris in poris contenti major fiet pressione ambientis. 8° Fiet autem major, si aut translatione rariorem aërem, vel anthlia ambientis pressio imminuatur, aut interni aëris elasticitas vel per calorem, vel per ignem electricum adaugeatur; aut demum si congelatione constrictis liquorum poris aër condensetur (*i*). Contra (IX) aër in liquidorum poros irruet, si ejus pressio elasticitatem inclusi aëris superet, quod fiet translatione in densiorem aërem, ambientis condensatione, liquorum refrigeratione, eorumdem congelatorum solutione.

(*i*) Aërem in aquae poris contentum per congelationem elasticitatem recuperare contendit HALESIUS (l. ul. c. exp. 2, n. 7) & DESMAREST (in notis ad HAUKSBEIUM II, p. 400, 401): elasticum jam fuisse; siquidem frigus aëris volumen, & elasticitatem non auget, sed minuit: (MUSCHEMBROEK introd. § 1477) perinde expelli, ut vini spiritus, & salia aqua soluta ab eadem congelascente extruduntur, MAIRAN (l. c. a p. 287 ad 290).

Quum vis refractiva glaciei vi aquae refractiva paullo minor sit (De la HIRE mém. de l'Acad. 1693, p. 252, MAIRAN l. c. p. 299, 300), atque adeo densitas minor; mirum est aërem, cujus volumen ex glaciali frigore contrahi debuit, ejus tamen poris contineri amplius non posse, imo ab iisdem expelli, nisi aut mutatam figuram pororum, aut extraneum corpus aërem pellens incusemus, quae tamen hactenus nullis certis argumentis demonstrata sunt.

LIII Ex his facile refelluntur, quae adverſus elaſticitatem aëris in liquidis contenti afferuntur. Ajunt enim aërem liquidis contentum elaſticum non eſſe. 1° Quod comprimi non poſſit (*k*). 2° Quod ipſius volumen majus ſit volumine liquorum, a quibus recipitur (*l*). 3° Quod e liquoribus erumpens ipſorum volumen augeat (*m*). 4° Quod non ſtatim e liquidis prodire incipiat, ac aër ambiens rarefieri incipit, ſed ingens rarefactio praecedere debeat, priuſquam erumpat (*n*). Ex his nempe omnibus concludunt aërem in liquidis in minima elementa ita diviſum eſſe, ut elaſticitatem non exerceat (*o*), aut eadem prorſus deſtituatur (*p*). Recuperare vero elaſticitatem, quotieſcumque aut ambientis rarefactione, aut calore, aut igne electrico, aut congelatione in majores bullas fuerit collectus.

LIV Harum, inquam, ſimiliumque objectionum ſolutio ex praecedentibus perſpicua eſt. Nam 1° aër quantumvis compreſſibilis, liquidis, quorum poris continetur, compreſſibilitatem nequit impertiri (II). Falſum vero eſt volumen aëris in liquidis contenti horum volumine majus eſſe, ſi ad ambientis aëris denſitatem redigatur (*q*). Etſi enim Mariotte ex aqua aëris volumen ſe eduxiſſe tradat ipſius volumine 8, aut 10 vicibus majus; erroris tamen fontem Halesius invenit, qui ex oleo aquae cir-

(*k*) Auctores cit. ad not. *k*.
(*l*) Boerhaawe ch. I, p. 279, 280, exp. 10, Mairan l. c. p. 137, ex Mariotte omnes.
(*m*) Eller l. c.
(*n*) Boerhaawe l. c. p. 277 coroll. VI ſubſidente jam mercurio in barometro ad 25 pol. ex aqua nondum prodire. Non prodire niſi externo aëre ad dimidium rarefacto (id. prael. § CCI ad verbum *elaſticae*) ſubſidente mercurio ad tres, vel quatuor pol. Muschembroek (introd. § 1477).
(*o*) Boerhaawe prael. l. c.
(*p*) Id. l. c. & ch. I, p. 280, 281.
(*q*) Vid. ſupra not. *d*.

cumpoſito in eo experimento magna ex parte aërem illum prodiiſſe adnotavit (*r*). Cur vero liquorum volumen erumpendo adaugeat, ſuperius indicavimus (II), quia nempe dum propria elaſticitate dilatatur, pororum anguſtia impeditur, quominus ea velocitate effugiat, qua nititur expandi (*s*). Ex quo intelligitur cur bullarum ſpecie aër non erumpat, niſi poſtquam ambiens admodum fuerit rarefactum: nam ſi elaſticitas interni aëris externi preſſionem parum ſuperet, per pororum meatus erumpens paullatim aër aequilibrium quiete reſtituet (*t*), tum vero, ut dicebam, ipſius eruptio tumultuaria demum, & violenta erit, & bullas, undaſque excitabit, quum exceſſus elaſticitatis interni aëris ſupra preſſionem externi tantus erit, ut per anguſtias pororum ea velocitate erumpere nequeat, quam elaſticitatis differentia poſtularet.

LV Aër igitur in liquidorum poris diviſus utique in minimas partes eſt, ſed ita ut elaſticitatem exerceat: nam phaenomena ejus aëris proprietatibus elaſtici fluidi apprime conſentanea eſſe oſtendimus (II). Nec obſtat, quod obſervant, in liquorum poris hunc aërem quieſcere: non enim quieſcit ex eo, quod elaſticitate careat, ſed quia niſus ejus elaſticus ab aequali ambientis preſſione co-

(*r*) L. ult. c. exp. 2, n. VI, p. 335, 336. Mariotte experimentum a Boerhaawio narratur ch. I, p. 279, exp. 10.

(*s*) Viſciditate liquorum impeditur, Muschemb. introd. § 2162.

(*t*) Revera, quando vas aquam continens, & obturatum repente in vacuo aperitur, longe copioſiores bullae erumpunt, quàm quum aqua in aperto vaſe intra excipulum pneumaticum conſtituta, paullatim vacuum paratur; praeſertim ſi excipulum amplum ſit, ut non niſi tardius exhauriri poſſit. Boyle exp. phyſico-mech. exp. 28, p. 64, 65.

Quod ſi igitur tardiſſime aër educatur, interpoſita mora inter ſingulas exanthlationes, veroſimile eſt aërem e liquoribus latenter & abſque bullis poſſe exhauriri; quemadmodum latenter & abſque bullis in eos irrepſit. Hinc vero concludi poteſt etiam ex translatis liquoribus in rariorem aërem, tum ex aucto per tempeſtatem calore aërem ab ipſis clam prodire, licet ex defectu bullarum contrarium ſtatuat Muschembroekius introd. § 1477.

hibetur. Nec etiam admitti poteſt, quod addunt, calore, igne electrico, congelatione, partes, quae prius elaſticae non erant, elaſticitatem recuperare, quamdiu haec tanta non ſunt, ut elementa ipſa liquorum tranſmutare poſſint. Etſi vero ab harum cauſſarum vehementia fixae corporum partes in aërem elaſticum converti queant; nihil tamen ſimile ab ambientis aëris exanthlatione licet exſpectare, quae nihil aliud praeſtat niſi, ut aëri e poris liquorum erupturo reſiſtentiam tollat, qui certe, ea tantum ſublata, elaſticorum corporum more non expanderetur, bullaſque efformaret, ſi illic elaſticitate orbatus deliteſceret.

LVI Enimvero phaenomena aëris fixi corporum a phaenomenis aëris elaſtici hactenus expoſitis longiſſime abſunt. Ut enim 1° aër elaſticus, nulla inducta in partes liquorum elementares mutatione, elici poteſt, & iterum admitti (I, II): contra aër fixus excuti nequit, niſi per putredinem, fermentationem (*u*), effervescentiam (*x*), vehementioris ignis vim (*y*) corporum compages deſtruatur, & elementa ipſorum pervertantur: nec propterea: 2° aër hoc pacto expulſus corpora a quibus educitur, ſponte ſua iterum ſubit, unde aëram metamorphoſim elementorum corporis in aërem elaſticum fieri concluſerunt (*z*). 3° Aër hic pluries ſuperat volumen corporum, a quibus educitur (*a*). Hinc nullatenus elaſtica forma in ipſis praeexſtitiſſe

(*u*) Boyle exp. phyſico-mech. cont. II, paſſim.
(*x*) Statique des veget. cap. VI ab exp. 83 ad 104.
(*y*) Ib. ab exp. 49 ad 79.
(*z*) Aërem anthlia e liquorum poris eductum elaſticum fuiſſe, & ad eorum compoſitionem non pertinere, ſecus ac illum, qui fixus eſt, nec niſi chymicis artificiis educitur (Dict. de chym. I, p. 59). Similia Macbride (eſſais p. 359 in not.) & Halesius, qui hoc addit ad utriuſque aëris diſcrimen oſtendendum aërem artefactum citius tardiuſve elaſticitatem amittere (l. c. append. exp. 2, n. VIII); jacturam vero ponderis, quam tartarus, aliaque corpora per diſtillationem patiuntur tribuit converſioni eorumdem in aërem elaſticum (l. c. p. 241).
(*a*) Boyle, Hales, Macbride l. c.

censendus est: nam densitatem, & propterea elasticitatem tantam habuisset, ut eidem coërcendae nec ambientis pressio, nec corporum firmitas paria esse possent (*b*). 4° Aër ille artificialis plerumque venenatus, flammaeque, & animalibus infensus est, unde aliqui verum aërem esse pernegarunt (*c*), qui tamen aërem liquorum poris contineri concedunt (*d*), forte quod ejus naturam a communis aëris indole haud similiter abludentem observaverint: quae omnia tantam inter priorem illum liquidorum aërem, & hunc arte factum ponunt differentiam, ut vel ipse HALESIUS, qui tantam in aëre fixo corporum explorando, ac illustrando diligentiam adhibuit, aërem vere elasticum liquorum, & inprimis aquae poris contineri affirmet, & diffidentium argumenta refellat (*e*).

LVII Ut vero de ceteris liquoribus diximus, de sanguine etiam dicendum, ipsum aërem continere, qui sublato externo aëre bullarum specie erumpat (*f*), & a sanguine ultra saturationem recipi non possit (*g*). Hic etiam aër dum erumpit sanguinis volumen adauget (*h*), adeo ut arteria, & vena, quae aqua graviores ipsius fundum petunt, facto vacuo, jam tumidiores, levioresque innatent (*i*). Neque quod aërem contineat sanguis ideo compressibilis evadit (*k*).

(*b*) HALES l. c. exp. 25, p. 189.
(*c*) MUSCHEMB. in FLORENT. p. 37, 38.
(*d*) Id. essai de physiq. § 884, 885.
(*e*) L. c. exp. 2, n. VI, VII a p. 335 ad 338.
(*f*) MUSCHEMB. disp. p. 575 introd. § 2165, BERGERUS de nat. hum. p. 43, BOYLEUS, des aguliers, cours. de phys. II, p. 457.
(*g*) BOERHAAVE praelec. ad § CCI ad verbum *absorui*.
(*h*) Coagulum cruorosum in vacuo intumescit. MUSCHEMBROEK. disp. p. 575.
(*i*) MUSCHEMBROEK: disp. § 14 introduc. § 2165. SAUAGIUS effets de l'air § 72, MORGAGNI de sedibus, & caussis morb. V, p. 18, p. 41. Viscera, quae aquae fundum petunt in vacuo intumescunt, & innatant. MUSCHEMB. disp. § 5.
(*k*) SAUAGIUS l. c. § 71, & el. phys. § 138.

Demum coagulatione aër ad concreſcentis ſanguinis ſuperficiem bullarum hexagonarum ſpecie expellitur (*l*).

LVIII De hoc aëre quaeſtio etiam fit, utrum elaſticus, & communi ſimilis, an fixus, & elaſticitate deſtitutus cenſeri debeat. Illud ex hactenus dictis conſtare ſatis videtur aërem in poris ſanguinis contentum ab illo, qui in ceterorum liquorum poris continetur nequaquam diſcrepare (*m*). Hinc eſt, ut qui aërem ceterorum liquorum inelaſticum dicunt, hanc quoque ſanguinis elaſticitatem denegent (*n*): viciſſim, qui nobiſcum liquorum aërem elaſticum eſſe opinantur, elaſticum quoque aërem in ſanguine nobiſcum admittant (*o*). Nec propterea neceſſarium puto diutius immorari in expendendis difficultatibus, quae adverſus elaſticitatem aëris in ſanguine contenti afferri ſolent iis prorſus ſimiles, quas § III, IV expendimus; quod nempe, quum ſanguis incompreſſilis ſit, ejus aër elaſticitate carere debeat, quod quum nonniſi, ſublato externo aëre, expandatur, prius inelaſticus eſſe debuerit; quod demum inelaſticus ſit, quum ſanguis frigore parum adeo conſtringatur. Enim vero aër in poris ſanguinis contentus nec ipſum compreſſibilem, nec fri-

(*l*) Idem el. phyſ. § 150, LITTRIUS mém. de l'Acad. 1714, p. 331.

(*m*) Idem affirmant BOERHAAVE (inſt. § 210), HALLERUS (el. phyſ. III, p. 337, 339), SAVAGIUS (el. phyſ. § 133, 137, 138), MUSCHEMBROEKIUS (introd. § 1481).

(*n*) BOERHAAVE ch. I, p. 281, alii, quos memorat BERGERUS, qui aëris quamdam tenuiorem, *mediae naturae, non elaſticam, quam ipſi ſatis exponere non queunt* portionem ſanguini commiſceri contendunt. De natur. hum. p. 40.

(*o*) Vulgarem aërem in ſanguine contineri SAUAGIUS el. phyſ. § 133, 137, & MUSCHEMBROEKIUS, qui ait: „ Aër, qui cum chylo tranſit in „ ſanguinem, ejuſdem eſt naturae, ac aër, qui inſpiratur . . . nam elaſticum gravem ſe probat in ductu thoracico (diſp. p. 581). Elaſticum quoque aërem ſanguinis faciunt FERREIN (diſp. p. 559), DUVERNEY (poſth. II, p. 83, 84), MACBRIDE, qui contrariam BOERHAAVII opinionem impugnat (l. c. a p. 66 ad 102), BERGERUS (l. c. p. 43), FANTONUS (diſſert. anat. p. 143), HALESIUS, qui ab aëre elaſtico fluida animalium promoveri contendit (l. c. p. 266), & ex primis BORELLUS (prop. CXII, CXIII).

gore magis densabilem efficere debet; nec suas proprietates ullo modo sanguini potest impertiri. Similiterque aër sanguinis pressione atmosphaerae cohibitus non prius se expandet, quam ea pressio fuerit sublata. Confer. supra §. III.

LIX. Illud utique ex sanguinis incompressibilitate erui potest, aërem per ejus poros dispersum (*p*) neutiquam vero in bullas distinctum (*q*). Nam hujusmodi bullae extra poros sanguinis positae id utique efficerent, utpote compressibiles, ut commune ex ipsis, & ex sanguine conflatum volumen minui posset, unde sanguis compressibilis videretur. Quod si aëreae bullae in sanguine non adsunt, inde potest intelligi, cur aër in sanguine contentus non noceat, licet bullae aëreae in sanguine genitae (*r*), aut in vasa inje-

(*p*) „ Aërem elasticum in intimis interstitiis humorum omnium cum san„ guine circulantium contineri, & quidem ipsum ita divisum, ut „ non facile aliquot partes invicem collectas possideat (Muschemb. „ disp. p. 592), dissolutum in aqua, & in ea tamquam sal aliquis „ colliquescentem (Haller l. c. p. 366, 367). Similia Sauagius (el. phys. § 144), Morgagni (l. c. V. § 18, p. 41), Borellus (prop. CXIII), Fantonus (l. c. p. 345). Amplam pulmonibus superficiem datam esse, ut aër per minimas partes sanguini facilius admisceretur (Duveeney l. c II, p. 87, 506).

(*q*) Quales bullas admittit Meryus (Mém. de l' Acad. 1707).

(*r*) „ Si vero contingat aliquot partes aëris in sanguine combinari, morbi „ periculosi, & mors oborientur (Muschemb. disp. 593). Aër ipse „ solutus, ac liber inter sanguinis partes interjectus harum motui se „ opponit (Morgagni l. ul. c.). Motibus liquidorum obstat, ut vide„ mus liquores in vasa syphone injectos, intercepto aëre, validum „ obiicem, ac fere insuperabilem invenire (Fanton l. c.): videtur „ aër cor distendendo eius motum impedire, sicque mortem inferre (Morgagni l. c. V. § 23).

Aëris vero bullae in cadaveribus observatae vel cum manifesta putredine (Morgagni V. § 29, 30, XXXI, § 23), vel absque ulla alicuius momenti adjuncta putredine (Haller in Boerh. n. *i* ad § CCI). Post haemorragias (Littre Mém. de l'Acad. 1771 p. 331, Ferrein disp. p. 519). Post vulnera (Haller pr lin. § 280, & ul.). Post repentinam mortem cor aëre plenum (Ruyschius epist. probl. XVI p. 9.). Ex atrophia venae aëris plenae (Lieutaud précis. p. 401). Confer Morgagni l. c. V. § 17, 19, 20, 24, 25.

injectae (*s*), quaeque poris sanguinis aëre jam saturati excipi amplius non possunt, utique laedant.

LX. An vero aër sanguinis per pulmonem advenit? an is est primarius respirationis finis (*t*)? Quantitas aëris, quae ad sanguinis saturationem requiritur, cum chylo videtur advenire: nam chylus ex alimentis, & potulentis fit aëre refertis (*u*). Hinc aërem elasticum in vacuo emittit, eademque phaenomena praebet, quae a sanguine exhiberi observavimus (*x*). Quare quum sanguis aëre semel saturatus nullum (*y*) recipere amplius possit (IX), perspicuum est, aërem nullum per pulmonem in sanguinem advenire, nisi caussa aliqua occurrat, quae aequilibrium inter externum aërem, & aërem in sanguine contentum valeat perturbare. Rem confirmant aquatica animalia (*z*), & foetus ipsi in amnio contenti (*a*), qui humores aëre elastico haud mi-

(*s*) De effectibus aëris in venas animalis injecti confer HELVETIUM (Mém. de l'Acad. 1718 p. 232), MORGAGNUM, qui ab immisso aëre sanguinem negat coagulari, & animalia alia prae aliis ab eodem laedi affirmat (l. c. V. § 21, 22), BERGERUM, qui pedetentim immissum aërem (l. c. p. 40); tum PRINGLIUM, qui pauca copia funestum non esse observat, licet pulsum intermittentem reddat (maladies des armées II p. 295).

(*t*) Ut sentit BORELLUS (l. c. prop. CXIII), LOWERUS (de cord. p. 158), FANTONUS (l. c. p. 342, 343), RUYSCHIUS (epist. probl. XVI), DUVERNEY (l. c. p. 83, 84), FERREIN (disp. p. 559).

(*u*) Ita MUSCHEBROEK (disp. 580), NEHEDAM (l. c. p. 562), MACBRIDE (l. c. p. 103), SENAC (du coeur II p. 121). Non dissentit MERYUS aërem, qui ad sanguinis saturationem requiritur, cum chylo advenire (Mém. de l'Acad. 1707 p. 157, 158, 165) SAUAGIUS (effets de l'air § 76).

(*x*) In chylo perinde ac in venis, & sanguine demonstrari MORGAGNI (l. c. V. § 21), MUSCH. (disp. p. 173), ex ductu thoracico, scilicet duobus vinculis intercepto, & in vacuo tumente.

(*y*) Ita BOERHAAVE (prael. § CCI ad verbum *absorti*), HALLERUS (el. phys. III p. 337), & ipse MERYUS (Mém. de l'Acad. l. ul. c.).

(*z*) FLORENTINI (p. 54, 55 col. Acad.), HAUKSBEE (exp. physico mech. II p. 429), BOYLE (experimenta physico-pneum. tit. VII), DUVERNEY (II p. 503, 504).

(*a*) MUSCH. disp. p. 570.

nus imbutos habent, licet illa pulmonibus careant, hi vero nullam respirationem exerceant.

LXI Quod si aequilibrium inter externum internumque aërem pervertatur, tunc equidem videtur per pulmonem commodissime posse reparari (*b*). Nam aër vapori pulmonali admixtus eam viam facile penetrat (*c*), & per eumdem majores etiam aëris bullae interdum immittuntur (*d*), & hanc ipsam viam effluvia odorifera, & venena saepissime legunt (*e*), & demum per amplissimam super-

(*b*) Vel ipse MUSCHEMBROEKIUS admittit (introd. § 2168), licet in primis scriptis copiose probare conatus esset, viam aëri in sanguinem per pulmonem denegatam esse (disp. cap. III toto).

(*c*) „ Aërem in sanguinem venire, nemo, puto, negat, sed dissolutum in aqua & l. c. (HALLER el phys. III p. 336, 337). Sunt qui negant injectum in trachaeam aërem subire venam pulmonalem; *at si aërem in tenuia intestina intrudant, nil quoque lactea vasa subire notabunt, interea chylus copiose eadem subintrat, quem aëre prorsus destitui nemo affirmaverit*, FANTON l. c. p. 242, 243. Ita plerique auctores cit. superius ad not. *y*.

(*d*) Etsi experimentum non successit HARVEO (in proem. ad exerc. I de mot. cord. p. 21): nec NEHEDAMIO (l. c. p. 565): nec BOHNIO (circ. anat. p. 69): nec BULFINGERO (com. act. Petr. III p. 240): nec HALESIO (haemastat. exp. XI n. VI): nec MUSCHEMBROEKIO (disp. p. 610): nec DUVERNEYO (l. c. II p. 82, 83), qui absque adhibita vi id fieri non posse suspicantur. Successit tamen SWAMERDAMIO (de resp. sect. 3 cap. 2, § 4) testibus experimenti SYLVIO (disp. VII, § 86), STENONIO (epist. ad BARTHOL. IV ep. 55), BORRICHIO, qui nil unquam disruptum apparuisse affirmat (l. c. ep. 76). Successit etiam MERYO (Mém. de l'Acad. 1707 p. 164), FERREINIO (disp. p. 549), LIEUTAUDIO (el. physic. p. 89), & HALLERO, qui aërem *leni vi, sed continuata* transmitti ex proprio experimento docet (in BOERH. n. i ad § CCI), & MORGAGNO, *qui, inflato pulmone, repetitis praesertim, & diutius in eam productis, nec tamen violentis inspirationibus pulmonalis venae truncum vidit spumoso humore compleri* (l. c. V. § 22); ex quibus erui posse videtur, etsi aëris bullae secundum naturam in sanguinem per pulmones non adveniant, quum nullae revera in eodem insint (IX); patulas tamen vias esse, per quas non difficile possint impelli.

(*e*) Odor spiritus therebinthinae, qui observante HOMBERGIO urinas inficit apud MERY (Mém. de l'Acad. 1707 p. 166, 167), & miasmata contagiosa in sanguinem transmissa (BERNOULLI disp. p. 614), SAUAGIUS (l. c. § 140), DUVERNEY (l. c. p. 87), LIEUTAUD (el. phys. p. 90).

ficiem in pulmone nudus fere ſanguis aërem contingit (*f*). Idque eo magis veroſimile, quod cutis, quae altera via viſa eſt emittendo, admittendoque aëri apta (*g*), longe tamen durior pulmone, denſiorque ſit, & minoribus exhalantibus vaſis inſtructa; hinc animalia in vacuo inflata perſtant, nec detumeſcunt (obſervante Meryo) niſi aërem per os emittant (*h*).

LXII Si itaque aër externus interno rarior fiat, internus vi ſua elaſtica ſe expandens animalia inflabit, eademque ſymptomata inferet, quae ab immiſſo in venas aëre producuntur (IX); quae tamen omnia aëre ipſo mox per pulmones prodeunte, & ad aequilibrium ſe componente evaneſcent (*i*). Imo vero ſi illa externi aëris rareſcentia paullatim oboriatur, ut ſenſim aër per pulmones erumpere poſſit (LV), ſenſim etiam aequilibrium reparabitur, quin ulla animalium inflatio, ullumve incommodum naſcatur (*k*). Contra ſi aër externus denſior fiat, preſſione ſua in pulmonalem ſanguinem penetrabit donec per omnes corporis humores aequabilem denſitatem fuerit adeptus.

LXIII Parum diſſimili ratione contingit, ut ſi vacuum aliquod in humano corpore naſcatur, in illud aër per exhalantia vaſa ſe diffundat, quo ſpectat aër in luxati artus cavum collectus, & ejus reductioni reſiſtens (*l*), aut

(*f*) Haller pr. lin. § 278. Se non videre *quid obſtet aëri, quominus venas adeo magnas ſubeat*, id in Boerh. not. *l* ad § CCI.

(*g*) Poros cutaneos aërem admittere, & emittere, quum pulmones ei muneri non ſufficiant, Ruyschius epiſt. prob. XVI p. 9. In omnes corporis cavitates viam aëri per cutem patere, Keil. (tent. p. 193), Bouillet hiſt. de l'Acad. 1743 p. 80.

(*h*) Mém. de l'Acad. 1707 p. 221.

(*i*) Miſc. Taur. II, p. 176 § 13.

(*k*) Incommoda in Academicis altiſſimos Peruvianos montes conſcendentibus ex labore itineris: nam quando equo vecti conſcendebant, eadem vitabant, obſervante Sauagio (effets de l'air 68).

(*l*) Haller el. phyſ. III, p. 329, not. *u*, *x*, *x*, *y*.

vicissim si in cava corporis effusus aër comprimatur, & addensetur, per resorbentia vasa paullatim penetret, & in humorum massam se diffundat. Atque huc referri potest aër per pectoris vulnera, aut paracentesim admissus, & per occlusionem pectoris relictus, qui licet principio dyspnoeam inferat, cito tamen incommodus esse desinit (*m*), huc quoque emphysematum resolutio spectare videtur (*n*), quae phaenomena aëris resorptioni potius, quum destructo ipsius elateri adscribenda esse vel ex eo constat, quod HALESIUS observaverit aërem numquam ex toto elasticitatem amittere (*o*).

LXIV An vero praeterea admittenda est circulatio quaedam aëris, & renovatio, ut in pulmone receptus aër per cutem exhalet (*p*), aut absoluto circulo per pulmonem ipsum iterum expellatur (*q*)? An inde deducenda diversitas coloris arteriosum inter sanguinem, & venosum? Equidem omnes humores excrementitii aëre ad saturationem referti sunt (*r*), sed sanguinis massa reparatur a novo chylo, novo aëre saturato (X); nec propterea

(*m*) HALES l. c. p. 213, 214, HALLER l. c. p. 240 241.

(*n*) „ In emphysemate siquidem flatus dispellitur, necesse est, ut vel cutem „ inveniat perviam, quam dicunt aëri non esse permeabilem, vel „ resorbeatur in canales nostros (HALLER n. *m* ad § CCI BOERHAAV.).

(*o*) Statique des végét. p. 263, 264, 265. Vid. Miscel. II, p. 185, § 25.

(*p*) Quae vetus sententia MERY est. Hist. Acad. reg. l. 4, sect. 2, cap. 3, n. 12, 13, non repugnare SAUAGIO l. c. § 135.

(*q*) Quae nova sententia MERY Mém. de l'Acad 1700, 1707.

(*r*) Per omnia organa exteriora aërem prodire, & etiam humores per cutem erumpentes, implicitas habere aëris particulas, indeque esse, ut animalibus in intercluso aëre mortuis, mercurii altitudo in barometro iterum augeatur. FANTONUS l. c. 344, 345. Aërem superfluum per vias urinae, & perspirationis ejici. MACBRIDE l. c. p. 104.

ulla necessitas aëris per pulmonem admittendi (*s*) ut jactura repararetur, quae per excretiones contingit. Quod vero spectat ad colorem sanguinis arteriosi, venosique, si discrimen satis certum, & constans est, non inverosimile videtur ab evaporatione sanguinis, quae in pulmone fit, esse deducendum. Etsi enim alibi experimenta protuli suadentia colorem sanguinis ab aëre mutari (*t*), etsi eorum veritatem deinceps constanti successu comprobatam vidi; quum tamen animadverterem conditiones, propter quas aër admittitur, aut arcetur, evaporationi etiam aut favere, non obstare, in eam opinionem deductus sum, ut aut tam praesentiae aut contactui aëris, quam evaporationi eos effectus tribuendos suspicarer; quae tamen hypothesis non prius potest admitti, quam experimentis explorata fuerit, ac comprobata.

LXV. Aër vero sanguini admixtus quid boni praestat? An ad sanguinis fluiditatem servandam conducit (*u*)? An inde fit, ut cum aëre quassatus sanguis numquam concrescat (*x*)? Verumtamen fluiditas sanguinis per agitationem producta a sero est, quod nunquam concrescit, rubris glo-

(*s*) Hoc ipsum ratiocinium proponit ipse Mertus, quando quaestio tantum fit de aëre, qui ad sanguinis saturationem requiritur (Mém de l'Ac. 1707, p. 157, 158, 165): nam eius hypothesis de circulatione aëris versatur circa aërem adunatum, *aër en masse*, quem sanguini ultra saturationem inesse, & in pulmone renovare censet (ib. p. 162, 164, 165).

(*t*) Misc. Taur. I, p. 68, & seq.

(*u*) Thruston (l. c. p. 62, 63). Quatenus sanguini suppeditat tenuius elementum. Malpighi (l. c. p. 18). Eamdem sententiam sequuntur plures alii, quos memorat Cl. Hallerus (el. physic. III, p. 331, 332); negat tamen Borellus (prop. CXIV.

(*x*) Sanguis quassatus nec coire amplius potest, nec insulam facere (De Haen rosoc. pract. part. IV, cap. VI, § 3). Similia Muschembroekius (disp. p. 554). Aurivillius (disp. 275, not. *m*). Daoustene (disp. p. 547). *Sanguis emissus vasis suis in liberrimo aëre, etiam conquassatus cum aëre elastico, protinus* observatur coagulari Boerhaave (prael. § CCI ad verbum *oscillatione*).

bulis infecto, quum pars gelatinosa, quae alias rubros globulos secum in placentam abripit, agitatione in serum dimittat; & sola concrescens membranam Ruyschianam dictam efformet (*y*). Quamvis igitur serum cruore tinctum falsam cruoris non concrescentis speciem referat, certum tamen est agitatum cum aëre sanguinem coagulari. Vicissim sanguis animalium in vacuo exstinctorum aëre licet spoliatus, fluidus reperitur (*z*). Demum in calore animalis servatus sanguis; quamvis quiescat; diutissime fluidus perstat (*a*), ex quo conficitur fluiditatem sanguinis non ab agitatione, nec ab admixto aëre, sed a calore esse repetendam?

LXVI. Aër etiam sanguini admixtus parum nihilve ad sanguinis oscillationem, motumque intestinum videtur conferre (*b*), saltem quamdiu cum externo aëre aequilibratus in ejusdem meatibus quiescit. Enim vero superius constitit in poris liquorum incompressibilium contentum aërem comprimi non posse; cum amplitudo aut figura pororum nequeat mutari (II, IV). Aër vero non compressus nec etiam resiliet, nullumque propterea motum sanguinis partibus imprimere poterit.

LXVII. Quam nam igitur demum utilitatem aër sanguinis affert? Praecipuam eam esse censeo, ut aequilibrium cum externo aëre constituat, sicque impediat quominus vasa ab ejus pressione elidantur (*c*). Praeterea rori exha-

(*y*) Cl. Gaber. Miscel. Taur. III, § 13, 14.

(*z*) Borelli prop. CXX.

(*a*) Schwenche hematol. p. 90. Senac du coeur II, p. 124. In calore humani corporis sanguis per dimidiam horam nullam mutationem subibat. Eller Acad. de Berlin 1751 col. Cl. Paul. II, p. 390.

(*b*) Uti censet Malpighius (l. c. p. 18). Duverney II, p. 478, & 507, 509, & alii multi.

(*c*) Similiter Bergerus (l. c. p. 41). Sauagius (l. c. § 74). Muschem. (introd. § 2170). Senac (l. c. II, p. 118). Macbride (l. c. p. 95, & seq.). „ Et sane nisi res sic se haberet, huius, in quo nostra sunt „ corpora, aëris circumundique prementis vis urgendo vasa motum „ sanguinis sufflaminaret. Morgagni l. c. V, § 18.

lanti admiſtus videtur efficere, ut viſcera ac membranae ſupra ſe invicem moveri poſſint perinde ac ſi, ulla externa preſſione opprimerentur (*d*); atque huc incommoda refero, quae ab aucta ſubito externi aëris preſſione naſcuntur, non prius ceſſatura, quam aër humorum uniformem denſitatem acquiſiverit (*e*), unde animal non ſolum aptus ſit atmoſphaerae ponderi ferendo, ſed ejus etiam decuplum facile ſuſtinet (*f*). Inde etiam intelligitur cur animalia in rariorem aërem repente translata, inflentur, convellanturque; quae tamen ſymptomata aut nulla ſint, ſi ea mutatio paullatim fiat, aut etiam paullo poſt ſedentur, quum aër humorum aeque rarus evaſerit (XII).

LXVIII Aër itaque humorum animalium quamdiu ejuſdem cum externo denſitatis eſt, cum eodem in aequilibrio eſt, ut humores per ſua vaſa aeque libere moveantur, ac moverentur in vacuo ſpatio; ſimiliterque membranae, & viſcera ſupra ſe invicem facile gliſcunt: at ſi minoris extus denſitatis repente evadit vaſa intumeſcunt, membranae ſecedunt, & divelluntur, ſi majoris exprimuntur vaſa, interiores partes ad ſe mutuo apprimuntur.

LXIX Ex quibus experimentum Halesii explicatur, qui nempe deprehendit animalis in vacuo enecti pulmones, qui albi reperiri ſoleant, rubros adparere, ſi animalis ipſius thorax variis inciſionibus apertum fuerit priuſquam vacuo committeretur; tum experimentum alterum, in quo felis tranverſim ſub diaphragmate ſectae diaphragma

(*d*) Partes maxime flexiles, ut abdomen, ventriculus reſiſtunt ponderi atmoſphaerae ob incluſum aërem (Sauagius l. c. § 41). Sine aëre interno elaſtico cava corporis eliderentur (Senac l. ul. c. Keil l. c. p. 192).

(*e*) Qualia incommoda graviſſima ex nimis celeri campanae urinatoriae deſcenſu oriuntur. Desaguliers cours de phyſique II, p. 459. Sauagius l. c. a § 43 ad 46, Muschenbr. introd. § 2170.

(*f*) Desaguliers l. c.

in vacuo deprimi obſervavit (*g*). Patet nimirum aërem rore thoracico contentum in vacuo ſe expandere debere pulmonem inter, & diaphragma, eademque ab invicem divellere, non ſecus ac ſcleroticae laminae ab aëre humoribus contento in vacuo divelluntur (*h*), aut marmorea plana ſibi adhaerentia in vacuo ſeparantur ab elatere aëris oleo inhaerentis, quo inunguntur (*i*). Itaque expandens ſe aër pulmones ita comprimet, ſanguinemque ita ab iisdem exprimet, ut, mortuo animali, exſangues, albique appareant; quod non continget, ſi aperto prius pectore aër ille libere exhauriri poſſit. Eadem vero cauſſa, quae pulmones comprimit, diaphragma etiam in oppoſitam partem detrudit.

LXX Enimvero haud veroſimile videtur, diaphragma depelli ab aëre in pulmone reſtitante, ac ſe expandente, quum aër ille libere per glottidem prodire poſſit, hinc pulmo in vacuo non intumeſcat, aut diſtrahatur, ſed contra denſior fiat (*k*), unde potius locum cedere diaphragmati deberet, ut altius in pectus aſſurgeret. Quemadmodum igitur in ſanguine ſecundum naturam nullae inſunt aëris bullae (IX), ita nec in cavo pectoris (*l*), & quemadmodum ex ſanguine bullae erumpunt, ſi in vacuo ſpatio conſtituatur (VII); ſic etiam videntur ex vapore perſpirante pectoris poſſe prodire, & memorata phaenomena.

(*g*) Haemast. exp. XII, n. 10.
(*h*) Muschembroek diſput. p. 587.
(*i*) Boyle experim. phyſico-mech. cont. I, exp. 50, I, p. 303, Purchotius inſtit. Philoſ. II, p. 329.
(*k*) Ut aquae fundum petat, modo animalia in vacuo lente enecentur, aut aliquamdiu poſt mortem in vacuo relinquantur (Verati com. Bon. T. II, P. I, p. 338, 339), & aër paullatim admittatur (Muschembroek. introd. §2167.
(*l*) Experimento a viris Cl. Lieberkunio, & Hallero inſtituto, V. Haller de reſpir, part, II, § 39, part. III, § 16.

mena producere. Proinde verosimile est ab aperto in vacuo pectoris cavo aërem erupturum non secus ac ab arteria, aut vena in eodem vacuo pertusa cernitur prodire.

LXXI Quamquam vero aërem internum cum externo aëre ad aequilibrium componi in pulmone inprimis existimem (XI, XII), ejusque aequilibrii servati aut restituti maximam esse utilitatem (XVII), haud tamen censeo hunc fuisse praecipuum pulmonis finem. Nam primo rarissime aut numquam natura tantam producit in pondere atmosphaerae mutationem, quae ipsius aequilibrium cum interno aëre insigniter valeat perturbare; dein etsi lentius, reparari tamen per alimenta id aequilibrium potuisset (X), & pulmo qualis in frigidis, aut insectorum tracheae ei promtius restituendo suffecissent: imo vero in piscibus, qui mutationi externae pressionis maxime sunt obnoxii, alia proculdubio ratione restituitur. Quare cum pulmo humano similis nonnisi calidis animalibus datus fuerit, concludendum videtur exhalationem, & inde consequens refrigerium, quibus calida animalia maxime egent, primarium esse respirationis usum. Vid. cap. praec.

JOANNIS PETRI MARIAE
DANA

De Solano melanocerafo H. R. Taur.

Quamquam Celeberr. LINNAEUS in eximio opere, quo PLANTARUM SPECIES complecti nititur, Solanum Guineenfe bis nominaverit, & ante ipfum Cl. DILLENIUS, ac BOERHAAVIUS plantam, de qua hic agitur, cognoverint; omnes tamen ipfius defcriptionem paucis complexi de viribus, & proprietatibus ejufdem nullam omnino mentionem fecerunt; nec alium Auctorem invenire datum eft, qui ipfius ufus memoriae mandaverit. Non inutile propterea duxi, paucis additis ad defcriptionem pertinentibus, in ejufdem proprietates, & ufus minime vulgares inquirere, ut demum intelligatur quomodo hucufque aut neglecta, aut fufpecta planta fuas late pandat utilitates.

Quod in Guinea fponte nafcatur BOERHAAVIUS (*Ind. alt. part. II. p. LXVIII n.° XVIII*) appellavit *Solanum Guineenfe fructu magno inftar Cerafi nigerrimo umbellato*, eodemque nomine DILLENIUS vocavit (*Eltham. p.* 336) & iconem dedit (*Tab. CCLXXIV fig.* 354) Botanicus fvecus fupra laudatus fimplici *guineenfis* Solani nomine (1) plantae fpeciem intellexit a noftra modo dicta, five a DILLENII, & BOERHAVII planta omnino diverfam, perennem, foliis laurinis. Hanc pro varietate fui *Solani nigri* pofuit, quam *guineenfem* vocat, & fic nomine tenus ab aliis varietatibus diftinguit in *Spec. plant.* (*pag.* 266). Hinc in *Syftematis naturae edit.* 12 *reformata* nullum aliud peculiare nomen *triviale* ipfi dedit. Quoniam vero per quindecim, & ultra annos in noftro Horto botanico excultum inermes ſpinas, quibus ſpecie ſatis diſtinguitur, nunquam dimiſit; ſed conſtanter ab omnibus Solani ſpeciebus tum acinorum ſucco purpuro-colorato, tum ſtatura, aliiſque notis diverſiſſimum ſe ſe oſtendiſſe vidi; ideo pro diſtincta plane ſpecie haberi, & nominari poſſe nullus dubito. Proptereaque triviali nomine melanoceraſi optime diſtingui puto cum Cl. VIRO CAROLO ALLIONIO BOT. PROF., quod nempe apte nomen hoc exprimat fructuum, ſeu baccarum hujus Solani ſimilitudinem, quae cum nigris ceraſi fructibus intercedit: quemadmodum idipſum immortalis BOERHAAVII, & oculatiſſimi DILLENII deſcriptiva nomina ſignificare voluerunt. Sub nomine *Solani ſurinamenſis* olim in Horto R. Taurinenſi excultam oſtendebat primus Praeceptor meus VITALIANUS DONATI, an quod hoc nomine ad ipſum ſemina miſſa fuerint? vel quod Surinamum pro patria revera quoque agnoſcat? neſcio. Praeter hos, eoſque, qui notiones inde hauſerunt, vix alium invenies, qui de eodem ſcripſerit.

Planta eſt glabra, bicubitalis fere, caule anguloſo, ramoſo, ſpinis ad angulos & ramos non pungentibus ſeu inermibus. Folia *Sol. officinalis*, ſeu *nigri* L. ampliora, angulata, lanceolata, obtuſa, alterna. Flores parvi ex baſi vireſcente exalbidi, ad limbum leviter purpuro-violacei, antheris fuſcis. Baccae ſphaericae, ceraſiformes, immaturae virides, per maturitatem atrae, magnitudine nucis avellanae, vel fructus ceraſi mediocris, lucentes, in racemos ſubumbellatos diſpoſitae, nitidae, viridi pulpa, & parvis, multis albidis, compreſſis orbiculatis ſeminibus faetae, ſucco purpuro-violaceum colorem ex ſe praebente praeditae. Succus odoris potius vinoſi eſt, quam graveolentis, & narcotici,

(1) *Spec. pl. ed. 2 pag. 263; & ſyſt. nat. ed. 12 reſor. pag. 173.*
(2) Miſcel. Taur. vol. V in auctar. ad H. R. Taur.. Eodemque referente, ab omni tempore in Horto jam exculta fuerat haec ſpecies.

uti a reliquis plantae partibus exhalat, per fermentationem praesertim vinosum odorem emittit.

Tota planta contusa, & retortae indita pondere librarum trium unciarum decem & drachmae unius, atque summo ignis gradu calcinata caput mortuum reliquit in fundo retortae pondere unciae unius drachmarum quinque & granorum triginta, coloris atri, saporis subsalsi; quod intra fornacem calcinatum in crucibulo mediam sui ponderis partem fere adhuc amitit, & cinerem reliquit albido-rubentem, ex quo per lixiviationem eductum est sal alkali fixum pondere drachmarum trium, & granorum duorum. Si a combustis Solani coloratis acinis obtenta cinereo-salina materies, vel sal inde elixiviatum simul in vitrum abire cogatur cum silice, vel alia excolore vitrescibili substantia, vitro ipsi colorem purpureum communicare suis experimentis detexit ingenio non minus, quam sanguine clarus D. Comes Morozzi (2), qui, ut in non paucis aliis plantarum cineribus, ita in hoc principia colorantia, fixa veluti, in igne manere expertus contendit, colorem suum, dum in vitrum transeunt, rursus ostensura. Baccae, earumrumque succus similia fere per analysim praebent principia chymica ac tota planta, licet salis fixi paulo minorem quantitatem largiantur, & aliqua in odore primae per destillationem prodeuntis aquae differentia intercedat.

Experimenta in maturo fructu, aut ejus succo recenter expresso plerumque tentata intelliguntur, nisi contrarium asseratur. Fructus obtinui ex planta tum in Horto Taurinensi Regio Botanico exculta, tum etiam ex aliis locis collinis, aut submontanis, vel campestribus satis agri Pedemontani; in quibus omnibus sub dio maturum fructum praebuit, & sua, utut annua radice hyemalis frigoris rigorem aliquando

(2) Examen physico-chimique sur la couleur des fleurs, & de quelques autres substances végétales. *Miscel. Soc. Reg. Taur. vol. V, tab. 2.*

tolleravit quando serius sata intra annum flores non dederat. Difficile propterea non erit magnam ipsius quantitatem, & ad opus quodcumque pro lubitu necessariam quotannis satione obtinere.

Cum syrupo succi expressi ab ejusdem Solani acinis maturitati proximis nonnulla experimenta instituii ad aquarum quarumdam mineralium examen praesertim commoda, & necessaria; quae nimirum similes produnt significationes, quales fere a syrupo florum violarum observari solent. Item cum nostro syrupo, & cum simili successu aliqua tentavi ex multis illis experimentis, quorum seriem olim (3) prosecutus est Illustrissimus Comes De Saluce, in quo acquisitae pro multiplici scientia laudes, & honores generis antiquitati pares, & indito scientiarum, ac artium amori debiti simul refulgent.

Colorum varietas, & pulchritudo, qui ex hac planta obtinentur, & extrahuntur primam hucusque sibi considerationem merentur ob usus, quos in pictoria non minus, quam tinctoria arte pollicentur. Et sane succus a maturis, vel submaturis & coloratis baccis expressus purpuro-violacei coloris pulcherrimi est, & ad usus pictorios supra chartam opportune adhibitus per se optime cedit, suumque colorem cum pauco etiam alumine & gummi diutissime sustinet. Idem succus brevi ad siccitatem Mariae Balneo, aut aliter, antequam corruptionis notas sibi relictus praebeat, evaporatus extractum largitur, quod similem colorem servat, &, ubi opus, prodit cum pauca aqua dilutum. Neque mutationes facile sentit hic color, quas tractu temporis hujusmodi picturae sponte pleraeque subeunt: saltem supra chartam a decem, & ultra annis pictae plantae, quae hunc colorem receperunt, hucusque immutatae servantur; dum non pauci alii plantarum colorati succi his, quas sola dies affert, mutationibus facile deturpantur. Quo-

(3) In Miscellan. Taur. Vol. III p. 153.

niam vero vividiorem, & magis purpurascentem colorem hujus Solani baccae recentes praebent, quam ad corruptionem tendentes, non incongruum erit adnotare easdem per totum fere annum in aëre aperto servari posse, licet tandem flaccidae fiant, aut siccescant in aëre nimis sicco. Servandi modus multiplex est: sic vel cum ramorum, quibus valde adhaerent, summitatibus in loco frigidiusculo suspenduntur; vel in liquore oleoso, aut appropriato alio, ex. ca. spiritu vini, aut aqua aluminosa immersae detinentur loco frigido, ut tumentes, & satis ad usum accommodatae baccae serventur: ob densam nimirum cutem, qua teguntur, sic propriam diu, quam etiam habent maturae, duritiem servant. Optimam aliam solanacei hujus coloris servandi methodum eam esse probabis, quae communis fere succo Solani est cum aliis coloratis quibusdam liquoribus, qui sibi relicti sub forma fluida mutarentur, uti est color carthami tinctorii &c.: sumuntur nempe stamina cannabis carptae, mundatae, & ad optima fila ducenda paratae; macerantur aliquantisper in aqua; dein probe lota, & exsiccata in purum, vel praeparatum plantae succum immerguntur; mox brevi exsiccata sine expressione, in aëre aperto, & calido, loco clauso, tuto, ac sicco servantur ad usum. Tincturam, qua onusta fuerit cannabis, filaque ejus, simplici immersione deinde, quolibet dato tempore, immutatam facile restituent aquae, ex qua fere decolor eximi poterit; & color aquae communicatus ad setam, ubi opus, tingendam, aliosque usus pictorios traduci poterit. Chartae emporeticae ad similes etiam usus succo imbutae inserviunt, aliaque.

Dixi spiritu vini quoque rubram tincturam elici ex baccis integris, earumve cortice. Haec tamen tinctura longe intensior, & plane purpurea ex iisdem disruptis obtinetur, quae non, quemadmodum succus, fermentationi vinosae; & mox putrefactioni subjacet, sed sub hac forma colorantes particulas potest diutius conservare. Pars igitur principiorum colorantium resinosam indolem praesefert, quamvis succus ipse in concreto naturaliter existens totus in aqua pura solvi possit. Idipsum confirmatur experimentis, quibus constat purum succum absque aluminis subsidio suum setae colorem vividum probe communicare; quod coloribus simpliciter gummoso-extractivis vix convenit, saltem his minus proprium censetur teste Clarissimo MACQUERO. (4) Sperandum propterea videtur ob eam causam, quod resinoso etiam principio vis inhaereat tinctoria, perfectiores, & solidiores adhuc has, aliasque reddi posse tincturas ex continuata horum, aliorumque cum hoc Solano instituendorum experimentorum serie.

Non omnia nunc recensebo experimenta a me facta supra Solani hujus melanocerasi plantam, & praesertim supra succum baccarum ejus recentem, vel ad extracti formam per evaporationem redactum, ut ipsius indolem detegerem. Aliqua tantum attingam, quoniam naturam, & proprietates respiciunt stirpis, a nemine, quod sciam, ante hanc diem accurate perpensas. Sic recenter expressus purpureus Solani melanocerasi succus ab aceti spiritu, & ab ipso aceto plus minusve purpuro-griseum colorem induit; a succo limonum dilute & pallide rubentem; a stillatitiis spiritibus acidis salis marini, & nitri in aqua dilutis plus minus intense rubrum, coccineumque; ab oleo vitrioli similiter soluto vividissimum cinnabarinum, qui sibi diutius relictus in lutescentem vergit, & demum flocculos in fluido innatantes sensim prodit. Cum aluminis solutione idem succus dat laete caeruleum colorem variae intensitatis pro varia utriusque ad diluentem aquam proportione, qui memoratis picturis commode inservit. Vitriolum martis obscure caeruleum, at mutabilem

(4) Passim in suo dictionario chymico anonymo; & in egregio opere *l'art de la teinture en soye.*

reddit. Alkalini ſales, calx, & aqua calcis ad viridem diverſimode diſponunt, ac immutant. Attamen, ſi ad telas pingendas adhibeatur, praeſtat, experientia teſte, cum calce miſcere, quam cum ſalibus, quorum actione fortaſſe nimia, lintea debiliora reddi poſſent, & ſucci pars in flocculos per liquidum diſperſos cogi: ſic viridis optimus color vili praetio habebitur.

Quod ſi matureſcentes eaedem baccae contuſae, fermentationem vinoſam paſſae putrefactionem ſponte ſuccedentem ſuſtineant, & expreſſus inde foetens (6) liquor lente ad ignem evaporet, obſcurum extractum habebitur, cujus colorem *umbraticum* appellare poſſemus, ob ſuam ad corporum umbras praeſertim ſupra chartam pingendas utilitatem. Hic color prae caeteris optimus eſt ad ſicceſcentes plantarum partes, praecipue ad earumdem caules, & non paucas radices perfecte imitandas, quin mutationibus facile ſubjiciantur picturae exinde elaboratae.

Verum

(6) Hunc foetorem tandem poſt ſex, & ultra menſes ſervatus, & ad ſolem expoſitus in vitrea ampla phiala obturaculo chartaceo tecta, fere amiſit, & in liquamen abiit, quod decantatum conſpiciendam in vaſis fundo reliquit materiam grumoſe concretam, nec cryſtallizatam, in aqua fontis nullatenus, & ex parte tantum in ſpiritu vini ſolubilem, aqua ſpecifice leviorem, indeque ſupernatantem, terrae fullonicae, ſaponi, vel ſinectidi exteriori facie ſimilem, at peculiaris naturae ſubinſipidam, nauſeam moventem, parumper ingrate odoratam, exalbeſcente pallido colore praeditam. Haec inflammata oleum nigrum extus emiſit, quod laetam, nec ſcintillantem flammam diu aluit ſine ingrato odore: pauci poſt combuſtionem relicti cineres cum oleo vitrioli efferbuerunt alkalinae ſuae naturae indicio; an calcareae, vel ſalinae? hucuſque non ſum expertus. Ex dictis interim fere patet concretionem hanc novum eſſe alkalino-oleoſum, & ſingulare artis productum, cujus naturam, & uſus hactenus omnino ignoramus, licet quaſdam ſaponis, alias reſinae proprietates ipſum oſtenderit.

Verum de virtutibus (7) medicis, quas hucusque non sum expertus, nihil addens jam alias ad setam tingendam a me probatas exponam (8). Quod, ut brevi fiat, aliqua tantum ex multis experimentis eligam, quae inter privatos parietes primum feci ann. 1769, 1770: tum deinde repetii, & sum prosecutus ann. 1771, 1772 in Regio Tincturae laboratorio, ut speciali in hanc rem jussui AUGUSTISSIMI, ET INVICTISSIMI REGIS parerem, CUI colorum hoc Solano obtentorum specimina quaedam non displicuerunt; QUIQUE ideo Perillustrem D. COMITEM D'AGLIÈ ab ALLADIO ad Tinctoriae, aliarumque artium culturam promovendam speciatim, & ex hereditaria veluti propensione addictum publicae utilitatis causa experimentis repetendis praeesse voluit. Theoriam horum, aliorumque experimentorum alio fortasse tempore una cum aliis adhuc instituendis prodam.

I.

Sapone Massiliensi venali dealbata seta, mox indita *simplici tepentique baccarum Solani melanocerasi succo* colorem induit ex purpureo ad violaceum tendentem, vulgo nobis dictum *d'Isabella chiaro*, qui repetitis lotionibus, & immersionibus non magis evanuit, nec aliae mutationi subje-

(7) Si ex indole plerarumque congenerum, & praesertim ex affinitate cum Solano vulgari nigro officinarum de Solani melanocerasi, viribus medicis aliquid per analogiam conjectare liceret, & odor, sapor, analysis consulerentur, pro usu interno infidas, & de veneno suspectas protinus fore hucusque suspicarer: pro externo autem usu fortasse non spernendas resolventes, discutientes anodynas inesse in foliis, caulibus, & floribus: atque lenientes, detergentesque adversus carcinomata insanabilia in fructuum succo recenti, & depurato reperiri posse non obstupescerem.

(8) Ex antecedentium consideratione ad applicationem principiorum colorantium supra setam deveniri posse putavi. Nec spem fefellit eventus, uti etiam ipso tinctorum lato super hanc tincturam judicio jam satis constat.

ctus fuit, quam ſoleat longo labore, & longe majori temporis, ac auri diſpendio paratus color Lichenis Rocellae L. Italis *oricello*, aliique diverſi generis, ex. gr. Carthami, Luteolae &c. Intenſior ad violaceum uſque fiet ſetae color, ſi poſt repetitam in idem tepens balneum immerſionem ipſa exſiccari ſinatur, quem vocant *lilla violante*.

I I

Baccae integrae *cum ſucco earumdem expreſſo coctae*, & deinde expreſſae balneum praebuere, in quod *ad ebullitionem uſque calefactum* demerſa ſimilis ſeta colorem vividiſſimum poſt opportunas lotiones acquiſivit griſeo-ſubpurpuraſcentem, quem tinctores apud nos vocant *gris de prince*. Hic variae intenſitatis fuit pro varia liquoris tingentis ad ſetam, vel additam aquam proportione, & pro vario tempore ebullitionis. Hos colores a nulla alia planta adeo facile obtineri norunt tinctores.

I I I

Sic jam tinctis ſetis (n. I, II), vel ipſi balneo addita levis quantitas ſucci limonum colorem dat pallide ſubpurpureum, ut in vulgaris Colchici floribus ineſt, qui nobis audit *color di frejdolina chiaro*. Vividus utique per ſe hic etiam eſt, at ex laeviſſima Carthami florum tinctura ad roſeum dilutiſſimum mox accedet.

I V

Eadem (n. I, II) tincta ſeta intenſiorem florum Colchici colorem adipiſcetur ex levi acidi vitriolici in multo liquido diluti, & probe mixti additione. At rigiditas inde aliqua ſetae infertur, unde fortaſſe ſuſpectus eſſe poſſet hujus tincturae uſus.

V

Succus a Solano expressus, & spiritui vini vulgari junctus, sive *tinctura spirituosa ex baccis* dealbatae, & siccatae setae colorem dabit *purpuro-rubentem*, veluti vinosum; qui minus intensus erit, si ante immersionem seta non fuerit probe siccata. Si huic balneo succi limonum parva quantitas addatur, seta immersa colorem acquiret levissime purpureum. Sed in hisce tribus casibus setae color peculiariter *lucens*, & *nitidior* erit, quod a spiritu vini fortasse provenit colorantia resinosa elementa intimius penetrante, solvente, & intra setam inducente. Etenim insuper iidem quoque colores difficilius (6) mutabiles in ipsa seta observantur.

V I

Ex variorum alkalinorum additione mutationes tales balneo communicatae sunt, ut minus facile applicandos, & minus optabiles colores seta deinde immersa obtinuerit.

V I I

Exceptione tamen omnino digna sunt bina producta alkalinae indolis, quae a Spartio scopario Lin. eduxit Perillustris Comes Morozzi, mihique obtulit experiunda; scilicet *sal alkali fixum* ex combusta Spartii scoparii planta eductum per cineris ejusdem elixiviationem; & *spiritus oleosus alkalinus* volatilis, empyreumatico-foetidissimus per distillationem A. B. obtentus. Etenim sive cum simplici Solani succo, sive cum addito alumine, aliisve, pro varia

(9) Immutabiles fere colores setae nemo hactenus indidit, licet dentur varii eorum mutabilitatis gradus, plus minusve facile inducendi, dum aëri, & Soli seta diutius exponitur.

ingredientium applicatione, & proportione, ea producta communicant immersae setae varios colores maxime nitidos, & vivaces, griseos, argenteos, atque caerulescentes. Si loco salis Spartii modo laudati sal aliud alkali fixum ex. gr. tartari adhibeatur, memorati colores nullatenus sese produnt: unde etiam eruitur notabile horum fixorum salium, novumque discrimen; utlibet in pluribus aliis proprietatibus inter se vere conveniant.

VIII.

Solani succus in aqua leviter nitrata solutus griseum pulchrum caeteris intensiorem setae colorem communicat.

IX

Seta sapone minime dealbata, seu cruda, tum etiam alumine nullatenus penetrata hujus tincturas, seu principia colorantia baccarum Solani per se satis facile, & melius recipit, & firmius tenet, quam sapone, & alumine praeparata. Immo, si saponem adhibitum nimia copia alkalini salis ingrediatur, praestabit semel setam intra aquam limonum succo leviter acidulatam immergere, tum ex aqua fontis saepius eluere, ut deinde purpureus color melius, nec ad caeruleum inclinans setae communicetur per Solani succum tingendae.

X

Praeter hucusque dictos colores alii enati sunt ex quorumdam tincturae ingredientium connubio, medii veluti, & quales ab alterutro ingredientium obtineri non possunt. Inter hos fuit supra setam color nuceus variae intensitatis ad rubicundum vergens; murinus, griseus margaritaceus clarus, caerulans, caffè tosti, vel magis clari, & rubescentis, &c. de quibus nihil addo, quia aeque solidi ac optimi magis facile, aut minori sumptu aliter parari possunt.

SECOND MÉMOIRE

Sur la differente diſſolubilité de ſels neutres dans l'eſprit de vin, (1) contenant des obſervations particulières ſur pluſieurs de ces ſels.

Par M.r MAQUER.

Quoique l'objet que j'aie eu principalement en vüe dans ce travail, ait été de reconnoitre l'action de l'eſprit de vin ſur les ſels neutres, c'eſt-à dire ſur les composés qui réſultent de l'union d'un acide quelconque avec une ſubſtance de quelque nature qu'elle ſoit, j'ai ſenti cependant, en continuant ces recherches, qu'il étoit nécéſſaire de les étendre encore plus loin, & de déterminer, autant que cela ſeroit poſſible, la manière dont l'eſprit de vin agit ſur les ſubſtances mêmes, dont l'union peut former des ſels neutres.

Les phénomènes de combinaiſons que préſente ce diſſolvant avec les acides vitriolique, nitreux & marin, étant déjà bien connus par les travaux d'un grand nombre de Chimiſtes très-éclairés, j'ai cru qu'il étoit inutile de revenir ſur cette matière qui paroit éclaircie autant qu'elle peut l'être. Mais il n'en eſt pas de même de ceux que l'eſprit ardent peut offrir avec les ſubſtances ſuſceptibles de s'unir aux acides, & principalement avec les matières ſalines alkalines. J'ai penſé par cette raiſon qu'il étoit à propos de faire quelques expériences ſur ces dernières, avant d'aller

(1) Le premier Mémoire ſe trouve dans le III Vol.

plus loin; il auroit même, sans-doute, été mieux de s'en occuper d'abord; mais dans des recherches comme celles-ci qui n'ont pour but que de bien constater des faits essentiels à connoître, & de rassembler des matériaux qui pourront être employés par la suite avec succès, il est toujours tems de fouiller dans la carrière & d'en extraire les matières premières. Je reviendrai donc, pour ainsi dire ici, sur mes pas; je commencerai par l'examen des phénomènes qu'offre l'esprit de vin avec les alkalis fixes, végétal & minéral, avec l'alkali volatil, ensuite avant que de traiter des sels neutres tartareux ou tartres solubles, dont il s'agira principalement dans ce second mémoire, je reconnoitrai la manière dont se comporte l'acide tartareux pur avec l'esprit de vin, & enfin je le terminerai par deux épreuves sur l'arsenic & le sel neutre arsenical, qui seront ici des espéces de hors d'œuvre, mais qui doivent cependant entrer quelque part dans un travail de la nature de celui-ci.

Alkali fixe du tartre.

J'ai pris de l'alkali fixe du tartre, très-blanc, très-sec, purifié avec tout le soin possible par les dissolutions, filtrations, & désiccation parfaite; j'ai fait bouillir dessus dans un matras, du même esprit de vin qui m'avoit servi pour les expériences de mon premier mémoire.

Au premier contact de l'esprit de vin, l'alkali a commencé par se pelotter, & ensuite a formé par l'ebullition, une sorte de liqueur épaisse blanche & trouble qui occupoit le fond du matras. Cette espéce de liquefaction du sel alkali est due, comme l'on sait, à une petite portion de flegme dont l'esprit de vin le mieux rectifié n'est jamais entièrement exempt, quand il l'à été par la simple distillation, sans aucun intermède, tel que l'est celui dont je me sers. Je dois faire observer aussi que dans l'expérience dont je parle là quantité de l'eſprit de vin étoit trois fois plus grande que celle de l'alkali.

Après l'ebullition, j'ai décanté l'eſprit de vin encore très-chaud, puis je l'ai filtré par le papier gris quoi qu'il fut fort clair; il a paſſé très-limpide.

Quelques gouttes de cet eſprit de vin miſes ſur une glace ſe ſont évaporées en aſſèz peu de tems à l'air libre, & y ont laiſſé des criſtaux figurés en lames d'épée; quelques uns de ces criſtaux étoient ſolitaires; mais la plus part étoient croiſés deux à deux l'un ſur l'autre, avec cette ſingularité, que l'un beaucoup moins long que l'autre coupoit ce dernier à angles droits vers une de ſes extrémités de manière qu' ils repreſentoient enſemble une croix, ou encore mieux une de ces épées à l'antique dont la poignée & la garde forment une croix.

J'ai fait évaporer à une chaleur douce de bain de ſable cet eſprit de vin qui avoit bouilli ſur l'alkali fixe du tartre, à meſure que la liqueur s'évaporoit, elle contractoit une couleur d'abord jaune, puis rouſsâtre & une ſaveur acre alkaline.

Lors qu'elle a été évaporée aux trois quarts, j'en ai mis une portion dans une capſule de verre, pour la laiſſer achever de s'évaporer à la ſeule chaleur de l'air; il s'eſt formé dans celle-ci des criſtaux d'une forme toute différente : c' étoient des pyramides quadrangulaires fort baſſes, dont les élemens étoient des quarrés réguliers, poſés les uns ſur les autres, & décroiſſans depuis la baſe, juſqu'au ſommet; on diſtinguait très-bien au microſcope la ſéparation de ces élémens quarrés qui formoient comme des eſpéces d'eſcaliers, ou de gradins ſur chaque face de la pyramide.

Une demi once du même eſprit de vin qui avoit bouilli ſur l'alkali du tartre, évaporée tout de ſuite juſqu' à ſiccité au bain de ſable à une chaleur aſſez forte, dans une petite tasse ou capsule de porcelaine, a laissé deux grains d'une matière rousse, foncée, dans laquelle il n'y avoit aucune cristallisation. Cette matière avoit une saveur âcre alkaline, verdissoit fortement le syrop violat, & avoit les caractères d'un composé huileux, savonneux alkalin; elle se dissolvoit également bien dans l'eau, ou dans l'esprit de vin.

La flamme d'une autre demi once du même esprit de vin, ne differoit point sensiblement de celle de l'esprit de vin pur, il est resté dans la capsule qui avoit servi à cette déflagration un enduit d'une matière toute semblable à celle que je viens de décrire.

Une circonstance remarquable de l'expérience dont je viens de rendre compte, c'est que l'espéce de dissolution aqueuse de l'alkali sur lequel j'avois fait bouillir l'esprit de vin, s'est coagulée toute entière par le seul refroidissement, en une masse blanche, saline, cristallisée, mais en cristaux infiniment petits, confus, entassés, & dont je n'ai pu déterminer d'abord la forme à cause de leur petitesse & probablement aussi à cause de leur irrégularité & de leur confusion.

L'ayant redissous dans de l'eau & laissé cristalliser dans une capsule de verre, j'ai obtenu une cristallisation en belles ramifications composées d'aiguilles ou de filamens longs; mais qui par cela même ne me présentant point de cristaux solitaires, ne m'en laissoit point distinguer la vraie forme; il y avoit cependant dans des intervalles de ces ramifications quelques cristaux solitaires très-petits, bien reguliers, & formant des tranches de prismes exagonaux ou des solides absolument semblables à des carreaux de chambre.

On fait pour l'usage de la médecine une préparation nommée *teinture de sel de tartre* & qui consiste à verser sur de l'alkali fixe de tartre, bien calciné & encore tout chaud, de l'eſprit de vin rectifié, & à laiſſer ce mélange en digeſtion dans un matras au bain de ſable pendant plusieurs jours, ou juſqu'à ce que l'eſprit de vin ait acquis une couleur jaune foncée.

Le reſultat de cette préparation devant avoir beaucoup de rapport avec celui de l'expérience dont je viens de rendre compte, j'ai voulu comparer l'un à l'autre.

J'avois environ dix ou douze onces de cette teinture de ſel de tartre extremement foncée en couleur, & qui étoit dans mon laboratoire depuis plus de vingt ans dans une bouteille bouchée d'un ſimple bouchon de liège.

J'ai trouvé en l'examinant que cette liqueur avoit perdu une partie de ſa couleur, quoi qu'elle en conſervat encore beaucoup, & qu'il s'étoit formé au fond un depôt partie liquide, partie ſolide d'une intenſité de couleur beaucoup plus grande.

Cette liqueur verdiſſoit le ſyrop violat, avoit une ſaveur mêlée de la ſpiritueuſe, & de l'alkaline. Sa flamme ne différoit point ſenſiblement de celle de l'eſprit de vin pur. En ayant fait évaporer une portion dans une capſule de verre à l'air libre, après que la liqueur a été évaporeé à peu près au trois quarts, j'ai obſerve qu'elle paroiſſoit un mélange de deux liqueurs très différentes, & très diſtinctes; l'une ſans couleur comme de l'eau, & l'autre d'un jaune foncé; cette dernière nageoit dans la première en forme de gouttes ou de globules exactement ſemblables à ceux d'une huile jaune qui auroit été mêlée avec de l'eau par la ſecouſſe. Après l'évaporation totale, à une chaleur douce de bain de ſable, elle a laiſſé dans la capſule un enduit d'un jaune brun, criſtaliſé confuſément, mais formant cependant très ſenſiblement des lames en quarrés longs.

Au fond de la bouteille qui contenoit cette ancienne teinture de ſel de tartre; il y avoit, comme je l'ai dit, un dépôt dont une partie étoit fluide, & formoit environ deux gros d'une liqueur tranſparente, mais d'un jaune fort brun.

J'ai ſéparé cette liqueur par l'entonnoir; elle ne s'eſt point diſſoute dans de nouvel eſprit de vin que j'ai verſé deſſus; ſa ſaveur étoit acre, très alkaline, & nullement ſpiritueuſe: par l'évaporation à l'air libre elle s'eſt épaiſſie, & a formé différentes criſtalliſations; elle s'eſt diſſoute entièrement dans l'eau; l'acide marin affoibli, s'y eſt mèlé avec effervefcence, & en a ſéparé des floccons bruns.

Cette liqueur étoit, comme je l'ai dit, au fond de la bouteille mêlée d'une certaine quantité de matière ſolide de même couleur; cette derniere examinée ſéparément avoit une conſiſtance gélatineuſe, elle ne s'eſt laiſſé diſſoudre, ni par l'eau, ni par l'eſprit de vin, ni par les alkalis, ni par les acides.

Toute la bouteille étoit enduite intérieurement d'une pellicule, preſque ſemblable pour le coup d'œil aux incruſtations que fait l'eau de chaux, & a reſiſté à tous les diſſolvans, & à tous les frottemens que j'ai pu employer pour l'enlever.

Enfin pour terminer ce qui concerne cette ancienne teinture de ſel de tartre, j'en ai pris une demi once de très claire, & bien ſéparée des différens dépôts dont je viens de parler, & l'ayant fait évaporer au bain de ſable juſqu'à ſiccité dans une capſule de porcelaine, elle y a laiſſé dix grains d'un réſidu de couleur de caramel, ou ſucre à demi brulé; ce réſidu étoit alkalin, ſavonneux, très déliqueſcent, & d'une odeur forte que je ne puis comparer à aucune odeur connue.

Ces effets de l'eſprit de vin ſur l'alkali fixe végétal prouvent bien manifeſtement qu'il en peut diſſoudre, ſurtout avec le temps une quantité aſſez ſenſible; mais il eſt essentiel de remarquer que cette dissolution n' est point entièrement semblable à celle des sels neutres dans l' eau, ou même dans l' esprit de vin, car dans ces dernieres ni le dissolvant ni le sel dissous ne reçoivent d' altération sensible; ce dont on peut s' assurer en les examinant après les avoir séparés l' un de l' autre, au lieu que dans celle de l' alkali fixe par l' esprit de vin, il paroit que ces deux substances s'alterent & se décomposent en partie, & reciproquement.

L' état de l' alkali fixe qui a été dissous dans l' esprit de vin, & qui en a été ensuite séparé, soit par l' évaporation de ce dissolvant, comme dans la première experience, soit par dépôt, & avec le temps, comme dans mon ancienne teinture de sel de tartre, prouve qu' il est chargé d' une matière huileuse qu' il a extraite de l' esprit de vin, ou qu' il a formée en agissant sur les principes de ce composé, & d' une autre part, le dépôt solide gélatineux, ainsi que l' enduit terreux de la bouteille, qui proviennent sans doute de l' alkali, indiquent que cette matière saline, est aussi en partie décomposée par l' action de l' esprit de vin; mais je n' entreprends point pour le présent de déterminer exactement en quoi consistent ces altérations, & quelles en sont les causes, par ce qu' il faudroit pour celà une nombreuse suite d' expériences d' un genre tout différent de celles dont il s' agit dans ce mémoire, & qui me détourneroit de mon objet, au quel je reviens en examinant suivant mon plan d' autres matières salines.

Alkali marin.

L' esprit de vin, après avoir bouilli sur ce sel bien dessseché, & après avoir été filtré, a brulé avec une flamme qui ne différoit pas bien sensiblement de celle de l' esprit de vin pur, il avoit une saveur un peu salée; soumis à l' évaporation au bain de sable, lorsqu' il a été diminué à peu près des trois quarts, il avoit une couleur roussâtre, & une saveur un peu salée, une partie de cette liqueur reduite, & évaporée à l' air libre sur une glace, y a laissé des cristaux cubiques bien réguliers.

La demi once de cet esprit de vin évaporée jusqu' à siccité, dans une capsule de porcelaine, a laissé deux grains d' une matière saline, roussâtre d' une saveur de sel marin.

On voit par cette expérience que l' alkali minéral se comporte avec l' esprit de vin de même que l' alkali végétal; il s' en dissout la même quantité $\frac{2}{298}$. La couleur roussâtre de celui qui a été dissous indique qu' il agit aussi sur la partie huileuse, de l' esprit de vin ou sur les principes de ce composé qui sont propres à former une combinaison huileuse, de la même manière que le fait l' alkali fixe végétal.

Alkali volatil du sel ammoniac.

Je me suis servi pour reconnoître la dissolubilité de cette matière saline dans l'esprit de vin, de l'alkali volatil concret qui avoit été dégagé du sel ammoniac par l'intermède de l' alkali fixe végétal, j'ai laissé èvaporer à l' air libre sur une glace une portion de l' esprit de vin bien filtré que j' avois fait bouillir dans un matras sur cet alkali volatil; il s' est formé par cette évaporation une cristallisation assez abondante dans la quelle je n' ai pu distinguer même à l' aide d' une forte loupe aucun cristal solitaire ou isolé

d' une

d' une forme regulière ; mais l' ensemble de cette cristallisation représentoit tout ce qu' on peut imaginer de plus beau & de mieux dessiné en ramifications, arborisations, tiges très agréablement courbées, & garnies de larges feuillages. Mais par le refroidissement du reste de la liqueur dans une fiole bouchée, il s' est formé une quantité assez considérable de cristaux séparés, & non groupés, figurés comme des tranches de colonnes prismatiques à six côtés, sans y comprendre les faces supérieure & inférieure, qui étoient les deux grandes faces de chaque cristal; ces faces étoient par conséquent des exagones; mais il n' y en avoit qu' un petit nombre qui fussent réguliers: dans la plus part il y avoit un, deux, ou trois côtés plus petits que les autres.

Voila, comme on voit deux cristallisations bien différentes l' une de l' autre d' une même matière saline, dissoute dans la meme liqueur, mais la première s' est faite par l' évaporation sur une surface plane, & la seconde par le refroidissement dans un vaisseau sphérique, & ç' a été sans doute de ces seules différences qu' a dépendu la forme si defférente de ces deux cristallisations; ces effets sont très ordinaires dans la cristallisation; ils prouvent combien il reste d' observations à faire sur les phénomènes de cette opération importante.

Je crois qu' on peut conclure de ce que je viens d' exposer, que le vraie forme des cristaux de l' alkali volatil concret est celle que j'ai obtenue par le refroidissement sans évaporation, & je présume que ce moyen est le seul d' obtenir des cristaux solitaires, & réguliers de cette matière saline.

L' alkali volatil étant aumoins aussi évaporable que l'esprit de vin, je ne pouvois me servir de l' évaporation pour déterminer combien l' esprit de vin pouvoit en dissoudre à l'aide de la chaleur de l' ébullition comme je l' ai pratiqué pour tous les autres ſels; & la diſtillation étant une véritable évaporation dans les vaiſſeaux clos, ce dernier moyen ne paroiſſoit guère plus propre que le premier à remplir mon objet; j' ai voulu voir néanmoins ſi à l'aide d' une chaleur bien ménagée dans les vaiſſeaux clos, on ne pourroit point parvenir à faire la ſéparation que j' avois en vue; j' ai donc mis dans une cornue de verre de mon eſprit de vin encore chaud & ſaturé d' alkali volatil par l' ébullition, & après y avoir luté un récipient très exactement, j' ai procédé à la diſtillation à une chaleur des plus foibles du bain de ſable. Il a paſſé d' abord de l'alkali volatil qui s' eſt criſtalliſé en belles ramifications ſur les parois du récipient; mais preſque en même temps, il eſt monté auſſi de l' eſprit de vin encore très chargé d'alkali volatil, & la diſtillation ayant été ceſſée après que les trois quarts de la liqueur ont été paſſé dans le récipient, le quart reſtant dans la cornue s' eſt trouvé, à en juger par ſon odeur, tout auſſi chargé d' alkali volatil qu' il l' étoit avant cette opération, & j' en ai conclu qu' il falloit avoir recours à un autre moyen pour déterminer la quantité d' alkali volatil que l' eſprit de vin peut diſſoudre à l' aide de l' ébullition.

Pour y parvenir j' ai mis dans une fiole un gros d' alkali volatil concret; j' ai fait bouillir deſſus, la fiole étant bouchée, une once de mon eſprit de vin; enſuite je l'ai décanté tout chaud, & après avoir laiſſé bien égouter la fiole, & le ſel qu' elle contenoit, j' ai trouvé qu' elle ne contenoit plus qu' un demi gros de ſel, d' ou j'ai conclu que la demi once d' eſprit de vin avoit diſſous, à l' aide de l' ébullition, 18 grains ou $\frac{18}{288}$ d' alkali volatil concret.

J' ai obſervé dans cette expérience que, malgré la promptitude avec la quelle j' avois décanté l' eſprit de vin, chargé d' alkali volatil, le peu qui en étoit reſté adhérent au col, & aux parois du matras, y avoit formé, avant qu' il pût-être parfaitement égouté, des criſtalliſations, partie en aiguilles entre croiſées, partie en criſtaux exagonaux ſemblables à ceux qui ont été décrits ci-deſſus.

Les phénomènes de criſtalliſation par refroidiſſement & par évaporation que l' alkali volatil m' avoit préſentés avec l' eſprit de vin, m' ont paru mériter que je vérifiaſſe s'ils ſeroient les mêmes avec l'eau, j' ai donc fait diſſoudre, à l' aide de la chaleur beaucoup d'alkali volatil dans de l'eau pure, & ayant bien bouché la fiole dans la quelle cette diſſolution s' étoit faite, je l' ai laiſſé refroidir à l' air, le termométre de Réaumur étant alors à 13 dégrés au deſſus de zero; il s' eſt formé par le refroidiſſement une grande quantité de criſtaux ſolitaires en partie à la ſurface, mais en plus grande quantité au fond de la liqueur; ces criſtaux avoient exactement la même forme éxagonale que ceux qui s' étoient formés par refroidiſſement dans l' eſprit de vin; il n' y avoit point d' aiguilles ni de ramifications aux parois de la bouteille.

Après que cette liqueur a eu dépoſé ces criſtaux par refroidiſſement, j' en ai mis une portion ſur une glace plane, pour la faire criſtalliſer par évaporation; il s' y eſt formé encore quelques criſtaux ſemblables aux précédens; mais la plus grande partie de la criſtalliſation s' eſt faite en belles ramifications branchues; il eſt à remarquer qu' elles étoient toutes formées par des lignes droites, faiſant différens angles les unes avec les autres, & ſans aucune de ces belles courbures, dont j' ai parlé plus haut; il y avoit parmi ces criſtaux un aſſez grand nombre d' aiguilles priſmatiques quadrangulaires.

Je ferai remarquer de plus qu' ayant voulu faire criſtalliſer de même par évaporation une diſſolution d' alkali volatil dans l' eſprit de vin, la quelle avoit dépoſé depuis huit jours tout ce qu'elle pouvoit former de criſtaux par le refroidiſſement, elle n' a formé par l' évaporation ſur la glace plane aucune eſpèce de ramifications, mais ſeulement une grande quantité de criſtaux très petits & informes, comme des grains de ſablon, ce qui me fait préſumer que l' alkali volatil ne peut ſe criſtalliſer en ramifications, & ſurtout prendre des formes courbes agréables que lors qu' il n' eſt étendu que par une petite quantité de diſſolvant ſpiritueux, ou peut-être même ſimplement aqueux, mais ces phénomènes de criſtalliſation m'éloignant de mon objet principal, je me hâte d' y revenir par l' examen de la diſſolubilité de différens ſels neutres dans l' eſprit de vin, & je commence par pluſieurs tartres ſolubles.

Tartre ſoluble, ou ſel végétal.

Ce ſel réſulte, comme on ſait de la ſaturation de la crême de tartre par l' alkali fixe du tartre, ou végétal.

L'eſprit de vin ayant bouilli ſur ce ſel bien deſſeché, puis ayant été ſiltré tout chaud a fourni par l' évaporation juſqu' à ſiccité dans une capſule de porcelaine une matière ſaline jaunâtre, à raiſon de deux grains, ou $\frac{2}{288}$ par demi once.

La flamme de cet eſprit de vin étoit un peu décrépitante, ce qui n' arrive point à celle de l' eſprit de vin pur.

Ce diſſolvant chargé de ce ſel a fourni par l' évaporation ſpontanée, dans une capſule de verre, des criſtaux en piramides quadrangulairés, dont quelques unes étoient tronquées par la pointe: pluſieurs de ces criſtaux étoient ſolitaires, & très réguliers, l' eau chargée de ce même ſel a donné par l' évaporation à l' air libre, dans une capſule de verre, des criſtaux, dont quelques uns étoient ſolitaires, & formés en priſmes à quatre côtés pointus par les deux bouts: ceux qui étoient groupés étoient joints en grand nombre tous par un de leurs bouts, & formoient des aſſemblages en rond tout heriſſés. La couleur jaune du ſel végétal féparé de l' efprit de vin par l' évaporation à ficcité femble indiquer que ce fel reçoit quelque altération par fa diffolution dans l' efprit de vin, & par fa deficcation, & ce qui confirme ce foupçon, c' eft que le fel fur le quel l' efprit de vin avoit bouilli, rediffous dans l' eau n' a fait qu' une diffolution trouble.

Sel de Saignette.

L' efprit de vin n' a point diffous une quantité appréciable de ce fel bien deffeché à l' air, & la flamme de celui qui avoit bouilli deffus ne differoit point de celle de l' efprit de vin pur. Mais ayant voulu répéter cette expérience en me fervant de fel de faignette non deffeché, criftallifé, & contenant par conféquent fon eau de criftallifation, cela m' a donné lieu d' obferver un effet qui me paroit fingulier, & que je ne dois pas paffer fous filence; c' eft que au dégré de chaleur néceffaire pour faire bouillir l' efprit de vin, le quel, comme l' on fait n' eft pas bien confidérable, ce fel s' eft liquefié fous l' efprit de vin, & a formé une liqueur fluide, & tranfparente comme de l' eau; cette liqueur occupoit le fond du matras: elle s' eft coagulée par le refroidiffement en une maffe faline folide, & d' une feule pièce.

Cet effet prouve la grande facilité qu' a le fel de faignette à fe liquefier à l'aide de fon eau de criftallifation; mais il en réfulte auffi que l' efprit de vin ne peut lui enlever cette même eau, quoiqu' il la perde par la feule action de l' air. En feroit-il de même de tous les autres fels? C' eft ce qui n' eft pas à préfumer; il y a lieu de croire au contraire qu' on trouvera à cet égard une grande diverfité dans les différens fels neutres; mais c' eft auffi ce qu' on ne pourra connoître que par une nouvelle fuite d' expériences dépendantes de celles que j' ai commercées, & qui mérite bien d' être entreprife.

Tartre ſoluble par la chaux.

Ce ſel étoit en très beaux & gros criſtaux tranſparens; traité avec l'eſprit de vin comme le precédent, ſans deſiccation préliminaire, il s'eſt comporté de même, mais il ne m'a pas préſenté le phénomène de la liquéfaction ſous l'eſprit de vin.

Tartre ſoluble ammoniacal.

J'ai verſé une diſſolution d'alkali volatil concret ſur de la crême de tartre reduite en poudre fine, & miſe dans un matras; il s'eſt excité à froid une efferveſcence aſſez conſidérable, une grande partie de la crême de tartre a été diſſoute, & la diſſolution a été achevée à l'aide de la chaleur modérée du bain de ſable, avec une legère efferveſcence; j'ai ajouté à deſſein un peu d'excés d'alkali volatil, puis ayant filtré la liqueur toute chaude, elle a paſſé très tranſparente, d'un beau jaune foncé, & d'une ſaveur de ſel végétal,

Cette liqueur évaporée à l'air libre ſur une glace a formé une criſtalliſation compoſée d'aiguilles en lames longues, & tronquées, partant d'un centre, ou d'un pédicule commun, & repréſentant par leur divergence une eſpèce d'eventail.

Une autre portion de la même liqueur évaporée au bain de ſable juſqu'à pellicule dans une capſule de verre a donné par le refroidiſſement deux ſortes de criſtaux, fort différens, pour la forme; les uns étoient de petits criſtaux allongés, renflés par le milieu, & ſe terminant en longues pointes par chaque bout, comme des fuſeaux; les autres qui ſe ſont formés les derniers, & à ce que je crois autant par évaporation que par refroidiſſement, étoient de gros priſmes à quatre, cinq, & ſix côtés. Quoiqu'ils fuſſent solitaires, ils paroissoient de même espèce que ceux qui s' étoient assemblés en éventail sur la glace. Le reste de la liqueur évaporée dans une capsule à une chaleur douce de bain de sable, mais jusqu'à forte pellicule a donné par le refroidissement & par l' évaporation, qui continuoit encore, les mêmes cristallisations en éventail; mais les rayons au lieu d' être des lames, comme ceux qui s' étoient formés sur la glace, étoient des prismes comme ceux dont il a été parlé plus haut à cause de la profondeur du vase dans le quel cette dernière cristallisation s'étoit faite: comme ces cristaux n' étoient pas tous d' une égale longueur, ils représentoient assez bien une gloire rayonnante pareille à celles que font les peintres, & les sculpteurs.

Le tartre soluble ammoniacal étant de nature à se décomposer par une chaleur fort peu considérable, je n' ai osé le porter à la plus grande siccité, dans la crainte de l' altérer; mais après lui avoir enlevé toute humidité surabondante le plus qu' il a été possible par une desiccation bien ménagée, je l' ai fait bouillir dans l' esprit de vin, comme les précédens.

Cet esprit de vin filtré a brulé comme l' esprit de vin pur; sa flamme étoit seulement accompagnée de quelques petites fulgurations rouges. En en faisant évaporer une demi once dans la capsule de porcelaine, j' ai remarqué qu' il répandoit une odeur plus suave que celle de l' esprit de vin ordinaire, & cette demi once, après son entière évaporation a laissé un enduit d' un jaune brun pesant un grain & demi. Ce résidu ne se dissolvoit pas dans l' eau, & n' étoit par consequent ni une matière saline, ni une matière savonneuse, il s' est très bien redissous dans de nouvel esprit de vin. Je crois qu'on ne peut le regarder que comme une portion d' huile qui se sépare, soit de la crême de tartre, soit de l' alkali volatil, soit enfin de l'un & de l' autre lors qu' on les combine: c' étoit probablement à cette partie huileuse qu' étoit düe la couleur jaune de ma dissolution de tartre soluble ammoniacal dont j' ai fait mention en commençant cet article.

Avant de le finir je ne dois pas oublier de faire mention d' un petit dépôt salin singulier en petits grains irréguliers, & mêmes comme ceux du sablon le plus fin, qui s' est séparé par le refroidissement de ma dissolution de tartre soluble ammoniacal; j' en avois trop peu pour en faire un examen exact; je me suis contenté de m' assurer que cette matière craquoit sous la dent, qu' elle n' avoit point de saveur bien sensible, ni presque de dissolubilité dans l'eau, & enfin que l' acide vitriolique, non plus que l' alkali fixe, ne lui ont occasionné aucun changement sensible. Cette matière provenoit sans doute de la crême de tartre, & mérite d' être examinée avec plus de détail, car la crême de tartre elle même n' est pas encore bien connue. M. Margraf, & M. Rouelle ont prouvé par des expériences décisives qu' elle contenoit de l' alkali fixe végétal tout formé, & c' est assurément une connoissance essentielle dont nous sommes redevables à ces celèbres chymistes; mais cet alkali n' est point libre dans la crême de tartre; il y est certainement combiné avec quelqu' autre substance, peut-être même avec plusieurs qui ne peuvent être bien connues que par de nouvelles recherches.

Tartre soluble antimonié, ou Tartre émétique.

Ce sel que j' ai employé cristallisé, & bien sec s' est comporté avec l' esprit de vin comme le tartre soluble par la chaux; il n' a occasionné aucun changement à sa flamme; une demi once de l' esprit de vin qui avoit bouilli dessus n' a laissé après son entière évaporation dans la capsule de porcelaine qu' une tache assez légère d' un enduit de couleur de maron, de nature huileuse, & que l' eau

ne

ne diſſolvoit point. J' ai cependant remarqué que les parois de la bouteille dans la quelle avoit été filtré l' eſprit de vin tout chaud après avoir bouilli ſur le tartre émétique étoient garnis dans quelques endroits de criſtaux longs plus fins que des cheveux, implantés diverſement par une de leurs extrémités les uns ſur les autres; mais ces criſtaux étoient ſi fins, & en ſi petite quantité que j' eſtime qu'ils ne pouvoient guère peſer en tout qu' un quarantième, ou même un cinquantième de grain.

Arſenic.

En verſant l' eſprit de vin à froid ſur de l' arſenic blanc, criſtallin, & en poudre fine j' ai obſervé que cette liqueur le mouilloit bien plus facilement que l' eau ne le mouille; elle en a diſſous à l' aide de l' ebullition $\frac{1}{75}$ de ſon poids ou $\frac{4}{288}$; le réſidu de l' évaporation étoit verdâtre; la flamme de l' eſprit de vin chargé d' arſenic ne m' a paru avoir rien de particulier.

Sel neutre arſénical.

Ce ſel, que j' ai fait connoître dans les mémoires de l' académie des ſciences de Paris année 1746, s' eſt diſſous dans l' eſprit de vin bouillant dans la proportion de trois grains par once. La flamme de l'eſprit de vin tenant ce ſel en diſſolution m' a préſenté une ſingularité, qui me paroit mériter beaucoup d' attention, ſavoir que, ſans différer eſſentiellement de celle de l' eſprit de vin pur, elle étoit bordée depuis le bas juſqu' en haut d' une autre flamme, moins lumineuſe, & très ſenſiblement verte.

On ſait que le ſel ſédatif, qui colore auſſi en verd la flamme de l' eſprit de vin, a quelques proprietés communes avec l' arſenic, telles que la vitreſcibilité, le pouvoir de décompoſer le nitre &c. la circonſtance donc que je viens d'expoſer ſemble montrer encore une nouvelle conformité entre ces deux ſubſtances. Je n'oſe cependant la donner ici comme entièrement conſtatée, parceque, quoique j'aie tout lieu de croire que l'arſenic ainſi que le nître que j'avois employés pour faire le ſel neutre arſénical, dont je me ſuis ſervi, étoient purs, & exempts du mélange de cuivre; cependant comme il y avoit très longtemps que j'avois fait ce ſel, je crois qu'il eſt à propos avant de prononcer affirmativement ſur ce fait de le vérifier en compoſant de nouveau ſel neutre arſénical avec toutes les précautions néceſſaires pour m'aſſurer qu'il ne contiendra aucune parcelle de cuivre, & je n'aurois pas manqué de le faire dès à préſent ſi le peu de temps qui me reſtoit pour achever ce mémoire, me l'eut permis.

A Paris ce 4 juin 1773.

REFLEXIONS
SUR UN ESSAI DE CHIMIE COMPARÉE
PAR M.^r LE COMTE DE SALUCES.

Ce feroit paroître débuter par un paradoxe que d'ofer avancer que tout eft grand dans la nature & que tout y peut paroitre d'une petiteffe inconcevable; tant qu'on s'arrete, en effet à examiner la face d'un objet, ou cet objet même de tous les côtés, fans aucun rapport avec d'autres, on ne pourra fe former aucune grande idée; mais lorfque en faififfant les rélations qui peuvent lier le plus petit objet, ou le fait par lui même le plus comun à d'autres, d'ou il refulte un affemblage de verités, cet enchainement ne peut à moins de reveiller des idées étenduës & lumineufes; dont l'utilité fera enfuite plus ou moins fenfible fuivant l'etendue de ces mêmes raports.

Le premier pas qui fe préfente dans la marche naturelle de l'efprit humain eft celui de comparer les objets entre eux; fi l'on s'en tient toujours aux caractères fenfibles, qui fervent à diftinguer ces objets entr'eux, il doit neceffairement en refulter une monotonie qui refferre nos connoiffances; fi au contraire on fe permet un plus grand nombre de combinaifons, on parviendra non feulement à répandre plus de lumières pour la conduite, & pour le bien de l'homme, mais ce qui intéreffe bien plus encore, on parviendra à fimplifier les méthodes & à approcher par-là toujours plus des routes que tient la nature.

Si un Chimifte ne fçait que fon art, fi un Naturalifte n'étudie que la fienne, fi le Botanifte & le Phificien n'appliquent chacun qu' à la leur, on n'aura qu'un Erudit, ou un Artiſte plus ou moins ſçavant, & il ne reviendra que des avantages bien peu intéreſſants pour chacune de ces parties, conſiderées en tant que ſciences; c'eſt donc du concours des lumières que toutes les branches de la Philoſophie naturelle peuvent fournir, & ſe prêter qu'on doit attendre des decouvertes utiles aux ſciences, & à la Société: mais en attendant le Génie qui ſache s'elever d'un vol rapde & ſaiſir le fil des vérités éparſes, dont on eſt contraiint de former tant de ſciences à part, nous chercherons à en rapprocher quelques unes qui dépendent de la Chimie, & qui en même tems tirent des ſecours de quelqu'autre partie de la Philoſophie, ou qui en empruntent à leur tour.

I

Les corps ſont ou fluides ou ſolides, ſous ces deux dénominations on peut à la vérité ranger tous les corps de cet Univers, mais elles ne ſuffiſent pas pour nous éclairer d'une manière vraiment Philoſophique.

I I

Les corps ſont ou végétaux, ou animaux, ou enfin foſſiles & minéraux, mais c'eſt encore là une notion bien vague. Diſtinguer tous les corps des trois regnes & noter ceux qui ſont ou fluides ou ſolides, n'eſt pas dire encore aſſez; faire le dénombrement de leurs apparences extérieures & de leur tiſſu interne ſeroit un pas un peu plus avancé, ſi ces apparences & ces tiſſus ſont conſtans. Ajouter les propriétés extrinſeques & intrinſeques de ces mêmes corps ſeroit toujours avancer chemin; ſéparer enfin les parties de ces corps par le feu ou par les menſtrues, les recompoſer & les faire reparoitre dans leur premier état eſt encore un très-grand pas vers la perfection ; mais avec tout ceci, la comparaiſon des produits des parties ainſi ſéparées par la même voye, dans les différents états où ces corps peuvent ſe trouver me paroit offrir un point de vüe trop intéreſſant, pour que le Chimiſte Phyſicien puiſſe negliger d'y apporter la curioſité la plus inſtructive, & toute l'exactitude dont il eſt capable.

I I I

Ce point de vüe je l'avoüe eſt très-vaſte & l'execution en paroitra ſans doute très-difficile : mais ſi l'on reflechit au grand nombre de matériaux que l'on a ſous la main, on verra que les obſtacles ne ſeront pas inſurmontables ; nous allons donc commencer par un petit eſſai qui pourra ſervir à mieux développer mes idées, & à en faire naitre à d'autres peut-être de plus générales & de plus lumineuſes.

I V

L'analyſe étant la voye par laquelle on parvient à décompoſer les corps, & à en ſéparer les parties d'une maniere diſtincte, il me paroit que c'eſt elle principalement qui peut nous fournir les données pour la réſolution de cet important probléme, je dis important parcequ'il me paroit tel, & je ne crois rien dire qui doive allarmer l'homme le plus délicat, car c'eſt une vérité aujourd'hui aſſés généralement reconnue que l'analiſe eſt la clef des decouvertes (d'ailleurs je ſuis bien aiſe d'être forcé par la nature du ſujet à dire bien des choſes qui ont été dites de long-tems) : mais la définition du terme analyſe ne fournit aucune notion poſitive & préciſe ; la diſtinction d'analiſe par le feu en chimie ou d'analyſe par les menſtrues eſt générale mais encore trop vague, la ſéparation des parties des corps par tel moyen que ce ſoit eſt le but qu'on doit ſe propoſer & doit faire l'objet de nos recherches (*).

V

Il eſt de parties qui conſtituent eſſentiellement un corps déterminé & celles-ci ne peuvent être que tout-à-fait ſimples, au moins par raport à nous, & eſſentielles à tel corps, de manière que ſans elles le corps ceſſeroit d'être tel, c'eſt-à-dire de tel genre, & de telle eſpèce: d'autres au contraire ſans fixer neceſſairement la nature du corps ſe trouvent combinées, unies &c. à ces mêmes parties: elles ſont même quelque fois abſolument étrangères, mais elles peuvent cauſer dans certain cas quelque modification à ce corps. (1)

V I

Il eſt donc très-néceſſaire de chercher à découvrir & à diſtinguer autant qu'il eſt poſſible les parties eſſentielles

(*) Il paroitra du premier coûp d'œil qu'il y a ici un abus d'idées ſur le terme d'analyſe, mais la réflexion juſtifiera mon laconiſme.

(1) Pour rendre ma penſée plus clairement il ſuffit de conſidérer, par exemple, qu'il doit néceſſairement ſe trouver des parties aqueuſes, ou pour le dire plus ſimplement de l'eau dans un certain raport déterminé dans toutes les ſubſtances ſalines, ſans quoi ces ſels ceſſeroient d'être tels qu'ils ſont, pendant qu'ils en tiennent une plus grande quantité dans leur criſtalliſation, qu'on peut très-bien leur ôter, ſans qu'ils changent de nature; toute la modification ſe réduiſant alors à leur figure; d'ou il ſuit qu'une partie de l'eau eſt eſſentielle comme nous l'avons dit dans un raport déterminé à une telle eſpéce de ſels, pendant que l'autre partie n'eſt qu'accidentelle quant à la nature, & ne peut être regardée tout au plus que comme une partie intégrante: nous allons raporter encore une exemple pour rendre la choſe plus ſenſible. Monſieur Baumé nous dit dans ſon manuel de Chimie pag. 329 §. 3, que le ſel marin à baſe terreuſe quoique difficile à criſtalliſer, criſtaliſe néanmoins avec celui qui eſt à baſe d'alkali *minéral* & *qu'il* eſt même cauſe qu'on obtient des criſtaux cubiques infiniment plus gros que lorſque le ſel marin eſt *très-pur*: voila donc un exemple qu'il ſe trouve quelque fois dans les corps des parties abſolument étrangéres qui peuvent cependant y cauſer dans certains cas des modifications.

d'un corps, de celles qui ne ſont qu'accidentelles & indifférentes pour ainſi dire à la nature de ce corps, & qui ne contribuent tout au plus qu'à lui faire prendre une forme conſtante : mais ce pas que le raiſonnement porte à faire, eſt ſans contredit de la plus grande difficulté; auſſi n'oſerais-je pas me flater d'y reuſſir toujours, mais pour l'amour de la vérité on me paſſera les reflexions que je ſoumets au jugement des maîtres de l'art.

V I I.

Les circonſtances qui contribuent à altérer un corps de même eſpéce ou nature, ſont celles qu'on ne doit jamais négliger, & peut-être qu'elles ſont les plus propres à nous dévélopper bien des myſtères; mais nous y reviendrons, & nous propoſerons en attendant quelques reflexions préliminaires ſur les caractères généraux qui affectent & qu'on découvre dans les corps.

V I I I.

Il faudra commencer par un des trois regnes, & après avoir choiſi le genre & l'eſpéce conſidérer ce qui arrive à ce corps par le même moyen dans les différents états ou l'on le ſoumet à l'analyſe; remarquer après ce qu'il a de commun, & les differences ſimples ou compoſées qu'on y obſerve; raprocher enſuite ces vérités des opinions ou des idées qu'on a dans la Chimie ſur ces mêmes objets, & rectifier ainſi & enrichir cette ſcience par le plus grand detail poſſible de vérités utiles. Venons au fait.

I X.

Je commencerai donc par les végétaux, & je me contenterai en premier lieu d'examiner *une généralité.* Les plantes font ou *faines ou putrefiées* ; je prends les extrêmes, comme les plus propres à marquer les différences ; les états intermédiaires devant participer des deux en raifon de leur proximité d'un des extrêmes. Nous allons donc former une table des produits que nous fournit une même plante dans ces deux états par la *diftillation*, *l'incineration* & la *lixiviation* : cette méthode me paroiffant la plus précife & la plus propre à rapprocher les objets pour en rendre plus fenfibles les différences, & les changemens.

Table des réfultats qu'on obtient des Plantes faines, & putrefiées par la diftillation, l'incinération, & la lixiviation.

PLANTES.

	Saines	Putrefiées	
	Par la diftillation.		
1	Phlegme	*etiam*	contenant du fel volatil.
2	Huile noire empireumatique . .	*etiam*	
3	Acide	o .	Alkali volatil.
4	Huile légère	o .	
*	Beaucoup d'air	o .	
5	Charbon ou *caput mortuum* * . .	*etiam*	
	*qui par *l'Incineration & la lixiviation donne de l'*		
6	Alkali fixe	o .	
7	Terre infipide	*etiam* (a)	

(a) Pour ne pas repeter le produit je me fers de cette abbréviation.

X

Les produits communs ſont n.° 1 & 2 dans la diſtillation & même le 5 ſi l'on veut, & dans l'incinération & la lixiviation le n.° 7.

X I

Les particuliers aux plantes ſaines ſont les n.° 3, 4 & * dans la diſtillation, & le n.° 6 par l'incinération, & la lixiviation: produits qu'on n' obtient pas dans les plantes putrefiées.

X I I

Les particuliers enfin aux plantes putrefiées, & qu'on ne rencontre pas dans les autres ſont l'alkali volatil : mais cette ſubſtance n' exiſte pas toute formée dans les plantes ſaines de cette claſſe, elle eſt donc vraiment l' ouvrage de la putrefaction ; or n'eſt il pas naturel de penſer qu'elle eſt le réſultat des produits qui manquent, ſavoir des n.^{os} 3, 4, & 6.

1 Voyons maintenant les idées que l'on a ſur l'alkali volatil, elles ſont ou théoriques, ou tirées des faits.

2 *L'alkali volatil* dit M. Macquer Elem. de Chim. Theor. p. 230 *eſt compoſé d'une certaine quantité d'acide combiné, & engagé dans une portion de la terre du mixte dont on le tire, & d'une aſſés grande quantité de matière graſſe ou huileuſe &c.*

3 Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer la conformité qui ſe trouve entre ces idées, & ce que nous donne l'expérience, nous allons paſſer maintenant aux différens tours de main que nous propoſent pluſieurs Auteurs des plus claſſiques pour volatiliſer les alkali-fixes, ce qui dans le fond eſt la même choſe que dire de faire des alkalis volatils; ce ſeroit diſputer ſur des mots que de ne pas enviſager d'une manière générale les expreſſions, *rendre volatils*, *changer en ſels volatils*, *volatiliſer &c.* tout bien conſidéré c'eſt toujours ajouter la propriété caractériſtique de

légéreté à un corps qui ne l'avoit pas, & qui au contraire avoit celle d'être fixe, ainſi nous pourſuivrons notre examen.

4 Wan-Helmont dit qu' en faiſant digérer le ſel de canelle avec ſon huile pendant 3 mois en obtient un alkali volatil par la diſtillation.

5 Starckei prétend qu'en imbibant le ſel de tartre de huile de Thérebentine, on rend ce ſel volatil par la digeſtion.

6 Ludovic aſſure que le ſel de tartre imbibé de ſon huile empireumatique ſe ſublime en ſel volatil à une chaleur médiocre.

7 Stahl nous apprend que ce ſel devient volatil en le combinant aux huiles étherées.

8 Nous obſerverons cependant encore une circoſtance, très importante, à mon avis, ſur ce ſujet, ſavoir que pour ſurmonter la difficulté que les alkalis ont à s'unir aux huiles diſtillées on les combine auparavant avec le vinaigre.

9 L'on recomande enfin la combinaiſon des ſels fixes avec le vinaigre diſtillé le tout uni avec un eſprit urineux pour en tirer un alkali volatil.

10 Si nous reflechiſſons maintenant ſur tous ces procedés nous voyons qu' il ſe rencontre dans tous la combinaiſon des mêmes principes que nous fournit la comparaiſon des analyſes, & qui eſt ſi bien énoncée par l'Illuſtre Monſieur Macquer.

XIII

Toute la fineſſe de l'artiſte conſiſte à fournir le principe qui manque : ce qui ne pourroit pas à la verité être déterminé avec préciſion, pour le raport entre ces mêmes principes, mais qui peut très-bien être aperçu & ſenti par un homme de l'art.

XIV

En effet nous voyons que dans le procédé §. 9 ce n'eſt pas une matière auſſi chargée de phlogiſtique que le ſont les huiles &c. qu'on préfcrit, mais bien plu-tôt un acide plus développé, & cela parceque les fels fixes contiennent plus de phlogiftique que le fel de tartre, ou tout autre fel parfaitement alkalifé.

X V

En effet s'il n'arrivoit pas ce que dit Monfieur Macquer d'après Stahl, que les fermentations devant être régardées comme des acheminemens à la putrefaction, les acides reçoivent alors la plus grande altération qu'ils puiffent éprouver fans ceffer d'être fels, & que cette métamorphofe de l'acide confifte en ce qu'il s'unit à une portion de l'huile, & de la terre fubtilifée du mixte, pour former l'alkali volatil, nous devrions retirer des fels volatils de tous les favons, ce qui n'arrive cependant pas dans les favons ordinaires, ainfi qu'on s'en affure par la diftillation.

X V I

Le tartre regeneré, ou pour parler plus exactement la terre foliée de tartre femble venir à l'appuy de ce fentiment; tout le monde fçait que c'eft un fubftance volatile favonneufe (fi on ne veut pas lui accorder le nom de favon) qui réfulte de la combinaifon du vinaigre diftillé avec l'alkali-fixe, & perfonne n'ignore auffi que cet acide végétal contient encore une grande quantité de matière huileufe, d'ou il réfulte une combinaifon de ces principes, dont elle tire la propriété de fa volatilité, & c'eft ce qui prouve d'autant mieux l'opinion que nous venons d'expofer, favoir que l'alkali volatil eft le réfultat de l'union qui fe fait de l'acide dans un raport déterminé avec une terre fubtilifée & des matières graffes; & quoique nos tables puiffent fervir de démonftration nous allons raporter le fentiment du célébre Boherave à l'article du tartre régeneré p. 149 *Elem. Chem. Venetiis* 1759 *ap. Seb. Coleti dubitavi faepe omnibus his confideratis fedulo, an non hic effet fal tartari volatilis redditus Helmontianus &c. Quotief-*

cumque vero nimia cura ſalem hunc ſolvere depurare, colare, inſpiſſare, calcinare, ſic in album convertere, quis conatur, toties deprehendet, abire in auras, perdique: unde quidem volatilitatem ſic natam diſcit, coeterum oleum perdit, & operam.

XVII

Puiſque nous voyons que les plantes ſaines donnent par la diſtillation des principes que l'on ne trouve plus, au moins ſeparés, dans ces mêmes plantes putrefiées, & que celles-ci fourniſſent un produit qu' on n' obtient pas des premières, ce qui fait un argument aſſés ſolide pour juger que ces principes ſe ſont métamorphoſés en ſe combinant par le mouvement de putrefaction: (2) il me paroit très-convenable de rapprocher ici quelques objets qui ſemblent liés par le même réſultat; nous verrons donc ce qui reſulte de l'Analyſe des plantes ſaines qui fourniſſent beaucoup d'alkali volatil, & nous paſſerons enſuite à faire la comparaiſon des produits que l'on obtient des matières animales qui ſont celles principalement qui en fourniſſent une plus grande quantité.

Cette manière de traiter la Chimie me paroit aſſés méthodique, & propre à donner des idées générales, elle me ſemble au reſte avoir les mêmes avantages que l'anatomie comparée a ſur la ſimple anatomie.

(2) On ne feroit pas trop fondé il me paroit à ſuppoſer qu'on ne trouve plus d'acide dans les plantes putrefiées parcequ'on voulut croire qu' il ſe fut diſſipé dans le tems de la fermentation putride; il faudroit alors rendre compte de l'huile, & de l'alkali fixe auſſi: d'ailleurs il ſe préſente une difficulté à mon avis inſurmontable, ſavoir, ſi on ne veut pas que l'acide, l'huile, & l'alkali fixe ſe ſoient combinés & métamorphoſés en alkali volatil, il faut convenir au moins de la préexiſtance de cet alkali volatil, car d'ou pourroit il venir? mais s'il exiſte tout formé pourquoi ne ſe diſſipetoit-il pas auſſi dans le tems du mouvement de putrefaction, puiſque ſa volatilité eſt bien ſupérieure à celle des acides? ces ſuppoſitions ſont ſi dénuées de probabilité qu'il eſt inutile de s'y arreter plus long-temps.

Table des résultats qu'on obtient des plantes putrefiées qui ne donnoient point d'alkali volatil dans l'état sain & de celles qui en fournissent naturellement sans passer à cet état par les mêmes opérations que les précédentes.

PLANTES.

Putrefiées	Semence de synapi

Par la distillation.

1	Phlegme contenant du sel volatil .	*etiam*
2	Huile noire épaisse & fetide	*etiam*
3	Charbon	*contenant un peu de phosphore.*
4	Sel volatil concret	*etiam*
5	. . . o	*huile légère.*
6	. . . o	*beaucoup d'air.*

XVIII

Il est visible combien ces substances d'une nature totalement différente peuvent se rapprocher du moment que par quelque opération on les améne au point de fournir les mêmes produits & nous observerons que les deux qu'on trouve n.° 5 & 6 dans la semence de synapi & qui ne sont plus dans les végétaux putrefiés quoiqu'ils existassent dans l'état sain, disparoissent précisement par le mouvement de fermentation, d'ailleurs les acides ne paroissent ni dans l'une, ni dans l'autre de ces substances, ce qui est très-intéressant pour l'objet en question; Il est pourtant vrai que le phosphore concourt à prouver qu' il s'y trouvoit de l'acide: mais c'eſt préciſément ce qui ſert à confirmer que l'alkali volatil eſt l'ouvrage ou de la fermentation putride ou du feu, qui en détruiſant les liens, & l'adhérance entre les parties du mixte rapproche tellement l'acide des parties huileuſes & terreſtres, qu'il en vient un nouveau produit.

Cette théorie qui, je le repete, eſt celle que Monſieur Maquer nous donne dans ſes ouvrages, ſe trouve encore confirmée par les analyſes des matières animales : nous allons nous en occuper maintenant d'une manière également conciſe, c'eſt-à-dire en n'en rapportant que les réſultats en général.

Table des résultats qu'on obtient des végétaux dans leur différens états, ou selon leur nature particulière, & des matières animales ; par la distillation, l'incinération, & la lixiviation.

PAR LA DISTILLATION.

MATIÈRES VÉGETALES.			MATIÈRES ANIMALES.	
saines	*putrefiées*	*analogues aux animales*	*sang. de boeuf*	*chair de boeuf*
1 Phlegme	*etiam, contenant du sel volatil*	*etiam*	*etiam*	*etiam*
2 Huile noire épaisse & empireumatique	*etiam, & foetide*	*etiam*	*etiam*	*etiam*
3 Acide	o	o	o	o
4 Huile légère	o	*etiam*	*etiam*	*etiam*
		etiam	*etiam*	*etiam*
5 beaucoup d'air	o	*etiam*	o	o
6 Charbon	*etiam*	*sel volatil etiam*	*etiam*	*etiam*
		Le charbon traité par l'incineration, & lixiviation,		
7 Alkali fixe	o	o .. *un peu de phosphore*	o	o .. *un peu de sel marin.*

XIX

Cette table comparative fait voir 1° que de toutes les substances dont on peut retirer de l'alkali volatil soit naturellement soit en faisant essuyer quelque altération au mixte on ne sauroit jamais obtenir ni de l'acide ni de l'alkali-fixe.

X X

2° Que les matières qui ont besoin de la fermentation putride pour fournir l'alkali volatil ne donnent plus certains produits qu'on obtient cependant des matières où il n'est pas nécessaire d' exciter la putrefaction pour avoir l'alkali volatil, & ces produits sont principalement l'huile légère ou tenue & l'air; personne ne s'etonnera de cette différence en reflechissant sur les effets de la putrefaction: quand à l'air il est sensible qu' il doit s'echapper dans ce mouvement de désunion entre les parties des mixtes, & quand à l' huile légère il n'est pas hors de probabilité qu'elle soit nécessaire pour métamorphoser l'acide en alkali volatil dans les substances ou cette matière saline n'est pas le produit ou de l'élaboration de la nature ou des altérations qui dependent du feu des artistes.

X X I

Cette vérité est d'autant plus incontestable que dans les substances animales mêmes, qui sont celles qui abondent le plus en alkali volatil, il y à des parties dont on n'en tire pas un atome; telles sont les graisses, & au contraire elles donnent une grande quantité d'acide: d'ailleurs ce qu'il y a de plus remarquable c'est que les mêmes parties donnent des différences si sensibles suivant qu'elles ont souffert, ou non la fermentation putride; nous allons rapprocher encore cet objet d'une manière plus générale dans la table suivante.

Table des résultats qu'on obtient, 1.° de toutes les substances qui fournissent naturellement de l'Alkali volatil; 2° de celles qui n'en donnent qu'au moyen de la putréfaction; 3° de celles qui en donnent dans les deux états.

PAR LA DISTILLATION, L'INCINERATION, ET LA LIXIVIATION.

MATIERES

	Végétales Saines	*Végétales* Putréfiées	*Animales* Saines	*Animales* Putréfiées
qui ne fournissent pas de l'Alkali volatil.	B	C	D	E
	Qui fournissent toutes de l' Alkali volatil			
Flegme	*etiam, sel * * volatil*	*etiam, sel * * volatil*	*etiam*	*etiam, précédé par du sel volatil concret.*
Huile empireumatique	*etiam*	*etiam * * & fœtide*	*etiam*	*etiam & fœtide.*
Acide	o	o	o	o *ALKALI VOLATIL CONCRET.*
Huile légère	*un peu*	o	*etiam*	o *ALKALI VOLATIL CONCRET.*
Beaucoup d'air	*moins*	o	*etiam*	o *ALKALI VOLATIL CONCRET.*
Alkali fixe par l'incinération & la lixiviation	o	*très peu*	o	o *ALKALI VOLATIL CONCRET.*

N.B. Je crois inutile de parler des résidus après toutes les opérations, & je remarquerai seulement que (A) n'a de comun avec (B, D) que les n.° 4, 5 (C, E) avec les n.° 1, 2; & que la différence entre (B, D) & (C, E) consiste dans les n.° 4, 5; ce qui dépend de ce que les unes ont souffert la fermentation putride, & les autres sont dans l'état sain. En effet l' (E) donne du sel volatil avant l'élévation du flegme, d'où il me paroit d'être toujours plus en droit de conclure que l'alkali volatil ne peut être que le produit de n.° 3, 4, & 6 qui, ou ne se montrent point séparément, ou qui disparoissent dans les matières dont on peut tirer ce sel.

XXII

Le sujet que je viens de traiter sert à nous montrer qu' il en est de ceux, dont il n'est pas nécessaire de savoir d'avance le résultat principal, tel que celui qu'on peut maintenant établir avec plus de confiance, savoir que l'alkali volatil conste d'un acide combiné avec une partie de ce qui deviendroit alkali-fixe par l' incinération, & une partie de la substance inflammable : car cette substance saline n'existant pas toute formée dans des végétaux sains, dont on la retire cependant par la putréfaction, ce n'est qu'au préjudice de l'acide, de la matière inflammable, & de l'alkali-fixe qu'on peut se la procurer ; ce qui me paroit démontré.

XXIII

Nous allons faire maintenant une application du même principe de comparaison, qui pourra pour ainsi dire nous fournir un moyen pour vérifier des maximes qui auroient été établies sur des faits, & je me flatte que cette méthode ne sera pas jugée tout-à-fait inutile. Je prendrai pour exemple un principe assez connu, savoir que trois parties de rouge combinées avec trois de bleu & deux de jaune fournissent une couleur noire dans la peinture en émail ; & il est question de voir si ce principe est de même applicable à la teinture ; c'est ce que nous allons examiner, en supposant d'avance le fait.

Le noir est le résultat du	*rouge*	. . . .
		de ces deux . . *orangé*
	jaune	de ces deux . . . *violet*
		de ces deux . . . *verd*
	bleu	. . . .

XXIV

L'inspection de cette table présente d'abord l'idée des solutions du problême: car si la maxime est (3) vraye, on pourra former du *noir*, 1° en combinant trois substances simples dont l'une soit *rouge* l'autre *jaune* & la troisième *bleue*, moyenant qu'on observe les proportions qui sont prescrittes, & c'est là la première solution.

XXV

2° On fera du *noir* en mettant une couleur *orangée* avec du *bleu*. La troisième solution nous viendra de la combinaison du *verd* avec le *rouge*. La quatrième sera celle du *violet* avec le *jaune*. Une cinquième enfin naitra de l'assemblage de l'*orangé* du *violet* & du *verd*. Je me bornerai à une de ces solutions pour ne pas surcharger cet essai de détails minutieux. Voici donc comment j'ai fait du noir sur ces principes: j'ai mêlé à une dissolution de vitriol bleu une quantité à peu-près égale de décoction de noix de galle; le mêlange prit d'abord une couleur rouge orangé; j'y ajoutai de la dissolution de cuivre faite par l'esprit volatil, & la liqueur devint peu-à-peu d'un noir trèsfoncé.

XXVI

Tout le monde sait qu'on ne peut pas former de l'encre avec le vitriol de cuivre & la noix de galle; l'expérience m'avoit enseigné qu'en mettant de l'acide dans la décoction de noix de galle on obtenoit un rouge orangé; il ne s'agissoit donc que d'y développer le bleu suivant le 2[d] canon de notre analyse; ce qui ayant été fait par le moyen de l'alkali volatil, il en est effectivement résulté du noir

(3) La maxime est certaine dans ce cas, mais je parle comme si elle étoit encore problématique, parcequ'il s'agit de l'appliquer à une nouvelle branche de la physique.

(4); ſi j'en avois eu le tems, j'aurois de même eſſayé les autres combinaiſons, mais en attendant je ferai obſerver qu' il eſt très-aiſé de reconnoître auſſi dans les encres communes la combinaiſon de ces trois couleurs; car le bleu lui vient du fer, & l'acide dans la décoction de noix de galle change la couleur jaune en rouge orangé, où le rouge cependant domine, lorſque l'acide y eſt en aſſez grande quantité; ce qui eſt très-conforme à la proportion preſcrite.

XXVII

Avant de finir cet eſſai je rendrai compte encore d'une méthode par laquelle il me ſemble qu'on peut parvenir à porter quelque perfection dans les arts, & même à les enrichir de quelques nouvelles branches. Je rapporterai pour plus de brièveté la ſuite de mes idées ſur un objet, ce qui ſervira à faire mieux ſentir ma penſée.

Perſonne n' ignore que l'acide vitriolique a plus d'affinité avec le fer qu'avec le cuivre, ce qui a donné lieu à la prétendue tranſmutation du fer en cuivre en le plon-

(4) Ce mémoire étoit déja ſous la preſſe lorſque je fis cette expérience avec de la teinture d' *indigo*, mêlée avec celle d· bois du breſil, & de celle de paſtel ou gaude; en obſervant à peu-près les mêmes proportions j'ai fait une teinture noire, ou qui paroit du moins telle à l'œil en l'examinant ſoit à la ſurface dans un verre, ſoit dans un flaçon, après l'avoir étendue dans beaucoup d'eau. On objectera, peut-être, que de la combinaiſon de ces trois couleurs en teinture il ne ſauroit réſulter un véritable noir ſur les étoffes; mais on me permettra d'obſerver qu' il ſe paſſe une très grande différence dans la teinture appliquée aux étoffes; que parmi les étoffes mêmes il arrive des différences conſidérables dans l'œil, que prend une même teinture à cauſe du tiſſu, du grain, & de différentes autres petites circonſtances qui cauſent des grandes modifications, & par conſéquent des variétés bien ſenſibles. C'eſt pour cette raiſon auſſi que la meilleure encre pour l'écriture n' eſt d'aucun uſage pour la teinture des étoffes. Cela tient à un principe trop connu des phyſiciens, & dont les données manquent ordinairement à l' artiſte même le plus intélligent. J'ai fait de même une teinture noire avec du violet & des jaunes; mais je dois remarquer que dans toutes ces couleurs on eſt obligé d'augmenter la proportion du bleu.

geant dans des eaux thermales cuivreuſes qui ſe trouvent en Allemagne. La propriété du cuivre de reprendre ſa forme métallique dans cette opération, & en même tems l'art de Damaſquiner s'étant préſentées à mon eſprit, j'ay imaginé qu'on pourroit très-bien tirer quelque parti de la théorie des affinités pour créér un nouvel art, ſi on ne veut pas le regarder, ſeulement, comme une nouvelle branche ajoutée à l'art de damaſquiner.

Dans le cas particulier du fer, & du cuivre, il ſuffit de plonger dans de la cire de graveur la pièce de fer dont on découvrira enſuite par le deſſein les parties qui doivent paroître en cuivre, on paſſera après la pièce ainſi préparée dans une diſſolution de vitriol de cuivre, & même on l'y retiendra autant de temps qu' il en faut, pour que l' acide vitriolique, diſſolvant une plus grande quantité de fer, puiſſe être remplacé par une couche plus forte de parties cuivreuſes, ſur leſquelles il faudra avoir la précaution de paſſer le burin, d'ou il réſultera plus d'éclat, & une plus grande ſolidité dans le damaſquinage en queſtion.

Mais pour prendre la choſe plus généralement encore, il ſuffira de remplir les conditions ſuivantes, ſavoir : que le métal de la pièce qu'on deſtine à être damaſquinée ait une plus grande affinité avec le menſtrue, que n'en a celui qui y eſt en diſſolution, & qui eſt deſtiné au damaſquinage. Une autre condition ſeroit celle que le précipité reparut ſous ſa forme métallique, mais j'ai lieu de croire qu'on pourroit y ſuppléer en ſouſpoudrant toute la pièce de charbon ou de quelque autre matière inflammable qui put revivifier cette chaux par ſon phlogiſtique en la paſſant ſur le feu, s'il le faut.

Cette idée, quelque imparfaite qu'elle ſoit, pourroit bien un jour être rectifiée & être portée plus loin par le ſecours de la doctrine des affinités compoſées. J'eſpère d'être compris par les gens de l'art ; & ce ſera une nouvelle obligation que nous aurons aux lumiéres que l' Illuſtre Monſieur Macquer a répandu ſur cette partie ſi controverſe, ſi abſtraite, & ſi intéreſſante de la chymie.

CORRECTIONS POUR LA PARTIE PHILOSOPHIQUE

Dans le mémoire de M.r le COMTE MOUROUX.

		Fautes.	*Corrigez.*
Pag.	17.*l.*23.	que on traite	dont on traite
	19.*l.*16.	il eſt choſe	c' eſt une choſe
	24.*l.*19.	ne la viſite	ne les viſite
	25.*l.* 2.	exoſé	expoſé
	l. 3.	que pour	que par
	*l.*18.	extremment froid comme en Moſcovie , en Pologne	extremement froid comme en Moſcovie,& en Pologne
	27.*l.*25.	écloſes ,	écloſes ;
	30.*l.*23.	à l' obſcur	dans l' obſcurité
	48.*l.*17.	particulierement	particulierement (12
Note(13)	49.*l.*11.	metallium	metallicum
	*l.*12.	fixmm	fixum
	*l.*15.	vivide	viride
	*l.*15.	urtione	uſtione
	*l.*17.	vividem	viridem
Note(14)	50.*l.*14.	d'accord l'éſpece	d'acord ſur l'éſpece
	*l.*16.	de Chevalier Linné	du Chevalier Linné
Note(16)	51.*l.* 2.	inturſuſception	intuſſuſception

In CAROLI ALLIONII auctario ſtirpium horti Regii Taurinenſis.

		Errata.	*Corrige.*
Pag.	55. *l.*22.	moluceae	moluccae
	58. *l.*29.	rambrum	ramoſum
	61. *l.* 1.	ſeſamum indicum *transferendum* ſub Ruellia	
	69. *l.* 4.	Siegerbekia	Siegesbeckia
	l. 6.	macrophylla 1	macrophylla 1*
	71. *l.*31.	e	ex

		Errata.	Corrige.
Pag. 73.	l. 7.	Suecica	Svecica
74.	l 26	didymum	bonariense
76.	l. 17.	Argemene	Argemone
	l. 13. 14	melitotus	melilotus
	l. 24.	melitotus	melilotus
79.	l. 2.	juncea L	juncea L *
	l. 4.	valentina L	valentina L *
84.	l. 11.	pulcrum	pulchrum
89.	l. 26.	treliantathemum	flelianthemum
91.	l. 21.	chamaemelis	chamaemelii
92.	Consule numeros 133. 134.		
94.	l. 27.	distiactum	distinctum
96.		polymorphia	polymorpha

In dissertationem JOHANNIS FRANCISCI CIGNA *de respiratione*, ob auctoris tunc graviter aegrotantis absentiam multa irrepserunt menda, quae sic corrigenda.

Pag. 112.	l. 1.	variores	*lege*	rariores
113.	l. 8.	variori		rariori
	l. 15.	DAUSTENE		DAOUSTENC
114.	l. pen.	puth. funic		pathol. funic.
115.	l. 3.	alii		*dele*
	l. 6.	deductum		deductam
116.	l. 33.	tepidum		tepidam
117.	l 13.	circuli		corculi
	l. 30.	postquum		postquam
118.	l. 7.	Attenta		; attenta
	l. 8.	analogum ipsis		analogum in ipsis
	l. 26.	ipsum auriculam		ipsam auriculam
119.	l. 2.	non neque		non aeque
	l. 10.	vivaparis		viviparis

	Errata.	*Corrige.*
Pag. 120. *l.* 17.	quum moleſtiam	eam moleſtiam
l. 25.	retrigeria	refrigerio
ib.	illum autem	illud autem
l. 33.	ad patrem ſtimulet	ad partum ſtimulet
l. 35.	ad ſurgendum	ad ſugendam
121. *l.* 26.	quae neque	quae aeque
124. *l.* 13.	oſtium	otium
l. 29. 30.	Totus textus curſivo charactere erat exprimendus	
125. *l. ult.*	*nota* v memorata	*nota* y memorata
129. *l.* 5.	(III)	(XXIV) Citationes nempe omnes numerorum hujus & ſequentis capitis mendoſae ſunt, quod ordo numerorum, qui in ſingulis capitibus ab unitate incipere debuiſſet, continuata ſerie productus ſit a principio ad finem.
130. *l.* 18.	queunt	queant
131. *l.* 9.	in animalibus, qui	in animalibus, quae
132. l. 6.	neque incerta	aeque incerta
l. 23.	*not.* b	*not.* f
133.	ultima linea hujus paginae in principium ſequentis notae transferenda	
134. *l.* 32.	reſpiratio ſenſibilis	reſpiratio inſenſibilis
135. *l.* 21.	ea majori	eo majori
137. *l.* 15.	Ut animalia	At animalia
l. 29.	Rigmannus	Richmannus
141. *l.* 5.	Exitingues	Extinguens

	Errata.	*Corrige.*
Pag. 143. *l.*20.	conditum esse	pulmonem conditum esse
*l.*30.	camaleon	chamaeleo
144, *l.*29.	superficia	superficiei
*l.*48.	imo & progressivum (p) intestinum motum	intestinum motum imo & progressivum (p)
146. *l.*12.	fit	fiet
*l.*15.	rariorem aerem	in rariorem aerem
*l.*19.	(IX)	9.°
147. *l.ult.*	*not.* d	*not.* l
149. *l.*21.	aeream	veram
150. *l.*31.	Avagius	Savagius
151. *l.* 9.	hanc quoque	huic quoque
154. *l.* 7.	eumdem majores	eamdem mnjores
156. *l.* 8.	potius quum	potius quam
157. *l.*10.11.	aut favere non obstare	aut favere, aut obstare
*l.*11.12.	aut tam praesentiae	non tam praesentiae
*l.*24.	aër en masse	air en masse
*l.*25.	renovare censet	renovari censet.
l. pen.	observatur coagulari	*observatur coagulari*
159. *l.* 2.	ac si ulla	ac si nulla
l. 3.	opprimerentur	apprimerentur

Ad D. Dana. *De solano melanoceraso.*

170. omne — omnes

171. *not.* 1. pertinet ad paginam praecedentem
not. 2. Miscel. Taur. &c. legenda post verba *Bot. Prof.*

177. *l.* 2. Post alias ad . . . adde — Serviceum opus vulgo dictum

MEMOIRE

Sur différentes questions d' Analyse.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

ARTICLE I

Réflexions sur la forme des racines des équations déterminées, la réduction & la solution de ces équations.

Cardan & ses disciples ont résolu les équations des 3.^e^, & 4.^e^ dégrés. Les Algébristes qui leur ont succédé, ont perfectionné leurs solutions, en dévélopant la forme & la nature des racines. Ils ont donné une Théorie profonde sur la formation des équations des tous les dégrés & sur les racines imaginaires; mais malgré les travaux de tant des grands Géométres, l' équation du 5.^e^ dégre est encore à résoudre, & a résisté à leurs efforts. M. Euler qui s'est exercé avec tant de succès sur toutes les questions de l' Analyse, s'est occupé de celle-ci, & y a rapellé l' attention des Géométres qui paroissoient l'avoir tournée sur d'autres objets. M. Bézout, M. Waring, M. le Chevalier de Marguerie, M. de la Grange, M. de Vandermonde ont donné sur cette matière des récherches intéressantes & très-propres à jetter une nouvelle lumière sur cette théorie fondamentale de l' Analyse. C'est à la lecture de leurs ouvrages que je dois les réflexions suivantes qui peut-être ne seront pas absolument inutiles à ceux qui se proposeroient de suivre la même carrière.

I

La ſolution d'une équation du 3.e dégré, ſe réduit à une équation du ſecond, celle du quatrième à une équation du ſixième, immédiatement réductible au troiſième. M. Bézout a prouvé que l'équation du cinquième ſe réduiſoit à une du 24.e mais le rabaiſſement de celle-ci à des équations du 4.e, du 3.e, & du 2.e ne ſe préſente pas immédiatement; il faut de longs calculs pour y parvenir, & c'eſt le principal obſtacle qui a rétardé juſqu'ici la ſolution de ces équations.

II

Les racines d'une équation doivent être des fonctions algébriques & entières des coëfficiens de cette équation, & ſi le dégré eſt n en général, elles ne peuvent contenir de radicaux d'un dégré plus élevé que $\sqrt[n]{}$. Suppoſons donc que nous ayons une équation du dégré n, où le ſecond terme manque, & faiſons

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}; \ldots\ldots$$

le nombre de ces radicaux étant $n - 1$, il eſt clair que ſi je fais diſparoître les radicaux de cette équation *hypothétique*, & qu'enſuite je mette au lieu de x^n ſa valeur tirée de la propoſée, il me reſtera une fonction où x ne montera qu'à la $\overline{n-2}$.e puiſſance; ce qui me donnera $n - 1$ équations pour déterminer les $n - 1$ quantités A, B, C, &c. On voit que les conditions de cette opération ſont que l'équation propoſée & l'équation hypothétique aient lieu en même temps & *pour toutes les racines*. On voit auſſi que pour faire diſparoître les radicaux de l'équation $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. on en aura une où x montera au dégrè n^{n-1}, & c'eſt ce qui doit arriver, puiſqu'à cauſe des n racines de l'équation $y^n - 1 = 0$, chaque $\sqrt[n]{A}$ ou $\sqrt[n]{B}$, &c. a n valeurs qui peuvent être combinées avec les n valeurs de chaque autre, & que les radicaux ſont au nombre de $n - 1$.

III.

L'équation en A ne pouvant contenir de radicaux, ni du dégré n, ni des dégrés ſupérieurs, ſera néceſſairement du dégré .... $m . n - 1 . n - 2 . n - 3 ... 1$; m étant le produit des nombres plus petits que n; & comme la quantité que nous appellons A, répond à une quantité qui, en ſuivant la méthode de Tſchirnaus eſt donnée par une équation du dégré $n - 1 . n - 2 . n - 3 ... 1$. L'équation en A ſera réductible à une équation du dégré $n - 1 . n - 2 . n - 3 ... 1$; en ſorte que ſi on avoit $m = m' . p' . q' ...$ on auroit, en réſolvant ſucceſſivement des équations des dégrés m', p', q', ou $m' p'$, $m' q'$ &c. $m' p' q'$ &c. (ſi ces produits ſont moindres que n) on auroit, dis-je, une équation définitive du dégré $n. - 1 . n - 2 .... 1$. Toutes les fois que $n > 3$, cette équation monte donc à un dégré plus élevé que n; & c'eſt ce qui a rendu ſi difficile la ſolution des équations des dégrés ſupérieurs.

On voit déja que pour réſoudre l'équation produite par l'équation hypothétique ... $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. il y a deux moyens à employer; 1.° la réduction de cette équation; 2.° une nouvelle équation hypothétique. Suppoſons d'abord que l'équation en x' du $n - 1$, $n - 2 ... 1$ dégré, ne ſoit ſuſceptible d' aucune réduction ; il eſt clair que ſi on la traité comme la propoſée, qu'on faſſe $x' = \sqrt[1.2.3\ldots n-1]{A'} + \sqrt[1.2.3\ldots n-1]{B'} + \ldots$ le nombre des radicaux étant $\overline{n-1 \cdot n-2 \ldots 2 \cdot 1} - 1$, on aura une équation pour A'. Mais comme les racines de l'équation en x' ne doivent pas contenir de radicaux plus élevés que $\sqrt[n-1]{}$, on voit que l'équation en A', montera ou ſera réductible à un dégré qui n'aura point de diviſeurs premiers plus grands que $n-2$. En répétant la même opération, & réduiſant toujours ces équations autant qu'elles peuvent l'être, on en aura une d'un dégré qui n'aura point de diviſeurs premiers plus grands que $n-3$ & ainſi de ſuite juſqu' à une équation rationnelle.

I V

Ces ſuppoſitions pour les équations hypothétiques, ſont ſans doute trop compliquées ; ainſi il faudra, au lieu de cela, faire ſeulement $x' = \sqrt[n-1]{A'} + \sqrt[n-1]{B'} \ldots + Q'$, le nombre des A', B' étant $n-2$; & on examinera ſi l' équation en A', ou en Q' devient, après être réduite, d'un dégré qui n'ait pas de diviſeurs premiers plus grands que $n-2$. Si cela a lieu, on verra ſi en faiſant dans cette équation réduite dont l' inconnue eſt x'' ; $x'' = \sqrt[n-2]{A''} + \sqrt[n-2]{B''} \ldots + Q''$, le nombre des radicaux étant $n-3$, & ainſi de ſuite on aura ſucceſſivement des équations dont le dégré n'ait que des facteurs premiers plus petits que $n-3$, $n-4$ &c., & ainſi de ſuite. Nous obſerverons encore que ſi l'équation réduite en x'' eſt d'un dégré produit par des facteurs premiers plus petits que $n - 1$, & que quelqu'un de ces facteurs ſoit répété plus d'une fois & ſoit en même temps facteur de $n - 1$, il faudra eſſayer auſſi une équation hypothétique

$$x'' = \sqrt[n']{A'} = \sqrt[n'']{B'} \ldots\ldots + Q''$$

où n' eſt ce facteur, & où le nombre des A'' &c. eſt $n - 1$.

V

Pour ſavoir ſi une équation eſt ſuſceptible de réduction, on prendra tous les diviſeurs, tant ſimples, que compoſés de l' expoſant du dégré de l' équation ; & ſoit m un de ces diviſeurs, mm' le dégré de l'équation & x l' inconnue, ou cherchera ſi on ne peut pas avoir.

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} \ldots + p = 0,$$

les a, b, &c. étant donnés par des equations du dégré m'.

D' abord on eſſayera les diviſeurs ſimples, & enſuite on verra ſi on a des diviſeurs compoſés qui réuſſiſſent ſans qu'aucun diviſeur ſimple ait reuſſi. Il ſera queſtion de réſoudre d'abord l'équation m ; or dans ce cas quand même $m > n$, il eſt clair que m eſt le produit des diviſeurs premiers plus petits que n; que l'équation $x^m + ax^{m-1} \ldots + p = 0$, ne peut avoir dans ſa racine de radicaux auſſi élevés que n, & qu'ainſi on la réſolvera en prenant des équations hypothétiques comme ci-deſſus.

Il eſt inutile d'avertir que l'on n'a pas beſoin d'avoir réſolu l'équation en m ou m' pour ſavoir ſi la propoſée du dégré $m m'$ eſt réductible ou non.

V I

On peut régarder la méthode ci-deſſus comme générale ; en effet il eſt certain que la racine d'une équation du dégré n ne peut contenir, ſous le radical n, que des fonctions de radicaux moins élévées: or quelles que ſoient ces fonctions, il eſt clair que les équations hypothétiques ci-deſſus ſerviront à faire diſparoître à chaque fois le radical ſous qui tous les autres ſe trouvent, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait une équation qui ait un diviſeur rationnel. Ainſi l'on voit que la méthode employée pour réſoudre les 3.^{e}, 4.^{e} dégré, peut s'étendre aux dégrés ſupérieurs, & que la difficulté qui nait de l'élévation de l'équation où conduit l'hypothèſe pour la forme des racines, ne tient qu'à l'enorme complication des calculs qu'exige alors la ſolution du probléme; mais qu'on parviendra toujours à la ſolution cherchée en employant ſucceſſivement les réductions, & les équations hypothétiques, quand il n'y a plus de réductions poſſibles.

VII

Les équations que produiſent les différentes hypothèſes qu'on peut faire pour avoir les racines d'une propoſée, ne peuvent contenir dans leurs racines que les mêmes radicaux, mais combinés différemment avec des coëfficiens numériques, qui ſeront en général les racines d'équations $y^n - 1 = 0$, $y^m - A = 0$, A étant un nombre, $m < n$, ou d'équations produites par la multiplication de celles ci. On pourra donc abréger conſidérablement le calcul, en ne cherchant, ſoit pour la réduction des équations, ſoit pour les réſultats où conduiſent les équations hypothétiques que des fonctions rationnelles, par raport aux coëfficiens indeterminés de la propoſée, ſans s'embaraſſer des coëfficiens numériques. Si on joint à cela une remarque qu'on doit à M. le Chevalier de Marguerie, que ſi on a une équation $x^n + a x^{n-1} + b^2 x^{n-2} \ldots + q^n = 0$, les racines ſeront des fonctions homogenes & du dégré 1 de ces coëfficiens ; & que par ce moyen on ſache par le ſeul dégré de chaque équation de quels termes de ces coëfficiens chacun des ſiens peut-être compoſé : l'examen des équations qu'on cherche à réduire, ou pour leſquels on cherche des équations hypothétiques, en deviendra bien moins long.

VIII

J'ai dit ci-deſſus que les coëfficiens numériques dependroient d'équations $y^n - 1 = 0$, $y^m - A = 0$, ou de leurs combinaiſons ; mais quand cela n'auroit pas lieu en général, la recherche de ces coëfficiens n'auroit aucune difficulté analytique. En effet, ſi l'on connoît une fois les fonctions des coëfficiens indéterminés d'une équation du dégré n qui entrent dans ſa racine, ainſi que toutes les équations qui ont ſervi à déterminer ces fonctions ; comme les nombres inconnus reſtent conſtans, quelles que ſoient les racines, il y aura toujours moyen de les avoir par la méthode des coëfficiens indeterminés.

ARTICLE II

Démonſtration d'un Theorème de M. de la Grange (mémoires de l'Académie de Berlin, tome 24.^e)

Soit l'équation

$$y - x + \varphi x = 0\,;$$

φx déſignant une fonction quelconque de x, & que je cherche une valeur de ψx, autre fonction de x en y ; j'aurai par le théorème de M. d'Alembert,

$$\psi x = \psi y + \frac{d\psi y}{dy}\,\varphi x + \frac{d^2\psi y}{2\,dy^2}\,\varphi x^2 + \&c.$$

par le même théorème

$$\varphi x = \varphi y + \frac{d\varphi y}{dy}\varphi x + \frac{d^2\varphi y}{2dy^2}\varphi x^2 + \&c.$$

donc faisant $\varphi x = \varphi y + B$, $B = \frac{d\varphi y}{dy}\varphi y + C$, & ainsi de suite : j'ai en ordonnant par raport aux puissances de φy & de ses différences,

$$\varphi x = \varphi y + \frac{d\,\overline{\varphi y}^2}{2dy} + \frac{d^2\,\overline{\varphi y}^3}{2.3.dy^2} + \&c.$$

$$\frac{\varphi x^2}{2} = \frac{\varphi y^2}{2} + \frac{2d\,\overline{\varphi y}^3}{2.3.dy} + \frac{3d^2\,\overline{\varphi y}^4}{2.3.4dy^2} + \&c.$$

$$\frac{\varphi x^3}{2.3} + \frac{\varphi y^3}{2.3} + \frac{3d\,\varphi y^4}{2.3.4dy} + \frac{6d^2\,\varphi y^5}{2.3.4.5.dy^2}\ \&c.$$

substituant donc ces valeurs dans celle de ψx, ou aura, en ordonnant par raport aux puissances de ψy, & φy & de leurs différences,

$$\begin{aligned}\psi x = \psi y + \varphi y\frac{d\psi y}{dy} &+ \frac{\varphi y^2 d^2\psi y}{2dy^2} + \frac{\varphi y^3}{2.3}\frac{d^3\psi y}{dy^3}\ \&c.\\ &+ \varphi y\frac{d\varphi y}{dy}\frac{d\psi y}{dy} + \frac{2.d.\varphi y^3}{2.3dy}\frac{d^2\psi y}{dy^2}\\ &+ \frac{d^2\varphi y^3}{2.3dy^2}\frac{d\psi y}{dy}\end{aligned}$$

& réduisant

$$\psi x = \psi y + \varphi y\frac{d\psi y}{dy} + \frac{d\varphi y^2\frac{d\psi y}{dy}}{2dy} + \frac{d^2\varphi y^3\frac{d\psi y}{dy}}{2.3dy^2}\ \&c.$$

formule dont la loi est facile à saisir.

AR-

ARTICLE III.

Sur une équation aux différences finies.

Soit $z = A F x + a y + B F' x + b y + C F'' x + c y + D F''' x + e y$ &c. l'intégrale d'une équation aux différences partielles où les F désignent des fonctions arbitraires & où A, B, C, D, &c. sont des fonctions de y. Je suppose que lorsque $z = f$, $y = f'$: que lorsque $z = g$, $y = g'$; que lorsque $z = h$, $y = h'$; que lorsque $z = l$, $y = l'$, & ainsi de suite. On aura donc pour déterminer les fonctions, les équations.

$$f - A F\overline{x + a f'} - B F'\overline{x + b f'} - C F''\overline{x + c f'} - D F'''\overline{x + e f'} \pm \&c = 0$$

$$h - A' F\overline{x + a h'} - B' F'\overline{x + b h'} - C' F''\overline{x + c h'} - D' F'''\overline{x + e h'} \pm \&c = 0$$

$$g - A'' F\overline{x + a g'} - B'' F'\overline{x + b g'} - C'' F''\overline{x + c g'} - D'' F'''\overline{x + e g'} \pm \&c = 0$$

$$l - A''' F\overline{x + a l'} - B''' F'\overline{x + b l'} - C''' F''\overline{x + c l'} D''' F'''\overline{x + e l'} \pm \&c = 0$$

& ainsi de suite; les AA' & BB' &c. étant ce que deviennent les coëfficiens en y, lorsque y est égal à f', ou g', ou l'.

Maintenant pour avoir chaque fonction arbitraire, on mettra dans toutes les équations, hors la première, au lieu de x, $x + p$, $x + q$, $x + r$, &c., & on déterminera p, q, r par la condition que $a f' = p + a h' = q + a g' = r + a l'$, & ainsi de suite. Par ce moyen, si le nombre des fonctions est n, on aura après avoir éliminé F, $n - 1$ équations qui contiendront chacune deux fonctions de la forme $F' x$, $F x + P$ pour la première équation, $F' x$, $F' x + P'$ pour la seconde, $F x'$, $F x + P''$ pour la troisième, & ainsi de suite avec deux fonctions F'', deux fonctions F''', &c. Je prends les deux premières équations, & j'ai, en mettant dans la première $x + P'$ au lieu de x, & dans la feconde $x + P$ au lieu de x, quatre équations qui contiennent $F' x$, $F x + P$, $F' x + P'$, $F' x + P + P'$; donc je puis éliminer $F' x$: j'aurai maintenant $n-2$ équations qui contiendront chacune $F'' x$, & quatre fonctions femblables de x, plus quatre conftantes différentes, & de même $F''' x + Q$ & quatre autres fonctions femblables de x, plus quatre conftantes différentes; On éliminera F'' par une méthode femblable, & ainfi de fuite; en effet quelque foit le nombre des fonctions F^n, pourvu qu'on ait deux équations, on parviendra toujours à éliminer, parce que lorfqu'on aura chaffé une de ces fonctions $F^n x + Q$; par exemple, on n'aura qu'à mettre $x + Q$ au lieu de x dans l'équation d'où on a chaffé $F^n x + Q$, on aura une équation contenant $F^n x + Q$, $F^n x + Q + Q'$, $F^n x + Q + Q''$, &c., & mettant dans celle-ci pour $F^n x + Q$ fa valeur tirée d'une des deux propofées, on aura une équation en $F^n x + Q'$, $F^n x + Q''$, $F^n x + Q' + Q''$, $F^n x + 2 Q'$, $F^n x + 2 Q''$, &c. donc on aura deux équations qui ne contiendront plus $F^n x + Q$, on chaffera de même $F^n x + Q'$, & $F^n x + 2 Q'$, & ainfi de fuite. Cela pofé, foit une équation définitive de la forme $A, F x + B, F x + \Delta^{1} + C F x + \Delta^{11} + D, F x + \Delta^{111}$ au nombre de m, & qu'on faffe $F x = N e^{fx}$, on aura l'équation.

$$A, + B, e^{f\Delta 1} + C e^{f\Delta 11} + D e^{f\Delta 111} \; \&c. = 0;$$

& il eft clair que l'on aura $F x$ égal à une férie d'autant de termes en $N e^{fx}$, que f peut avoir de valeurs.

Examinant cette équation, on voit que fi les Δ font tous commenfurables entr'eux, l'équation eft comme celles aux différences finies ordinaires; mais fi les Δ ne font pas commenfurables, alors on obfervera 1.° que fi m eft le nombre des fonctions, il pourra arriver que f ait $m-1$ valeurs réelles. En effet, fuppofant à f $m-1$ valeurs réelles à volonté, & ſubſtituant, on aura les A, B, C, &c. en f; ou peut de même avoir $f = \pm f' \sqrt{-1}$ tant de fois que $\frac{m-1}{2}$ contient d'unités. En effet, en mettant les imaginaires ſous la forme $a + b\sqrt{-1}$, la première ſuppoſition donne $A + B\sqrt{-1} = 0$; la ſeconde $A - B\sqrt{-1} = 0$; ce qui ne fait que deux conditions A & $B = 0$. comme c'eſt réellement e^f qui entre dans l'équation ci-deſſus, C étant la valeur de e^f, on aura d'autres valeurs de f en auſſi grand nombre que $e^f - C = 0$ a de racines, c'eſt-à-dire, un nombre infini. Mais il ne ſuit pas de là qu'il y ait ici un nombre infini de termes correſpondans à chaque valeur de e^f. En effet, la ſuite de toutes ces valeurs de f, eſt f, $f + \gamma$, $f + \gamma^{\prime}$, $f + \gamma^{\prime\prime}$, &c. γ, $\gamma^{\prime}$ $\gamma^{\prime\prime}$, &c. étant des quantités telles que $e^{\gamma} = e^{\gamma^{\prime}} \ldots = 1$; mais dans le cas de l'équation préſente, en mettant ces valeurs pour f, on auroit A, $+ B e^{f\Delta} e^{\gamma\Delta} + C e^{f\Delta 1} e^{\gamma\Delta 1}$, &c. $= 0$, équation qui doit avoir lieu en même temps que A, $+ B e^{f\Delta} + C e^{f\Delta 1}$ &c. ce qui demande que $e^{\gamma\Delta} + e^{\gamma\Delta 1}$ ſoient égaux à l'unité. Or quoique $e^{\gamma} = 1$, quelque valeurs de γ qu'on eût priſe, cependant lorſque Δ, $\Delta 1$ ne ſont pas des nombres entiers, $\gamma = 0$ eſt la ſeule des valeurs de γ, pour laquelle $e^{\gamma\Delta}$ ſoit égal à l'unité; or, ici, les quantités Δ, Δ^1 étant incommenſurables entr'elles, on voit que $\gamma = 0$ eſt la ſeule valeur qui convienne au problême.

ADDITION AU MEMOIRE

Sur les ſolutions particulières des équations différentielles.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

M. Euler a remarqué le premier qu'il y avoit des équations qui ſatisfaiſaient à une équation différentielle ſans cependant être compriſes dans ſon intégrale générale. Voici quelques refléxions ſur la cauſe de ce paradoxe, c'eſt ainſi que M. Euler l'a apellé.

1 Soit $A\,d\,Z + B\,Z^m = 0$ une équation différentielle, il eſt clair que $Z = 0$ y ſatisfera, mais l'équation ſous cette forme eſt égale à la différentielle exacte de l'intégrale multipliée par un facteur, donc il peut arriver que $Z = 0$ ſatisfaſſe à la propoſée ſans ſatisfaire à la différentielle exacte de ſon intégrale, il ſuffit pour cela qu'elle ſatisfaſſe au facteur, & que Z y ſoit à une puiſſance poſitive plus grande que la plus petite puiſſance de Z dans le dénominateur de la différentielle exacte.

2 Une équation intégrale étant ſuppoſée $Q + C = 0$ ou C eſt une conſtante arbitraire les équations, qui rendent $Q = 0$, ou $Q = \infty$ ſatisfont également à $Q + C = 0$ les unes répondant à l'hypothéſe de $C = 0$ & les autres à celle de $C = -\infty$ donc pour que la ſolution $Z = 0$ ſatisfaſſe à la propoſée ſans ſatisfaire à l'intégrale, il faut que non ſeulement elle multiplie le facteur ſans ſatisfaire à la différentielle exacte, mais qu'elle ne puiſſe pas rendre l'intégrale infinie.

3 Soit $\frac{Z^n}{V}$ le facteur, l'intégrale ſera $S\,A\,V\,Z^{-n}\,d\,Z + B\,Z^{m-n}$ & elle eſt égale à $S\,A\,V\,Z^{-n}\,d\,Z$ priſe en

regardant Z ſeulement come variable plus au terme indépendant de Z il faudra donc ici que $SAVZ^{-n}dZ$ priſe par rapport à Z ne ſoit point infini lorſque $Z=0$ donc (come M. Euler l'a enſeigné dans le chapitre de ſon calcul intégral ou il traite de ces ſolutions particulières) il faut que n ſoit entre o & l'unité, mais il faut auſſi que BZ^{m-n} ait un terme ſans Z ſans quoi Z ſe trouveroit à tous les termes de l' intégrale, ce qui eſt contre l'hypothéſe donc $m=n$ donc m eſt entre zero & l' unité.

4 Donc ſi on a une équation différentielle d'un ordre quelconque elle ne pourra avoir des ſolutions particulières non compriſes dans l' intégrale, à moins qu'elle ne renferme des radicaux $\sqrt[n]{Z}$, * & que ces radicaux ne s' y trouvent pas multipliés à tous les termes par des puiſſances de Z; & les radicaux qui ſeront dans le cas & qui réſolveront la propoſée doneront les ſolutions particulières.

5 Soit l'équation $AdZ+\overline{Bdx+Cdy}\,Z^m=0$ à laquelle $Z=0$ ſatisfait & que cette équation n'ait pas d'intégrale générale, il eſt clair que toutes les fois que m n' eſt pas entre zero & l'unité $Z=0$ ſatisfait à l'équation de condition connue pour l' intégrabilité de ces équations, & que lorſque m eſt entre zero & l'unité $Z=0$ n' y ſatisfait pas; donc on pourra avoir dans ce cas pour ſolutions particulières de la propoſée non ſeulement l'équation de condition, mais encore les quantités qui ſe trouveront dans la propoſée ſous le ſigne radical avec la même condition que ci-deſſus, & il ſera facile d'appliquer le même raiſonement aux équations de tous les ordres pour leſquelles j'ai donné les équations de condition.

6 M. Euler a remarqué dans les mémoires de Peterſbourg où il recherche la courbe que décrit un point attiré par deux centres fixes que ces ſolutions particulières

non comprises dans l'équation générale ne pouvaient être emploïées à la solution des problêmes. Ainsi lorsque l'on a su par des substitutions ou autrement qu'une certaine équation satisfait à une équation différentielle, il faut avant de l'employer, examiner si elle n'est pas dans le cas de nos solutions particulières ($C' \cdot a\, d$), si la fonction égalée à zero dans cette équation ne se trouve pas dans la proposée sous le signe radical avec la condition ci-dessus.

7 La cause de ce nouveau paradoxe remarqué encore par M. Euler se peut découvrir en éxaminant la maniére dont pour chaque problême on parvient à une équation différentielle; en effet on verra qu'elles sont formées par la comparaison des valeurs successives des y, des x, & en sorte que si au lieu de $y + dy$ on mettait y, & x au lieu de $x + dx$ elles doivent démeurer identiques, or il est aisé de voir que si dans $A\,dZ + \sqrt{ZB} = A\overline{Z + dZ} - AZ + \sqrt{ZB}$ on met Z au lieu de $Z + dZ$ elle ne devient pas identique.

8 On voit que dans le cas de $A\,dZ + BZ = 0$ la même substitution ne rend pas la proposée identique, aussi $Z = 0$ n'est pas même dans ce cas une véritable solution de la proposée, elle ne peut l'être que dans le cas particulier où elle se trouve être la même que ce que devient alors la solution générale. En effet soit une équation $ay + bx^2 - bc^2 = 0$, a étant arbitraire, on ne peut-pas dire que l'équation $x = C$ soit une solution de cette équation, puisqu'il y a une infinité de cas ou elle ne resout pas, & si on avoit eu l'équation $\frac{d\; bx^2 + bc^2}{y} = 0$ on n'aurait pas pu dire que $x = b$ resout le problême qui a conduit à cette équation par ce qu'il y a une infinité de cas du problême qu'elle ne peut résoudre. Ainsi les solutions contenues dans l'intégrale resolvent non pas le problême

proposé, mais quelques cas de ce problême, & les autres solutions de l'équation différentielle non contenues dans l'intégrale n'en résolvent aucun.

10 Dans le cas des équations absurdes on trouvera que si (ces équations étant entre x, y & z) on cherche les valeurs de z repondant à $y = X$, X est une fonction de x. Les solutions de la proposée contenues dans l'équation de condition deviendront en y mettant X pour y des solutions contenues dans l'intégrale de l'équation en z & x. Au lieu que celles qui ne seront pas contenues dans l'équation de condition ne donneront pas non plus de solutions contenues dans l'intégrale de l'équation en z & x.

Je ne me suis point étendû sur ce sujet par ce que je sçai que M. de la Place de l'Académie des Sciences de Paris en a fait l'objet d'un travail considérable, son ouvrage qu'il a eû la bonté de me communiquer en manuscrit, il y a plus d'un an, sera imprimé dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1773.

MÉMOIRE

Sur la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles.

PAR M.r MONGE.

L'intégrale d'une équation aux différences ordinaires doit, comme on sait, renfermer, pour être complete, autant de costantes arbitraires que le dégré de la différentielle contenoit d'unités avant l'intégration, & ces constantes doivent être telles que l'intégrale satisfasse à autant de conditions particulières, qui sont ordinairement que pour certaines valeurs données de x, certaines fonctions de x deviennent égales à des quantités données; & en supposant la perfection de l'analyse, la détermination de ces constantes n'est soumise à aucune difficulté. De même l'intégrale complete d'une équation aux différences partielles renferme autant de fonctions arbitraires des variables déterminées que le dégré de la différentielle contenoit d'unités, & ces fonctions doivent être de telle forme que l'intégrale satisfasse à un même nombre de conditions particulieres, qui sont toujours que, pour certaines équations données entre x & y, l'intégrale se transforme en d'autres équations données entre x & z.

Par exemple, z étant une quantité fonction de x & de y, δ le caractère de sa différentielle en ne fesant varier que x & d celui de sa différentielle par raport à y, l'intégrale $z = \varphi\ (ax - y)$ de l'équation $\frac{\delta z}{dx} + a\frac{dz}{dy} = 0$, appartient à autant de surfaces courbes distinctes, & dans cha-

chacune des quelles on aura également $\frac{\delta z}{dy} + a\frac{dz}{dy} = 0$, que φ, peut avoir de formes différentes, & si l'on veut avoir l'équation de celle de ces surfaces qui passe par une courbe à double courbure donnée, il faut déterminer quelle forme doit avoir la fonction φ pour qu'en fesant $y = \Delta . x$, on ait $z = \psi . x$: ces deux dernières équations étant celles des projections de la courbe donnée sur deux des plans aux quels est rapportée l'équation de la surface.

Pareillement $z = \varphi(ax - y) + x\varphi'(ax - y)$, intégrale de $\frac{\delta\delta z}{dx^2} + \frac{2a\delta dz}{dxdy} + \frac{a^2 ddz}{dy^2} = 0$ est l' équation d'autant de surfaces différentes qu' il y a d'unités dans le nombre des combinaisons deux à deux dont sont susceptibles toutes les formes que peuvent avoir les fonctions φ & φ'; & l'on ne peut indiquer une de ces surfaces qu'en assignant, par exemple, deux courbes à double courbure par lesquelles elle doive passer: ou plus généralement, qu'en donnant deux conditions distinctes aux quelles il faille que l'équation satisfasse en même tems. Il en est de même des équations qui contiennent un plus grand nombre de fonctions arbitraires.

De plus il arrive souvent, surtout lorsque les fonctions arbitraires sont affectées de facteurs, que la détermination des formes des fonctions introduise dans l'intégrale des constantes arbitraires que l'on ne peut déterminer qu'en connoissant les valeurs de z qui correspondent à des valeurs données de x & de y, ou, ce qui révient au même, qu'en assignant dans l'espace un même nombre de points par lesquels la surface doive passer. Jusqu'ici j'ai supposé que les conditions, aux quelles devoit satisfaire l' intégrale, étoient de nature à être exprimées analytiquement, mais si ces conditions étoient que la surface dût passer par des courbes discontinuës ou tracées au hazard, les formes des fonctions ne feroient plus analytiques & feroient par conféquent inaffignables neantmoins, comme je l'ai fait voir dans un mémoire précédent, l'intégrale n'en feroit pas moins conftructible.

Ainfi lors qu'on a intégré une équation en différences partielles, l'intégrale qui donne en quantités finies la valeur de z, eft vague, par ce qu'elle renferme des fonctions aux quelles on peut donner toutes fortes de formes, analytiques ou difcontinuës, il faut donc déterminer quelles doivent être les formes chacune en particulier, pour que l'intégrale rempliffe les conditions particulières de la queftion, lorfque ces conditions font analytiques, ou conftruire l'intégrale lors qu'elles font difcontinuës.

Cette opération eft généralement fujette à des grandes difficultés, dont les célébres géometres M.M. D'Alembert, Euler, & La-Grange n'ont encore lévé qu'un très-petit nombre. Je ne crois pas même que nous foïons bientôt en état de les lever toutes; néantmoins, perfuadé que dans les matières nouvelles les moindres progrez ne font pas à négliger, & qu'une idée ftérile entre les mains d'un homme ordinaire peut dévenir très-profitable entre celles d'un habile géometre, je vais faire part à l'Académie du réfultat de mes récherches fur cet objet; trop heureux fi ce mémoire pouvoit être l'occafion de quelques découvertes utiles dans l'analyfe ou dans la géométrie.

1.° Quelque foit la condition à laquelle doive fatisfaire une intégrale, je donne toujours la valeur déterminée de z lorfqu'elle ne contient qu'une feule fonction arbitraire, ou j'en donne la conftruction lorfque la condition n'eft pas analytique. 2.° S'il y a plus d'une fonction dans l'équation, je ne les détermine & ne les conftruis que dans certains cas, c'eft-à-dire, que pour certaines conditions, qui font cependant affez étendues, & que l'on peut fuppofer continuës ou difcontinuës. Ainfi chaque problème dans le mémoire à d'abord une ſolution analytique, & une conſtruction appliquable aux fonctions diſcontinuës, & par ce que cette conſtruction eſt indépendante de la ſolution précédente, j'en déduis une ſéconde ſolution analytique, qui donne toujours le même réſultat que la première, par conſéquent chaque problême eſt une nouvelle preuve de la poſſibilité de conſtruire les fonctions arbitraires diſcontinuës.

Pour donner plus de généralité aux ſolutions, je ſuppoſe la perfection de l'analyſe, c'eſt-à-dire qu'étant donnée une équation quelconque en x & y on puiſſe toujours en tirer la valeur de x en y, ou celle de y en x, ou pour mieux dire, que quelque ſoit la forme connuë de la fonction ψ, on puiſſe toujours tirer la valeur de x en y de l'équation $\psi\, x = y$, & que les fonctions arbitraires ne ſoient envelopées ſous aucun ſigne d'intégration.

PROBLÊME I

Trouver quelle doit être la forme de la fonction φ dans l'équation $z = \varphi\, V$, pour qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$; V étant une quantité quelconque donnée en x & y, & les formes des fonctions Δ & Ψ étant connuës.

N.B. J'ai déjà donné la ſolution de ce problême dans un mémoire qui a précédé celui-ci, mais pour ſuivre un certain ordre, je ſuis obligé de le rémetre ici, où l'énoncé eſt d'ailleurs plus général.

Solution.

Soit miſe dans V la valeur de $y = \Delta \cdot x$, & ſoit V' la fonction de x que donne cette ſubſtitution, il eſt évident que l'on aura par la condition de la queſtion $\Psi \cdot x = \varphi\, V'$. Soit fait maintenant $V' = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u, que je répréſente par $f \cdot u$, & ſoit miſe cette valeur dans $\Psi \cdot x = \varphi V'$, on aura $\Psi \cdot (f \cdot u) = \varphi\, u$. Or on connoit les formes des fonctions Ψ & f, on connoitra par conséquent celle de la fonction φ. Donc $z = \Psi\,(f V)$ sera l'équation demandée. C. Q. F. T.

Exemple.

Soit proposé de trouver la forme de la fonction φ, pour qu'en fesant $y = m x$, dans l'équation $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$, on ait $z = \frac{x^2}{a}$.

Il est clair que si l'on met à la place de y dans cette équation sa valeur $m x$, elle déviendra $\frac{x^2}{a} = \varphi\,(x^2 + m^2 x^2)$, puis qu'alors la valeur de z doit être $= \frac{x^2}{a}$. Soit fait maintenant $x^2 + m^2 x^2 = u$, ce qui donne $x^2 = \frac{u}{m^2 + 1}$, & soit substituée cette valeur de x dans la dernière équation, on aura $\frac{u}{(m^2 + 1)\,a} = \varphi\, u$, ce qui fera connoitre la forme de la fonction φ; d'où il suit que l'équation qui satisfera à la question sera $z = \frac{x^2 + y^2}{(m^2 + 1)\,a}$.

En effet si l'on met à la place de y dans cette équation sa valeur $m x$, on trouve $z = \frac{x^2}{a}$.

Remarque I.

L'équation $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$ est celle de toutes les surfaces des révolutions, l'origine des coordonnées rectangulaires étant dans l'axe, ainsi $z = \frac{x^2 + y^2}{(m^2 + 1)\,a}$ est l'équation de la ſurface qu'engendreroit la courbe dont les projections ont pour équation $z = \frac{x^2}{a}$ & $y = m\,x$, en tournant autour d'un axe parallele aux z & mené par l'origine & parce que cette courbe eſt une parabole dont le plan paſſe par l'axe, il s'enſuit que l'équation $z = \frac{x^2 + y^2}{(m^2 + 1)\,a}$ eſt celle de la ſurface d'un paraboloïde. J'ai choiſi cet exemple parceque la ſurface en eſt connuë, & que les opérations en ſont ſimples.

Rémarque II

L'opération précédente ſuppoſe que les fonctions Δ & Ψ ſont analytiques, c'eſt-à-dire ſoumiſes à la loi de continuité, mais ſi $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$ répreſentoient les équations des courbes diſcontinuës & tracées au hazard, la forme de la fonction φ ſeroit inaſſignable, on pourroit néantmoins la conſtruire, comme on va le voir, ou, ce qui révient au même, conſtruire la valeur, que donne alors pour z l'équation $z = \varphi\, V$, x & y étant donnés à volonté.

Conſtruction.

Soient CAD le plan des x & y, que pour la commodité je ſuppoſerai toujours horiſontal dans la ſuite, BAC celui des x & z, smS la courbe à double courbure, diſcontinue, ou tracée au hazard & dont les projections rqR & $sm'S$ ont pour ſymboles d'équations $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi\, x$; ſoient enfin AP & PQ les deux coordonnées x & y priſes à volonté, pour leſquelles il s'agit de trouver la verticale $QM = z$. Cela poſé par le point Q on conſtruira ſur le plan horiſontal la courbe TQq dont Planche I FIG. I l'équation eſt $V = b$, b ètant une indéterminée telle que la courbe paſſe par le point Q; elle coupera la courbe $r\,q\,R$ en un point q par lequel on élevera la verticale $q\,m$, qu'on prolongera juſqu' à ce qu'elle rencontre quelque part la courbe $s\,m\,S$ en un point m, on fera $Q\,M = q\,m$, & le point M ſera dans la ſurface demandée. Car ſi dans l'équation $z = \varphi V$ on fait $V = b$, on a $z =$ conſt. c'eſt-à-dire que toutes les verticales élévées par les points de la courbe $T\,Q\,q$ doivent rencontrer la ſurface à la même hauteur; mais cette conſtante doit être telle que pour le point q l'on ait $z = q\,m$, donc on doit avoir $Q\,M = q\,m$. *C. Q. F. T & D.*

Si par la courbe $T\,Q\,q$ on imagine une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſurface à conſtruire (ſuppoſée pour un inſtant conſtruite) en une courbe $M\,m$, qui ſera horiſontale, qui paſſera par le point démandé M & dont la projection verticale ſera une droite horiſontale $M'\,m'$. Donc ayant abaiſſé $q\,p$ perpendiculaire aux x, & élévé la verticale $p\,m'$, le point m', où elle coupera la courbe $s\,m'\,S'$, ſera la projection verticale du point m, & l'horiſontale $m'\,M'$ la projection de la courbe $M\,m$; par conſéquent ſi l'on éléve la verticale $P\,M'$, le point M' ſera celle du point M, & l'on aura $PM' = QM$. Cette méthode eſt plus commode, par ce qu'elle n'exige pas qu'on éléve la verticale $q\,m$ dans l'éſpace.

Cette conſtruction eſt générale, mais dans un grand nombre de cas il peût être plus ſimple de lui ſubſtituer un mouvement continu en voici des exemples.

1.° Si l'on a $V = a\,x - y$, on engendrera la ſurface en feſant gliſſer une droite horiſontale parallelement à elle même, ſur la courbe $s\,m\,S$, par ce que dans ce cas là la ligne $T\,Q\,q$, pour quelque point Q que ce ſoit, eſt une droite qui fait un angle conſtant avec l'axe $A\,P$.

2.° Si l'on a $V = x^2 + y^2$, la ſurface ſe forme par la révolution de la courbe $s\,m\,S$ au tour de la verticale AB priſe pour axe, car alors la courbe TQq pour quelque point Q que ce ſoit, eſt la circonférence d'un cercle dont le centre eſt au point A; c'eſt ce que j'ai déjà démontré dans le mémoire précédent.

AUTRE SOLUTION DU MEME PROBLÊME

Tirée de la conſtruction précédente.

Soient $AP = x'$ & $PQ = y'$, il eſt évident que la queſtion conſiſte à trouver une valeur de z en x' & y' qui ſatisfaſſe aux conditions. Pour cela ſoit fait $V = b$, & ſoit déterminée la conſtante b de telle manière qu'en feſant dans cette équation $x = x'$, on ait $y = y'$; ſoit éliminée y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une valeur de x en x', y' & conſtantes; ſoit miſe cette valeur à ſa place dans la quantité $\Psi \cdot x$ ſoit enfin K ce qu'elle dévient alors, $z = K$ ſera l'équation démandée.

Exemple.

Pour faire voir l'accord de ces deux ſolutions, je vais appliquer celle-ci au même exemple que la précédente, où l'on a $V = x^2 + y^2$, $\Delta \cdot x = m\,x$ & $\Psi \cdot x = \frac{x^2}{a}$.

Il eſt évident qu'afin que dans l'équation $x^2 + y^2 = b$, on ait $y = y'$ en feſant $x = x'$, l'on doit avoir $b = x'^2 + y'^2$; ſoit donc éliminée y des deux équations $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ & $y = m\,x$, on aura $x^2 + m^2\,x^2 = x'^2 + y'^2$, ou $x^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{1 + m^2}$ ſoit miſe cette valeur à ſa place dans $\frac{x^2}{a}$, l'on aura $\frac{x'^2+y'^2}{a(1+m^2)}$, & par conféquent pour équation demandée $z = \frac{x'^2+y'^2}{a(1+m^2)}$.

qui eft la même que celle que nous avons déja trouvée.

PROBLÈME II

Déterminér la forme que doit avoir la fonction φ, pour qu'en fesant dans l'équation $z = M + N\varphi V$ $y = \Delta \cdot x$, on ait $z = \Psi \cdot x$; les quantités M, N & V étant données d' une manière quelconque en x & y.

Solution

Soient M', N' & V' les fonctions de x que l'on a en fubftituant à la place de y fa valeur $\Delta \cdot x$ dans les quantités M, N & V; il eft évident que l'on aura par la condition $\Psi \cdot x = M' + N'\varphi V'$. Soit fait actuellement $V' = u$, d' où l'on tirera la valeur de x en u, & foit $x = fu$ cette valeur, qui mife à fa place dans l'équation précédente donnera

$$\Psi \cdot (f \cdot u) = M'' + N''\varphi u,$$

les quantités M'' & N'' étant ce que déviennent M' & N' en y mettant $f \cdot u$ à la place de x on aura par conféquent

$$\varphi u = \frac{\Psi \cdot (f \cdot u) - M''}{N''}$$

Or on connoit les formes des fonctions Ψ & f, & la manière dont M'' & N'' font compofées de u, donc on connoitra la forme de la fonction φ. C. Q. F. T.

Exemple

Soit propofé de déterminer la nature de la fonction φ, pour que l'équation $z = y^n x^m + x^p y^q \varphi(ax - y)$

don

donne $z = b\,x^2$ en fesant $y = c\,x$.

Soit mise à la place de y sa valeur $c\,x$, & l'équation déviendra $b\,x^2 = c^n\,x^{m+n} + c^q\,x^{p+q}\,\varphi\,(a\,x - c\,x)$

soit fait maintenant $a\,x - c\,x = u$, ce qui donne $x = \frac{u}{a-c}$, & soit substituée cette valeur de x, on aura

$$\frac{b\,u^2}{(a-c)^2} = c^n \left(\frac{u}{a-c}\right)^{m+n} + c^q \left(\frac{u}{a-c}\right)^{p+q} \varphi\,u$$

d'où l'on tirera $\varphi\,u = \frac{b}{c^q}\left(\frac{u}{a-c}\right)^{2-p-q} - c^{n-q}\left(\frac{u}{a-c}\right)^{m+n-p-q}$

donc l'équation qui satisfera à la question sera

$$z = y^n x^m + x^p y^q \left\{ \frac{b}{c^q}\left(\frac{a\,x-y}{a-c}\right)^{2-p-q} - c^{n-q}\left(\frac{a\,x-y}{a-c}\right)^{m+n-p-q} \right\}$$

En effet, si dans cette équation l'on fait $y = c\,x$, on trouve $z = b\,x^2$.

En supposant la perfection de l'analyse, cette opération sera toujours praticable, lorsque les fonctions Δ & Ψ seront analytiques, mais si $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi\,x$ représentent les équations des courbes discontinues, la fonction φ n'aura pas de valeur analytique. Il sera néantmoins possible de construire la surface dont l' équation est $z = M + N\,\varphi\,V$, de telle manière qu'elle passe par la courbe discontinue dont les symboles d'équations sont $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$.

Construction.

La question se réduit à trouver l'ordonnée z qui répond à un x & un y donnés à volonté. Pour cela soient *CAD* le plan horisontal des x & y, *BAC* le plan des x & z, *s m S* la courbe discontinue par laquelle doit passer la surface, & dont les projections *r q R* & *s m' S* ont pour symboles d'équations, la première $y = \Delta \cdot x$ & la seconde $z = \psi \cdot x$ enfin soient *A P* & *P Q* les coordonnées pour lesquelles il s'agit de construire la verticale Planche I FIG. II

$QM = z$. Cela posé soit décrite sur le plan horisontal la courbe TQq, dont l'équation est $V = b$, la constante b devant être telle que la courbe passe par le point Q, ou qu'en fesant $x = AP$ on ait $y = PQ$: cette courbe rencontrera rqR en un point q, par lequel on élévera la verticale qm, qu'on prolongera jusqu'à la courbe smS; on menera qp parallele aux y, & on élévera la verticale pm', qu'on prolongera jusqu'à la courbe $sm'S'$ qu'elle rencontrera en un point m', & l'on aura $qm = pm'$. On construira sur le plan vertical BAC la courbe $KM'm'$ dont l'équation est $z = M' + N'\beta$, M' & N' étant les fonctions de x que donne la substitution dans M & N de la valeur de y prise dans l'équation $V = b$, & β étant une constante telle que la courbe passe par le point m'. Enfin on élévera la verticale PM', on fera $QM' = PM'$, & le point M sera dans la surface demandée.

Car si dans l'équation $z = M + N\varphi V$ on met à la place de y sa valeur prise dans $V = b$, on aura $z = M' + N'\beta$, équation de la projection verticale $KM'm'$ de l'intersection Mm de la surface demandée par une surface cylindrique verticale qui auroit pour base la courbe TQq; & dans laquelle la constante β doit être telle que cette projection passe par le point m' à fin que pour le point p l'on ait $z = pm' = qm$, & que la surface demandée passe par conséquent par le point m.

Dans certains cas particuliers cette construction se simplifie beaucoup; par exemple, si la proposée est $z = x\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on engendrera la surface en fesant glisser une droite sur la courbe à double courbure donnée, & dont l'extrémité soit fixée à l'origine des coordonnées, car l'équation $\frac{x}{y} = b$ est celle d'une droite qui passe par le point A, quelque soit la constante b, & en substituant la valeur de y priſe dans cette équation, on a $z = x \varphi b$, qui eſt encore celle d'une droite qui paſſe par le même point quelque ſoit $\varphi \cdot b$. Ainſi l'équation $z = x \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$ eſt celle d'une ſurface conique à baſe quelconque; mais dont le ſommet eſt déterminé à l' origine.

AUTRE SOLUTION DU PROBLEME II.

Tirée de la conſtruction.

La queſtion ſera reſoluë, ſi en feſant $AP = x'$, & $PQ = y'$, on trouve une valeur de z en x' & y' qui ſatisfaſſe aux conditions. Pour cela ſoit fait $V = b$, & ſoit déterminé b de telle manière qu'en feſant $x = x'$ on ait $y = y'$. Soit tirée de cette équation la valeur de y en x, x' & y', pour la mettre dans les quantités M & N & ſoient M' & N' ce qu'elles deviennent par cette ſubſtitution; ſoit éliminée y de deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une valeur de x en x' & y', que l'on mettra à ſa place dans $\psi \cdot x$, & ſoit K ce que devient cette fonction; cela fait, ſi dans l'équation $M' + N' \beta = z$ on détermine β de telle manière que pour cette même valeur de x on ait $z = K$, & qu'enſuite on mette par tout x' à la place de x, on aura l'équation demandée.

Je ne démontre pas ce procédé, par ce qu'il n'eſt que l'application de l'analyſe à la conſtruction précédente, où je ſuppoſe alors que les fonctions Δ & Ψ ſoient analytiques.

Il pourroit arriver que la propoſée fût de cette forme, $F \cdot z = M + N \varphi V$, F étant le caractère d'une fonction connüe, mais cette équation ne feroit pas plus difficile à déterminer que la précédente, car en mettant par tout à la place de y ſa valeur priſe dans $y = \Delta x$, on aura $F(\Psi \cdot x) = M' + N' \varphi V'$, ou $\Psi' x = M' + N' \varphi V'$, d' où l'on tirera la nature de la fonction φ comme je l'ai fait dans la première ſolution. Ainſi par ce problême on eſt en état de déterminer toute équation qui ne contiendra qu'une fonction arbitraire.

CONSTRUCTION DU MEME PROBLÊME.

Dans le cas où toutes les quantités M, N & V ſeroient elles mêmes diſcontinuës.

Les quantités M, N & V étant fonctions des deux variables x & y, ne peuvent être repréſentées que par les ordonnées verticales de trois ſurfaces courbes données ou conſtructibles, & par ce qu'elles ſont ſuppoſées diſcontinuës; l'on doit avoir, avant de conſtruire la ſurface demandée, trois autres ſurfaces diſcontinuës, ſoit données au hazard, ſoit conſtruites par quelques méthodes telles que celles que j'ai déjà données, & dont les ſymboles d'équations ſoient

$z = M$ pour la première.
$z = N$ pour la ſeconde.
& $z = V$ pour la troiſième.

Planche I FIG. II On élévera par le point donné Q, pour lequel on cherche l'ordonnée de la ſurface à conſtruire, une verticale que l'on prolongera juſqu'à ce qu'elle rencontre la ſurface, dont le ſymbole d'équation eſt $z = V$, en un point par lequel on menera un plan horizontal, qui coupera cette ſurface en une courbe dont la projection horiſontale ſera la courbe diſcontinue TQq, on aura pour équation $V = b$ · cette courbe étant conſtruite, on imaginera une ſurface cylindrique verticale, dont elle ſoit la baſe, & qui coupera les deux autres ſurfaces données en deux courbes dont les projections verticales ſeront les courbes diſcontinuës HNG & hng, & auront pour ſymboles d'équations la première $z = N'$ & la ſeconde $z = M'$; les quantités M' & N' repréſentant ce que deviendroient M & N ſi l'on pouvoit analytiquement y mettre pour y ſa valeur priſe dans l'équation diſcontinue $V = b$ · or l'équation de la courbe $KM'm'$ eſt comme je l'ai déjà dit

$$z = M' + N'\beta$$

on aura donc $PM' = Pn + PN \times \beta$ · mais la conſtanre β doit être telle que la courbe paſſe par le point m', ou que pour l'abciſſe Ap l'on ait $pm' = pg + pG \times \beta$, ce qui donne $\beta = \frac{pm' - pg}{pG}$, donc ſi l'on conſtruit l'expreſſion

$$Pn + \frac{PN \times \{pm' - pg\}}{pG}$$

on aura l'ordonnée $PM' = QM$. C. Q. F. F.

PROBLÊME III

Déterminer les formes que doivent avoir les deux fonctions φ & φ', pour que l'équation $z = \varphi V + x\varphi' V$ ſatisfaſſe aux deux conditions ſuivantes, 1° qu'en feſant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$, 2° qu'en feſant $y = \Delta' \cdot x$, on ait $z = \Psi' \cdot x$, la quantité V étant une fonction donnée en x & y, & les formes des fonctions Δ, Δ', Ψ, Ψ' étant connuës.

Solution.

Soient V' la fonction de x que l'on obtient en mettant à la place de y dans V ſa première valeur $= \Delta \cdot x$, & V'' la fonction de x que l'on obtient en y mettant ſa ſeconde valeur $\Delta' x$, il eſt clair que l'on aura par les conditions les deux équations ſuivantes.

$$(A) \qquad \Psi \cdot x = \varphi V' + x\, \varphi' V'$$
$$(B) \qquad \Psi' \cdot x = \varphi V'' + x\, \varphi' V''.$$

Soit fait $V' = u$, & de cette équation ſoit tirée la valeur de x en u, que je ſuppoſe repréſentée par $f \cdot u$, & que l'on mettra à la place de x dans l'équation (A) l'on aura (C) $\Psi \cdot (f \cdot u) = \varphi u + f u \cdot \varphi' u.$

Soit fait de même $V'' = v$, & ſoit $f' . v$ la valeur de x priſe dans cette équation, en la mettant dans l'équation (B) l'on aura

$$(D) \quad \Psi' (f' \cdot v) = \varphi v + f' u \cdot \varphi' v.$$

on tirera de la première $\varphi u = \Psi (f \cdot u) - f u \cdot \varphi' u$, mettant à la place de φ cette forme dans l'équation (D), l'on aura

$$\Psi' (f' \cdot v) = \Psi (f \cdot v) - f . v . \varphi' v + f' v \cdot \varphi' v$$

& par conſéquent

$$\varphi' v = \frac{\Psi' \cdot (f' \cdot v) - \Psi \cdot (f \cdot v)}{f' v - f \cdot v}$$

or on connoit les formes des fonctions Ψ, Ψ', f & f', donc on connoitra 1° celle de la fonction φ'. Subſtituant actuellement à la place de φ' dans l'équation (C), la forme que l'on vient de trouver, l'on aura

$$\varphi u = \Psi (f \cdot u) - \frac{f \cdot u \Psi' \cdot (f' u) + f \cdot u \Psi \cdot (f \cdot u)}{f' u - f u}$$

ou bien réduiſant

$$\varphi u = \frac{f' u \Psi (f u) - f u . \Psi' (f' \cdot u)}{f' u - f u}$$

donc on connoitra 2° la forme de la fonction φ, & par conſéquent l'équation demandée ſera

$$z = \frac{f' V \Psi (f \cdot V) - f V \Psi' (f' V) + x \Psi' (f' V) - x \Psi (f \cdot V)}{f' V - f V}.$$

C. Q. F. T.

Exemple:

Soit proposé de déterminer les fonctions arbitraires φ & φ' dans l'équation

$$z = \varphi(ax - y) + x\varphi'(ax - y)$$

de telle manière 1° qu'en fesant $y = bx$ on ait $z = gx^2$, 2° qu'en fesant $y = cx + h$, on ait $z = mx^2 + n$.

On mettra à la place de y ses deux valeurs bx & $cx + h$, & l'on aura les deux équations suivantes

$$gx^2 = \varphi(ax - bx) + x\varphi'(ax - bx)$$

$$mx^2 + n = \varphi(ax - cx - h) + x\varphi'(ax - cx - h)$$

on fera $ax - bx = u$, ce qui donnera $x = \frac{u}{a-b}$, & la première équation deviendra

$$\frac{gu^2}{(a-b)^2} = \varphi u + \frac{u}{a-b}\varphi' u,$$

d'où l'on tirera $\varphi u = \frac{gu^2}{(a-b)^2} - \frac{u}{a-b}\varphi' u$.

On fera de même $ax - cx - h = v$, ce qui donnera $x = \frac{h+v}{a-c}$, & la seconde équation déviendra $m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n = \varphi v + \frac{h+v}{a-c}\varphi' v$. Substituant à la place de la fonction φ sa forme que l'on vient de trouver, on aura

$$m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n = \frac{gv^2}{(a-b)^2} - \frac{v}{a-b}\varphi' v + \frac{h+v}{a-c}\varphi' v$$

d'où l'on tirera $\varphi' v = \dfrac{m\left(\frac{h+v}{a-c}\right)^2 + n - \frac{gv^2}{(a-b)^2}}{\frac{h+v}{a-c} - \frac{v}{a-b}}$

mettant enfin cette forme dans la valeur de φu, & réduisant on trouvera

$$\varphi u = \frac{\frac{h+u}{a-c} \cdot \frac{g u^2}{(a-b)^2} - \frac{m u}{a-b}\left(\frac{h+u}{a-c}\right)^2 - \frac{n u}{a-b}}{\frac{h+u}{a-c} - \frac{u}{a-b}}$$

l'équation qui ſatisfait à la queſtion ſera donc

$$z = \frac{\frac{h+ax-y}{a-c} \cdot g\left(\frac{ax-y}{a-b}\right)^2 - \frac{m(ax-y)}{a-b}\left(\frac{h+ax-y}{a-c}\right)^2 - \frac{n(ax-y)}{a-b} + mx\left(\frac{h+ax-y}{a-c}\right)^2 + nx \quad g\left(\frac{ax-y}{a-b}\right)^2}{\frac{h+ax-y}{a-c} - \frac{ax-y}{a-b}}$$

il eſt en effet facile de voir que cette équation remplit les deux conditions.

On pourroit réduire conſidérablement cette valeur de z, mais elle ne paroîtroit pas être de la forme $\varphi\,(ax-y) + x\,\varphi'\,(ax-y)$.

Remarque.

L'équation $z = \varphi\,(ax-y) + x\,\varphi'\,(ax-y)$, intégrale de $\frac{\delta\,\delta z}{dx^2} + 2a\,\frac{\delta\,dz}{dx\,dy} + a^2\,\frac{ddz}{dy^2} = 0$ eſt celle de la ſurface engendrée par le mouvement d'une droite qui gliſſeroit ſur les deux courbes à double courbure dont les équations ſont $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$ pour l'une $y = \Delta' \cdot x$, $z = \Psi' \cdot x$ & pour l'autre, de manière que cette droite fût toujours dans des plans verticaux, paralleles, & dont l'équation générale ſeroit $ax - y = \beta$, β étant une conſtante pour chaque plan, mais variable d'un plan à l'autre. Car en feſant $ax - y =$ conſtante dans l'équation, elle devient $z = A + Bx$, qui eſt à une droite, & dans laquelle les conſtantes A & B doivent être telles que cette droite ſoit appuiée ſur les deux courbes à double courbure données à fin que la ſurface, en paſſant par les deux courbes, ſatisfaſſe aux conditions.

Il feroit facile de tirer delà la conftruction de l' équation $z = \varphi(ax - y) + x\varphi'(ax - y)$, même en fuppofant les fonctions Δ, Δ', Ψ, & Ψ' difcontinuës, mais comme ce n'eft qu'un cas particulier du problême fuivant, je ne m' y arrêterai pas d'avantage.

PROBLÊME IV.

Déterminer les formes des fonctions φ, & φ', pour que dans l'équation

$$z = M\varphi V + N\varphi' V + K$$

l'on ait 1° $z = \Psi \cdot x$ en fefant $y = \Delta \cdot x$, 2° $z = \Psi' x$ en fefant $y = \Delta' x$. Les quantités M, N, K & V étant données d'une manière quelconque en x & y, & les fonctions Δ, Δ', Ψ & Ψ' étant auffi connuës.

Solution.

Soient M', N', K' & V' les fonctions de x que deviennent correfpondamment les quantités M, N, K & V en y mettant pour y fa première valeur $\Delta \cdot x$. Soient de même M'', N'', K'' & V'' ce qu'elles deviennent en y mettant la feconde valeur de $y\,\Delta \cdot x$, il eft évident que l'on aura les deux équations fuivantes.

$$(A) \qquad \Psi \cdot x = M'\varphi V' + N'\varphi' V' + K'$$

$$\&\ (B) \qquad \Psi' x = M''\varphi V'' + N''\varphi' V'' + K''$$

Soit fait $V' = u$, & foit $x = fu$ la valeur de x que donne cette équation, foit fait de même $V'' = v$ & foit $x = f'v$ la valeur de x que l'on en tire; on fubftituera la première de ces valeurs dans (A) & la feconde dans (B), & l'on aura

$$\Psi(f \cdot u) = M^{\backprime}\varphi u + N^{\backprime}\varphi' u + K^{\backprime}$$

$$\&\ \Psi'(f' \cdot v) = M^{\backprime\backprime}\varphi v + N^{\backprime\backprime}\varphi' v + K^{\backprime\backprime}$$

les quantités $M^{\backprime}$, $N^{\backprime}$ & $K^{\backprime}$ étant les fonctions de u, que donne la substitution de $f \cdot u$ à la place de x dans M', N' & K', de même M'', N'' & K'' étant les fonctions de v que l'on trouve en mettant $f' v$ à la place de x dans M'', N'' & K''. Ces deux équations se traiteront comme les équations (*C*) & (*D*) du problême précédent, c'est-à-dire qu'on en éliminera une des fonctions arbitraires, pour connoitre la forme de l'autre & réciproquement, ce qui n'est sujet à aucune difficulté.

Remarque.

On ne parvient par cette méthode à trouver les formes des deux fonctions indépendantes φ & φ', que par ce qu'elles sont composées de la même quantité V; autrement elle seroit insufisante.

Corollaire.

Il suit delà que de quelque nombre d'arbitraires que soit composée l'équation

$$z = K + L\,\varphi V + M\,\varphi' V + N\,\varphi'' V \cdots \&c.$$

il sera toujours possible de déterminer les fonctions φ, φ' φ''', pour qu'en fesant

$$\begin{array}{lll} 1^\circ\ y = \Delta \cdot x & \text{on ait} & z = \Psi \cdot x \\ 2^\circ\ y = \Delta' \cdot x & \text{on ait} & z = \Psi' \cdot x \\ 3^\circ\ y = \Delta'' \cdot x & \text{on ait} & z = \Psi'' \cdot x \\ \quad \&c. & & \quad \&c. \end{array}$$

le nombre de ces conditions étant égal à celui des arbitraires, car en exprimant les conditions on a

$$\begin{array}{l} 1^\circ\ \Psi \cdot x = K' + L'\,\varphi V' + M'\,\varphi' V' + N'\,\varphi'' V' \cdots \&c. \\ 2^\circ\ \Psi' \cdot x = K'' + L''\,\varphi V'' + M''\,\varphi' V'' + N''\,\varphi'' V'' \cdots \&c. \\ 3^\circ\ \Psi'' \cdot x = K''' + L'''\,\varphi V''' + M'''\,\varphi' V''' + N'''\,\varphi'' V''' \cdots \&c. \\ \quad \&c. \qquad\qquad\qquad\qquad \&c. \end{array}$$

fesant dans la première $V' = u$, dans la seconde $V'' = v$, dans la troisième $V''' = \omega \ldots$ &c. on aura autant d'équations

$$\Psi(f \cdot u) = K' + L' \varphi u + M' \varphi' u + N' \varphi'' u \cdots \&c.$$
$$\Psi'(f' \cdot v) = K'' + L'' \varphi v + M'' \varphi' v + N'' \varphi'' v \cdots \&c.$$
$$\Psi''(f'' \cdot \omega) = K''' + L''' \varphi \omega + M''' \varphi' \omega + N''' \varphi'' \omega \cdots \&c.$$
$$\&c. \qquad\qquad \&c.$$

qu'il y a d'arbitraires dans la proposée, par conséquent il sera facile de les éliminer toutes, pour les connoitre chacune en particulier, comme je l'ai fait dans le problême précédent.

Construction.

Il s'agit de trouver pour un x & un y donné à volonté l'ordonnée verticale z de la surface donc l'équation est $z = M \varphi V + N \varphi' V$, les fonctions φ & φ' étant telles que cette surface passe par deux courbes à double courbure données, continuës ou discontinuës & qui aient pour symboles d'équations la première $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi x$, & la seconde $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$

Pour cela soient, comme dans les figures précédentes, CAD le plan horisontal des x & y, BAC celui des x & z, smS une des courbes à double courbure par lesquelles doit passer la surface, & dont les projections rqR & $sm'S'$ ont pour symboles d'équations la première $y = \Delta \cdot x$ & la seconde $z = \Psi \cdot x$. Soit de même uNU la seconde courbe à double courbure donnée, & donc les projections vTV & unU' ont des équations représentées par $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$. Enfin soient AP & PQ les x & y données à volonté, pour lesquelles il s'agit de construire l'ordonnée verticale $QM = z$. Cela posé, par le point donné Q on construira la courbe TQq qui ait pour équation $V = b$, l'indéterminée b devant être telle que cette courbe passe par le point Q, elle rencontrera

Planche I FIG. III

les deux courbes $r\,q\,R$ & $v\,T\,V$ en deux points q & T, par lesquels on abbaissera sur l'axe $A\,C'$ les perpendiculaires $q\,q'$ & $T\,t$, ce qui donnera les points q' & t par lesquels on élévera les verticales $q'\,m'$ & $t\,n$, qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elles rencontrent, la première, la courbe $s\,m'\,S'$ en un point m', &, la seconde, la courbe $u\,n\,U'$ en un point n. Celà fait on construira sur le plan vertical $B\,A\,C$ la courbe $n\,M'\,m'$ qui a pour équation $z = M'\,\alpha + N'\,\beta + K'$, les quantités M', N' & K' étant ce que deviennent correspondamment M, N & K en y mettant pour y sa valeur prise dans l'équation $V = b$, de plus α & β étant des constantes qu'on déterminera de telle manière que la courbe $n\,M'\,m'$ passe par les points déterminés n & m'; enfin on élévera la verticale $P\,M'$, on fera $Q\,M = P\,M'$, & le point M sera dans la surface demandée.

En effet, soient élevées les verticales $q\,m$ & $T\,N$, il est évident par construction, que l'on aura $q\,m = q'\,m'$, & $T\,N = t\,n$; soit imaginée par la courbe $T\,Q\,q$ une surface cylindrique verticale, dont l'équation sera nécessairement $V = b$, elle coupera la surface à construire dans une courbe $N\,M\,m$ qui passera par le point cherché M & par les deux points N & m. La projection verticale de cette intersection passera par consequent par les points n & m', & on aura son équation on fesant $V = b$ dans la proposée. Cette équation sera donc $z = M'\,\alpha + N'\,\beta + K'$, dans laquelle il est évident que les constantes α & β doivent être déterminées de manière que cette projection passe par les deux points n & m'. Or, les deux courbes $N\,M\,m$; & $n\,M'\,m'$ pour la même abscisse $A\,P$ ont les ordonnées $P\,M$ & $P\,M'$ égales, donc en fesant $Q\,M = P\,M'$, le point M est dans la surface demandée.

Corollaire.

On conſtruira de la même manière l'équation $z = K + L\,\varphi V + M\,\varphi' V + N\,\varphi'' V \ldots$ &c. quelque nombre de fonctions arbitraires qu'elle renferme, pourvu que l'on ait un pareil nombre de courbes données, continues ou diſcontinues, par leſquelles la ſurface ſoit obligée de paſſer. Il arrivera ſeulement que l'équation

$$z = K' + L'\,\alpha + M'\,\beta\,N'\,\gamma \ldots \text{ \&c.}$$

qui appartient à la courbe $n\,M'\,m'$, contiendra un pareil nombre de conſtantes indéterminées, mais on aura un même nombre de points tels que n, m' .... &c. par leſquels devra paſſer cette courbe, & qui ſerviront à déterminer ces conſtantes.

AUTRE SOLUTION DU PROBLÊME IV

Tirée de la conſtruction.

Soient $AP = x'$, & $PQ = y'$, il eſt évident que la queſtion conſiſte à trouver la valeur de z en x' & y' qui ſatisfait aux conditions. Pour cela on fera $V = b$, & l'on déterminera b de telle manière qu'en feſant $x = x'$ on ait $y = y'$; on prendra dans cette équation la valeur de y en x, x' & y', on la mettra à ſa place dans les quantités M, N & K, & ſoient M', N' & K' les fonctions en x, x' & y' que donne cette ſubſtitution. On éliminera y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta \cdot x$, ce qui donnera une première valeur de x en x' & y' que l'on mettra à ſa place dans $\Psi \cdot x$, & ſoit P ce que devient cette quantité. On éliminera de même y des deux équations $V = b$ & $y = \Delta' \cdot x$, ce qui donnera une ſeconde valeur de x en x' en x' & y', que l'on mettra à ſa place dans $\Psi' x$, & ſoit P ce que devient cette quantité. Cela fait, ſi

Planche I FIG. III

dans l'équation

$$z = M' \alpha + N' \beta + K'$$

on détermine les conſtantes α & β de telle manière 1° que, pour la première valeur que l'on vient de trouver pour x, on ait $z = P$, 2° que pour la ſeconde valeur, on ait $z = P'$, & qu'enſuite on mette x' à la place de x, on aura l'équation demandée.

Cette ſolution n'étant ſimplement que l'application de l'analyſe à la conſtruction précédente, il eſt inutile de la démontrer. On remarquera ſeulement qu'elle ne peut avoir lieu qu'en ſuppoſant les fonctions Δ, Δ', Ψ & Ψ' analytiques & continues.

L'application de ces deux ſolutions à un même exemple produiroit le même reſultat.

Corollaire.

On détermineroit facilement par cette méthode, comme par la première les fonctions arbitraires dans l' équation $z = K + L\,\varphi V + M\,\varphi' V + N\,\varphi'' V \cdots$ &c., il arriveroit ſeulement que l'équation $z = K' + L' \alpha + M' \beta + N' \gamma \cdots$ &c. Contiendroit autant des conſtantes indéterminées que la propoſée renfermeroit de fonctions arbitraires, mais auſſi l'on auroit un même nombre de conditions pour les déterminer, par ce qu'on trouveroit autant de valeurs particulières de x qui miſes à ſa place devroient donner la première $z = P$, la ſeconde $z = P'$, la troiſième $z = P'' \cdots$ &c.

PROBLEME V

Déterminer la forme que doit avoir chacune des fonctions φ & φ' dans l'équation $z = \varphi V + \varphi' W$, pour qu'en feſant 1° $V = a$, on ait $z = F \cdot x$, 2° qu'en feſant

$y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \Psi \cdot x$. Les quantités V & W étant données d'une manière quelconque en x & y & les fonctions F, Δ & Ψ étant de formes connuës.

Il faut remarquer que la première condition n'a pas toute la généralité dont elle feroit fusceptible, par ce qu' elle renferme la quantité déterminée V.

Solution.

Soit W' la fonction de x que l'on obtient en mettant dans W pour y fa valeur prife dans l'équation $V = a$, il eft clair que l'on aura par la première condition

$$F \cdot x = \varphi\, a + \varphi'\, W'$$

& par conféquent $\varphi'\, W' = F \cdot x - \varphi\, a$. Soit fait $W' = u$, pour en tirer une valeur de x en u, que je repréfente par $f \cdot u$, on aura en fubftituant cette valeur

$$\varphi'\, u = F(f \cdot u) - \varphi\, a.$$

Mettant cette forme à fa place dans la propofée, elle deviendra $z = \varphi V + F(f.W) - \varphi\, a$ mais par ce que $\varphi\, a$ eft une conftante, la quantité $\varphi V - \varphi\, a$ eft une certaine fonction de V différente de φV, & que je défigne par $\varphi' V$; on aura donc

$$z = \varphi' V + F(f W)$$

Equation dans laquelle il n'y a plus qu'une fonction arbitraire, puifque l'on connoit les formes des fonctions F & f. Or il refte encore la feconde condition que l'on n'a pas encore emploiée, donc elle rentrera dans le cas du problême II & fe traitera de la même manière.

Remarque.

Quoique dans les conditions (qui font que l'on ait 1° $z = F \cdot x$ en fefant $V = a$, 2° $z = \Psi . x$ en fefant $y = \Delta . x$) les fonctions F, Δ & Ψ puiffent être quelconques, il eſt néantmoins néceſſaire, pour que la queſtion ne renferme pas de contradiction, qu'elles aient entr'elles un certain rapport. En effet les équations $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi . x$ appartiennent à une courbe à double courbure déterminée par laquelle doit paſſer la ſurface courbe qui a pour équation la propoſée, de même $V = a$ & $z = F . x$ ſont les équations d'une autre courbe à double courbure par laquelle doit auſſi paſſer la même ſurface. Or, comme il ſera facile de la réconnoitre dans la conſtruction ſuivante, ces deux courbes doivent ſe couper ſur la ſurface, donc leurs projections doivent auſſi ſe couper, donc pour l'ordonnée x qui répond au point d'interſection de leurs projections horiſontales, on doit avoir auſſi un point d'interſection dans les projections verticales, ce qui peut s'expliquer analytiquement de cette manière les fonctions F, Δ & Ψ doivent être telles qu'en éliminant y des deux équations $V = a$ & $y = \Delta . x$, pour avoir une valeur de x en conſtantes, & en ſubſtituant cette valeur dans les fonctions $F . x$ & $\Psi . x$, on ait deux quantités égales.

Exemple.

Soit propoſé de déterminer les formes des fonctions arbitraires φ & φ', pour que dans l'équation $z = \varphi(bx - y) + \varphi'(x + y)$ on ait 1° $z = \sqrt{Ax}$ en feſant $bx - y = a$, 2° $z = Kx$ en feſant $y = n + qx$.

(D'après la rémarque précédente les conſtantes A, a, K, n & q, qui entrent dans les expreſſions des conditions à remplir, doivent être telles que l'on ait $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$, car ſi l'on égale les deux valeurs de y on aura $bx - a = n + qx$, ce qui donne $x = \frac{n+a}{b-q}$ & mettant cette valeur

leur dans les quantités $\sqrt{Ax}$ & Kx, qui doivent alors être égales, on aura $\sqrt{A\frac{n+a}{b-q}} = K\frac{n+a}{b-q}$, d'où l'on tirera $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$)

L'équation $bx - y = a$ donne $y = bx - a$, mettant cette valeur à la place de y dans la propoſée, on aura $\sqrt{Ax} = \varphi a + \varphi'(x + bx - a)$, ou $\varphi'(x + bx - a) = \sqrt{Ax} - \varphi a$. Soit fait $x + bx - a = u$, ce qui donne $x = \frac{a+u}{b+1}$, & ſoit miſe cette valeur de x à ſa place dans la valeur de la fonction φ', & l'on aura $\varphi' u = \sqrt{A\frac{a+u}{b+1}} - \varphi a$, ce qui fera connoitre la forme de la fonction φ', que l'on ſubſtituera dans la propoſée, & l'on aura $z = \varphi(bx - y) + \sqrt{A\frac{a+x+y}{b+1}} - \varphi a$ ou bien feſant $\varphi(bx - y) - \varphi a = \varphi'(bx - y)$ l'on aura

$$z = \varphi'(bx - y) + \sqrt{A\frac{a+x+y}{b+1}}$$

équation dans laquelle il ne ſe trouve plus que la fonction arbitraire φ', & que l'on traitera comme celle du problême II.

Pour cela, on ſubſtituëra à y ſa valeur priſe dans l'équation $y = n + qx$, & l'on aura

$$Kx = \varphi'(bx - n - qx) + \sqrt{A\frac{a+x+n+qx}{b-1}}$$

que l'on transformera en feſant $bx - n - qx = v$, ou $x = \frac{n+v}{b-q}$ & l'on aura

$$K\frac{n+v}{b-q} = \varphi' \, v + \sqrt{A\frac{a+n+\frac{n+v}{b-q}(1+q)}{b-1}}$$

où il ſera facile de reconnoitre la forme de la fonction φ', & d'où l'on conclurra que l'équation demandée, eſt

$$z = K\frac{n+bx-y}{b-q} - \sqrt{A\frac{a+n+\frac{n+bx\,y}{b-q}(1+q)}{b+1}} + \sqrt{A\frac{a-x+y}{b+1}}.$$

En effet ſi l'on fait dans cette équation $y = n + qx$, on trouve $z = Kx$, & ſi l'on fait $bx - y = a$, on trouve $z = \sqrt{Ax}$, par ce que comme je l'ai fait remarquer plus haut, l'on doit avoir $K = \sqrt{A\frac{b-q}{n+a}}$.

Conſtruction.

La queſtion conſiſte, comme dans les conſtructions précédentes à trouver pour deux coordonnées x, & y données à volonté l'ordonnée verticale z de la ſurface courbe qui a pour équation $z = \varphi V + \varphi' W$, quand même les deux courbes à double courbure par leſquelles doit paſſer cette ſurface, & dont les projections ont pour ſymboles d'équations, l'une $V = a$ & $z = F \cdot x$, l'autre $y = \Delta . x$ & $z = \Psi . x$, ſeroient diſcontinuës & tracées au hazard dans l'eſpace.

Planche II FIG. IV

Pour cela, ſoient CAD le plan horiſontal des x & y, BAC celui des x & z, $M'm'$ & $sm'S$ les deux courbes à double courbure par leſquelles doit paſſer la ſurface, ſoient rqR & $sm''m'''$ les projections horiſontale & verticale de la première, & dont les ſymboles d'équations ſont $V = a$ pour l'une & $z = F . x$ pour l'autre; ſoient de même $Q'q'$ & $YM''m'$ les projections horiſontale &

verticale de la ſeconde, & dont les équations ſont repréſentées par $y = \Delta . x$ pour l'une, & par $z = \Psi . x$ pour l'autre. Il eſt évident que ſi par le point q' interſection des deux courbes $Q' q'$ & $r R$ on éléve la verticale $q' m'$, elle rencontrera dans le même point m' les deux courbes $s m' S$ & $M' m'$, par ce qu'étant ſur la même ſurface, ces deux courbes doivent avoir un point commun correſpondant au point d'interſection de leurs projections ; d'où il ſuit que ſi l'on mêne $q' K'$ parallele aux y, & que l'on éléve la verticale $K' m''$, cette droite rencontrera les deux courbes $S m'' m'''$ & $Y M'' m''$ dans le même point m'', & que l'on aura $K' m'' = q' m'$. Enfin ſoient $A P = x$, $P Q = y$, de manière qu'il faille conſtruire la verticale $Q M$ qui paſſe par le point Q, le point M étant dans la ſurface.

Cela poſé, on conſtruira ſur le plan horiſontal la courbe $Q q$ dont l'équation eſt $V = \alpha$, α étant une conſtante telle que la courbe paſſe par le point Q, cette courbe coupera $r q' R$ quelque part en un point q, par lequel on menera $q K$ perpendiculaire aux x, on élévera la verticale $K m''$, qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle coupe la courbe $S m'' m'''$ en un point m'''. on prendra dans l'équation $V = \alpha$ la valeur de y que l'on ſubſtituera dans W, pour avoir une fonction de x que je repréſente par W', on fera la même choſe pour l'équation $V = a$, & ſoit W' la nouvelle fonction de x trouvée ; on fera enſuite $W' = u$, ce qui donnera une valeur de x en u, que je repréſente par $f . u$, la forme de la fonction f étant connue. On portera de A en X une droite égale à $f W'$, $A P$ étant $= x$, & on élévera la verticale $X Y$ qu'on terminera à la courbe $M'' m''$: on regardera pour un inſtant $A K$ comme $= x$, & l'on fera dans cette hypothéſe $A G = f . W'$, on élévera la verticale $G N$, enfin on fera $Q M = X Y + K m''' - G N$, & le point M ſera dans la surface demandée. (La quantité $K\,m''' - G\,N$ est toujours la même pour toutes les verticales menées par les points de la courbe $Q\,q$, c'est-à-dire qu'elle est constante tant que α ne varie point).

Démonstration.

Soit supposée pour un instant la surface construite, & soit imaginée par la courbe $Q\,q$ une surface cylindrique verticale, qui coupe la surface suivant une courbe $M\,m$, dont $M'''\,m'''$ soit la projection verticale, il est évident 1° que cette projection doit passer par le point m''', puisque l'intersection passe elle même par le point m, & que le point m''' est la projection verticale du point m; 2° que l'on aura l'équation de la courbe $M'''\,m'''$ en mettant dans la proposée $z = \varphi\,V + \varphi'\,W$ à la place de y sa valeur prise dans $V = \alpha$, équation de la surface cylindrique verticale. Cette équation sera donc $z = A + \varphi'\,W'$, la constante arbitraire A devant être telle que la courbe $M'''\,m'''$ passe par le point déterminé m'''. Mais si l'on fait aussi passer par la courbe $Q'\,q'$ une surface cylindrique verticale, dont l'équation sera nécessairement $V = a$, elle coupera la surface à construire suivant la courbe $M'\,m'$, dont la projection verticale est $Y\,M''\,m''$, & l'on aura l'équation de cette projection, en mettant de même dans la proposée $z = \varphi\,V + \varphi'\,W$, à la place de y sa valeur prise dans $V = a$. Cette équation sera par conséquent $z = a + \varphi'\,W'$, or la courbe $Y\,M''\,m''$ est donnée, & son équation est aussi $z = F \cdot x$, donc on aura $F\,x = a + \varphi'\,W'$, & par conséquent $\varphi'\,W' = F\,x - a$. Soit fait actuellement $W' = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u qui sera $x = f \cdot u$, & soit substituée cette valeur de x dans la dernière équation, elle deviendra $\varphi'\,u = F\,(f \cdot u) - a$, ce qui fera connoître la forme de la fonction φ', & d'où il sera facile de conclure que l'équation de la courbe $M''' m'''$ doit être $z = A - a + F(f \cdot W')$. Mais puiſque l'équation de la courbe $Y M'' m''$ eſt $z = F \cdot x$, il ſuit que ſi l'on porte de A en X une quantité égale à $f . W'$, ce qui n'eſt ſujet à aucune difficulté, la verticale XY ſera $= F(f . W')$. Quant à la conſtante $A - a$, que pour abbreger je repreſenté par h, elle doit être telle que pour le point K on ait $z = K m'''$. Soit pour un inſtant régardé AK comme $= x$, ſoit fait dans cette hypothèſe $AG = f . W'$, & ſoit élévée la verticale GN, il eſt évident que l'on aura z ou $K m''' = h + GN$, donc on aura $h = K m''' - GN$, & par conſéquent $PM''' = XY + K m''' - GN$: or $QM = PM'''$, donc .... &c. C. Q. F. D.

Remarque I.

Pour ſimplifier la conſtruction, j'ai fait quelques opérations analytiques, mais elles ne s' exécutent pas ſur les fonctions $F\Delta$ & Ψ, donc les formes peuvent être ſoumiſes ou non à la loi de continuité. Je n'ai opéré que ſur les quantités V & W que j'ai ſuppoſées analytiques. Il pourroit néantmoins arriver que ces grandeurs fuſſent diſcontinuës, & ne puſſent être repreſentées chacune que par l'ordonnée d'une ſurface courbe donnée au hazard dans l' eſpace, ou conſtructible par une méthode quelconque, alors la conſtruction précédente ſeroit imparfaite, puiſque les opérations preſcrites ne pourroient pas s'éxécuter analytiquement, mais il ſeroit poſſible de les conſtruire elles mêmes.

Tout étant dans la figure 5, comme dans la figure 4, il s'agit premièrement de conſtruire les courbes Qq & $Q'q'$ dont les équations diſcontinuës ont pour ſymboles $V = \alpha$ & $V = a$. Pour cela, je ſuppoſe donnée dans l'eſpace la ſurface courbe dont l'équation eſt repréſentée Planche II FIG. V par $z = V$, & on la coupera par deux plans horiſontaux diſtans du plan CAD, l'un de la quantité α & l'autre de a, les projections horiſontales des ſections que formeront ces deux plans ſeront les courbes demandées Qq & $Q'q'$, car ces deux courbes ſeront telles que l'on aura pour l'une z ou $V = \alpha$ & pour l'autre $V = a$. On conſtruira donc ces deux projections. (Cette opération n'eſt ſujette à aucune difficulté, car ſi la ſurface eſt donnée quoiqu'au hazard, pour un x, & un z quelconque, on doit être en état de trouver la coordonnée y correſpondante, & par conſéquent pour l'abſciſſe AP & la verticale $z = \alpha$ ou $z = a$, de trouver l'ordonnée PQ on PQ'. Si cette ſurface n'eſt pas tout à fait donnée au hazard, mais qu' elle ſoit conſtructible par une méthode analogue à celles que j'ai déjà données, & obligée de paſſer par quelques courbes diſcontinuës, comme j'ai fait voir qu'on pourroit, pour un x & un y donnés à volonté trouver la verticale z correſpondante, il ſera poſſible de même de conſtruire l'ordonnée y, étant données à volonté les abſciſſes x & z, en renverſant la figure, & regardant le plan BAC comme horiſontal. De plus la quantité a eſt donnée, il n'y a que l' indéterminée α que l'on doit faire telle que la courbe Qq paſſe par le point donné Q; mais il eſt facile de remplir cette condition, en élévant par le point donné Q une verticale indéfinie, qui rencontrera la ſurface diſcontinue en un point par lequel on fera paſſer un plan horiſontal, donc la ſection doit donner la courbe Qq, car ce plan étant horiſontal, donne 1° z ou $V =$ conſtante. 2° cette conſtante eſt telle que Qq paſſe par le point Q, puiſque le plan coupant, & par conſéquent ſa ſection paſſe par le point où la verticale indéfinie QM rencontre la ſurface donnée. Que l'on ſuppoſe auſſi donnée au hazard, ou conſtruite la ſurface diſcontinue dont l'équation eſt repréſentée par $z = W$, & ſoit menée par la courbe Qq une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſeconde ſurface dans une courbe dont la projection EHL ſur le plan vertical aura une équation repréſentée par $z = W'$, puiſque l'on a W' en mettant dans W à la place de y ſa valeur priſe dans $V = \alpha$, & que $V = \alpha$ eſt l'équation de la ſurface cylindrique. Soit de même menée par la courbe $Q'q'$ une ſeconde ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſeconde ſurface diſcontinuë & donnée dans une courbe dont la projection verticale ehl aura pour ſymbole d'équation $z = W'$, puiſque l'équation de cette ſeconde ſurface cylindrique eſt repréſentée par $V = a$; ſoient donc conſtruites les deux courbes EHL & ehl, il eſt évident 1° que pour tel $x = AP$ qu'on voudra, on aura $PH = W'$ & $Ph = W'$, la courbe ehl ayant lieu pour toute l'étendue de la ſurface à conſtruire, & la courbe EHL ne pouvant être employée que pour les points de la courbe qQ; 2° que ſi on prend une abſciſſe quelconque AI, & que l'on mene l'ordonnée horiſontale IT, l'on aura $IT = f.(AI)$, car on trouve la fonction f en feſant $W' = u$, & en tirant de cette équation la valeur de $x = f.u$, donc ſi l'on a $IT = x$, & par conſéquent $AI = W$, on aura $AI = u$ & $IT = f.u$. Donc ſi par le point H on mene l'horiſontale HO, & que par le point O on mene la verticale XY, on aura $AX = f(OX) = f(PH) = f.W'$. On trouvera de même AG en menant par le point k l'horiſontale kg, & en abaiſſant la verticale gG, les points X & G étant trouvés, le reſte s'achevera comme dans la conſtruction précédente.

Rémarque II

Planche II FIG. IV & V

Si la courbe $m'' M'' N$ difcontinue & tracée au hazard étoit fubitement interrompue en θ, la verticale XY feroit (je n'ofe pas dire imaginaire, par ce que cela fuppoferoit peût-être une expreffion analytique) mais impoffible, & par conféquent la furface à conftruire n'auroit aucun point qui répondit au point Q. Si la même courbe TYM'' étoit fubitement interrompue en θ', la verticale GN feroit de même impoffible, & par conféquent toutes les ordonnées z menées par les points de la courbe Qq feroient auffi impoffibles, parceque, comme je l'ai déjà dit la verticale XY n'appartient qu'au point Q & que $Km''' - GN$ appartient à toute l'étendue de la courbe Qq.

D'après tout ce qui a été dit précédemment, il ne feroit pas difficile de conftruire fur le plan horifontal le contour de la projection de tout ce que la furface à conftruire a de réel ou de poffible, on éviteroit par-là un grand nombre d'opérations inutiles, mais tant de quantités peuvent devenir imaginaires ou impoffibles, que leur énumération nous meneroit ici trop loin.

AUTRE SOLUTION DU PROBLÊME V

Tirée de la conftruction.

Soient x' & y' les coordonnées pour lefquelles il s'agit de trouver l'expreffion de la verticale z, on fera $V = \alpha$, α étant une conftante qu'on déterminera de telle manière qu'en fefant $x = x'$, on ait $y = y'$. On éliminera y des deux équations $V = \alpha$ & $y = \Delta . x$ ce qui donnera une valeur de x en x', y' & conftante que je repréfente par X. On prendra la valeur de y dans $V = \alpha$, qu'on qu'on ſubſtituera dans W, pour avoir une fonction de x, x' & y' que je repréſente par W'. On fera la même choſe pour $V = a$, & l'on aura une fonction de x, ſans x' ni y', que j'exprime par W'. On fera $W' = u$, ce qui donnera une valeur de x en u que je déſigne par $f u$, & la forme de la fonction f ſera connuë. On compoſera $f . W'$, & enſuite $F\,(f W')$, ce qui eſt facile, puiſque la fonction F eſt donnée dans les conditions ; enfin on compoſera $F\,(f . X')$ en mettant dans $F\,(f . W')$ X à la place de x, & l'équation de la ſurface demandée ſera

$$z = F\,(f W') + \Psi . X - F\,(f X')$$

après avoir mis partout x' à la place de x.

Cette opération étant dèmontrée par la conſtruction précédente, je ne m'y arrêterai pas d'avantage, mais pour faire voir l'accord des deux ſolutions, je vais appliquer celle-ci au même exemple que la précédente.

Exemple.

Soit propoſé de trouver les formes des fonctions φ & φ'; pour que dans l'équation $z = \varphi\,(b x - y) + \varphi'\,(x + y)$ on ait 1° $z = \sqrt{A x}$ en feſant $b x - y = a$, 2° $z = K x$ en feſant $y = n + q x$.

Il eſt évident qu'afin que dans l'équation $b x - y = \alpha$ l'on ait $y = y'$ en feſant $x = x'$, l'on doit avoir $\alpha = b x' - y'$. Soit donc éliminé y des deux équations $y = n + q x$ & $b x - y = b x' - y'$, ce qui donnera $x = \frac{n - y' + b x'}{b - q} = X$. Soit enſuite priſe la valeur de y dans $b x - y = b x' - y'$, pour la mettre à ſa place dans $x + y$, & l'on aura $W' = x + b x - b x' - y'$. On prendra de même la valeur de y dans $b x - y = a$, qu' on mettra dans $x+y$, & l'on aura $W' = x + bx - a = u$, ce qui donnera

$$x = \frac{a+u}{b+1} = f \cdot u.$$

on aura par conséquent

$$fW' = \frac{a + x + bx - bx' + y'}{b+1}$$

& $F(fW') = \sqrt{A^{\frac{a+x+bx-bx'+y'}{b+1}}}$ par ce que $F.x = \sqrt{A.x}$ mettant X à la place de x, on trouvera

$$F(f.X') = \sqrt{A^{\frac{a + \frac{n-y'+bx'}{b-q}(b+1) - bx' + y'}{b+1}}}$$

ou bien en réduisant

$$F(f.X') = \sqrt{A^{\frac{\frac{n-y'+bx'}{b-q}(1+q)+n+a}{b+1}}}$$

donc mettant x' à la place de x, l'équation démandée sera

$$z = \sqrt{A^{\frac{x\quad y'+a}{b+1}}} + K^{\frac{n-y'+bx'}{b-q}} - \sqrt{A^{\frac{\frac{n\quad y'+bx'}{b-q}(1+q)+n+a}{b+1}}}$$

qui est la même que celle que l'on a déjà trouvée en appliquant la première solution au même exemple

La première solution peût paroitre plus simple, mais elle n'a pas comme celle-ci l'avantage de donner directement la valeur de z en x & y, sans avoir recours aux solutions des problêmes précedens.

PROBLÊME VI

Déterminer les fonctions arbitraires dans l' équation $z = K + L\,\varphi V + M\,\varphi' W$, où les quantités K, L, M, V & W sont données en x & y, de telle manière 1° qu'en fesant $V = a$, l'on ait $z = F \cdot x$, 2° qu'en fesant $y = \Delta \cdot x$ on ait $z = \psi \cdot x$.

Solution.

Soit prise dans l'équation $V = a$ la valeur de y que l'on mettra à sa place dans les quantités K, L, M, V & W, & soient K', L', M', V' & W' les fonctions de x que donne cette substitution, on aura par la première condition $F \cdot x = K' + L'\,\varphi a + M'\,\varphi' W'$, équation dans laquelle la quantité $\varphi\, a$ n' étant plus qu'une constante indéterminée il sera facile de reconnoitre la forme de la fonction φ', qui sera

$$\varphi' W' = \frac{F \cdot x - K' - L'\,\varphi a}{M'}$$

Soit fait actuellement $W' = u$, d'où l'on tirera la valeur de x en u, que je représente par $f \cdot u$, & l'équation précédente se transformera en celle-ci

$$\varphi' u = \frac{F(fu) - k - l\,\varphi a}{m}$$

Les quantités k, l, m étant les fonctions connuës de u que donne la substitution de cette valeur de x dans K', L' & M'. Soit mis W à la place de u dans les quantités k, l & m, & soient k', l' & m' les fonctions de W que l'on obtiendra, il est évident qu'en substituant à la fonction φ' sa forme que l'on vient de trouver, la proposée se transformera en celle-ci

$$z = K + L\,\varphi V + M\left(\frac{F(fW) - k' - l'\,\varphi a}{m'}\right)$$

qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire φ, & qui rentre par conséquent dans le cas du problême II.

Il eſt vrai qu'il reſtera encore la conſtante indéterminée $\varphi\, a$, mais lorſque l'on aura la valeur de z ſans fonctions arbitraires, il ſera facile de la déterminer. Il faut ſimplement remarquer que les conditions de la queſtion ne ſuffiſent pas pour cela, car en feſant l'opération, on s'apperçoit aiſément que quelque ſoit la quantité $\varphi\, a$, la valeur de z ſatisfait également aux deux conditions, & par conſéquent, que l'équation finale appartient également à une infinité de ſurfaces courbes diſtinctes, dont les équations ſont de la forme de la propoſée, & qui paſſent toutes par les courbes à double courbure données. Ainſi pour déterminer celle de ces ſurfaces dont on cherche l'équation, comme il ne reſte plus d'indéterminée que la quantité $\varphi\, a$, il faut aſſigner de plus dans l'eſpace un point par lequel elle doive paſſer, & déterminer $\varphi\, a$ de telle manière que cette condition ſoit remplie. C'eſt-à-dire que la conſtante $\varphi\, a$ doit être telle qu'en mettant dans l'équation trouvée de la ſurface, à la place de x & de y, deux conſtantes données, la valeur de z devienne égale à une autre conſtante auſſi donnée. Tout celà deviendra plus ſenſible par un exemple.

Exemple.

Soit propoſé de déterminer les fonctions arbitraires φ & φ' dans l'équation

$$z = y\,\varphi\,(b\,x - y) + y^2\,\varphi'\,(x + y)$$

de façon 1° qu'en feſant $b\,x - y = a$, l'on ait $z = \sqrt{B\,x}$, 2° qu'en feſant $y = c\,x$ on ait $z = p + q\,x$; où l'on obſervera que l'on doit avoir $p = \sqrt{B\,\frac{a}{b+c}} - \frac{q\,a}{b+c}$, afin qu'en égalant les deux valeurs données de y, ce qui donne $b\,x - a = c\,x$, on ait $\sqrt{B\,x} = p + q\,x$ ſuivant la remarque qui ſuit le problême précédent.

En mettant dans la proposée à la place de y sa valeur prise dans $bx - y = a$, elle deviendra
$\sqrt{Bx} = (bx - a)\,\varphi a + (bx - a)^2\,\varphi'(x + bx - a)$
d'où, fesant $x + bx - a = u$, & réduisant l'on tirera

$$\varphi' u = \sqrt{B\frac{(b+1)^3\,(a+u)}{(bu-a)^4}} - \varphi a \cdot \frac{b+1}{bu-a}$$

substituant cette forme à la place de la fonction φ' dans la proposée, l'on aura

$$z = y\,\varphi\,(bx-y) + y^2\sqrt{B\frac{(b+1)^3\,(a+x+y)}{(b(x+y)-a)^4}} - \frac{y^2.(b+1)}{b(x+y)-a}\,\varphi a$$

équation qui ne contient plus que la fonction arbitraire φ.

Soit actuellemeut mise à la place de y sa valeur prise dans $y = cx$ l'on aura par la seconde condition

$$p+qx = cx\,\varphi(bx-cx) + c^2x^2\sqrt{B\frac{(b+1)^3(a+x(1+c))}{(bx(1+c)-a)^4}} - \frac{c^2x^2(b+1)}{bx(1+c)-a}\,\varphi a$$

d'où fesant $bx - cx = v$, l'on tirera, réduction faite

$$\varphi \cdot v = \frac{b-c}{cv}p + \frac{q}{c}\,cv(b-c)\sqrt{B\frac{(b+1)^3(a+\frac{v(1+c)}{b-c})}{(bv(1+c)-a(b-c))^4}} + \frac{(b+1)\,v\,c\,\varphi a}{bv(1+c)-a(b-c)}$$

substituant enfin cette forme dans la dernière valeur de z, on trouvera pour équation demandée

$$z = \begin{cases} \dfrac{p(b-c)y}{c(bx-y)} + \dfrac{qy}{c}\,cy\,(bx-y)\,(b-c)\sqrt{B\dfrac{(b+1)^3\left(a+\frac{(bx\ y)(1+c)}{b-c}\right)}{(b(bx-y)(1+c)-a(b-c))^4}} \\ + \dfrac{cy\,(b+1)\,(bx-y)\,\varphi \cdot a}{b(bx-y)(1+c)-a(b-c)} + y^2\sqrt{B\dfrac{(b+1)^3\,(a+x+y)}{(b\,(x+y)-a)^4}} \\ - \dfrac{y^2\,(b+1)\,\varphi a}{b\,(x+y)-a} \end{cases}$$

qui satisfait aux conditions quelque valeur que l'on donne à la constante indeterminée $\varphi\ a$, puisque son facteur

$$y(b+1)\left(\frac{c(bx-y)}{b(bx-y)(1+c)-a(b-c)}-\frac{y}{b(x+y)-a}\right) \text{ devient } = 0,$$

ſoit qu'on faſſe $bx - y = a$, ſoit qu'on faſſe $y = cx$; donc cette conſtante ne dépend pas des conditions; donc la queſtion eſt indéterminée, & ne peut ſe particulariſer qu'en donnant une valeur de z qui reponde à des valeurs données pour x & pour y, c'eſt-à-dire, qu'en aſſignant dans l'eſpace un point pour lequel doive paſſer la ſurface. Soient donc Π, π & $\tilde{\omega}$ les trois coordonnées de ce point, il faudra donner à φa une valeur telle qu'en feſant $x = \Pi$ & $y = \pi$, l'on ait $z = \tilde{\omega}$. Ce qui n'eſt plus ſujet à aucune difficulté, & ce que je ne fairois pas ici parceque les expreſſions ſont trop diffuſes.

Conſtruction.

Conſtruire l'équation $z = K + L\varphi V + M\varphi' W$, de telle manière que la ſurface courbe, à laquelle elle appartient, paſſe par deux courbes données, continues ou diſcontinuës, qui aient pour ſymboles d'équations, la première $V = a$, $z = F \cdot x$, la ſeconde $y = \Delta \cdot x$, $z = \Psi \cdot x$, & que cette ſurface paſſe encore par un point donné dans l'eſpace, & au quel repondent les coordonnées Π, π & $\tilde{\omega}$.

Planche III FIG. VI

Soient, de même que dans la fig. 4, CAD le plan horiſontal des x & y, CAB celui des x & z, $M'm'$ & smS les courbes à double courbure données par leſquelles doit paſſer la ſurface, & dont les projections $Q'q'$, $M'm'$, rqR & $sm''m'''$ ont correſpondamment pour ſymboles d'équations $V = a$, $z = F \cdot x$, $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$. Soit μ le point par lequel doit de plus paſſer la ſurface, & dont les projections π & μ''' ſont données, ou, ce qui revient au même, pour le quel on connoît les coordonnés $A\Pi = \Pi$, $\Pi\pi = \pi$ & $\pi\mu = \tilde{\omega}$. Soit enfin Q le point pris à volonté ſur le plan des x & y, pour le quel il s' agit de conſtruire l' ordonnée QM de la ſurface. Cela poſé, on conſtruira la courbe $\pi\pi'$ dont l'equation eſt $V = \alpha$, la conſtante α étant telle que cette courbe paſſe par le point π, & on la prolongera juſqu' à ce qu'elle coupe quelque part la courbe rqR en un point π', par le quel on menera $\pi' k$ perpendiculaire à l' axe AC, & on élevera la verticale $k\mu''$, qu' on prolongera juſqu' à la rencontre de la courbe $s\,m''\,m'''$. On prendra dans $V = \alpha$ la valeur de y qu' on ſubſtituera dans les quantités K, L, M & W, qui par-là deviendront des fonctions de x, que je ſuppoſe repreſentées par K', L', M' & W'; on prendra de même dans $V = a$ la valeur de y que l' on mettra à ſa place dans les mêmes quantités, & ſoient $K^{\backprime}$, $L^{\backprime}$, $M^{\backprime}$ & $W^{\backprime}$ les nouvelles fonctions de x que donne cette ſubſtitution. On fera $W^{\backprime} = u$, & l' on en tirera une valeur de x en u que j' exprime par $f \cdot u$, & que l' on mettra à la place de x dans $K^{\backprime}$, $L^{\backprime}$ & $M^{\backprime}$ qui par là deviendront des fonctions de u, que je déſigne reſpectivement par k, l & m. Cela fait, les fonctions k, l & m étant connuës, on les compoſera en W', c'eſt-à-dire, que l' on y mettra par tout W' à la place de u, & elles deviendront de nouvelles fonctions de x que j' indique par k', l' & m'. On conſtruira la quantité $K' + \frac{M'}{m'}\,(F \cdot (fW') - k')$ par la valeur de $x = Ak$ (fig. 6), & on la retranchera de la droite $k\mu''$ pour avoir une différence que je repréſente par R. On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\Pi$ & on la retranchera de la droite $\Pi\mu''' = \pi\mu$, pour avoir une ſeconde différence r. Soit Λ ce que devient L' lorſque x eſt $= Ak$, & λ lorſque l'on a $x = A\Pi$, ſoit auſſi Ω ce que devient $\frac{M'\,l'}{m'}$ lorſque x eſt $= A\ k$, & ω lorſque x eſt $= A\Pi$, & ſoit déſigné par a le raport $\frac{r\Lambda - R\lambda}{\lambda\Omega - \Lambda\omega}$ dans lequel toutes les quantités ſont connues & conſtructibles.

On conſtruira la courbe $Q\,q$ dont l'équation eſt $V = \propto'$, $\propto'$ étant tel que cette courbe paſſe par le point Q, & on la prolongera juſqu'à ce quelle rencontre $r\,q\,R$ en un point q, par lequel on abbaiſſera $q\,K$ perpendiculaire à l'axe $A\,C$, & on élévera la verticale $K\,m'''$. On prendra dans $V = \propto'$ la valeur de y qu'on mettra dans K, L, M & W, ce qui donnera des fonctions de x que je indique par K'', L'', M'' & W'', on compoſera en W'' les fonctions k, l & m, en y mettant W'' à la place de u, & elles deviendront de nouvelles fonctions de x que je déſigne par k'', l'' & m''. On conſtruira la quantité $K'' + \frac{M''}{m''}\,(F(fW'') - k'' - a\,l'')$ pour une valeur de $x = A\,K$ (fig. 6) on la retranchera de la droite $K\,m'''$. & ſoit R' la différence; enfin on conſtruira

$$K'' + \frac{R'}{\Lambda'}\,L'' + \frac{M''}{m''}\,(F(fW'') - k'' - a\,l'')$$

pour la valeur de $x = A\,P$, Λ' étant ce que devient L'' en feſant $x = A\,K$. & l'on aura la verticale $Q\,M$ demandée.

Demonſtration.

Soit imaginée par la courbe $Q\,q$ une ſurface cylindrique verticale, qui coupera la ſurface à conſtruire (pour un inſtant ſuppoſée conſtruite) en une courbe $M\,m$, qui paſſera néceſſairement par le point demande M; ſoit élévée par le point q la verticale $q\,m$ qui rencontrera la courbe $s\,m\,S$ quelque part en un point m, par lequel doit auſſi paſſer l'interſection $M\,m$; cela fait il eſt évident que la courbe $M'''\,m'''$ projection verticale de $M\,m$ doit paſſer par le point m''', & que l'on aura ſon équation en x & z, en mettant dans celle de la ſurface, la valeur de y priſe

dans

dans l'équation de la ſurface cylindrique; or l'équation de cette dernière ſurface eſt $V = \alpha'$, donc celle de la projection verticale de l'interſection ſera

$$z = K'' + L'' A + M'' \varphi' W''$$

la conſtante A n'étant pas abſoluë, mais une certaine fonction de AP & de PQ, conſtante pour tous les points de la courbe Qq, mais variable dependamment de α', & devant être telle que la courbe $M''' m'''$ paſſe par le point déterminé m''. Soit de même coupée la ſurface à conſtruire par une ſurface cylindrique verticale qui auroit $Q' q'$ pour baſe, il eſt clair que l'interſection ſera la courbe donnée $M' m'$, projétée verticalement en $M'' m''$; & l'on aura de même l'équation de cette projection en mettant dans la propoſée à la place de y ſa valeur priſe dans $V = a$, qui appartient à la ſurface cylindrique, on aura donc pour la courbe $M'' m''$

$$z = K^{\backprime} + L^{\backprime} a + M^{\backprime} \varphi' W^{\backprime}.$$

Mais par les conditions, on a auſſi pour la même courbe $z = F \cdot x$, donc on aura

$$F \cdot x = K^{\backprime} + L^{\backprime} a + M^{\backprime} \varphi' W^{\backprime}$$

& en feſant $W^{\backprime} = u$, d'où l'on tire $x = f u$, on aura $\varphi' u = \frac{F(fu) - k - la}{m}$, ce qui fait connoitre la forme de la fonction φ', qui miſe à ſa place dans l'équation de la courbe $M''' m'''$ la transforme en celle-ci $z = K'' + L'' A + \frac{M''}{m''} (F.(f \cdot W'') - k'' - l'a)$ qui ne contient plus de fonctions arbitraires, mais ſimplement les deux conſtantes indéterminées A & a, dont la première eſt une conſtante rélative, fonction de α', comme je l'ai déjà dit, & dont l'autre eſt une conſtante abſoluë, fonction de a, & qui doit être determinée de telle manière que la ſurface paſſe par le point donné μ. Soit enfin imaginée une troiſiéme ſurface cylindrique verticale, & qui ait $\pi\,\pi'$ pour baſe, elle coupera la ſurface à conſtruire dans une courbe $\mu\,\mu'$, qui paſſera évidemment par le point donné μ, & dont la projection verticale paſſera par les deux points déterminés μ''' & μ''. En feſant le même raiſonnement que pour la courbe $M'''\,m'''$, on trouvera que l'équation de celle-ci doit être

$$z = K' + L'\,A' + \frac{M'}{m'}\,(\,F\,(\,f\,W'\,) - k' - a\,l'\,)$$

où la quantité a eſt la même que précédemment, mais où A' eſt une conſtante indéterminée, fonction de $\propto$; ces deux conſtantes devant être telles que la courbe paſſe par les deux points déterminés μ''' & μ''. Il faut donc qu'en conſtruiſant d'abord pour une valeur de $x = A\,k$ cette valeur de z, on trouve $z = k\,\mu''$, & enſuite pour une valeur de $x = A\,\Pi$ ou trouve $z = \Pi\,\mu'''$. Donc ſi l'on conſtruit $K' + \frac{M'}{m'}\,(F\,(\,f\,W'\,) - k'\,)$ pour le point Π, on aura $r = \lambda\,A' - a\,\omega$, de même ſi l'on conſtruit la même quantité pour le point k, on aura $R = \Lambda\,A' - a\,\Omega$, d'où l'on tirera les valeurs de A' & de a, on aura donc $a = \frac{r\,\Lambda - R\,\lambda}{\lambda\,\Omega - \Lambda\,\omega}$.

Ainſi dans l'équation de la courbe $M'''\,m'''$, il ne reſte plus d'indéterminée que A, or elle doit être telle que pour le point K on ait $z = K\,m'''$, donc ſi l'on conſtruit pour ce point la quantité

$$K'' + \frac{M''}{m''}\,(\,F\,(\,f\,W''\,) - k'' - a\,l''\,)$$

on aura $R' = A\,\Lambda'$ & par conſéquent $A = \frac{R'}{\Lambda'}$, d'où il ſuit que l'équation déterminée de la courbe $M'''\,m'''$ eſt

$$z = K'' + \frac{R'}{\Lambda'}\,L'' + \frac{M''}{m''}\,(\,F\,(\,f\,W''\,) - k'' - a\,l''\,)$$

Donc en conſtruiſant cette valeur de z pour le point P, on doit avoir la verticale $P\,M''' = Q\,M$. C. Q. F. D.

Remarque.

1° Je n'ai pas donné les conſtructions particulières des différentes fonctions de x que j'employe, parcequ'elles m'auroient rendu trop diffus, & qu'il n'y a aucun géométre qui ne ſoit en état de les trouver.

2° J'ai ſuppoſé les différentes quantités K, L, M, V & W analytiques, mais c'étoit pour ſimplifier la deſcription des opérations, car il ſeroit poſſible de conſtruire la propoſée, quand même aucune de ces quantités ne ſeroit analytique, & qu'elles ne pourroient être répréſentées que par les ordonnées de ſurfaces courbes diſcontinuës & données, ſoit executées au hazard, ſoit conſtructibles par quelque méthode analogue aux précédentes. Si je n'entre pas-ici dans ce détail, c'eſt que la figure devient trop compliquée, & que d'ailleurs j'ai donné dans le problême précédent un exemple de la manière dont il faudroit s'y prendre.

AUTRE SOLUTION DU MÊME PROBLÊME

Tirée de ſa conſtruction.

Soient x' & y' les coordonnées pour leſquelles il s'agit de trouver l'expreſſion de la verticale z; on fera $V = \propto$, $\propto$ étant tel qu'en feſant $x = \Pi$ on ait $y = \pi$; on éliminera y des deux équations $V = \propto$ & $y = \Delta\, x$, ce qui donnera une valeur de x en conſtantes que je repréſente par ξ. On mettra dans les quantités K, L, M & W la valeur de y priſe dans $V = \propto$, & elles deviendront K', L', M' & W'. On y mettra de même la valeur de y prise dans $V = a$, & l'on aura des nouvelles fonctions de x que j'exprime par K', L', M', & W'. on fera $W' = u$, & l'on en tirera une valeur de x en u, désignée par fu, & que l'on mettra à sa place dans les quantités K', L', & M', qui par-là deviendront des fonctions connues de u que je représenté correspondamment par k, l, & m. On mettra dans ces dernières quantités W' à la place de u, & l'on aura des nouvelles fonctions de x que j'indique par k', l' & m', & dans l'équation

$$z = K' + A L' + \frac{M'}{m'} (F (f W') - k' - a l')$$

l'on déterminera les deux constantes A & a de telle manière 1° qu'en fesant $x = \Pi$ on ait $z = \tilde{\omega}$, 2° qu'en fesant $x = \xi$, on ait $z = \Psi \cdot \xi$.

On mettra partout dans les quantités K', L', M', W', k', l', m' & ξ, x' à la place de Π, & y' à la place de π, & soient K'', L'', M'', W'', k'', l'', m'' & ξ' ce que deviendront respectivement ces quantités. On mettra ξ' à la place de x dans la quantité

$$K'' + \frac{M''}{m''} (F (f W'') - k'' - a l'')$$

on la retranchera de $\Psi\ \xi'$, & soit R la différence, soit aussi Λ ce que devient L'' en fesant $x = \xi'$, & l'équation demandée sera

$$z = K'' + \frac{R}{\Lambda} L'' + \frac{M''}{m''} (F (f W'') - k'' - a l'')$$

après avoir mis partout x' à la place de x.

APPLICATION DE CETTE SECONDE SOLUTION

Au même exemple que la première.

Dans cet exemple on a $K = 0$, $L = y$, $M = y^2$, $V = b\,x - y$, $W = x + y$, & par conséquent $\alpha = b\,\Pi - \pi$, d'où l'on tire $\xi = \frac{b\,\Pi - \pi}{b - c}$. prenant la valeur de y dans

$bx - y = b\Pi - \pi$, & la ſubſtituant on aura

$$L' = b(x-\Pi)+\pi \qquad L' = bx - a \qquad fu = \frac{a+u}{b+1}$$

$$M' = (b(x-\Pi)+\pi)^2 \quad \text{on trouvera de même} \quad M' = (bx-a)^2 \quad \text{\& par conſéquent} \quad l = \frac{bu-a}{b+1}$$

$$W' = x(b+1) - b\Pi + \pi \qquad W' = x(b+1) - a \qquad m = \left(\frac{bu - a}{b+1}\right)^2$$

$$l' = \frac{bx(b+1) - b^2\Pi + b\pi - a}{b+1}$$

$$m' = \left(\frac{bx(b+1) - b^2\Pi + b\pi - a}{b+1}\right)^2$$

ainſi l'équation $z = K' + AL' + \frac{M'}{m'}\,(F(fW') - k' - al')$ deviendra

$$z = A(bx-a) + (bx-a)^2 \, \frac{\sqrt{B^{\frac{a+x(b+1)-b\Pi+\pi}{b+1}}} - a\left(\frac{bx(b+1) - b^2\Pi + b\pi - a}{b+1}\right)}{\left(\frac{bx(b+1) - b^2\Pi + b\pi - a}{b+1}\right)^2}$$

où les conſtantes A & a doivent être telles que l'on ait en même tems les deux équations ſuivantes

$$(C) \quad \tilde{\omega} = A(b\Pi - a) + (b\Pi - a)^2 \, \frac{\sqrt{B^{\frac{a+\Pi+\pi}{b+1}}} - a\left(\frac{b\Pi + b\pi - a}{b+1}\right)}{\left(\frac{b\Pi - b\pi - a}{b+1}\right)^2}$$

$$(D) \quad p + \frac{q(b\Pi - \pi)}{b-c} = A\left(\frac{b^2\Pi - b\pi}{b-c} - a\right)$$

$$+ \left(\frac{b^2\Pi - b\pi}{b-c} - a\right)^2 \frac{\sqrt{B\left(a + \frac{b\Pi-\pi}{b-c}\,\frac{-b\Pi+\pi}{b+1}\right)} - a\left(b\left(\frac{b\Pi-\pi}{b-c}\right) - \frac{b^2\Pi + b\pi - a}{b+1}\right)}{\left(b\left(\frac{b\Pi-\pi}{b-c}\right) - \frac{b(b\Pi-\pi)+a}{b+1}\right)^2}$$

ce qui donnera par conſéquent la valeur de a.

On trouvera auſſi

$$L'' = b\,(x - x') + y' \qquad l'' = \frac{b\,x\,(b+1) - b^2 x' + b\,y' - a}{b+1}$$

$$M'' = (b\,(x - x') + y')^2 \qquad m'' = \left(\frac{b\,x\,(b+1) - b^2 x' + b\,y' - a}{b+1}\right)^2$$

$$W' = x\,(b+1) - b\,x' + y' \qquad \xi' = \frac{b\,x' - y'}{b - c}$$

réduction faite

$$R = p + \frac{q(bx'-y')}{b-c} - \frac{c^2\,(b\,x'-y')^2 \sqrt{B\,(b+1)^3 \left(\frac{a+(b\,x'-y')(1+c)}{b-c}\right)}}{(b\,(b\,x'-y')\,(1+c) - a\,(b-c))^2}$$

$$+ \frac{a\,c^2\,(b\,x'-y')^2\,(b+1)}{\{b\,(b\,x'-y')\,(1+c) - a(b-c)\}\,(b-c)}$$

$$\Lambda = b\left(\frac{b\,x' - y'}{b-c} - x'\right) + y' = \frac{c\,(b\,x' - y')}{b-c}.$$

Par conſéquent l'équation

$\imath = K'' + \frac{R}{\Lambda} L'' + \frac{M''}{m''}\,(F\,(f\,W'') - k'' - a\,l'')$, où l'on a $K'' = 0$ & $k'' = 0$ deviendra en feſant $x = x'$

$$\imath = \left\{\begin{array}{l} \frac{p\,(b-c)\,y'}{c(bx'-y')} + \frac{qy'}{c} - \frac{c\,y'(bx'-y')\,(b-c)\sqrt{B\,(b+1)^3\left(\frac{a+(bx'-y')\,1+c)}{b-c}\right)}}{(b\,(b\,x'-y')\,(1+c) - a\,(b-c))^2} \\ + \frac{a\,c\,y'\,(b\,x'-y')\,(b+1)}{b\,(b\,x'-y')\,(1+c) - a\,(b-c)} + \frac{y'^2\sqrt{B\,(b+1)^3\,(a + x' + y')}}{(b\,(x'+y') - a)^2} \\ - \frac{a\,y'^2\,(b+1)}{b\,(x'+y') - a} \end{array}\right.$$

Equation qui eſt la même que l'on déjà trouvée dans l'application que l'on a faite de la première ſolution au même exemple, & qui en mettant pour a ſa valeur tirée des deux équations (C) & (D), ſera celle de la ſurface demandée.

J'ai déjà remarqué que ce qui facilite la solution de ce problême, c'est cette particularité qui entre dans les conditions, qu'en fesant $V = a$, on ait $z = F \cdot x$, la quantité V n'étant pas quelconque, mais étant prise dans la proposée; or les deux fonctions arbitraires φV & $\varphi' W$ n'ont rien à cet égard qui les caractérise; donc on resolveroit de la même manière la proposée, si une des conditions étoit qu'en fesant $W = a$ on dût avoir $z = F \cdot x$, l'autre condition étant d'ailleurs générale.

Il y a encore d'autres conditions particulières pour lesquelles ce problême se resout facilement; le problême suivant en est un exemple.

PROBLÊME VII

Déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation $z = K + L \varphi V + M \varphi' W$, de telle manière 1° qu'en fesant $L = 0$ l'on ait $z = F . x$, 2° qu'en fesant $y = \Delta \cdot x$, on ait $z = \Psi . x$; les quantités K, L, M, V & W étant données en x & y, & les quantités $F.x$, $\Delta \cdot x$ & Ψx étant des fonctions quelconques & données de x.

Solution.

Soit prise la valeur de y dans l'équation $L = 0$, pour la mettre à sa place dans les quantités K, M, V & W, & soient K', M', V' & W' ce qu'elles deviennent par cette substitution, il est clair que par la première condition l'on aura $F \cdot x = K' + M' \varphi' W'$, ou $\varphi' W' = \frac{Fx - K'}{M'}$. Soit fait $W' = u$, ce qui donne une valeur de x en u que je représente par $f \cdot u$, & soit substituée cette valeur dans la dernière équation, on la transformera en celle-ci $\varphi' u = \frac{F(f \cdot u) - k}{m}$, k & m étant les fonctions de u que l'on obtient en mettant dans K' & M' à la place de x sa valeur $f \cdot u$. Soient k' & m' les fonctions en x & y que l'on a en mettant W à la place de u dans k & m, & l'on aura $\varphi' W = \frac{F(f \cdot W) - k'}{m'}$; donc la proposée se transformera en

$$z = K + L\,\varphi V + \frac{M}{m'}\,(F(fW) - k')$$

dans laquelle il n'y a plus qu'une fonction arbitraire, que l'on déterminera comme dans les problêmes précédens. Pour cela, soient $K^{\backprime}$, $L^{\backprime}$, $M^{\backprime}$, $V^{\backprime}$, $W^{\backprime}$, ${}^{\backprime}k'$ & ${}^{\backprime}m'$ ce que deviennent les quantités K, L, M, V, W, k' & m' en mettant pour y sa valeur $\Delta \cdot x$; par la seconde condition, la dernière équation deviendra

$$\Psi \cdot x = K^{\backprime} + L^{\backprime}\,\varphi V^{\backprime} + \frac{M^{\backprime}}{{}^{\backprime}m'}\,(F(fW^{\backprime}) - {}^{\backprime}k')$$

d'où l'on tirera $\varphi V^{\backprime} = \frac{\Psi \cdot x - K^{\backprime} - \frac{M^{\backprime}}{{}^{\backprime}m'}(F(fW^{\backprime}) - {}^{\backprime}k')}{{}^{\backprime}L}$.

Soit fait $V^{\backprime} = v$, soit $x = f' v$ la valeur de x que donne cette équation, & soient $K^{\backprime\backprime}$, $L^{\backprime\backprime}$, $M^{\backprime\backprime}$, $W^{\backprime\backprime}$, ${}^{\backprime\backprime}k'$ & ${}^{\backprime\backprime}m'$ ce que deviennent les quantités $K^{\backprime}$, $L^{\backprime}$, $M^{\backprime}$, $W^{\backprime}$, ${}^{\backprime}k'$ & ${}^{\backprime}m'$, en mettant $f' v$ à la place de x, & la dernière équation se transformera en celle-ci

$$\varphi v = \frac{\Psi(f' v) - K^{\backprime\backprime} - \frac{M^{\backprime\backprime}}{{}^{\backprime\backprime}m'}(F(fW^{\backprime\backprime}) - {}^{\backprime\backprime}k')}{{}^{\backprime\backprime}L}$$

qui fera connoitre la forme de la fonction $\varphi \cdot v$. Soit donc mis V à la place de v dans le second membre de cette équation, & soient $K^{\backprime\backprime\backprime}$, $L^{\backprime\backprime\backprime}$, $M^{\backprime\backprime\backprime}$, $W^{\backprime\backprime\backprime}$, ${}^{\backprime\backprime\backprime}k'$ & ${}^{\backprime\backprime\backprime}m'$ ce qu'en deviennent tous les termes par cette substitution, il est évident que l'équation demandée sera

D'après

$$z = K + \frac{L'}{{}^{'''}L'} \left(\Psi (f' V) - K''' - \frac{M'''}{{}^{'''}m'} \left(F(f\, W''') - {}^{'''}k' \right) \right) + \frac{M}{m'} \left(F(f\, W) - k' \right)$$

C. Q. F. T.

D'aprés tout ce qu'on a vû juſqu'ici, la conſtruction de ce problême n'a rien qui doive arrêter. De plus, il eſt facile d'apperçevoir que ce problême ſe reſolveroit de la même maniére, ſi la première condition étoit, qu'en feſant $M = 0$ on dût avoir $z = F\, x$.

PROBLÊME VIII.

Déterminer quelles doivent être les formes des fonctions arbitraires φ, φ', φ'' · · · &c. dans l'équation

$$z = H + K\, \varphi V + L\, \varphi' W + M\, \varphi'' W + N\, \varphi''' W \cdots \&c.$$

pour qu'en feſant

$$\begin{array}{llll}
1^\circ & W = a, & \text{l'on ait} & z = F \cdot x, \\
2^\circ & y = \Delta \cdot x, & \ldots\ldots & z = \Psi \cdot x \\
3^\circ & y = \Delta' \cdot x & \ldots\ldots & z = \Psi' \cdot x \\
4^\circ & y = \Delta'' x & \ldots\ldots & z = \Psi'' x \\
 & \&c. & & \&c.
\end{array}$$

le nombre des conditions étant égal à celui des fonctions arbitraires, les quantités H, K, L, M, N, V & W étant données en x & y, & les fonctions $F, \Delta, \Delta', \Delta''$ · · · &c., Ψ, Ψ', Ψ'' . . . &c. étant de formes connuës.

Solution.

Soit priſe dans $W = a$ la valeur de y que l'on mettra à ſa place dans les quantités $H, K, L, M, N \ldots$ & V, & ſoient $H', K', L', M', N' \ldots$ & V' les fonctions de x que donne cette ſubſtitution, on aura par la première condition

$$F \cdot x = H' + K'\, \varphi V' + L' A + M' B + N' C \ldots \&c.$$

équation dans laquelle les conſtantes $A, B, C \ldots$ &c.

font des conftantes indéterminées & qui donne

$$\varphi V' = \frac{F \cdot x - H' - L' A - M' B - N' C \ldots \&c.}{K'}$$

Soit fait actuellement $V = u$, & foit tirée de cette équation la valeur de x en u que je repréfente par $f \cdot u$, foit mife cette valeur dans H', K', L', M', N' ... &c. & foient h, k, l, m, n ... &c. les fonctions de u que deviennent refpectivement ces quantités, l'équation précédente fe transformera en celle-ci

$$\varphi u = \frac{F(f \cdot u) - h - a l, - B m - C n \ldots \&c.}{k}$$

Dans laquelle on connoitra la forme de la fonction φ, qui, mife à fa place dans la propofée, la rendra, de la même forme que celle du problême IV, & par conféquent traitable par la même méthode.

Quant aux indéterminées A, B, C ... &c. qui reftent après l'opération, elles indiquent que les conditions du problême, contenuës dans l'énoncé, ne fuffifent pas pour déterminer la furface à laquelle appartient l'équation, mais qu'il faut encore donner outre cela autant de points dans l'efpace par lefquels doive paffer cette furface, qu'il y a des quantités arbitraires, fonctions de W, dans la propofée.

Cette folution eft trop fimple par elle même pour avoir befoin d'être éclaircie par un exemple.

Remarque.

Quoique les fonctions $F, \Delta, \Delta', \Delta'', \cdots \Psi\, \Psi'\, \Psi'' \cdots$ &c. puiffent être de formes quelconques, il faut néantmoins, pour qu'il n'y ait point de conftruction dans les conditions, que,

X étant la valeur de x que l'on a en éliminant y des deux équations $W = a$ & $y = \Delta \cdot x$,

X' celle que l'on a en éliminant y des équations $W = a$ & $y = \Delta' x$,

X'' Celle que l'on a en éliminant y des équations $W = a$ & $y = \Delta'' x$

&c. &c.

l'on ait
$$F \cdot X = \Psi X,$$
$$F \cdot X' = \Psi' X',$$
$$F \cdot X'' = \Psi'' X''$$
&c. &c.

Ceci eſt analogue à la remarque du problême V, & paroitra d'ailleurs évident par la conſtruction ſuivante

Conſtruction.

Conſtruire l'équation $z = H + K\phi V + L\phi' W + M\phi'' W + N\phi''' \ldots$ &c. De telle manière que la ſurface à laquelle elle appartient paſſe par autant de courbes à double courbures données, continuës ou diſcontinuës, qu'il y a de fonctions arbitraires dans l'équation, les ſymboles d'équations de ces courbes étant

pour la première $W = a$ & $z = F \cdot x$
pour la ſeconde $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$
pour la troiſième $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$
pour la quatrième $y = \Delta'' x$ & $z = \Psi'' x$
&c. &c.

& que cette ſurface paſſe encore par autant de points donnés dans l'eſpace, qu'il y a de fonctions de W dans la propoſée, en ſorte que Π, π & $\tilde{\omega}$ ſoient les coordonnées du premier de ces points Π', π' & $\tilde{\omega}'$ celles du ſecond, Π'', π'' & $\tilde{\omega}''$ celles du troiſième & ainſi de ſuite.

Pour ſimplifier la deſcription des opérations, 1° j'ai ſuppoſé dans la figure que le nombre des fonctions arbitraires & par conſéquent celui des courbes à double courbure données, ne fût pas plus grand que quatre, mais il ſera facile d'appercevoir que, quelque grand que pût être ce nombre, les opérations, pour être plus longues, n'en seroient pas plus difficiles. 2° je regarderai comme analytiques toutes les quantités $H, K, L, M, N, \ldots V$ & W, quoique la proposée fût constructible, dans le cas même où toutes les quantités seroient discontinuës, & ne pourroient se représenter que par les ordonnées verticales des surfaces courbes discontinuës, soit executées au hazard, soit construites comme celles des problêmes précédens. Si je ne construis pas le problême dans cette généralité, c'est que la figure deviendroit d'une énorme complication, & que d'ailleurs j'ai donné dans le problême V un exemple de la manière dont on doit opérer sur ces quantites. Je supposerai donc seulement les fonctions F, Δ, Δ', $\Delta'' \cdots \Psi\, \Psi'\, \Psi'' \cdots$ &c. discontinuës.

Planche IV FIG. VII

Enfin, pour abbréger je vais donner la construction telle qu'elle n'ait pas besoin de démonstration. Soient CAD le plan horisontal des x & y, & BAC celui des x & z, que $\mu^{\prime V}\, M^{\prime V}\, m^{\prime V}$ soit la courbe dont les projections ont pour symboles d'équations $W = a$, $z = F \cdot x$, & soient $K^{\prime V}\, Q^{\prime V}\, q^{\prime V}$. $N^{\prime V}\, \mathcal{N}^{\prime V}\, n^{\prime V}$ ces projections. Soient $\mu^{\prime V}\, \mu\, \mu'\, \mu''\, \mu'''$

la courbe dont les projections $K^{\prime V}\, K\, K'\, K''\, K'''$ & $N^{\prime V}\, N\, N'\, N''\, N'''$ ont leurs équations représentées par $y = \Delta \cdot x$ & $z = \Psi \cdot x$: $\mathcal{M}^{\prime V}\, \mathcal{M}\, \mathcal{M}'\, \mathcal{M}''\, \mathcal{M}'''$ celle

dont les projections $Q^{\prime V}\, Q\, Q'\, Q''\, Q'''$ & $\mathcal{N}^{\prime V}\, \mathcal{N}\, \mathcal{N}'\, \mathcal{N}''\, \mathcal{N}'''$

ont pour équations $y = \Delta' \cdot x$ & $z = \Psi' \cdot x$, $m^{\prime V}\, m\, m'\, m''\, m'''$ celle dont les projections $q^{\prime V}\, q\, q'\, q''\, q'''$ & $n^{\prime V}\, n\, n'\, n''\, n'''$ ont pour équation $y = \Delta''\, x$ & $z = \Psi''\, x \cdots$ & ainsi de suite. Il est évident, puisque toutes ces courbes sont sur la même surface, qu'au point $K^{\prime V}$ l'ordonnée verticale de la courbe $\mu^{\prime V}\, \mathcal{M}^{\prime V}\, m^{\prime V}$ & celle de la courbe $\mu^{\prime V}\, \mu\, \mu'\, \mu''\, \mu'''$

doivent être égales : que de même au point Q^{IV}, celle de la première courbe & celle de la courbe $\mathcal{M}^{IV}\,\mathcal{M}\,\mathcal{M}'\,\mathcal{M}''\,\mathcal{M}'''$ doivent être égales : qu'au point q^{V} celle de la même courbe & celle de $m^{V}\,m\,m'\,m''\,m'''$ doivent être égales : · · · & ainsi de suite. C'est le sujet de la remarque précédente.

Soient E, F, G · · · · *&c.* les points donnés par lesquels doit passer la surface, & dont le nombre est égal à celui des arbitraires, fonctions de W, contenuës dans la proposée, de manière que l'on ait

$$AP' = \Pi \quad AP'' = \Pi' \quad AP''' = \Pi''$$
$$P'Q' = \pi \quad P''Q'' = \pi' \quad P'''Q''' = \pi''$$
$$Q'E = \tilde{\omega} \quad Q''F = \tilde{\omega}' \quad Q'''G = \tilde{\omega}''$$

Soient E', F', G' · · · · *&c.* leurs projections verticales. Enfin soient AP & PQ les deux coordonnées x & y données à volonté, pour lesquelles il s'agit de construire la verticale $QM = z$. Cela posé, on construira la courbe KQq qui ait pour équation $W = \alpha$, α étant tel que cette courbe passe par le point déterminé Q; cette courbe coupera les projections horisontales des courbes données en des points KQq · · · *&c.* par lesquels on abbaissera des perpendiculaires sur l'axe AC qui le rencontreront en des points p, π, $\tilde{\omega}$ · · · *&c.* par lesquels on élévera des verticales pN, $\pi\mathcal{N}$, $\tilde{\omega}u$ · · · *&c.*, qu'on terminera aux projections verticales des courbes correspondantes. Soient imaginées par les points KQq · · · *&c.* des verticales terminées aux courbes à double courbure correspondantes, il est clair que l'on aura $pN = K\mu$, $\pi\mathcal{N} = Q\mathcal{M}$, $\tilde{\omega}n = qm$ · · · *&c.*

Que l'on imagine une surface cylindrique verticale qui ait la courbe KQq · · · pour base, elle coupera la surface à construire, & supposée pour un instant construite, en une courbe $\mu \mathcal{M} m$, qui passera évidemment par le point demandé M, & de la projection verticale de laquelle on aura l'équation en mettant à la place de y dans la proposée, sa valeur prise dans $W = \alpha$, qui appartient à cette surface cylindrique. Soit $N \mathcal{N} n$ cette projection verticale, & $H', K', L', M', N' \ldots V'$ les fonctions de x que l'on obtient en mettant dans $H, K, L, M, N \ldots$ & V la valeur de y dont on vient de parler, il est clair que l'équation de la courbe $N \mathcal{N} n$ sera

$$(A)\ Z = H' + K' \varphi V' + L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots \&c.$$

qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire $\varphi V'$, puisque les quantités $\varphi' \alpha$, $\varphi'' \alpha$, $\varphi''' \alpha \ldots$ sont des constantes indéterminées, & qui doivent être telles que la courbe $N \mathcal{N} n$ passe par les points déterminés $N, \mathcal{N}, n \ldots$ &c.

Il faut simplement remarquer que ces indéterminées ne sont constantes que pour toutes les verticales $Q M$ qui passent par la courbe $K Q q$, pour laquelle on a $\alpha =$ constante, mais qu'elles seroient variables dans le passage de ces verticales à d'autres pour lesquelles la quantité α seroit différente. Ce ne sont à proprement parler que des constantes relatives.

Or la fonction $\varphi V'$ doit être de telle forme que si la courbe $K Q q$ étoit la même que $K^{IV} Q^{IV} q^{IV}$, c'est-à dire que si l'on avoit fait $\alpha = a$, on eut

$$F \cdot x = z = H' + K' \varphi V' + L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots \&c.$$

Soient donc $H', K', L', M', N' \ldots V'$ Les nouvelles fonctions de x que l'on trouve en mettant à la place de α dans $H', K', L', M', N' \ldots V'$, ou ce qui revient au même en mettant dans $H, K, L, M, N \ldots V$ à la place

de y sa valeur prise dans l'équation $W = a$. on aura
$F \cdot x = H' + K' \varphi V' + L' \varphi' a + M' \varphi'' a + N' \varphi''' a \ldots$ &c.
d'où l'on tirera $\varphi V' = \frac{F . x - H' - L' \varphi' a - M' \varphi'' a - N' \varphi''' a \ldots \&c.}{K'}$

Equation dans laquelle les quantités $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ &c. sont des constantes absoluës, puisque a est une constante donnée par les conditions.

Soit fait actuellement $V' = u$, & soit $x = f \cdot u$ la valeur de x que donne cette équation, on substituera cette valeur dans les quantités $F . x$, H', L', M', $N' \ldots K'$, qui deviendront des fonctions connuës de u, que je représente correspondamment par $F(f . u)$, h, l, m, $n \ldots k$ & l'on aura $\varphi u = \frac{F(fu) - h - l \varphi' a - m \varphi'' a - n \varphi''' a}{k}$

D'où il suit qu'aux constantes près $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ &c. qui restent indéterminées, la forme de la fonction φ sera connuë. On la substituera à sa place dans l'équation (A), & l'on aura la valeur de z en x, c'est-à-dire l'équation de la courbe $N \mathcal{N} n$ sans fonctions arbitraires. Pour cela soit mis V' à la place de u dans les quantités k, h, l, m, $n \ldots$ &c. & soient représentées par $'h$, $'k$, $'l$, $'m$, $'n \ldots$ &c. les nouvelles fonctions de x que donne cette opération on aura $\varphi V' = \frac{F(fV') - 'h - 'l \varphi' a - 'm \varphi'' a - 'n \varphi''' a}{'k}$

d'où il suit que l'équation (A) deviendra

$$(B) \quad z = H' + \frac{K'}{'k} \left(F(fV') - 'h - 'l \varphi' a - 'm \varphi'' a - 'n \varphi'' a \ldots \&c.\right)$$

$+ L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots$ &c. où les fonctions indéterminées de a sont des constantes absoluës qui dépendent de la position des points donnés E, F, $G \ldots$ &c. & où les fonctions indéterminées de α dependent de la position des points $N \mathcal{N} n \ldots$ &c. Or ces derniers points ſont toujours les mêmes tant que α ne varie point, c'eſt-à-dire tant que le piè de l'ordonnée QM ſe trouve ſur la même courbe KQq; mais il changent de poſition lorſque α varie, quoique d'ailleurs ils doivent toujours ſe trouver correſpondamment ſur les courbes $N^{IV}\,N\,N'\,N''\,N'''\ldots$ $\mathcal{N}^{IV}\,\mathcal{N}\,\mathcal{N}'\,\mathcal{N}''\,\mathcal{N}'''\ldots n^{IV}\,n\,n'\,n''\,n''\ldots$

Cette valeur de z ne peut ſe conſtruire que l'on n'ait au paravant conſtruit toutes les indéterminées $\varphi'\,a$, $\varphi''\,a$, $\varphi'''\,a\ldots\varphi'\,\alpha$, $\varphi''\,\alpha$, $\varphi'''\,\alpha\ldots$ &c., en commençant par les fonctions de a,

Pour cela, ſoit conſtruite la courbe $K'\,Q'q'$ dont l'équation eſt $W=\alpha'$, α' étant tel que cette courbe paſſe par le point donne Q', ou qu'en feſant $x=\Pi$, on ait $y=\pi$; & par les points K', Q', $q'\ldots$ &c. ou elle coupe les projections horiſontales des courbes données, ſoient menées des perpendiculaires à l'axe AC, qui le rencontreront en des points p', π', $\varpi'\ldots$, par leſquels ſoient élévées les verticales $p'\,N'$, $\pi'\,\mathcal{N}'$, $\varpi'\,n'$, ... qu'on terminera

aux projections verticales correſpondantes en N', $\mathcal{N}'$, $n'\ldots$ &c.

Soient auſſi élévées par les points K', Q', $q'\ldots$ des verticales qu'on terminera en μ', $\mathcal{M}'$, $m'\ldots$ aux courbes

à double courbure correſpondantes. Cela fait, que l'on imagine par la courbe $K'\,Q'\,q'\ldots$ une ſurface cylindrique verticale, elle coupera la ſurface à conſtruire, ſuppoſée pour un inſtant conſtruite, en une courbe $\mu'\,\mathcal{M}'\,m'$, qui

paſſera par le point donné E, & dont la projection verticale $N'\mathcal{N}'n'$ paſſera par les points déterminés $N'\,\mathcal{N}'\,n'\ldots$,

en même tems que par le point E', projection verticale

du

du point E. Or, puiſque cette courbe eſt déterminée par les mêmes procédés que la courbe $N\mathcal{N}n$, & qu'elle n'en diffère que parceque l'on a fait $W = \propto'$ au lieu de $W = \propto$, on aura ſon équation en mettant partout dans l'équation (B) $\propto'$ à la place de $\propto$. Soient donc H'', K'', L'', M'', N'' .... V'', $''k$, $''h$, $''l$, m'', n''... &c. ce que deviennent les fonctions de x H', K', L', M', N'... V', $'k$, $'h$, $'l$, m', n'... &c. en y mettant $\propto'$ à la place de $\propto$, & l'équation de la projection $N\mathcal{N}n'$ ſera

$$(C)\ z = H'' + \frac{K''}{''k}\left(F(fV'') - h'' - l''\,\varphi' a - m''\,\varphi'' a - n''\,\varphi''' a \cdots\right)$$

$+ L''\,\varphi'\propto' + M''\,\varphi''\propto' + N''\,\varphi'''\propto'$ ... &c. où les conſtantes, fonctions indéterminées de a ſont les mêmes que dans l'équation (B), mais où les fonctions de $\propto'$ doivent être telles que la courbe N', $\mathcal{N}'$, n' paſſe par les points N', $\mathcal{N}'$, n'... &c.

Soit donc conſtruite la quantité $H' + \frac{K'}{''k}\left(F(fV'') - ''h\right)$ pour une valeur de $x = \Pi = AP$, & ſoit retranchée de PE' $(= \tilde{\omega})$ la droite dont cette quantité eſt l'expreſſion, pour avoir un premier reſte, que je repréſente par R, il eſt clair que l'on aura l'équation ſuivante

$$(D)\ R = \frac{K''}{''k}\left(-\,''l\,\varphi' a - m''\,\varphi'' a - n''\,\varphi''' a \ldots .\&c.\right))$$

$+ L''\,\varphi'\propto' + M''\,\varphi''\propto' + N''\,\varphi'''\propto'$ ... &c.

x étant fait $= \Pi = AP$.

Soit conſtruite la même quantité $H'' + \frac{K'}{''k}\left(F(fV'') - h''\right)$ pour la valeur de $x = Ap'$, & qu'on la retranche de $p'N'$ pour avoir un ſecond reſte R', on aura une ſeconde équation.

$$(E)\ R' = \frac{K''}{k''}\left(-l''\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots \&c.\right)$$
$$+ L''\varphi' \propto' + M''\varphi'' \propto' + N''\varphi''' \propto' \ldots \&c.$$
x étant fait $= A p'$

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\pi'$, & on la retranchera de $\pi' \mathcal{N}'$, ce qui donnera un troiſième reſte R' & par conſéquent une troiſième équation

$$(F)\ R'' = \frac{K''}{k''}\left(-l''\varphi' a - m''\varphi' a - n''\varphi''' a \ldots \&c.\right)$$
$$+ L''\varphi' \propto' + M''\varphi'' \propto' + N''\varphi''' \propto' \ldots \&c.$$
x étant fait $= A\pi'$

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A\tilde{\omega}'$, on la retranchera de la verticale $\tilde{\omega}' n'$, ce qui donnera un quatrième reſte R''', & par conſéquent une quatrième équation.

$$(G)\ R''' = \frac{K''}{k''}\left(-l''\varphi' a - m''\varphi'' a - n''\varphi''' a \ldots \&c.\right)$$
$$+ L''\varphi' \propto' + M'\varphi'' \propto' + N''\varphi''' \propto' \ldots \&c.$$
x ètant fait $= A\tilde{\omega}'$

En continuant ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait opéré pour tous les points N', $\mathcal{N}'$, n' ... &c. dont le nombre eſt égal à celui des fonctions arbitraires φ', φ'', φ''' ... &c., on aura autant d'équations & une de plus qu'il y a d'indéterminées fonctions de $\propto'$ dans l'équation (C); on les eliminera, & il reſtera par conſéquent une première équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a$ ... & conſtantes.

Il faut bien remarquer que les ſeconds membres des équations (D), (E), (F), (G) ... &c. ne ſont pas les mêmes quoi qu'il ſoienr exprimés par les mêmes caractères, il ſont tous des conſtantes différentes, & on trouve le premier, en donnant à x la valeur $A P$, le ſecond, en feſant

$x = Ap' \ldots$ &c. J'ai été obligé d'employer ici les mêmes caractères pour des quantités différentes, pour ne pas trop en multiplier la variété.

On construira la courbe $K'' Q'' q''$, dont l'équation est $W = \alpha''$, α'' étant tel que cette courbe passe par le point donné Q'', ou qu'en fesant $x = \Pi'$ on ait $y = \pi'$, par les points K'', Q'', $q'' \ldots$ &c. par lesquels elle coupera les projections horisontales des courbes données, on abbaissera des perpendiculaires à l'axe AC, qui le rencontreront aux points $p'' \pi'' \tilde{\omega}'' \ldots$ &c. par lesquels on élévera les verticales $p'' N''$, $\pi'' \mathcal{N}''$, $\tilde{\omega}'' n'' \ldots$ &c. qui détermineront les points N'', $\mathcal{N}''$ $n'' \ldots$ &c. On imaginera par la courbe $K'' Q'' q''$ une autre surface cylindrique verticale qui coupera la surface à construire dans une autre courbe $\mu'' M'' m''$, qui passera par le point donné F, & dont la projection verticale $N'' \mathcal{N}'' n''$ passera nécessairement par les points N'', $\mathcal{N}''$, $n'' \ldots$ &c. ainsi que par le point F'. On fera pour cette courbe les mêmes opérations que l'on a faites sur la courbe $N' \mathcal{N}'$, n', & l'on trouvera un même nombre d'équations analogues aux équations (D), (E), (F), $(G) \ldots$ en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots \varphi' \alpha''$, $\varphi'' \alpha''$, $\varphi''' \alpha''$; on éliminera les fonctions de α'', & l'on aura une seconde équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi'' a \ldots$ & constantes.

On construira la courbe K''', $Q''' q'''$ dont l'équation est $W = \alpha'''$, α''' étant tel que cette courbe passe par le point donné Q''', & l'on fera pour elle les mêmes opérations que celles que l'on a faites pour les courbes $K' Q' q'$ & $K'' Q'' q''$, & l'on parviendra à une troisième équation en $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a \ldots$ & constantes.

En continuant ainſi de ſuite, on trouvera entre les quantités $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a$ ... &c. autant d'équations qu'il y a de points donnés Q', Q'', Q''' ... &c., c'eſt à-dire qu'il y a de fonctions arbitraires de W dans la propoſée, ou qu'il y a d'indéterminées fonctions de a dans l'équation (B). On pourra donc trouver la valeur de chacune d'elles en particulier, & les conſtruire toutes. Ainſi dans l'équation (B) il ne reſtera plus à déterminer que les fonctions indéterminées de α.

Or on a déjà vû que ces conſtantes doivent être telles que la courbe $N \mathcal{N} n$, à laquelle appartient cette équation, paſſe par les points déterminés N, $\mathcal{N}$, n ... &c.

Soit donc conſtruite la quantité

$$H' - \frac{K}{k} \left(F (f V') - h' - l' \varphi' a - m' \varphi'' a - n' \varphi''' a \ldots \&c. \right)$$

pour la valeur de $x = A p$, & après avoir mis à la place de $\varphi' a$, $\varphi'' a$, $\varphi''' a$ ... &c. leurs valeurs que l'on vient d'enſeigner à trouver. Soit retranchée la droite dont elle eſt l'expreſſion de la verticale $p N$, ce qui donnera un premier reſte que j'exprime par r, & l'on aura

$$r = L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots \&c.,$$

x étant fait $= A p$.

On conſtruira la même quantité pour une valeur de $x = A \pi$, on la retranchera de la verticale $\pi \mathcal{N}$, ce qui donnera un ſecond reſte r', & l'on aura une ſeconde équation

$$r' = L' \varphi' \alpha + M' \varphi'' \alpha + N' \varphi''' \alpha \ldots \&c.$$

x étant fait $= A \pi$.

On conſtruira la même quantité pour la valeur de $x = A \tilde{\omega}$, on la retranchera de la verticale $\tilde{\omega} n$, ce qui donnera un troiſième reſte r''. & l'on aura une troiſième équation

$$r'' = L'\varphi'\alpha + M'\varphi''\alpha + N'\varphi'''\alpha \dots \&c.$$

x étant fait $= A\tilde{\omega}$.

En continuant ainſi de ſuite, on parviendra à avoir autant d'équations en $\varphi'\alpha$, $\varphi''\alpha$, $\varphi'''\alpha \dots$ &c. & conſtantes qu'il y a de points déterminés N, $\mathcal{N}$, $n \dots$ par leſquels doit paſſer la courbe $N\mathcal{N}n$, c'eſt-à-dire, autant qu'il y a de fonctions indéterminées de α dans l'équation (B). Il ſera donc poſſible de trouver la valeur de chacune d'elles en particulier, & les conſtruire; on pourra par conſéquent conſtruire l'équation (B), c'eſt-à-dire la courbe $N\mathcal{N}n$.

Enfin cette courbe étant conſtruite, on élévera par le point P la verticale PM' qu'on terminera à la courbe $N\mathcal{N}n$, on fera $QM = PM'$, & le point M ſera dans la ſurface demandée. C. Q. F. T. & D.

On me reprochera peut-être d'employer du calcul dans une conſtruction, ſur tout après avoir avancé qu'elle ſeroit poſſible, quand même il n'y auroit dans la propoſée aucun facteur analytique, mais j'ai été obligé d'avoir recours à ce moyen pour abréger des détails qui auroient conſidérablement allongé la deſcription des opérations, d'ailleurs le nombre des courbes qu'il eut fallu faire entrer dans la figure pour ſuppléer au calcul, l'eut tellement compliquée qu'il eut été difficile de s'y reconnoitre. Néant-moins toutes les opérations analytiques ne tombent que ſur les quantités que j'ai ſuppoſé analytiques au commencement de la conſtruction. De plus une droite, dont l'expreſſion n'eſt pas analytique, étant conſtruite, on peut en meſurer l'étenduë à l'aide d'une échelle, & la faire entrer dans le calcul. J'avouë que ce moyen eſt peu géométrique & inuſité dans les conſtructions, & que ce problême ne peut-pas être conſtruit plus élégamment que par la méthode que j'ai expoſée dans la remarque qui ſuit la conſtruction du problême V.

Je pourrois donner ici, comme dans les problêmes précédens une ſeconde ſolution analytique, indépendante de la première, & tirée de la conſtruction, mais, après tout ce qui précéde, elle eſt trop facile pour que je m'y arête d'avantage.

SECOND MÉMOIRE

Sur le calcul intégral de quelques équations aux différences partielles.

PAR M.r MONGE.

Indépendamment de l' utilité du calcul intégral des équations aux différences partielles pour la détermination du mouvement des fluides & des vibrations des corps élaſtiques, cette eſpece de calcul eſt encore néceſſaire à la ſolution d'un grand nombre d'autres beaux problêmes, & particulièrement de ceux qui ont pour objet de trouver une ſurface courbe qui jouiſſe d'un *maximum* ou d'un *minimum.* Si l'on ſe propoſe, par exemple, de trouver en trois coordonnées l'équation de la ſurface courbe qu'il faut donner aux aîles d'un moulin à vent, pour que, muës par l' impulſion du vent, & parvenuës à l' uniformité de mouvement, elles aïent la plus grande vîteſſe poſſible, on parvient à une équation aux différences partielles qu' il faut intégrer afin d'avoir la rélation demandée entre les trois coordonnées. Il en eſt de même pour l'équation de la ſurface de moindre réſiſtance; car les ſolutions que l'on a données juſqu'à préſent du ſolide de moindre réſiſtance ſont imparfaites, & ne peuvent être d'ailleurs d'aucune utilité pour la conſtruction des vaiſſeaux. On a toujours, en effet, ſuppoſé 1.° que ce ſolide étoit un ſolide de révolution, 2.° qu'il étoit entièrement ſubmergé par le fluide réſiſtant, hypothêſes qui ne peuvent pas avoir lieu dans la pratique. Pour que l'on pût rétirer quelqu'avantage de la ſolution de ce problême, voici comme il faudroit l'énoncé.

Etant données la maitresse couple d'un vaisseau, ou sa coupe en travers dans l'endroit où il est le plus gros, & sa coupe horisontale par le plan de la surface de l'eau, trouver parmi toutes les surfaces courbes qui peuvent passer par ces deux courbes données, continues ou discontinues, celle qui, müe par l'action du vent sur les voiles, & parvenue à l'uniformité de mouvement, ait la plus grande vîtesse uniforme. Mais ce problême dépend de l'intégration d'une équation aux différences partielles, très compliquée, & que jusqu'à présent j'ai vainement essayé de traiter.

Il faut cependant être de bonne foi, & convenir que les solutions des deux problêmes précédens ne sont pas de toute l'utilité dont elles paroissent à l'inspection. En effet la nature de la surface de l'aîle d'un moulin à vent, dépend de la vîtesse du vent que je suppose uniforme & de la résistance qu'apportent le frottement des menses & des autres parties de la machine au mouvement de l'arbre, or ces quantités sont sujettes à des variations qu'il n'est pas possible de soumettre au calcul; d'où il suit que la surface qui donneroit le *maximum* de vîtesse uniforme pour une certaine vîtesse absolue du vent, ne le donneroit plus pour une vîtesse un peu moindre ou plus grande. De même la nature de la surface de moindre résistance est assujétie à la vîtesse du vent, à la direction du mouvement du vaisseau, à la nature de sa coupe horisontale par le plan de la surface de l'eau &c. or la vîtesse du vent ne peut pas être supposée constante, du moins pendant un tems considérable, les oscillations du vaisseau apportent des changemens inévitables & très prompts dans la coupe horisontale; les inégalités de vîtesse du vent, la manière variable dont il agit sur les voiles sujettes à différens mouvements, quand même elles auroient toujours la même position par rapport au vaisseau, empechent que l'on puisse regarder la direction de son mouve-

ment

ment comme conſtante ; d'où il faut conclure que la ſurface qui ſatisferoit au *maximum* de viteſſe uniforme pour un inſtant, n'y ſatisferoit plus dans l'inſtant ſuivant, ou du moins que cette ſurface ne pourroit être la même que pendant un tems peu-conſidérable.

Si ces conſidérations ſont capables de nous conſoler de l'impoſſibilité ou nous ſommes pour ainſi dire de réſoudre complétement de pareils problêmes, elles ne doivent néanmoins pas nous empêcher de faire tous nos efforts pour vaincre les obſtacles, qui ſe préſentent ; d'ailleurs comme ces obſtacles ne conſiſtent que dans des difficultés d'analyſe, on peut en les ſurmontant ſe frayer une route à la ſolution de problêmes plus utiles.

Dans un mémoire que j'ai déjà eu l'honneur de préſenter à l'Académie ſur le calcul intégral des équations aux différentielles partielles, j'ai donné la manière de trouver comment la quantité z doit être fonction de x & de y pour ſatisfaire à cette équation

$$\frac{\delta^m z}{dx^m} + A\frac{\delta^{m-1} d z}{dx^{m-1} dy} + B\frac{\delta^{m-2} d d z}{dx^{m-2} dy^2} + C\frac{\delta^{m-3} d^3 z}{dx^{m-3} dy^3} \ldots \&c. = K,$$

δ étant la caractériſtique d'une différentielle priſe en ne feſant varier que x, & d celle d'une différentielle priſe en ne feſant varier que y ; les coefficiens A, B, C ... &c. étant conſtants, & le ſecond membre K étant compoſé par voie d'addition ou de ſouſtraction, d'un nombre quelconque de quantités de ces formes $y^m F \cdot x$, $x^m F' \cdot y$ ou plus généralement de ces formes $y^m \varphi(ax-y)$, $x^m \varphi'(ax-y)$. Je vais actuellement intégrer en quantités finies quelques équations de la même forme, en ſuppoſant que les facteurs A, B, C ... &c. ſoient certaines fonctions de x & y, & particulièrement celle-ci

$$x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} d z}{dx^{m-1} dy} + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} d d z}{dx^{m-2} dy^2} \ldots \&c. = K,$$

K étant composé de la somme ou de la différence d'un nombre quelconque de quantités telles que

$y^m \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, $x^m \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Pour suivre un certain ordre, & opposer avec plus de clarté le détail des opérations, je vais commencer par des équations moins générales, c'est-à-dire où l'exposant m sera déterminé.

PROBLÊME I.

Intégrer ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^3\frac{\delta^3 z}{dx^3}+3\,x^2 y\frac{\delta\,\delta\,d\,z}{dx^2 dy}+3\,xy^2\frac{\delta\,d\,d\,z}{dx\,dy^2}+y^3\frac{d^3 z}{dy^3}=0$$

Solution.

Soit fait $x^2\frac{\delta\delta z}{dx^2}+2\,xy\frac{\delta\,d\,z}{dxdy}+y^2\frac{ddz}{dy^2}=V$, & soit différentiée cette équation par rapport à x, & par rapport à y, ce qui donnera

$$x^2\frac{\delta^3 z}{dx^2}=dV-2\,xy\frac{\delta\delta dz}{dxdy}-y^2\frac{\delta ddz}{d\,y^2}-2\,x\frac{\delta\,\delta\,z}{d\,x}-2\,y\frac{\delta dz}{d\,y}$$

$$\&\,y^2\frac{d^3 z}{dy^2}=dV-x^2\frac{\delta\delta dz}{d\,x^2}-2\,xy\frac{\delta ddz}{dxdy}-2\,x\frac{\delta dz}{d\,x}-2\,y\frac{ddz}{d\,y}$$

on multipliera la première de ces équations par $\frac{x}{d\,x}$ la seconde par $\frac{y}{d\,y}$ & l'on substituera à la place de $x^3\frac{\delta^3 z}{dx^3}$ & de $y^3\frac{d^3 z}{dy^3}$ leurs valeurs, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} x\dfrac{\delta V}{dx} - 2x^2y\dfrac{\delta\delta d\zeta}{dx^2dy} - xy^2\dfrac{\delta d d\zeta}{dxdy^2} - 2x^2\dfrac{\delta\delta\zeta}{dx^2} - 2xy\dfrac{\delta d\zeta}{dxdy} \\ \quad + 3x^2y\dfrac{\delta\delta d\zeta}{dx^2dy} + 3xy^2\dfrac{\delta dd\zeta}{dxdy^2} \\ + y\dfrac{dV}{dy} - x^2y\dfrac{\delta\delta d\zeta}{dx^2dy} - 2xy^2\dfrac{\delta dd\zeta}{dxdy^2} \ldots - 2xy\dfrac{\delta d\zeta}{dxdy} - 2y^2\dfrac{dd\zeta}{dy^2} \end{array}\right\} = 0$$

ou bien en réduisant $x\dfrac{\delta V}{dx} + y\dfrac{dV}{dy} = 2V$, équation dont l'intégrale donnéra celle de la proposée.

Pour intégrer cette dernière équation, supposons que la quantité V soit telle que l'on ait $dV = p\,dx + q\,dy$: on aura $px + qy = 2V$, & par conséquent

$$dV = p\,dx + \frac{2V\,dy}{y} - \frac{px}{y}\,dy$$

que l'on peut mettre sous cette forme

$$\frac{dV}{V} = \frac{py}{V}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + \frac{2\,dy}{y}$$

or les deux termes $\dfrac{dV}{V}$ & $\dfrac{2\,dy}{y}$ étant des différentielles logarithmiques, & l'autre terme $\dfrac{py}{V}\left(\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$ étant multiple de $d.\dfrac{x}{y}$, cette équation ne peût-être intégrable que ce terme ne soit la différentielle logarithmique de quelque fonction de $\dfrac{x}{y}$; soit représenté cette fonction par $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, on aura donc

$$\text{Log. } V = \text{log. } \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{ log. } y^2 \text{ ou } V = y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on néglige ici la constante par ce que le caractère arbitraire φ la comporte.

Donc l'intégrale de la proposée sera

$$x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy \frac{\delta dz}{dxdy} + y^2 \frac{ddz}{dy^2} = y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

C. Q. F. T.

PROBLÊME II

Intégrer, ou réduire à une équation différentielle du premier ordre l'équation

$$x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy \frac{\delta dz}{dxdy} + y^2 \frac{ddz}{dy^2} = y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution

Soit fait $x \frac{\delta z}{dx} + y \frac{dz}{dy} = V$, équation que l'on différentiera par rapport à x, & par rapport à y, pour avoir

$$x \frac{\delta\delta z}{dx} = \delta V - \delta z - y \frac{\delta dz}{dy}$$

$$\& \; y \frac{ddz}{dy} = dV - x \frac{\delta dz}{dy} - dz$$

on multipliera la première de ces équations par $\frac{x}{dx}$ la seconde par $\frac{y}{dy}$, & l'on substituera dans la proposée, à la place de $x^2 \frac{\delta\delta z}{dx^2}$ & de $y^2 \frac{ddz}{dy^2}$ leurs valeurs, ce qui donnera, toute reduction faite, la transformée

$$x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} = V + y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Pour intégrer cette équation, soit V telle que l'on ait $dV = p\,dx + q\,dy$, on aura $px + qy = V + y^2 \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

& par conséquent

$$dV = p\,dx + \frac{V\,dy}{y} + y\,dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - p\,x\,\frac{dy}{y},$$ que l'on peût mettre sous cette forme $dV = p\,y\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$
$$+ \frac{V\,dy}{y} + y\,dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$
ou $$\frac{y\,dV - V\,dy}{y^2} = p\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soit actuellement φ' le coefficient de la différentielle de φ, de manière que ω étant une variable quelconque, on ait $d\,\varphi\,\omega = \varphi'\,\omega\,d\,\omega$. Cela posé, on remarquera que le premier membre de la dernière équation est la différentielle complête de $\frac{V}{y}$, de plus que le terme $dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est $= d\left(y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{x}{y}\right)$ ou $= d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$ $-y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$ d'ou il suit que cette équation peût se transcrire ainsi

$$d\,\frac{V}{y} = \left(p - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

or le second membre de cette équation ne peût-être une différentielle complête, que son premier terme ne soit la différentielle d'une fonction de $\frac{x}{y}$; donc si l'on représente cette nouvelle fonction par le caractère Ψ, l'intégrale de la transformée sera

$$\frac{V}{y} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ ou } V = y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

donc on aura pour intégrale de la proposée

$$x\,\frac{\delta z}{dx} + y\,\frac{dz}{dy} = y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

C. Q. F. T.

PROBLEME III.

Intégrer l'équation $x\frac{\delta z}{dx}+y\frac{dz}{dy}=y\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

Solution.

Soit, comme dans les problêmes précédens $dz=p\,dx+q\,dy$, ce qui donne

$$px+qy=y\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on aura $dz=p\,dx+\Psi\left(\frac{x}{y}\right)dy+y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy-\frac{px}{y}dy$

ou $dz=py\left\{\frac{ydx-xdy}{y^2}\right\}+\Psi\left(\frac{x}{y}\right)dy+y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy$.

Mais on a $\Psi\left(\frac{x}{y}\right)dy=d\left(y\Psi\left(\frac{x}{x}\right)\right)-y\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)$

& $y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)dy=d\left(\frac{y^2}{2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)-\frac{y^2}{2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)$

Donc en ſubſtituant ces valeurs on aura

$$dz=\left\{py-y\psi'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{2}y^2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right\}\left(\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)$$
$$+d\left(y\psi\left(\frac{x}{y}\right)\right)+d\left(\frac{1}{2}y^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

Or les deux derniers termes de cette équation ſont des différentielles completes, & le premier terme du ſecond membre, étant multiple de $\left(\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)$ ne peût être la différentielle que d'une fonction de $\frac{x}{y}$; donc ſi l'on repréſente cette fonction par F, l'intégrale de la propoſée ſera

$$z=F\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}y^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Corollaire.

Il ſuit des ſolutions de ces trois problêmes, que l'intégrale finie de l'équation du troiſiéme dégré

$$x^3\frac{\delta^3 z}{dx^3}+3x^2y\frac{\delta\delta d z}{dx^2 dy}+3xy^2\frac{\delta d d z}{dx\, dy^2}+y^3\frac{d^3 z}{dy^3}=0$$

eſt $z=F\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+y\,\psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

le diviſeur 2 de la fonction φ diſparoit ici, par ce que cette fonction eſt arbitraire, au lieu que dans le problême précédent elle étoit déterminée & donnée par l'enoncé de la queſtion.

La méthode que je viens d'employer pour avoir l'intégrale finie de cette équation du troiſième dégré, s'applique avec le même ſuccès aux équations de même forme, & des dégrés ſuperieurs.

PROBLEME IV.

Intégrer ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation générale

$$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m}+m\cdot x^{m-1}y\frac{\delta^{m-1} d z}{dx^{m-1}dy}+m\cdot\frac{m-1}{2}x^{m-2}y^2\frac{\delta^{m-2} d d z}{dx^{m-2} dy^2}\ldots\&c.=0$$

Solution.

Soit fait, comme dans le problême premier.

$$x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}}+(m-1)x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}d z}{dx^{m-2}dy}+(m-1)\frac{m-2}{2}x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}ddz}{dx^{m-3}dy^2}\ldots\&c.=V,$$

Soit differentiée cette équation par rapport à x, & par rapport à y, pour avoir les valeurs ſuivantes

$$\frac{x^m \delta^m z}{dx^m} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x\,\delta V}{dx} - (m-1)\,x^{m-1}\,y\,\frac{\delta^{m-1}\,dz}{dx^{m-1}\,dy} \\ -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)x^{m-2}y^2\frac{\delta^{m-2}\,d\,dz}{dx^{m-2}\,dy^2}\ldots\ldots \&c. \\ -(m-1)\,x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}\,z}{dx^{m-1}} - (m-1)(m-2)x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}\,dz}{dx^{m-2}\,dy} \\ -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)(m-3)\,x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}\,d\,dz}{dx^{m-3}\,dy^2}\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

&

$$y^m\frac{d^m z}{dy^m} = \left\{ \begin{array}{l} y\frac{dV}{dy} - x^{m-1}y\frac{\delta^{m-1}dz}{dx^{m-1}dy} - (m-1)x^{m-2}y^2\frac{\delta^{m-2}d\,dz}{dx^{m-2}dy^2}\ldots \&c. \\ -(m-1)x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}\,dz}{dx^{m-2}dy} - 2(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}\,ddz}{dx^{m-3}dy^2}\ldots \&c. \end{array}\right.$$

On substituera ces deux valeurs dans la proposée, ou ce qui revient au même, on ajoutera ensemble les seconds membres de ces deux égalités, & on ajoutera à leur somme les autres termes de la proposée, qui sont

$$m\cdot x^{m-1}\,y\,\frac{\delta^{m-1}d\,z}{dx^{m-1}dy} + m\left(\frac{m-1}{2}\right)x^{m-2}y^2\,\frac{\delta^{m-2}\,d\,dz}{dx^{m-2}\,dy^2}\ldots\ldots \&c.$$

Cela fait, on remarquera dans cette somme deux especes de suites, les unes contiennent des différentielles de z du dégré m, & les autres des différentielles de z du dégré $m-1$. Or la somme de toutes les premières se reduit à zéro; en effet la somme des coefficiens du terme

$$x^{m-1}\,y\,\frac{\delta^{m-1}\,dz}{dx^{m-1}\,dy}\ \text{eſt} = m - (m-1) - 1 = 0$$

celle de $x^{m-2}y^2\frac{\delta^{m-2}\,d\,dz}{dx^{m-2}dy^2}$ eſt $= m\left(\frac{m-1}{2}\right) - (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) - (m-1) = 0$

& ainsi de suite pour les autres termes du même ordre, quant aux autres suites, il eſt facile de les reduire, en remarquant 1° que tous les termes sont multipliés par

$(m-1)$

$(m-1)$ 2° qu'en les diviſant par $(m-1)$, le coëfficient du terme $x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}}$ eſt $= -1$

celui du terme $x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-2}dy}$ eſt $= -(m-2)-1 = -(m-1)$

celui du terme $x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}ddz}{dx^{m-3}dy^2}$ eſt

$= -\left(\frac{m-2}{2}\right)(m-3) - 2\left(\frac{m-2}{2}\right) = -(m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)$

& en continuant ainſi de ſuite, on trouvera que tous les coëfficiens ſont les mêmes, que ceux des termes correſpondans de la valeur de V, multipliés par $-(m-1)$, d'où il ſuit que la transformée ſera

$$x\frac{\delta V}{dx} + y\frac{dV}{dy} - (m-1)V = 0$$

Or en intégrant cette équation comme celle du problême premier, on trouve $V = y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, donc l'intégrale première de la propoſée ſera $x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}} + (m-1)x^{m-2}y\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-2}dy}$ $+ (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right)x^{m-3}y^2\frac{\delta^{m-3}ddz}{dx^{m-3}dy^2} \ldots$ &c. $= y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ équation qui eſt de la même forme que la propoſée, excepté que le ſecond membre au lieu d'être $= 0$ eſt $= y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

C. Q. F. T.

PROBLÊME V.

Intégrer ou reduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^n \frac{\delta^n z}{dx^n} + n x^{n-1} y \frac{\delta^{n-1} dz}{dx^{n-1} dy} + n\left(\frac{n-1}{2}\right) x^{n-2} y^2 \frac{\delta^{n-2} ddz}{dx^{n-2} dy^2} \ldots \&c.$$
$$= y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution.

On fera, comme dans le problême précédent.

$$x^{n-1} \frac{\delta^{n-1} z}{dx^{n-1}} + (n-1) x^{n-2} y \frac{\delta^{n-2} dz}{dx^{n-2} dy} + (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right) x^{n-3} y^2 \frac{\delta^{n-3} ddz}{dx^{n-3} dy^2} \ldots \&c.$$
$$= V'$$

& en opérant de la même manière on transformera la proposée en celle ci

$$x \frac{\delta V'}{dx} + y \frac{dV'}{dy} = (n-1) V' + y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Soit actuellement V' telle que l'on ait $dV' = p\,dx + q\,dy$, on aura $px + qy = V'(n-1) + y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ & par conséquent

$dV' = p\,dx + (n-1) V' \frac{dy}{y} + y^{n-1} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy - \frac{px}{y} dy$ ou bien $y\,dV' - (n-1) V' dy = py^2\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy$ cela posé, on rendra le premier membre différentielle complete en le multipliant par $\frac{1}{y^n}$ ou, ce qui est la même chose, par $\frac{y^{n-2}}{y^{2(n-1)}}$, car alors il deviendra $\frac{y^{n-1}\,dV' - (n-1) V' y^{n-2}\,dy}{y^{2(n-1)}}$ ou $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right)$; ainsi en divisant aussi le second membre par y^n, on aura $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right) = py^{2-n}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy$; ou par ce que l'on a $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy = d\left(y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right.$ $\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right)$, la transformée deviendra $d\left(\frac{V'}{y^{n-1}}\right)$ $= \left(p\,y^{2-n} - y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) + d\left(y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$, équation dont l'intégrale eſt $\frac{V'}{y^{n-1}} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, en multipliant par y^{n-1}, $V' = y^{n-1}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Donc l' intégrale de la propoſée ſera

$$x^{n-1}\frac{\delta^{n-1}z}{dx^{n-1}} + (n-1)x^{n-2}y\frac{\delta^{n-2}\,dz}{dx^{n-2}dy} + (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3}y^2\frac{\delta^{n-3}\,d\,dz}{dx^{n-3}dy^2}\ldots\&c.$$
$$= y^{n-1}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

C. Q. F. T.

Corollaire I.

Si le ſecond membre de la propoſée, au lieu d'être $y^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ étoit $x^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ l'intégrale ſe trouveroit de la même manière, car on a $x^n\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = y^n.\frac{x^n}{y^n}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$ donc il ſuffiroit de changer dans l'intégrale précédente la fonction donnée φ en une autre qui ſeroit ſon produit par $\frac{x^n}{y^n}$.

Corollaire II.

Si dans la propoſée du problême précédent on fait $n = m - 1$, on aura l' intégrale du problême IV, donc l' équation

$$x^{m-2}\frac{\delta^{m-2}z}{dx^{m-2}}+(m-2)\,x^{m-3}\,y\frac{\delta^{m-3}\,dz}{dx^{m-3}dy}\ldots\,\&c. = y^{m-2}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+\,y^{m-1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

eſt l'intégrale ſeconde de l'équation du problême IV.

PROBLÊME VI.

Intégrer ou reduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$x^k\frac{\delta^k z}{dx^k}+kx^{k-1}y\frac{\delta^{k-1}\,dz}{dx^{k-1}\,dy}+k\left(\frac{k-1}{2}\right)x^{k-2}y^2\frac{\delta^{k-2}d\,dz}{dx^{k-2}dy^2}\ldots\,\&c.$$
$$=y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solution.

Soit fait $x^{k-1}\frac{\delta^{k-1}z}{dx^{k-1}}+(k-1)\,x^{k-2}\,y\,\frac{\delta^{k-2}\,dz}{dx^{k-2}dy}\ \ldots\,\&c. = V''$ & l'on aura la transformée

$$x\frac{\delta V''}{dx}+y\frac{dV''}{dy}=(k-1)V''+y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right);$$

donc l'intégrale, par la méthode du problême précédent, ſe trouve

$$V''=y^{k-1}\,F\left(\frac{x}{y}\right)+y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\,y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

donc l'intégrale de la propoſée ſera

$$x^{k-1}\frac{\delta^{k-1}z}{dx^{k-1}}+(k-1)\;x^{k-2}y\,\frac{\delta^{k-2}dz}{dx^{k-2}dy}\ldots\,\&c.=y^{k-1}\,F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+\,y^k\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\,y^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

C. Q. F. T.

Corollaire.

La propoſée étant l'intégrale ſeconde de l'équation générale du problême IV dans laquelle on a fait $k=m-2$, il ſuit que l'intégrale troiſième de cette équation ſera

$$x^{m-3}\frac{\delta^{m-3}z}{dx^{m-3}}+(m-3)x^{m-4}y\frac{\delta^{m-4}dz}{dx^{m-4}dy}\ldots\text{\&c.}=y^{m-3}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Le diviſeur 2 de la fonction φ eſt compris dans cette fonction qui eſt ici arbitraire, au lieu que dans le problême précédent elle eſt déterminée & donnée dans l'énoncé.

Concluſion

En continuant ces opérations, il eſt facile de reconnoitre que l'équation générale
$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m}+m\,x^{m-1}\frac{\delta^{m-1}dz}{dx^{m-1}dy}\ldots\text{\&c}=0$ a pour intégrale finie

$$z=f\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+yf'\left(\frac{x}{y}\right)+y^2f''\left(\frac{x}{y}\right)\ldots+y^{m-3}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

les fonctions f, f', $f''\ldots F$, Ψ & φ étant arbitraires & indépendantes les unes des autres & leur nombre étant $=m$.

Juſque ici j'ai ſuppoſé que le ſecond membre de la propoſée générale fût $=0$, mais on peut encore l'intégrer même en quantités finies, lorſqu'il eſt compoſée d'une certaine manière de x & de y comme on va le voir dans les problêmes ſuivans.

PROBLÈME VII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale
$x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \ldots \&c. = Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$
les quantités Y & Y' étant des fonctions quelconques & données de y, & les fonctions φ & Ψ étant aussi données.

Solution

I

On intégrera d'abord une fois cette équation, comme celles des problêmes précédens; pour cela on fera

$$x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} \ldots \&c. = V$$

ce qui donnera pour transformée

$$x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} = (m-1) V + Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$$

& par conséquent, en fesant $dV = p\, dx + q\, dy$

$$p x + q y = (m-1) V + Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$$

ou $y\, dV - (m-1) V dy = p y^2 \left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right) + Y dy\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ $+ Y' dy\, \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ on divisera tout par y^m, pour rendre le premier membre différentielle complete, ce qui donnera $\frac{y^{m-1} dV - (m-1) V y^{m-2} dy}{y^{2(m-1)}} = p y^{2-m} \left(\frac{y\, dx - x\, dy}{y^2}\right)$ $+ \frac{Y dy}{y^m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{Y' dy}{y^m} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ cela fait, on remarquera que l'on a

$$\frac{dy}{y^m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Y}{y^m} dy\right) - \int \frac{Y dy}{y^m} \cdot \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right)$$

φ' étant la coefficient de la différentielle de φ. on a de même

$$\frac{Y'\,dy}{y^m}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)=d\left(\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}\right)-\Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)$$

$\int\frac{Y'dy}{y^m}$; d'où il ſuit qu'en feſant pour abréger

$p\,y^{2-m}-\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}-\Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}=K$, l'équation précédente ſe peût-mettre ſous cette forme

$$d\left(\frac{V}{y^{m-1}}\right)=K\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)+d\left(\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}\right)$$

$+\,d\left(\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'\,dy}{y^m}\right)$ dont l'intégrale ne peut-être que

$$\frac{V}{y^{m-1}}=F\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}+\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}.$$

Donc l'intégrale première de la propoſée ſera

$$x^{m-1}\,\frac{\delta^{m-1}z}{dx^{m-1}}+(m-1)\,x^{m-2}y\,\frac{\delta^{m-2}dz}{dx^{m-2}dy}\;\ldots\;\&c.=y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)$$

$+\,y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Ydy}{y^m}+y^{m-1}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int\frac{Y'dy}{y^m}$ dans laquelle la fonction F eſt arbitraire, les autres fonctions φ & Ψ étant données dans l'énoncé.

II

Cette intégrale eſt preciſement de la même forme que la propoſée, d'où il ſuit qu'on l'intégrera de la même manière, & l'on aura pour intégrale ſeconde

$$x^{m-2}\,\frac{\delta^{m-2}z}{dx^{m-2}}+(m-2)\,x^{m-3}y\,\frac{\delta^{m-3}dz}{dx^{m-3}dy}\;\ldots\;\&c.=y^{m-2}F'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+\,y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int\frac{Ydy}{y^m}+y^{m-2}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int\frac{Y'\,dy}{y^m}$$

III

On intégrera encore cette équation de la même manière, & l'on trouvera pour intégrale troisième

$$x^{m-3}\,\frac{\delta^{m-3}z}{dx^{m-3}}\ldots \&c. = y^{m-3}F''\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-2}F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{m-3}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int dy\int\frac{\Upsilon dy}{y^m}+y^{m-3}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int dy\int dy\int\frac{\Upsilon'\,dy}{y^m}$$

où l'on remarquera que la fonction F devroit être divisée par 2, mais comme cette fonction est arbitraire, de même que F' & F'', elle comporte toute sorte de coëfficiens constans.

IV

Il est facile actuellement de conclure par analogie que l'intégrale finie de la proposée est

$$z=f\left(\frac{x}{y}\right)+yf'\left(\frac{x}{y}\right)+y^2f''\left(\frac{x}{y}\right)\ldots\ldots+y^{m-3}F''\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{m-2}F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}F\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m\frac{\Upsilon dy_m}{y^m}$$
$$+\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m\frac{\Upsilon' dy^m}{y^m}.$$

C. Q. F. T.

PROBLÊME VIII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale

$$x^m\frac{\delta^m z}{dx^m}+m\,x^{m-1}\,y\,\frac{\delta^{m-1}\,dz}{dx^{m-1}dy}\ldots \&c. = X\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+X'\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

les quantités X & X' étant des fonctions données de x.

Solution.

On fera la même transformation que dans le problême précédent, & l'on aura

px

$$p x + q y = (m-1) V + X \varphi \left(\frac{x}{y}\right) + X' \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$$

cela fait au lieu d'éliminer q, on éliminera p, ce qui donnera, (en mettant sa valeur dans $d V = p\, d x + q\, d y$)

$$x\, d V - (m-1) V d x = -q y^2 \left(\frac{y\, d x - x\, d y}{y^2}\right) + X d x \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

$+ X' d x\, \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$ on divisera tout par x^m pour rendre le premier membre, différentielle compléte, & l'on aura

$$\frac{x^{(m-1)} d V - (m-1) V x^{m-2} dx}{x^{2(m-1)}} = \frac{-q y^2}{x^m} \left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right) + \frac{X dx}{x^m} \varphi \left(\frac{x}{y}\right)$$

$+ \frac{X' d x}{x^m} \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$ or on a $\frac{X\, d x}{x^m} \varphi \left(\frac{x}{y}\right) = d \left(\varphi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X dx}{x^m} \right)$ $- \varphi' \left(\frac{x}{y}\right) \left(\frac{y\, d x - x\, d y}{y^2}\right) \int \frac{X' dx}{x^m}$ de même $\frac{X' dx}{x^m} \Psi \left(\frac{x}{y}\right)$ $= d \left(\Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X' dx}{x^m} \right) - \Psi' \left(\frac{x}{y}\right) \left(\frac{y\, d x - x\, d y}{y^2}\right) \int \frac{X' dx}{x^m}$, par conséquent, en représentant par K la quantité $- \frac{q y^2}{x^m} - \varphi' \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X dx}{x^m} - \Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X' d x}{x^m}$ l'équation précédente deviendra $d \left(\frac{V}{x^{m-1}}\right) = K \left(\frac{y\, d x - x\, d y}{y^2}\right)$ $+ d \left(\varphi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X dx}{x^m} \right) + d \left(\Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X' d x}{x^m} \right)$ dont l'intégrale ne peut-être que $\frac{V}{y^{m-1}} = F \left(\frac{x}{y}\right) + \varphi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\, d x}{x^m}$ $+ \Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X' d x}{x^m}$, donc l'intégrale première de la proposée sera $x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{d x^{m-1}} + (m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} \ldots \&c. = x^{m-1} F \left(\frac{x}{y}\right)$ $+ x^{m-1} \varphi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X dx}{x^m} + x^{m-1} \Psi \left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X' d x}{x^m}$. Mais cette intégrale est de la même forme que la proposée, on l'intégrera par conséquent de la même manière, & en continuant ainsi de suite, on parviendra à l'intégrale finie qui est

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right) + x f'\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \ldots x^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ x^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + x^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m}$$
$$+ \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X' dx^m}{x^m}$$

C. Q. F. T.

Théoréme

Le caractère W représentant une formule en différentielles partielles, si l'équation $W = G$ a pour intégrale finie & complete $z = g$, & que l'équation $W = K$ ait pour intégrale finie & complete $z = k$, je dis que l'équation $W = G + K$ aura pour intégrale finie & complete.

$$z = g + k.$$

Démonstration

Soit Δ le symbole des opérations qu'il faut faire sur z pour avoir W, de manière que l'on ait $\Delta \cdot z = W$, on aura aussi $\Delta \cdot k = K$, & $\Delta . g = G$. soit $z = \omega$ l'intégrale de l'équation $W = G + K$, on aura de même $\Delta . \omega = G + K$ & par conséquent $\Delta . \omega = \Delta . g + \Delta k$, ou, ce qui revient au même $\omega = g + k$. Donc généralement parlant de ce que l'on a $\Delta \omega = \Delta (g + k)$ on ne peut-pas en conclure que l'on ait $\omega = g + k$, mais seulement $\omega = g + k$ plus une arbitraire, mais comme on suppose completes les intégrales $z = g$ & $z = k$ les quantités g & k contiennent déjà les arbitraires, d'où il suit que le théorême est venu à la rigueur.

PROBLÊME IX.

Intégrer en quantités finies l'équation générale

$$x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m \cdot x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} \cdots \&c. = \begin{cases} Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + Y' \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + Y'' \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + X \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + X' \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + X'' \Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \end{cases}$$

Les quantités Y, Y', Y'' étant des fonctions quelconques de y; X, X', X'' des fonctions quelconques de x, le nombre des termes du second membre étant quelconque, & les fonctions données φ, φ', φ'' .... Ψ, Ψ', Ψ''... étant indépendantes.

Solution

On pourroit resoudre ce problême particuliérement comme les précédents, mais il est plus simple d'employer le principe démontré dans le théorême. Ainsi l'intégrale demandée doit être

$$z = \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) + y f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + y^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y dy^m}{y^m} \\ + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y' dy^m}{y^m} + \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y'' dy^m}{y^m} \ldots \&c. \\ + f\left(\frac{x}{y}\right) + x f'\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + x^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + x^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + x^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m} \\ + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X dx^m}{x^m} + \Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X' dx^m}{x^m} \ldots \&c. \end{cases}$$

Mais l'on a $x^m f\left(\frac{x}{y}\right) = y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ lors que la fonction f est arbitraire, donc l'intégrale sera

$$z = \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) + y f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots + y^{m-3} F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{m-1} F\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y\,dy^m}{y^m} \\ + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y'dy^m}{y^m} + \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{Y''dy^m}{y^m} \ldots \text{\&c.} \\ + \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X\,dx_m}{x^m} + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X'dx^m}{x^m} \\ + \Psi''\left(\frac{x}{y}\right) \int^m \frac{X''dx^m}{x^m} \ldots \text{\&c.} \end{cases}$$

Remarque.

J'ai fait voir dans le mémoire qui a pour objet la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations aux différentielles partielles qu'il est toujours possible de déterminer les fonctions dans une équation de cette forme $z = K + L\varphi V + M\varphi' V + N\varphi'' V \ldots$ &c. pour que cette équation satisfasse à autant des conditions particulières qu'elle renferme de fonctions, lors que ces conditions sont de nature a être exprimées par une équation; ou de construire la valeur de z, lorsque ces conditions ne sont pas soumises à la loi de continuité; donc il sera toujours possible de construire l'équation différentielle du dernier problême, ou son intégrale, quand même la surface courbe à laquelle elle appartient, seroit d'ailleurs obligée de passer par un nombre m de courbes à double courbure, discontinuës, ou tracées au hazard dans l'éspace, mais données.

Pour abréger, je ſuppoſerai toujours dans la ſuite que l'on ait

$$W = x^m \frac{\delta^m z}{dx^m} + m \cdot x^{m-1} y \frac{\delta^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} + m \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right) x^{m-2} y^2 \frac{\delta^{m-2} ddz}{dx^{m-2} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V = x^{m-1} \frac{\delta^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (m-1) x^{m-2} y \frac{\delta^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} + (m-1)\left(\frac{m-2}{2}\right) x^{m-3} y^2 \frac{\delta^{m-3} ddz}{dx^{m-3} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V' = x^{m-2} \frac{\delta^{m-2} z}{dx^{m-2}} + (m-2) x^{m-3} y \frac{\delta^{m-3} dz}{dx^{m-3} dy} + (m-2)\left(\frac{m-3}{2}\right) x^{m-4} y^2 \frac{\delta^{m-4} ddz}{dx^{m-4} dy^2} \ldots \&c.$$

$$V'' = x^{m-3} \frac{\delta^{m-3} z}{dx^{m-3}} \ldots \&c.$$ & ainſi de ſuite;

D'où il ſuit, comme on l'a vû dans le problême IV, que l'on aura

$$W = x \frac{\delta V}{dx} + y \frac{dV}{dy} - (m-1) V$$

$$V = x \frac{\delta V'}{dx} + y \frac{dV'}{dy} - (m-2) V'$$

$$V' = x \frac{\delta V''}{dx} + y \frac{dV''}{dy} - (m-3) V''$$

&c. . . . . &c.

PROBLÊME X.

Intégrer, ou réduire à un ordre moindre d'une unité l'équation

$$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = K.$$

Les coëfficiens A, B, C, D . . . &c. étant conſtans, & le ſecond membre K étant de même forme que celui de l'équation du problême précédent.

Solution.

Soit mise à la place de W sa valeur donnée ci-dessus, & la proposée deviendra

$$x\frac{\delta V}{dx}+y\frac{dV}{dy}+(A-(m-1))V+BV'+CV''+DV'''\ldots\&c.=K.$$

Cela posé, quoique le nombre des coëfficiens A, B, C, D . . . &c. puisse être $=m$, & que la quantité z puisse se trouver sans différentielles dans la proposée, néant-moins je supposerai que le nombre de ces coëfficiens soit quelconque & représenté par n. & l'on transformera la proposée en fesant

$$V+aV'+bV''+cV'''\ldots\&c.=\omega$$

Le nombre des coëfficiens constans & indéterminés a, b, c · · · &c. étant $=n-1$ c'est à-dire les plus hautes différentielles de z qui se trouvent dans les valeurs de K & de ω étant le même ordre la dernière équation donne $V=\omega-aV'\,b\,V''-cV'''\ldots\&c.$

$$x\frac{\delta V}{dx}=x\frac{\delta\omega}{dx}-ax\frac{\delta V'}{dx}-bx\frac{\delta V''}{dx}-cx\frac{\delta V'''}{dx}\ldots\&c.$$

$$\&\,y\frac{dV}{dy}=y\frac{d\omega}{dy}-ay\frac{dV'}{dy}-by\frac{dV''}{dy}-cy\frac{dV'''}{dy}\ldots\&c.$$

substituant ces valeurs dans la proposée elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l}
x\frac{\delta\omega}{dx}+y\frac{d\omega}{dy}+\omega\,(A-(m-1))\\
-a\left\{x\frac{\delta V'}{dx}+y\frac{dV'}{dy}+\left(A-(m-1)-\frac{B}{a}\right)V'\right\}\\
-b\left\{x\frac{\delta V''}{dx}+y\frac{dV''}{dy}+\left(A-(m-1)-\frac{C}{b}\right)V''\right\}\\
-c\left\{x\frac{\delta V'''}{dx}+y\frac{dV'''}{dy}+\left(A-(m-1)-\frac{D}{c}\right)V'''\right\}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\&c.
\end{array}\right\}=K$$

ou, ce qui revient au même

$$\left.\begin{array}{l} x\dfrac{\delta\omega}{dx}+y\dfrac{d\omega}{dy}+\omega\left(A-(m-1)\right) \\ -a\left\{x\dfrac{\delta V'}{dx}+y\dfrac{dV'}{dy}-(m-2)V'+\left(A-1-\dfrac{B}{a}\right)V'\right\} \\ -b\left\{x\dfrac{\delta V''}{dx}+y\dfrac{dV''}{dy}-(m-3)V''+\left(A-2-\dfrac{C}{c}\right)V'''\right\} \\ -c\left\{x\dfrac{\delta V'''}{dx}+y\dfrac{dV'''}{dy}-(m-4)V'''+\left(A-3-\dfrac{D}{c}\right)V''''\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \&c. \end{array}\right\}=K$$

Mettant à la place de $x\dfrac{\delta V'}{dx}+y\dfrac{dV'}{dy}-(m-2)V'$ sa valeur V, à la place de $x\dfrac{\delta V''}{dx}+y\dfrac{dV''}{dy}-(m-3)V''$ sa valeur V', la transformée deviendra

$$\left.\begin{array}{l} x\dfrac{\delta\omega}{dx}+y\dfrac{d\omega}{dy}+\omega\left(A-(m-1)\right) \\ -aV-a\left(A-1-\dfrac{B}{a}\right)V' \\ -bV'-b\left(A-2-\dfrac{C}{b}\right)V'' \\ -cV''-c\left(A-3-\dfrac{D}{c}\right)V''' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \&c. \end{array}\right\}=K$$

ou bien en reduisant

$$x\frac{\delta\omega}{dx}+y\frac{d\omega}{dy}+\omega\left(A-(m-1)\right)-a\left\{V+\right)\left(A-1+\frac{b-B}{a}\right)V' \\ \left.+\frac{b}{a}\left(A-2+\frac{c-C}{b}\right)V''+\frac{c}{a}\left(A-3+\frac{*-D}{c}\right)V'''\ldots\&c.\right\}=K$$

Or il faut remarquer que le terme

$$V+\left(A-1+\frac{b-B}{a}\right)V'+\frac{b}{a}\left(A-2+\frac{c-C}{b}\right)V'' \\ +\frac{c}{a}\left(A-3+\frac{*-D}{c}\right)V'''\ldots\ \&c.$$

ne différe de la valeur de ω que par les coëficiens;

de plus on peut donner aux indéterminées a, b, c ... &c. des valeurs telles que ces coëfficiens ſoient égaux, c'eſt-à-dire que l'on ait

$$A - 1 + \frac{b - B}{a} = a$$

$$\frac{b}{a}\left(A - 2 + \frac{c - C}{b}\right) = b \text{ ou } A - 2 + \frac{c - C}{b} = a$$

$$\frac{c}{a}\left(A - 3 + \frac{* - D}{c}\right) = c \text{ ou } A - 3 + \frac{* - D}{c} = a$$

. . . . &c. . . . . &c.

Car le nombre des indéterminées eſt le même que celui des coëfficiens, donc la transformée peut ſe reduire à

$$x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} + \left(A - (m-1) - a\right)\omega = K$$

Mais, par ce qui précéde, l'intégrale de cette équation eſt

$$\omega = y^{a+m-1-A}\, F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{a+m-1-A}\, K'$$

La quantité K' ſe trouvant comme dans le problême précédent, donc l'intégrale de la propoſée eſt

$$V + aV' + bV'' + cV''' \ldots = y^{a+m-1-A}\, F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{a+m-1-A}\, K'$$

où les coëfficiens a, b, c ... &c. ne dépendent que de la ſolution d'une équation algébrique du dégré m.

C. Q. F. T.

Exemple

Soit $m = 2$, de manière que la propoſée ſe reduiſe à

$$\left.\begin{array}{l} x^2\dfrac{\delta\delta z}{dx^2} + 2xy\dfrac{\delta dz}{dxdy} + y^2\dfrac{ddz}{dy^2} \\ + A\left\{\dfrac{x\delta z}{dx} + y\dfrac{dz}{dy}\right\} \\ \qquad\qquad + Bz \end{array}\right\} = K$$

on

on aura $\omega = x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + az$, & si l'on fait encore, pour simplifier $K = 0$, on aura pour intégrale $x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + az = y^{a-A+1} F\left(\frac{x}{y}\right)$. actuellement pour déterminer la constante a qui se trouve seule dans ce cas là, on se servira de la première équation entre les indéterminées, qui parceque l'on a $b = 0$ devient

$$A - 1 - \frac{B}{a} = a, \text{ d'ou l'on tire}$$

$$a = \frac{A-1 \pm \sqrt{(A-1)^2 - 4B}}{2};$$

d'où il suit que l'intégrale demandée est

$$x\frac{\delta z}{dx}y + \frac{dz}{dy} + z \cdot \frac{A-1 \pm \sqrt{(A-1)^2-4B}}{2} = y^{\frac{-A+1 \pm \sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

Remarque I.

Peut-être se trouverat on embarassé par l'ambiguité des signes, & demanderat on si l'équation différentielle de cet exemple a deux intégrales premières; mais il faut observer que ces deux intégrales sont identiques. On s'en convaincra facilement en les intégrant ou toutes deux séparément, ou conjointement, en conservant le double signe car alors on remarquera que l'intégrale en quantités finies est unique. En effet on sait que l'intégrale de l'équation générale $x\frac{\delta z}{dx} + y\frac{dz}{dy} + mz = y^n F\left(\frac{x}{y}\right)$ est $z = y^{-m} f\cdot\left(\frac{x}{y}\right) + y^n \frac{}{m+n} F\left(\frac{x}{y}\right)$ ou, (lorsque la fonction F est arbitraire, comme dans ce cas ci) $z = y^{-m} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^n F\left(\frac{x}{y}\right)$; donc l'intégrale finie de l'équation que j'ai prise pour exemple sera

$$z = y^{\frac{-A+1 \mp \sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{\frac{-A+1 \pm \sqrt{(A-1)^2-4B}}{2}} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

où l'on voit que chaque exposant de y est une des racines de l'équation $a^2 + (A-1)\,a + B = 0$

Donc si l'on représente par P' & P ces deux racines, l'intégrale finie sera

$$z = y^P f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou bien $z = y^{P'} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^P F\left(\frac{x}{y}\right)$

Or ces deux équations sont identiques; donc &c.

Il est facile de s'assurer de l'exactitude de cette intégrale, par la différentiation, car on aura, en ne conservant que les caractères f & F pour abbréger,

$$Ax\frac{\delta z}{dx} = Ay^P\frac{x}{y}f' + Ay^{P'}\frac{x}{y}F'$$

$$Ay\frac{dz}{dy} = -Ay^P\frac{x}{y}f' + APy^Pf - Ay^{P'}\frac{x}{y}F' + AP'y^{P'}F$$

$$\frac{x^2\,\delta\delta z}{dx^2} = y^P\frac{x}{y}f' + y^P\frac{x^2}{y^2}f'' + y^{P'}\frac{x}{y}F' + y^{P'}\frac{x^2}{y^2}F'' - y^P\frac{x}{y}f' - y^{P'}\frac{x}{y}F'.$$

$$\frac{2xy\,\delta dz}{dxdy} = -2y^P\frac{x}{y}f' - 2y^P\frac{x^2}{y^2}f'' + 2Py^P\frac{x}{y}f' - 2y^{P'}\frac{x}{y}F' - 2y^{P'}\frac{x^2}{y^2}F''$$
$$+ 2P'y^{P'}\frac{x}{y}F'$$

$$y^2\frac{ddz}{dy^2} = \begin{cases} y^P\frac{x}{y}f' - Py^P\frac{x}{y}f' + y^P\frac{x^2}{y^2}f'' + P^2y^Pf - Py^P\frac{x}{y}f' \\ + y^P\frac{x}{y}f' - Py^Pf + y^{P'}\frac{x}{y}F' - P'y^{P'}\frac{x}{y}F' + y^{P'}\frac{x^2}{y^2}F'' \\ + P'^2y^{P'}F - P'y^{P'}\frac{x}{y}F' + y^{P'}\frac{x}{y}F' - P'y^{P'}F \end{cases}$$

$$Bz = By^Pf + By^{P'}F$$

ajoutant ensemble toutes ces quantités, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2\delta\delta z}{dx}+2xy\frac{\delta\, dz}{dxdy}+y^2\frac{ddz}{dy^2} \\ +A\left\{\frac{x\delta z}{dx}+y\frac{dz}{dy}\right\} \\ \quad +Bz \end{array}\right\} \begin{array}{l} =y^P f\left(\frac{x}{y}\right)\{P^2+(A-1)P+B\} \\ +y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)\{P'^2+(A-1)P'+B\} \end{array}$$

Quantité qui, parceque les fonctions f & F sont indépendantes, ne peut devenir $=0$, que chacun des coëfficiens

$$P^2+(A-1)P+B \quad \& \quad P'^2+(A-1)P'+B$$

ne soit $=0$ & par conséquent que les exposans P & P' ne soient les racines inégales de l'équation commune $P^2+(A-1)P+B$. Je dis que les racines P & P' doivent être inégales, parcequ'autrement l'intégrale $z=y^P f\left(\frac{x}{y}\right)$ $+y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)$ se réduiroit à $z=y^P f\left(\frac{x}{y}\right)$ & ne seront plus complettes, puis qu'elles ne renfermerout plus qu'une fonction arbitraire.

Remarque II.

L'intégrale du problême précédent étant

$$V+aV'+bV''+cV'''\ldots \&c.=y^{a+m-1-A}F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{a+m-1-A}K'$$

il suit qu'elle est de même forme que la proposée, que par conséquent on l'intégrera de la même maniere, & que son intégrale sera encore de même forme c'est-à-dire

$$V+a'V',b'V''\ldots \&c.=y^P f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}F\left(\frac{x}{y}\right)+K''$$

Les exposans P, & P' devant se trouver en fonction de a, b, $c\ldots$ &c. d'où il est facile de conclure que l'intégrale finie de la proposée doit être de cette forme

$$z=y^P\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P''}f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'''}F\left(\frac{x}{y}\right)\ldots \&c.+M$$

les exposants P, P', P'', $P'''\ldots$ &c. étant constans &

dépendans des coëfficiens A, B, $C \cdots$ &c. & le terme M dépendant du second membre K, de manière que si l'on a $K = o$, on aura aussi $M = o$. Il s'agit actuellement de trouver ce terme M & les exposans P, P', $P'' \cdots$ &c. or ces exposans P, $P' \cdots$ &c. sont indépendans de K, ainsi pour les trouver plus simplement, je supposerai $K = o$, je chercherai ensuite la forme du terme M.

PROBLÊME XI.

Intégrer en quantités finies l'équation $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \cdots \&c. = o$

Solution.

On vient de voir que l'intégrale démandée est de la forme $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} f\left(\frac{x}{y}\right) \cdots \&c.$
Il ne s'agit donc plus que de differencier cette équation pour trouver le rapport des exposans P, $P' \cdots$ &c. aux coëfficiens A, B, $C \cdots$ &c. mais l'opération n'étant pas praticable sous cette généralité, je vais prendre des cas particuliers.

On a déjà vû que dans le cas de $m = 2$, si l'on fait $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, on a $W + AV + BZ = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ $\left(P^2 + (A-1) P + B\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\left(P'^2 + (A-1) P' + B\right)$ quantité qui ne peut devenir $= o$, que les exposans P & P' ne soient les racines de l'équation $P^2 + (A-1)P + B = o$ on trouvera de la même manière pour le cas de $m = 3$ qu'en fesant $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P''} f\left(\frac{x}{y}\right)$ l'on ne peut avoir $W + AV + BV' + CZ = o$ que les expoſans ne ſoient les racines de l'équation $P^3 + P^2 \left(A-(2+1) \right) + P \left(B - A + 2\cdot 1 \right) + C = 0$

Si l'on a $m = 4$, on trouvera qu'en feſant $z = y^p \varphi \left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} \psi \left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'''} F\left(\frac{x}{y}\right)$ on ne peut avoir $W + AV + BV' + CV'' + DZ = 0$ que les expoſans ne ſoient les racines inégales de

$$P^4 + P^3 \left\{ A-(3+2+1) \right\} + P^2 \left\{ \begin{matrix} B-(2+1)A+3(2+1) \\ +2\cdot 1 \end{matrix} \right\}$$

$$+ P \left\{ C - B + 2\cdot 1 A - 3\cdot 2 \right\} + D = 0$$

Dans le cas de $m = 5$, on trouvera que les cinq expoſans doivent être les racines de l'équation

$$P^5 + P^4 \left\{ A-(4+3+2+1) \right\} + P^3 \left\{ \begin{matrix} B-(3+2+1)A+4(3+2+1) \\ +3(2+1) \\ +2\cdot 1 \end{matrix} \right\}$$

$$+P^2 \left\{ \begin{matrix} C-(2+1)B+3(2+1) \\ +2\cdot 1 \end{matrix} \right\} A - 4 \left\{ \begin{matrix} \left\{\begin{matrix} 3(2+1) \\ +2\cdot 1 \end{matrix}\right\} \\ -3(2\cdot 1) \end{matrix} \right\} + P \left\{ \begin{matrix} D-C+2B \\ -3\cdot 2A \\ +4\cdot 3\cdot 2 \end{matrix} \right\} + E = 0$$

En continuant ainſi de ſuite, on trouvera facilement la loi ſuivant laquelle ſe forme cette équation, & l'on reconnoitra qu'elle eſt toujours de la forme ſuivante

$$P^m + P^{m-1} (A - \alpha) + P^{m-2} (B - \alpha' A + \beta) + P^{m-3} (C - \alpha'' B + \beta' A - \gamma)$$
$$+ P^{m-4} (D - \alpha''' C + \beta'' B - \gamma' A + \delta) \ldots \&c. = 0$$

dans laquelle les quantités α, α', α'', α''' … &c., β, β', β'', β''' … &c. γ, γ', γ'', γ''' … &c. δ, δ' … &c. ſont des nombres dont voici la formation.

1° Si l'on retranche le premier des termes dont eſt compoſé α on aura α', de même ſi l'on retranche le premier terme de α' on aura α'' & ainſi de ſuite. La même choſe a lieu pour tous les autres nombres répréſentés par le même caractère; ainſi en retranchant le premier terme dont eſt compoſé β on a β', de même on forme β'' en effaçant le premier terme de β', il en est de même pour la suite des nombres γ, γ', γ'', γ''' ... &c. δ. δ' ... &c. de manière que tous ces nombres seront connus si on connoît les premiers de chaque suite, c'est-à-dire α, β, γ, δ ... &c.

2° Il est aisé de voir que α est $= (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots 0$
que β est $= (m-1)\alpha' + (m-2)\alpha'' + (m-3)\alpha''' + (m-4)\alpha'''' \ldots$ &c.
que γ est $= (m-1)\beta' + (m-2)\beta'' + (m-3)\beta''' + (m-4)\beta'''' \ldots$ &c.
que δ est $= (m-1)\gamma' + (m-2)\gamma'' + (m-3)\gamma''' + (m-4)\gamma'''' \ldots$ &c.

Il est peut être plus simple de dire que α est $= (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) \ldots$ &c., que β est la somme des produits de ces quantités prises 2 à 2, γ la somme de leurs produits prises trois à trois ... &c. De même que α' est $= (m-2) + (m-3) + (m-4) + (m-5) \ldots$ &c. que β' est la somme des produits de ces quantités prises 2 à 2, γ' la somme de leurs produits prises 3 à 3 ... &c. Pareillement que α'' est $= (m-3) + (m-4) + (m-5) \ldots$ &c. que β'' est égal à la somme des produits de ces quantités prises 2 à 2, γ'' la somme de leurs produits prises 3 à 3 ... &c. & ainsi de suite.

Donc il sera possible de former l'équation du dégré m dont les racines doivent donner les exposans de y dans l'intégrale générale de la proposée; or on a vû qu'il n'y avoit plus rien d'indéterminé dans l'intégrale que ces exposans, donc en supposant la perfection de l'algébre, on aura toujours l'intégrale finie de l'équation

C. Q. F. T.

$$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = 0$$

Rémarque

Les exposans P, P, P'' ... &c. doivent être les racines inégales de l'équation que nous venons de trouver, parcequ'autrement le nombre des fonctions arbitraires de l'intégrale deviendroit moindre que le dégré de la différentielle de la proposée, & que cette intégrale ne seroit plus complete. En effet si l'on suppose $P = P'$ l'équation $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ se réduit à $z = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ qui n'est que l'intégrale incomplete d'une équation en différentielles partielles du second dégré. Or il peut arriver que l'équation qui donne les valeurs des exposans ait toutes ces racines égales, donc il peut arriver des cas où la méthode précédente ne donne pas l'intégrale complete de la proposée. Le problême suivant remédie à cet inconvénient.

PROBLÊME XII.

Compléter l'intégrale de l'équation $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots$ &c. $= 0$ lorsque les exposans P, P', $P'' \ldots$ &c. sont égaux.

Solution.

On intégrera d'abord une fois la proposée, & d'après tout ce qui précéde, il est clair que l'on aura pour intégrale première & complete

$$V + aV' + bV'' + cV''' \ldots \&c. = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

De plus en fesant (comme dans le problême X) $V' + a'V'' + b'V''' \ldots$ &c. $= \omega$ on mettra cette intégrale sous la forme suivante

$$x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} \pm H\omega = y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

dans laquelle la quantité H est une constante fonction de A, B, $C \ldots$ &c. Or nous avons vû que l'intégrale de cette équation est

$$\omega = y^{-H}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Donc puisque les exposans P, P', P'' ... &c., par hypothèse, sont égaux, il faut que l'on ait $P = -H$, d'où il suit que la transformée doit être

$$x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} - P\omega = y^{P}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Pour intégrer cette équation soit $d\omega = p\,dx + q\,dy$, ce qui donne $px + qy - P\omega = y^{P}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on aura $d\omega = p\,dx + \frac{P\omega}{y}dy + y^{P-1}dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{px}{y}dy$ ou bien

$$y\,d\omega - P\omega\,dy = py^{2}\left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} + y^{P}dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

on rendra le premier membre différentielle complete en divisant tout par y^{P+1} & l'on mettra après l'opération l'équation précédente sous cette forme

$$\frac{y^{P}d\omega - P\omega y^{P-1}dy}{y^{2P}} = py^{1-P}\left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} + y^{-1}dy\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

dans laquelle le premier membre est $= d\frac{\omega}{y^{P}}$. Mais le dernier terme $\frac{dy}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ est

$$= d\left(\log. y\cdot\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - l.\,y\left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right);$$

donc cette équation se réduit à

$$d\left(\frac{\omega}{y^{P}}\right) = \left(py^{1-P} - \log. y\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left\{\frac{ydx - xdy}{y^{2}}\right\} + d\left\{\log. y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$$

dont l'intégrale ne peut être que

$$\omega y^{-P} = \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + \log. y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou

$$\text{ou } \omega = y^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \log. y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

dans laquelle les expoſans de y ſont égaux à la verité, mais ſans que les deux fonctions arbitraires ſe réduiſent, le ſecond étant multiplié par log. y. Ainſi l'intégrale deuxième dans l'hypothèſe des racines égales eſt

$$V' + a'V'' + b'V''' + c'V'''' \ldots \&c. = y^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \log. y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

On transformera cette équation, comme la précédente en celleci

$$x\frac{\delta \omega'}{dx} + y\frac{d\omega'}{dy} + H'\omega' = y^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \,\mathrm{l}.\, y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

& l'on trouvera de la même manière que les expoſans étant égaux, l'on doit avoir $H' = -P$ d'où il ſuit qu'en feſant $d\omega' = p\,dx + q\,dy$, on aura de même que précédemment

$$y\,d\omega' - P\omega' dy = py^2 \left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} + y^P dy\, \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+ y^P \,\mathrm{l}.\, y\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy$$

En diviſant par y^{P+1}, on rendra le premier membre différentielle complete, & l'on aura

$$d(\omega' y^{-P}) = py^{1-P} \left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} + \frac{dy}{y}\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$+ \mathrm{l}.\, y.\, \frac{dy}{y}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

ou parceque

$$\frac{dy}{y}\Psi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ eſt } = d\left(\log. y\, \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \log. y \left\{\frac{ydx - xdy}{y^2}\right\} \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\& \ \mathrm{l}.\, y\frac{dy}{y}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{(\log. y)^2}{2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \frac{1}{2}(\log. y)^2 \left\{\frac{ydx - xdy}{y^2}\right\} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

on aura

$$d(\omega' y^{-P}) = \left(py^{1-P} - \log. y\, \Psi'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}(\log. y)^2\, \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\left\{\frac{ydx - xdy}{y^2}\right\}$$

$$+ d\left\{\log. y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\right\} + \frac{1}{2}\,d\left\{(\log. y)^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right\}$$

dont l'intégrale ne peut-être que

$$\omega y^{-P} = F\left(\frac{x}{y}\right) + \log. y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}(\log. y)^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$ ou bien

multipliant par y^P, & négligeant le coëfficient $\frac{1}{2}$ à cause que la fonction φ est arbitraire, on aura pour intégrale troisième & complete de la proposée

$$V'' + a''V''' + b''V'''' \ldots \&c. = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \log. y\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ y^P (\log. y)^2\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

On fera la même opération sur cette troisième intégrale ... &c. d'où l'on conclurra que l'intégrale complete de la proposée, lorsque les exposants P, P', P'' ... &c. sont égaux, est

$$z = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \log. y\,F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^P (\log. y)^2\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+ y^P (\log. y)^3\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c.$$

C. Q. F. T.

Corollaire

Si les racines P, P', P'' ... &c. dont le nombre est $= m$ n'étoient pas toutes égales mais qu'il n'y en eut qu'un certain nombre $= m - n$, on intégreroit d'abord la proposée un nombre de fois $= n$, & l'on auroit son intégrale n^{eme} complete; ensuite en l'intégreroit $(m-n)$ fois connue dans le problême précédent, & son intégrale finie & complete seroit par conséquent

$$z = \begin{cases} y^p f\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} f''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'''} f'''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + y^p \cdot \log. y\, F\left(\frac{x}{y}\right) + y^p (\log. y)^2\, F'\left(\frac{x}{y}\right) \\ + y^p (\log. y)^3\, F''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \end{cases}$$

Le nombre des termes de la ſeconde ſuite étant $(m-n-1)$ & $(1+n)$ étant celui des termes de la première.

PROBLÉME XIII.

Intégrer en quantités finies l'équation générale $W + AV + BV' + CV'' + DV''' \ldots \&c. = K$, le ſecond membre K étant compoſé par voie d'addition & ſouſtraction d'un nombre quelconque de quantités de ces formes $Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ & $X\psi\left(\frac{x}{y}\right)$. Y & X ſont correſpondamment des fonctions quelconques données la première de y & la ſeconde de x.

Solution.

Suppoſons d'abord que le ſecond membre K contienne ſeulement $Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, on mettra la propoſée ſous cette forme $x\frac{\delta\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} = P\omega + Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$; P étant une des racines de l'équation qui donneroit les expoſans de y dans l'intégrale de la propoſée, ſi l'on avoit $K = 0$: Or nous avons vû (probl. VII.) que l'intégrale de cette transformée eſt $\omega = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$, donc l'intégrale première ſera

$$V+aV'+bV''+CV''' \ldots \&c. = y^P F\left(\frac{x}{y}\right)+y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$$

on transformera de même celleci en

$$x\frac{\delta \omega'}{dx}+y\frac{d\omega'}{dy} = P'\omega' + y^P F\left(\frac{x}{y}\right)+y^P \varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int \frac{Y\,dy}{y^{P+1}}$$

P' étant la seconde racine de l'equation qui donne les exposans & l'on aura en intégrant

$$\omega' = y^{P'} F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^P F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\left(\frac{y^P\,dy}{y^{P'+1}}\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}\right)$$

En intégrant encore une fois on trouvera

$$\omega'' = y^{P''} F''\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'} F\left(\frac{x}{y}\right)+y^P F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$+y^{P''}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int\left\{\frac{y^{P'}dy}{y^{P''+1}}\int\left\{\frac{y^P\,dy}{y^{P'+1}}\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}\right\}\right\}$$

d'où l'on conclurra que K étant $= Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, l'intégrale finie de la proposée seroit

$$z=\left\{\begin{array}{l} y^P F\left(\frac{x}{y}\right)+y^P F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P''}F''\left(\frac{x}{y}\right)+y^{P'''}F'''\left(\frac{x}{y}\right)\ldots \&c. \\ +y^{P''m}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{\ldots\int\left\{\frac{y^{P''}dy}{y^{P'''+1}}\int\left\{\frac{y^P\,dy}{y^{P''+1}}\int\left\{\frac{y^P\,dy}{y^{P'+1}}\right.\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left.\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots\right\} \end{array}\right\}$$

La seconde suite qui est ici indéfinie à cause de l'exposant indéterminé m, doit être poussée jusqu'à ce qu'on ait empoyé toutes les racines P, P', P'' ... &c. c'est-à-dire que pour avoir son expression finie il faut intégrer un nombre de fois $= m$.

Si le terme K au lieu d'être $= Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ étoit $= Y'\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$, on auroit dans l'intégrale qui donne la valeur de z une seconde suite de même forme ; donc quelque nombre des quantités de cette forme $Y\ \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ que K renferme, l'intégrale de la proposée, en vertu du Théorême démontré ci-devant, sera composée 1.° de la première suite $y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{P'} F'\left(\frac{x}{y}\right) \ldots$ &c. plus d'autant de suites de mêmes formes que la seconde, mais où il faudra mettre successivement $Y, Y', Y'' \ldots$ &c. pour Y & $\varphi, \varphi', \varphi'' \cdots$ &c. pour φ.

Actuellement supposont que le second membre K ne renferme que $X\ \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, on mettra la proposée sous cette forme $x\frac{d\omega}{dx} + y\frac{d\omega}{dy} = Q\omega + X\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, Q étant une constante dont je ferai voir la nature, & par la méthode du problême VIII on trouvera que cette équation a pour intégrale.

$$\omega = x^Q F\left(\frac{x}{y}\right) + x^Q \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^{Q+1}}$$

ou parceque l'on a $x^Q F\left(\frac{x}{y}\right) = y^Q . \frac{x^Q}{y^Q} F\left(\frac{x}{y}\right) = y^Q F\left(\frac{x}{y}\right)$ la fonction F étant arbitraire on aura pour intégrale $\omega = y^Q F\left(\frac{x}{y}\right) + x^Q \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X.\,dx}{x^{Q+1}}$. Mais par le Théorême le terme $y^Q F\left(\frac{x}{y}\right)$ doit être le même que si l'on avoit en $K = 0$, & dans ce cas là on auroit $Q = P$, racine de l'équation que l'on a trouvée dans le problême XI. donc on aura pour intégrale première

$$\omega = y^P F\left(\frac{x}{y}\right) + x^P \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \frac{X\,dx}{x^{P+1}}.$$

On l'intégrera de nouveau, & P' étant la seconde racine de l'équation qui donneroit les exposans de y si l'on avoit $K = 0$, on trouvera par la même méthode pour intégrale seconde

$$\omega' = y^{p'} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p} F\left(\frac{x}{y}\right) + x^{p'} \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \int \left\{ \frac{x^{p} dx}{x^{p'+1}} \int \frac{X dx}{x^{p+1}} \right\}$$

en continuant ainsi de suite, on trouvera pour intégrale finie

$$z = \begin{cases} y^{p} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} F''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} F'''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + \; x^{p'm} \; \Psi\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \ldots \int \left\{ \frac{x^{p'''} dx}{x^{p''''+1}} \int \left\{ \frac{x^{p''} dx}{x^{p'''+1}} \right.\right.\right. \\ \int \left\{ \frac{x^{p'} dx}{x^{p''+1}} \int \left\{ \frac{x^{p} dx}{x^{p+1}} \int \frac{X dx}{x^{p+1}} \right\}\right\}\right\}\right\} \ldots \Big\} \end{cases}$$

Mais par tout ce qui précéde, il est facile de réconnoitre que si le second membre K étoit composé d'un certain nombre de quantités de cette forme $X \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ l'intégrale de la proposée seroit composée 1° de la suite d'arbitraires $y^{p} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p} F'\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c.$ 2° d'autant de suites comme la seconde, qu'il y auroit de quantités $X \Psi\left(\frac{x}{y}\right) + X' \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)$, en observant qu'on auroit successivement $X, X', X'' \ldots \&c.$ pour X & $\Psi, \Psi', \Psi'' \ldots \&c.$ pour Ψ.

Donc en joignant (en vertu du Théorême) les deux parties de la solution on trouvera pour intégrale générale & finie de la proposée

$$z = \begin{cases} y^{p} F\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'} F'\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p''} F''\left(\frac{x}{y}\right) + y^{p'''} F'''\left(\frac{x}{y}\right) \ldots \&c. \\ + y^{p''m} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \left\{ \ldots \int \left\{ \frac{y^{p''} dy}{y^{p'''+1}} \int \left\{ \frac{y^{p'} dy}{y^{p''+1}} \int \left\{ \frac{y^{p} d}{y^{p'+1}} \right.\right.\right.\right. \\ \int \frac{Y dy}{y^{p+1}} \Big\}\Big\}\Big\} \ldots \Big\} \\ \text{plus à autant de termes comme le dernier qu'il y a} \\ \text{de quantités de la forme } Y \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \text{, en observant de} \\ \text{mettre successivement } Y', Y'', Y''' \ldots \&c. \;\&\; \varphi' \varphi'' \varphi''' \ldots \&c. \end{cases}$$

$$z=\left\{\begin{array}{l} + x^{P''m}\,\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{\ldots\int\left\{\frac{x^{P''}dx}{x^{P''+1}}\int\left\{\frac{x^{P'}dx}{x^{P''+1}}\int\left\{\frac{x^{P}dx}{x^{P'+1}}\right.\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.\left.\int\frac{X\,dx}{x^{P+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots\right\} \end{array}\right.$$

Plus a autant de termes comme le précédent qu'il y a dans K de quantités de la forme $X\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$, en observant d'employer successivement X', X'', $X'''\ldots$ &c. & Ψ' Ψ'' $\Psi'''\ldots$ &c.

C. Q. F. T.

Remarque I.

Il importe peu dans quel ordre on emploie les racines P, P', $P''\ldots$ &c. pour former les termes déterminés de cette équation, on aura toujours le même résultat pourvû qu'on les emploie toutes; car on sait que si M, N, L.. sont des fonctions de x, l'on aura

$$\int(M\,dx\int(N\,dx\int L\,dx))=\int(N\,dx\int(M\,dx\int L\,dx))$$
$$=\int(N\,dx\int(L\,dx\int M\,dx))=\ldots\ \&c.$$

Rémarque II.

J'ai supposé dans l'intégrale précédente que toutes les racines P, P', $P''\ldots$ &c. étoient inégales, mais dans le cas où elles seroient toutes égales, il est facile de voir, (Probl. XII.) que l'on auroit pour integrale finie & complete

$$z=\left\{\begin{array}{l} y^P F\left(\frac{x}{y}\right)+y^P\,\mathrm{Log.}\,y\,F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^P(\mathrm{Log.}\,y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right) \\ +y^P(\mathrm{Log.}\,y)^3 F'''\left(\frac{x}{y}\right) \\ +y^P\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{\ldots\int\left\{\frac{dy}{y}\int\left\{\frac{dv}{y}\int\left\{\frac{dv}{y}\int\frac{Y\,dy}{y^{P+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \&c. \end{array}\right.$$

$$z=\left\{\begin{array}{l}+x^p\Psi\left(\frac{x}{y}\right)\left\{\ldots\int\left\{\frac{dx}{x}\int\left\{\frac{dx}{x}\int\left\{\frac{dx}{x}\int\frac{Xdx}{x^{p+1}}\right\}\right\}\right\}\ldots\right\}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.\end{array}\right.$$

car ſi le ſecond membre K ne renfermoit que des termes de la forme $Y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, il eſt évident que la ſuite des arbitraires ſeroit

$$y^p F\left(\frac{x}{y}\right)+y^p \operatorname{Log.} y\, F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^p(\operatorname{Log.} y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)\ldots \&c.$$

De même, ſi K ne contenoit que des termes de la forme $X\Psi\left(\frac{x}{y}\right)$ la ſuite des arbitraires ſeroit

$$x^p F\left(\frac{x}{y}\right)+x^p \operatorname{l.} x\, F'\left(\frac{x}{y}\right)+x^p(\log. x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)\ldots \&c.$$

Or il eſt évident que ces deux ſuites ſe réduiſent à la même. On a déjà vû (Probl. V. Coroll. I.), que l'on pouroit ſubſtituer y^p à x^p, il ne reſte donc plus qu'à faire voir qu'on peut ſubſtituer l. y à l. x c'eſt-à-dire que l'on a

$$y^p \operatorname{l.} x\, F'\left(\frac{x}{y}\right)=y^p \operatorname{l.} y\, F'\left(\frac{x}{y}\right),\; y^p(\operatorname{l.} y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)=y^p(\operatorname{l.} x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$$

Mais l'on a $y^p \operatorname{l.} x\, F'\left(\frac{x}{y}\right)=y^p(\operatorname{l.} x+\operatorname{l.} y-\operatorname{l.} y)\, F'\left(\frac{x}{y}\right)=y^p \operatorname{l.} y\, F'\left(\frac{x}{y}\right)$ $+y^p \operatorname{l.}\left(\frac{x}{y}\right) F'\left(\frac{x}{y}\right)$ & (parceque la fonction F eſt arbitraire) $=y^p \operatorname{l.} y\, F'\left(\frac{x}{y}\right)+y^p F\left(\frac{x}{y}\right)$

De même on a $(\operatorname{l.} x)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)=(\operatorname{l.} y+\operatorname{l.} x-\operatorname{l.} y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)=$ $=\left(\operatorname{l.} y+l\frac{x}{y}\right)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)=(l\,y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$ $+2\operatorname{l.} y\, l\frac{x}{y} F'\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$. Donc en ajoutant enſemble ces deux valeurs, on aura $F\left(\frac{x}{y}\right)+\operatorname{l.} x\, F\left(\frac{x}{y}\right)$

$$
\begin{aligned}
+ (\mathrm{l}.x)^2 F''\left(\tfrac{x}{y}\right) = \; & F\left(\tfrac{x}{y}\right) \\
& + F\left(\tfrac{x}{y}\right) + \mathrm{l}.y F'\left(\tfrac{x}{y}\right) \\
& + F\left(\tfrac{x}{y}\right) + 2\,\mathrm{l}.y F'\left(\tfrac{x}{y}\right) + (\mathrm{l}.y)^2 F'\left(\tfrac{x}{y}\right)
\end{aligned}
$$

(ou bien confondant les fonctions arbitraires) $= F\left(\frac{x}{y}\right) + \mathrm{l}.y F'\left(\frac{x}{y}\right) + (\mathrm{l}.y)^2 F''\left(\frac{x}{y}\right)$. Il en feroit de même pour un plus grand nombre de termes, donc &c.

Ceci n'avoit pas besoin d'une démonstration particulière, c'étoit une fuite immédiate du Théorême.

Corollaire I.

Si les racines P, P', P'' . . . *&c.* fe furpaffent toutes les unes les autres de l'unité, c'eft-à-dire que l'on ait $P = P' + 1$, $P' = P'' + 1$ . . . *&c.*, les termes déterminés de l'intégrale générale deviendront

$$\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y\,dy^m}{y^{P+1}} + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y'dy^m}{y^{P+1}} \ldots \&c. + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X dx^m}{x^{P+1}} + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X'dx^m}{x^{P+1}} \ldots \&c.$$

Or fi l'on a $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ . . . *&c.* l'équation du problême XI a non feulement les racines en progreffion arithmétique dont la différence eft 1, mais on a encore $P = m - 1$, donc alors les termes déterminés de l'intégrale feront

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y dy^m}{y^m} + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{Y'dy^m}{y^m} \ldots \&c. + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X\,dx^m}{x^m} + \Psi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^m \frac{X'\,dx^m}{x^m} \ldots \&c.$$

Ce qui revient au cas du problême IX, & donne le même résultat que l'on a déjà trouvé.

Corollaire II.

L'intégrale générale du problême précédent est de la forme $z = K + L \varphi u + M \varphi' u + N \varphi'' u \cdots$ &c. Or j'ai fait voir dans le mémoire qui a pour objet la détermination des fonctions arbitraires, qu'il est toujours possible de déterminer les fonctions de cette équation, de manière qu' elle satisfasse à autant de conditions particulières, analogiques ou non, qu'il y a de fonctions arbitraires, donc il sera toujours possible de construire la surface courbe qui auroit pour équation

$$W + AV + BV' + CV'' + DV''' \cdots \&c. = K$$

quand même les courbes à double courbure données, par lesquelles on seroit obligé de la faire passer & dont le nombre est $= m$, seroient discontinues, & données au hazard dans l'espace.

SUR LA FIGURE DES COLONNES

PAR M. DE LA GRANGE.

1 On a coutume de donner aux colonnes la ſigure d'un conoide qui ait ſa plus grande largeur vers le tiers de ſa hauteur, & qui aille de là en diminuant vers les deux extrémités; d'où réſulte ce qu'on appelle vulgairement le *renflement* & la *diminution* des colonnes; mais perſonne que je ſache n'a encore donné une raiſon ſatisfaiſante de cette pratique; car je ne crois pas qu'on puiſſe regarder comme telle celle que la pluspart des Auteurs, qui ont écrit ſur cette matière, apportent, & qui conſiſte dans la reſſemblance qu'ils prétendent qu'une colonne doit avoir avec le corps humain. Il me paroît au contraire qu'il ſeroit bien plus naturel de faire les colonnes plus minces en haut qu'en bas, & cela à l'imitation des troncs d'arbres qu'on a du néceſſairement employer dans les premiers bâtimens; c'eſt ainſi que les anciens Architectes en ont uſé, comme on le voit par les ouvrages antiques qui ſont reſtés à Rome, dans leſquels la plus grande partie des colonnes commencent à avoir leur diminution dès le bas; mais comme Vitruve qui eſt devenu le legiſlateur des Architectes modernes, préſcrit formellement le *renflement* des colonnes en diſant qu'il faut ajouter quelque choſe à leur milieu (liv. III chap. 2) quoique par la perte qu'on a faite des figures qui étoient jointes à ſon ouvrage, on ignore la méthode dont il s'y prenoit pour tracer la ligne du contour des colonnes, l'uſage de renfler les colonnes au milieu, & de les diminuer aux deux extrémités eſt devenu général, & on ne varie plus que ſur la courbe qui doit former le renflement & la diminution.

Palladio propoſe pour cela un moyen mécanique qui conſiſte à plier tant ſoit peu une règle de bois; Vignole donne deux eſpèces de conſtructions géometriques par leſquelles on peut décrire le profil d' une colonne par pluſieurs points ; enfin M. Blondel a imaginé de faire ſervir à ce deſſein l' inſtrument de Nicomede, en ſorte que le profil de la colonne ait la figure d' une concoide. Il ſeroit très-aiſé d' inventer pluſieurs autres moyens pour remplir le même objet, car tant qu' il n' y a d' autres données que l' epaiſſeur de la colonne aux deux extrémités, & au point du plus grand renflement, il eſt clair que le problême eſt très indéterminé, puiſqu' il ne s' agit que de faire paſſer une ligne courbe & concave vers l' axe par trois points donnés. Mais n' y auroit-il pas dans la nature même de la choſe quelque principe qui pût ſervir à déterminer la queſtion ? Parmi ceux qui ſervent de fondement à l'architecture il n' y en a qu'un ſeul qui ait des regles fixes & invariables, & par conſéquent ſuſceptibles de calcul ; c' eſt la ſolidité ; il faut donc examiner ſi on peut déduire de cette conſidération les conditions néceſſaires pour la détermination & la ſolution du problême dont-il s' agit ; c' eſt l' objet du Mémoire qu' on va lire.

2 Comme les colonnes ſont toujours deſtinées à ſupporter des charges plus ou moins conſidérables, ſuivant les circonſtances où on les emploie, il eſt évident que ſi une colonne eſt trop chargée, elle commencera à ſe courber un peu du côté où la matière fera moins de réſiſtance, après quoi elle ſe caſſera faute d' elaſticité, ſurtout ſi c'eſt une colonne de pierre, ou de briques ; or il n' eſt pas difficile de comprendre que la courbure ſuivant laquelle la colonne ſe pliera ſera différente ſuivant la figure même de la colonne ; de ſorte qu' à hauteurs, & à maſſes égales la force d' une colonne pourra être plus ou moins grande ſuivant la nature de la courbe qui en formera le profil. Ainſi c' eſt un problême de *maximis & minimis* de

déterminer la courbe qui, par ſa rotation autour de ſon axe, formera une colonne capable de ſupporter la plus grande charge poſſible, la hauteur & la maſſe de la colonne étant données ; c' eſt là, ce me ſemble, le véritable point de vue, ſous le quel on doit enviſager la queſtion du *renflement*, & de la *diminution* des colonnes.

3 Quoique la théorie de la force des colonnes entant qu' elle dépend de leur figure ait déja fait le ſujet d' un très beau Mémoire que M. Euler a donné dans le volume de l' Académie de Berlin pour l' année 1757 ; cependant comme le point de vue ſous leſquel cet illuſtre Auteur a diſcuté cette matière eſt différent de celui dans lequel nous nous propoſons de la traiter, nous croyons faire quelque plaiſir aux Géometres en leur communiquant les recherches que nous avons faites ſur un ſujet, qui intereſſe également la Mécanique & l'Analyſe.

4 Soit $A\ M\ B$ (fig. 1) une colonne dreſſée verticalement en A, & chargée à l' autre extremité B par un poids qui l' oblige à ſe courber infiniment peu, enſorte qu' elle prenne la figure $A\ N\ B$. Suppoſons d' abord que cette colonne ſoit d' une figure cilindrique, & que F ſoit la force abſolue qu' elle a dans chaque point pour réſiſter à être pliée, & qui ſera par conſéquent la même par tout, ſuivant la loi générale des corps élaſtiques, cette force croitra en raiſon de l' angle de courbure ; de ſorte que dans l' état $A\ N\ B$, la force de la colonne a un point quelconque N ſera proportionelle à $\frac{K}{\rho}$, en deſignant par ρ le rayon oſculateur de la courbe $A\ N\ B$. D' un autre côté, ſi on nomme P le poids comprimant à l' extrémité B, il eſt facile de voir que le moment de ce poids par rapport au point N ſera exprimé par $P \times M\ N$; de ſorte que la condition de l' equilibre donnera d' abord cette équation $P \times M\ N = \frac{K}{\rho}$ d' où on pourra connoitre

tant la nature de la courbe $A N B$, que la valeur de P.

5 Nommons pour cela les abſciſſes $AM = x$, & les ordonnées $MN = y$; & comme on ſuppoſe que la courbure de la colonne ſoit partout infiniment petite, on aura y infiniment petit par rapport à x & dy infiniment petit par rapport à dx; de ſorte que l'élément de la courbe $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ſera à tres peu près & ſans erreur ſenſible $= dx$. Or on ſait qu'en prenant dx conſtant on a $\rho = \frac{ds^3}{-dx\, d^2y}$; donc on aura dans notre cas $\rho = \frac{dx^2}{-d^2y}$; par conſéquent l'équation à la courbe $A N B$ ſera $Py = -\frac{K\, d^2y}{dx^2}$, c'eſt à dire $Py + \frac{K\, d^2y}{dx^2} = o$.

Il faudra donc intégrer d'abord cette équation, enſuite faire en ſorte que l'expreſſion de y ſoit nulle aux deux points A, & B, c'eſt-à-dire lorſque $x = o$, & lorſque $x = AB$ hauteur de la colonne. Or l'intégration eſt facile, à cauſe que P & K ſont des quantités conſtantes, & l'on aura en général $y = f\, \mathit{ſin.} \left(x \sqrt{\frac{P}{K}} + g\right)$ f & g étant des conſtantes arbitraires; donc ſi on nomme a la hauteur donnée de la colonne, il faudra que l'on ait f ſin $g = o$, & $f\, \mathit{ſin.} \left(\sqrt{\frac{P}{K}} + g\right) = o$; donc puiſqu'on ne peut pas faire $f = o$, ce qui donneroit $y = o$, il faudra faire d'abord $g = o$, & enſuite il faudra encore que l'on ait $\mathit{ſin.} \left(a \sqrt{\frac{P}{K}}\right) = o$; & par conſéquent que $a \sqrt{\frac{P}{K}} = m\, \pi$, π étant l'angle de $180°$, & m un nombre quelconque entier ; d'où l'on tire $P = \frac{m^2 \pi^2 K}{a^2}$, l'équation à la courbe $A N B$ deviendra par la $y = f\ \mathit{sin.} \left(\frac{m \pi x}{a}\right)$, où la constante f demeure arbitraire, & exprime la plus grande valeur de y.

6 Si on fait $m = 1$, on aura $y = f\ \mathrm{sin}\ \frac{\pi x}{a}$, d'où l'on voit que la courbe $A N B$ ne coupe l'axe qu'aux deux extrémités A, & B ; & le poids requis pour donner à la colonne cette courbure sera $\frac{\pi^2 K}{a^2}$. Si $m = 2$, on aura $y = f\ \mathit{sin.}\ \frac{2 \pi x}{a}$, & la courbe coupera l'axe au point où $x = \frac{a}{2}$, c'est à dire au point du milieu C, ensorte que la colonne prendra la figure 2 ; mais il faudra pour cela que le poids P soit $= \frac{4 \pi^2 K}{a^2}$, c'est-à-dire quadruple du précédent. Si on faisoit $m = 3$, on auroit $y = f\ \mathit{sin.}\ \frac{3 \pi x}{a}$, de sorte que la courbe couperoit l'axe aux points où $x = \frac{a}{3}$, & $x = \frac{2 a}{3}$ & seroit semblable à la figure 3, or pour que la colonne soit pliée de cette manière il faudra que le poids P soit $= \frac{9 \pi^2 K}{a^2}$, c'est-à-dire neuf fois plus grand que le premier ; & ainsi de suite.

7 Maintenant puiſque le plus petit poids qui ſoit en état de faire plier la colonne eſt $\frac{\pi^2 K}{a^2}$, il ſemble qu'on en peut conclure que tout poids qui ſera moindre que celui-ci ne fera abſolument aucun effet, & qu'ainſi on doit regarder la quantité $\frac{\pi^2 K}{a^2}$ comme la vraie meſure de la force de la colonne cylindrique $A\ B$. C'eſt par ce principe que M.r Euler a déterminé dans le Mémoire cité la force de pluſieurs ſortes de colonnes tant cylindriques que paraboloidiques, & ce ſera auſſi ſur le meme principe que nous fonderons nos recherches ſur la figure qu'on doit donner aux colonnes pour qu'elles aient la plus grande force poſſible; mais avant d'en faire uſage il eſt bon d'examiner ce qui doit arriver lorſque le poids ſera un peu différent de $\frac{\pi^2 K}{a^2}$; pour cela il faut déterminer rigoureuſement la nature de la courbe $A\ N\ B$ ſans negliger la petite différence qu'il y a entre l'elément de l'arc $d\,s$, & celui de l'abſciſſe $d\,x$.

8 Qu'on ſubſtitue donc dans l'équation $P\,y = \frac{K}{\rho}$ de l'art. 4 à la place de ρ ſa valeur rigoureuſe $\frac{d\,s^3}{-\,dx\,d^2y}$, & l'on aura celle-ci $P\,y + \frac{K\,d\,x\,d^2y}{d\,s^3} = o$ laquelle etant multipliée par dy & enſuite intégrée donne $\frac{Py^2}{2} - \frac{K\,d\,x}{d\,s} =$ à une conſtante. Pour determiner cette conſtante ſoit f la plus grande valeur de y, & comme on doit avoir au point du

du *maximum* $dy = o$, & par conséquent $ds = dx$, on aura pour la valeur de la quantité $\frac{Py^2}{2} - \frac{Kdx}{ds}$ dans ce point, $\frac{Pf^2}{2} - K$, qui sera donc la constante cherchée. Ainsi l'équation deviendra $\frac{P}{2}\left(K^2 - y^2\right) = K\left(1 - \frac{dx}{ds}\right)$; mais $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$; donc $\frac{P}{2}\left(K^2 - y^2\right) = K \left(1 - \frac{\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}\right)$ ou bien en faisant $\frac{dy}{ds} = p$, $\frac{P}{2}\left(f^2 - y^2\right) = K\left(1 - \sqrt{(1 - p^2)}\right)$ d'où l'on tire $p = \sqrt{\left(\frac{P}{K}(f^2 - y^2) - \frac{P^2}{4K^2}(f^2 - y^2)^2\right)}$ donc, à cause de $ds = \frac{dy}{p}$, $ds = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{P}{K}(f^2-y^2) - \frac{P^2}{4K^2}(f^2-y^2)^2\right)}}$.

On integrera donc cette équation en sorte que y soit $= o$ lorsque $s = o$, ensuite on supposera aussi $y = o$ lorsque $s = a$; & cette dernière condition servira à déterminer la valeur de P.

8. Puisque la plus grande valeur de y est f, on peut supposer $y = f \sin. \varphi$, & substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{P}{K} - \frac{P^2 f^2}{4K^2} \cos. \varphi^2\right)}}$ par laquelle on déterminera la valeur de φ en s; & comme on veut que y soit nul lorsque $s = o$, & lorsque $s = a$ il faudra que φ soit $= o$ lorsque $s = o$, & que $\varphi = m\pi$ lorsque $s = a$. Lorsque $m = 1$ la courbe n'aura qu'un seul ventre comme dans la fig. 1; en faisant $m = 2$ elle aura deux ventres comme dans la fig. 2; & ainsi de suite.

9. Si f eſt une quantité infiniment petite, on a à très peu près $ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$, & integrant $s = \frac{\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$; d'où faiſant $s = a$, & $\varphi = m\pi$, on a le même réſultat que ci-deſſus art. 5. Mais ſi f n'eſt pas une quantité infiniment petite, alors l'équation de l'art. préc. n'eſt point ſuſceptible d'une intégrale exacte, car la différentielle $\frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{P}{K} - \frac{P^2 f^2 \cos\varphi^2}{4K^2}\right)}}$ dépend en général de la rectification des ſections coniques. Mais en employant les ſeries on aura

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{Pf^2 \cos.\varphi^2}{2.\ 4\ K} + \frac{3P^2 f^4 \cos.\varphi^4}{2.\ 4.\ 16\ K^2} + \frac{3.5 P^3 f^6 \cos.\varphi^6}{2.4.6.\ 64 K^3} + \&c\right)$$

Or les différentielles $\cos.\varphi^2\, d\varphi$, $\cos.\varphi^4\, d\varphi$ &c.: ſont toutes intégrables, comme l'on ſait, & pour les intégrer il n'y a qu'à changer les puiſſances $\cos.\varphi$ en des coſinus d'angles multiples de φ par les formules connues,

$$\cos.\varphi^2 = \frac{\cos.2\varphi + 1}{2},$$

$$\cos.\varphi^4 = \frac{\cos.4\varphi + 4\cos.2\varphi + \frac{4.\ 3.}{2.\ 2.}}{8}$$

$$\cos.\varphi^6 = \frac{\cos.6\varphi + 6\ \cos.4\varphi + \frac{6.\ 5}{2}\ \cos.2\varphi + \frac{6.\ 5.\ 4}{2.\ 2\ \ 3}}{32}$$

&c.

Mais comme par l'intégration tous les coſinus deviennent des ſinus, il eſt clair qu'en faiſant $\varphi = m\pi$ tous ces termes évanouiront d'eux mêmes; c'eſt pourquoi il ſuffira pour notre objet de considérer les termes tous constantes des valeurs de $cos.\ \varphi^2$, $cos.\ \varphi^4$ &c.: & de les substituer à la place de ces mêmes valeurs dans l' équation ci-dessus ; ce qui la réduira à celle-ci :

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{P f^2}{4\,(8K)} + \frac{9\ P^2 f^4}{4.16\,(32\,K^2)} + \frac{9.25\,P^3 f^6}{4.16.36\,(128\,K^3)} + \&c.\right)$$

qui étant intégrée, donnera après y avoir fait $s = a$, & $\varphi = m\ \pi$,

$$a = \frac{m\pi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}\left(1 + \frac{P f^2}{4\,(8K)} + \frac{9\,P^2 f^4}{4.16\,(32\,K^2)} + \frac{9.25.P^3 f^6}{4.16.36\,(128\,K^3)} + \&c.\right)$$

par où l' on pourra déterminer la valeur de f pour chaque valeur donnée de P & de a.

10. On voit d' abord par l' équation précédente que tant que f n' est pas nul a est nécessairement $> \frac{m\ \pi}{\sqrt{\frac{P}{K}}}$; & par conséquent $P > \frac{m^2\ \pi^2 K}{a^2}$; d' où il s' ensuit que la colonne ne peut être courbée que par une charge plus grande que $\frac{m^2 \pi^2 K}{a^2}$. En effet si on met l' équation ci-dessus sous cette forme.

$$1 - \frac{a}{m\ \pi}\sqrt{\frac{P}{K}} + \frac{P f^2}{4(8K)} + \frac{9\ P^2 f^4}{4.16(32K^2)} + \frac{9.\ 25\ P^3 f^6}{4.\ 16.36\ (128\ K^3)} + \&c.: = 0$$

& qu' on regarde la valeur de f^2 comme l' inconnue qu' il s' agit de déterminer, il est clair que puisque les quantités P & K sont positives de leur propre nature, la quantité f^2 n' aura que des valeurs négatives, ou imaginaires tant que $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} > 0$, que cette quantité aura une valeur nulle lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} = 0$, toutes les autres étant négatives ou imaginaires ; qu' enfin la quantité f^2 aura toujours une ſeule valeur poſitive lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} < 0$. Donc 1° la quantité f ſera toujours imaginaire lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} > 0$, c' eſt-à-dire $P < \frac{m^2\pi^2K}{a^2}$. 2° la quantité f aura toujours deux valeurs réelles & égales, mais l' une poſitive & l' autre negative, lorſque $1 - \frac{a}{m\pi}\sqrt{\frac{P}{K}} < 0$, ſçavoir $P > \frac{m^2\pi^2K}{a^2}$; & n' aura point d' autres valeurs réelles. D' où il s' enſuit que tant que P ſera $< \frac{\pi^2K}{a^2}$, la colonne ne pourra pas être courbée ; que tant que P ſera renfermée entre les limites $\frac{\pi^2K}{a^2}$ & $\frac{4\pi^2K}{a^2}$, la colonne ſera courbée, mais en ne formant qu' un ſeul ventre ; que tant que P ſera entre les limites $\frac{4\pi^2K}{a^2}$ & $\frac{9\pi^2K}{a^2}$, la colonne ſera néceſſairement courbée & pourra former ou un ſeul ventre, ou deux ; & ainſi de ſuite.

11. Nous avons donc démontré très-rigoureuſement que la quantité $\frac{\pi^2K}{a^2}$ eſt la limite des poids que la colonne peut ſupporter ſans ſe plier ; & comme cette quantité eſt égale à la valeur que doit avoir la force P lorſque f eſt nulle, ou ce qui revient au même infiniment petite, il s' enſuit qu' on peut la trouver directement en ſuppoſant d'abord y infiniment petite dans l'équation de la courbe, comme on l' a fait dans l' art. 5, & faiſant enſorte que l' intégrale de cette équation ſatisfaſſe aux deux conditions de $y = 0$

lorſque $s = o$ & $s = a$, ou bien lorſque $x = o$ & $x = a$, parceque dans le cas de y infiniment petite, l'arc s ſe confond ſenſiblement avec l'abſciſſe x. C'eſt de cette manière qu'on pourra déterminer la limite dont il s'agit pour les colonnes qui ne feront pas d'une épaiſſeur uniforme & dont l'équation feroit abſolument intraitable par les méthodes connues ſans la ſuppoſition de y infiniment petite.

12. En effet, ſi on ſuppoſe que la colonne ne ſoit pas cylindrique, mais qu'elle ait la forme d'un conoide formé par la rotation d'une courbe quelconque autour de ſon axe, lequel ſera par conſéquent auſſi l'axe de la colonne, & qu'on nomme z l'ordonnée de cette courbe qui répond à une abſciſſe quelconque x, enſorte qu'on ait une équation entre z & x, qui ſerve à déterminer z en x; il eſt clair que $2z$ ſera le diamêtre de la groſſeur de la colonne à la hauteur x depuis la baſe, & il n'eſt pas moins évident que la force abſolue avec laquelle la colonne réſiſtera dans cet endroit à être courbée ſera d'autant plus grande que la quantité $2z$ ſera plus grande; de manière que cette force pourra être regardée comme une fonction de z & per conſéquent auſſi comme une fonction de x, que nous déſignerons en général dans la ſuite par X. Ainſi il n'y aura qu'à mettre ſimplement X à la place de K dans l'équation de l'art. 5, & l'on aura

$$Py + \frac{X d^2 y}{d x^2} = o$$

par l'équation de la courbe ſuivant laquelle la colonne ſera pliée par le poids P dont on la ſuppoſe chargée, en ſuppoſant que cette courbe ſoit infiniment peu différente de la ligne droite.

13. Or puiſque dans le cas ou X étoit une quantité conſtante K on a trouvé en général pour la valeur de y

cette expreſſion $y = f\ \text{ſin.}\left(x\sqrt{\frac{P}{K}} + g\right)$, ſuppoſons maintenant $y = \xi\ \text{ſin.}\ \varphi$, ξ, & φ étant des fonctions inconnues de x, & l'on aura en différentiant $dy = \text{ſin.}\ \varphi\ d\xi + \xi\ \cos.\ \varphi\ d\varphi$, $d^2y = \text{ſin.}\ \varphi\ d^2\xi + 2\ \cos.\ \varphi\ d\varphi\ d\xi + \xi\ \cos.\ \varphi\ d^2\varphi - \xi\ \text{ſin.}\ \varphi\ d\varphi^2$; donc ſubſtituant ces valeurs dans l'équation de l'art. préc. on aura

$$\left(P\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{\xi\, d^2\varphi}{dx^2}\right)\right)\text{ſin.}\ \varphi$$

$$+ X\left(\frac{2\,d\varphi\, d\xi}{dx^2} + \frac{\xi\, d^2\varphi}{dx^2}\right)\cos.\ \varphi = 0$$

Comme nous avons introduit deux variables indéterminées ξ & φ, nous pouvons faire diſparoître dans cette équation les *ſin.* & *cos.* de φ, en la partageant en ces deux-ci

$$P\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{\xi\, d\varphi^2}{dx^2}\right) = 0$$

$$\frac{2\,d\varphi\, d\xi}{dx^2} + \frac{\xi\, d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

la ſeconde étant multipliée par $\xi\, dx$, & enſuite intégrée donne $\frac{\xi^2 d\varphi}{dx} = h$, d'où l'on tire $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{h}{\xi^2}$ & $\varphi = h\int\frac{dx}{\xi^2}$, h étant une conſtante arbitraire. Subſtituant cette valeur dans la première équation elle deviendra

$$P\xi + X\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{h^2}{\xi^3}\right) = 0$$

par laquelle il faudra déterminer la variable ξ; enſuite de quoi on aura $y = \xi\ \text{ſin.}\left(h\int\frac{dx}{\xi^2}\right)$.

Soit pour plus de ſimplicité $\xi^2 = h\, u$, on aura en ſubſtituant cette valeur dans l'équation en ξ celle-ci :

$$4\, P\, u^2 + X\left(\frac{2ud^2u - du^2}{dx^2} - 4\right) = 0$$

& la valeur de y ſera $y = \sqrt{(hu)}.\ \text{ſin.}\int\frac{dx}{u}$.

14 On remarquera d'abord à l'égard de cette expreſſion de y qu'elle contient deux conſtantes arbitraires, l'une c'eſt la conſtante h qui ne ſe trouve point dans l'équation en u; l'autre c'eſt celle qui eſt virtuellement renfermée dans l'intégrale $\int\frac{dx}{u}$, c'eſt pourquoi il ſuffira d'y ſubſtituer une valeur quelconque de u qui ſatisfaſſe à l'équation en u ſans s'embaraſſer ſi elle eſt une intégrale complette de cette équation ou non.

Un autre avantage de la même expreſſion de y, c'eſt qu'elle eſt très-commode pour la dérermination du poids P; car ſuivant les conditions du problême il faut, 1.° que y ſoit $= 0$ lorſque $x = o$, condition qu'on remplira en prenant l'intégrale de $\int\frac{dx}{u}$ enſorte qu'elle évanouiſſe lorſque $x = o$. 2.° Il faut que y ſoit auſſi $= o$ lorſque $x = a$; & pour remplir cette condition il faudra que la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx}{u}$ qui répond à $x = a$ ſoit $= m\,\pi$; car alors $\mathit{ſin.}\int\frac{dx}{u}$ ſera nul. Or comme la quantité u ne doit point contenir de conſtantes arbitraires, il eſt viſible que cette dernière condition donnera une équation entre les quantités P & a, par laquelle on pourra déterminer P.

Quant au nombre entier m qui demeure indéterminé, il eſt clair, par ce qu'on a vu plus haut, qu'il ſera toujours égal au nombre des ventres que la colonne formera en ſe courbant par la preſſion du poids P; donc pour avoir la limite des fardeaux que la colonne pourra ſupporter ſans ſe courber d'une manière quelconque, il faudra toujours prendre pour m le nombre entier qui rendra la valeur de P la plus petite; & cette valeur ſera la limite cherchée.

15. L'hypothese la plus simple qu'on puisse faire sur la figure des colonnes lorsqu'elles ne doivent pas être cylindriques, est de les supposer formées par la rotation d'une section conique autour de son axe; or l'équation générale d'une section conique où les abscisses sont prises dans l'axe, est comme l'on sait $z^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, x étant les abscisses, & z les ordonnées; & α, β, γ étant des constantes arbitraires; ainsi nous adopterons d'abord cette équation entre les variables z & x, & nous chercherons quelle est la valeur de P qui en résultera; mais pour cela il faut encore établir la loi qui doit avoir lieu entre les rayons z & la force X avec laquelle la colonne résiste à se courber (art. 12).

16. Il paroit que la théorie & l'expérience s'accordent asses à faire X proportionelle à z^4; comme on peut le voir par les ouvrages où cette matière est traitée; ainsi nous supposerons en général $X = K z^4$; ce qui donnera dans le cas de l'art. préc. $X = K(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2$; ce qui étant substitué dans l'équation en u de l'art. 13 on aura $4 P u^2 + K(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 \left(\frac{2ud^2u - du^2}{dx^2} - 4\right) = 0$ équation à laquelle on peut satisfaire en faisant $u = g(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = g z^2$; car on aura $\frac{2ud^2u - du^2}{dx^2} = 4 g^2 \gamma (\alpha + \beta x + \gamma x^2) - g^2 (\beta + 2\gamma x)^2 = g^2 (4\alpha\gamma - \beta^2)$; de sorte qu'après les substitutions on aura $4 P g^2 + K(g^2(4\alpha\gamma - \beta^2) - 4) = 0$. d'où l'on tire

$$g = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{P}{K} + \alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)}}.$$

Cette valeur de u n'est, comme l'on voit, qu'une intégrale particulière; mais elle suffit pour notre objet, comme on l'a fait voir plus haut (art. 14).

Main-

17 Maintenant on aura $\int \frac{dx}{u} = \int \frac{dx}{g\,(\alpha + \beta\, x + \gamma\, x^2)}$;
donc ſi on nomme A l'intégrale de $\frac{dx}{\alpha + \beta\, x + \gamma\, x^2}$
c'eſt-à-dire de $\frac{dx}{z^2}$, priſe enſorte qu'elle ſoit nulle lorſque $x = o$ & complette lorſque $x = a$, on aura $\frac{A}{g}$ pour la valeur de $\int \frac{du}{u}$ répondante à $x = a$; on fera donc (art. 14) $\frac{A}{g} = m\ \pi$; & on tirera de là

$$P = \left(\frac{\beta^2}{4} - \alpha\ \gamma + \frac{m^2\ \pi^2}{A^2} \right) K$$

Telle eſt donc la valeur du poids P qui pourra faire plier la colonne infiniment peu, & comme cette valeur augmente à méſure que le nombre m eſt plus grand, on fera $m = 1$, pour avoir la limite des poids qui pourront être ſupportés par la colonne ſans qu'elle ſoit ſujette à ſe courber en aucune manière; ainſi la force de la colonne ſera d'autant plus grande que la valeur de P ſera plus grande; d'où l'on voit que la force augmentera à méſure que la quantité $\frac{\beta^2}{4} - \alpha\ \gamma$ croitra, & que la quantité A décroitra; ainſi ce ſera une queſtion de *maximis & minimis* de déterminer les valeurs des conſtantes α, β, γ pour que la force P ſoit la plus grande; mais comme cette force doit néceſſairement augmenter à méſure que les dimenſions de la colonne augmentent, on ne peut chercher qu'un *maximum* rélatif à la maſſe de la colonne, en ſuppoſant ſa hauteur donnée; c'eſt ſous ce point de vue que nous allons enviſager la queſtion.

18 Pour commencer par les cas les plus ſimples nous ſuppoſerons d' abord, que l'on ait $\frac{\beta^2}{4} - \alpha' \gamma = o$, auquel cas l' équation du profil de la colonne deviendra $z^2 = (\sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma})^2$, & tirant la racine carrée $z = \sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma}$, qui eſt à une ligne droite; enſorte que dans ce cas la figure de la colonne ſera celle d' un cone tronqué; faiſons pour plus de commodité, $\sqrt{\alpha} = b$, $\sqrt{\gamma} = c$, & par conſéquent $\beta = 2\,b\,c$; on aura donc $z = b + c\,x$ & l' intégrale de $\frac{dx}{z^2}$ priſe de manière qu' elle ſoit nulle lorſque $x = o$, ſera $-\frac{1}{c}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{b}\right)$; donc faiſant $x = a$ on aura $A = -\frac{1}{c}\left(\frac{1}{b+ca} - \frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b(b+ca)} = \frac{a}{b\,b\,1}$, en faiſant $b' = b + ca$; où l' on remarquera que b eſt le rayon de la baſe inférieure de la colonne, & b' celui de la baſe ſupérieure; ainſi on aura dans ce cas $P = \frac{\pi^2 K\, b^2\, b'^2}{a^2}$.

Maintenant pour avoir la ſolidité de la colonne on remarquera que l' aire du cercle dont le rayon eſt z, étant exprimée par πz^2, il n' y aura qu' à prendre l' intégrale de $\pi z^2\, d x$, depuis $x = o$ juſqu' à $x = o$, laquelle ſera $\frac{\pi}{3c}\left((b + c\,a)^3 - b^3\right)$, c' eſt-à-dire (à cauſe de $b + c\,a = b'$ & $c = \frac{b' - b}{a}$) $\frac{\pi\,a}{3}(b^2 + bb' + b'^2)$. Ainſi le rapport du poids que la colonne eſt en état de ſupporter au carré du poids même de la colonne ſera exprimé par $\frac{9\,K\,b^2\,b'^2}{a^4\,(b^2 + b\,b' + b'^2)^2}$ quantité qui ne dépend que du rapport des rayons b & b' des deux baſes; en effet faiſant $\frac{b'}{b} = r$, la quantité précédente deviendra

$$\frac{9\,K\,r^2}{a^4\,(1 + r + r^2)^2} = \frac{9\,K}{a^4\,(1+r+\frac{1}{r})^2}.$$

Cette quantité ſera donc la plus grande lorſque la valeur de $1 + r + \frac{1}{r}$ ſera la plus petite, ce qui aura lieu, en faiſant $dr - \frac{dr}{r^2} = o$, ou bien $1 - \frac{1}{r^2} = o$ ſavoir $r = 1$, & par conſéquent $b = b'$. D' où l' on doit conclure que la force d' une colonne de figure conique, relativement à ſa ſolidité, ſera toujours la plus grande lorſque les deux baſes ſeront égales, c' eſt-à-dire lorſque la colonne ſera cylindrique. Ainſi pour cette conſidération les colonnes cylindriques doivent être préférables aux coniques.

19 Nommons en général s la ſolidité de la colonne, qui eſt égale à l' intégrale de $\pi\, z^2\, d\, x$ priſe de manière qu' elle ſoit nulle lorſque $x = o$, & complette lorſque $x = a$, & le rapport de P à S^2, c' eſt-à-dire la valeur de $\frac{P}{S^2}$ pourra être regardée comme exprimant la force relative d' une colonne; cette force ſera donc, pour les colonnes coniques, où les diamêtres des baſes ſont entr' elles comme r à 1, $= \frac{9\,K}{a^4\,(1 + r + \frac{1}{r})^2}$, & pour les colonnes cylindriques $= \frac{K}{a^4}$; ce qui ſert à déterminer la valeur de la conſtante K; c' eſt pourquoi ſi on fait $K = a^4 F$, la conſtante F exprimera la force relative d' une colonne cylindrique de même hauteur.

20 Suppoſons maintenant $\gamma = o$, ce qui donnera $z^2 = \alpha + \beta\, x$ qui eſt l' équation d' une parabole, l' intégrale de $\frac{dx}{z^2} = \frac{dx}{\alpha + \beta\, x}$ ſera en général $\frac{1}{\beta}\, l.\, (\alpha+\beta x)$;

d'où en complétant & faisant $x = a$ on aura $A = \frac{1}{\beta}\, l.\left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)$; donc $P = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{l.^2\left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)}\right)\beta^2 K.$

Maintenant pour avoir s on intégrera la formule $\pi z^2 dx = \pi(\alpha + \beta x)\, dx$, & complétant l'intégrale comme on l'a enseigné plus haut on aura $s = \pi\left(\alpha + \frac{\beta a}{2}\right) a$; donc

$$\frac{P}{s^2} = \frac{K}{a^2\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{a}{2}\right)^2} \times \left(\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{l.^2\left(1 + \frac{\beta a}{\alpha}\right)}\right).$$

Faisons $\frac{\beta a}{\alpha} = r$, & mettons $F a^4$ à la place de K, on aura pour la force relative de la colonne parabolique l'expression $\frac{P}{S^2} = \frac{F}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right)^2} \times \left(\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{l.^2(1+r)}\right)$, F étant celle de la colonne cylindrique de même hauteur.

21 Cherchons le *maximum* de cette expression, & la différentiation donnera cette équation transcendente en r $\frac{l.^3(1+r)}{4\pi^2} + l.(1+r) = \frac{r(2+r)}{2(1+r)}$; d'où il faudra tirer r. Pour y parvenir je fais $l.(1+r) = t$; & par conséquent $r = e^t - 1$; j'aurai en substituant

$$\frac{t^3}{4\pi^2} + t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Je réduis en série les quantités exponentielles, ce qui me donne $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = t + \frac{t^3}{2.\,3} + \frac{t^5}{2.\,3.\,4.\,5} + \&c.$ de sorte que l'équation deviendra

$$\left(\frac{1}{2.\,3} - \frac{1}{4\pi^2}\right) t^3 + \frac{t^5}{2.3.4.5} + \frac{t^7}{2.\,3..\,7} + \&c. = 0$$

Cette équation donne d'abord $t = o$, ensuite étant divisée par t^3 elle devient

$$\frac{1}{2.\ 3} - \frac{1}{4\ \pi^2} + \frac{t^2}{2.\ 3.\ 4.\ 5} + \frac{t^4}{2.\ 3 \ldots 7} + \&c. = o$$

laquelle, à cause de $\pi > 3$, aura tous ses termes positifs, ensorte que comme elle ne contient que des puissances paires de t, elle ne pourra avoir aucune racine réelle, puisque t^2 ne sauroit avoir aucune valeur réelle positive. Ainsi $t = o$ sera la seule racine réelle de l'équation dont il s'agit, par conséquent la valeur cherchée de r sera aussi $= o$; ce qui donnera $\frac{\beta a}{\alpha} = o$ & par conséquent $\beta = o$ c'est à-dire la colonne cylindrique. Faisons donc $r = o$ dans l'expression de $\frac{P}{S}$, ou plutôt r infiniment petit & elle se réduira à F; or si on donnoit à r une toute autre valeur, comme si on faisoit $r = \infty$, on trouveroit $\frac{P}{S} = \frac{F}{\pi^2}$ valeur moindre que la précédente; ce qui prouve que le cas de $r = o$ est celui du *maximum*; d'où il faut conclure que la force est toujours plus grande dans les colonnes cylindriques que dans les paraboliques.

22 Considérons présentement l'équation générale $z^2 = \alpha + \beta\ x + \gamma\ x^2$ laquelle représente une section conique quelconque rapportée à l'un des axes, & faisant $\beta = 2\ b\ \gamma$, $\alpha = c\ \gamma$, on pourra la mettre sous cette forme $z^2 = \gamma\ ((x + b)^2 + c - b^2)$ laquelle, si $c - b^2$ est une quantité négative, représentera une hyperbole rapportée à son grand axe lorsque γ est positive, & une ellipse lorsque γ est négative; mais si $c - b^2$ est une quantité positive, γ devra être positive & l'équation sera à une hyperbole rapportée à son axe conjugé ensorte que la colonne, au lieu d'être renflée, se trouvera diminuée au

milieu. C'est pourquoi il suffira d'examiner le premier cas où $c - b^2 = - r^2$, en sorte que l'on ait $z^2 = \gamma ((x + b)^2 - r^2)$; & nous remarquerons d'abord ici que puisque la hauteur de la colonne est $= a$, il faut, pour que la courbe qui répond à la portion d'axe a soit toute réelle, que l'on ait 1°, si $\gamma > o$, $b = o$ ou $> r$ (r & supposée une quantité positive) 2° si $\gamma < o$, $\pm b < r$, & $a + b < r$; ($\pm b$ dénotant la valeur de b prise positivement).

Cela posé on aura $\frac{dx}{z^2} = \frac{dx}{2\gamma r(x+b-r)} - \frac{dx}{2\gamma r(x+b+r)}$, dont l'intégrale prise ensorte qu'elle evanouisse lorsque $x = o$ sera $\frac{1}{2\gamma r}\ l.\left(\frac{x+b-r}{x+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)$; donc faisant $x = a$, on aura $A = \frac{1}{2\gamma r}\ l.\left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)$; de là à cause de $\frac{\beta^2}{4} - \alpha\gamma = \gamma^2 (b^2 - c) = \gamma^2 r^2$, l'expression P deviendra (article 17) $P = \gamma^2 r^2$
$$\left\{1 + \frac{4\pi^2}{l.^2\left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)}\right\} K.$$

23 Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de S par l'intégration de la formule $\pi z^2 dx = \pi\gamma ((x+b)^2 - r^2) dx$, laquelle donne l'intégrale $\pi\gamma \left(\frac{(x+b)^3 - b^3}{3} - r^2 x\right)$ $= \pi\gamma x \left(\frac{x^2}{3} + xb + b^2 - r^2\right)$; de sorte qu'en faisant $x = a$, on aura $S = \pi\gamma a \left(\frac{a^2}{3} + ab + b^2 - r^2\right)$;

donc enfin
$$\frac{P}{S^2} = \frac{\left\{\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2\left(\frac{a+b-r}{a+b+r} \times \frac{b+r}{b-r}\right)}\right\} \frac{K r^2}{a^2}}{\left(\frac{}{3} + ab + b^2 - r^2\right)^2}$$

Faisons encore $b = pa$, $r = qa$, & mettons F à la place de $\frac{K}{a^4}$ on aura

$$\frac{P}{s^2} = \frac{\left\{\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2\left(\frac{1+p-q}{1+p+q} \times \frac{p+q}{p-q}\right)}\right\} F q^2}{\left(\frac{1}{3} + p + p^2 - q^2\right)^2},$$

expression qui peut se simplifier encore en supposant $p + p^2 - q^2 = t$ ce qui la réduira à celle-ci :

$$\frac{F q^2 \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2\left(\frac{t+q}{t-q}\right)}\right)}{\left(\frac{1}{3} + t\right)^2},$$

qui ne contient que deux indéterminées t & q.

24. Puisque $q = \frac{r}{a}$, il est clair que la quantité q devra toujours être positive; voyons donc d'abord qu'elle sera la valeur de q qui rendra l'expression précédente au *maximum*. Pour cela il suffit de rendre un *maximum* la quantité $q^2 \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{l.^2\left(\frac{t+q}{t-q}\right)}\right)$; dont la différentielle logarithmique étant égale à zéro donnera l'équation

$$\frac{1}{q} - \frac{8t}{(t-q)^2} \times \frac{1}{\frac{1}{\pi^2}\, l.^3\left(\frac{t+q}{t-q}\right) + 4\, l.\left(\frac{t+q}{t-q}\right)} = 0$$

d'où il faudra tirer le valeur de q.

Faisons pour cela $l.\left(\frac{t+q}{t-q}\right) = z$ donc $\frac{t+q}{t-q} = c^z$, & $q = \frac{c^z - 1}{c^z + 1}\, t$, l'équation précédente deviendra

$\frac{z^3}{\pi^2} + 4z = \frac{8qt}{(t-q)^2} = 2\left(e^{2z} - 1\right)$; donc réduiſant l' exponentielle e^{2z} en ſérie on aura l' équation
$$z^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi^2}\right) z^3 + \frac{16}{2.\,3.\,4} z^4 + \&c. = 0$$
laquelle donne d' abord $z = o$, & à cauſe que tous ſes termes ſont poſitifs ne ſauroit avoir aucune racine réelle plus grande que zéro. Mais nous allons prouver que cette équation ne peut avoir non plus de racine réelle négative. Pour cela je reprends la forme $\frac{z^3}{2\pi^2} + 2z = e^{2z} - 1$;
& je fais $z = -\frac{u}{2}$, j' aurai celle-ci: $\frac{u^3}{16\pi^2} = 1 - u - \frac{1}{e^u}$.
Il eſt viſible qu' en faiſant $u = o$, les deux membres de cette équation deviennent nuls à la fois, & par conſéquent égaux entr' eux; mais à méſure que u augmente, le premier membre augmente auſſi, & le ſecond diminue; donc il ſera impoſſible que l' équation puiſſe jamais avoir lieu tant que u ſera > 0; pour prouver que le ſecond membre diminue à méſure que u augmente il n' y a qu'à prendre ſa différentielle, laquelle eſt $-\left(1 - \frac{1}{e^u}\right) du$;
or comme e eſt > 1 il eſt viſible que e^u ſera toujours auſſi > 1 tant que $u > 0$ dont $1 - \frac{1}{e^u}$ ſera toujours un nombre poſitif, par conſéquent la différentielle dont il s' agit ſera toujours négative; donc &c.

25. Nous venons donc de démontrer qu' il n' y a qu'une ſeule valeur réelle de z ou de $l.\,\frac{t+q}{t-q}$ qui puiſſe rendre la formule propoſée un *maximum* ou un *minimum*; cette valeur eſt $l.\,\frac{t+q}{t-q} = 0$, d' où l' on tire $\frac{t+q}{t-q} = 1$,

& de

& de la $q = o$. Qu'on faſſe donc dans l'expreſſion de $\frac{P}{s^2}$, $q = o$, ou ſeulement infiniment petit, elle deviendra, à cauſe de $l.\left(\frac{t+q}{t-q}\right) = l\,\frac{1+\frac{q}{t}}{1-\frac{q}{t}} = \frac{2q}{t}$ à très-peu près, $\frac{P}{s^2} = \frac{F\,t^2}{(\frac{1}{3}+t)^2}$; pour voir maintenant ſi cette valeur eſt un *maximum* ou un *minimum*, qu'on faſſe par exemple $q = t$ on aura $l\,\frac{t+q}{t-q} = l\,\infty = \infty$; de ſorte que l'expreſſion de $\frac{P}{s^2}$ ſe réduira à celle-ci $\frac{F\,t^2}{\pi^2\left(\frac{1}{3}+t\right)^2}$, qui eſt évidemment plus petite que la précédente, à cauſe de $\pi > 1$.

Quant aux valeurs imaginaires de z, c'eſt-à-dire de $l.\frac{t+q}{t-q}$, il eſt clair qu'elles doivent être rejetées, parce-qu'elles rendroient toute la valeur de $\frac{P}{s^2}$ imaginaire, il n'y a que le ſeul cas où z ſeroit de la forme $\mu\,\sqrt{-1}$, dans lequel $\frac{P}{s^2}$ auroit néanmoins une valeur réelle; or ce cas aura lieu quand $\frac{t+q}{t-q} = -1$, c'eſt-à-dire lorſque $q = \infty$: car alors on aura $l.\frac{t+q}{t-q} = l - 1 = \pi\,\sqrt{-1}$ & l'expreſſion de $\frac{P}{s^2}$ deviendra $\frac{F\,q^2\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2}\right)}{\left(\frac{1}{3}+t\right)^2}$ laquelle eſt, à la vérité, toute réelle; mais comme elle eſt en même tems négative, ce qui eſt abſurde, on voit que le cas dont-il s'agit doit être également rejeté.

26. Le *maximum* de la quantité $\frac{P}{S^2}$ aura donc lieu uniquement lorſque $q = o$, ce qui donne $r = o$, & par conſéquent $z^2 = \gamma\ (x + b)^2$ pour l'équation de la courbe, ce qui rentre dans le cas de l'art. 18, où la colonne étoit ſuppoſée conique; d'où il s'enſuit que la figure conique dans les colonnes eſt préférable à la figure renflée qui proviendroit de la revolution d'une ſection conique autour de ſon axe. Mais ſi on veut que la colonne ait la plus grande force poſſible, il faudra lui donner la figure cylindrique, comme nous l'avons démontré plus haut (art. cité).

27. Je n'examinerai pas ici quelle eſt la force des colonnes qui ſont formées par d'autres courbes que des ſections coniques; parceque d'un côté l'équation en u de l'art. 13 eſt rarement intégrable, & que de l'autre la conſidération de pluſieurs cas particuliers ne pourroit jamais conduire à une concluſion vraiment générale. Je vais tacher plutôt de reſoudre la queſtion propoſée d'une manière directe & générale, en cherchant immédiatement la courbe qui, par ſa rotation autour de ſon axe, produira une colonne qui ait la plus grande force poſſible; problême d'un genre aſſès neuf, & dont la ſolution demande des artifices particuliers qui pourront même être utiles dans d'autres occaſions.

28. Voici en quoi conſiſte ce problême exprimé analytiquement: *il s'agit de trouver une équation entre les ordonnées* z *& les abſciſſes* x, *telle que la quantité* $\frac{P}{S^2}$ *ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible*, s *étant égale à l'intégrale* $\pi \int z^2\, dx$ *priſe depuis* $x = o$, *juſqu'à* $x = o$, *& P étant une conſtante qui doit être déterminée par cette condition, que l'intégrale* $\int \frac{dx}{u}$ *priſe enſorte qu'elle ſoit nulle lorſque*

$x = o$, *devienne* $= \pi$ *lorſque* $x = a$, *en ſuppoſant* u *donnée par l' équation différentielle*

$$4\,P\,u^2 + X\left(\frac{2\,u\,d^2 u - d\,u^2}{d\,x^2} - 4\right) = o$$ *où* X *eſt une fonction donnée de* z *que nous avons ſuppoſée plus haut* $= K\,z^4$.

On voit que ce qui rend ſurtout le problême difficile, c' eſt que la quantité u n' eſt pas donnée en P, & en z, en termes finis ; mais ſuppoſons pour un moment que ce ſoit une fonction connue de z, & de P, enſorte que $d\,u = M\,d\,z + N\,d\,P$, en faiſant auſſi P variable, dans ce cas voici comment on pourra s' y prendre.

Puiſque $\frac{P}{S^2}$ doit être un *maximum* on aura d' abord en différentiant & employant la caractériſtique δ, $\frac{\delta P}{P} + \frac{2\,\delta S}{S} = o$; Or puiſque $\int \frac{dx}{u} =$ à une quantité donnée π laquelle eſt indépendante de P, on aura auſſi en différentiant $-\int \frac{dx\,\delta u}{u^2} = o$, & mettant pour δu ſa valeur $M\,\delta\,z + N\,\delta\,P$, $\int \frac{M\,\delta\,z\,d\,x}{u^2} + \int \frac{N\,\delta\,P\,d\,x}{u^2} = o$; mais P étant une conſtante par rapport à x, on pourra mettre ſa différentielle δP hors du ſigne d' intégration, ce qui donnera l' équation $\int \frac{M\,\delta\,z\,d\,x}{u^2} + \delta\,P \int \frac{N\,d\,x}{u^2} = o$ d' où l' on tire

$$\delta\,P = -\frac{\int \frac{M\,\delta\,z\,d\,x}{u^2}}{\int \frac{N\,d\,x}{u^2}}$$ ces intégrales étant priſes depuis $x = o$, juſqu' à $x = a$.

Quant à la valeur de δs, puisque $s = \pi \int z^2 dx$; on aura $\delta s = 2\pi \int z \delta z dx$; donc substituant ces valeurs de δP, & de δs dans l'équation ci-dessus, on aura celle-ci: $\pi \int \frac{z \delta z dx}{S} - \frac{\int \frac{M \delta z dx}{u^2}}{\int \frac{N dx}{u^2}} = o$

Dénotons par R la quantité $\int \frac{N dx}{u^2}$ qui peut être regardée comme une constante, & nous aurons l'équation $\int \left(\frac{\pi z}{S} - \frac{M}{u^2 R}\right) \delta z dx = o$, laquelle donne $\frac{\pi z}{S} - \frac{M}{u^2 R} = o$. Or comme u est supposée une fonction de z & de constantes, que M est par conséquent aussi une fonction de z & de constantes, & que S & R sont aussi des constantes, il s'ensuit que cette équation donnera $z =$ à une constante; mais il faut que cette valeur de z satisfasse aussi à l'équation en u; or comme u est (hyp.) une fonction de z & P on aura aussi $u =$ à une constante; donc l'équation dont nous parlons deviendra $4 P u^2 - 4 X = o$, ou $4 P u^2 - X = o$; laquelle pourra toujours se verifier lorsque X sera une fonction de z, comme nous l'avons supposé.

Au reste comme cette solution est fondée sur l'hypothèse particulière de u égal à une fonction de z, il s'en faut beaucoup qu'on puisse la regarder comme exacte & complette; aussi n'est elle ici que comme une introduction à la solution générale que nous allons donner dans les articles suivans.

29. Nous aurons d'abord comme ci-dessus les deux équations $\frac{\delta P}{P} - \frac{2 \delta s}{S} = o$, $\int \frac{dx \delta u}{u^2} = o$, & de

plus nous aurons auſſi l' équation $\delta s = 2\pi\int z\,\delta z\,dx$; & il ne reſtera plus qu' à trouver une équation entre δP, δu, & δz. Pour cela je reprends l' équation en u, & pour la rendre plus traitable, je la ramene à ſa première forme, en faiſant $u = t^2$, ce qui la réduit à celle-ci $Pt + X\left(\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o$ laquelle eſt moins chargée de différentielles que celle en u; maintenant je la différentie en affectant les différentielles de la caracteriſtique δ & faiſant varier à la fois t, P & z, j' aurai

$$P\delta t + t\delta P + \left(\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}\right)\delta X + X\left(\frac{\delta d^2 t}{dx^2} + \frac{3\delta t}{t^4}\right) = o$$

mais puiſque X eſt ſuppoſée une fonction de z on aura $dX = X' dz$, & par conſéquent auſſi $\delta X = X'\delta z$; de plus on a par les principes de la méthode *des variations*, expoſée dans les tomes II, & IV, $\delta d^2 t = d^2 \delta t$; donc ſubſtituant ces valeurs & mettant de plus $-\frac{Pt}{X}$ à la place de $\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{1}{t^3}$, on aura cette équation

$$P\delta t + t\delta P - \frac{PtX'\delta z}{X} + X\left(\frac{d^2\delta t}{dx^2} - \frac{3\delta t}{t^4}\right) = o$$

c' eſt à dire

$$\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\delta t + X\frac{d^2\delta t}{dx^2} + t\,\delta P - \frac{PX' t\delta z}{X} = o$$

Je multiplie maintenant cette équation par $\alpha\, dx$, α étant une nouvelle indéterminée, & je l' intégre en faiſant diſparoître, par des intégrations partielles, les différences de δt, j' aurai

$$\int\left(\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d^2 (X\alpha)}{dx^2}\right)\delta t\, dx$$

$$+ \frac{X\alpha\, d\delta t}{dx} - \frac{d.\,(X\alpha)\,\delta t}{dx}$$

$$+ \delta P\int t\alpha\, dx - P\int\frac{t\alpha X'\delta z}{X}dx = \text{à une conſtante.}$$

Je ſuppoſe ce qui eſt permis que la quantité α ſoit telle que l'on ait

$$\left(P - \frac{3X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d.^2(X\alpha)}{dx^2} = \frac{H}{t^3},$$ (H étant une conſtante quelconque) & l'équation précédente deviendra

$$h\int\frac{\delta t\, dx}{t^3} + \frac{X\alpha\, d\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)\,\delta t}{dx} + \delta P\int t\,\alpha\, dx - P\int\frac{t\,\alpha\, X'\,\delta z}{X}\,dx =$$ à une conſt., où je remarque qu'à cauſe de $t^2 = u$, on aura $\int\frac{\delta t\, dx}{t^3} = \int\frac{\delta u\, dx}{u^2}$; Donc ſi on étend l'intégration de l'équation précédente depuis $x = o$, juſqu'à $x = a$, on aura la valeur de l'intégrale $\int\frac{\delta u\, dx}{u^2}$ laquelle devra être nulle par les conditions du problême.

Pour cela je nomme B la valeur totale de l'intégrale $\int t\,\alpha\, dx$ priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = a$, enſuite je nomme Π & Ψ les valeurs des termes $\frac{X\alpha\, d\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)}{dx}\,\delta t$ pour le point où $x = o$, & pour celui où $x = a$; j'aurai donc à cauſe de $\int\frac{\delta t\, dx}{t^3} = \int\frac{\delta u\, dx}{u^2} = o$, l'équation $\Pi - \Psi + B\,\delta P - P\int\frac{t\,\alpha\, X'\,\delta z}{X}\,dx = o$ d'où l'on tire d'abord

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\Psi - \Pi}{B P} + \frac{1}{B}\int\frac{t\,\alpha\, X'\,\delta z}{X}\,dx$$

l'intégrale $\int\frac{t\,\alpha\, X'\,\delta z\, dx}{X}$ étant auſſi ſuppoſée priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = a$.

Donc ſi on ſubſtitue cette valeur de δP, ainſi que celle de δS dans l'équation $\frac{\delta P}{P} - \frac{2\,\delta S}{S} = o$

on aura celle-ci

$$\frac{\Psi - \Pi}{B\,B} + \frac{1}{B}\int\frac{t\,\alpha\,X'\,\delta\,z\,d\,x}{X} - \frac{4\,\pi}{S}\int z\,\delta\,z\,d\,x = o$$

ou bien, à cause que les quantités B & S sont constantes par rapport à x, puisqu' elles expriment des intégrales déterminées où x est supposée $= a$,

$$\frac{\Psi - \Pi}{B\ P} + \int\left(\frac{t\,\alpha\,X'}{B\,X} - \frac{4\,\pi\,z}{S}\right)\delta\,z\,d\,x = o$$

On aura donc d'abord pour tous les points de la courbe l' équation indéfinie $\frac{t\,\alpha\,X'}{B\,X} - \frac{4\,\pi\,z}{S} = o$

c' est-à dire $\frac{t\,\alpha\,X'}{z^2\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{S}$;

ensuite on aura l' équation déterminée $N = M$ laquelle ne se rapporte qu' aux points extrêmes de la courbe où $x = o$ & $x = a$.

30. Ainsi pour avoir l'équation de la courbe cherchée il n' y aura qu' à éliminer les deux indéterminées t & α, à l' aide de ces trois équations $\frac{t\,\alpha\,X'}{z\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{S}$,

$$\left(P - \frac{3\,X}{t^4}\right)\alpha + \frac{d^2\,(X\,\alpha)}{d\,x^2} = \frac{H}{t^3},$$

$$P\,t + X\left(\frac{d^2\,t}{d\,x^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o$$

& comme X est supposée une fonction connue de z, on aura une équation finale, entre les ordonnées z, & les abscisses x.

Il est bon de remarquer que si on fait $\alpha = H\,r$, la constante H disparoîtra de la seconde équation, & que la première étant divisée par H deviendra $\frac{r\,t\,X'}{z^2\,X} = \frac{4\,\pi\,B}{H\,S}$, de sorte que, comme H est une constante arbitraire, la quantité $\frac{4\,\pi\,B}{H\,S}$ aura une valeur constante quelconque indépendante de B, & de S.

De cette manière on aura donc, en prenant une conſtante arbitraire C, les trois équations ſuivantes

$$\frac{r\,t\,X'}{z\,X} = C,$$

$$\left(P - \frac{3\,X}{t^4}\right) r + \frac{d.^2\,(X\,r)}{d\,x^2} - \frac{1}{t^3} = o,$$

$Pt + X\left(\frac{d^2\,t}{d\,x^2} - \frac{1}{t^3}\right) = o$, qui renferment la ſolution du problême propoſé, pris dans toute ſa généralité.

31. Si on chaſſe r & t, il viendra une équation en z & x du quatrième ordre, qui ſera peut-être bien difficile à intégrer; mais je remarque que $z =$ à une conſtante ſera ſurément une intégrale particulière de cette équation; car ſuppoſant z conſtante, X & X' qui ſont des fonctions de z, ſeront auſſi conſtantes, de ſorte que ſi on ſuppoſe auſſi r & t conſtantes en même tems, les équations ci-deſſus deviendront

$$\frac{r\,t\,X'}{z\,X} = C,\ \left(P - \frac{3\,X}{t^4}\right) r - \frac{1}{t^3} = o,\ P\,t - \frac{X}{t^3} = o;$$

dont les deux dernières donneront d'abord

$t^4 = \sqrt[4]{\frac{X}{P}}$, $r = \frac{t}{P\,t^4 - 3\,X} = -\frac{1}{2\,\sqrt[4]{P\,X^3}}$; enſuite la première donnera $-\frac{X'}{2\,z\,X\sqrt{P\,X}} = C$; d'où l'on tirera la valeur de z laquelle, à cauſe de la conſtante arbitraire C, pourra être une conſtante quelconque.

32. Cette valeur de z donne évidemment un cylindre pour la figure de la colonne; mais, comme ce n'eſt qu'une valeur particulière, elle ne peut être cenſée reſoudre le problême que dans certaines circonſtances. En effet, comme l'équation en z doit être du quatrième ordre, ainſi que nous l'avons remarqué ci-deſſus, elle renfermera néceſſairement, étant intégrée, quatre conſtantes arbitraires, enſorte qu'on pourra faire paſſer la courbe par quatre

points

points quelconques donnés, ou par deux points, & par deux tengentes, ou &c.: Si on veut que la courbe de la colonne qui doit avoir la plus grande force possible passe par quatre points également éloignés de l'axe; dans ce cas on sera assuré qu'il n'y aura qu'une ligne droite qui resolve le problême, ensorte que la colonne devra être nécessairement cylindrique; la même chose aura lieu, par exemple, si les deux bases de la colonne doivent être égales entr'elles, & que de plus les tengentes de la courbe aux deux extrémités doivent être paralleles à l'axe; & ainsi du reste.

En général, toutes les fois que les quatre conditions données seront telles, qu'elles pourront quadrer avec une ligne droite parallele à l'axe, cette ligne sera surément celle du *maximum*; mais dans tous les autres cas le problême ne pourra se resoudre que par l'intégration complette de l'équation differentielle en z & x.

33. Si on veut que la colonne soit à peu-près cylindrique, ce qui est le cas le plus ordinaire, on pourra resoudre le problême d'une manière approchée que voici.

Puisque lorsque z est constante on a aussi r, & t constantes, il est visible que si z varie peu, r, & t varieront peu aussi.

Supposons donc

$z = Z(1 + \zeta)$, $r = R(1 + \rho)$, $t = T(1 + \theta)$, Z, R, T étant des constantes finies, & ζ, ρ, θ des variables très petites; & substituant ces valeurs on pourra negliger les produits de deux, ou de plusieurs dimensions de ζ, ρ, θ, ensorte que l'on aura des équations où les variables ne se trouveront que sous une forme linéaire, & qui seront par conséquent intégrables par les méthodes connues.

Mais avant de faire ces substitutions on remarquera, que comme X est supposée une fonction donnée de z, si on fait $\frac{dX}{dz} = X'$, & $\frac{dX'}{dz} = X''$, les quantités X & X deviendront à très-peu près $X + X'Z\zeta$, $X' + X''Z\zeta$, c'est-à-dire $X\left(1 + \frac{X'Z\zeta}{X}\right)$ $X'\left(1 + \frac{X''Z\zeta}{X'}\right)$ en supposant que l'on ait mis Z à la place de z dans X, X', X'', ensorte que ces quantités seront maintenant constantes.

De cette manière les équations de l'art. 30 deviendront

$$\frac{RTX'}{ZX}\left(1 + \rho + \theta + \zeta\left(\frac{X''Z}{X'} - \frac{X'Z}{X} - 1\right)\right) = C,$$

$$R\left(P - \frac{3X}{T^4}\left(1 + \frac{X'Z}{X}\zeta - 4\theta\right) + P\rho\right) + XR\left(\frac{X'Z}{X}\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dx^2}\right)$$
$$- \frac{1}{T^3}\left(1 - 3\theta\right) = o,$$

$$PT(1 + \theta) + XT\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{X}{T^3}\left(1 + \frac{X'Z}{Z}\zeta - 3\theta\right) = o.$$

Or si les quantités ρ, θ & ζ étoient nulles on auroit

$$\frac{RTX'}{ZX} = C,\ R\left(P - \frac{3X}{T^4}\right) - \frac{1}{T^3} = o,\ PT - \frac{X}{T^3} = o;$$

d'où l'on tire $X = PT^4$, $R = -\frac{1}{2PT^3}$; donc supposant (ce qui est permis) que ces équations aient lieu, les équations précédentes deviendront

$$\rho + \theta + \left(\frac{ZX''}{X'} - \frac{ZX'}{X} - 1\right)\zeta = o,$$

$$-3\left(\frac{ZX'}{X}\zeta - 4\theta\right) + \rho + T^4\left(\frac{ZX'}{X}\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dx^2}\right) - \sigma\theta = o,$$

$$\theta + T^4\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{ZX'}{X}\zeta + 3\theta = o,$$

oubien, en faisant pour plus de simplicité $\frac{ZX'}{X} = M$, $1 + \frac{ZX'}{X} - \frac{ZX''}{X'} = N$, on aura ces trois équations-ci :

$$\rho + \theta - N\zeta = o$$
$$M\left(T^4\frac{d^2\zeta}{dx^2} - 3\,\zeta\right) + T^4\frac{d^2\rho}{dx^2} + \rho + \sigma\,\theta = o;$$
$$T^4\frac{d^2\theta}{dx^2} + 4\,\theta - M\zeta = o.$$

de l'intégration desquelles dépend maintenant la solution du problême.

34. Pour intégrer ces équations je suppose

$$\zeta = \alpha \,\mathit{sin.}\left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right)$$
$$\theta = \beta \,\mathit{sin.}\left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right)$$
$$\rho = \gamma \,\mathit{sin.}\left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right)$$

α, β, γ, ε & ω étant des constantes indéterminées; je substitue ces valeurs, & je divise ensuite tous les termes par $\mathit{sin.}\left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right)$; j'ai les trois équations suivantes

$$\gamma + \beta - N\alpha = o,$$
$$-M\alpha\,(\omega + 3) - \gamma\,(\omega - 1) + \sigma\beta = o,$$
$$-\beta\,(\omega - 4) - M\alpha = o;$$

la dernière donne $\alpha = -\frac{\beta\,(\omega - 4)}{M}$, ce qui étant substitué dans les deux premières, on aura

$$\gamma + \beta\left(1 + \frac{N\,(\omega - 4)}{M}\right) = o$$
$$\beta\,(\sigma + (\omega + 3)\,(\omega - 4)) - \gamma\,(\omega - 1) = o;$$

la première donnera sur le champ

$$\gamma = -\beta\left(1 + \frac{N\,(\omega - 4)}{M}\right)$$

& substituant ensuite cette valeur dans l'autre équation, on aura après avoir divisé tous les termes par β,

$$\sigma + (\omega + 3)\,(\omega - 4) + (\omega - 1)\left(1 + \frac{N\,(\omega - 4)}{M}\right) = o$$

c'est-à-dire en réduisant

$(M+N)\,\omega^2 - 5\,N\omega + 4\,N - 7\,M = 0$

équation d'où l'on tirera deux valeurs de ω, lesquelles seront toujours nécessairement réelles, à cause que

$(5\,N)^2 - 4\,(M+N)\,(4\,N-7\,M) =$
$9\,N^2 + 12\,MN + 28\,M^2 = (3\,N+2\,M)^2 + 24\,M^2$;

& ces valeurs seront

$$\omega = \frac{5\,N \pm \sqrt{((3\,N+2\,M)^2+24\,M^2)}}{2\,(M+N)}.$$

Comme la quantité β a disparu de l'équation en ω, il s'ensuit qu'elle reste indéterminée, de sorte qu'on pourra la prendre à volonté; mais on peut, si l'on veut, prendre α à volonté au lieu de β, ce qui sera plus commode, parceque c'est proprement la quantité ζ que l'on cherche; alors les quantités β, & γ devront être déterminées ainsi $\beta = -\frac{M\cdot\alpha}{\omega-4}$, $\gamma = \left(N + \frac{M}{\omega-4}\right)\alpha$;
Quant à la constante ε, comme elle a aussi disparu des équations, elle sera pareillement arbitraire.

Or puisque la quantité ω a deux valeurs, si on désigne ces valeurs par ω & ω', & qu'on prenne deux autres constantes arbitraires α' & ε', on aura pour la valeur complette de ζ l'expression

$$\zeta = \alpha\,\mathit{sin.}\left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right) + \alpha'\,\mathit{sin.}\left(\varepsilon' + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right),$$

& les valeurs correspondantes de θ & ρ seront

$$\theta = \beta\,\mathit{sin.}\left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right) + \beta'\,\mathit{sin.}\left(\varepsilon' + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right),$$

$$\rho = \gamma\,\mathit{sin.}\left(\varepsilon + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right) + \gamma'\,\mathit{sin.}\left(\varepsilon' + x\frac{\sqrt{\omega}}{T^2}\right);$$

β' & γ' étant les valeurs de β & γ qui résultent en mettant α' & ω' à la place de α & ω.

35. Je remarque maintenant que lorsque z est égal à une constante, ce qui est le cas des colonnes cylindriques,

on a (art. 11.) $P = \frac{\pi^2 K}{a^2}$, a étant la hauteur de la colonne, π étant l' angle de 180.°; ainsi dans notre cas où $z = Z + Z\zeta$, on aura, aux quantités très-petites près, $P = \frac{\pi^2 X}{a^2}$, puisque X étant constante est la même quantité qu' on avoit désignée par K (art. 12.); or on a (art. 33.) $X = PT^4$; donc $X = \frac{\pi^2 X T^4}{a^2}$, d' où $T^4 = \frac{a^2}{\pi^2}$, & par conséquent $T^2 = \frac{a}{\pi}$; donc si on substitue cette valeur on aura

$$\zeta = \alpha\ \mathit{sin.} \left(\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right) + \alpha'\ \mathit{sin.} \left(\varepsilon' + \frac{x\pi\sqrt{\omega'}}{a}\right);$$

α, α', ε, ε' étant quatre constantes arbitraires qu' on pourra déterminer, ensorte que la courbe cherchée, dont les abscisses sont x & les ordonnées sont $z = Z(1 + \zeta)$ passe par quatre points donnés, ou par deux points & deux tangentes, ou &c. comme on l' a dit plus haut (art. 32.)

A l' égard des valeurs de ω & ω' elles ne dépendront que de la nature de la fonction X de Z; car en faisant $\frac{Z\,dX}{X\,dZ} = M$, $\frac{Z\,d^2X}{dX\,dZ} = M'$, on aura

$$\omega = \frac{5(1 + M - M') + \sqrt{((3 + 5M - 3M')^2 + 24M^2)}}{2(1 + 2M - M')},$$

$$\omega' = \frac{5(1 + M - M') - \sqrt{((3 + 5M - 3M)^2 + 24M^2)}}{2(1 + 2M - M')}.$$

S' il arrive que ω soit négatif, alors le radical $\sqrt{\omega}$ deviendra imaginaire; & le terme $\alpha\ \mathit{sin.} \left(\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right)$ deviendra (en y mettant $\varepsilon\sqrt{-1}$ à la place de ε & $2\alpha\sqrt{-1}$ à celle de α) de cette forme

$$\alpha \left(e^{\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{-\omega}}{a}} - e^{-\varepsilon - \frac{x\pi\sqrt{-\omega}}{a}} \right)$$

il en sera de même du terme $\acute{\alpha}\ \mathit{sin.} \left(\acute{\varepsilon} + \frac{x\pi\sqrt{\acute{\omega}}}{a} \right)$ si $\acute{\omega}$ devient négatif.

Si X est supposé proportionel à une puissance quelconque de z, ou Z, ensorte que $X = K Z^n$, on aura $M = n$, $M = n - 1$; donc

$$\omega = \frac{5 + \sqrt{(9 + \sigma n + 7n^2)}}{2 + n},$$

$$\acute{\omega} = \frac{5 - \sqrt{(9 + \sigma n + 7n^2)}}{2 + n};$$

Et supposant $n = 4$, comme on l'a fait plus haut, on aura $\omega = 2$, $\acute{\omega} = -\frac{1}{3}$; par conséquent l'équation de la courbe contiendra dans ce cas des sinus & des exponentielles.

36. Pour ce qui regarde les constantes α, $\acute{\alpha}$, ε, $\acute{\varepsilon}$, le moyen le plus simple pour les déterminer est de supposer que les valeurs de ζ, & $\frac{d\zeta}{dx}$ soient données aux deux extrémités de la colonne où $x = o$, & où $x = a$. Pour cela supposons donc que lorsque $x = o$ on ait $\zeta = p$, $\frac{d\zeta}{dx} = q$, & que lorsque $x = a$ on ait $\zeta = p'$ $\frac{d\zeta}{dx} = q'$, ensorte que $Z(1 + p)$ $Z(1 + p')$ soient les rayons des deux bases de la colonne, l'inférieure & la supérieure, & que $Z q$, $Z q'$ soient les tangentes de l'inclination du profil de la colonne avec l'axe, à l'extrémité inférieure & à l'extrémité supérieure; on aura (art. préc.)

$$p = \alpha\ \mathit{sin.}\ \varepsilon + \acute{\alpha}\ \mathit{sin.}\ \acute{\varepsilon},$$

$$q = \frac{\pi\sqrt{\omega}}{a} (\alpha\ \mathit{cos.}\ \varepsilon + \acute{\alpha}\ \mathit{cos.}\ \acute{\varepsilon}),$$

$$p' = \alpha\ \mathit{sin.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) + \acute{\alpha}\ \mathit{sin.}\ (\acute{\varepsilon} + \pi\sqrt{\acute{\omega}}),$$

$$q' = \frac{\pi\sqrt{\omega}}{a} (\alpha\ \mathit{cos.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) + \acute{\alpha}\ \mathit{cos.}\ (\acute{\varepsilon} + \pi\sqrt{\acute{\omega}}));$$

d'où l'on pourra tirer les valeurs de α, α', ε, ε'; en effet les deux premières donneront celles-ci

$$p \cos. \pi \sqrt{\omega'} + \frac{a q}{\pi \sqrt{\omega'}} \sin. \pi \sqrt{\omega'} =$$
$$\alpha \sin. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega'}) + \alpha' \sin. (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'}),$$
$$-p \sin. \pi \sqrt{\omega'} + \frac{a q}{\pi \sqrt{\omega'}} \cos. \pi \sqrt{\omega'} =$$
$$\alpha \cos. (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega'}) + \alpha' \cos. (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'}),$$

lesquelles étant combinées avec les deux dernières donneront

$$2 \alpha \cos. \left(\varepsilon + \pi \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega'}}{2}\right) \times \sin. \left(\pi \frac{\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega'}}{2}\right)$$
$$= p' - p \cos. \pi \sqrt{\omega'} - \frac{a q}{\pi \sqrt{\omega'}} \sin. \pi \sqrt{\omega'},$$
$$-2 \alpha \sin. \left(\varepsilon + \pi \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega'}}{2}\right) \times \sin. \left(\pi \frac{\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega'}}{2}\right)$$
$$= \frac{a q'}{\pi \sqrt{\omega'}} + p \sin. \pi \sqrt{\omega'} - \frac{a q}{\pi \sqrt{\omega'}} \cos. \pi \sqrt{\omega'},$$

d'où en faisant, pour abréger,

$$P = p \sin. \pi \sqrt{\omega'} + \frac{a q}{\pi \sqrt{\omega'}} \cos. \pi \sqrt{\omega'} + \frac{a q'}{\pi \sqrt{\omega'}};$$
$$Q = p \cos. \pi \sqrt{\omega'} + \frac{a q}{\pi \sqrt{\omega'}} \sin. \pi \sqrt{\omega'} - p',$$

on tire

$$\text{tang.} \left(\varepsilon = \pi \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega'}}{2}\right) = \frac{P}{Q},$$
$$\alpha = \frac{\sqrt{(P^2 + Q^2)}}{2 \sin. \left(\pi \frac{\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega'}}{2}\right)},$$

& de même en faisant

$$P' = p' \sin. \pi \sqrt{\omega} + \frac{a q'}{\pi \sqrt{\omega}} \cos. \pi \sqrt{\omega} + \frac{a q}{\pi \sqrt{\omega}};$$
$$Q' = p' \cos. \pi \sqrt{\omega} + \frac{a q'}{\pi \sqrt{\omega}} \sin. \pi \sqrt{\omega} - p,$$

on aura $tang. \left(\varepsilon' + \pi \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega'}}{2}\right) = \frac{P'}{Q'}$,

$$\alpha' = \frac{\sqrt{(P'^2 + Q'^2)}}{2\, \sin.\left(\pi \frac{\sqrt{\omega'} - \sqrt{\omega}}{2}\right)}.$$

37. Ainſi les conſtantes α, ε, α', ε' auront des valeurs déterminées ſi les quantités p, q, p', q' ſont toutes données, de ſorte qu' il ne reſtera plus rien d' indéterminé dans l' équation de la courbe cherchée; mais ſi quelques unes de ces dernières quantités ne ſont pas données, alors quelques unes des conſtantes α, ε, α', ε' reſteront indéterminées, & ce ſera une nouvelle queſtion de *maximis* & *minimis* de déterminer ces conſtantes, enſorte que la force de la colonne ſoit la plus grande qu' il eſt poſſible. Or l' équation de la courbe étant donnée il eſt clair qu'il n' y aura qu' à chercher l' expreſſion de la force, & la rendre enſuite un *maximum*, en ſuppoſant que les conſtantes indéterminées ſoient variables, ainſi que nous l' avons fait plus haut, lorſque nous avons pris une ſection conique pour la courbe de la colonne; mais la methode que nous avons employé pour reſoudre le problême en général offre un moyen plus ſimple de parvenir au même but.

38. Pour cela il n' y a qu' à ſe rappeller que l' équation, qui renfermoit les conditions du *maximum*, contenoit deux parties, l' une affectée du ſigne $\int$, qui a ſervi à déterminer en général l' équation de la courbe, l' autre hors du ſigne $\int$, qui ne ſe rapportoit qu' aux deux points extrêmes de la courbe, & dont nous n'avons juſqu' à préſent fait aucun uſage.

Cette dernière partie de l'équation dont il s'agit (art. 29.) eſt $\frac{\Psi - \Pi}{B\ P}$, où Π eſt la valeur de la quantité $\frac{X\alpha d\delta t}{dx} - \frac{d.(X\alpha)}{dx}\delta t$ pour le premier point où $x = o$, & Ψ la valeur de la même quantité pour le dernier point où $x = a$; ainſi comme

comme on a égalé séparément à zéro la première partie affectée du signe $\int$, il faut pareillement égaler à zéro la partie algébrique $\frac{\Psi - \Pi}{BP}$, ce qui donnera l'équation déterminée $\Psi - \Pi = o$. Pour faire usage de cette équation on remarquera que les variations δt & $\frac{d\delta t}{dx}$ ou bien $\frac{\delta dt}{dx}$, qu' elle contient, ne regardent que les valeurs extrêmes de t, & $\frac{dt}{dx}$, lesquelles dépendent uniquement des quatre constantes arbitraires que l' expression générale de t doit renfermer, & qui sont les mêmes qui entrent dans l' expression de ζ; d' où il s' ensuit, que pour avoir les valeurs en question de δt & de $\delta \frac{dt}{dx}$ il faudra faire varier ces mêmes constantes dans les expressions de t & de $\frac{dt}{dx}$, ou seulement celles, d' entr' elles, qui seront demeurées indéterminées; l'on aura par ce moyen les conditions nécessaires pour la détermination de toutes les constantes indéterminées.

39. Pour appliquer ceci au cas de l'art. 33., on substituera d'abord dans l'expression $X\alpha\delta\frac{dt}{dx} - \frac{dX\alpha}{dx}\delta t$, $Hr = HR(1 + \rho)$ à la place de α, $X(1 + M\zeta)$ à la place de X, & $T(1 + \theta)$ à la place de θ, & négligeant les termes, où les quantités très-petites ζ, ρ, θ, lesquelles formeroient ensemble deux ou plusieurs dimensions, on aura celle-ci : $HXRT\,\delta.\frac{d\theta}{dx}$, où $HXRT$ est une quantité constante.

Or l' expression générale de θ est (art. 34., & 35.), en y substituant les valeurs de β, β' & T^2, celle-ci :

$$\theta = M \left\{ \frac{\alpha\ \mathrm{ſin.}\ \left(\varepsilon + \frac{x \pi \sqrt{\omega}}{a}\right)}{4 - \omega} + \frac{\alpha'\ \mathrm{ſin.}\left(\mathrm{ſin.}\varepsilon' + \frac{x \pi \sqrt{\omega'}}{a}\right)}{4 - \omega'} \right\}$$

d' où l' on tire

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left\{ \frac{\alpha \sqrt{\omega}\ \mathrm{cos.}\ \left(\varepsilon + \frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right)}{4 - \omega} + \frac{\alpha' \sqrt{\omega'}\mathrm{cos.}\left(\varepsilon' + \frac{x\pi\sqrt{\omega'}}{a}\right)}{4 - \omega'} \right\}$$

Donc 1.° faiſant $x = o$, on aura

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left(\frac{\alpha \sqrt{\omega}\mathrm{cos.}\ \varepsilon}{4 - \omega} + \frac{\alpha' \sqrt{\omega'}\ \mathrm{cos.}\ \varepsilon'}{4 - \omega'} \right),$$

& différentiant par δ en faiſant varier à la fois α, ε, α', ε', on aura pour le premier point de la courbe

$$\delta.\ \frac{dt}{dx} = \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\omega}}{4\ \omega} (\mathrm{cos.}\ \varepsilon\, \delta\alpha - \alpha\, \mathrm{ſin.}\ \varepsilon\, \delta\varepsilon)$$

$$+ \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\omega'}}{4 - \omega'} (\mathrm{cos.}\ \varepsilon'\, \delta\alpha' - \alpha'\, \mathrm{ſin.}\ \varepsilon'\, \delta\varepsilon'),$$

cette quantité multipliée par $HXRT$ ſera la valeur de Π.

2.° Faiſant $x = a$, on aura

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \left(\frac{\alpha \sqrt{\omega}\mathrm{cos.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega})}{4 - \omega} + \frac{\alpha' \sqrt{\omega'}\ \mathrm{cos.}\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'})}{4 - \omega'} \right),$$

donc différentiant par δ, en faiſant varier également α, ε, α', ε', on aura pour le dernier point de la courbe

$$\delta.\ \frac{d\theta}{dx} = \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} (\mathrm{cos.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega})\, \delta\alpha - \alpha\, \mathrm{ſin.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega})\, \delta\varepsilon)$$

$$+ \frac{M\pi}{a} \times \frac{\sqrt{\omega'}}{4 - \omega'} (\mathrm{cos.}\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'})\, \delta\alpha' - \alpha'\, \mathrm{ſin.}\ (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'})\, \delta\varepsilon'),$$

& cette quantité multipliée de même par $HXRT$ ſera la valeur de Ψ.

40. Ainſi l' équation $\Psi - \Pi = o$ donnera en ordonnant les termes

$$\frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} (\mathrm{cos.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - \mathrm{cos.}\ \varepsilon)\, \delta\alpha$$

$$- \frac{\sqrt{\omega}}{4 - \omega} (\mathrm{ſin.}\ (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - \mathrm{ſin.}\ \varepsilon)\, \alpha\, \delta\varepsilon$$

$$+ \frac{\sqrt{\omega'}}{4\ \omega'} \left(\cos. \left(\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'} \right) - \cos. \varepsilon' \right) \delta \alpha'$$

$$- \frac{\sqrt{\omega'}}{4 \cdot \omega'} \left(\sin. \left(\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'} \right) - \sin. \varepsilon' \right) \alpha' \delta \varepsilon' = o.$$

d' où l' on déduira les concluſions ſuivantes.

1.° Si les valeurs des quatre conſtantes α, α', ε, ε' ſont données comme dans le cas de l' art. 36., ou, en général, lorſque la courbe doit ſatisfaire à quatre conditions données, les différences $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$ feront nulles d' elles mêmes, & l' équation, dont il s' agit, ſe trouvera identique.

2.° S' il n' y avoit que les quantités α, & α' de données, alors $\delta\alpha$, & $\delta\alpha'$ ſeroient nulles, & il faudroit faire évanouir ſéparement les termes affectés des différences indéterminées $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, ce qui donneroit ces deux équations

$$\sin. \left(\varepsilon + \pi \sqrt{\omega} \right) - \sin. \varepsilon = o$$

$$\sin. \left(\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'} \right) \sin. \varepsilon' = o,$$

leſquelles ſerviroient à déterminer les angles ε, & ε'; on auroit donc dans ce cas

$$tang.\ \varepsilon = \frac{\sin.\ \pi \sqrt{\omega}}{1 - \cos. \pi \sqrt{\omega}} = cot. \frac{\pi \sqrt{\omega}}{2},$$

$$tang.\ \varepsilon' = \frac{\sin.\ \pi \sqrt{\omega'}}{1 - \cos. \pi \sqrt{\omega'}} = cot. \frac{\pi \sqrt{\omega'}}{2},$$

d' où $\varepsilon = 90.° - \frac{\pi \sqrt{\omega}}{2}$, $\varepsilon' = 90 - \frac{\pi \sqrt{\omega}}{2}$.

Si c' étoient les quantités ε & ε' qui fuſſent données, alors les termes affectés de $\delta\varepsilon$, & $\delta\varepsilon'$ évanouiroient, & il faudroit enſuite faire diſparoître ceux qui ſont affectés de $\delta\alpha$, & $\delta\alpha'$; mais comme ces termes ne renferment point les quantités indéterminées α, α', mais ſeulement les données ε, ε', il s' enſuit qu' il eſt impoſſible de les faire évanouir en général, ce qui eſt une marque qu' il n'y a point de *maximum* par rapport aux constantes α, α' en particulier.

3.° S'il n'y avoit de donné que les deux bases de la colonne, alors les valeurs de p, & p' seroient données (art. 36.); on prendroit donc les deux équations de cet article

$$p = \alpha \sin.\, \varepsilon + \alpha' \sin.\, \varepsilon',$$
$$p' = \alpha \sin.\, (\varepsilon + \pi \sqrt{\omega}) + \alpha' \sin.\, (\varepsilon' + \pi \sqrt{\omega'}),$$

& les différentiant par δ, en faisant p, p' constantes, & α, α', ε, ε' variables on auroit ces deux-ci:

$$\sin.\, \varepsilon\, \delta\alpha + \alpha \cos.\, \varepsilon\, \delta\varepsilon + \sin.\, \varepsilon'\, \delta\alpha' + \alpha' \cos.\, \varepsilon'\, \delta\varepsilon' = o,$$
$$\sin.\, (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega})\, \delta\alpha + \alpha \cos.\, (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega})\, \delta\varepsilon + \sin.\, (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'})\, \delta\alpha' + \alpha' \cos.\, (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'})\, \delta\varepsilon' = o,$$

à l'aide desquelles on pourra déterminer deux des quatre différentielles indéterminées $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$ par les deux autres. Cherchons $\delta\alpha$, & $\delta\varepsilon$; pour cela on retranchera les équations précédentes l'une de l'autre après avoir multiplié 1.° la première par $\cos.\, (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega})$, & la seconde par $\cos.\, \varepsilon$, 2.° la première par $\sin.\, (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega})$ & la seconde par $\sin.\, \varepsilon$; on aura

$$d\alpha = \frac{\sin.\, \varepsilon' \times \cos.\, (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - \sin.\, (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'}) \times \cos.\, \varepsilon}{\sin.\, \pi\sqrt{\omega}}\, \delta\alpha'$$
$$+ \frac{\cos.\, \varepsilon' \times \cos.\, (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - \cos.\, (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega}) \times \cos.\, \varepsilon}{\sin.\, \pi\sqrt{\omega}}\, \alpha'\, \delta\varepsilon',$$
$$\alpha\,\delta\varepsilon = - \frac{\sin.\, \varepsilon' \times \sin.\, (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - \sin.\, (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'})\, \sin.\, \varepsilon}{\sin.\, \pi\sqrt{\omega}}\, \delta\alpha$$
$$- \frac{\cos.\, \varepsilon' \times \sin.\, (\varepsilon + \pi\sqrt{\omega}) - \cos.\, (\varepsilon' + \pi\sqrt{\omega'})\, \sin.\, \varepsilon}{\sin.\, \pi\sqrt{\omega}}\, \alpha'\, \delta\varepsilon';$$

On substituera donc ces valeurs dans l'équation générale, & on fera ensuite égaux à zéro, séparement, les deux membres affectées de $\delta\alpha'$, & $\delta\varepsilon'$; ce qui donnera ces deux équations.

$$\frac{\sqrt{\omega'}}{4-\omega'}\left(\cos.\left(\varepsilon'+\pi\sqrt{\omega'}\right)-\cos.\varepsilon'\right)+$$
$$\frac{\sqrt{\omega}}{4-\omega}\,tang.\,\frac{\pi\sqrt{\omega}}{2}\left(\sin.\left(\varepsilon'+\pi\sqrt{\omega'}\right)+\sin.\varepsilon'\right)=o,$$
$$\frac{\alpha'\sqrt{\omega'}}{4-\omega'}\left(\sin.\left(\varepsilon'+\pi\sqrt{\omega'}\right)-\sin.\varepsilon'\right)+$$
$$\frac{\alpha'\sqrt{\omega}}{4-\omega}\,tang.\,\frac{\pi\sqrt{\omega}}{2}\left(\cos.\left(\varepsilon'+\pi\sqrt{\omega'}+\cos.\varepsilon'\right)=o,\right.$$

qui ſerviront à déterminer les quantités α' & ε'.

En effet, la première ne contenant que la quantité ε', donnera la valeur de cette quantité; enſuite il faudra déterminer α' par la ſeconde équation, laquelle donnera $\alpha'=o$; ainſi la valeur de ζ ſe réduira à celle-ci

$$\zeta=\alpha\,\sin.\left(\varepsilon+\frac{x\pi\sqrt{\omega}}{a}\right)$$

où les conſtantes α, & ε, devront ſe déterminer par les deux conditions

$p=\alpha\,\sin.\,\varepsilon,\ p'=\alpha\,\sin.\left(\varepsilon+\pi\sqrt{\omega}\right),$
d'où l'on tire

$$tang.\,\varepsilon=\frac{p\,\sin.\,\pi\sqrt{\omega}}{p'-p\cos.\pi\sqrt{\omega}},$$
$$\alpha=\frac{\sqrt{(p'^2-2pp'\cos.\pi\sqrt{\omega}+p^2)}}{\sin.\,\pi\sqrt{\omega}},$$

& l'on remarquera que l'on peut prendre indifféremment pour ω l'une quelconque des deux racines de l'équation en ω; de ſorte que la ſolution ſera double.

4.° Enfin, s'il n'y avoit rien de donné, & qu'on cherchât abſolument, entre toutes les courbes poſſibles, celle qui formera une colonne de la plus grande force, relativement à ſa hauteur & à ſa maſſe, comme nous l'avons ſuppoſé dans nos calculs, il faudroit alors dans l'équation ci-deſſus égaler ſéparement à zéro les membres affectés des différentielles indéterminées $\delta\alpha$, $\delta\varepsilon$, $\delta\alpha'$, $\delta\varepsilon'$; ce qui don-

neroit ces quatre équations
$$cos.\ (\varepsilon + \pi\ \sqrt{\omega}) - cos.\ \varepsilon = o\ ,$$
$$(\mathit{fin.}\ (\varepsilon + \pi\ \sqrt{\omega}) - \mathit{fin.}\ \varepsilon)\ \alpha = o\ ,$$
$$cos.\ (\varepsilon' + \pi\ \sqrt{\omega}) - cos.\ \varepsilon' = o\ ,$$
$$(\mathit{fin.}\ (\varepsilon' + \pi\ \sqrt{\omega'}) - \mathit{fin.}\ \varepsilon')\ \alpha' = o\ ;$$
comme la première ne contient que l'angle ε, elle ne pourra fervir qu'à déterminer cette quantité; enfuite de quoi on ne pourra vérifier la feconde qu'en faifant $\alpha = o$; de même la troifième donnera la valeur de ε', & la quatrième donnera néceffairement $\alpha' = o$;

On aura donc dans ce cas $\alpha = o$, & $\alpha' = o$, & par conféquent $\zeta = o$, & $z = Z\ (1 + \zeta) = Z$;
c'eft-à dire z égale à une conftante, ce qui donne un cylindre pour la figure de la colonne. D'où l'on doit conclure que la figure cylindrique eft celle qui donne le *maximum maximorum* de la force.

MEMOIRE

Sur l' utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations; dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités; & où l' on résoud différens problêmes relatifs à cette matière.

PAR M. DE LA GRANGE.

Quand on a plusieurs observations d' un même phénomêne dont les résultats ne sont pas tout à fait d' accord, on est sur que ces observations sont toutes, ou au moins en partie, peu exactes, de quelque source que l' erreur puisse provenir; alors on a coutume de prendre le milieu entre tous les résultats, parceque de cette manière les différentes erreurs se repartissant également dans toutes les observations, l' erreur qui peut se trouver dans le résultat moyen, devient aussi moyenne entre toutes les erreurs. Or quoique tout le monde reconnoisse l' utilité de cette pratique pour diminuer, autant qu' il est possible, l' incertitude qui nait de l' imperfection des instrumens & des erreurs inévitables des observations, j' ai cru, cependant, qu' il seroit bon d' examiner & d' apprécier par le calcul les avantages qu' on peut esperer de retirer d'une semblable méthode; c' est l' objet que je me suis proposé dans ce mémoire. Je commencerai par supposer que les erreurs qui peuvent se glisser dans chaque observation soient données, & qu' on connoisse aussi le nombre des cas qui peuvent donner ces erreurs, c' est à-dire, la facilité de chaque erreur; je supposerai ensuite que l' on connoiſſe ſeulement les limites entre leſquelles toutes les erreurs poſſibles doivent être renfermées avec la loi de leur facilité, & je chercherai dans l'une & dans l'autre de ces hypothèſes, quelle eſt la probabilité que l'erreur du réſultat moyen ſoit nulle, ou égale à une quantité donnée, ou ſeulement compriſe entre des limites données. Je fairai voir, en même tems, comment on peut déterminer, *a poſteriori*, la loi même de la facilité des erreurs, & quelle eſt la probabilité que dans cette détermination on ne ſe trompera pas d'une quantité donnée. D'où je déduirai des règles aſſés ſimples pour la correction des inſtrumens par des vérifications réitérées.

Au reſte, je ſuivrai dans toutes ces recherches la règle ordinaire du calcul des probabilités, ſuivant laquelle on eſtime la probabilité d'un événement par le nombre des cas favorables, diviſé par le nombre de tous les cas poſſibles. La difficulté ne conſiſte que dans l'énumération de ces cas, mais cette énumération demande ſouvent des calculs aſſés compliqués, & dont on ne peut venir à bout que par des artifices particuliers; c'eſt ce qui a lieu ſur tout dans la matière que je vais traiter.

Problême I.

1. On ſuppoſe que dans chaque obſervation on peut ſe tromper d'une unité, tant en plus qu'en moins, mais que le nombre des cas qui peuvent donner un réſultat exact eſt au nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité comme $a : 2b$; on demande quelle eſt la probabilité d'avoir un réſultat exact en prenant le milieu entre les réſultats particuliers d'un nombre n d'obſervations.

Puiſque il y a a cas qui donnent zéro d'erreur, & $2b$ cas qui donnent $+1$, & -1, c'eſt-à-dire b cas qui

donnent

donnent $+1$, & b cas qui donnent -1 d'erreur, il eſt clair par les règles ordinaires des probabilités que la probabilité que l'erreur ſoit nulle dans chaque obſervation particulière ſera exprimée par $\frac{a}{a+2b}$; voyons donc quelle ſera la probabilité que l'erreur ſoit auſſi nulle en prenant le milieu entre n obſervations. Il eſt facile de voir que cette queſtion ſe réduit à celle-ci : „ ayant n dès dont chacun ait a faces marquées d'un zéro, b faces marquées d'une unité poſitive, & b faces marquées d'une unité négative, enſorte que le nombre total des faces ſoit $a+2b$, trouver la probabilité qu'il y a d'amener zéro en jettant tous ces dès au hazard. Or on ſait par la théorie des combinaiſons que ſi on élève le trinome $a+b\,(x+x^{-1})$ à la puiſſance n, le coefficient du terme abſolu c'eſt-à-dire ou la puiſſance de x ſera zéro, dénotera le nombre des cas ou des hazards, ou la ſomme des points marqués par tous les dès ſera égale à zéro : donc nommant ce coefficient A, on aura, à cauſe que le nombre de toutes les combinaiſons poſſibles eſt $(a+2b)^n$, on aura, dis-je, $\frac{A}{(a+2b)^n}$ pour la probabilité cherchée.

Tout ſe réduit donc à trouver le coefficient A; or c'eſt à quoi on peut parvenir de pluſieurs manières différentes.

1.° Si on développe la puiſſance $(a+b\,(x+x^{-1}))^n$ ſuivant le théorême de nevvton on aura, comme l'on ſait,

$$a^n + n\,a^{n-1}b\,(x+x^{-1}) + \frac{n\,(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,b^2\,(x+x^{-1})^2 + \&c.$$

or il eſt facile de voir que les puiſſances impaires de $x+x^{-1}$ ne renferment aucun terme ſans x, & que dans les puiſſances paires il y a toujours un terme ſans x, qui eſt celui du milieu, dans lequel les expoſans de x, & x^{-1} ſont les mêmes ;

ainsi le terme. sans x de $(x+x^{-1})^2$ sera 2,

celui de $(x+x^{-1})^4$ sera $\frac{4.\ 3}{1.\ 2}$

celui de $(x+x^{-1})^6$ sera $\frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3}$.

& ainsi des autres ; donc on aura en général

$$A = a^n + \frac{2}{1} \cdot \frac{n(n-1)}{1.\ 2} a^{n-2} b^2 +$$

$$\frac{4.\ 3}{1.\ 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{n-4} b^4 +$$

$$\frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} a^{n-6} b^6 + \&c.$$

c' est-à-dire

$$A = a^n + n(n-1)\, a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 2} a^{n-4} b^4$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{2.\ 3.\ 2.\ 3} a^{n-6} b^6 + \&c.$$

2.° Il est visible que le trinome $a+b(x+x^{-1})$ peut se décomposer en ces deux binomes $\alpha+\beta x$, $\alpha+\beta x^{-1}$; ce qui donne par la comparaison des termes $\alpha^2+\beta^2 = a$, & $\alpha\beta = b$; d'où l'on tire $\alpha \pm \beta = \sqrt{a \pm 2b}$, & de là

$$\alpha = \frac{\sqrt{(a+2b)} + \sqrt{(a-2b)}}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{(a+2b)} - \sqrt{(a-2b)}}{2}$$

Cela posé on aura donc $(a+b(x+x^{-1}))^n$

$$= (\alpha+\beta x)^n \times (\alpha+\tfrac{\beta}{x})^n =$$

$$\left(\alpha^n + n\,\alpha^{n-1}\beta x + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}\beta^2 x^2 + \&c.\right) \times$$

$$\left(\alpha^n + \frac{n\,\alpha^{n-1}\beta}{x} + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\alpha^{n-2}\beta^2}{x^2} + \&c.\right)$$

d' où il est facile de conclure qu' on aura

$$A = \alpha^{2n} + (n\,\alpha^{n-1}\beta)^2 + \left(\frac{n\,(n-1)\,\alpha^{n-2}\beta^2}{1\,.\,2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\alpha^{n-3}\,\beta^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^2 + \&c.$$

Corollaire I.

2. Soit $a = b$, c' eſt-à-dire qu' il y ait un nombre égal de cas qui donnent o, ou $+\ 1$, ou $-\ 1$ d' erreur ; la probabilité d' avoir un réſultat exact dans chaque obſervation particulière ſera $\frac{a}{a+2b} = \frac{1}{3}$; & celle d' avoir un réſultat exact, en prenant le terme moyen entre les réſulats de n obſervations, ſera ſuivant la première formule, (en diviſant le haut & le bas de la fraction $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par a^n)

$$\frac{1 + n\,(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\,.\,1\,.\,3\,.\,1\,.\,2\,.\,3} + \&c.}{3^n}$$

Donc en faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$, &c. on aura

n	probab.
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{7}{27}$
4	$\frac{19}{81}$
5	$\frac{51}{243}$
6	$\frac{141}{729}$
&c.	

On voit par cette table que la probabilité que l'erreur ſoit nulle diminue à meſure que l'on prend un plus grand nombre d'obſervations, de ſorte que ſi on vouloit eſtimer l'avantage qu'il peut y avoir à prendre le milieu entre pluſieurs obſervations, par l'excès de la probabilité que l'erreur ſoit nulle dans le réſultat moyen, ſur celle que l'erreur ſoit auſſi nulle dans chaque réſultat particulier, on trouveroit dans le cas dont il s'agit ici que l'avantage ſeroit toujours négatif, c'eſt-à-dire qu'il ſe changeroit en déſavantage, lequel iroit même en augmentant plus il y auroit d'obſervations; d'où il ſemble qu'on pourroit conclure, que dans ce cas il vaudroit mieux s'en tenir à une obſervation unique, que de prendre le milieu entre pluſieurs obſervations; mais il y a une conſidération eſſentielle à faire ſur cette matière, de laquelle il réſulte qu'il eſt toujours plus avantageux dans la pratique de multiplier des obſervations autant que l'on peut, c'eſt ce que nous diſcuterons plus bas.

Corollaire II.

3. Soit maintenant $a = 2b$, enſorte que le nombre des cas qui donnent un réſultat exact ſoit égal au nombre de ceux qui peuvent donner une erreur de $+1$, ou -1; dans ce cas il vaudra mieux ſe ſervir de la ſeconde formule; car on aura $\alpha = \sqrt{b}$, $\beta = \sqrt{b}$, de ſorte qu'à cauſe de $a + 2b = 4b$, on aura, en diviſant le haut & le bas de la fraction, $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par b^n,

$$\frac{1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)^2 + \&c.}{4^n}$$

pour la probabilité que l'erreur ſoit nulle en prenant le milieu entre n obſervations.

Donc faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$ &c. on aura les réſultats ſuivans

n	prob.
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{5}{16}$
4	$\frac{35}{128}$
&c.	

où l'on voit que la probabilité diminue à meſure que n augmente comme dans le cas du corollaire préc.

Corollaire III.

4. Soit $b = 2a$ de manière que le nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité tant en plus qu'en moins ſoit double de celui où l'on auroit un réſultat exact, on aura ici pour la probabilité que l'erreur ſoit nulle en prenant le milieu entre n obſervations

$$\frac{1 + 4n(n-1) + \frac{16n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2} + \frac{26n(n-1)\ldots\ldots(n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} + \&c.}{5^n}$$

Donc faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3$, on aura

n	prob.
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{9}{25}$
3	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{29}{125}$
&c.	

Ainsi pour 2 observations l'avantage sera de $\frac{9}{25} - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$, pour trois il sera $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = o$; pour quatre égal à $\frac{29}{125} - \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$; &c. d'où il paroit que le plus grand avantage a lieu en prenant le milieu entre deux observations seulement.

Remarque I.

5. Pour faciliter davantage la solution du problême précédent, il est bon de chercher la loi que suivent les termes de la série qui répresentent les probabilités qui répondent à 1, 2, 3 &c. observations; or si on prend la fraction $\frac{1}{1 - z(a + b(x + x^{-1}))}$ & qu'on la développe en série suivant les puissances de x, on aura comme l'on sait $1 + z(a + b(x + x^{-1})) + z^2(a + b(x + x^{-1}))^2 +$ &c. de sorte que dans cette série le coefficient de z^n sera la puissance n^{eme} de $a + b(x + x^{-1})$; donc si on nomme A', A'', A''' &c. les valeurs de A qui répondent à $n = 1$, 2, 3 &c., c'est-à-dire, les termes sans x des puissances $a + b(x + x^{-2})$, $(a + b(x + x^{-2}))^2$ &c. il est clair que la série $1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 +$ &c. sera égale à la somme des termes sans x de la fraction $\frac{1}{1 - z(a + b(x + x^{-1}))}$ développée suivant les puissances de x, & de x^{-1}; de sorte que si on represente par $Z + Z'\left(x + \frac{1}{x}\right)$ $+ Z''\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) +$ &c. la série qui résulte du développement de cette fraction suivant les puissances de x, & de $\frac{1}{x}$, (car il est facile de voir que la série dont-il s'agit doit avoir nécessairement cette forme) on aura

$Z = 1 + A' z + A'' z^2 +$ &c. ; ainsi connoissant la fonction Z il n'y aura plus qu'à la réduire en série suivant les puissances de z pour avoir les quantités A, A', A'' &c. Pour cela je réduis d'abord le trinome $1 - a z - b z (x + x^{-1})$ en $(p - q x)(p - q x^{-1})$ ce qui me donne $p^2 + q^2 = 1 - a z$, & $p q = b z$; ensuite je réduis la fraction

$$\frac{1}{(p + q x)(p - q x^{-1})} \text{ en } \alpha + \frac{\beta}{p - q x} + \frac{\beta}{p - q x^{-1}}$$

& je trouve $\alpha = \dfrac{1}{q^2 - p^2}$, $\beta = \dfrac{p}{p^2 - q^2}$;

maintenant $\dfrac{1}{p - q x} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{qx}{p^2} + \dfrac{q^2 x^2}{p^3} +$ &c.

& de même $\dfrac{1}{p - q x^{-1}} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{q}{p^2 x} + \dfrac{q^2}{p^3 x^2} +$ &c.

donc on aura $Z = \alpha + \dfrac{2 \beta}{p}$, $Z' = \dfrac{\beta q}{p^2}$, $Z'' = \dfrac{\beta q^2}{p^3}$

$Z''' = \dfrac{\beta q^3}{p^4}$ &c. ;

Donc $Z = \dfrac{1}{q^2 - p^2} + \dfrac{2}{p^2 - q^2} = \dfrac{1}{p^2 - q^2} = \dfrac{1}{(p + q)(p - q)}$;
mais puisque $p^2 + q^2 = 1 - a z$, & $p q = b z$, on aura $p + q = \sqrt{1 - a z + 2 b z}$, $p - q = \sqrt{1 - a z - 2 b z}$; donc $(p + q)(p - q) = \sqrt{(1 - a z)^2 - 4 b^2 z^2}$; donc enfin

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2 a z + (a^2 - 4 b^2) z^2)}}$$

$= 1 + A' z + A'' z^2 + A''' z^3 +$ &c.
desorte que l'on aura par les formules connues

$A' = a$

$$A'' = \frac{3 a A' + 4 b^2 - a^2}{2}$$

$$A''' = \frac{5 a A'' + 2 (4 b^2 - a^2) A'}{3}$$

$$A^{\text{IV}} = \frac{7 a A''' + 3 (4 b^2 - a^2) A''}{4}$$

&c.

Dénotons par P', P'', P''' &c. les probabilités que l' erreur ſoit nulle en prenant le milieu entre 1, 2, 3 &c. obſervations, & l' on aura $P' = \frac{A'}{a+2b}$, $P'' = \frac{A''}{(a+2b)^2}$ $P''' = \frac{A'''}{(a+2b)^3}$ &c.; d' ou $A' = (a+2b)\ P'$, $A'' = (a+2b)^2\ P''$, $A''' = (a+2b)^3\ P'''$ &c. donc ſubſtituant ces valeurs dans les formules précédentes, & faiſant pour plus de ſimplicité $\frac{2b}{a} = r$, on aura $P' = \frac{1}{1+r}$

$$P'' = \frac{3P' + r - 1}{2\ (1+r)}$$

$$P''' = \frac{5P'' + 2\ (r-1)\ P'}{3\ (1+r)}$$

$$P^{IV} = \frac{7P''' + 3\ (r-1)\ P''}{4\ (1+r)}$$

$$P^{V} = \frac{9P^{IV} + 4\ (r-1)\ P'''}{5\ (1+r)}$$

&c.

Remarque II.

6. Si on fait $r = 1$ on aura le cas du corol. 2, où $a = 2b$, & l' on trouvera

$$P' = \frac{1}{2},\ P'' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4},\ P''' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\ \text{\&c.}$$

& en général

$$P^{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}$$

De là on voit que la probabilité diminue toujours à meſure que n augmente, ce que nous avons déjà obſervé dans le corollaire cité; de ſorte qu' en prenant $n = \infty$ la probabilité deviendra infiniment petite, ou nulle; en effet par la quadrature du cercle de Wallis on a (π étant l' arc de 180.° dégrés)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots}$$

c' eſt-à-dire, en prenant $n = \infty$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots\ldots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots 2n-1 \cdot 2n-1 \cdot 2n+1}$$

donc multipliant par $2n + 1$, & tirant la racine carrée on aura

$$\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}$$

donc lorſque $n = \infty$ on aura

$$P^n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 0.$$

Il eſt bon de remarquer que puiſque nous avons trouvé dans le coroll. cité pour la probabilité P^n l' expreſſion

$$\frac{1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)^2 + \&c.}{4^n}$$

on aura, en comparant cette expreſſion avec la précédente, l' équation

$$1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)^2 + \&c.$$
$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \ldots\ldots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} 2^n$$

laquelle eſt d' autant plus remarquable qu' elle ne paroit pas aiſée à démontrer *a priori.*

Remarque III.

7. Par les formules de la Remarque 1ere on aura en général

$$P^n = \frac{(2n-1)P^{n-1} + (n-1)(r-1)P^{n-2}}{n(r+1)}$$

$$P^{n+1} = \frac{(2n+1)P^n + n(r-1)P^{n-1}}{(n+1)(r+1)}$$

$$P^{n+2} = \frac{(2n+3)P^{n+1} + (n+1)(r-1)P^n}{(n+2)(r+1)}$$

&c.

où les expofans $n-2$, $n-1$, n &c. de P ne dénotent pas des puiffances, mais feulement le quantième du rang. Or fi n eft un nombre affez grand, il eft clair que les fractions $\frac{2n-1}{n}$, $\frac{2n+1}{n+1}$, $\frac{2n+3}{n+2}$ &c. feront à très-peu près $=2$; & que les fractions $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{n+1}$, $\frac{n+1}{n+2}$ feront auffi à très-peu près $=1$; de forte qu' on aura dans cette hypothèfe

$$P^n = \frac{P^{n-1} + (r-1)\,P^{n-2}}{r+1}$$

$$P^{n+1} = \frac{P^n + (r-1)\,P^{n-1}}{r+1}.$$

&c.

d' où l' on voit que les quantités P^n, P^{n+1} &c. forment une fuite recurrante dont le dénominateur de la fraction génératrice feroit $x^2 - \frac{x}{r+1} - \frac{r-1}{r+1}$; ainfi on aura en général

$$P^{n+s} = A\left(\frac{1+\sqrt{(r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s + B\left(\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}\right)^s$$

& pour déterminer les coefficiens A, & B, on fuppofera que les termes P^n, & P^{n+1} foient connus, ce qui donnera $P^n = A + B$, &

$$P^{n+1} = A\,\frac{1+\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)} + B\,\frac{1-\sqrt{(4r^2-3)}}{2(1+r)}$$

d' où

$$A = \frac{2(1+r)\,P^{n+1} - (1-\sqrt{(4r^2-3)})\,P^n}{2\sqrt{(4r^2-3)}}$$

$$B = \frac{(1+\sqrt{(4r^2-3)})\,P^n - 2(1+r)\,P^{n+1}}{2\sqrt{(4r^2-3)}}$$

d' où

$$P^{n+s} = \left(\frac{P^n}{2} + \frac{2(1+r)\,P^{n+1} - P^n}{2\,\sqrt{(4\,r^2 - 3)}}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{(4\,r^2 - 3)}}{2\,(1+r)}\right)^s$$
$$+ \left(\frac{P^n}{2} - \frac{2\,(1+r)\,P^{n+1} - P^n}{2\,\sqrt{(4\,r^2 - 3)}}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{(4\,r^2 - 3)}}{2\,(1+r)}\right)^s$$

& cette formule ſera d' autant plus exacte qu' on prendra le nombre n plus grand.

Ainſi après avoir calculé les termes P^n & P^{n+1} ſoit par les formules de l' art. 1, ſoit par celles de la Remarque 1.ere, on pourra trouver, à très-peu près, tous les termes ſuivans par la formule précédente.

Au reſte il eſt facile de voir par cette formule que la probabilité ſera nulle à l' infini; c' eſt-à-dire, lorſque $s = \infty$; en effet il eſt clair que quel que ſoit r, pourvu que ce ſoit un nombre poſitif, les quantités $\frac{1 \pm \sqrt{(4\,r^2 - 3)}}{2\,(1+r)}$ ſeront toujours < 1; car ſuppoſons, s'il eſt poſſible $\frac{1 + \sqrt{(4r^2 - 3)}}{2\,(1+r)} > 1$ on aura donc $4\,r^2 - 2 \pm 2\,\sqrt{(4\,r^2 - 3)}$
$> 4\,(1 + 2\,r + r^2)$ ſavoir
$\pm \sqrt{(4\,r^2 - 3)} > 3 + 4\,r$; &
$4\,r^2 - 3 > 16\,r^2 + 24\,r + 9$ ſavoir
$o > 12\,r^2 + 24\,r + 12$, ce qui ne ſe peut; donc en faiſant $s = \infty$ les quantités $\left(\frac{1 + \sqrt{(4\,r^2 - 3)}}{2\,(1+r)}\right)^s$, & $\left(\frac{1 - \sqrt{(4\,r^2 - 3)}}{2\,(1+r)}\right)^s$ deviendront nulles; & par conſéquent P^{n+s} auſſi.

Scholie.

8. Soit p le réſultat que chaque obſervation devroit donner ſi elle étoit exacte, puiſque on ſuppoſe que l'on puiſſe ſe tromper d' une unité tant en plus qu'en moins, on aura dans chaque obſervation un de ces trois réſultats

ρ, $\rho - 1$, & $\rho + 1$; donc si on a deux observations, & qu'on prenne le milieu entre leurs résultats, c'est-à-dire, la demi somme de ces résultats, on aura un de ces cinq résultats $\frac{2\rho}{2}$, $\frac{2\rho - 1}{2}$, $\frac{2\rho + 1}{2}$, $\frac{2\rho - 2}{2}$, $\frac{2\rho + 2}{2}$; savoir ρ, $\rho - \frac{1}{2}$, $\rho + \frac{1}{2}$, $\rho - 1$, $\rho + 1$; ainsi, dans ce cas, l'erreur pourra être 1, ou $\frac{1}{2}$ tant en plus qu'en moins; on verra de même, qu'en prenant le milieu entre trois observations, l'erreur pourra être, 1, ou $\frac{2}{3}$, ou $\frac{1}{3}$ tant en plus qu'en moins, & ainsi de suite. Ainsi quoique la probabilité que l'erreur soit nulle puisse être plus petite lorsqu'on prend le résultat moyen de plusieurs observations, que lorsque on prend le résultat de chaque observation en particulier; cependant si on cherche la probabilité que l'erreur ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ &c. on trouvera que cette probabilité sera plus grande dans le premier cas que dans le second; en effet, dans le premier cas il n'y a d'autres cas favorables que ceux où l'erreur est absolument nulle; mais dans le second, les cas favorables sont non seulement ceux où l'erreur est nulle, mais aussi ceux où l'erreur est $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$ &c.; & c'est par cette considération qu'il est toujours plus avantageux de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, que de s'en tenir au résultat de chaque observation en particulier. Nous allons examiner la question sous ce point de vue dans le problême suivant.

Problème II.

9. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le problême précédent trouver la probabilité qu' en prenant le milieu entre les réſultats de n obſervations, l' erreur ne ſurpaſſera pas la fraction $\frac{m}{n}$, m étant $< n$.

En prenant le milieu entre les réſultats de n obſervations, il eſt clair que l'erreur peut être, ou o, ou $\pm\frac{1}{n}$, ou $\pm\frac{2}{n}$, ou $\pm\frac{3}{n}$ &c. juſqu'à $\pm\frac{n}{n}$ ſavoir ± 1; ainſi la probabilité que l'erreur ne ſoit pas plus grande que $\pm\frac{m}{n}$, ſera la ſomme des probabilités que l' erreur ſera nulle, ou $\pm\frac{1}{n}$, ou $\pm\frac{2}{n}$ &c. juſqu' à $\pm\frac{m}{n}$. Voyons donc d' abord quelle eſt la probabilité que l' erreur ſera $\pm\frac{\mu}{n}$.

En ramenant cette queſtion aux dès, comme nous l'avons pratiqué dans le probl. 1., il eſt clair qu' elle ſe réduit à chercher la probabilité d' améner $+\mu$, ou $-\mu$ points avec n dès, dont chacun ait a faces marquées zéro, b faces marquées $+1$, & b faces marquées -1. Pour cela il n' y a qu' à élever le trinome $a + b\,(x + x^{-1})$ à la puiſſance n, & le coefficient de x^{μ} dénotera le nombre des cas où la ſomme des points de tous les dès ſera μ, de même que celui de $x^{-\mu}$ dénotera le nombre des cas où la ſomme des points ſera $-\mu$; ainſi la ſomme de ces deux coefficiens diviſée par $(a + 2\,b)^n$, qui eſt le nombre de tous les cas, donnera la probabilité cherchée.

Or on a $(a + b(x + x^{-1}))^n = a^n + n a^{n-1} b (x + x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 (x + x^{-1})^2 +$ &c., & de plus

$$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$$
$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1})$$
$$(x + x^{-1})^4 = x^4 + x^{-4} + 4(x^2 + x^{-2}) + \frac{4 \cdot 3}{2}$$
$$(x + x^{-1})^5 = x^5 + x^{-5} + 5(x^3 + x^{-3}) + \frac{5 \cdot 4}{2}(x + x^{-1})$$

& ainsi de suite;

Donc si on suppose $(a + b(x + x^{-1}))^n = A + B(x + x^{-1}) + C(x^2 + x^{-2}) + D(x^3 + x^{-3}) +$ &c. on aura

$$A = a^n + \frac{2}{1} \cdot \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{n-6} b^6 + \text{\&c.}$$

$$B = n a^{n-1} b + \frac{3}{1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-6)}{2 \cdot 3 \ldots 7} a^{n-7} b^7 + \text{\&c.}$$

$$C = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{4}{1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-5)}{2 \cdot 3 \ldots 6} a^{n-6} b^6 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1) \ldots (n-7)}{1 \cdot 2 \ldots 8} a^{n-8} b^8 + \text{\&c.}$$

& ainsi de suite.

Donc si on appelle M le terme de la série A, B, C &c. dont le quantième sera $\mu + 1$, il est facile de voir qu' on aura

$$M = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-\mu+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\mu} a^{n-\mu} b^{\mu}$$

$$+ \frac{\mu+2}{1} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-\mu-1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\mu+2} a^{n-\mu-2} b^{\mu+2}$$

$$+ \frac{(\mu+4)(\mu+3)}{1\,.\,2} \cdot \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-\mu-3)}{1\,.\,2\ldots\mu+4} a^{n-\mu-4} b^{\mu+4}$$

$+$ &c.

Or ce terme M eſt le coefficient des puiſſances x^{μ} & $x^{-\mu}$; de ſorte qu' on aura $\frac{2\,M}{(a+2\,b)^n}$ pour la probabilité que l'erreur ſoit $\pm \frac{\mu}{n}$. Ainſi la probabilité que l' erreur ne ſurpaſſera pas $\pm \frac{\mu}{n}$ ſera repréſentée par la ſérie

$$\frac{A + 2\,B + 2\,C + 2\,D + \&c. + 2\,M}{(a+2\,b)^n}.$$

Pour faciliter la recherche des valeurs de A, B, C &c. il eſt bon de faire voir comment ces quantités dépendent les unes des autres; pour cela on reprendra l' équation

$$(a + b\,(x + x^{-1}))^n = A + B\,(x + x^{-1})$$
$$+ C\,(x^2 + x^{-2}) + D\,(x^3 + x^{-3}) + \&c.$$

& prenant les différentielles logarithmiques on aura après avoir diviſé par $\frac{dx}{x}$

$$\frac{n\,b\left(x - \frac{1}{x}\right)}{a + b\,(x + x^{-1})} = \frac{B\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2\,C\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \&c.}{A + B\,(x + x^{-1}) + C\,(x^2 + x^{-2}) + \&c}$$

donc multipliant en croix, il viendra

$$n\,b\,A\,(x - x^{-1}) + n\,b\,B\,(x^2 - x^{-2}) + n\,b\,C\,(x^3 - {}^{-3} - x + x^{-1})$$
$$+ n\,b\,D\,(x^4 - x^{-4} - x^2 + x^{-2}) + \&c. =$$
$$a\,B\,(x - x^{-1}) + 2\,a\,C\,(x^2 - x^{-2}) + 3\,a\,D\,(x^3 - x^{-3}) + \&c.$$
$$+ b\,B\,(x^2 - x^{-2}) + 2\,b\,C\,(x^3 - x^{-3} + x - x^{-1})$$
$$+ 3\,b\,D\,(x^4 - x^{-4} + x^2 - x^{-2}) + \&c.$$

de ſorte qu' en comparant les termes on aura

$nb\,(A-C) = aB + 2bC$

$nb\,(B-D) = 2aC + b\,(B+3D)$

$nb\,(C-E) = 3aD + b\,(2C+4E)$

&c.

d' où en faiſant pour plus de ſimplicité $\frac{a}{b} = K$, on aura

$$C = \frac{nA - KB}{n+2}$$

$$D = \frac{(n-1)B - 2KC}{n+3}$$

$$E = \frac{(n-2)C - 3KD}{n+4}$$

&c.

Ainſi en connoiſſant les deux premiers termes A, & B on pourra trouver ſucceſſivement tous les autres.

Corollaire.

10. Suppoſons, comme dans l' art. 2, $a = b$, enſorte que l' on ait $K = 1$, & faiſant ſucceſſivement n = 1, 2, 3 &c. & $a = 1$, ce qui eſt permis, on trouvera les valeurs ſuivantes

n	A	B	C	D	E	F	G	&c.
1	1	1	0	0	0	0	0	
2	3	2	1	0	0	0	0	
3	7	6	3	1	0	0	0	
4	19	16	10	4	1	0	0	
5	51	45	30	15	5	1	0	
6	141	126	90	50	21	6	1	
&c.								

De là on formera la table ſuivante des probabilités

Valeurs

Valeurs du nombre n des obſerv.	Probabilités que l' erreur ne ſurpaſſera pas les fractions $\pm\frac{0}{n}$	$\pm\frac{1}{n}$	$\pm\frac{2}{n}$	$\pm\frac{3}{n}$	$\pm\frac{4}{n}$	$\pm\frac{5}{n}$
1	$\frac{1}{3}$	...	...	...	...	...
2	$\frac{3}{9}$	$\frac{7}{9}$	...	...	...	. .
3	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{25}{27}$	...	...	...
4	$\frac{19}{81}$	$\frac{51}{81}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{79}{81}$	...	...
5	$\frac{51}{243}$	$\frac{141}{243}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{231}{243}$	$\frac{241}{243}$	...
6	$\frac{141}{729}$	$\frac{393}{729}$	$\frac{573}{729}$	$\frac{673}{729}$	$\frac{715}{729}$	$\frac{727}{729}$
&c.						

On voit par cette table, qu'en prenant le milieu entre deux obſervations, la probabilité que l'erreur ſoit nulle ſera $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, & celle que l' erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ tant en plus qu' en moins ſera $\frac{7}{9}$; or dans chaque obſervation particulière, il y a $\frac{1}{3}$ de probabilité que l' erreur ſera o, & comme (hyp.) l' erreur ne peut être que o ou ± 1, il eſt clair que la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ ſera de même $\frac{1}{3}$; ainſi quoique la probabilité que l'erreur ſera nulle ſoit la même, ſoit qu'on prenne le réſultat moyen entre deux obſervations, ou qu'on prenne le réſultat particulier d'une obſervation unique, cependant la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\frac{1}{2}$ ſera plus grande dans le premier cas que dans le ſecond, ces deux probabilités étant comme $\frac{7}{9}$: $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, dans la raiſon de $7 : 3$.

De même en prenant le milieu entre trois obſervations on aura $\frac{7}{27}$ pour la probabilité que l'erreur ſera nulle, $\frac{29}{27}$ pour la probabilité que l'erreur ne ſera pas $> \pm \frac{1}{3}$, & $\frac{25}{27}$ pour celle que l'erreur ne ſera pas $> \pm \frac{2}{3}$; mais dans chaque obſervation particulière la probabilité que l'erreur ſoit nulle eſt $\frac{1}{3}$, & celle que l'erreur ne ſurpaſſe pas $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ eſt de même $\frac{1}{3}$ parceque (hyp.) l'erreur ne peut être que nulle, ou ± 1; donc la probabilité que l'erreur ſoit nulle ſera, à la vérité, plus grande dans le réſultat particulier d'une obſervation unique que dans le réſultat moyen de trois obſervations, & cela dans la raiſon de $9 : 7$; mais, en revanche, la probabilité que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\pm \frac{1}{3}$ ſera plus grande dans le ſecond cas que dans le premier en raiſon de $19 : 9$, & celle que l'erreur ne ſurpaſſera pas $\pm \frac{2}{3}$ le ſera encore davantage, cette probabilité étant, dans le fecond cas, plus grande que dans le premier en raifon de 25 : 9.

Voilà donc en quoi confifte principalement l'avantage qu'il y a à prendre le milieu entre les réfultats de plufieurs obfervations. Pour rendre la chofe encor plus fenfible nous allons rechercher les probabilités que l'erreur ne furpaffera pas la fraction $\frac{1}{2}$ en fuppofant fucceffivement $n = 1\ 2,\ 3,$ &c. c'eft-à-dire, pour une obfervation unique, pour deux, pour trois &c., & nous aurons

n	1	2	3	4	5	6	&c.
prob.	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{673}{729}$	&c.

ou bien en reduifant au même dénominateur 729.

n	1	2	3	4	5	6	&c.
prob.	$\frac{243}{729}$,	$\frac{567}{729}$,	$\frac{513}{729}$,	$\frac{639}{729}$,	$\frac{603}{729}$,	$\frac{673}{729}$,	&c.

On voit par là que la probabilité que l'erreur ne furpaffera pas $\frac{1}{2}$ va en augmentant à mefure que l'on prend un plus grand nombre d'obfervations, mais avec cette différence, que la probabilité eft plus grande pour deux obfervations que pour trois, pour quatre que pour cinq, & en général pour un nombre pair quelconque que pour le nombre impair qui le fuit immédiatement; de forte que dans l'hypothèfe dont il s'agit, il eft plus avantageux de ne prendre le milieu qu'entre un nombre quelconque pair d'obfervations.

Remarque I.

11. Nous avons vu dans l'art. 5. que fi on développe la fraction

$\dfrac{1}{1 - z\left(a + b\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)}$ en une férie de cette forme

$$Z + Z'\left(x + \frac{1}{x}\right) + Z''\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \&c.$$

Z, Z', Z'' &c. étant des fonctions de z; on aura

$$Z = \frac{1}{p^2 - q^2},\ Z' = \frac{\beta\, q}{p^2} = \frac{q}{p}\ Z,\ Z'' = \frac{\beta q^2}{p^3} = \frac{p}{q}\ Z'$$

& ainſi de ſuite, p, & q étant telles que $p^2 + q^2 = 1 - a z$ & $p q = b z$, ce qui donne $p^2 - q^2 = \sqrt{(1 - 2 a z + (a^2 - 4 b^2) z^2)}$ & de là $\frac{q}{p} = \frac{1 - a z - \sqrt{(1 - 2 a z + (a^2 - 4 b^2) z^2)}}{2 b z}$
de ſorte qu' en faiſant pour plus de ſimplicité

$$\zeta = \sqrt{(1 - 2 a z + (a^2 - 4 b^2) z^2)}$$

on aura

$$Z = \frac{1}{\zeta},\ Z' = \frac{1 - a z - \zeta}{2 b z \zeta},$$

$$Z'' = \left(\frac{1 - a z - \zeta}{2 b z}\right)^2 \frac{1}{\zeta},$$ & en général

$$Z^\mu = \frac{\left(\frac{1 - a z - \zeta}{2 b z}\right)^\mu}{\zeta}.$$

Or ſi on développe cette quantité en une ſérie de puiſſances rationelles & entieres de z, on verra aiſément par ce que nous avons dit plus haut, que le coefficient d' une puiſſance quelconque, comme z^n, dénotera le nombre des cas où la ſomme des erreurs de n obſervations pourra être $+ \mu$, ou $- \mu$, de ſorte que le double de ce coefficient exprimera le nombre de tous les cas où l' erreur moyenne ſera $\pm \frac{\mu}{n}$. De là il eſt facile de conclure que la quantité

$$\frac{1 + 2\ \frac{1 - a z - \zeta}{2\ b\ z} + 2 \left(\frac{1 - a z - \zeta}{2 b z}\right)^2 + \&c. + 2 \left(\frac{1 - a z - \zeta}{1\ b\ z}\right)^\mu}{\zeta}$$

étant regardée comme une fonction de z & développée ſuivant les puiſſances de cette variable, donnera une ſérie de telle nature que le coefficient d' une puiſſance quelconque z^n exprimera juſtement le nombre de cas où l' erreur moyenne pourra être renfermée dans ces limites $-\frac{\mu}{n}$, $+\frac{\mu}{n}$; de ſorte que ce coefficient étant diviſé par le nombre total de cas $(a + 2b)^n$ on aura la valeur de la probabilité que l' erreur moyenne ne ſurpaſſera pas la fraction $\frac{\mu}{n}$ ſoit en plus ou en moins. Or la quantité dont il s' agit n' étant autre choſe qu' une ſérie géometrique, elle peut ſe mettre ſous cette forme plus ſimple

$$2\,\frac{1-\left(\frac{1-az-\zeta}{2bz}\right)^{\mu+1}}{\zeta\left(1-\frac{1-az-\zeta}{2bz}\right)}-1$$

Ainſi toute la difficulté conſiſtera à reduire cette même quantité en ſérie infinie qui procède ſuivant les puiſſances de z. Pour en venir plus facilement à bout, on la ſuppoſera $=$ à une indéterminée y, & l' on aura une équation entre y, & z, qu' on pourra, par des différentiations, délivrer, tant de la puiſſance $\mu + 1$, que de l' irrationalité de ζ; par ce moyen on aura une équation différentielle du ſecond degré entre y, & z; & il n' y aura plus qu' à ſuppoſer $y = 1 + Az + Bz^2 +$ &c. & déterminer les coefficiens A, B &c. par la comparaiſon des termes.

Au reſte comme ce calcul eſt un peu long nous nous contentons de l' indiquer ici, pour mettre ſur la voie ceux qui voudront pouſſer cette théorie plus loin.

Scholie.

12. Nous avons ſuppoſé dans les deux problêmes précédens qu' il y avoit un nombre égal de cas pour avoir une erreur poſitive, & pour en avoir une négative; ſi cela n' étoit pas ainſi, & que le nombre des cas qui donneroient o, $+ 1$, & $- 1$ d' erreur fuſſent a, b, & c, alors on pourroit reſoudre les problêmes avec la même facilité en conſidérant le trinome $a + b\,x + c\,x^{-1}$, à la place de $a + b\,(x + x^{-1})$ pour avoir le nombre des cas où l' on auroit une erreur moyenne donnée; & prenant enſuite $(a + b + c)^n$ pour avoir le nombre total des cas à la place de $(a + 2\,b)^n$; on pourroit même, ſans faire un nouveau calcul, adapter à ce cas-ci les formules que nous avons déjà trouvées; car ſi dans le trinome $a + b\,x + \frac{c}{x}$ on met $x\sqrt{\frac{c}{b}}$ à la place de x, il deviendra $a + \sqrt{b\,c}\left(x + \frac{1}{x}\right)$; ainſi il n' y aura qu' à mettre dans le trinome $a + b\left(x + \frac{1}{x}\right)$ des problêmes précédens $\sqrt{b\,c}$ à la place de b, & enſuite $x\sqrt{\frac{b}{c}}$ à la place de x; du reſte nous allons traiter ce cas d' une manière beaucoup plus générale dans le problême ſuivant.

Problême III.

13. Suppoſant que chaque obſervation ſoit ſujette à une erreur d' une unité en moins, & à une erreur de r unités en plus, & que le nombre des cas qui peuvent donner o, $- 1$, $+ r$ d' erreur ſoit reſpectivement a, b, c, on demande qu' elle eſt la probabilité que l' erreur moyenne de pluſieurs obſervations ſera renfermée dans des limites données.

Soit n le nombre des obſervations dont on veut prendre le milieu, on formera la puiſſance n^{eme} du trinome $a + \frac{b}{x} + c\,x^r$, & le coefficient d'une puiſſance quelconque x^μ dénotera le nombre des cas où la ſomme des erreurs ſera μ, & par conſéquent, où l'erreur moyenne ſera $\frac{\mu}{n}$. Conſiderons donc la quantité $\left(a + \frac{b}{x} + c\,x^r\right)^n$, laquelle ſe réduit à $\frac{(b + x\,(a + c\,x^r))^n}{x^n}$, & l'on aura, comme l'on ſait, $(b + x\,(a + c\,x^r))^n =$

$$b^n + n\,b^{n-1}\,x\,(a + c\,x^r) + \frac{n\,(n-1)}{2}\,b^{n-2}\,x^2(a+cx^r)^2 + \&c.$$

d'où il eſt facile de voir que le coéfficient d'une puiſſance quelconque x^s ſera

$$\frac{n\,(n-1)\ldots\ldots n-s+1}{2\,.\,3\ldots\ldots s}\,b^{n-s}\,a^s$$
$$+\frac{n\,(n-1)\ldots n-s+r}{2\,.\,3\ldots\ldots s-r}\,.\,\frac{s-}{1}\,b^{n-s+r}\,a^{s-r}\,c$$
$$+\frac{n\,(n-1)\ldots n-s+2r}{2\,.\,3\ldots s-2r}\,.\,\frac{(s-2r)\,(s-2r-1)}{1\,.\,2}\,b^{n-s+2r}\,a^{s-2r}\,c^3$$
$$+\ \&c.$$

cette ſérie étant continuée juſqu'à ce que l'on parvienne à des termes négatifs, donc ce coéfficient ſera celui de la puiſſance x^{s-n} dans la quantité $\left(a + \frac{b}{x} + c\,x^r\right)^n$; donc ſi on déſigne en général par (μ) le coéfficient de la puiſſance x^μ de cette derniere quantité, on aura

$$(\mu) = \frac{n\,(n-1)\ldots\ldots 1-\mu}{2\,.\,3\ldots\mu+n}\,.\,b^{-\mu}\,a^{\mu+n}$$
$$+\frac{n\,(n-1)\ldots\ldots r-\mu}{2\,.\,3\ldots\mu+n-r-1}\,b^{r-\mu}\,a^{\mu+n-r}\,c$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots\ldots 2r-\mu}{2.2.3\ldots\mu+n-2r-2}\, b^{2r-\mu}\, a^{\mu+n-2r}\, c^{2}$$

$+$ &c.

où il faudra toujours omettre les termes qui contiendroient des puissances négatives de a, ou b.

Donc, puisque pour n observations la somme de tous les cas est $(a+b+c)^n$, on aura pour la probabilité que l'erreur moyenne soit $\frac{\mu}{n}$ la quantité $\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$; & de là la probabilité que l' erreur moyenne sera renfermée entre ces limites $-\frac{p}{n}$, $+\frac{q}{n}$ sera exprimée par la série

$$\frac{(-p+1)+\&c.+(-1)+(o)+(1)+\&c.+(q-1)}{(a+b+c)^n}$$

Problême IV.

14. Supposant tout, comme dans le problême précédent, on demande quelle est l' erreur moyenne pour laquelle la probabilité est la plus grande.

Nous avons vu que la probabilité que l' erreur moyenne soit $\frac{\mu}{n}$ est $=\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$, (μ) étant le coéfficient de la puissance x^μ du trinome $\left(a+\frac{b}{x}+c\,x^r\right)^n$; ainsi il ne s' agit que de savoir quel est le terme de la puissance n^{ieme} de $a+\frac{b}{x}+c\,x^r$ qui aura le plus grand coéfficient; pour cela il est clair qu' il n' y a qu' à chercher le plus grand terme du trinome $a+b+c$ élevé à la puissance n; car supposant que ce terme soit $\pi\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$, α, β, γ étant les exposans de a, b, c dont la somme doit être égale à n, & π le coefficient de ce terme, il n' y aura

qu'

qu' à mettre $\frac{b}{x}$ à la place de b, & cx^r à la place de c, & l' on aura $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{-\beta+r\gamma}$ pour le terme cherché de la puissance n^{eme} du trinome $a + \frac{b}{x} + cx^r$; ainsi on fera $-\beta + r\gamma = \mu$, & l' on aura $\frac{r\gamma - \beta}{n}$ pour l' erreur moyenne dont la probabilité sera la plus grande.

Or, par les règles des combinaisons, on sait que le coefficient π du terme $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma$, doit être

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \gamma}$$

dénotons ce terme par M ensorte que l' on ait

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \ldots n\, a^\alpha b^\beta c^\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \gamma} = M$$

& il faudra qu' en faisant varier les exposans α, β, γ, la valeur de M diminue; faisons donc varier α d' une unité, ensorte que α devienne $\alpha + 1$, & comme $\alpha + \beta + \gamma = n$, il faudra que β, ou γ diminue en même tems d' une unité; or il est facile de voir que si dans la valeur de M on met $\alpha + 1$ pour α, & $\beta - 1$ pour β, cette valeur deviendra $\frac{\beta}{\alpha+1} \times \frac{aM}{b}$, donc $\frac{\beta}{\alpha+1} \times \frac{aM}{b} < M$

& par conséquent $\frac{\beta}{\alpha+1} \times \frac{a}{b} < 1$;

réciproquement, si on augmente β d' une unité, & qu' on diminue α aussi d' une unité, on trouvera la condition $\frac{\alpha}{\beta+1} \times \frac{b}{a} < 1$; ainsi il faudra que l'on ait en même tems $\frac{\alpha}{\beta+1} < \frac{a}{b}$ & $\frac{\alpha+1}{\beta} > \frac{a}{b}$. Or c' est ce qui aura lieu si $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$;

On trouvera de la même manière $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a}{c}$; de sorte qu'en prenant un coefficient indéterminé p, on aura dans le cas du *maximum* $\alpha = p\,a$, $\beta = p\,b$, $\gamma = p\,c$; mais $\alpha + \beta + \gamma = n$; donc $p = \frac{n}{a+b+c}$; donc enfin $\alpha = \frac{n\,a}{a+b+c}$, $\beta = \frac{n\,b}{a+b+c}$, $\gamma = \frac{n\,c}{a+b+c}$.

Si les quantités $\frac{n\,a}{a+b+c}$, $\frac{n\,b}{a+b+c}$, $\frac{n\,c}{a+b+c}$ sont des nombres entiers, on aura exactement $\alpha = \frac{n\,a}{a+b+c}$, $\beta = \frac{n\,b}{a+b+c}$, $\gamma = \frac{n\,c}{a+b+c}$ comme nous venons de le trouver; mais si ces quantités ne sont pas des nombres entiers, alors il faudra prendre pour α, β, γ les nombres entiers qui en seront les plus proches; on peut prendre cependant, pour plus de simplicité, ces mêmes quantités pour les valeurs de α, β, γ, car l'erreur, s'il y en a, ne pourra jamais être que très-petite; de cette manière nous aurons pour l'erreur moyenne qui a la plus grande probabilité l'expression $\frac{r\gamma - \beta}{n} = \frac{r\,c - b}{a+b+c}$.

Corollaire.

15. De là il s'ensuit qu'on peut toujours regarder la quantité $\frac{r\,c - b}{a+b+c}$ comme l'erreur du résultat moyen, & qu'ainsi on peut prendre la même quantité pour la correction de ce résultat.

Lorsque $r = 1$, & $c = b$, comme dans l'hypothèse du prob. 1, la correction du résultat moyen devient nulle; elle le seroit aussi si l'on avoit $b = r\,c$; mais dans tous les autres cas elle ſera d' autant plus grande que $r\,c$ différera davantage de b.

Problême V.

16. On ſuppoſe que chaque obſervation ſoit ſujette à des erreurs quelconques données, & qu'on connoiſſe en même tems le nombre des cas, où chaque erreur peut avoir lieu; on demande la correction qu' il faudra faire au réſultat moyen de pluſieurs obſervations.

Soient p, q, r, s &c. les erreurs auxquelles chaque obſervation eſt ſujette, & a, b, c, d &c. les cas qui peuvent donner ces erreurs, ſavoir a le nombre des cas qui donneroient l' erreur p, b le nombre des cas qui donneroient l' erreur q, & ainſi des autres; il eſt clair, par ce que nous avons demontré dans les problêmes précédens, que ſi on élève le polinome $a\,x^p + b\,x^q + c\,x^r +$ &c. à la puiſſance n, & qu' on dénote par M le coefficient de la puiſſance x^μ, on aura $\frac{M}{(a + b + c + \&c.)^n}$ pour la probabilité que l' erreur du réſultat moyen de n obſervations ſoit $\frac{\mu}{n}$. Or on ſait par la théorie des combinaiſons que le coefficient M ſera de cette forme

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots n\; a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots\ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots \alpha \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots \quad 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots \gamma \ldots\ldots}$$

où les expoſans α, β, γ &c. doivent être tels que $\alpha + \beta + \gamma +$ &c. $= n$, & $\alpha\,p + \beta\,q + \gamma\,r +$ &c. $= \mu$ De plus, il eſt facile de démontrer, par une méthode ſemblable à celle du problême précédent, que le coéfficient M ſera le plus grand lorſque on aura

$$\alpha = \frac{n\;a}{a + b + c + \&c.}$$

$$\beta = \frac{n\;b}{a + b + c + \&c.}$$

$$\gamma = \frac{n\;c}{a + b + c + \&c.}$$

d' où il s' ensuit, que l' erreur moyenne, pour laquelle la probabilité sera la plus grande, sera exprimée par $\frac{\mu}{n} =$

$$\frac{ap + bq + cr + \&c.}{a + b + c + \&c.}$$

Ainsi cette quantité représentera la correction qu' il faudra faire au résultat moyen de plusieurs observations.

Corollaire I.

17. Si on regarde les quantités a, b, c &c. comme des poids appliqués à une droite indéfinie, à des distances égales à p, q, r &c. d' un point fixe pris dans cette droite, & qu' on cherche le centre de gravité de ces poids, la distance de ce centre au point fixe sera la correction qu' il faudra faire au résultat moyen de plusieurs observations; cela suit évidemment de la formule que nous avons trouvée plus haut pour la valeur de cette correction.

Corollaire II.

18. Donc, si on suppose que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles, qui peuvent être comprises entre des limites données, & qu' on connoisse la courbe de la facilité des erreurs, dans laquelle les abscisses étant supposées représenter les erreurs, les ordonnées répresentent les facilités de ces erreurs, il n' y aura qu' à chercher le centre de gravité de l' aire totale de cette courbe, & l' abscisse répondante à ce centre exprimera la correction du résultat moyen. De là on voit que si la courbe, dont il s'agit, est égale, est semblable de côté & d' autre de l' ordonnée qui passe par l' origine des abscisses, ensorte que cette ordonnée soit un diamêtre de la courbe dont il s' agit, alors la correction sera nulle, le centre de gravité tombant nécessairement dans le diamêtre.

Ce cas a lieu toutes les fois que les erreurs peuvent être également positives & négatives.

Problême VI.

19. Je suppose qu'on ait vérifié un instrument quelconque, & qu'ayant réitéré plusieurs fois la même vérification on ait trouvé différentes erreurs, dont chacune se trouve répetée un certain nombre de fois; on demande quelle est l'erreur qu'il faudra prendre pour la correction de l'instrument.

Soient p, q, r &c. les erreurs trouvées, & soient α, β, γ &c. les nombres qui marquent combien de fois chaque erreur s'est trouvée répétée en faisant n vérifications; supposons que le nombre des cas qui peuvent donner l'erreur p, ou q, ou r &c. soit désigné respectivement par a, b, c &c.; qu'on élève le polinome $a\,x^p + b\,x^q + c\,x^r +$ &c. à la puissance n, & soit $N\,(a\,x^p)^\alpha\,(b\,x^q)^\beta\,(c\,x^r)^\gamma \ldots$ un terme quelconque de ce polinome, le coefficient $N\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma \ldots$ de la puissance $p\,\alpha + q\,\beta + r\,\gamma +$ &c. de x divisé par $(a + b + c + \&c.)^n$ dénotera la probabilité que les erreurs p, q, r &c. se trouvent combinées ensemble, de manière que p soit répété α fois, q β fois, r γ fois, & ainsi des autres. Ainsi cette probabilité sera la plus grande dans la combinaison où la valeur de $N\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma \ldots$ &c. sera la plus grande;

mais on a $N. = \dfrac{1.2.3 \ldots\ldots n}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta . 1.2.3 \ldots \gamma \ldots}$

comme nous l'avons déja vu dans le problême précédent; donc, par le même problême, la plus grande valeur de $N\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma \ldots$ aura lieu lorsque

$$\alpha = \frac{n\,a}{a + b + c + \&c.}$$

$$\beta = \frac{n\,b}{a + b + c + \&c.}$$

$$\gamma = \frac{n\,c}{a + b + c + \&c.}$$

équations par lesquelles on pourra déterminer les inconnues a, b, c &c.; & l' on aura, en faisant $a + b + c +$ &c. $= s$, $a = \frac{s\,\alpha}{n}$, $b = \frac{s\,\beta}{n}$, $c = \frac{s\,\gamma}{n}$ &c.

Or nous avons démontré dans le problême cité, que la correction qu' il faut faire au résultat moyen d' un nombre quelconque d'observations est exprimée par $\frac{ap + bq + cr + \&c.}{a + b + c + \&c.}$, donc, mettant dans cette expression les valeurs de a, b, c &c. que nous venons de trouver, la correction, dont il s' agit, deviendra

$$\frac{\alpha\, p + \beta\, q + \gamma\, r + \&c.}{n}$$

c' est-à-dire, égale à l' erreur moyenne entre toutes les erreurs particulières que les n vérifications ont données.

Corollaire.

20. Si on vouloit tenir compte aussi, au moins d' une manière approchée, des erreurs intermédiaires auxquelles l' instrument pourroit être sujet, il n' y auroit qu' à prendre, dans une ligne droite indéfinie, des abscisses proportionelles aux erreurs trouvées p, q, r &c. comme dans l' art. 17., & y ayant appliqué des ordonnées proportionelles aux quantités a, b, c &c. on feroit passer par les extrémités p, q, r &c. une ligne parabolique; on chercheroit ensuite le centre de gravité de l' aire de toute la courbe, & la perpendiculaire, abaissée de ce centre sur l' axe, y couperoit une abscisse qui seroit la correction de l' instrument.

On voit par là comment on peut connoître *a posteriori* la loi de la facilité de chacune des erreurs auxquelles un instrument peut-être sujet.

Rémarque I.

21. On a trouvé ci-dessus que la plus grande probabilité a lieu lorsque $a = \frac{s\alpha}{n}$, $b = \frac{s\beta}{n}$, $c = \frac{s\gamma}{n}$ &c. de sorte que les valeurs de a, b, c &c. sont les plus probables qu' on puisse supposer ; si on vouloit savoir de plus quelle est la probabilité que ces mêmes valeurs ne s' ecarteront pas de la vérité d' une quantité quelconque $\pm \frac{rs}{n}$, il n' y auroit qu' à mettre dans l' expression générale de la probabilité $\frac{N a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots}{s^{n}}$ (prob. préc.) au lieu de a, b, c &c. les quantités $\frac{s(\alpha + x)}{n}$, $\frac{s(\beta + y)}{n}$, $\frac{s(\gamma + z)}{n}$ &c. & faisant successivement x, y, z &c. $= \pm 1, \pm 2, \pm 3$ &c. $\pm r$, ensorte, cependant, que l'on ait toujours $x + y + z +$ &c. $= o$, à cause que $a + b + c +$ &c. $= s$ & $\alpha + \beta + \gamma +$ &c. $= n$ (hyp.) on aura autant de probabilités particulières, dont la somme sera la probabilité cherchée.

Soit P la probabilité que l' on ait $a = \frac{s\alpha}{n}$, $b = \frac{s\beta}{n}$, $c = \frac{s\gamma}{n}$ &c. mettant ces valeurs dans l' expression précédente on aura

$$P = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{n^{n}} \times \frac{\alpha^{\alpha}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha} \times \frac{\beta^{\beta}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \beta} \times \ldots$$

Soit de plus Q la probabilité que l' on ait $a = \frac{s(\alpha + x)}{n}$, $b = \frac{s(\beta + y)}{n}$ &c. on aura la valeur de Q en mettant ces valeurs dans la même expression, & il est facile de voir qu' on aura

$$Q = P \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\beta} \left(1 + \frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma} \ldots$$

Donc, si on fait en général

$$V = \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(1 + \frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\ldots$$

& que $\int v$ dénote la somme de toutes les valeurs particulières de v, en faisant varier x, y, z &c. depuis o jusqu' à $+ r$, & ayant soin que l' on ait toujours $x + y + z +$ &c. $= o$, la probabilité cherchée sera égale à $P \int v$.

Comme il n' est pas facile de trouver l' intégrale $\int v$, surtout lorsqu' il y a plus de deux variables, on pourra se contenter de l' avoir d' une manière approchée; pour cela il n' y aura qu' à prendre une valeur moyenne de v & la multiplier par le nombre de toutes les valeurs particulières de v qui doivent entrer dans l'intégrale $\int v$; & la difficulté ne consistera qu' à trouver ce nombre. Or si on désigne par m le nombre des quantités α, β, γ &c. il est facile de concevoir que le nombre, dont-il s' agit, ne sera autre chose que le coefficient de u^{o}, c' est-à-dire, le terme tout connu de la série qui représente la puissance m du polinome $u^{-r} + u^{-r+1} +$ &c. $+ u^{-1} + 1 + u +$ &c. $+ u^{r-1} + u^{r}$. Qu' on dénote ce terme par T, & l' on aura, comme nous le démontrerons plus bas

$$T = \frac{(mr+1)(mr+2)(mr+3)\ldots\ldots(mr+m-1)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots m-1}$$
$$- m\frac{((m-2)r)\;((m-2)r+1)\;((m-2)r+2)\ldots((m-2)r+m-2)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2}\frac{((m-4)r-1)\;((m-4)r)\;((m-4)r+1)\ldots\ldots((m-4)r+m-3)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots m-1}$$
$$- \&c.$$

en continuant cette série, seulement jusqu' à ce que quelqu' un des facteurs $mr + 1$, $(m - 2)r$, $(m - 4)r - 1$ &c. devienne négatif.

Donc

Donc, si W est la valeur moyenne de V, on aura, pour la valeur approchée de $\int v$, la quantité $T\,W$; & la probabilité cherchée sera à peu près égale à $P\,T\,W$

Si, au lieu de prendre pour W la valeur moyenne de V, on prend la plus petite, il est clair que $T\,W$ sera nécessairement moindre que la véritable valeur de $\int v$; & par conséquent la probabilité cherchée sera nécessairement plus grande que $P\,T\,W$; ainsi on pourra parier avec avantage $P\,T\,W$ contre $1 - P\,T\,W$ qu' en faisant $\frac{a}{s} = \frac{\alpha}{n}$, $\frac{b}{s} = \frac{\beta}{n}$, $\frac{c}{s} = \frac{\gamma}{n}$ &c. on ne se trompera pas d' une quantité plus grande que $\frac{r}{n}$ tant en plus qu'en moins.

Remarque II.

21. Supposons que n soit un nombre très-grand, & que, par conséquent, les nombres α, β, γ &c. dont la somme est $= n$ soient aussi très grands; pour trouver dans ce cas les valeurs de P & de V on remarquera 1.° que lorsque x est un très-grand nombre on a, à très peu près,

$$l\,1 + l\,2 + l\,3 + \&c. + l\,u = \frac{1}{2}\,l\,\pi + \left(u + \frac{1}{2}\right) l\,u - u$$

π étant le rapport de la périphérie du cercle au rayon; d' où il suit que l' on aura

$$l\,\frac{1\,.\,2\,.\,3\,....\,u}{u^u} = \frac{1}{2}\,l\,\pi + \frac{1}{2}\,l\,u - u,$$

& par conséquent

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\,...\,u}{u^u} = \frac{\sqrt{(\pi\,u)}}{e^u}$$

donc, à cause de $\alpha + \beta + \gamma + \&c. = n$, on aura

$$P = \sqrt{\left(\frac{\pi^n}{(\pi\alpha)\,(\pi\beta)\,(\pi\gamma)\,....}\right)}$$

2.° Si on prend le logarithme de V on aura

$$lV = \alpha l\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) + \beta l\left(1 + \frac{y}{\beta}\right) + \gamma l\left(1 + \frac{z}{\gamma}\right) + \&c.$$

mais $l\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \&c.$

donc, à cause de $x + y + z + \&c. = o$,
on aura, à très peu près,

$$lV = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \&c.\right)$$

& de là

$$V = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \&c.\right)}.$$

Soit maintenant $x = \xi\sqrt{n}$, $y = \Psi\sqrt{n}$ $z = \zeta\sqrt{n}$ &c.,
& $\frac{\alpha}{n} = A$, $\frac{\beta}{n} = B$, $\frac{\gamma}{n} = C$ &c. on aura $\xi + \Psi + \zeta + \&c. = o$
& $A + B + C + \&c. = 1$; donc,

$$P = \frac{1}{(\pi n)^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{(ABC\ldots)}} \quad \&$$

$$V = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \&c.\right)}$$

Or, comme l'incrément où la différence des quantités x, y, z &c. est $= 1$, la différence des variables ξ, Ψ, ζ &c. sera $= \frac{1}{\sqrt{n}}$ &, par conséquent, infiniment petite; de sorte que, si on appelle cette différence $d\theta$, on aura

$$P = \frac{d\theta^{m-1}}{\sqrt{(\pi^{m-1} ABC\ldots)}}$$

Donc

$$Pv = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \&c.\right)} d\theta^{m-1}}{\sqrt{(\pi^{m-1} A.A.C\ldots)}}$$

Donc, si on intègre la différentielle

$$\frac{d\,\theta^{m-1}}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A}+\frac{\Psi^2}{B}+\frac{\zeta^2}{C}+\&c.\right)}}$$

$m-1$ fois, en mettant d'abord à la place de ξ sa valeur $-\Psi-\zeta-$ &c. & faisant varier ensuite successivement les variables Ψ, ζ &c. de la même différentielle $d\,\theta$, & qu'on complette l'intégrale, ensorte que les valeurs de ξ, Ψ, ζ &c. s'étendent depuis $-\rho$ jusqu'à ρ (en faisant $r=\rho\sqrt{n}$) on aura, en nommant cette intégrale R, la quantité

$$\frac{R}{\sqrt{(\pi^{m-1}ABC\ldots)}}$$

pour la probabilité que les valeurs de a, b, c &c. seront exactes à $\frac{\rho s}{\sqrt{n}}$ prés.

Soit par exemple $m=2$, ensorte que l'on n'ait trouvé que deux erreurs différentes, dont l'une ait été répétée α fois, & l'autre β fois dans un nombre très-grand n de vérifications de l'instrument; en ce cas il n'y aura qu'une seule intégration à faire, & la différentielle à intégrer sera, en mettant $-\Psi$ à la place de ξ, & faisant $d\,\theta=d\,x$,

$$\frac{d\,x}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\Psi^2}}$$

laquelle n'est intégrable par aucune des méthodes connues, à moins qu'on ne réduise en série la quantité exponentielle $e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\Psi^2}$. De cette manière on aura la différentielle

$$d\,\Psi\left(1-K\Psi^2+\frac{K^2\Psi^4}{2}-\frac{K^3\Psi^6}{2\,.\,3}+\&c.\right)$$

en faisant, pour abréger, $K=\frac{A+B}{2AB}$;

de ſorte que l' intégrale ſera

$$\Psi - \frac{K\Psi^3}{3} + \frac{K^2\Psi^5}{2 \cdot 5} - \frac{K^3\Psi^7}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \&c.$$

Donc

$$R = 2\left(\rho - \frac{K\rho^3}{3} + \frac{K^2\rho^5}{2 \cdot 5} - \frac{K^3\rho^7}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \&c.\right)$$

Donc $\frac{R}{\sqrt{(\pi AB)}}$ exprimera la probabilité que les valeurs de a, & b ſoient renfermées entre ces limites $s\left(A \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right)$ & $s\left(B \pm \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right)$, c' eſt-à-dire, que les facilités des erreurs qui ſe ſont trouvées répétées α, & β fois, leſquelles ſont proportionelles à $\frac{a}{s}$, & $\frac{b}{s}$, ne s' écartent pas des quantités A, & B données par les obſervations, d' une quantité plus grande que $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

Si on fait, pour plus de ſimplicité, $\rho = \mu\sqrt{AB}$, on aura, à cauſe de $A + B = 1$, $K = \frac{\mu^2}{2\rho^2}$, & la probabilité, dont il s' agit, ſera exprimée de cette manière

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu - \frac{\mu^3}{2 \cdot 3} + \frac{\mu^5}{2.4.5} - \frac{\mu^7}{2.4.6.7} + \&c.\right)$$

Donc, ſi on ſuppoſe $\mu = 1$, on aura la ſérie $1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4.5} - \&c.$ dont la ſomme eſt à très-peu-près $0, 855624$; de ſorte que la probabilité cherchée ſera $\frac{1, 611248}{\sqrt{\pi}} = 0, 682688$ à peu près.

Ainſi on pourra, dans ce cas, parier avec avantage que, en ſuppoſant les facilités des erreurs reſpectivement égales à A & B, on ne ſe trompera pas de la quantité $\mu\sqrt{\left(\frac{AB}{n}\right)}$ qui, à cauſe de n très-grand, eſt néceſſairement infiniment petite.

Il ſeroit beaucoup plus difficile de trouver la valeur de R ſi les variables ξ, Ψ, ζ &c. étoient plus de deux, ſurtout à cauſe que l' intégration doit être telle, qu' elle n' embraſſe que les valeurs de ces mêmes variables qui ſont compriſes entre les limites $-\rho$ & $+\rho$; mais on pourra, dans ces cas, ſe ſervir de l' approximation que nous avons donnée dans l' art. préc.

Pour cela on remarquera, que puiſque nous avons fait $r = \rho \sqrt{n}$, & que n eſt ſuppoſé fort grand, le nombre r devra être fort grand auſſi; de ſorte qu' on aura, à très-peu-près,

$$T = \frac{r^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-1} \left(m^{m-1} - m\,(m-2)^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2}\,(m-4)^{m-1} - \&c. \right)$$

en continuant cette ſérie juſqu' à ce que quelqu' un des nombres $m-2$, $m-4$ &c. devienne négatif; donc on aura

$$PT = \left(\frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \right)^{m-1} \times \frac{m^{m-1} - m(m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\,(m-4)^{m-1} - \&c.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-1 \cdot \sqrt{(ABC\ldots)}}$$

& il n' y aura plus qu' à multiplier cette quantité par W, c' eſt-à-dire, par la valeur moyenne, ou, ſi l' on veut, par la plus petite valeur de V. Or, comme on a

$$V = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + \&c. \right)}}$$

il eſt clair que la plus petite valeur de V ſera celle où la quantité $\frac{\xi^2}{A} + \frac{\Psi^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C} + $ &c. ſera la plus grande; & il eſt facile de voir que cela arrivera en prenant $\xi = \rho$ $\Psi = -\rho$, $\zeta = o$ &c. à cauſe de $\xi + \Psi + \zeta = o$, & ſuppoſant que A, & B ſoient les plus petites de toutes les quantités A, B, C &c. ainſi on aura $W = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)\rho^2}}$

Donc, faisant, pour abréger,

$$M = \frac{m^{m-1} - m\,(m-2)^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{2}\,(m-4)^{m-1} - \&c.}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, . \, m-1}$$

on aura la quantité

$$M \left(\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} \times \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\rho^2}}{\sqrt{\left(A\ B\ C\ \ldots\right)}}$$

laquelle sera nécessairement moindre que la probabilité cherchée; de sorte qu'en nommant H cette quantité, on pourra toujours parier avec avantage H contre $1 - H$ qu'en supposant les facilités des erreurs égales, respectivement à A, B, C &c. on ne se trompera pas de la quantité très petite $\frac{\rho}{\sqrt{n}}$.

Lemme I.

23. Soit X une fonction rationelle & sans diviseur de x, on demande le coefficient de la puissance x^μ dans la série résultante du développement de la fraction $\frac{X}{(a-x)^n}$.

On a, comme l'on sait,

$$\frac{1}{(a-x)^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{n\,x}{a^{n+1}} + \frac{n\,(n+1)\,x^2}{2\,a^{n+2}} + \&c.$$

$$= \frac{\frac{1\,.\,2\,.\,3\,..\,n-1}{a^n} + \frac{2\,.\,3\,...\,n\,x}{a^{n+1}} + \frac{3\,.\,4\,...\,n+1\,.\,x^2}{a^{n+2}} + \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,....\,n-1};$$

donc, si on ordonne la quantité X par rapport aux puissances de x, en commençant par la plus haute, de maniere que l'on ait en général $X = Ax^\alpha + Bx^{\alpha-1} + Cx^{\alpha-2} + \&c.$ $+ M\,x^\mu + N\,x^{\mu-1} + \&c.$

& qu' on multiplie cette férie par celle qui exprime la valeur de $\frac{1}{(a-x)^n}$, il eſt facile de voir que le terme qui contiendra la puiſſance x^μ ſera

$$\frac{\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n-1}{a^n} M + \frac{2 \,.\, 3 \ldots n}{a^{n+1}} N + \frac{3 \,.\, 4 \ldots n+1}{a^{n+2}} P + \&c.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n-1} x^\mu$$

de ſorte que le coefficient cherché ſera repréſenté par la ſérie

$$\frac{\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n-1}{a^n} M + \frac{2 \,.\, 3 \ldots n}{a^{n+1}} N + \frac{3 \,.\, 4 \ldots n+1}{a^{n+2}} P + \&c.}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n-1}$$

Dénotons par X' la ſomme de tous les termes de la valeur de X où les puiſſances de x ne ſont pas plus hautes que x^μ, enſorte que l'on ait $X' = M x^\mu + N x^{\mu-1} + P x^{\mu-2} + \&c.$; & diviſant par $x^{\mu+1}$ on aura

$$\frac{X'}{x^{n+1}} = \frac{M}{x} + \frac{N}{x^2} + \frac{P}{x^3} + \&c.$$

donc, différentiant $n-1$ fois, & faiſant enſuite $x = a$, on aura

$$\pm \frac{d.^{n-1} \left(\frac{X'}{{}^{\mu+1}} \right)}{d x^{n-1}} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n-1}{a^n} M + \frac{2 \,.\, 3 \ldots n}{a^{n+1}} N + \&c.$$

le ſigne ſupérieur étant pour le cas où n eſt impair, & l' inférieur pour celui où n eſt pair.

Donc, le coefficient cherché de la puiſſance x^μ ſera égal à ce que devient la quantité $\frac{d^{n-1} \left(\frac{X'}{x^{\mu+1}} \right)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n-1 \, (-dx)^{n-1}}$ lorſqu' on y fait $x = a$.

Remarque.

24. Si on divise la quantité X par $x^{\mu+1}$, & qu'on en rejette ensuite tous les termes où il y aura des puissances positives de x, il est visible qu'on aura la valeur de $\frac{X'}{x^{\mu+1}}$; donc, à la place de la quantité X' on peut prendre la quantité même X, en ayant soin de rejetter les termes dont nous venons de parler; de cette manière on aura, pour l'expression du coefficient cherché de x^{μ}, la quantité

$$\frac{d^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1.2.3\ldots n-1(-dx)^{n-1}}$$

en réjettant dans cette quantité, avant, ou après les différentiations, toutes les puissances positives de x, & faisant ensuite $x = a$.

Corollaire I.

25. Supposons qu'on demande le coefficient de x^{μ} dans la série $x^{-\alpha}\ldots\ldots + x^{-2} + x^{-1} + x^{0} + x^{1} + x^{2} + \ldots\ldots x^{\beta}$ élevée à la puissance n.

Suivant les règles ordinaires de la sommation des progressions géometriques on trouve que la somme de cette série est représentée par

$$\frac{x^{-\alpha}\,(1-x^{\alpha+\beta+1})}{1-x}$$

de sorte que la puissance $n^{\text{ème}}$ de la même série sera égale à

$$\frac{x^{n\alpha}\,(1-x^{\alpha+\beta+1})^{n}}{(1-x)^{n}}.$$

Comparant donc cette formule avec celle du problême précédent, on aura

$$X = x^{-n\alpha}\,(1-x^{\alpha+\beta+1})^{n} =$$

$$x^{-n\alpha} - n\,x^{-(n-1)\alpha+\beta+1} + \frac{n(n-1)}{2}\,x^{-(n-2)\alpha+2(\beta+1)}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\,x^{-(n-3)\alpha+3(\beta+1)} + \&c.$$

donc

donc, divisant par $x^{\mu+1}$ & faisant pour abréger $n\alpha+\mu=\pi$, $\alpha+\beta+1=\rho$ on aura

$$\frac{X}{x^{\mu+1}}=x^{-(\pi+1)}-n\,x^{-(\pi+1-\rho)}+\frac{n(n-1)}{2}\,x^{-(\pi+1-2\rho)}$$

$$-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}\,x^{-(\pi+1-3\rho)}+\&c.$$

& par conséquent en différentiant $n-1$ fois,

$$\frac{d.^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{(-dx)^{n-1}}=(\pi+1)\,(\pi+2)\ldots(\pi+n-1)\,x^{-(\pi+n)}$$

$$-n\,(\pi+1-\rho)\,(\pi+2-\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-\rho)x^{-(\pi+n-\rho)}$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}(\pi+1-2\rho)(\pi+2-2\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-2\rho)\;x^{-(\pi+n-2\rho)}$$

$$-\&c.$$

On rejettera donc de cette série les termes où les exposans de x se trouveront positifs, c'est-à-dire, que si s est le nombre entier, qui est égal ou immédiatement plus grand que $\frac{\pi+n}{\rho}$, on continuera la série seulement jusqu'au terme s^{eme}; ou bien il suffira de la continuer jusqu'à ce que quelqu'un des premiers facteurs $\pi+1$, $\pi+1-\rho$ &c. devienne négatif; ensuite on fera $x=1$ & on divisera le tout par $1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n$; on aura ainsi la valeur du coefficient cherché, la quelle sera par conséquent

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n-1}\Big((\pi+1)\;(\pi+2)\ldots\ldots(\pi+n-1)$$

$$-n\,(\pi+1-\rho)\,(\pi+2-\rho)\ldots\ldots\ldots(\pi+n-1-\rho)$$

$$+\frac{n\,(n-1)}{2}\,(\pi+1-2\,\rho)\,(\pi+2-2\rho)\ldots\ldots(\pi+n-1-2\,\rho)$$

$$-\frac{n(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}(\pi+1-3\rho)\,(\pi+2-3\,\rho)\ldots\ldots\ldots(\pi+n-1-3\rho)$$

$$+\&c.\Big)$$

De là on tire la solution du problême suivant.

Problême VII.

26. On a plusieurs observations dans chacune desquelles on suppose qu'on ait pu se tromper également d'une quelconque de ces quantités $-\alpha, \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots \beta$; on demande quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen de n observations sera $\frac{\mu}{n}$, ou qu'elle sera renfermée entre ces limites $-\frac{p}{n}$ & $\frac{+q}{n}$.

Pour trouver la probabilité que le résultat moyen soit $\frac{\mu}{n}$, il faut chercher le coefficient de la puissance x^{μ} du polinome $x^{-\alpha} \ldots\ldots + x^{-2} + x^{-1} + x^{0} + x^{1} + x^{2} + \ldots\ldots x^{\beta}$ élevé à la puissance n, & diviser ensuite ce coefficient par la valeur du même polinome élevé à la puissance n, qui répond à $x = 1$; c'est-à-dire, par $(\alpha + \beta + 1)^n$ c'est ce qui suit évidemment de ce que nous avons démontré dans les prob. préc.

Donc, par le corollaire précédent, on trouvera que la probabilité cherchée sera, en faisant $\pi = n\alpha + \mu, \rho = \alpha + \beta + 1$,

$$\frac{1}{1.2.3..\overline{n-1}\,\rho^n}\Big((\pi + 1)(\pi + 2)\ldots\ldots(\pi + n - 1)$$
$$- n(\pi + 1 - \rho)(\pi + 2 - \rho)\ldots\ldots(\pi + n - 1 - \rho)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}(\pi + 1 - 2\rho)(\pi + 2 - 2\rho)\ldots(\pi + n - 1 - 2\rho)$$
$$- \&c.\Big)$$

en continuant cette série jusqu'à ce que quelqu'un des facteurs $\pi + 1$, $\pi + 1 - \rho$ &c. devienne négatif.

Telle est l'expression générale de la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit $= \frac{\mu}{n}$; ainsi pour avoir la probabilité que l'erreur soit contenue entre les

limites $\frac{-p}{n}$ & $\frac{+q}{n}$ il n'y aura qu'à faire varier μ dans la quantité précédente, & prendre la somme de toutes les quantités particulières qui répondront à
$\mu = -p, \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\ldots q.$

Or, puisque la quantité μ n'entre que dans la valeur de π, il n'y aura donc que cette quantité de variable; de sorte que la difficulté se réduira à sommer des suites dont le terme général sera de cette forme $(s+1)\ (s+2)\ (s+3) \ldots\ldots\ldots (s+k)$
Pour cela, soit la somme de cette série représentée par
$u\ (s+1)\ (s+2)\ \ldots\ldots\ (s+k)$
u étant une fonction inconnue de s, & mettant $s-1$ à la place de s, & u' à la place de u, on aura
$u'\ s\ (s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K-1)$
quantité, qui étant retranchée de la précédente, on aura la différence
$(u\ (s+K) - u' s)\ (s+1)\ (s+2) \ldots\ldots\ldots (s+K-1)$
mais il faut que cette différence soit égale au terme général de la série dont on cherche la somme, donc on aura l'équation
$u\ (s+K) - u' s = s+K$
à laquelle on satisfera en faisant $u = \frac{s+K+1}{K+1}$; de sorte que la somme générale de la série dont le terme général est $(s+1)\ (s+2) \ldots\ldots (s+K)$ sera représentée par $\frac{(s+1)\ (s+2) \ldots\ldots\ldots (s+K)\ (s+K+1)}{K+1}$
& par conséquent la somme de tous les termes compris entre ces deux-ci
$(s'+1)\ (s'+2). \ldots\ldots (s'+K)$ & $(s''+1)\ (s'+2) \ldots\ldots (s''+K)$
sera égale à

$$\frac{s''(s''+1)\ (s''+2) \ldots\ldots (s''+K) - (s+1)\ (s'+2) \ldots\ldots (s'+K+1)}{K+1}$$

Appliquant donc ceci à la formule trouvée plus haut, on aura pour la probabilité que l' erreur moyenne tombe entre $\frac{-p}{n}$ & $\frac{q}{n}$ l' expreſſion ſuivante, dans laquelle j' ai fait pour abréger $n\alpha - p = \delta$ & $n\alpha + q = \gamma$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n\rho^n}\Big(\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)-(\delta+1)(\delta+2)\ldots(\delta+n)$$
$$-n((\gamma-\rho)(\gamma-\rho+1)\ldots(\gamma-\rho+n-1)-(\delta-\rho+1)(\delta-\rho+2)\ldots(\delta-\rho+n))$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}((\gamma-2\rho)(\gamma-2\rho+1)\ldots(\gamma-2\rho+n-1)-(\delta-2\rho+1)(\delta-2\rho+2)\ldots(\delta-2\rho+n))$$
$$-\ \&c.\Big)$$

Cette ſérie doit être continuée juſqu' à ce que quelqu' un des facteurs $\gamma-\rho$, $\gamma-2\rho$ &c. devienne négatif; & quant aux autres facteurs $\delta-\rho+1$, $\delta-2\rho+1$ &c. ſi quelqu' un d' entr' eux ſe trouve négatif, alors il faudra augmenter le nombre δ d' autant d'unité qu' il faudra pour le rendre poſitif; cela ſuit évidemment de ce que la ſérie, dont la précédente eſt la ſomme, ne doit être continuée que juſqu' à ce que quelqu' un des premiers facteurs $\pi+1-\rho$, $\pi+1-2\rho$ &c. devienne négatif, comme nous l' avons vu dans l'art. préc.

Corollaire.

27. Suppoſons que les nombres α, & β deviennent infinis, auſſi bien que p & q, mais de façon qu' ils aient entr' eux des rapports finis; & ſoit $\frac{\beta}{\alpha}=l$, $\frac{p}{\alpha}=r$, $\frac{q}{\alpha}=s$, enſorte que l' on ait $\beta=\alpha l$, $p=\alpha r$, $q=\alpha s$, l, r, s étant des nombres finis; dans ce cas on aura
$\rho=\alpha+\beta=(1+l)\alpha$, $\delta=n\alpha-p=(n-r)\alpha$
$\gamma=n\alpha+q=(n+s)\alpha$; de ſorte qu' en ſubſtituant ces valeurs dans la formule précédente, & négligeant ce qu'on

doit négliger à cause de $\alpha = \infty$, on aura celle-ci ou $f = 1 + l$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots nf^n}\Big((n+s)^n - n\,(n+s-f)^n + \frac{n(n-1)}{2}\,(n+s-2f)^n - \&c.$$
$$-(n-r)^n + n\,(n-r-f)^n - \frac{n(n-1)}{2}\,(n-r-2f)^n + \&c.\Big)$$

chacune de ces deux séries devant être continuée seulement jusqu'à ce que quelqu'une des quantités $n+s-f$, $n+s-2f$ &c. & $n-r-f$, $n-r-2f$ &c. devienne négative.

Le cas de ce corollaire a lieu lorsqu'on suppose que chaque observation est également sujette à toutes les erreurs possibles comprises entre des limites données ; car si on prend la plus grande erreur négative pour l'unité, & qu'on désigne la plus grande erreur positive par l, la formule précédente dénotera la probabilité que l'erreur du résultat moyen de n observation soit renfermée entre ces deux limites $-\frac{r}{n}$ & $+\frac{s}{n}$.

Au reste nous donnerons plus bas une méthode beaucoup plus simple pour resoudre ces sortes de questions.

Problême VIII.

28. Supposant que les erreurs qu'on peut commettre dans chaque observation soient $-\omega \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \omega$, & que le nombre des cas qui répondent à chacune de ces erreurs soit respectivement proportionel à $1, 2, 3 \ldots \alpha+1, \ldots 3, 2, 1$. on demande quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen de m observations soit comprise entre les limites $\frac{-p}{m}$ & $\frac{q}{m}$.

Commençons par chercher la probabilité que l'erreur moyenne soit $= \frac{\mu}{m}$; cette probabilité sera égale au coefficient de la puissance x^μ du polinome

$$x^{-\omega} + 2\,x^{-\omega+1} \ldots + \omega x^{-1} + (\omega+1)\,x^0 + \omega x' + \ldots 2\,x^{\omega-1} + x^\omega$$

élevé à la puissance m, ce coefficient étant ensuite divisé par la valeur du même polinome élevé à la puissance n, qui répond à $x = 1$

Or on a $1 + 2x + \cdots (\omega + 1)x^{\omega} + \ldots 2x^{2\omega - 1} + x^{2\omega} = (1 + x + \ldots x^{\omega})^2 = \left(\frac{1 - x^{\omega+1}}{1 - x}\right)^2$; donc le polinome dont-il s' agit sera égal à $x^{-\omega}\left(\frac{1 - x^{\omega+1}}{1 - x}\right)^2$, & par conséquent la puissance n de ce polinome sera représentée par

$$\frac{x^{-m\omega}(1 - x^{\omega+1})^{2m}}{(1 - x)^{2m}}$$

Cette formule étant comparée à celle de l' art. 23., on aura $n = 2m$, $n\alpha = m\omega$, & $\alpha + \beta + 1 = \omega + 1$; d' où l' on tire $n = 2m$, $\alpha = \frac{m\omega}{n} = \frac{\omega}{2}$, & $\beta = \frac{\omega}{2}$; donc (prob. préc.) la probabilité cherchée sera

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots 2m\rho^{2m}}\Big((\pi + 1)(\pi + 2) \ldots \ldots (\pi + 2m - 1)$$
$$- 2m(\pi + 1 - \rho)(\pi + 2 - \rho) \ldots \ldots (\pi + 2m - 1 - \rho)$$
$$+ \frac{2m(2m-1)}{2}(\pi + 1 - 2\rho)(\pi + 2 - 2\rho) \ldots\ldots (\pi + 2m - 1 - 2\rho)$$
$$- \text{\&c.}\Big)$$

en supposant $\pi = m\omega + \mu$, & $\rho = \omega + 1$ & continuant la série jusqu' à ce que quelqu' un des facteurs $\pi + 1 - \rho$, $\pi + 1 - 2\rho$ &c. devienne négatif.

De là on trouvera, comme dans le probl. précéd., que la probabilité que l'erreur moyenne se trouve entre les limites $\frac{-p}{n}$ & $\frac{q}{n}$ sera exprimée par

$$\frac{1}{1.2.3 \ldots 2m\rho^{2m}}\Big(\gamma(\gamma + 1) \ldots (\gamma + 2m - 1) - (\delta + 1)(\delta + 2) \ldots (\delta + 2m)$$
$$- 2m((\gamma - \rho)(\gamma + 1 - \rho) \cdots (\gamma + 2m - 1 - \rho) - (\delta + 1 - \rho)(\delta + 2 - \rho) \cdots \delta + 2m - \rho))$$
$$+ \frac{2m(2m-1)}{2}((\gamma - 2\rho)(\gamma + 1 - 2\rho) \ldots (\gamma + 2m - 1 - 2\rho) - (\delta + 1 - 2\rho)(\delta + 2 - 2\rho) \ldots (\delta + 2m - 2\rho))$$
$$- \text{\&c.}\Big)$$

γ étant $= m\,\omega + q$, & $\delta = m\,\omega - p$. à l' égard de la continuation de ces deux séries il faudra suivre les règles prescrites plus haut (art. 24.)

Corollaire.

31. Supposons maintenant que les nombres ω p, & q deviennent infinis, mais ensorte que l'on ait $\frac{p}{\omega} = r$, $\frac{q}{\omega} = s$, r, & s étant des nombres finis, & la formule précédente deviendra (art. 25.)

$$\frac{(2m+s)^{2m} - 2m\,(2\,(m-1)+s)^{2m} + \frac{2m\,(2m-1)}{2}(2\,(m-2)+s)^{2m} - \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,....\,2\,m\,.\,2^{2m}}$$

$$\frac{(2m-r)^{2m} - 2m\,(2\,(m-1)-r)^{2m} + \frac{2m\,(2m-1)}{2}(2(m-2)-r)^{2m} - \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,.....\,2\,m\,.\,2^{2m}}$$

ces deux séries étant continuées jusqu' à ce que quelqu'une des quantités qui sont élevées à la puissance $2\,n$ devienne négative.

Cette formule exprimera donc la probabilité que l' erreur moyenne de n observations soit comprise entre les limites $\frac{-r}{n}$ & $\frac{s}{n}$, dans l' hypothèse que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles contenues entre ces deux limites -1 & $+1$, & que la facilité de chaque erreur soit proportionelle à la différence qu' il y a entre cette erreur & la plus grande erreur possible dans le même sens; cette hypothèse est plus conforme à la nature que celle de l'art. 27.; la courbe des erreurs (art. 20.) seroit ici un triangle isocèle quelconque.

Scholie.

32. En général on pourra trouver, à l'aide du lemme précédent, la probabilité que l'erreur moyenne soit égale à une quantité donnée dans l'hypothèse que les erreurs, auxquelles chaque observation est sujette, forment une progression arithmétique; & que les facilités de ces erreurs forment une progression algèbrique quelconque, dont les différences d'un ordre quelconque deviennent nulles; car soit

$$A x^{-\alpha} + B x^{-\alpha+1} \ldots\ldots + P x^{-1} + Q x^{0} + R x^{1} + \ldots + V x^{\beta}$$

le polinome dont les exposans de x représentent les erreurs, & les coefficiens, les facilités de ces erreurs; qu'on dénote par ΔA, $\Delta.^2 A$ &c. les différences premières, secondes &c. de la série A, B, C &c. ensorte que $\Delta . A = B - A$, $\Delta.^2 A = C - 2B + A$, &c., & qu'on dénote de même par $\Delta . V$, $\Delta.^2 V$ les différences de la série V, X, Y &c. supposée continuée au delà de V, on aura, comme l'on sait, pour la valeur du polinome proposée, la série

$$x^{-\alpha} \left(\frac{A - V x^{\alpha+\beta+1}}{1 - x} + x \frac{\Delta . A - \Delta V x^{\alpha+\beta+1}}{(1 - x)^2} + \text{\&c.} \right)$$

Or, si la série A, B, C &c. V, X &c. est telle que ses différences d'un ordre quelconque m par exemple deviennent nulles, on aura $\Delta .^m A = o$, & $\Delta .^m V = o$ & toutes les différences ultérieures seront aussi zéro; de sorte que l'expression précédente deviendra finie quand même le polinome proposé contiendroit un nombre infini de termes; de plus cette expression pourra se réduire à cette forme $\frac{\Xi}{(1 - x)^m}$, Ξ étant une fonction rationelle & entière de x; de sorte qu'en élévant cette quantité à une puissance quelconque, on aura toujours une expression qui sera dans le cas de celle du lemme.

Lemme

Lemme II.

33. On demande le coefficient de la puiſſance x^{μ} dans la ſérie qui réſultera du développement de la fraction $\frac{X}{(a-x)^m (b-x)^n}$, X étant, comme dans le lemme I. une fonction rationelle & ſans diviſeur, de x.

On ſait que la fraction $\frac{1}{(a-x)^m (b-x)^n}$ peut ſe décompoſer en différentes fractions telles que celles-ci

$$\frac{A}{(a-x)^m} + \frac{A'}{(a-x)^{m-1}} + \frac{A''}{(a-x)^{m-2}} + \&c. + \frac{A^{m-1}}{a-x}$$
$$+ \frac{B}{(b-x)^n} + \frac{B'}{(b-x)^{n-1}} + \frac{B''}{(b-x)^{n-2}} + \&c. + \frac{B^{n-1}}{b-x}$$

les coefficiens A, A', A'' &c. étant égaux à ce que deviennent les quantités $\frac{1}{(b-x)^n}$,

$$\frac{d.\frac{1}{(b-x)^n}}{-dx}, \quad \frac{d.^2\frac{1}{(b-x)^n}}{2\,dx^2}$$ &c. lorſque $x = a$, & les coefficiens B, B', B'' &c. étant égaux à ce que deviennent les quantités

$$\frac{1}{(a-x)^m}, \quad \frac{d.\frac{1}{(a-x)^m}}{-dx}, \quad \frac{d.^2\frac{1}{(a-x)^m}}{2\,dx^2} \ \&c.$$

lorſque $x = b$. Donc la fraction propoſée ſe changera dans ces deux ſuites de fractions

$$\frac{AX}{(a-x)^m} + \frac{A'X}{(a-x)^{m-1}} + \&c. + \frac{A^{m-1}X}{a-x}$$
$$+ \frac{BX}{(b-x)^n} + \frac{B'X}{(b-x)^{n-1}} + \&c. + \frac{B^{n-1}X}{b-x}$$

Mais par le lemme premier le coefficient de la puiſſance x^{μ} dans la ſérie réſultante d'une fraction telle que $\dfrac{X}{(a-x)^{m-s}}$ peut s' exprimer par

$$\frac{d.^{m-s-1}\left(\dfrac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,m-s-1\;(-d\,x)^{m-s-1}};$$ en y faisant après les différentiations, $x=a$;

Donc, en général, la fraction $\dfrac{A^s X}{(a-x)^{m-s}}$ donnera pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^s\dfrac{1}{(b-x)^n}}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,s\;(-d\,x)^s}\times\frac{d.^{m-s-1}\left(\dfrac{X}{x^{\mu+1}}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,m-s-1\;(-dx)^{m-s-1}}$$

où il faut faire $x=a$. Donc, puisque $d^{m-1}.\,y\,z = y\,d^{m-1}z + (m-1)\,d\,y\,d^{m-2}z + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}d^2y\,d^{m-3}z + \&c. + z\,d^{m-1}y$, il est facile de voir que les fractions

$$\frac{AX}{(a-x)^m}+\frac{A'X}{(a-x)^{m-1}}+\&c.+\frac{A^{m-1}X}{a-x},$$

prises toutes ensemble, donneront pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^{m-1}\left(\dfrac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,m-1\;(-d\,x)^{m-1}}$$

x étant fait $=a$.

De même les fractions

$$\frac{BX}{(a-x)^n}+\frac{B'X}{(b-x)^{n-1}}+\&c.+\frac{B^{n-1}X}{b-x}$$

donneront pour le coefficient de x^μ la quantité

$$\frac{d.^{n-1}\left(\dfrac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,....\,n-1\;(-d\,x)^{n-1}}$$

x étant fait $=b$.

Donc, en réuniſſant ces deux quantités, on aura pour le coefficient de x^μ dans la ſérie réſultante de la fraction $\frac{X}{(a-x)^m\,(b-x)^n}$ l' expreſſion

$$\frac{d.^{m-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(b-x)^n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m-1\;(-d\,x)^{m-1}}\;..\;(x=a)$$

$$+\frac{d.^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n-1\;(-d\,x)^{n-1}}\;(x=b)$$

en ayant ſoin de rejetter dans la valeur de $\frac{X}{x^{\mu+1}}$ toutes les puiſſances poſitives de x.

Corollaire.

34. Il eſt facile de conclure de là que ſi on dévelop-poit en ſérie la fraction

$$\frac{X}{(a-x)^m\,(b-x)^n\,(c-x)^p\,\ldots}$$

on auroit pour le coefficient de x^μ l' expreſſion ſuivante

$$\frac{d.^{m-1}\left(\frac{X.}{x^{\mu+1}\,(b-x)^n\,(c-x)^p\,\ldots}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m-1\;(-dx)^{m-1}}\;(x=a)$$

$$+\frac{d.^{n-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^m\,(c-x)^p\,\ldots}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n-1\;(-dx)^{n-1}}\;(x=b)$$

$$+\frac{d.^{p-1}\left(\frac{X}{x^{\mu+1}\,(a-x)^m\,(b-x)^n\,..}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,p-1\;(-dx)^{p-1}}\;(x=c)$$

$+$ &c.

en ne prenant dans la valeur de $\frac{X}{x^{\mu+1}}$ que les puiſſan-ces négatives de x, & rejettant toutes les poſitives.

Remarque.

35. Par le moyen du lemme précédent on pourra donc déterminer aiſément la probabilité que l'erreur moyenne, réſultante de tant d'obſervations qu'on voudra, ſoit nulle ou égale à une quantité donnée, lorſque le polinome (art. 32.)

$$A x^{-\alpha} + B x^{-\alpha+1} \ldots + P x^{-1} + Q x^{0} + R x^{1} \ldots + V x^{\beta}$$

forme une ſérie recurrente quelconque; car alors la ſomme de cette ſérie pourra s'exprimer, comme l'on ſait, par une fraction rationelle, telle que

$$\frac{\Xi}{(a-x)^{\lambda} (b-x)^{\pi} (c-x)^{\rho} \ldots}$$

Ξ étant une fonction rationelle & ſans diviſeur, de x; de ſorte qu'en élévant cette quantité à une puiſſance quelconque, on aura toujours une expreſſion qui pourra ſe rapporter à celles du lemme ci-deſſus.

Au reſte l'hypothèſe la plus conforme à la nature eſt celle où l'on ſuppoſe que chaque obſervation ſoit ſujette à toutes les erreurs compriſes entre des limites données, enſorte que le nombre de toutes les erreurs poſſibles ſoit infini, comme dans les art. 27. & 31.; or pour trouver en ce cas la probabilité que l'erreur moyenne d'un nombre quelconque d'obſervations ſoit auſſi renfermée entre des limites données, il n'eſt pas néceſſaire de conſidérer d'abord un nombre fini d'erreurs, & de ſuppoſer enſuite que ce nombre devienne infini, comme nous l'avons pratiqué dans les art. cités; mais on peut y parvenir directement par une méthode beaucoup plus ſimple & plus générale, laquelle eſt fondée ſur le lemme ſuivant.

Lemme III.

36. Si y dénote une fonction quelconque de x telle que $\frac{d^m y}{dx^m}$ soit une quantité constante, on aura

$$\int y\, a^x\, dx = a^x \left(\frac{y}{la} - \frac{dy}{dx\,(la)^2} + \frac{d^2 y}{dx^2\,(la)^3} \right.$$
$$\left. - \text{\&c.} \pm \frac{d^m y}{dx^m\,(la)^{m+1}} \right) + \mathit{const.}$$

c'est ce qui est aisé à vérifier par la différentiation.

Corollaire I.

37. Si on fait $y = x^m$, m étant un nombre entier & positif, on aura donc

$$\int x^m a^x\, dx = a^x \left(\frac{x^m}{la} - \frac{m\,x^{m-1}}{(la)^2} \right.$$
$$\left. + \frac{m\,(m-1)\,x^{m-2}}{(la)^3} - \text{\&c.} \pm \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 2 \cdot 1}{(la)^{m+1}} \right)$$
$$+ \mathit{const.}$$

Qu'on prenne l'intégrale $\int x^m a^x\, dx$ ensorte qu'elle soit nulle lorsque $x = o$, & l'on aura

$$\int x^m a^x\, dx = a^x \left(\frac{x^m}{la} - \frac{m\,x^{m-1}}{(la)^2} + \text{\&c.} \right.$$
$$\left. - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{(-la)^{m+1}} \right) + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{(-la)^{m+1}}.$$

Or, si on suppose que a soit une fraction moindre que l'unité, ensorte que $\frac{1}{a}$ soit un nombre plus grand que l'unité, & qu'on fasse $x = \infty$, il est facile de voir que $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ sera une quantité infinie d'un ordre infiniment plus grand que x^m, & qu'aucune puissance finie de x;

donc $\frac{x^m}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$, ou bien $a^x\, x^m$ ſera nulle, &, à plus forte raiſon auſſi, toutes les autres quantités $a^x\, x^{m-1}$, $a^x\, x^{m-2}$ &c. ſeront nulles, de ſorte qu'on aura dans ces cas

$$\int x^m\, a^x\, d\,x = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,m}{(-\,l\,a)^{m+1}}.$$

D'où je conclus, que la quantité $\frac{1}{(-l\,a)^m}$ eſt égale à l'intégrale de $x^{m-1}\, a^x\, d\,x$ priſe depuis $x = o$ juſqu'à $x = \infty$, & diviſée par $1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m - 1$; pourvu que a ſoit un nombre poſitif moindre que l'unité.

Si a étoit un nombre poſitif, plus grand que l'unité, il n'y auroit qu'à mettre $\frac{1}{a}$ à la place de x dans la formule précédente, & l'on en concluroit que la quantité $\frac{1}{(l\,a)^m}$ ſeroit égale à l'intégrale de $\frac{x^{m-1}\,dx}{a^x}$ priſe de même depuis $x = o$ juſqu'à $x = \infty$, & diviſée par $1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m - 1$; on voit par là comment on peut réduire les puiſſances quelconques de $\frac{1}{l\,a}$ en des ſéries infinies qui procédent ſuivant les puiſſances de a.

Corollaire II.

38. Donc, ſi l'on a une fonction quelconque rationelle & ſans diviſeur de a telle que

$A = P\,a^p + Q\,a^{p-1} + R\,a^{p-2} +$ &c.

& qu'on demande le coefficient de la puiſſance a^{p-s} dans la fonction $\frac{A}{(l\,a)^m}$; il n'y aura qu'à mettre, à la place de $\frac{1}{(l\,a)^m}$, la ſomme des valeurs de $\frac{x^{m-1}\,dx}{a^x}$ depuis $x = o$

jusqu' à $x = \infty$, divisée par $1 . 2 . 3 \ldots m-1$ (corol.préc.), & rassemblant touts les termes où a se trouvera elevé à la puissance donnée, on aura pour le coefficient de cette puissance la sèrie

$$\frac{P x^{m-1} + Q (x-1)^{m-1} + R (x-2)^{m-2} + \&c.}{1 . 2 . 3 \ldots m-1} dx$$

laquelle ne devra être continuée que jusqu' à ce que quelqu' un des termes $x-1$, $x-2$ &c. devienne négatif; & comme ce coefficient ne dépend point de la valeur de a, il est clair que la formule que nous venons de trouver aura toujours lieu, soit que a soit plus grand ou moindre que l' unité.

Si au lieu de la fonction $\frac{A}{(la)^m}$ on avoit celle-ci: $\frac{A}{(la-\alpha)^m}$; comme $la - \alpha = l\frac{a}{e^\alpha}$, il faudroit substituer à la place de $\frac{1}{(la-\alpha)^m}$ la somme des valeurs de $\frac{e^{\alpha x} x^{m-1} dx}{a^x}$ depuis $x = o$ jusqu' à $x = \infty$, divisée par $1 . 2 . 3 . m-1$, & l' on auroit pour le coefficient de a^{p-x} la série

$$\frac{P e^{\alpha x} x^{m-1} + Q e^{\alpha(x-1)} (x-1)^{m-1} + R e^{\alpha(x-2} (x-2) \cdot\cdot \&c.}{1 . 2 . 3 \ldots . m-1} dx$$

Enfin, si on avoit la fonction

$$\frac{A}{(la+\alpha)^m (la-\beta)^n \ldots}$$

on décomposeroit d' abord, par les méthodes connues, la fraction

$\frac{1}{(la+\alpha)^m (la-\beta)^n \ldots}$ en celles-ci

$$\frac{F}{(la-\alpha)^m} + \frac{F'}{(la-\alpha)^{m-1}} + \&c. + \frac{F^{m-1}}{la-\alpha}$$
$$+ \frac{G}{(la-\beta)^n} + \frac{G'}{(la-\beta)^{n-1}} + \&c. + \frac{G^{n-1}}{la-\beta}$$
$$+ \&c.$$

ensuite multipliant chacune de ces fractions par A, on auroit autant de fonctions de a, dans lesquelles on pourroit trouver le coefficient de la puissance a^x par la formule ci-dessus.

Remarque.

39. Par le moyen du lemme précédent on peut trouver l'intégrale de $\int y\, a^x\, dx$ lorsque $y = X\, e^{-\alpha x}$, X étant une fonction rationelle & sans diviseur de x, telle que sa différentielle d'un ordre quelconque soit constante; car pour cela il n'y aura qu'à mettre dans la formule du lemme, X à la place de y & $a\, e^{-\alpha}$ à la place de a; moyennant quoi on aura

$$\int \frac{X\, a^x}{e^{x\alpha}}\, dx = \frac{a^x}{e^{\alpha x}} \left(\frac{X}{la - \alpha} - \frac{dX}{dx\,(la - \alpha)^2} + \frac{d^2 X}{dx^2\,(la - \alpha)^3} - \&c. \right) + \mathit{const}.$$

Et on trouvera de même l'intégrale de $y\, a^x\, dx$, lorsque y sera composée de différentes fonctions de même espèce que $\frac{X}{e^{\alpha x}}$.

D'où il s'ensuit que l'on pourra aussi trouver l'intégrale de $y\, a^x\, dx$ lorsque y sera de cette forme $X\, \mathit{cos}.\, \alpha x$, ou $X\, \mathit{sin}.\, \alpha x$, ou composée de plusieurs fonctions d'une forme semblable; car il n'y aura qu'à mettre à la place des *sinus* & *cosinus* les expressions exponentielles imaginaires qui leur sont équivalentes, & le calcul achevé on remettra à la place de ces expressions, les *sinus* ou *cosinus* qui y répondent.

Ce sont là les seuls cas où la formule $y\, a^x\, dx$ soit intégrable, au moins par les méthodes connues jusqu'ici; dans tous les autres cas l'intégration ne peut s'exécuter que par approximation.

Problême

Problême X.

40. On suppose que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles comprises entre ces deux limites p & $-q$, & que la facilité de chaque erreur, x c'est-à-dire, le nombre des cas où elle peut avoir lieu, divisé par le nombre total des cas, soit représentée par une fonction quelconque de x désignée par y; on demande la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit comprise entre les limites r, & $-s$.

On commencera d'abord par chercher la probabilité que l'erreur moyenne soit z, & cette probabilité étant représentée par une fonction de z, il n'y aura qu'à en prendre l'intégrale depuis $z = r$ jusqu'à $z = s$; ce sera la probabilité cherchée.

Maintenant pour avoir la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit z, il faudra considérer le polynome qui est représenté par l'intégrale de $y\, a^x\, dx$, en supposant cette intégrale prise de manière qu'elle s'étende depuis $x = p$ jusqu'à $x = -q$, l'on élèvera ce polynome à la puissance n, & l'on cherchera le coefficient de puissance z de a, par les règles données dans les coroll. du lemme préc.; ce coefficient, qui sera une fonction de z exprimera la probabilité que l'erreur moyenne soit z, comme il est facile de le voir d'après ce qui a été démontré plus haut.

Exemple I.

41. Supposons d'abord que y soit une quantité constante $= K$, ensorte que toutes les erreurs soient également probables, & l'intégrale de $y\, a^x\, dx$ sera $\frac{K a^x}{l\, a}$, de sorte qu'en prenant cette intégrale depuis $x = p$ jusqu'à $x = -q$, on aura pour la valeur complette $\frac{K\,(a^p - a^{-q})}{l\, a}$; qu'on élève donc cette quantité à la puis-

ſance n, & l' on aura une quantité de la forme $\frac{A}{(la)^n}$, où (faiſant $p + q = t$)

$$A = K^n \left(a^{pn} - n\, a^{pn-t} + \frac{n\,(n-1)}{2}\, a^{pn-2t} - \&c.\right)$$

Donc par le coroll. 2 du lemme (art. 38.) le coefficient de puiſſance a^{pn-x} ſera

$$\frac{K^n}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots n-1}\left(x^{n-1} - n\,(x-t)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,(x-2\,t)^{n-1}\right.$$
$$\left. - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}\,(x-3\,t)^{n-1} + \&c.\right) d\,x$$

en ayant ſoin de ne continuer la ſérie que juſqu' à ce qu' on parvienne à des termes $x - m\,t$ qui ſoient négatifs. Faiſant donc $p\,n - x = z$, c'eſt-à dire, $x = p\,n - z$ on aura la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit z. On intégrera maintenant la formule précédente en y faiſant varier x, & on prendra l' intégrale, enſorte qu' elle ſoit nulle lorſque $x = p\,n - r$, & complette lorſque $x = p\,n + s$; on aura de cette manière la quantité

$$\frac{K^n}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n}\Big((p\,n+s)^n - n\,(p\,n+s-t)^n$$
$$+ \frac{n\,(n-1)}{2}\,(p\,n+s-2\,t)^n - \&c.$$
$$-(p\,n-r)^n + n\,(p\,n-r-t)^n$$
$$- \frac{n\,(n-1)}{2}\,(p\,n-r-2\,t)^n + \&c.\Big)$$

laquelle exprimera la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit contenue entre les limites r & $-s$; au reſte cette formule revient à la même que celle de l'art. 27.

Exemple II.

42. On ſuppoſe que la quantité y ſoit $= K\,(p^2 - x^2)$, & que les deux limites des erreurs ſoient p & $-p$, il faudra intégrer la différentielle $K\,a^x\,(p^2 - x^2)\,d\,x$, & prendre l' intégrale enſorte qu' elle s' étende depuis $x = -p$

jusqu'à $x = p$. Or, puisque la seconde différentielle de $p^2 - x^2$ est constante, on aura par le lemme cette intégrale

$$K\,a^x\left(\frac{p^2 - x^2}{l\,a} + \frac{2\,x}{(l\,a)^2} - \frac{2}{(l\,a)^3}\right)$$

laquelle étant complétée, comme on vient de le dire, donnera

$$\frac{2\,K\,p\,(a^p + a^{-p})}{(l\,a)^2} - \frac{2\,K\,(a^p - a^{-p})}{(l\,a)^3};$$

On élèvera donc cette quantité à la puissance n, & l'on aura

$$\frac{(2\,K\,p)^n\,(a^p + a^{-p})^n}{(l\,a)^{2n}} - n\,\frac{(2\,K)^n\,p^{n-1}\,(a^p + a^{-p})^{n-1}\,(a^p + a^{-p})}{(l\,a)^{2n+1}}$$
$$+ \frac{n\,(n-1)}{2}\cdot\frac{(2\,K)^n\,p^{n-2}\,(a^p + a^{-p})^{n-2}\,(a^p - a^{-p})^2}{(l\,a)^{2n+2}}$$

— &c.

on développera les puissances de $a^p + a^{-p}$ & de $a^p - a^{-p}$, & l'on cherchera ensuite par les règles de l'art. 38. le coefficient de la puissance a^z. Pour faciliter ces opérations nous supposerons

$$(a^p + a^{-p})^n = a^{pn} + P\,a^{pn-2p} + Q\,a^{pn-4p} + \text{\&c.}$$
$$(a^p + a^{-p})^{n-1}\,(a^p - a^{-p}) = a^{np} + P'\,a^{np-2p} + Q'\,a^{np-4p} + \text{\&c.}$$
$$(a^p + a^{-p})^{n-2}\,(a^p - a^{-p})^2 = a^{np} + P''\,a^{np-2p} + Q''\,a^{np-4p} + \text{\&c.}$$

&c.

& l'on trouvera, pour le coefficient de la puissance $n\,p - x$, la série

$$\frac{(2\,K\,p)^n}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,2\,n-1}\left(x^{2n-1} + P(x-2p)^{2n-1} + Q\,(x-4p)^{2n-1} + \text{\&c.}\right)dx$$
$$-n\frac{(2K)^n\,p^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,2n}\left(x^{2n} + P'\,(x-2p)^{2n} + Q'\,(x-4p)^{2n} + \text{\&c.}\right)dx$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(2K)^n\,p^{n-2}}{1\,2.3...2n+1}\left(x^{2n+1} + P''(x-2p)^{2n+1} + Q''(x-4p)^{2n+1} + \text{\&c.}\right)dx$$

— &c.

On fera donc $z = n\,p - x$, c'est à-dire, $x = n\,p - z$, & on intégrera de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $z = r$,

& complette lorſque $z = -s$, c' eſt-à-dire, nulle quand $x = np - r$, & complette quand $x = np + s$, on aura la quantité

$$\frac{(2Kp)^n}{1.2.3\ldots 2n}\Big((np+s)^{2n} + P\,((n-2)p+s)^{2n} + Q\,((n-4)p+s)^{2n} + \&c.$$
$$- (np-r)^{2n} + P\,((n-2)p-r)^{2n} - Q\,((n-4)p-r)^{2n} - \&c.\Big)$$
$$-n\frac{(2K)^n p^{n-1}}{1.2.3\ldots 2n+1}\Big((np+s)^{2n+1} + P'((n-2)p+s)^{2n+1} + Q'((n-4)p+s)^{2n+1} + \&c.$$
$$- (np-r)^{2n+1} - P'((n-2)p-r)^{2n+1} - Q'((n-4)p-r)^{2n+1} - \&c.\Big)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(2K)^n p^{n-2}}{1.2.3\ldots 2n+2}\Big((np+s)^{2n+2} + P''((n-2)p+s)^{2n+2} + Q''((n-4)p+s)^{2n+2} + \&c.$$
$$- (np-r)^{2n+2} - P''((n-2)p-r)^{2n+2} - Q''((n-4)p-r)^{2n+2} - \&c.\Big)$$
$$- \&c.$$

laquelle exprimera la probabilité que l' erreur moyenne de n obſervations ſoit compriſe entre les limites r, & $-s$; au reſte il faudra toujours ſe ſouvenir que les ſéries précédentes ne doivent être continuées que juſqu' à ce que quelques unes des quantités qui ſont élevées aux puiſſances $2n$, $2n+1$ &c. deviennent négatives.

Remarque.

43. L' hypothèſe du dernier exemple paroit la plus ſimple & la plus naturelle qu' on puiſſe imaginer; il eſt vrai que celle du problême 8. paroit encore plus ſimple, puiſqu'on y ſuppoſe que la facilité des erreurs x & $-x$ ſoit repréſentée par $p - x$, p étant la plus grande valeur poſſible de x, c' eſt-à-dire, la limite des erreurs tant poſitives que négatives; mais cette hypothèſe a l' inconvenient que la loi de continuité n' y eſt pas obſervée en paſſant des erreurs poſitives, aux négatives; c'eſt pourquoi, ſi on vouloit y appliquer la méthode du prob. préc., il faudroit en faiſant $y = K(p - x)$ prendre d' abord l' intégrale de

$\int y\, a^x\, dx$ depuis $x = o$ jusqu'à $x = p$, laquelle seroit

$$K\left(\frac{a^p - 1}{(la)^2} - \frac{p}{la}\right)$$

ensuite, en faisant x négatif, & conservant la même valeur de y, il faudroit prendre de même l'intégrale de $\int y\, a^{-x} dx$ depuis $x = o$ jusqu'à $x = p$, laquelle seroit (en ne faisant que mettre $\frac{1}{a}$ à la place de a dans l'expression précédente)

$$K\left(\frac{a^{-p} - 1}{(la)^2} + \frac{p}{la}\right)$$

& la somme de ces deux intégrales particulières seroit l'intégrale complette de $\int y\, a^x\, dx$ depuis $x = p$ jusqu'à $x = -p$ dans l'hypothese dont il s'agit; on aura donc la quantité $K\left(\frac{a^p + a^{-p} - 2}{(la)^2}\right)$, ou bien $K\left(\frac{a^{\frac{p}{2}} - a^{-\frac{p}{2}}}{la}\right)^2$ qu'il faudra élever à la puissance n, & sur laquelle on pourra ensuite opérer, comme dans l'exemple I.; on pourra même, sans faire un nouveau calcul, appliquer ici les formules de cet exemple en y mettant $2n$ à la place de n, $\frac{p}{2}$ à la place de p, & de q, & par conséquent p à la place de $t = p + q$; de cette manière on aura sur le champ l'expression de la probabilité que l'erreur moyenne de n observations soit renfermée entre les limites r, & $-s$, laquelle sera

$$\frac{K^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n}\Big((pn + s)^{2n} - 2n((n-1)p + s)^{2n}$$
$$+ \frac{2n(2n-1)}{2}((n-2)p + s)^{2n} - \&c.$$
$$- (pn - r)^{2n} + 2n((n-1)p - r)^{2n}$$
$$- \frac{2n(2n-1)}{2}((n-2)p - r)^{2n} + \&c.\Big)$$

ce qui s'accorde avec la formule de l'art. 31.

Problème II.

44. Supposant que chaque observation soit sujette à toutes les erreurs possibles comprises entre les limites p & $-p$, (p étant l'arc de 90 dégrès) & que la facilité de chaque erreur x soit proportionelle *a* $cos.\ x$; on demande la probabilité que l'erreur moyenne de n observations sera renfermée entre les limites r & $-s$.

On aura donc ici $y = K\ cos.\ x$, & il s'agira d'abord d'intégrer la différentielle $K\ a^x\ cos.\ x\ dx$, dont l'intégrale, (en mettant $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ à la place de $cos.x$) se trouvera par l'art. 39.

$$\frac{K\,a^x}{2}\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{l\,a+\sqrt{-1}} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{l\,a-\sqrt{-1}}\right)$$

c'est-à dire, en repassant des exponentiels imaginaires aux *sinus* & *cosinus*,

$$K\ a^x\left(\frac{l\,a\ cos.\ x + sin.\ x}{(l\,a)^2+1}\right)$$

cette intégrale doit maintenant être prise ensorte qu'elle s'étende depuis $x = -p$, auquel cas $cos.\ x = o$ & $sin.\ x = 1$ jusqu'à $x = p$, où $cos.\ x = o$ & $sin.\ x = 1$; ainsi l'on aura pour l'intégrale complette

$$\frac{K\ (a^p + a^{-p})}{(l\,a)^2+1}$$

Qu'on élève donc cette quantité à la puissance n, & faisant pour abréger

$$A = K^n\ (a^{pn} + n\ a^{pn-2p} + \frac{n\ (n-1)}{2}\ a^{pn-4p} + \&c.)$$

on aura la quantité $\frac{A}{((l\,a)^2+1)^n}$ dans laquelle il s'agira maintenant de chercher le coefficient de la puissance a^t.

Pour cela il faudra (art. 38.) décomposer la fraction $\frac{1}{((l\,a)^2+1)^n}$ c'est-à-dire, $\frac{1}{(l\,a+\sqrt{-1})^n\ (l\,a-\sqrt{-1})^n}$ en ces fractions simples

$$\frac{F}{(la+\sqrt{-1})^n}+\frac{F'}{(la+\sqrt{-1})^{n-1}}+\frac{F''}{(la+\sqrt{-1})^{n-2}}+\&c.$$

$$+\frac{G}{(la-\sqrt{-1})^n}+\frac{G'}{(la-\sqrt{-1})^{n-1}}+\frac{G''}{(la-\sqrt{-1})^{n-2}}+\&c.$$

& l'on aura par les méthodes connues (art. 33.)

$$F=\frac{1}{(-2\sqrt{-1})^n},\ F'=-\frac{n}{(-2\sqrt{-1})^{n+1}},\ F''=\frac{n(n+1)}{2(-2\sqrt{-1})^{n+2}}\ \&c.$$

$$G=\frac{1}{(2\sqrt{-1})^n},\ G'=-\frac{n}{(2\sqrt{-1})^{n+1}},\ G''=\frac{n(n+1)}{2(2\sqrt{-1})^{n+2}}\ \&c.;$$

multipliant ensuite par A chacune de ces fractions, on trouvera par la méthode de l'art. 38., que le coefficient de la puissance a^{pn-x} sera exprimé de cette manière

$$\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-1}\Big((Fe^{-x\sqrt{-1}}+Ge^{x\sqrt{-1}})x^{n-1}$$
$$+n(Fe^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+Ge^{(x-2p)\sqrt{-1}})(x-2p)^{n-1}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(Fe^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+Ge^{(x-4p)\sqrt{-1}})(x-4p)^{n-1}+\&c.\Big)$$
$$+\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-2}\Big((F'e^{-x\sqrt{-1}}+G'e^{x\sqrt{-1}})x^{n-2}$$
$$+n(F'e^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+G'e^{(x-2p)\sqrt{-1}})(x-2p)^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(F'e^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+G'e^{(x-4p)\sqrt{-1}})(x-4p)^{n-2}+\&c.\Big)$$
$$+\frac{K^n\,dx}{1.2.3\ldots n-3}\Big((F''e^{-x\sqrt{-1}}+G''e^{x\sqrt{-1}})x^{n-3}$$
$$+n(F''e^{-(x-2p)\sqrt{-1}}+G''e^{(x-2p)\sqrt{-1}})(x-2p)^{n-3}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(F''e^{-(x-4p)\sqrt{-1}}+G''e^{(x-4p)\sqrt{-1}})(x-4p)^{n-3}+\&c.\Big)$$
$$+\&c.$$

Or on a $e^{\pm x\sqrt{-1}}=\mathrm{cos}.\,x\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sin}.\,x$, & ainsi des autres; donc substituant ces valeurs, & faisant pour abréger

$$G+F=f,\ G-F=\frac{g}{\sqrt{-1}},\ G'+F'=f',\ G'-F'=\frac{g'}{\sqrt{-1}}$$

$G''+F''=f''$, $G''-F''=\frac{g''}{\sqrt{-1}}$ &c., où les quantités

f, g, f', g' &c. feront néceffairement réelles, la formule précédente deviendra

$$\frac{K^n\, dx}{1.2.3\,..\,n-1}\Big((f\, cof.\, x + g\, fin.\, x)\; x^{n-1}$$
$$+ n\,(f\, cof.\,(x-2p) + g\, fin.\,(x-2p))\;(x-2p)^{n-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}\,(f\, cof.\,(x-4p) + g\, fin.\,(x-4p))\;(x-4p)^{n-1} + \&c.\Big)$$
$$+ \frac{K^n\, dx}{1.2.3\ldots n-2}\Big((f'\, cof.\, x + g'\, fin.\, x)\; x^{n-2}$$
$$+ n\,(f'\, cof\,(x-2p) + g'\, fin.\,(x-2p))\;(x-2p)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}\,(f'\, cof.\,(x-4p) + g'\, fin.\,(x-4p)(x-4p)^{n-2} + \&c.\Big)$$
$$+ \frac{K^n\, dx}{1.2.3\ldots n-3}\Big((f''\, cof.\, x + g''\, fin.\, x)\; x^{n-3}$$
$$+ n\,(f''\, cof.\,(x-2p) + g''\, fin.\,(x-2p))\;(x-2p)^{n-3}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}(f''\, cof.(x-4p) + g''\, fin.\,(x-4p)\,(x-4p)^{n-3} + \&c.\Big)$$
$$+ \&c.$$

où il faudra continuer les différentes féries jufqu'à ce que les quantités x, $x-2p$, $x-4p$ &c. ou leurs expofans deviennent négatifs; cette quantité exprimera donc la probabilité que l' erreur moyenne de n obfervations foit $pn-x$; par conféquent il n' y aura plus qu' à l' intégrer de manière que l' intégrale foit nulle lorfque $x = pn - r$, & complette lorfque $x = pn + s$ pour avoir l' expreffion cherchée de la probabilité que l'erreur moyenne foit renfermée entre les limites données r & $-s$; mais comme cette intégration eft facile par les méthodes connues, nous n' entrerons pas dans un plus grand détail là-deffus; & nous terminerons même ici nos recherches, par lefquelles on doit voir qu' il ne refte plus de difficulté dans la folution des queftions qu' on peut propofer fur ce fujet.

THEO-

THEORÈME

Pour servir de suite au mémoire sur différentes questions d'Analyse.

PAR M. LE MARQUIS DE CONDORCET.

Soient les 3 équations $V = o$, $V' = o$, $V'' = o$; V, V', V'' étant fonctions de x, y, z, si je mets ces équations sous la forme $x = A + \varphi$, $y = B + \varphi'$, $z = C + \varphi''$, où $\varphi, \varphi', \varphi'$ contienent d'une façon quelconque les trois variables x, y, z, j'aurai $\Psi\, x, y, z = \Psi \overset{(1)}{A}, B, C + \overset{(2)}{\frac{d\Psi}{dA}} \varphi + \overset{(3)}{\frac{d^2\Psi}{2dA^2}} \varphi^2 + \frac{d^3\Psi}{2.3.dA^3}\varphi^3$

(Ψxyz, est une autre fonction quelconque de x, y, z)

$$+ \frac{d\Psi}{dB}\varphi' + \frac{2dd\Psi}{2dAdB}\varphi\varphi' + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d\Psi}{dC}\varphi'' + \frac{2dd\Psi}{2dAdC}\varphi\varphi'' + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{2dd\Psi}{2dBdC}\varphi'\varphi'' + \frac{dd\Psi}{2dA^2}$$

$$+ \frac{dd\Psi}{dB^2}\varphi'^2 + \frac{2dd\Psi}{2dAdB}\varphi D' + \varphi' D$$

$$+ \frac{dd\Psi}{dC^2}\varphi''^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d\Psi}{dA} D + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d\Psi}{dB} D' + \frac{d\Psi}{dA} E$$

$$+ \frac{d\Psi}{dC} D'' + \frac{d\Psi}{dB} E'$$

$$+ \frac{d\Psi}{dB} E''$$

où D, D', D'' sont ce que devient le terme (2) en y mettant pour Ψ, φ, φ', ou φ'', E, E' E'' ce que devient le terme (3) en y mettant pour Ψ, φ, φ', ou φ''; & le terme (m) se trouvera en prenant $\Psi(A+\Delta A, B+\Delta B, C+\Delta C)$ par le théorème de M. d'Alembert, en mettant pour $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ $\varphi+\varphi^{(2)}+\varphi^{(3)}+\varphi^{(4)}\ldots\ldots+\varphi^{(n-2)}\ldots\varphi'+\varphi'^{(2)}+\varphi'^{(3)}\ldots\ldots+\varphi'^{(n-2)}, \varphi''+\varphi''^{(2)}+\varphi''^{(3)}\ldots+\varphi''^{(n-2)}, \varphi^{(m)}\ \varphi'^{(m)}\ \varphi'^{(m)}$; désignant en général le terme (m) de la série en Ψ où pour Ψ on auroit mis φ, φ' ou φ'', & en prenant dans ce que devient alors $\Psi\, A+\Delta A, B+\Delta B, C+\Delta C$, le terme où φ & Ψ montent au dégré n, les fonctions $\varphi^{(m)}\ \varphi'^{(m)}\ \varphi''^{(m)}$ étant regardées comme du dégré m; on aura donc la valeur de chaque terme de la série qui représente $\Psi\, x, y, z$, par une fonction finie des termes précédents.

Si cette forme ne paroit pas assez simple, on peut y substituer celle-ci,

$$\Psi x,yz = \Psi A,BC + \frac{d\Psi}{dA}\varphi + \frac{d\frac{d\Psi}{dA}\varphi^2}{2\,dA} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}\varphi^3\right)}{2.3\ldots dA^2} + \frac{d^3\left(\frac{d\Psi}{dA}\varphi^4\right)}{2.3.4.dA^3}$$

$$+\frac{d\Psi}{dB}\varphi' + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{d\frac{d\Psi}{dA}\varphi^2}{2\,dB} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}V\right)}{2.3.dA\,dB} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{d\Psi}{dC}\varphi'' + \frac{\varphi''}{\varphi}\frac{d\frac{d\Psi}{dA}\varphi^2}{2\,dC} + \frac{d^2\left(\frac{d\Psi}{dA}V\right)}{2.3.dB\,dA}$$

$$+\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dB}\varphi'^2\right)}{2\,dB} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\varphi}{\varphi'}\frac{d\frac{d\Psi}{dB}\varphi'^2}{dA} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\varphi''}{\varphi'}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dB}\varphi'^2\right)}{2\,dC}$$

$$+\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\varphi'^2\right)}{2\,dC}$$

$$+\frac{\varphi'}{\varphi''}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\varphi''^2\right)}{2\,dB}$$

$$+\frac{\varphi}{\varphi''}\frac{d\left(\frac{d\Psi}{dC}\varphi''^2\right)}{2\,dA}$$

où V eſt une quantité telle que

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{d\left(\varphi^2 \varphi' \times \frac{\varphi}{\varphi'}\right) \frac{dV}{dB}}{dA} = \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{d\left(\varphi^2 \varphi' \times \frac{\varphi}{\varphi'}\right) \frac{d\left(\frac{dV}{dA}\right)}{dB}}{dB} -$$

$$= \frac{\varphi'}{\varphi} d\left(\frac{dV}{dA} \frac{\varphi}{\varphi'}\right) \;\&\; \frac{d\left(\frac{dV}{dB}\right)}{dA} = \frac{\varphi}{\varphi'} \frac{d\left(\frac{dV}{dB} \frac{\varphi'}{\varphi}\right)}{dA},$$ & ainſi de ſuite. Ces termes ſuffiſent pour voir la manière dont il faut s'y prendre pour trouver les autres & continuer la ſérie. On voit que la méthode eſt générale pour un nombre quelconque de variables. Le théorème ſe démontrera toujours avec la même facilité, & de la même manière que j'ai démontré celui de M. De la Grange pour une ſeule variable. Il eſt inutile de s'étendre ici ſur l'uſage qu'on en peut faire dans tous les problêmes dépendans des éliminations & des ſéries.

NOUVELLES RECHERCHES

Sur les équations déterminées, pour servir de suite & de développement au mémoire sur le même objet, déja inséré dans ce volume.

Le but que je me propose ici est de prouver. 1.° Que si une équation déterminée de l' ordre n est résoluble par une formule générale, c' est-à-dire, si sa racine est susceptible d' une expression finie; il n' y a, pour la trouver, d'autre difficulté que celle de la longueur des calculs. 2.° D' indiquer la marche d' une méthode générale, par laquelle on parviendroit dans ce cas à trouver la racine, & d' examiner les moyens de faciliter cette méthode que l' analyse peut fournir. 3.° D' indiquer comment on pourroit s'assurer si une telle équation est ou n' est pas possible.

ARTICLE I.

De la forme générale des fonctions radicales, du degré où montent les équations qui servent à les déterminer, & de la recherche des coefficiens de ces équations; d' où l' on déduit la preuve du premier objet de ce mémoire.

I. Soit la forme $\sqrt[n]{A}$, elle a n valeurs: ces n valeurs sont $\sqrt[n]{A}$ multiplié successivement par les n racines de l' équation $y^n - 1$; & si on fait $x = \sqrt[n]{A}$, on aura $x^n - A = 0$.

II. Soit $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. ces quantités étant au nombre de m, comme chacune peut être multipliée par chacune de n racines de $y^n - 1 = 0$, x pourra avoir n^m valeurs, & par conséquent sera donné par une équation du degré n^m.

III. Il est aisé de voir que cette équation ne peut contenir que les termes

$$x^{n^m}, \quad x^{n^m - n}, \quad x^{n^m - 2n}, \text{ \&c.}$$

en effet ce sont les seuls qui puissent contenir les termes rationnels A, B, C, &c. A^2, B^2, C^2, AB, AC, &c.

IV. Chaque A, B, C, &c. devant entrer d'une manière semblable dans les coefficiens, le coefficient de $x^{n^m - n}$ sera de la forme

$$\overline{A + B + C \ldots\ldots} \times p;$$

celui de $x^{n^m - 2n}$ sera

$$\overline{A^2 + B^2 + C^2 \ldots\ldots} \cdot p'$$
$$+ \overline{AB + AC \ldots\ldots + BC, \text{ \&c.}}\ q';$$

celui de $x^{n^m - 3n}$ sera

$$A^3 + B^3 + C^3 \ldots\ldots p''$$
$$+ A^2B + A^2C + B^2A + B^2C \text{ \&c. } q''$$
$$+ ABC \text{ \&c. } r''; \text{ \& ainsi de suite.}$$

V. Pour trouver p, on observera que $\sqrt[n]{A}$ a pour coefficiens toutes les racines de l'équation $y^n - 1$, répétées un nombre n^{m-1} de fois chacune, ou bien les racines de l'équation $\overline{y^n - 1}^{\,n^{m-1}} = 0$; donc le coefficient de $(\sqrt[n]{A})^n$ ou le coefficient de A sera la somme des produits de toutes les racines de l'équation $\overline{y^n - 1}^{\,n^{m-1}} = 0$, prises n à n, c'est-à-dire, au coefficient de $y^{n^m - n}$, dans $y^n - 1$ élevé à la puissance n^{m-1}, ou à $-(n^{m-1})$.

VI. Pour trouver p', on observera que par la même raison ce terme doit être égal au coefficient de $y^{n^m - 2n}$ dans $\overline{y^n - 1}^{\,n^{m-1}}$ égal à $\frac{n^{m-1} \cdot n^{m-1} - 1}{2}$; p'' sera égal à $-\frac{n^{m-1} \cdot n^{m-1} - 1 \cdot n^{m-1} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; & ainsi de suite.

VII. Pour avoir q', on obſervera que le coefficient de $x^{n^m - 2n}$ eſt égal à la ſomme des produits des racines priſes $2n$ à $2n$; que dans chacun de ces produits on aura pour coefficient de AB la ſomme d'un nombre de produits des racines de $\overline{y^{n-1} - 1}^{\,n^{m-1}}$ priſes $2n$ à $2n$ égal au coefficient de $P^n\,Q^n$ dans $\overline{P + Q}^{\,2n}$; mais le coefficient total de AB doit contenir tous les produits des racines de $\overline{y^n - 1}^{\,n^{m-1}}$, $2n$ à $2n$, d'une manière ſemblable; donc, puiſqu'il contient un nombre de ces produits égal au nombre qu'il y en a de différens, multiplié par le coefficient de $P^n\,Q^n$ dans $\overline{P + Q}^{\,2n}$, il ſera égal à la ſomme des produits des racines de l'équation $\overline{y^n - 1}^{\,n^{m-1}}$, priſes $2n$ à $2n$, multipliées par le coefficient de $P^n\,Q^n$ dans $\overline{P + Q}^{\,2n}$.

VIII. De même q'' ſera égal à $\dfrac{n^{m-1} \,.\, n^{m-1} - 1 \,.\, n^{m-1} - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$; multipliant le coefficient de $P^{2n}\,Q^n$ dans $\overline{P + Q}^{\,3n}$, & r'' au même terme multiplié par le coefficient de $P^n\,Q^n\,R^n$ dans $\overline{P + Q + R}^{\,3n}$, & ainſi de ſuite; en ſorte que le coefficient de $x^{n^m - np}$ ſera

$$\pm \frac{\overline{n^{m-1} \,.\, n^{m-1} - 1 \,.\, n^{m-1} - 2 \ldots\ldots n^{m-1} - p + 1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots p} \times \left(\begin{array}{l} A^p + B^p \ldots\ldots \\ + p,\ A^{p-1}\,B \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + z\ A^u\,B^t\,C^s \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right)$$

p, étant le coefficient de $P^{np-n}\,Q^{n}$ dans $\overline{P+Q}^{\,np}$, & z le coefficient de $P^{un}\,Q^{tn}\,R^{sn}$ dans $\overline{P+Q+R}^{\,np}$, $u+t+s\,.\,.\,.\,.\,.\,=p$.

IX. Supposons maintenant que au lieu de $x=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}$ &c., au nombre de m, (qui ne varient que selon les coefficiens de $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{B}$ &c. qui sont les racines de $y^n-1=0$,) nous avons aussi les A, B, C, &c. qui varient & qui deviennent susceptibles de p combinaisons différentes, l' équation en x deviendra du degré $p\,.\,n^m$. Supposons les différentes combinaisons de A, B, C, &c. indépendantes les unes des autres, nous aurons l' équation en x égale au produit de p équations du degré n^m semblables entr' elles, & données par ce qui précède.

X. Soit donc $x^n=z$, $n^m=q$, nous aurons p équations

$z^q+Pz^{q-1}+Qz^{q-2}+Rz^{q-3}\,.\,.\,.\,.$

$z^q+P'z^{q-1}+Q'z^{q-2}+R'z^{q-3}$ &c.

Donc le coefficient de z^{qp-1} sera $P+P'+P''$, &c. celui de z^{qp-2} sera $Q+Q'+Q''+PP'+PP''\,.\,.\,.\,.$ & ainsi de suite.

XI. Maintenant soit s le degré de l' équation A, B, C &c. r le nombre des A, B, C, &c. différens qui entrent dans chaque racine (voyez le n.° suivant) p sera égal à $\frac{s\,.\,s-1\,.\,s-2\,.\,.\,.}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,r.}$: maintenant il est aisé de voir que $P+P'+P''$ &c. doit (*article précédent*) être égal à n^{r-1}, puisque j' appelle r ici ce qui étoit m (*articles précédens*). Multipliant $\frac{s\,.\,s-1\,.\,s-2\,.\,.\,.\,.}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,r}$ sommes de r A, B, C, &c. donc cette somme contiendra $\frac{s\,.\,s-1\,.\,s-2\ldots}{1\,.\,2\ldots r-1}$ termes A, B, C, &c. donc, puisque chaque terme y entre d' une manière semblable, divisant par s, on aura

$P + P' \ldots = n^{r-1} \cdot \frac{s-1 \,.\, s-2 \ldots\ldots}{1 \ldots\ldots r-1} \times$ (le second terme de l'équation en A).

XII. Ensuite $Q + Q' + Q'' = n^{r-1} \frac{s-1 \,.\, s-2 \ldots\ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots r-1} \times$ (somme des quarrés des racines de l'équation en A) $+ \frac{n^{r-1} \,.\, n^{r-1} - 1}{2}$, multipliant le coefficient de $P^n Q^n$ dans $\overline{P+Q}^n$; multipliant une quantité égale à $\frac{s \,.\, s-1 \,.\, s-2 \ldots\ldots}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r}$ produits deux à deux de A, B, C, pris entre r de ces quantités; donc ce nombre sera $\frac{s \,.\, s-1 \,.\, s-2 \ldots\ldots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots r}$ $\frac{r \,.\, r-1}{2}$ produits deux à deux, mais le nombre total est $\frac{s \,.\, s-1}{2}$ & tous doivent y entrer semblablement: donc ce terme sera égal à $\frac{s-2 \,.\, s-3 \ldots}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r-2} \times$ (le troisième terme de l'équation en A); ensuite pour avoir $PP' + PP'' \ldots$ je remarquerai que (le nombre des P étant p, celui de ces produits $\frac{p \,.\, p-1}{1 \,.\, 2}$) chacun contiendra $n^{\overline{r-1} \,.\, 2}$ termes en A, B, C, &c. que dans la série des P .. A sera répété $\frac{s-1 \,.\, s-2 \ldots\ldots}{1 \,.\, 2 \ldots r-1} n^{r-1}$ fois; ou n^{r-1}. A un nombre $\frac{s-1 \,.\, s-2 \ldots}{1 \,.\, 2 \ldots r-1}$ fois que j'appelle p' fois, donc dans $PP' + PP''$ &c. A^2 se trouvera répété $\frac{p' \, \overline{p'-1}}{2} n^{2 \,.\, \overline{r-1}}$ fois; donc ce terme contiendra $\frac{p' \, \overline{p'-1} \, n^{2 \,.\, \overline{r-1}}}{2}$ (somme des quarrés de A^2) plus $\frac{p \,.\, p-1}{2} n^{2 \,.\, r-1} - \frac{p' \,.\, \overline{p'-1} \, n^{2 \,.\, \overline{r-1}}}{2}$

termes

termes où les produits ſont de A, B, C, &c. différens; donc diviſant ce terme par $\frac{s \cdot s - 1}{1 \cdot 2}$ & appellant le quotient M, on aura pour la valeur de ce terme $M \times$ (le troiſième terme de l'équation en A).

XIII. Connoiſſant donc l'équation en A, on aura par ce moyen les coefficiens de l'équation en x par la doctrine des combinaiſons, pourvu qu'on ait la manière de trouver les fonctions ſemblables de toutes les racines de l'équation en A.

XIV. Cela poſé, je ſuppoſe que j'aie

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \; \ldots\ldots$$

au nombre de p; que A ſoit de la forme

$$P + \sqrt[n']{A'} + \sqrt[n']{B'}$$

au nombre de p', j'aurai $s = n'^{p'}$; l'équation en $\overline{A - P}$ ſe formera comme ci-deſſus, & par conſéquent l'équation en x qui ſera du degré $\frac{n'^{p'} \cdot n'^{p'} - 1 \ldots\ldots}{1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots p} \times n^p$.

XV. Si on ſuppoſe que les A', B', &c. ſont de la forme

$$p' + \sqrt[n'']{A''} + \sqrt[n'']{B''}$$

au nombre de p'', on aura A par une équation du degré $\frac{n''^{p''} \cdot n''^{p''} - 1 \ldots\ldots\ldots}{2 \cdot 3 \ldots\ldots p'} \; n^{p'}$, & par conſéquent x par une équation du degré

$$\frac{\frac{n'^{p''} \cdot n'^{p''} - 1 \ldots}{1 \ldots\ldots p'} \, n'^{p'} \cdot \frac{n'^{p''} \cdot n''^{p''} - 1 \ldots\ldots}{2 \cdot 3 \ldots\ldots p'} \, n'^{p'} - 1 \ldots\ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots p} \; n^p,$$

& ainſi de ſuite pour des formes plus compliquées.

XVI. Nous nous bornerons maintenant à conclure de cette Théorie; 1.° que l'on doit toujours ſuppoſer que $p <$ que le degré de l'équation en A, $p' <$ que le degré de l'équation en A', $p'' <$ que le degré de l'équation en A'', & ainſi de ſuite. Autrement le nombre des

A, B, C, étant plus grand qu'il ne peut être, il faudroit qu'ils fussent répétés plusieurs fois; ce qui est contre l'hypothèse. 2.° Qu'on n'a supposé pour l'équation en x que des racines où les A, B, C, &c. fussent différens dans chacune; il auroit été facile d'y faire entrer les racines où ils sont les mêmes; mais cela étoit inutile, parceque les racines où ils seroient les mêmes formeroient des séries de racines

$$2\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$$
$$2\sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{C}, \text{ \&c.}$$

où le nombre des radicaux est moindre, & qui donneroient par conséquent des racines rationnelles en x, d'un degré moindre que celui de la série totale des valeurs de x; donc l'équation en x seroit divisée par celles là, & le quotient seroit l'équation trouvée ci-dessus. 3.° Si on fait $p' = n''^{p''}$, on aura A par une équation du degré $n'^{p'}$; & si $p = n'^{p'}$, on aura x par une équation du degré n^p. Si on fait $p' = n''^{p''} - 1$ & $p = n'^{p'} - n''^{p''}$, on aura A par une équation du degré $n''^{p''}\, n'^{p'}$, & x par une équation du degré $n^p\, n'^p\, n'^{p''}$ &c. &c. &c.

XVII. Cela posé, imaginons que l'une des formes ci-dessus qui contient 2, 3 radicaux successifs, représente la racine de l'équation du degré n, comme (articles précédens) le degré où elle monte est toujours multiple de n; soit $n\,u$ ce degré, on aura u équations du degré n, qui par leur multiplication doivent produire la popofée.

XVIII. Supposons d'abord que l'on ait l'équation $x^n + a\,x^{n-2} + b^2\,x^{n-3} + c^3\,x^{n-4} \ldots\ldots + h^n$, & que l'on ait l'équation du degré x^{nu}, dont (art. précéd.) les coefficiens soient donnés en P, P', P'' .... $A_{,,,}\,m$, $B_{,,,}\,m$, le nombre des P étant m, & $m + 1$ le nombre des radicaux successifs; il est aisé de voir que si x est une fonction du degré 1 homogène & a, b, c .... h, P sera une fonction rationnelle & entière du degré n; P' une du degré $n\,n'$; P'' du degré $n\,n'\,n''$, & $A_{\dots\,n}$ du degré $n\,n'\,n''\,.\,.\,.\,.\,.\,n'''^{m}$, & que les coefficiens de ces fonctions pourront être rationnels. Prenant donc l'équation hypothétique du degré $n\,u$ formée par cette hypothèse, prenant une autre équation hypothétique du degré $n\,u - n$; multipliant celle-ci par la proposée, & comparant terme à terme, on aura, si on a pris pour n, n', n'', &c. des valeurs convenables, on aura, dis-je, les coefficiens rationnels des différens termes qui entrent dans $P, P', P''\dots\,A_{\prime\prime\prime\prime\,m}$ par des équations numériques, & le problême sera résolu. Or comme on peut prendre n, n', n'' à volonté, & en aussi grand nombre qu'on veut, il est clair que toutes les fois qu'une équation aura une racine de cette forme, on la trouvera par cette méthode; donc pour prouver que cette méthode est générale pour toutes les équations, dont les racines ont une forme finie, il reste à prouver seulement que toutes les fonctions algébriques & finies peuvent être représentées par cette forme générale.

XIX. Je suppose d'abord que la fraction soit réduite à un seul dénominateur rationnel, ce qui est toujours possible en général, & que l'on fasse abstraction de ce dénominateur; je remarque 1.° que les formes

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n']{B} + \sqrt[n'']{Q} \text{ \&c.}$$

sont réductibles à la forme précédente, en les écrivant $\sqrt[n\,n'\,n''\dots]{A^{n'n''\dots}} + \sqrt[n\,n'\,n''\dots]{B^{n\,n''}}\dots\dots$ &c. que les formes $P\sqrt[n]{A}$ sont les mêmes que $\sqrt[n]{P^n A}$. 2.° Cela posé, supposons une forme où il y ait deux radicaux successifs; il est clair qu'elle sera (les radicaux supérieurs & inférieurs étant réduits au même degré, comme je viens de le dire) il est clair, dis-je, qu'elle sera de la forme

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B} + \sqrt[m]{C}\dots\dots\dots\dots} \text{ (en nombre } r\text{)}$$

$$+ \sqrt[n]{A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}\dots\dots\dots\dots} \text{ (en nombre } r'\text{)}$$

(& un nombre quelconque de termes de cette forme). Dans ce cas il est aisé de voir que supposant que r est le plus grand des r; r', r'', &c. on peut mettre le terme A' & tous les termes semblables sous la forme $A + \sqrt[m]{(A'-A^m)}$, alors la forme deviendra

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B} + \sqrt[m]{C}}$$

$$\sqrt[n]{A + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}}, \text{ \&c.}$$

ou l'on peut supposer le nombre des radicaux égal dans chacune, puisque s'il en faut trois de plus, par exemple, on peut prendre A' & le faire égal à $A + \sqrt[m]{(B_{,}-A)^m} + \sqrt[m]{(B_{,,}-B')^m} + \sqrt[m]{(A' - B'')^m}$, ou bien supposer que deux ou trois de A, B, C, sont zéro. Soit donc p le nombre des radicaux sous le signe n, & r celui des radicaux sous le signe m, on aura nr, B, C, &c. qui prises r à r, donneront les valeurs des termes sous le signe; donc nous aurons cette fonction de la forme ci-dessus (n.° XI., XII., XIII., & XIV.) où ce que nous avons appellé n & p est le même, & $s = m^r$. Il en sera de même des formes plus compliquées; il faut sur-tout observer ici que souvent pour réduire à cette forme, il faut, comme l'on voit, la supposer beaucoup plus compliquée que celle sous laquelle la fonction se présente.

XX. Maintenant il reste à prouver que la fonction ne peut avoir de dénominateur. Soit donc $\frac{\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \dots}{P}$ la valeur de la racine d'une équation où le coefficient de la plus haute puissance est numérique, & dont les racines sont x, x', x'' &c. on aura $\frac{\sqrt[n]{A}}{P} = ax + bx' + cx''$ &c. a, b, c, étant numériques; or faisant $y = ax + bx' + cx''$ &c. on aura y par une équation où aussi la plus haute puissance aura un coefficient numérique & les autres entiers; donc $\frac{A}{P^n}$ sera une fonction entière; mais $\frac{A}{P^n} = \frac{A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'}}{P^n}$;

donc $\frac{\sqrt[m]{B}}{P^n}$ ſera une fonction entière, & par conſéquent $\frac{B}{P^{mn}}$, & ainſi de ſuite; donc en général $\frac{\sqrt[m]{A} + \sqrt[n]{B}}{P}$ ſera immédiatement diviſible par P; donc on peut la ſuppoſer entière. Or il eſt aiſé de voir qu' il doit être général que le coefficient de la plus haute puiſſance de y ſoit numérique, car ce coefficient ne dépend que du premier coefficient de la propoſée, qu' on peut ſuppoſer l' unité, & du degré de l' équation, & eſt indépendant de tous les autres.

XXI. J' ai donc prouvé que l' on auroit toujours une méthode générale de trouver la racine d' une équation du degré, pourvu que cette racine fût d' une forme finie; mais le nombre des radicaux ſucceſſifs & leurs expoſans, reſtent indéterminés; d' ailleurs l' équation en x à laquelle on compare la propoſée, eſt beaucoup plus élevée peut être qu' elle ne doit l' être. C' eſt donc à ſimplifier cette méthode, & à tacher de déterminer, s' il eſt poſſible, le nombre de degrés des radicaux, que je dois m' occuper maintenant.

ARTICLE II.

Nous examinerons quatre queſtions dans cet article. 1.° La manière dont l' équation produite par l' évanouiſſement des radicaux ſucceſſifs & dont la racine eſt $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. peut ſe réduire à une équation rationnelle du n.^{e} degré. 2.° Combien & quels radicaux ſont néceſſaires pour que cela ſoit poſſible. 3.° De la réduction & ſolution des équations en A, B, C. 4.° De la marche générale la plus ſimple qu' on puiſſe faire ſuivre à la méthode.

I. Soit l'équation dont la racine eſt $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. rationnelle du degré n, & ſoit p le nombre total des A, B, C, &c. il eſt clair que ce nombre doit être égal ou plus grand que

$n-1$. En effet, s' il étoit plus petit, soient x, x', x''.... les n racines de la proposée, nous aurions entre $n-1$ de ces racines une équation linéaire ; ce qui est contre l'hypothèse, puisqu' on peut les supposer quelconques. D' où il suit que si les mêmes A, B, C, se trouvent dans chaque racine de l' équation, il faut que ces $n-1$ termes au moins se trouvent dans chacune.

II. Soit maintenant

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}, \text{ \&c.}$$

une des racines, les A, B, C, &c. étant au nombre de $n-1$, & appelons n, n', n'', n''', &c. les n racines de l' équation $y^n - 1 = o$, les n^{n-1} combinaisons différentes de ces racines donneront n^{n-1} racines de l' équation en x. Supposons que $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. soit une racine de l' équation rationnelle en x, il faut que tout système de radicaux convenant à cette équation du degré n, soit assujetti aux conditions de l' article précédent. Le nombre total de systèmes de n racines est ici, $(n^{n-1}) = s$, $\frac{s \,.\, s-1 \,.\, s-2 \,....}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, n}$; mais comme il n' est question que de ceux qui contiennent $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. le nombre est réduit à $\frac{s-1 \,.\, s-2 \,....}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, n-1}$. Maintenant 1.° tout système de ces $\overline{n-1}$ radicaux, qui contiendroit un ou plusieurs des $\overline{n-1}$ racines n', n'', n'', multipliant $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$.... est exclus ; donc il ne restera plus que $\frac{s-n \,.\, s-n-1 \text{ \&c.}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, n-1}$ systèmes. 2.° Il est aisé de voir que, si on divise $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. en deux parties $P + Q$, le cas où le système des n racines contiendroit deux formules $n' P + n'' Q$, ou en le divisant en trois $P + Q + R$, ce système contiendroit trois formules $n' P + n'' Q + n''' R$, & ainsi de suite, doit être également exclus. 3.° Que soit $n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B} + n''' \sqrt[n]{C}$, &c.

une seconde racine, toute formule . . . . $(n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B}$ &c.) $\times$ n' sera exclue; or comme n'^2, n' n'' &c. sont aussi des racines de l'équation $y^n - 1 = o$, la formule $(n' \sqrt[n]{A} + n'' \sqrt[n]{B}$ &c.) n' sera une des s racines; ainsi cette observation exclut encore des racines de l'équation en x du degré n^{n-1} toute cette classe de racines, & ainsi de suite.

III. Mais sans chercher par ce moyen le nombre de systèmes répondant à la racine $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, &c. il est aisé de s'assurer qu'il n'y en a en général qu'un seul; en effet, si $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, &c. appartenoit à deux systèmes de n racines d'équations rationnelles du degrè n, on auroit une équation rationnelle du degré $2\,n$ qui auroit deux racines égales; donc différenciant, on aura la racine proposée, ou par une équation soit linéaire, soit inférieure au degré n; ce qui est contre l'hypothèse; ou par une équation du degré n; or ce dernier cas supposeroit que l'équation en x du degré n^{n-1} a n racines égales deux à deux, a toutes les racines égales au moins deux à deux, ou plutôt les a toutes n à n, puisque n est en général le seul diviseur de n^{n-1}, donc l'équation en x du degré n^{n-1} seroit réductible en général à une rationnelle du degré moindre, ce qui est contre l'hypothèse.

IV. Il suit des mêmes principes que ci-dessus, que si $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ . . . . est la racine d'une équation du degré n, l'équation du degré n^{n-1} est formée par le produit de n^{n-2} équations du degré n, qui ne différent de la proposée que parceque leurs coefficiens sont multipliés par d'autres nombres. Nous observerons ici que l'équation rationnelle en n, étant sous la forme

$$x^n + a^2\, x^{n-2} + b^3\, x^{n-3} + c^4\, x^{n-4} \ldots + q^n,$$

les autres équations seront

$$x^n + A_1\, a^2\, x^{n-2} + B_1\, b^3\, x^{n-3} + (C_1\, c^4 + D_1\, a^4)\, x^{n-4} \text{ \&c.}$$

mais si on avoit regardé l'équation

$$x^n + A_1\ a^2\ x^{n-2} + B_1\ b^3\ x^{n-3}\ \ldots\ldots = o,$$

comme étant la proposée, l' équation

$$x^n + a^2\ x^{n-2} + b^3\ x^{n-3}\ \ldots\ldots = o,$$

seroit devenue

$$x^n + \frac{1}{A_1}\ (A_1\ a^2)\ x^{n-2}$$
$$+ \frac{1}{B_1}\ (B_1\ b^3)\ x^{n-3}$$
$$+ \frac{1}{C_1}\ (C_1\ c^4 + D\,a^4) - \frac{D}{CA^2}\ (A\,a^2)\ x^{n-4};$$

& ainsi de suite; & il n' y a pas lieu de savoir si en général on peut supposer à ces autres équations une forme plus simple.

V. Maintenant soit

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}\ \ldots\ldots$$

au nombre de p termes, nous aurons une équation en x du degré n^p. Supposons que $x^n + a^2\,x^{n-2}\ldots\ldots + q^n$, soit une équation rationnelle qui divise l' équation du degré n^p $a^2\ldots q^n$ demeurant quelconques, il est aisé de voir que si le nombre p est $n-1$, on pourra avoir, en mettant pour x^n sa valeur, une équation

$$V\ x^n + V'\ x^{n-1}\ \ldots\ldots = o;$$

que la multipliant par x, & substituant, on en a une seconde de la même forme, qui sera

$$Z\ x^n + Z'\,x^{n-1}\ \ldots\ldots\ldots = o;$$

que multipliant la première par Z', on aura une équation

$$V\,Z' - V'\,Z\,x^n + V''\,Z' - Z''\,V\,x^{n-2}\ \&c.$$

ou mettant pour x^n sa valeur, on aura $n-1$ équations pour déterminer les $n-1$ quantités indéterminées; donc il faut toujours supposer qu' il y a un nombre d'A, B, C, &c. En effet, si on le fait plus petit, il y a trop d' équations de comparaison, & si on le fait plus grand, il restera des valeurs indéterminées. Il suit de là que la formule qui renferme $n-1$ radicaux indéterminés dans la même racine, est la seule qui puisse convenir.

VI.

VI. Suppoſons maintenant que ſous le ſigne $\sqrt[n]{}$ il ſe trouve des fonctions de radicaux ſucceſſifs, en ſorte que le radical d'un degré quelconque ne contienne qu'une ſeule fonction ſous lui, ou des fonctions compoſées des mêmes radicaux, il eſt aiſé de voir qu'il faudra $n - 1$ radicaux ſucceſſifs.

VII. En effet pour que l'équation

$$x^n + a^2 x^{n-2} \ldots\ldots + q^n = o$$

ait une racine

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} \text{ \&c.}$$

il faut que parmi les AB, AC, &c. il y ait un terme qui devienne $\overline{P+Q}^{\,n}$ en ſorte que P ſoit rationnel, & Q tel que la ſomme de toutes les quantités ſemblables qui ſe trouvent dans le terme formé par les produits des A, B, C . . . . . ſous le ſigne $\sqrt[n]{}$, & qui doit être égalé à a^2, que la ſomme, dis-je, de tous ces termes ſoit nulle. Mais pour que $A\,B$ ait cette propriété, ſans que A ſoit de la même forme, il faut que faiſant

$$A = A' + \sqrt[m]{B'} + \sqrt[m]{C'} \text{ \&c.}$$

& $B = A' + a\sqrt[m]{B'} + b\sqrt[m]{C'}$, &c. ($a$ & b ſont des nombres) on ait ou $B'C' = \overline{P' + Q'}^{\,m}$ ou $B\,B' = \overline{P + Q'}^{\,m}$, & ainſi de ſuite; en ſorte qu'il faudra que dans les radicaux ſucceſſifs il y en ait un quarré: on prouvera de même qu'il faudra qu'il y ait un radical troiſième, un radical quatrième, ou un nouveau radical quarré, un radical cinquième, &c. & ainſi de ſuite juſqu'au radical n qui n'eſt pas néceſſaire, puiſque le dernier terme contient A, B, C, &c. au premier degré, ainſi il n'y a aucun beſoin que A contienne des radicaux plus élevés; mais cela ne prouve pas qu'il n'en puiſſe contenir.

VIII. Maintenant ſuppoſons que $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ &c. les A, B, C, &c. étant au nombre de $n - 1$, ſoit la racine de l'équation du degré n; M.[r] de la Grange a prouvé qu'en général si n est un nombre premier, l'équation en A sera réductible au degré $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n-2$; & que si n est un nombre qui ait des diviseurs, elle sera réductible si m est un diviseur premier; ensorte que $n = m\,n'$ au degré $\frac{1 \,.\, 2 \ldots\ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n'}\,m$; donc si m & n' sont des nombres premiers, elle le sera aussi au degré $\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots m^{n'} \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n'}$, c'est-à-dire, réductible, en supposant $m < n'$ également à une équation du degré $\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots m^{m+1} \,.\, \overline{m+1 \,.\, m+2 \ldots n'}}\,m$, ou à une équation du degré $\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots m^{n'+1} \,.\, m+1 \,.\, m+2 \ldots n'}$, ou, ce qui est la même chose, à une équation du degré $\frac{1 \,.\, 2 \ldots\ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m^{m+1} \,.\, \overline{m+1 \,.\, m+2 \ldots n'}} \times \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m^{n'-m}}$, ou à une du degré $\frac{1 \,.\, 2 \ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, m^{m+1} \,.\, \overline{m+1 \,.\, m+2 \ldots n'}} \times \frac{1}{\overline{m+1 \,.\, m+2 \ldots n}^{m}}$, & par conséquent réductible à une du degré $\frac{1 \,.\, 2 \ldots\ldots n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m^{n'+1} \,.\, \overline{m+1 \ldots n'}^{m}}$.

IX. Si l'on examine maintenant la forme de ce dernier nombre, on trouvera qu'en général l'équation en A n'est réductible qu'à une équation dont le degré est un produit de nombres plus petits que n, mais lui-même plus grand que n; & l'on verra que si on traite cette équation réduite comme la proposée, on parviendra à une réduite d'un degré encore plus élevé, & ainsi de suite. Mais si l'on ne peut espérer, par ce moyen, de parvenir à une équation toujours de plus en plus rabaissée, on peut être sûr, cependant, qu'en la répétant un nombre de fois suffisant, on parviendra à une équation rationnelle. En effet, supposons que la dernière équation réduite soit du degré $m'\ n'\ p'$ &c. m', n', p' &c. étant des nombres $< n$, que nous supposions l'inconnue x' de cette équation mise sans second terme, & que nous fassions

$$x^{1} = \sqrt[m'n'p'\&c.]{A^{1}} + \sqrt[m'n'p]{B^{1}}\ \&c.$$

au nombre de $m'\ n'\ p^{1} \ldots - 1$; il est aisé de voir que les fonctions A', B', C' contiennent un moindre nombre de radicaux successifs que la valeur de x'; & qu'ainsi en continuant toujours de même, on parviendra, si la proposée a une racine exprimable en termes finis, à une équation dont la racine sera rationnelle. Mais jusqu'ici on n'a pas encore pu parvenir à déterminer combien d'équations successives en x', x'', &c. on auroit à résoudre auparavant.

X. Il est au moins très-vraisemblable que cette manière générale de résoudre l'équation en x' du degré $m'\ n'\ p' \ldots\ldots$ est trop générale. En effet cette manière feroit dépendre la solution de la proposée de radicaux qui auroient pour exposans des nombres premiers contenus entre $m'\ n'\ p' \ldots$ & n; or ces radicaux ne doivent pas être contenus dans la racine d'une équation du degré n. Supposons donc que

$$x' = \sqrt[m'n'p'\ldots]{A'} + \sqrt[m'n'p']{B'}\ \&c.$$

les A', B', C' &c. étant au nombre seulement de $m' - 1$, ou $n' - 1$, ou $p' - 1$ termes, &c. il est aisé de voir 1.° que si l'exposant $m'\ n'\ p' \ldots$ du radical a été supposé trop grand, & qu'il ne doive être que m', n', p', &c. nous aurons une équation en A', telle que la même équation seroit aussi rationnelle pour $A'^{\frac{1}{n'p'\ldots}}$ $A'^{\frac{1}{m'p'\ldots}}$, & ainsi de suite. Ainsi dans ce cas l'équation en A' ne contiendra que des puissances $n'\ p' \ldots$ ou $m'\ p' \ldots$ 2.° que si le nombre des A', $B' \ldots$ n'est que $m' - 1$, on aura par les principes employés par M. de la Grange, l'équation en A', du degré $(m'n'p'\ldots).(m'n'p'\ldots-1)$ jusqu'à $m'n'p'\ldots-m'$ degré qui s'abaissera par des réductions de la manière que M. de la Grange l'a enseigné. 3.° que si on avoit au contraire pris $\sqrt[m']{A'}+\sqrt[m']{B'}$ &c. au nombre de $m'-1$, & que c'eût été le radical $\sqrt[m'n'p'\ldots]{}$ qu'il eut fallu prendre, l'équation ayant été trouvée en A', on auroit, en mettant au lieu de A', $Z^{\frac{1}{n'.p'\ldots}}$ à cause de $Z=A^{n'p'}\ldots$ une équation en Z d'où le radical aura disparu; ce qui prouve que l'on peut sans inconvénient faire l'une ou l'autre supposition; 4.° que si le nombre des $m'-1$, $n'-1$ &c. est plus petit que ne doit être celui des fonctions, nous aurons, (en ne substituant dans l'équation du degré $x^{m'^{m'-1}}$ que les valeurs de $x^{m'n'p'\ldots}$) $m'n'p'-1$ équations entre $m'-1$ variables qui nous serviront à voir si la supposition est légitime, & à avoir dans ce cas pour A', B' &c. les équations du plus petit degré possible. On voit aisément que si m' est le plus grand des facteurs $m'n'p'$, on aura presque toujours $m'^{m'-1}>m'n'p'\ldots\ldots$ & si on prend $\sqrt[m'n']{}$ ou $\sqrt[m'n'p']{}$ & ainsi de suite, on parviendra toujours à une équation en A' B' &c. x' qui sera d'un degré plus élevé que l'équation proposée. Au reste, si au lieu de supposer que toute racine de l'équation du degré $m'n'p'\ldots$ est de la forme $\sqrt[m']{A'}+\sqrt[m']{B'}$ au nombre de $m-1$, on supposoit que ces deux équations n'ont que m' racines communes, on trouveroit toujours autant d'équations pour déterminer A', B', qu'il y auroit de ces quantités; mais la méthode ci-dessus me paroit plus propre à abaisser le degré de l'équation en A', autant que cela sera possible.

XI. Soit la proposée du degré n, que je suppose $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ ..... au nombre de $n - 1$ termes, que je fasse évanouir tous ces radicaux, j'aurai une équation du degré n^{n-1} qui sera divisible par la proposée. Supposons la division faite, & le reste égal à zéro, les équations de condition donneront les valeurs que doivent avoir A, B, C, &c. pour que la racine hypothétique soit celle de la proposée; donc toute valeur de A, B, C .... qui satisfera à la condition, donnera une valeur de la racine de la proposée. Supposons que l'élimination soit faite, & que nous aions C donné par une équation en A, B, C; B par une équation en A, B; & A par une équation du degré n', il est clair qu'à chaque racine de l'équation en A, répondront certaines valeurs de B, de C, & au moins une racine de la proposée; mais ces racines ne peuvent être qu'au nombre de n; donc soient

A, B, C .... $n - 1$ de ces racines;
A' B' C' .... $n - 1$ autres;
A'' B'' C'' .... $n - 1$ autres;

& ainsi de suite, lesquelles représentent n racines de la proposée, les autres racines de l'équation en A ne pourront être que quelques-unes de ces $n - 1 \cdot n$ racines; donc l'équation en A sera nécessairement réductible à une équation de ce degré, qu'on voit devoir se réduire à une du degré $m - 1$. Cette réflexion suppose que si $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ .... & $\sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D}$ ...... sont des valeurs d'une même racine de l'équation en n, aucun de ces radicaux n'étant rationnel, il faut que $C = A$, ou $= B$ & $D = B$ ou $= A$. Si donc on suppose en général l'équation en A, telle qu'étant données $n \cdot n - 1$ valeurs de A, ou même $n - 1$, les autres racines soient égales à ces mêmes valeurs de A, multipliées par des nombres, ou à la somme d'un certain nombre de ces valeurs multipliées par des coeficiens numériques, on pourra trouver un moyen de rabaiſſer l' équation en A.

XII. Généralement après avoir trouvé l' équation en A, il faudra (le degré de l'équation en A étant $p^t\, q^m\, r^s \ldots$) rechercher ſi cette équation n' eſt pas d' une forme telle que prenant

$$A^p + A'\; A^{p-1} + B'\; A^{p-2} \ldots\ldots = 0;$$
ou $$A^q + A'\; A^{q-1} + B'\; A^{q-2} \ldots\ldots = 0;$$
$$A^r + A'\; A^{r-1} + B'\; A^{r-2} \ldots\ldots = 0;$$
&c.

on ait A' par une équation du degré $p^{m-1}\, q^t\, r^s$ &c. ou $p^m\, q^{t-1}\, r^s$ &c. & en traiter de la même manière les équations en A', juſqu' à ce qu'on parvienne à une équation non reductible. Soit cette équation encore du degré $p^{m'}\, q^{n'}\, r^{s'} \ldots$ on ſuppoſera que ſa racine (le ſecond terme ayant été détruit) ſoit $A' = \sqrt[p]{A''} + \sqrt[p]{B''}$ au nombre de $p^{m'} - 1$ termes; & ayant trouvé (n.° X.) l' équation en A'', ſi elle eſt poſſible, on la traitera comme on a traité l'équation en A, & ainſi de ſuite. Si cela n' étoit pas poſſible, il faudroit eſſayer la ſuppoſition de $A' = \sqrt[pq]{A''} + \sqrt[pq]{B'} \ldots\ldots\ldots$ au nombre de $p^{m'}\, q^{n'} - 1$, & continuer ainſi juſqu' à ce qu' on ait une équation en A''. Par ce moyen, toutes les fois que la propoſée aura une racine finie, on parviendra à la fin à une équation rationnelle, & le problême ſera réſolu.

XIII. Nous obſerverons ici que nous avons deux eſpèces de réductions à conſidérer; l' une eſt celle dont nous venons de parler, & l'autre eſt numérique pour ainſi dire; c' eſt lorſque, ou la propoſée ne contient que des puiſſances $x^{n'} \ldots$ ce qui fait que l' on a (faiſant $z = x^{n'}$) les valeurs de x en z par la ſolution de l' équation numérale $y^n - 1 = 0$; ou bien lorſque la propoſée du degré n' eſt diviſible par une équation du degré $m' < n'$, les coefficiens de cette nouvelle équation étant rationnels quant aux fonctions algébriques. Il faudra donc examiner d' abord si les équations réduites qui servent à la solution du problême ne sont pas susceptibles de ces réductions. La seconde espèce de réduction est algébrique, c' est celle où l' on suppose qu' une équation du degré $p\,q$, par exemple, est telle que l' on puisse y substituer une équation du degré p, dont les coefficiens soient donnés par une équation du degré q, ou réciproquement; & comme nous l' avons dit dans le mémoire précédent, il ne faut jamais tenter la solution d' une équation par la substitution de la forme $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots$ que l' on n' ait examiné toutes les réductions dont elle peut être susceptible, toutes les fois que le nombre des coefficiens algébriques indéterminés de l' équation est plus petit que l' exposant de degré diminue d' une unité.

XIV. Nous avons donné dans le premier article de ce mémoire, la manière d' avoir en général une équation rationnelle en x, A, B, C, lorsqu' on a $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots$ Supposons que nous ayons cette équation du degré n^{n-1}, nous la pouvons supposer être identique au produit de n^{n-2} équations

$$x^n + a^2\, x^{n-2} \ldots + g^{n-2}\, x^2 + h^{n-1} + q^n = o;$$
$$x^n + p\, a^2\, x^{n-2} \ldots\ldots$$
$$+\, p_{,}\, q^n + p_{,,}\, a^2\, q^{n-2} = o;$$

où les coefficiens $p_{,}\, p_{,}\, p_{,,}$ sont des nombres, ou bien identique à

$$x^n + a^2\, x^{n-2} \ldots\ldots + q^n,$$

multipliée par

$$x^{n^{n-1}-n} + p\, a^2 x^{n^{n-1}-n-2}, \text{ \&c.}$$

Cela posé, nous avons trouvé ci-dessus que le coefficient de $x^{n^{n-1}-n}$ étoit dans l'équation en x, A, B, C, &c. de la forme $M.\overline{A + B + C}$ &c. que celui du terme suivant étoit $N.\overline{A + B + C}^2 + N'$ (le produit des $A, B, C,$ &c.

deux à deux;) celui du terme ſuivant égal à $P.\overline{A+B+C\ldots}^3$ $+ P'.\overline{A+B+C\ldots}$ (le produit des A, B, C, &c. deux à deux) $+ P''$ (le produit des A, B, C, &c. trois à trois) & ainſi de ſuite. Donc égalant ces valeurs aux termes correſpondans de l'équation en x, a^2, b^3, &c. & laiſſant les coefficiens numériques indéterminés, on aura des valeurs rationnelles; 1.° de $A+B+C$, &c. 2.° du produit des A, B, C, &c. deux à deux; 3.° du produit des A, B, C, &c. trois à trois, & ainſi de ſuite; donc on aura une équation en A, ou B, &c. rationnelle quant aux quantités algébriques & du degré $n-1$.

XV. Les ſeules choſes qui pourroient empêcher cette concluſion, ſeroient 1.° ſi l'on avoit un coefficient de l'équation en x, A, B, C, &c. pour le terme $x^{n^{n-1}}-n\,m$, qui ne contint point le produit convenable des A, B, C, &c. pris m à m. Ce dont il eſt aiſé de s'aſſurer d'après le premier article, & cela n'exige qu'un calcul que tout le monde peut faire. 2.° S'il arrivoit que les coefficiens numériques des termes de l'équation ci-deſſus du degré $n-1$, fuſſent $\frac{0}{0}$, ce qui eſt plus difficile à conſtater en général.

XVI. Si aucun de ces inconvéniens n'a lieu, alors on aura par ce moyen l'équation littérale réduite par une voie très ſimple, & pour la détermination des coefficiens numériques p, $p_{\prime}$, $p'_{\prime\prime}$ &c. (n.° XII.) comme on a les coefficiens des termes au delà de $x^{n^{n-1}}\overline{-n+n-1}$ donnés & coefficiens des termes précédens, on aura immédiatement les équations de condition, en formant ces termes & égalant à zéro le coefficient de chaque terme en a^2, b^3, &c.

XVII. Il ſeroit donc très utile d'avoir des formules générales & abrégées pour calculer les fonctions homogènes de a^2, b^3, c^4, ... q^{π}, auquel le problême propoſé conduit à chaque inſtant.

XVIII.

XVIII. D'abord, ſoit $n-1$ le nombre des $a^2, b^3, \ldots q^n$, & $n' = mn + pp < n$ le degré de la fonction homogène cherchée, nous aurons le nombre T des termes de la fonction homogène égal à ce que devient T, en y mettant pour n, $n-1$, plus ce que devient T en mettant pour n, $n-1$, & pour n', $n'-n$, plus ce que devient T en mettant pour n, $n-1$, & pour n', $n'-2n$, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que devient T, en y mettant p au lieu de n & de n'. (Mais il ne s'agit pas ici de développer cette théorie, non plus que la manière d'avoir les coefficiens de chacun des termes; ce qui dépend de la théorie des combinaiſons.)

XIX. Connoiſſant en général la manière de former ces fonctions homogènes, on réſoudra ce problême: étant donnée une équation dont les coefficiens ſoient de cette forme & une propoſée; ſavoir ſi ſuppoſant ces coefficiens numériques indéterminés, la forme hypothétique ne réſout pas la propoſée. On pourra y parvenir par la méthode des coefficiens indéterminés, & on aura les équations de condition entre les coefficiens, ſi on fait former les fonctions de l'article précédent.

XX. Pour cela on cherchera d'abord une propoſée $x^{n'} + a x^{n'-1} + b^e x^{n'-e} \ldots\ldots\ldots$ étant données les équations de condition pour qu'elle ait pour racine les n racines de $x^n + a x^{n-1} \ldots\ldots$ en ſuppoſant a' ou a connus à volonté. Cela poſé, on prendra telle hypothèſe qu'on voudra pour la forme de la racine cherchée, & faiſant diſparoître les radicaux & comparant terme à terme, on aura les équations de condition entre les coefficiens numériques, pour que cette forme ſoit celle de la racine propoſée; ou bien, ſi au lieu de la forme de la racine cherchée on prendra ſeulement $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} \ldots\ldots A$ & B pouvant être irrationnels, on aura les équations en A, B. Ces équations en A, B, &c. ſont alors en bien plus grand nombre que les A, B, &c. mais cela ne peut ſervir à abaiſſer le degré des équations en A, B, parce-que les coefficiens numériques doivent être tels que ces équations ſe réduiſent à $n - 1$; mais cependant ſi on doit avoir des équations d'un degré moindre en n'ayant égard qu'aux fonctions algébriques, on les trouvera par ce moyen. En effet il n'y aura qu'à ſuppoſer dans toutes ces équations A, B, C, &c. . . . données par une équation du degré m, par exemple, le même pour toutes, on aura, 1.° le degré de cette équation & la forme de ſes coefficiens en a^2, b^2, &c. 2.° les équations en A, B, C, &c. les contenant d'une manière ſemblable, on aura toutes ces équations en valeurs de ces coefficiens, & par conſéquent immédiatement les équations de comparaiſon entre les coefficiens. Si on veut examiner ſi l'équation en A, B, &c. eſt réductible, ou non; on prendra ces différentes hypothèſes, & on comparera de même ſans avoir beſoin d'élimination.

Ceci pourroit donner lieu à des développemens plus étendus, que je ſupprime, mais auxquels je me livrerai ſi les géomètres trouvent que ces recherches méritent d'être ſuivies.

ARTICLE III.

Il ne me reſte plus maintenant pour remplir le plan que je me ſuis propoſé, qu'à examiner la poſſibilité ou la non poſſibilité de la réduction à l'indéfini de toutes ces équations. J'y ajouterai quelques remarques ſur l'élimination & ſur la manière la plus ſimple de la faire.

I. Si d'abord nous examinons les remarques de M.r De la Grange, nous trouvons que la méthode générale ne nous conduit qu'à des réduites toujours plus élevées que la propoſée, lorſqu'elle eſt du 5.e 7.e 8.e degré, &c. car il me paroit d'après les recherches de M.r De la Grange, & de M.r Vandermonde, qu'on peut regarder celle du 6.e comme ſe réduiſant au cinquième.

II. Si on examine les remarques du premier article de ce mémoire, & que produiſant par le moyen d' une des formes quelconques de radicaux, une équation du degré p, on ſuppoſe que cette équation ſoit le produit d' une équation rationnelle du degré $p - n$ par une du degré n; il eſt clair que le nombre de termes en a^2, b^3 .... q^n dont les coefficiens numériques ſont indéterminés, eſt égal, 1.° au nombre des termes ſemblables dans une équation du degré $p - n$. 2.° au nombre de ces termes qui entrent dans la forme hypothétique; & que celui des équations de comparaiſon eſt celui de tous les termes qui entrent dans une équation du degré p; en ſorte que ce nombre ſurpaſſe celui des coefficiens indéterminés de celui du nombre des termes contenus dans n fonctions de a^2, b^3 .... du degré p, $p - 1$ .... $p - n + 1$ moins celui des mêmes termes dans des fonctions du degré n, nn', $nn' n''$ .... $nn' n''$ ... $n'^{\cdots m-1}$ au nombre de m, m étant le nombre des radicaux ſucceſſifs, & n, n', n'' ... n'''^{-m-1} leurs expoſans. Or ce nombre eſt toujours poſitif. Donc en général le nombre des équations ſurpaſſera toujours celui des coefficiens indéterminés.

III. Ces deux réflexions ne ſuffiſent pas pour aſſurer la non poſſibilité de la ſolution générale, ni même pour prouver qu' on ne puiſſe démontrer cette poſſibilité. Examinons donc les moyens de s' en aſſurer.

IV. Nous avons d' abord l' abaiſſement de l' équation du degré p (N.° II.). Cette équation n' eſt pas l' équation générale du degré p; elle ne contient qu' un nombre plus petit de coefficiens indéterminés, elle eſt donc ſuſceptible d' abaiſſement, & il eſt clair que ſi on prouve que cette équation eſt réductible algébriquement (les coefficiens numériques reſtant irrationnels) à une équation telle que le nombre des équations ne ſurpaſſât point celui des coefficiens, le problême ſeroit réſolu; & ſi cela n' eſt pas encore poſſible en général, cette conſidération peut du moins ſervir à diminuer l' excès du nombre des conditions ſur celui des coefficiens indéterminés. On pourroit diminuer encore la difficulté en considérant d'abord une équation du degré $p - n$ multipliée par $x^n + a^2 x^{n-2} + b^3 x^{n-3} \ldots\ldots + q^n$, & telle qu'il n'y ait dans le produit que des puissances n, & en examinant ce qui reste de termes indéterminés. On supposeroit de même, comme cela suit de la disparition successive des radicaux inférieurs sous les signes n', n'', que l'équation est formée semblablement des puissances n', n'', &c. & il est très possible que sous ce point de vue, l'excès du nombre des conditions soit encore diminué.

V. En attendant que ces calculs soient exécutés, voici toujours une méthode de s'assurer de la possibilité du problême. Soit (article 2.) l'équation réduite autant qu'elle peut l'être & du degré m, p, q, r; ces nombres étant premiers & moindres que n, s'essaie la solution de cette équation par la même méthode que la proposée & je cherche une autre réduite. J'examine le degré le plus bas où elle s'abbaisse: si ce degré a pour diviseurs premiers des nombres plus grands que ceux qui formoient le produit par lequel le degré de la proposée étoit exprimé, ou des nombres égaux à n, ou plus grands, on pourra regarder la solution comme impossible, sinon on pourra la regarder comme possible. Continuant, on observera si dans chaque réduite le nombre des termes dont le produit forme le degré de l'équation, ne diminue pas, quant au nombre soit des produisans, soit quant à leur degré.

VI. Si on rapproche de ceci ce que j'ai dit, (article 1.er N.os 14. & suiv.) on verra que chaque opération qu'on fait pour chercher les réduites, tend à débarrasser d'un radical; on verra également pourquoi les équations se présentent sous un degré plus élevé que le produit des radicaux successifs ou leurs puissances, pourquoi ce degré pourroit être le produit du nombre premier plus grand que n, comment enfin il doit toujours pouvoir se rabbaisser au dessous.

VII. Je finis par quelques réflexions ſur l'élimination. L'introduction à l'analyſe de l'infini de M. Euler renferme d'excellens principes ſur cette matière; c'eſt d'après lui que je vais procéder ici.

VIII. Quel que ſoit un m nombre d'équations entre m variables x, y, z, u .... ſi je veux avoir une équation déterminée en une ſeule variable, il eſt clair que, quelque méthode que je prenne, l'équation déterminée en x, par exemple, ſera une fonction de x égalée à zéro; & ſi $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, &c. ſont les équations propoſées, cette fonction de x purs ſera $AB + A'B' + A''B''$ &c.

IX. B, B', B'', ſeront des fonctions entières toutes les fois que l'on n'aura point d'équation en y, z, u .... Satisfaiſant aux équations

$$A = 0, A' = 0, \text{\&c.}$$

indépendamment de x. Dans ce cas, ſi on veut avoir x, il faut ſuppoſer à B, B', B'', &c. un dénominateur.

X. Suppoſons donc que l'on cherche l'équation la plus ſimple rationnelle en x, qui ſatisfaſſe aux équations $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, &c. il n'y aura qu'à les multiplier par les fonctions, ſi m eſt le degré de ces équations

$$\frac{C}{D}, \frac{C'}{D}, \frac{C''}{D}, \text{\&c.}$$

les C étant des fonctions entières du degré u, & D du degré $n + m - 1$, tout au plus. Prenant au lieu de chaque C & de D, des ſéries indéfinies, multipliant & ſuppoſant $\frac{AC}{D} + \frac{A'C'}{D}$, &c. une fonction entière de x, & l'egalant à zéro, on aura l'équation cherchée; & ſuppoſant ſucceſſivement pour chaque degré des fonctions C, celui des D, le plus grand qu'il eſt poſſible.

XI. Si on cherche au contraire l'équation en x la plus élevée qu'il eſt poſſible, toujours en ſuppoſant qu'on n'admette point de racines inutiles, il faut, en ſuivant la même opération, prendre pour les C, comme pour la quantité D, le plus petit degré qui puisse réussir.

XII. Toutes les fois que l'on n'a aucune valeur de y, z, u, &c. indépendantes de toute valeur des x, on aura par cette manière la valeur des coefficiens de l'équation en x, en résolvant des équations linéaires; & comme il est aisé de voir en général la forme de ces équations, on substituera immédiatement aux équations à éliminer un système d'équations linéaires. Cela peut être d'une grande utilité dans la pratique.

XIII. Il y a maintenant deux cas à considérer; 1.° celui où s'arretant à un degré pour les valeurs des C, le nombre de ces équations linéaires est plus grand que celui des coefficiens indéterminés. Dans ce cas, la solution n'est possible que lorsque les coefficiens des équations proposées ont entre eux certaines conditions. 2.° Lorsque dans la même hypothèse le nombre des coefficiens est plus grand ou égal à celui des équations. Il semble qu'alors on devroit conclure qu'en général la solution est possible; mais il faut observer qu'il faut que le système ne puisse pas se diviser en deux autres dans l'un desquels le nombre des indéterminées soit plus petit que celui des équations. Par exemple, soit $m + n$ le nombre total des équations, $p + q$ celui des indéterminées, & $p + q > n + m$. Si p de ces indéterminées se trouve n'entrer que dans n équations, & que $p < n$, on voit que l'élimination n'est pas possible, tant que les facteurs C ne seront pas plus élevés.

XIV. Si les équations se trouvent réellement en moindre nombre que les coefficiens, il y a une remarque importante à faire. Il peut arriver que la fonction $AC + A'C' + A''C''$, &c. qui devient une fonction entière de x par l'hypothèse, se trouve monter à un même degré, quelques coefficiens de C, C', C'', &c. restant arbitraires. Dans ce cas, comme la véritable équation en x ne doit pas en contenir, il est aisé de voir que pour avoir cette équation, il faut chercher le diviſeur le plus élevé de la fonction $AC + A'C' + A''C''$, &c. qui ne contienne pas de coëfficiens arbitraires, & ce diviſeur ſera l'équation cherchée.

XV. On aura donc toujours dans ce cas l'équation la plus ſimple. La même choſe aura lieu pour celui où l'on ſuppoſe que les C peuvent avoir un dénominateur; mais alors on peut réduire les opérations à la ſolution d'équations linéaires.

XVI. On voit en général que quelque méthode que l'on choiſiſſe pour avoir une équation en x, on aura toujours la fonction.

$$AC + A'C' + A''C'' \text{ \&c.} = 0 ,$$

qui répond également aux ſyſtèmes d'équation

$$A = 0,\ A' = 0,\ A' = 0 \ldots.$$
$$A = \quad A' = 0,\ C'' = 0 \ldots\ldots$$
$$A = \quad C' = 0,\ A'' = 0 \ldots.$$

& autant de ſyſtèmes qu'on pourra former de la même manière; & il faut pour que $AC + A'C' + A'C''$ &c. ſoit la fonction de x, la moins élevée poſſible, que ces ſyſtèmes aient abſolument le même nombre de valeurs de x qui y ſatisfaſſent. Hors de ce cas, quelque méthode d'élimination que l'on choiſiſſe, elle conduiroit toujours à une équation plus élevée qu'elle ne doit être.

On trouvera toute la théorie de l'élimination développée d'une manière très ſavante dans un mémoire préſenté par M. Bézout à l'Académie Royale des Sciences de Paris, & qu'elle publiera dans le volume de ſes mémoires pour l'année 1773.

XVII. Par la méthode ſuivante, dont la marche eſt très ſimple, on pourra parvenir à trouver la racine cherchée de toute équation déterminée.

Soit une équation du dégré m ſans ſecond terme, on prendra x égal à $-$, $(a + b + c + d \ldots)$ au nombre de $m - 1$ & on comparera à la propoſée, terme à terme, le produit de $x + a + b + c$ &c. $\times\ x + n a + n' b + n'' c$ &c. $\times\ x + p a + p' b + p'' c$ &c.... & ainſi de ſuite, les n les p, &c.

n' étant que des nombres qu'on déterminera par la condition, 1.° que (à cauſe du 2.^{d} terme qui manque, & qu' on ne doit pas avoir d' équation linéaire entre les a, b, c &c.) l' on ait $1 + 2 + n^1 + n'' \ldots . = o$ $1 + p + p^1 + p^{11} \ldots = o$, & ainſi de ſuite. 2.° Que l' équation définitive en a qu' on aura, après avoir éliminé b, c &c. ne contienne que des puiſſances multiples de m de la quantité a, ou ſi m a des diviſeurs m^1, m^{11}, &c. des puiſſances multiples de m^1, ou de m^1 m^{11}.

Enſuite on ſubſtituera au lieu de a, $z = a^n$; on fera diſparoître le ſecond terme, & on traitera l' équation en z^1 comme la propoſée, en obſervant de déterminer alors les nouveaux coefficiens numériques n_1 p_1 &c. par les deux conditions ci-deſſus, & par cette troiſième condition que l' équation que l' on aura en a^1, $z^1 = - (a^1 + b^1 + c^1 \ldots)$ ait, s'il eſt poſſible, un facteur rationel; & on aura ſoin, lorſque cela arrive, de prendre pour n_1 p_1 &c. les valeurs qui rendent le degré de ce facteur le plus petit poſſible; & ſi $a^{1 n a^1}$ eſt la puiſſance de a^1 dont il ne doit ſe trouver que les multiples de l' équation, on cherchera les valeurs de n^1 p^1 qui rendront m^1 le plus grand poſſible. On réſoudra l' équation en $a^{1 m^1}$ comme l' équation en z l & ainſi de ſuite.

Par ce moyen à chaque opération on fera diſparoître un des radicaux qui entrent dans la forme de la racine de l' équation, & l'on aura le double avantage de donner à z^1 la forme qu' il doit avoir rigoureuſement & indépendamment de toute hypothèſe; & ſi cette forme eſt trop compliquée, d' éviter les embarras qui pourroient naitre de cette complication ſuperflue.

On aura donc, par là, la racine toutes les fois qu' elle eſt poſſible; & ſi elle ne l' eſt pas toujours (ce qui me paroit très-peu vrai-ſemblable) on découvrira ſon impoſſibilité par celle de la réduction de l'équation en $a^{1 m^1}$ ou des ſuivantes.

ERRATA DANS LA PARTIE MATHEMATIQUE.

Pag. 17. *l.* 1. $\frac{\delta z}{dy} + a\frac{dz}{dy}$ *lisés* $\frac{\delta x}{dx} + \frac{adz}{dy}$

Pag. 17. *l.* 13. q & φ'; *lisés* φ & φ';

Pag. 20. *l pen.* des révolutions *lisés* de révolution

Pag. 35. *l.* 11. donc l'equation est *lisés* dont l'equation est

Pag. 35. *l.pen.* les ordonnées PM & PM *lisés* QM & PM

Pag. 37. *l.pen.* en x' en x' & y' *lisés* en x' & y'

Pag. 41. *l.* 9. de la fonction ' *lisés* de la fonction φ'

l. 14. $z = \varphi`(bx - y)$ *lisés* $z = \varphi`(bx - y`)$

Pag. 43. *l.* 21. Km'' *lisés* Km'''

l. 23. dans W *lisés* dans $`W$

l. 25. $V = a$ *lisés* $`V = a$

Pag. 47. *l.* 14. $Ph = W'$ *lisés* $Ph = W`$

l. 20. $W' = u$ *lisés* $`W = u$

l. 22. $AI = W$ *lisés* $AI = `W$

Pag. 49. *l.* 2. x' & $y`$ *lisés* x' & y'

Pag. 53. *l.* 14. $\varphi = \frac{b-c}{cv}p + \frac{q}{c}cv$ *lisés* $\frac{b-c}{cv}p + \frac{q}{c} - cv$

l. 17. $\frac{qy}{c}\ cy$ *lisés* $\frac{qy}{c} - cy$

Pag. 57. *l.* 22. $\varphi` u$ *lisés* $\varphi' u$

Pag. 62. *l.* 4. $W' = x(b+1)$ *lisés* $W'' = x\ b + 1$

Pag. 66. *l.* 9. $\varphi u = F(f.a) - h - al$ *lisés* $= F(f.a) - h - Al$

l. 26. point de construction *lisés* point de contradiction

Pag. 80. *l.* 16. le frottement des menses *lisés* des meules

Pag. 82. *l.* 16. $x^2\frac{\delta^3 z}{dx^2} = dV$ *lisés* $x^2\frac{\delta^3 z}{dx^2} = \delta V$

Pag. 94. *l.ult.* $\frac{dy}{y^m}\ \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ *lisés* $\frac{\Upsilon dy}{y^m}\ \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

Pag. 98. *l.* 4. $+ x^{m-2} F\left(\frac{x}{y}\right)$ *lisés* $+ x^{m-2} F'\left(\frac{x}{y}\right)$

*Pag.*99. *l.*18. $+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^{m'}\frac{\Upsilon dy^m}{y^m}$ *lisés* $+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\int^{m'}\frac{\Upsilon dy^m}{y^m}$

*Pag.*105. *l.*4. la contante a qui se trouve *lisés* la constante a

*l.*10. $x\frac{\delta z}{dx}y+\frac{dz}{dy}$ *lisés* $x\frac{\delta z}{dx}+y\frac{dz}{dy}$

*Pag.*116. *l.*6. $\int\frac{\Upsilon dy}{P+1y}$ *lisés* $\int\frac{\Upsilon dy}{y^{P+1}}$

*Pag.*116. *l.* 17. empoyé *lisés* employé

*Pag.*117. *l.*18.19. que si l'on avoit en $K=0$ *lisés* que si l'on avoit eu $K=0$

*Pag.*126. *l.*19.20. si on nomme à la hauteur *lisés* si on nomme a la hauteur

*l.*21. $f\,\mathit{sin.}(\sqrt{\frac{P}{K}}+g)=0$ *lisés* $f.\,\mathit{sin.}\,(a)\sqrt{\frac{P}{K}}+g=0$

*Pag.*133. *l.*27. par l'équation *lisés* pour l'équation

*Pag.*137. *l.* 5. $\int\frac{du}{u}$ *lisés* $\int\frac{dx}{u}$

*Pag.*142. *l.ult.* $\frac{P}{s^2}$ *lisés* $\frac{P}{S^2}$

*Pag.*144. *l.*3. $z^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2\pi^2}\right)$ *lisés* $z^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2\pi^2}\right)$

*Pag.*160. *l.*2. $\alpha=\frac{\surd(P^2+Q^2)}{2\,\mathit{sin.}\left(\pi\frac{\surd\omega-\surd\omega}{2}\right)}$ *lisés* $\alpha=\frac{\surd(P^2+Q^2)}{2\,\mathit{sin.}\left(\pi\frac{\surd\omega-\surd\omega}{2}\right)}$

*Pag.*186. *l.*12. $\frac{29}{27}$ pour la probabilité *lisés* $\frac{19}{27}$ pour la probabilité

*Pag.*200.201. en plusieurs endroits à la place de $\int v$ mettez partout $\int V$

*Pag.*203. *l.*18. faisant $d\theta=dx$ *lisés* faisant $d\theta=d\Psi$

*l.*19. dx *lisés* $d\Psi$

Pag 209. *l.*3. $+n\frac{(n-1)}{2}x-(\pi+1-2\rho)$ *lisés* $\frac{+n(n-1)}{2}x^{-(\pi+1-2\rho)}$

Pag. 211. en plusieurs endroits K *lisés* k

Pag. 225. *l.* 29. l'intégrale de $ya^x dx$ sera $\frac{Ka}{la}$ *lisés* sera $\frac{Ka^x}{la}$

Pag. 230. *l* 1. *Probléme II. lisés Probléme XI.*

Pag. 233. *l.* 14 $+ \frac{2dd\Psi}{2dBac}\varphi^{I}\varphi^{II} + \frac{dd\Psi}{2dA^2}$ *lisés* $+ \frac{2dd\Psi}{2dBAC}\varphi^{I}\varphi^{II} + \frac{dd\Psi}{2dA^2}2\varphi D$

Pag. 249 *l* 21. $BB = \overline{P' + Q'}^{m}$ *lisés* $B'B' = \overline{P + Q'}^{m}$

Fig. 3.

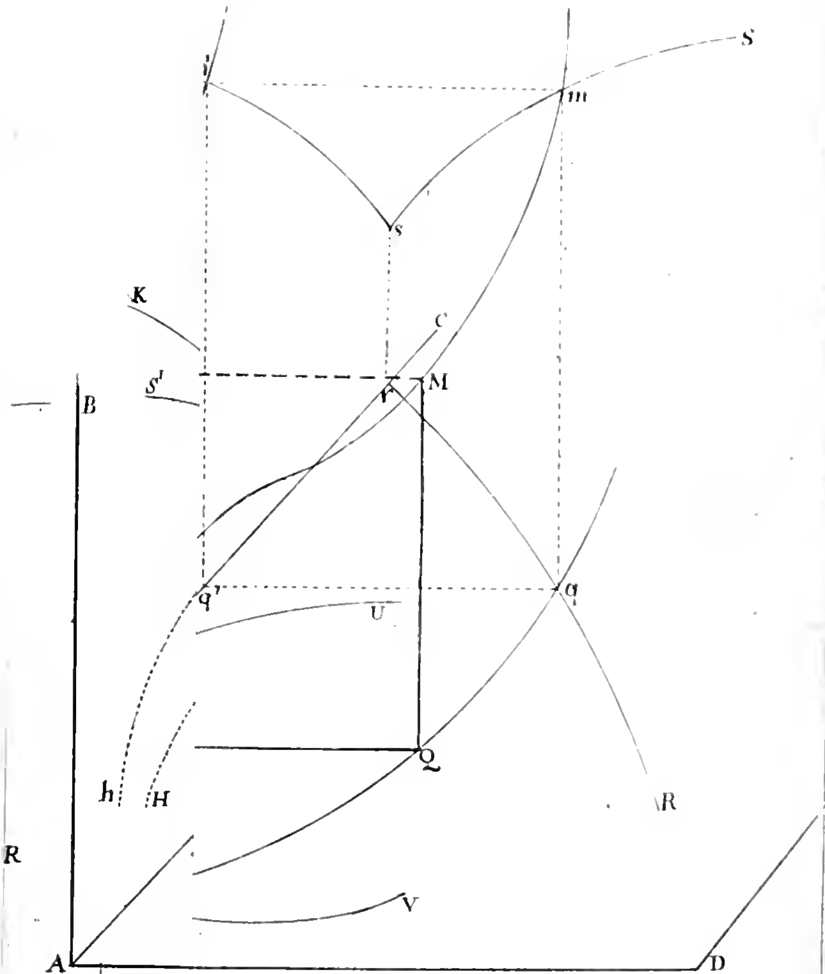


Fig. 1.

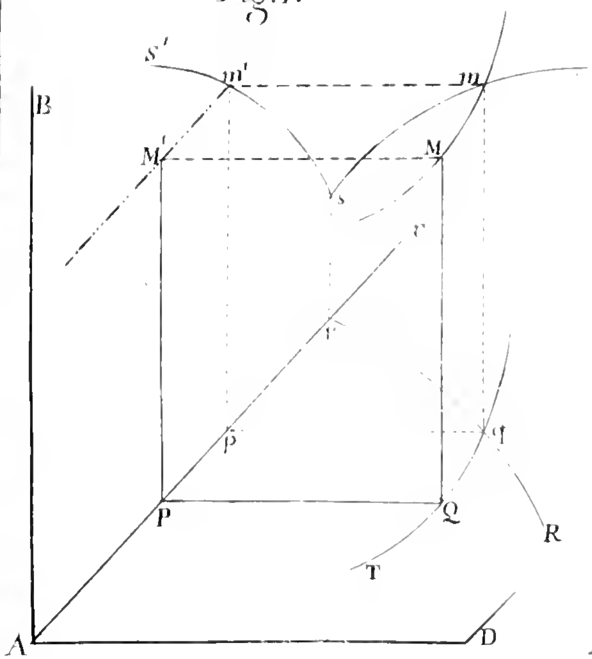


Fig. 2.

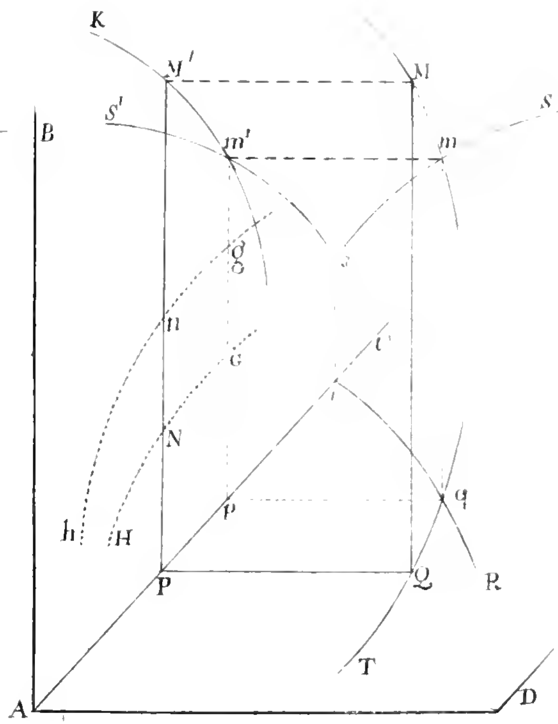


Fig. 3.

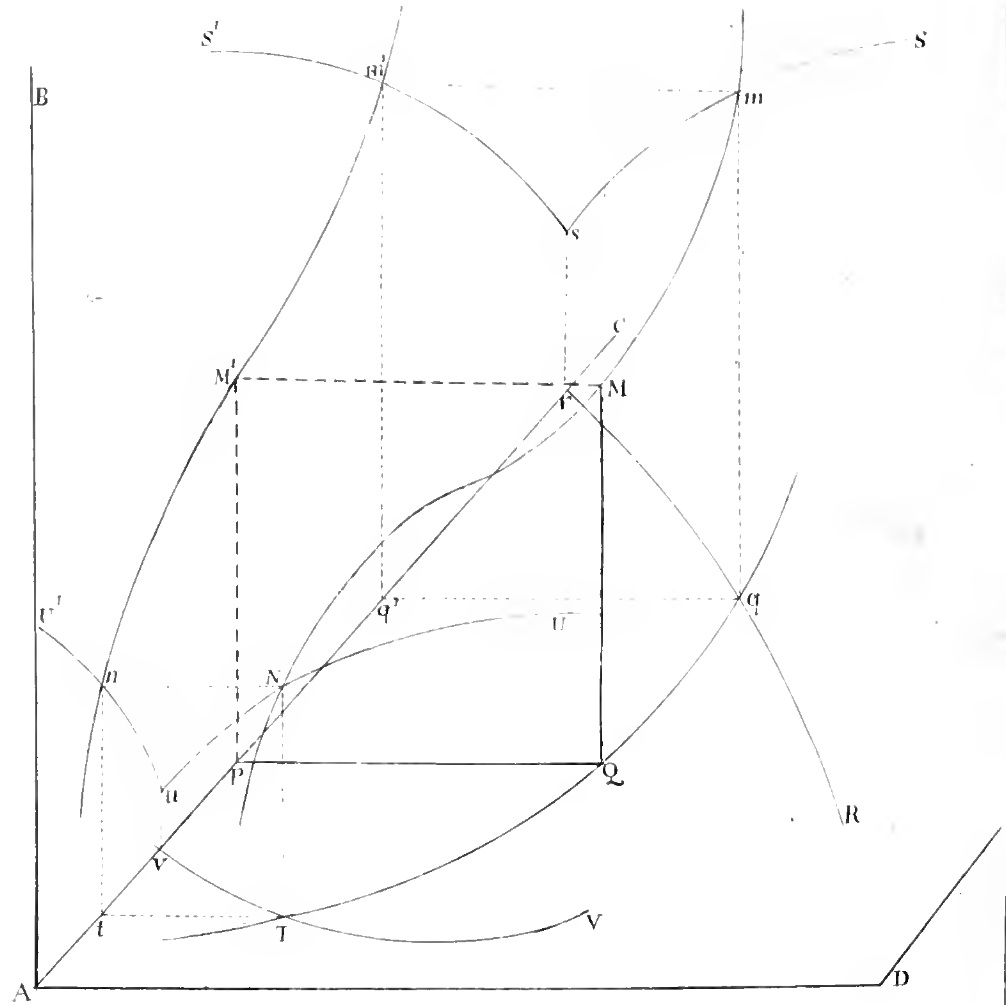


Fig. 5.

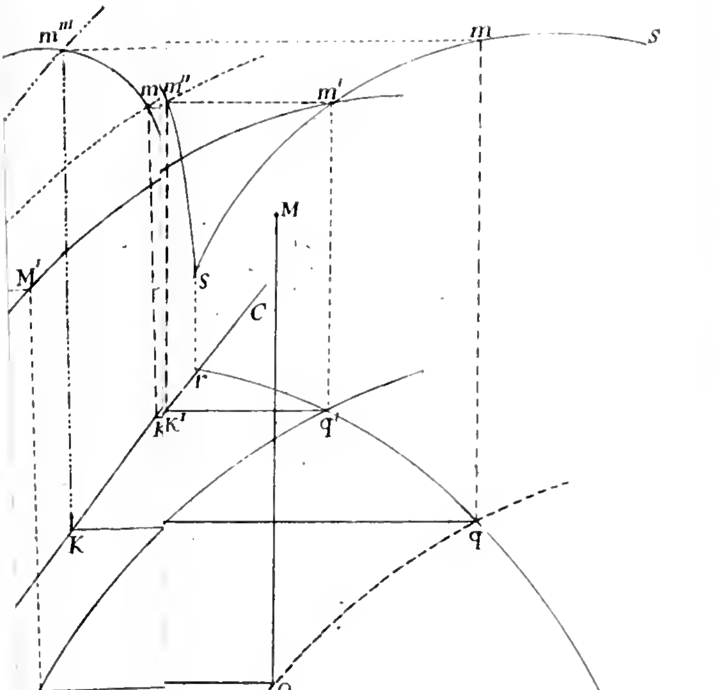


Fig. 4.

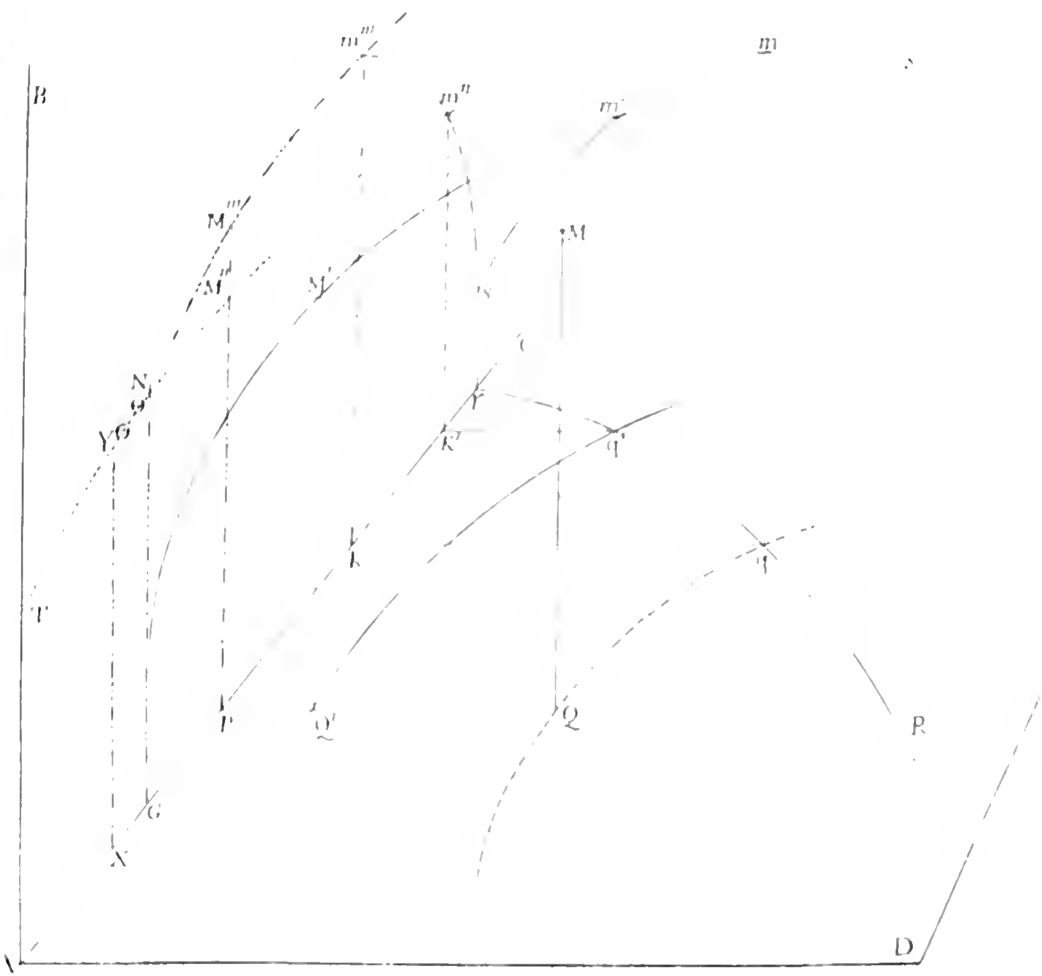


Fig. 5.

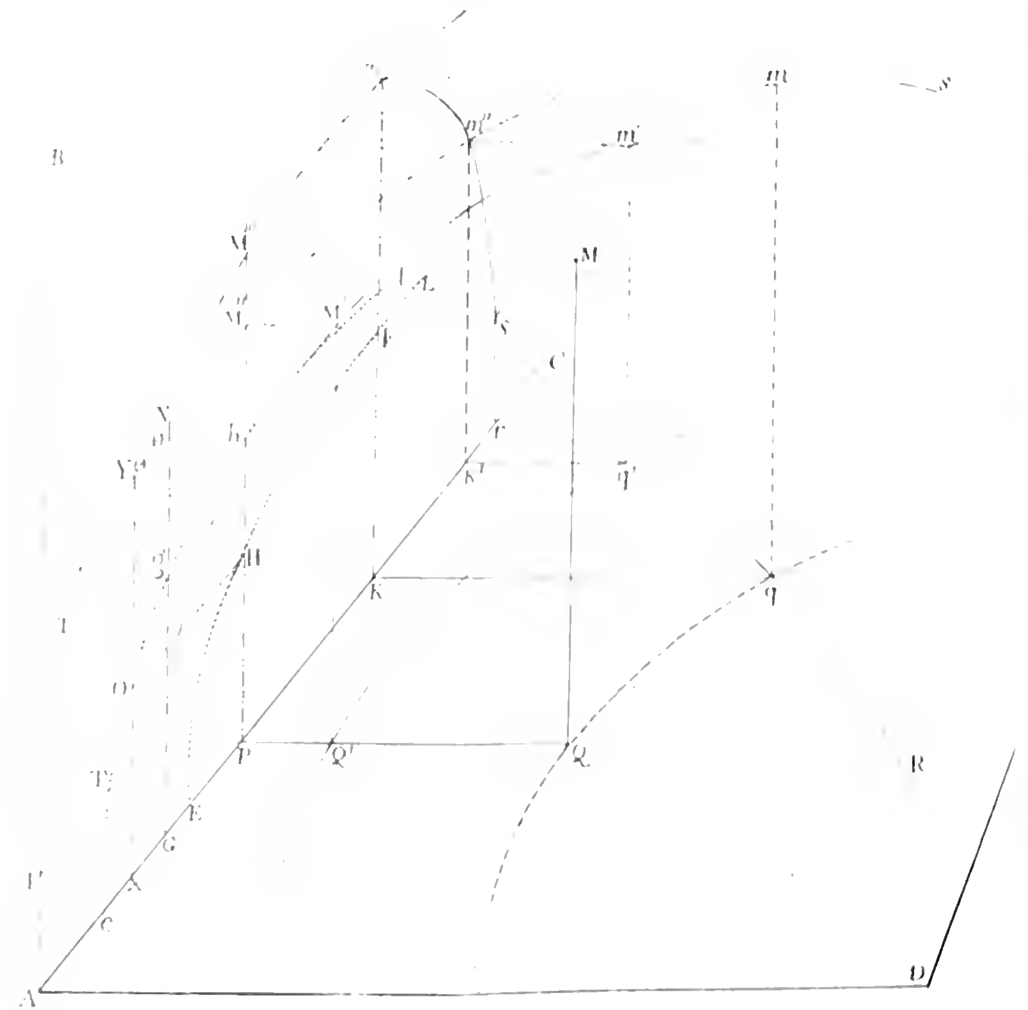


Fig. 6.

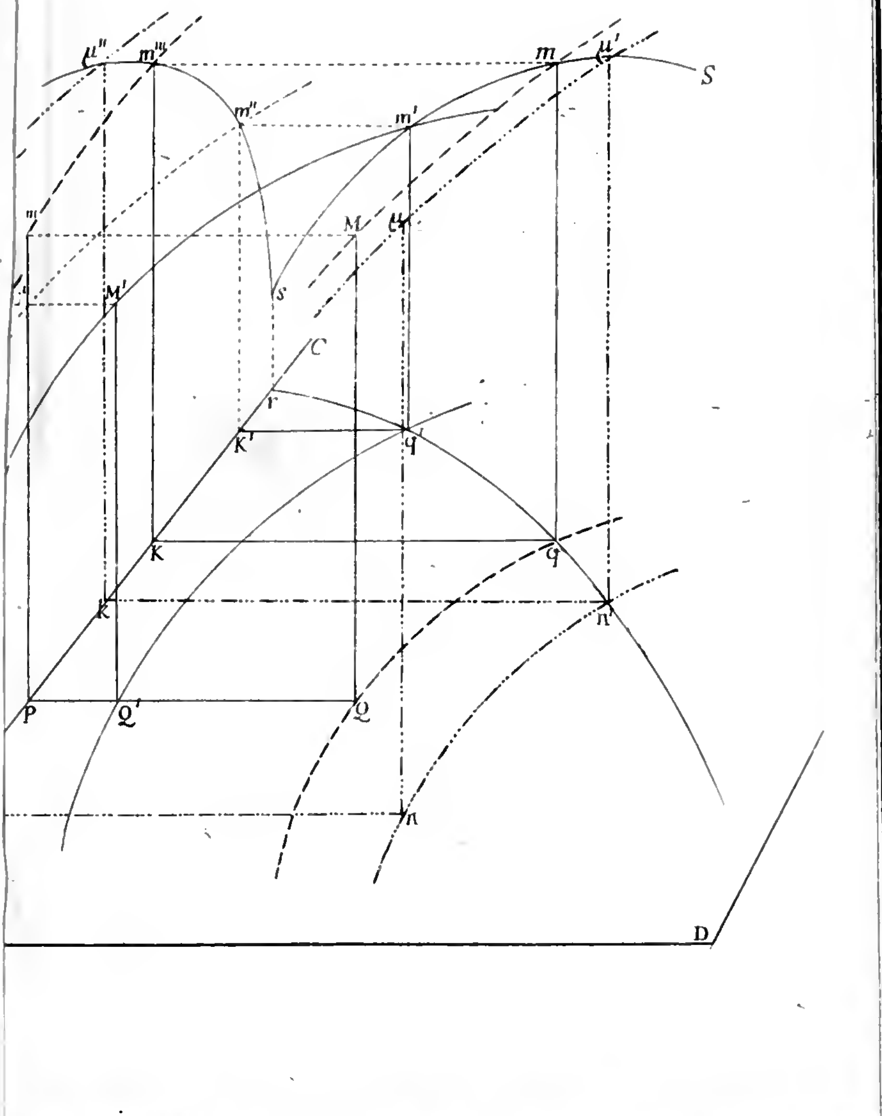
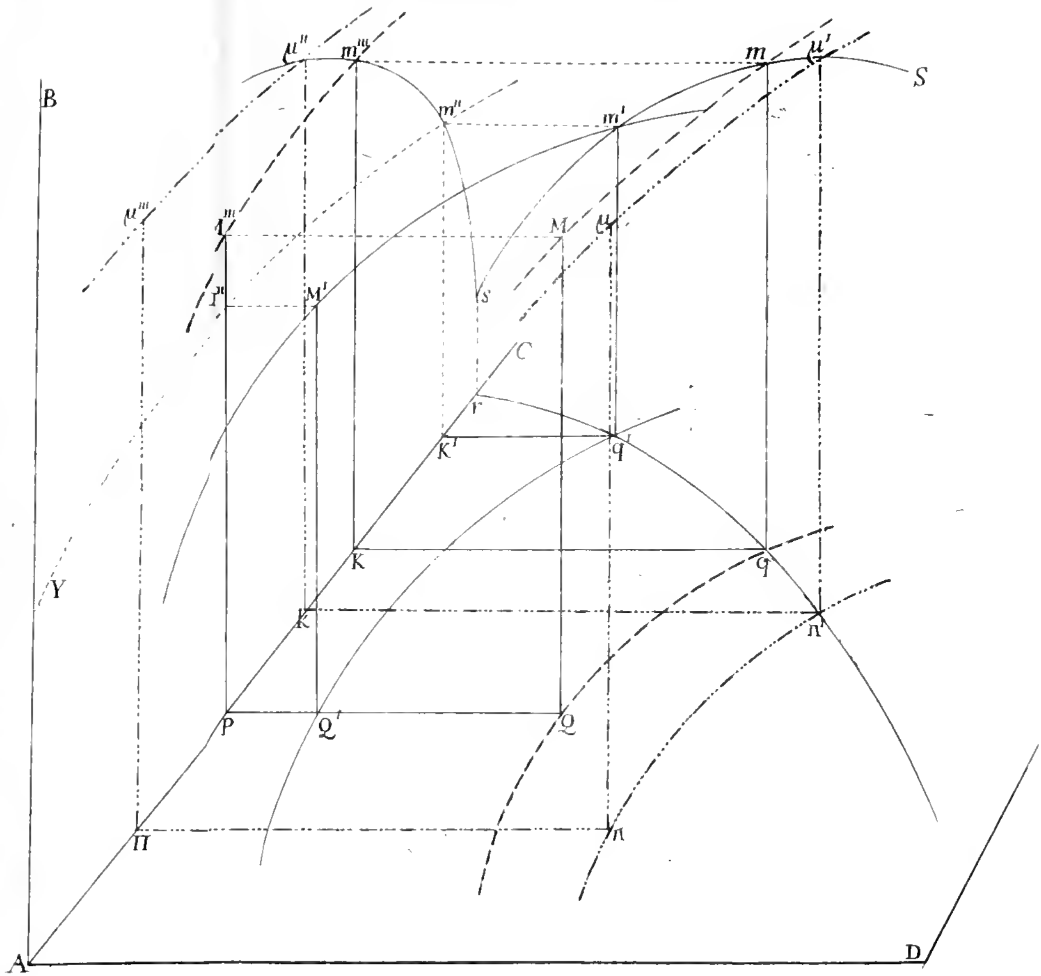


Fig. 6.



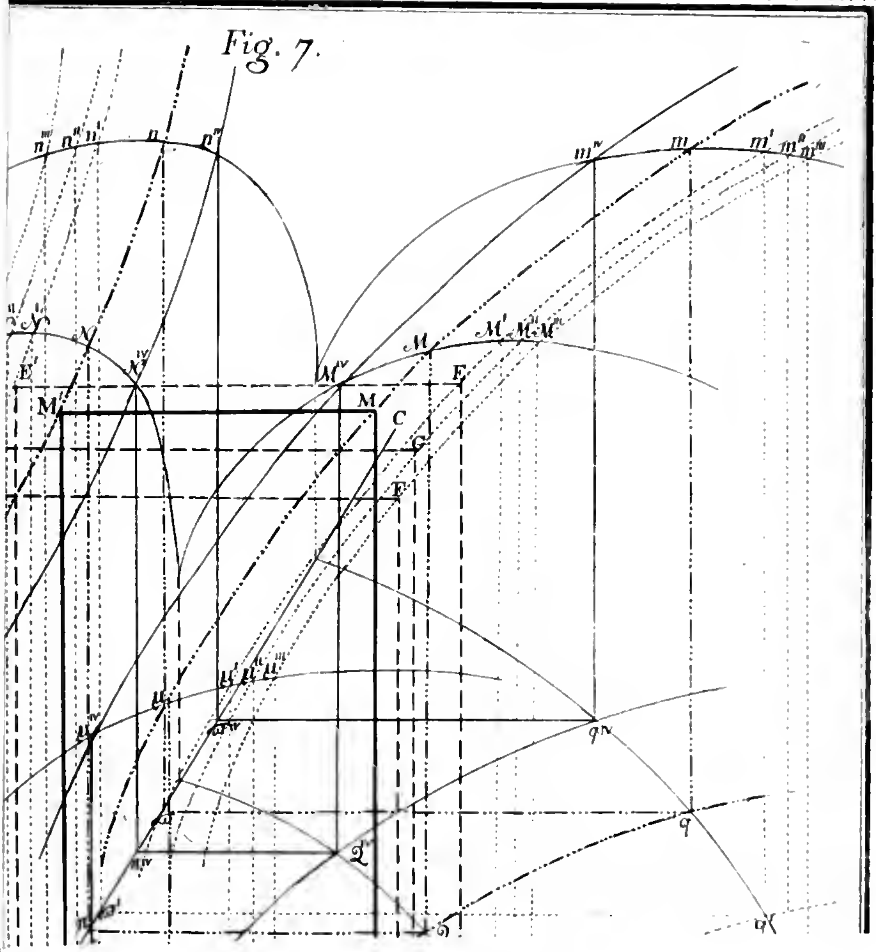
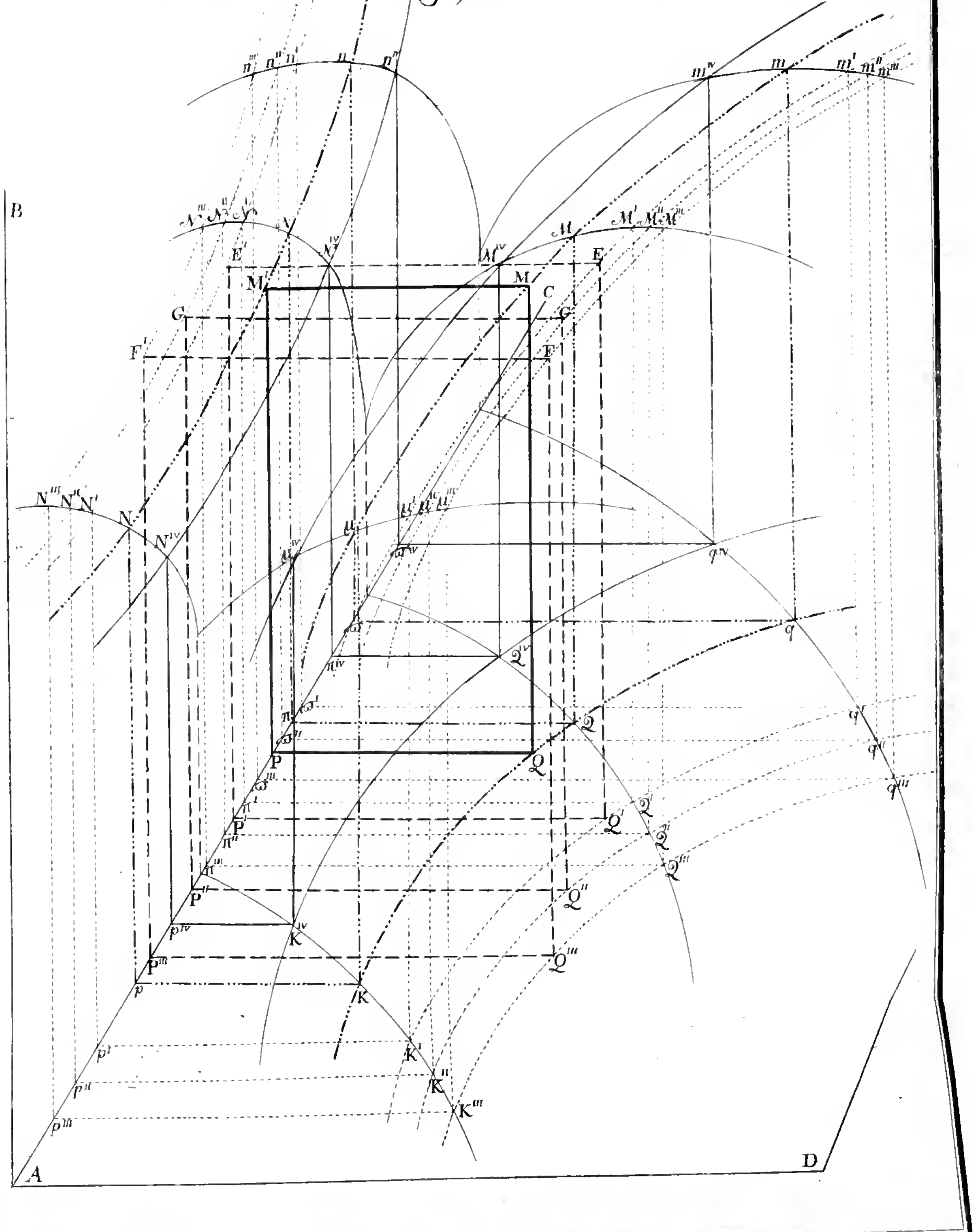


Fig. 7.

Fig. 7.



. 1.

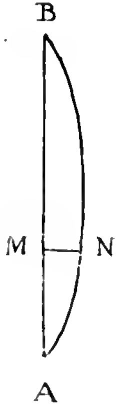


Fig. 2.

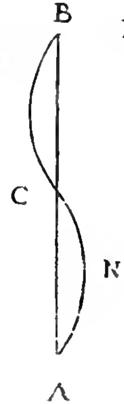


Fig. 3.

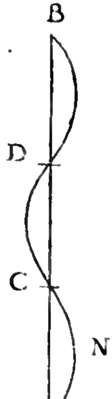


Fig. 1.

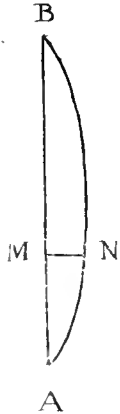


Fig. 2.

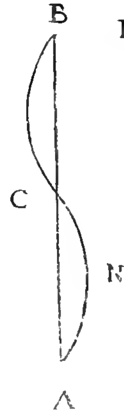


Fig. 3.