MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉES 1819 ET 1820.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le quatrième *de la collection des Mémoires de l'Académie des sciences, depuis l'ordonnance du* 21 *mars* 1816.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANNÉES 1819 ET 1820.

TOME IV.

PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT,
IMPRIMEUR DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.

1824.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1819.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

Par M. le Chevalier DELAMBRE, Secrétaire-perpétuel.

Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques de la méridienne de France ; par M. le marquis Laplace.

La partie de la méridienne qui s'étend de Perpignan à Formentera s'appuie sur la base mesurée à Perpignan. Sa longueur est d'environ 460 mille mètres. On peut craindre qu'une aussi grande longueur, qui n'a point été vérifiée par la mesure d'une seconde base vers son autre extrémité, ne soit susceptible d'un erreur sensible provenant des erreurs des 26 triangles employés à la mesurer. Il est donc intéressant de déterminer la probabilité que l'erreur n'excède pas 40 ou 50 mètres. M. Damoiseau, par les formules de M. Laplace, a trouvé que les limites entre lesquelles il y a un contre un à parier que l'erreur tombe, sont $\pm$ 8^{m},0937.

Déja, dans la partie historique du volume de 1817, nous avions examiné cette question, et, par la comparaison des bases de Perpignan et de Melun qui s'accordent à quelques pouces, et celle des bases de Melun, de Honslow-Heath et de Romney-Marsh, qui s'accordent à donner la même distance de 14,000 toises entre Dunkerque et Cassel, nous avions conclu, avec une grande vraisemblance, que l'erreur n'était pas d'un cent-millième, peut-être pas d'un cent cinquante-millième sur l'arc entier. Le calcul de M. Damoiseau donne environ $\frac{1}{58000}$ pour l'arc d'Espagne isolé. Il nous sera donc permis de conclure, comme nous avions fait, que l'erreur inconnue, quelle qu'elle puisse être, *n'est pas d'une importance bien grande pour les usages réels.*

Ces mêmes calculs servent à M. Laplace à prouver combien l'introduction du cercle répétiteur dans les opérations géodésiques a été avantageuse. Il trouve en effet que l'erreur de 8 mètres, qu'il serait permis de soupçonner, aurait été de 25 mètres avec les instruments de La Condamine, et 40 avec ceux de La Caille. Il en résulterait que les instruments de La Condamine auraient été meilleurs que ceux de La Caille, ce qui est au moins douteux; du moins, voici ce qui nous porte à le croire.

Bouguer donne ses angles non-seulement réduits au centre, mais corrigés de l'erreur de son quart de cercle, et même de la différence entre 180 et la somme des trois angles. Il s'était fait, pour ces réductions, une méthode expéditive qu'on n'oserait plus proposer aujourd'hui. La Condamine a imité Bouguer en tout, sauf le dernier point. Il paraîtrait donc que l'on pourrait connaître les erreurs de ses triangles; mais, à vrai dire, nous n'avons que ses angles tels qu'il les a estimés, ou tels qu'il lui a plu de les donner. Bouguer nous dit au moins que rarement l'erreur sur la somme des trois angles était de 30″. La Condamine ne dit rien de semblable. Nous avons les observations originales de La Caille en degrés et parties du micromètre. Il nous a donné ces mêmes fractions transformées en secondes; il nous a donné les éléments de ses réductions, de tours nombreux d'horizon. Nous pouvons donc nous flatter de connaître assez précisément le degré d'exactitude de ses opérations. En peut-on dire autant de celles de La Condamine? Enfin, pour trouver l'erreur moyenne de La Caille, nous avons 129 triangles; nous n'en avons que 40 de La Condamine. Nous serions donc portés à croire que l'avantage du cercle répétiteur sur les anciens instruments est probablement de 40 à 8 ou de 5 à 1, et non pas seulement de 25 à 8, ou 3 à 1, à-peu-près. Nous négligeons entièrement, et comme trop incertaines, les comparaisons de toute autre mesure que celle de La Caille.

Addition au Mémoire sur la figure de la Terre, *inséré dans le volume précédent par M.* le marquis LAPLACE.

Les expériences du pendule faites dans les deux hémisphères ont prouvé que la terre n'est point homogène dans son intérieur, et que les densités de ses couches croissent de la surface au centre. Mais la terre, hétérogène dans le sens mathématique, serait homogène dans le sens chimique, si l'accroissement de la densité de ses couches n'était dû qu'à l'accroissement de la pression qu'elles éprouvent à mesure qu'elles sont plus près du centre. On sait que les corps solides se compriment par leur propre poids. La loi des densités résultantes de cette compression est inconnue. Il est naturel de penser que ces corps résistent d'autant plus à la compression qu'ils sont plus comprimés. Le rapport de la différentielle de la pression à celle de la densité croît avec cette densité; la fonction la plus simple qui puisse représenter ce rapport, est la première puissance de la densité multipliée par une constante. C'est celle que l'auteur adopte, parce qu'elle a l'avantage de se prêter facilement au calcul dans la recherche de la figure de la terre. Les géomètres avaient négligé jusqu'ici dans cette recherche l'effet résultant de la compression des couches. M. Young vient d'appeler leur attention sur cet objet. L'analyse de M. Laplace prouve qu'il est possible de satisfaire ainsi à tous les phénomènes connus qui dépendent de la loi de densité de ces couches. Ces phénomènes sont les variations des degrés des méridiens et de la pesanteur, la précession des équinoxes, la nutation de l'axe terrestre, les inégalités que l'aplatissement de la terre produit dans les mouvements de la lune, enfin le rapport de la moyenne densité de la terre à celle de l'eau, rapport que, par une belle expérience, Cavendish a fixé à $5 \frac{1}{2}$. De la loi précédente sur la compression des solides il résulte que, si la terre était entièrement formée d'eau, son aplatissement serait $\frac{1}{160}$, le coëfficient du carré du sinus de la latitude, dans l'expression de la longueur du pendule à secondes, serait de 59 dix-millièmes, et la densité moyenne de la terre serait neuf fois celle de l'eau. Tous ces résultats s'écartent de l'observation au-delà des limites des erreurs dont elles sont susceptibles.

Si l'on suppose la terre formée d'une substance homogène, dans le sens chimique, dont la densité soit $2\frac{1}{4}$ de celle de l'eau commune, et qui, comprimée par une colonne de sa propre substance égale à la millionième partie du demi-axe terrestre, augmente en densité de 5,5345 millionièmes de sa densité primitive, on satisfait à tous les phénomènes que l'on vient de citer. L'existence d'une telle substance est très-admissible. Au reste, l'auteur est loin d'affirmer que ce cas soit celui de la nature; mais l'hypothèse d'une substance unique dont les couches ne varient en densité que par la compression qu'elles éprouvent, n'offrant rien d'impossible, elle lui a paru digne de l'attention des géomètres.

Ne pouvant exposer ici l'analyse de l'auteur, bornons-nous aux conséquences qu'il en tire.

Ellipticité de la terre, $\frac{1}{306,6}$; rapport de la densité du centre à celle de la surface, 5,236; la nutation en secondes sexagésimales, $9'',32$. Cette nutation est à fort-peu-près celle qui résulte des observations de la polaire. En supposant, d'après Cavendish, le rapport de la moyenne densité de la terre à celle de l'eau égal à $5\frac{1}{2}$, la densité de la couche de la surface sera 2,27, celle de l'eau étant prise pour unité. Quant à l'aplatissement, il satisfait à l'ensemble des observations des degrés, de la pesanteur et des inégalités lunaires.

Mémoire sur les lois de la double réfraction et de la polarisation dans les corps régulièrement cristallisés; par M. Biot.

Lorsqu'on envisage la lumière comme une matière, la réfraction des rayons qui traversent les corps diaphanes est produite par les forces attirantes que les particules de ces corps exercent sur les molécules lumineuses; forces dont l'effet n'est sensible qu'à de petites distances, et qui par ce caractère ressemblent aux affinités chimiques. D'après cela, quand un rayon lumineux pénètre obliquement une surface réfringente, la portion courbe de la trajectoire qu'il décrit n'a qu'une étendue infiniment petite, inappréciable à nos sens, de sorte que le rayon paraît se briser et changer brusquement de direction au point où il se réfracte. Par cela même la courbe qu'il forme n'étant pas perceptible, on ne peut pas chercher dans les affections de sa forme la nature des forces qui sollicitent en chaque point les molécules lumineuses, comme on a découvert la gravitation d'après la forme des orbites que les planètes et les comètes parcourent. Newton y est parvenu pour la réfraction ordinaire, en considérant chaque particule lumineuse qui traverse une surface réfringente, comme sollicitée, avant et après son passage, par des forces attirantes, sensibles seulement à des distances très-petites, et émanant de toutes les molécules du milieu réfringent. Cette définition ne spécifie rien sur la loi du décroissement de ces forces dans l'étendue de distance où elles sont sensiblement variables; elle permet seulement de calculer leur résultante pour chaque distance, et il les suppose constantes quand la distance devient sensible. Or, ces données suffisent pour calculer, non pas la vitesse des particules lumineuses dans leur mouvement curviligne, ni la nature de ce mouvement, mais seulement les relations des vitesses et des directions définitives qui ont lieu, soit au-dedans du milieu réfringent, soit au-dehors, quand la distance des particules lumineuses à la surface réfringente est devenue assez considérable pour que la route du rayon soit sensiblement rectiligne : ce qui comprend toutes les limites de distance où nous pouvons observer.

Pour la réfraction extraordinaire, on n'a pas même cet avantage de pouvoir définir l'origine de la force moléculaire, ni comment elle émane individuellement de chaque particule du cristal. Ce que l'on sait donc pour ce cas, ou au moins ce que l'on doit supposer, quand on a adopté l'idée de la matérialité de la lumière, c'est que les forces, quelles qu'elles soient, qui sollicitent les rayons lumineux dans cette circonstance, comme dans toute autre, sont attractives ou répulsives, soit qu'elles exercent un pouvoir de même nature sur toutes les particules lumineuses, ou un pouvoir différent. Or, dans tous les cas où une particule matérielle est sollicitée par de pareilles forces, son mouvement est assujetti à une condition de mécanique appelée le *principe de la moindre action*. En appliquant ce principe, et y joignant la condition particulière que les forces ne sont sensibles qu'à de très-petites distances, M. Laplace en a déduit deux équations qui déterminent complètement et généralement la direction du rayon réfracté, pour chaque direction donnée d'incidence, lorsque l'on connaît la loi de la vitesse définitive des particules lumineuses, dans l'intérieur du milieu réfringent, à une distance sensible de la surface.

Dans le cas de la réfraction ordinaire, la vitesse définitive est constante; car la déviation du rayon ordinaire est la même dans un même corps, suivant quelque direction qu'on l'éprouve, lorsque le milieu ambient ne change pas. Aussi, quand on suppose la vitesse intérieure constante, les équations déduites du principe de la moindre action montrent que la réfraction s'opère dans le prolongement du plan d'incidence même, de manière que les sinus d'incidence et de réfraction sont entre eux dans une raison constante pour chaque corps, ce qui est la loi de réfraction ordinaire dans tous les corps naturels.

Maintenant, pour découvrir la loi des vitesses dans les corps régulièrement cristallisés doués de la double réfraction, il est à remarquer qu'en général il existe dans ces corps deux directions, et non davantage, suivant lesquelles l'écart des deux rayons réfractés est nul. Ce résultat peut se constater immédiatement par l'expérience; et l'on peut aussi le conclure de ce que les phénomènes de polarisation qui accompagnent par-tout ailleurs la réfraction extraordinaire, sont nuls dans les directions dont il s'agit. Ces deux directions sont appelées les *axes du cristal*, et ce point de vue embrasse aussi les cristaux à un seul axe, en les considérant comme ayant deux axes réunis en un seul, ou séparés par un angle nul.

La double réfraction étant nulle dans le sens des axes, quelle que soit d'ailleurs la face et la direction d'incidence, par laquelle les rayons pénètrent le cristal pour se réfracter suivant ces lignes, on peut en conclure que dans ces deux sens la vitesse ordinaire et la vitesse extraordinaire sont égales entre elles. Mais elles deviennent différentes dès que les rayons réfractés s'éloignent des axes; car alors l'écart angulaire de ces deux rayons devient sensible. En outre, la variabilité de la vîtesse extraordinaire doit être symétrique autour des deux axes; car tous les phénomènes de déviation que les rayons présentent sont symétriques aussi. Cela posé, dans les cristaux à un seul axe M. Laplace a trouvé que le quarré de la vîtesse extraordinaire est égal au quarré de la vîtesse ordinaire, plus un terme proportionnel au quarré du sinus de l'angle formé par l'axe unique avec le rayon réfracté extraordinairement. Cette expression, qui satisfait aux conditions exprimées tout-à-l'heure, reproduit exactement la loi donnée autrefois par Huyghens pour le spath d'Islande, qui est un cristal à double réfraction répulsive; et M. Biot s'est assuré par l'expérience qu'elle s'applique également au cristal de roche, qui exerce la double réfraction attractive, ce qui montre qu'elle embrasse tous les cristaux à un seul axe. L'analogie porte donc à penser que dans le cas général des cristaux à deux axes la différence des quarrés des vîtesses sera encore exprimée par une fonction du même genre, c'est-à-dire du second degré par rapport aux deux axes du cristal. Or, la fonction la plus générale de cet ordre est composée de trois termes, dont deux sont les deux quarrés des sinus des angles formés par le rayon réfracté a chacun des axes, et le troisième est le produit de ces mêmes sinus; mais les termes qui contiennent les sinus isolés doivent disparaître d'eux-mêmes, en vertu des coëfficients qui les affectent, puisque la double réfraction devient nulle suivant chacun des axes, ce qui rend alors les vîtesses égales. Il ne peut donc rester que le troisième terme qui contient le produit des sinus, c'est-à-dire que, *dans les cristaux à deux axes, le quarré de la vîtesse extraordinaire sera égal au* *quarré de la vitesse ordinaire, plus un terme proportionnel au produit des sinus des angles formés par chacun des deux axes avec le rayon réfracté extraordinairement.* Si l'angle des deux axes est supposé nul, ces deux axes se réunissent, les deux angles qu'ils forment avec le rayon réfracté deviennent égaux, et le terme additif au quarré de la vitesse ordinaire devient le quarré de leur sinus. C'est précisément le résultat qu'a donné M. Laplace, et qui est conforme à la loi d'Huyghens. Dans cette manière de voir, les cristaux à un seul axe ne sont qu'un cas de racines égales.

Pour vérifier cette loi des vîtesses, M. Biot l'a introduite dans les deux équations générales données par le principe de la moindre action; et tout s'y trouvant alors déterminé, il en a conclu les expressions générales de la direction que devait suivre le rayon réfracté extraordinaire, lorsque le rayon incident était donné et dirigé d'une manière quelconque. Alors il a choisi comme exemple la topaze blanche, qui est un cristal à deux axes, dont on trouve facilement des échantillons d'une pureté et d'une limpidité parfaite. Il y a mesuré avec un soin extrême la double réfraction dans un grand nombre de sens divers; puis il a introduit les résultats dans les formules, afin d'en conclure les constantes qu'elles renferment, c'est-à-dire l'angle des axes et le maximum de différence des deux vîtesses; après quoi il a calculé successivement en nombres toutes les déviations que les deux rayons devaient éprouver dans chaque expérience, selon le sens de coupe et d'incidence où elle était faite, et il a toujours trouvé le plus parfait accord entre les observations et les résultats ainsi calculés.

Mais, pour que cette comparaison fût concluante, il fallait trouver un moyen de mesurer la double réfraction avec plus d'exactitude qu'on ne l'avait fait jusques alors, surtout dans les cristaux où sa faiblesse en rend l'observation précise plus difficile. Il a imaginé pour cet objet un mode d'observation nouveau qui se trouve décrit dans le Mémoire, et par lequel il obtient le double avantage de mesurer les écarts des deux rayons avec une grande exactitude, dans des circonstances qui les rendent beaucoup plus considérables qu'on ne les avait observés jusqu'ici. Ce procédé, en donnant plus de certitude aux comparaisons, lui a fait découvrir que l'intensité de la double réfraction, du moins dans les substances où elle est faible, n'est pas toujours la même; mais que dans une même espèce minéralogique, telle que le béril par exemple, elle peut varier dans des rapports très-étendus. A la vérité ces différences n'ont eu lieu qu'entre des échantillons colorés, et par conséquent dans lesquels la substance propre du cristal était ou paraissait combinée avec des substances étrangères. Les échantillons parfaitement limpides ont au contraire présenté une constance parfaite. Mais si, comme il y a tout lieu de le croire, la nature et l'intensité de la double réfraction que chaque cristal exerce, tiennent au mode d'aggrégation de ses parties, la variabilité de ces phénomènes peut, étant observée, nous donner des notions importantes sur la constitution intime des échantillons qui la présentent, et par suite sur la production même de la double réfraction.

On sait que dans les cristaux à un seul axe les phénomènes de polarisation qui s'opèrent sur les rayons réfractés sont liés à la direction de l'axe et au sens suivant lequel la double réfraction s'exerce. La loi des vîtesses expliquée ci-dessus a conduit l'auteur à déduire des mêmes analogies le mode de polarisation pour le cas de deux axes, mode qui était encore inconnu, et qui semblait devoir être fort compliqué. Il lui fut aussitôt indiqué avec évidence par la considération suivante. Dans les cristaux à un seul axe, d'après les observations de Malus, le rayon ordinaire est polarisé dans le sens de l'axe même, c'est-à-dire suivant le plan qui passe par ce rayon et par l'axe. Le rayon extraordinaire est au contraire polarisé à angle droit sur le plan mené de même par l'axe et par sa direction. Maintenant, lorsqu'il y a deux axes, menez par chacun d'eux un plan qui contienne le rayon ordinaire. Ce rayon est polarisé dans un sens exactement intermédiaire entre ces deux plans, et le rayon extraordinaire l'est dans un sens perpendiculaire, en répétant pour lui une construction analogue. Dans toutes ses observations sur la double réfraction de la topaze, M. Biot a trouvé constamment conforme à cette loi le sens de polarisation des faisceaux tant ordinaires qu'extraordinaires. Lorsque les deux axes se réunissent en un seul, cette loi redonne évidemment la construction de Malus. Ce sont là les lois de la polarisation que l'auteur appelle fixe. Quant le trajet des rayons est assez court, ou assez peu incliné sur les axes, pour qu'il se produise des couleurs, l'expérience fait voir que la polarisation apparente a lieu dans un azimuth double de celui que déterminent ces constructions. La même chose a lieu pour les cristaux à un seul axe, comme il l'a montré depuis long-temps.

Au moyen des lois précédentes de la double réfraction et de la polarisation dans les corps régulièrement cristallisés, on peut déterminer par le calcul seul toutes les particularités d'intensité et de teintes que présentent les plaques des cristaux à un ou deux axes, lorsqu'on les expose à des rayons polarisés. On peut prédire les directions suivant lesquelles les couleurs doivent s'affaiblir ou disparaître entièrement, soit qu'il se forme une croix noire complète, comme dans le spath d'Islande et les autres cristaux à un seul axe, soit que les anneaux colorés ainsi formés doivent être traversés par une seule ligne noire de forme et de position variable, comme dans le mica de Sibérie, la topaze et les autres cristaux qui ont deux axes de double réfraction.

Théorie analytique des assurances mutuelles; par M. le baron FOURIER.

L'objet de ce Mémoire est d'examiner les conditions mathématiques de l'assurance mutuelle, c'est-à-dire de cette association qui consiste à supporter en commun les pertes fortuites, au moyen d'une réparation proportionnelle de ces pertes entre tous les propriétaires.

Les biens qui font l'objet de ce contrat ont des valeurs inégales; ils diffèrent aussi par rapport aux chances de l'événement qui en occasionnerait la perte. La question consiste à déterminer, par un calcul exact, quelles doivent être les parts contributives de chaque associé, quels sont les avantages que procurent de semblables traités, et comment les avantages varient avec le nombre et la valeur des propriétés garanties.

L'effet de l'association réduit à une valeur extrêmement petite et supprime, en quelque sorte, la chance d'une grande perte; elle la remplace par les chances d'une perte très-petite, mais plus nombreuses et plus probables. On voit que la solution doit dépendre de la théorie des probabilités.

Pour mesurer l'avantage que procurent les garanties mutuelles, il ne suffit pas de connaître la valeur moyenne la plus probable des sommes éventuelles, il faut aussi avoir égard à la situation personnelle du possesseur. Il n'est aucun des contractants à qui le traité ne fût favorable; il le serait beaucoup plus, toutes choses égales d'ailleurs, pour celui qui ne posséderait aucun autre bien, et dont toute la fortune se trouverait ainsi garantie par une association très-nombreuse.

Pour se débarrasser de cette considération qui eût singulièrement compliqué la solution, l'auteur a cherché une forme particulière d'analyse qui permît de découvrir les conséquences générales indépendamment de la situation personnelle des contractants.

Le produit de chaque valeur, par la probabilité de la conserver, est une valeur moyenne et fixe qui est, à proprement parler, la mise de chaque sociétaire; c'est proportionnellement à ces mises que doivent être répartis les avantages ou les frais de l'association. A mesure que l'on augmente le nombre et la masse des propriétés garanties, la valeur effective de chaque propriété croît et s'approche de plus en plus de cette valeur fixe qui constitue la mise. En général, les garanties *mutuelles* contractées par un très-grand nombre d'associés, sont préférables aux assurances *fixes*, parce que les particuliers s'assurent eux-mêmes, et ne cèdent à personne le bénéfice nécessaire de l'assurance.

L'analyse mathématique détermine, par un calcul exact, la probabilité et l'étendue des charges de l'association. L'expérience de chaque année ajoute aux documents primitifs, et il suffit que le traité existe pour que l'application tende d'elle-même à devenir plus parfaite.

Le principe qui a servi à la solution du problème s'applique de lui-même à toutes les questions où l'on ne doit pas seulement considérer les valeurs absolues, mais encore les avantages relatifs qu'elles procurent.

L'analyse mathématique des probabilités donne l'estimation précise des avantages que l'on avait pressentis; elle confirme et sanctionne les décisions de la prudence humaine: et plus on approfondit cette étude, plus on découvre de nouveaux motifs d'entretenir l'esprit d'association, et d'honorer les institutions civiles qui en sont le fruit.

Mémoire d'arithmétique politique, analyse du mouvement de la population; par M. le baron Fourier.

On ne peut acquérir une connaissance exacte de tous les éléments de la population, sans le secours des théories mathématiques. Cette application est sur-tout nécessaire pour apprécier les conséquences plus ou moins vraisemblables que l'on peut déduire des observations de ce genre. Elle doit servir aussi à perfectionner l'établissement et l'usage des registres publics, où les observations sont consignées. Dans toutes les recherches qui ont été entreprises à ce sujet, on a presque toujours considéré l'état constant où la population est maintenue par la seule compensation des naissances et des décès. L'objet de ce mémoire est, 1° d'étendre les mêmes principes au cas où la population d'un pays est en partie formée d'un grand nombre d'hommes qui n'y ont pas pris naissance; 2° d'examiner les conditions mathématiques du mouvement variable de la population, afin de comprendre dans une même analyse toute l'étendue de la question. Dans le premier article, qui traite d'une population constante, on s'est attaché à définir avec précision les éléments généraux de la théorie, qui sont: la durée moyenne de la vie, la durée probable de la vie, l'âge moyen, l'âge probable, la loi des naissances annuelles, la loi de la mortalité, la loi de la population, et la durée moyenne des générations. En exposant les résultats de cet examen, on a espéré que l'intérêt de la question pouvait autoriser quelques détails élémentaires qui n'ont pas encore été expliqués, ou dont la connaissance n'est pas assez répandue.

Pour arriver à la détermination de ces diverses quantités, l'auteur trace une courbe dont les abscisses, les ordonnées, la superficie, le centre de gravité et son abscisse, et autres lignes de ce genre, le conduisent au but qu'il se propose. Au moyen d'observations faites en France pendant trente années, il trouve que la durée moyenne de la vie, ou la somme des âges au jour du décès, divisée par le nombre de ces décès, est de vingt-huit ans et demi. La vie probable, à partir de divers âges, augmente d'abord très-rapidement avec l'âge du nouveau-né; elle diminue ensuite continuellement. Il en est de même de la durée moyenne.

L'âge moyen, ou la somme des âges de tous les habitants, divisée par leur nombre, diffère peu en France de la vie moyenne. La valeur est environ vingt-neuf ans.

L'âge probable, ou celui qui est tel, qu'une moitié des vivants a un âge supérieur et l'autre un âge inférieur, a pour valeur approchée vingt-cinq ans et demi.

La durée moyenne des générations est plus difficile à estimer. Elle diffère de la durée des successions royales; elle dépend en grande partie de l'âge moyen des mariages. En Grèce les hommes ne pouvaient se marier qu'à trente ans. Cette durée était évaluée à trente-trois ans et un tiers. Elle ne peut s'appliquer à d'autres pays. Dans nos climats elle paraît différer peu de trente-un ans.

Pour mesurer l'effet de la mortalité, on compare le nombre total des personnes qui ont un âge donné au nombre des personnes qui meurent à cet âge. Ce rapport varie pour les différents âges. Si la population se forme en partie d'un assez grand nombre d'hommes qui ne sont point nés dans le même lieu, on pourra négliger cette circonstance lorsqu'on estime la population d'un grand pays. Il n'en est pas de même si l'on estime la population des grandes villes. Il s'y forme aussi un état constant; le nombre des hommes d'un âge donné ne change point, ou ne varie qu'à de longs intervalles. Le rapport du nombre total des habitants au nombre des naissances annuelles conserve une valeur fixe; mais cette valeur est plus grande qu'elle ne le serait sans les arrivées et les émigrations continuelles. Le rapport de la population aux naissances diffère alors de la durée moyenne de la vie.

L'examen mathématique de la question fournit une proposition générale dont voici l'énoncé. Lorsque la population d'un pays, d'une ville ou d'un établissement est devenue stationnaire; lorsque les pertes causées par la mort ou l'émigration sont compensées continuellement et à tout âge par les arrivées et les naissances, la somme moyenne des âges de ceux qui sortent, moins la somme des âges de ceux qui arrivent, est toujours égale au nombre des habitants. S'il s'agit d'un pays étendu, qui conserve sa population et la renouvelle sans le secours des étrangers, la somme des âges des décédés est toujours égale au nombre des habitants.

Dans la seconde partie du Mémoire, on considère le mouvement variable qui précède l'état stationnaire. La question est plus générale et dépend d'une autre analyse.

Rien ne peut contribuer davantage à l'utilité des registres des actes de décès, que d'y inscrire les âges le plus exactement qu'il sera possible, et sur-tout d'y faire mention du lieu de naissance. Par-là on établirait et l'on conserverait un dénombrement perpétuel de personnes de tout âge.

Il est évident que si l'on parvenait à diminuer ou supprimer entièrement une des causes principales de mortalité, on changerait par cela même plusieurs des éléments de la population, tels que la durée de la vie moyenne, l'âge moyen, la force virile ou militaire de l'état, et la longévité.

On peut aussi déterminer par la même analyse l'effet que produirait un enlèvement subit et non renouvelé d'une partie de la population. La loi qui subsistait depuis long-temps serait troublée tout-à-coup; elle tendrait de plus en plus et parviendrait à reprendre son premier état; il se formerait dans cet intervalle de temps un état variable que le calcul peut exprimer. On peut examiner aussi quel serait l'effet durable d'une cause du même genre, dont l'action serait prolongée.

De l'expression générale du mouvement de population on peut conclure que la valeur de la durée moyenne de la vie ne dépend point, comme plusieurs auteurs politiques l'ont pensé, des nombres respectifs des naissances et des décès. Quand le premier de ces nombres surpasse le second, c'est-à-dire quand la population augmente, il se peut que la durée moyenne de la vie diminue, et elle pourrait aussi être croissante. Sa valeur n'est point comprise entre le rapport de la population totale au nombre des naissances et le rapport de cette population au nombre des décès. La règle qui a été proposée à cet égard n'est nullement fondée.

Si dans l'expression générale on suppose la loi de mortalité constante et le nombre des naissances annuelles variable suivant une loi donnée, on détermine facilement l'état variable de la population : ce qui offre plusieurs applications utiles.

Mémoire sur le mouvement des fluides élastiques dans des tuyaux cylindriques, et sur la théorie des instruments à vent ; par M. Poisson.

Nous n'avons pu, l'année dernière, donner que le titre de ce Mémoire, dont la première partie seulement venait d'être lue à l'Académie. Les questions que l'auteur y traite ont été déja, pour les physiciens et les géomètres, l'occasion d'un grand nombre de recherches importantes ; on verra néanmoins que ces questions, et sur-tout la théorie des instruments à vent, pouvaient encore être envisagées sous un nouveau point de vue, qui aura l'avantage de faire disparaître les différences essentielles que l'on a rencontrées jusqu'ici entre l'observation et le calcul. On n'a pas oublié que l'illustre Lagrange, qui avait débuté d'une manière si brillante dans des recherches analogues, avouait franchement que ses formules ne rendaient qu'imparfaitement raison des phénomènes observés, en ce qui concerne la théorie des instruments à vent, la largeur et la position de leurs trous et la vitesse du son en général, d'où résultait évidemment la nécessité d'une théorie plus complète et plus conforme aux expériences.

Cette théorie fait l'objet principal du second paragraphe du Mémoire que nous annonçons; le premier offre l'exposition de celle de M. Lagrange. M. Poisson regarde la vitesse du fluide à l'embouchure du tube, comme donnée arbitrairement. Cette vitesse sera produite et entretenue en soufflant d'une manière quelconque dans le tube, ou tout autrement. Le problème sera d'en déduire la vitesse et la densité du fluide dans toute la longueur du tube; et l'on déterminera même, par l'analyse, les variations de densité qui ont lieu à l'embouchure, et qui répondent à l'expression donnée de la vitesse en ce point.

On peut supposer que le tube qui contient le fluide soit dans une position verticale, et que le fluide soit mis en mouvement par un corps solide, espèce de piston cylindrique, qui tombe le long du tube par son poids. La résistance que le fluide oppose au mouvement du corps, n'est pas seulement proportionnelle à la densité du fluide, comme on le suppose ordinairement; elle est en raison composée de cette densité et de la vitesse du son dans le même fluide; en sorte que la densité restant la même, elle varierait, par exemple, avec la température. L'expression de la résistance serait différente, sans doute, si le corps qui l'éprouve se mouvait dans l'air libre, au lieu d'être contenu, ainsi que le fluide, dans un canal cylindrique. On ne doit pas non plus oublier que cette analyse suppose la vitesse du corps très-petite par rapport à celle du son; de manière qu'elle ne serait pas applicable au cas des grandes vitesses, comme celles des projectiles lancés par les bouches à feu. L'auteur observe, en passant, qu'on ne pourra parvenir à une théorie satisfaisante sur la résistance des fluides, qu'en considérant à-la-fois, ainsi qu'il vient de le faire, le mouvement du projectile et celui du fluide, et prenant pour l'expression de la résistance, la résultante des pressions que le fluide exerce sur la surface du corps solide.

L'expérience montre que les instruments à vents, sur-tout ceux dont la longueur est peu considérable, font entendre des sons plus graves que le ton fondamental calculé d'après la théorie admise jusqu'ici; ce qui tient à ce que cette théorie est fondée sur des suppositions trop restreintes, qui n'ont pas toujours lieu dans la pratique, et dont l'auteur s'est affranchi en établissant ses formules. La conclusion générale qui résulte de son analyse, est qu'on ne saurait déterminer *à priori* la série des tons différents, ni même fixer le ton le plus grave que peut rendre un tube sonore, ouvert ou fermé, d'après sa longueur et la nature du fluide qu'il contient, mais qu'on peut seulement assigner certaines classes de tons, qui sont impossibles, et qu'en effet l'observation n'a jamais présentés. Heureusement, l'analyse conduit, sur un autre point, à des résultats précis et positifs, qui peuvent être comparés à l'expérience. Le nombre et la position des ventres et des nœuds de vibration sont liés au ton qu'on observe dans chaque cas particulier. C'est ce que l'auteur s'attache à démontrer, il en tire l'explication du phénomène que présente le *porte-voix*. Il enseigne à déterminer par expérience le lieu de chaque nœud de vibrations, et reconnaître si l'expérience s'accorde en ce point avec la théorie. Il exprime le desir qu'une expérience ingénieuse de Daniel Bernouilli soit répétée sur des tuyaux remplis de différents gaz; ce serait le seul moyen exact de connaître la vitesse du son dans ces fluides, laquelle s'obtiendrait en mesurant l'intervalle compris entre deux nœuds de vibrations consécutifs, et en le divisant par la durée d'une demi-vibration, conclue du ton rendu par le tuyau. En la comparant ensuite à son expression analytique donnée par la théorie du son, on déterminerait, comme il vient de le faire pour l'air atmosphérique, l'augmentation de température produite par la compression des différents gaz; on pourrait même, en répétant l'expérience à différents degrés du thermomètre, reconnaître si la température primitive de chaque fluide influe sur la quantité de chaleur développée par la compression. On conçoit que, dans un sujet qui exige toutes les ressources et les développements de la plus savante analyse, nous sommes contraints, de nous restreindre à ce que peut exprimer le langage ordinaire.

Le troisième paragraphe traite *du mouvement d'un fluide élastique contenu dans un tuyau composé de plusieurs cylindres;* le quatrième traite *du mouvement de différents fluides élastiques contenus dans un même tube cylindrique*.

Les formules relatives à la comparaison des vitesses du fluide parallèles à la longueur du tube, trouvant une application importante dans la théorie qui attribue la lumière aux vibrations d'un fluide permanent répandu dans tout l'espace, et contenu même dans l'intérieur des corps, où sa densité est changée par leur action, elles peuvent servir à calculer la quantité de lumière réfléchie à la surface de séparation de deux fluides différents, lorsque la direction des ondes lumineuses est perpendiculaire à cette surface. Elles fournissent une expression très-simple du rapport de la vitesse de la lumière dans le premier milieu à la vitesse dans le second : rapport qui est lui-même égal, dans cette théorie, au rapport constant des sinus d'incidence et de réfraction. Si les deux milieux sont l'air et l'eau, la formule s'accorde fort bien avec une expérience de Bouguer; mais, pour l'air et le verre, la formule donne presque le double de ce qu'a donné l'expérience.

L'auteur fait encore cette remarque curieuse, que l'observation de la quantité de lumière réfléchie n'est pas propre à décider si la vitesse de la lumière augmente en passant de l'air dans un milieu plus dense, ainsi qu'on l'admet dans la théorie de l'émission; ou si elle diminue, comme on le suppose dans la théorie des ondulations. Mais, dans cette première théorie, cette quantité de lumière n'est aucunement liée aux vîtesses de propagation dans les différents milieux; tandis que, dans l'autre, elle en dépend d'une manière très-simple. « Par cette raison, l'accord du calcul et de l'observation, sur ce point, pourrait être une assez forte présomption en faveur du second système, sur-tout si l'expérience était faite et comparée à la théorie sur un grand nombre de surfaces réfléchissantes, dans lesquelles le rapport des sinus d'incidence et de réfraction fût connu. »

Pour terminer cette digression, l'auteur compare ses formules à quelques expériences de M. Arago sur la réflexion de la lumière, et il y trouve une conformité satisfaisante; puis, revenant à son sujet principal, il finit par des comparaisons avec des expériences de M. Canton, qui ont paru dans les Transactions philosophiques de 1764.

Addition au Mémoire sur la libration de la lune, *par M.* Poisson.

Nous avions annoncé en 1819 que M. Poisson attendait la fin des calculs de M. Nicollet pour fixer les valeurs des constantes de sa théorie. Ce travail vient de paraître avec tous les détails qu'il était permis de désirer, dans la Connaissance des temps de 1822. M. Poisson en conclut qu'à la surface de la terre les pôles de rotation n'éprouvent aucun déplacement sensible, de manière qu'il existe à cet égard une différence essentielle entre le mouvement de rotation de la lune et celui du sphéroïde terrestre. Il rappelle en finissant, que les formules tirées de la théorie, et que l'on compare aux observations, supposent que les inégalités arbitraires, qui dépendent des circonstances initiales du mouvement, ont entièrement disparu, et qu'il ne subsiste maintenant que celles qui sont produites par l'action de la terre sur la lune. Il avoue cependant qu'on peut conserver quelques doutes sur ce fait important, ce qui en jette ensuite sur la véritable étendue de la libration, soit en longitude, soit en latitude. « Il serait d'autant plus nécessaire que ces doutes fussent éclaircis, que deux des valeurs trouvées sont très-loin de s'accorder avec celles que l'on calcule dans l'hypothèse de la fluidité primitive de la lune; hypothèse qui paraît convenir à tous les corps célestes, et à laquelle on est conduit par toutes les analogies. »

Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires, aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques; par M. Poisson.

L'auteur de ce Mémoire s'est proposé d'intégrer les équations aux différences partielles les plus importantes par la nature des questions de mécanique et de physique qui y conduisent.

L'équation dont il s'est occupé principalement est celle d'où dépendent les petits mouvements des fluides élastiques, lorsqu'on suppose constante la densité naturelle du fluide et sa température. L'intégrale à laquelle il parvient est d'une forme très-simple: elle ne dépend que des intégrales définies doubles; et les deux fonctions arbitraires s'y déterminent immédiatement, d'après l'état initial du fluide; ce qui sera d'un grand avantage dans les applications. Elle pourra servir à résoudre, par rapport au mouvement des fluides élastiques, des problèmes qui n'avaient point encore été résolus, ou qui ne l'avaient été que dans des cas particuliers. Il se propose de faire de ces applications l'objet spécial d'un autre Mémoire. Ce que l'auteur a sur-tout recherché, c'est la facilité de déterminer les fonctions arbitraires que renferment les intégrales des équations qu'il a considérées; en sorte que non-seulement elles satisfassent de la manière la plus générale aux équations dont elles sont les intégrales complètes, mais qu'on puisse aussi les regarder comme les solutions définitives des problèmes qui ont conduit à ces équations.

Les équations dont il s'occupe successivement, sont celles *de la distribution de la chaleur dans les corps solides, des surfaces élastiques vibrantes,* et *l'équation du second ordre à deux variables indépendantes et à coëfficients constants.*

Les mêmes procédés d'intégration peuvent s'étendre à un grand nombre d'autres équations linéaires et à coëfficients constants. Le Mémoire est terminé par quelques remarques sur la forme des intégrales de ce genre d'équations aux différences partielles. En diverses occasions l'auteur prend soin de rappeler les travaux des géomètres qui ont traité les mêmes sujets.

Sur la résolution analytique des équations de tous les degrés par le moyen des intégrales définies; par M. Cauchy.

On a fait beaucoup de tentatives pour obtenir la solution des équations littérales d'un degré supérieur au quatrième. Toutes ces tentatives ont été inutiles; et même un géomètre italien, M. Ruffini, a démontré, dans ces derniers temps, qu'il était impossible de trouver, pour la solution de l'équation générale d'un degré supérieur au quatrième, des formules analogues à celles qu'on a découvertes pour les quatre premiers degrés. Il ne reste donc aucun espoir d'exprimer les racines d'une équation de degré quelconque par des fonctions irrationnelles des coëfficients de son premier membre. Toutefois, avant de renoncer pour toujours à présenter ces racines sous une forme finie, il convenait d'examiner si l'on ne pourrait pas les réduire à des intégrales définies, qu'on a tant de moyens de réduire en nombres. Telle est la question que s'est proposée M. Cauchy. Déja en 1804, M. Parseval avait essayé de la résoudre en suivant, à l'aide d'un artifice très-ingénieux, la suite donnée par M. Lagrange pour la résolution d'une équation algébrique ou transcendante.

Les calculs de M. Parseval étant fondés sur la considération de séries dont la convergence n'est pas toujours assurée, les résultats auxquels il parvient ne pourront être considérés comme établis généralement d'une manière rigoureuse. Aussi l'auteur ayant cherché à les vérifier *à postériori*, dans le cas où l'équation proposée a toutes ses racines réelles, a-t-il reconnu que, dans cette hypothèse même, l'intégrale qu'il substitue à la suite de M. Lagrange, ne représente une des racines que sous certaines conditions. La méthode de M. Cauchy, fondée immédiatement sur la propriété d'une classe d'intégrales définies, conduit facilement à la solution du problême dans tous les cas possibles. Nous nous bornerons aux principaux résultats.

1° Lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, chacune de ces racines peut être exprimée par une intégrale définie. Cette intégrale renferme deux constantes arbitraires entre lesquelles on suppose comprise la seule racine dont il est question. Du reste, ces deux constantes peuvent varier comme on voudra, sans que l'intégrale change pour cela de valeur. Si les deux constantes s'écartent l'une de l'autre, de manière que deux, trois ou quatre racines soient comprises entre elles, l'intégrale définie exprimera la somme de ces deux, trois, quatre racines, etc.

2° Lorsqu'une équation a en même temps des racines réelles et des racines imaginaires, on peut encore représenter chaque racine réelle par une intégrale définie qui renferme deux constantes arbitraires, pourvu que l'on suppose comprise entre ces deux constantes la partie réelle de la seule racine que l'on considère. Cette remarque suffit pour montrer en théorie que toute racine d'une équation peut être exprimée par une intégrale. Toutefois, comme dans le cas où l'on veut obtenir les valeurs numériques des racines, la détermination des deux constantes peut entraîner de longs calculs, il est alors préférable d'employer le moyen qui va être indiqué.

On cherchera d'abord une constante unique, inférieure au plus petit coëfficient positif de $\sqrt{-1}$, dans les racines imaginaires. On y parviendra sans peine par la méthode exposée dans la quatrième note de *la Résolution des équations numériques*. Cela posé, il deviendra facile de substituer à l'équation proposée deux autres équations qui aient pour racines respectives, la première, les racines réelles de l'équation proposée, et la seconde, celles des racines imaginaires dans lesquelles le coëfficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Les coëfficients de ces deux équations seront intégrales définies renfermant la seule constante dont on vient de parler. On doit même observer que si toutes les racines sont imaginaires, la constante dont il s'agit pourra être supposée nulle. Pour fixer les idées, considérons une équation du 6e ou 8e degré dont toutes les racines sont imaginaires. On pourra, d'après ce qu'on vient de dire, et sans la recherche préliminaire d'une constante, réduire immédiatement cette équation à deux autres du 3e ou du 4e degré.

Dans toutes les intégrales employées dans cette méthode, la fonction sous le signe $\int$ est une fonction rationnelle de la variable, qui ne devient jamais infinie, et pour laquelle le degré du dénominateur est supérieur au moins de deux unités à celui du numérateur. Il en résulte que chacune de ces intégrales a une valeur finie et déterminée que l'on peut réduire en nombres. Souvent même il sera aisé de la transformer en une série très-convergente dont les termes suivent une loi connue; en sorte que l'on peut immédiatement prolonger cette série autant qu'on voudra. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on considère une des équations à trois termes, que l'on ne sait pas résoudre dans le cas où toutes les racines sont imaginaires.

Sur une nouvelle propriété physique qu'acquièrent les lames de verre, quand elles exécutent des vibrations longitudinales; par M. Biot. (17 janv. 1820.)

M. Savart, qui a présenté à l'Académie des recherches si intéressantes sur les vibrations des corps élastiques, ayant communiqué dernièrement plusieurs expériences nouvelles qu'il avait faites avec une bande de glace d'environ deux mètres, et ayant représenté les vibrations de cette lame comme aussi remarquables par leur étendue que par la facilité avec laquelle elles s'excitent, M. Biot pensa qu'il serait curieux d'observer si un pareil état de mouvement intestin ne déterminerait pas entre les particules du verre des relations de position qui les rendraient capables d'agir sur la lumière polarisée, à la manière des corps dont la structure, sans être complètement régulière, a cependant quelque condition de dépendance mutuelle entre ses diverses parties; par exemple, comme le sont les masses de verre que l'on comprime, et celles que l'on a fortement chauffées et ensuite refroidies rapidement. Il y avait même ici une particularité qui rendait la réussite de l'expérience plus piquante, mais aussi moins probable; c'était l'opposition nécessairement alternative et excessivement rapide du mouvement des particules dans lesquelles, d'après l'acuité des sons obtenus, les condensations et les dilatations devaient se succéder jusqu'à sept ou huit mille fois par seconde. Il était difficile de prévoir si une opposition pareille et aussi rigoureusement égale produirait, dans la lumière polarisée, quelque modification assez permanente pour pouvoir être observée. C'est ainsi, par exemple, que les alternatives de condensation et de dilatation, qui se produisent dans l'air lorsqu'on le met en vibration sonore, ne sont pas sensibles au baromètre; et que le thermomètre n'accuse pas non plus les changements de température dont ces variations de densité sont accompagnées.

M. Savart a bien voulu se prêter à cette expérience, et se joindre complaisamment à M. Biot pour la faire. Un large faisceau de lumière polarisée fut reçu sur un verre noir placé de manière que la réflexion y devînt nulle; on étudia d'abord l'état actuel de structure de la lame de glace, en l'interposant dans le trajet de ce faisceau, et en observant si elle le modifiait. On aperçut ainsi quelques traces de couleurs correspondantes aux teintes des premiers anneaux de la table de Newton, et qui, par leur disposition, avaient une analogie évidente avec celles que présentent les bandes de verre qui ont été fortement chauffées et refroidies rapidement. Il y avait toutefois cela de particulier, que ces traces étaient le plus sensibles au milieu même de la longueur de la bande de glace, soit qu'on la regardât par le plat ou par la tranche, et qu'elles allaient en s'affaiblissant avec rapidité des deux côtés de ce milieu, de manière à devenir tout-à-fait nulles vers les extrémités. Ces couleurs étaient-elles déterminées par l'espèce de trempe que conservent presque toujours les lames de verre un peu épaisses, à moins qu'on n'emploie des précautions extraordinaires pour les recuire complètement et avec une parfaite égalité? ou étaient-elles l'effet d'un état d'arrangement imprimé aux particules de verre par les vibrations réitérées qu'on lui avait déja fait subir? C'est ce que l'auteur n'entreprend pas de décider.

Quoi qu'il en soit, ces traces étaient si faibles, que lorsque la lame était interposée dans le trajet du rayon de manière qu'il traversait son épaisseur, laquelle était d'environ sept millimètres, on apercevait à peine un faible changement dans la réflexion languissante qui s'opérait sur le verre noir, disposé pour absorber le rayon polarisé; mais si, en tenant la lame de glace par son milieu, on frottait une de ses moitiés avec un drap mouillé, de manière à y exciter des vibrations longitudinales, tandis qu'on interposait l'autre moitié dans le trajet du faisceau lumineux polarisé, à chaque fois que le son éclatait, un vif éclair de lumière blanche brillait sur la surface du verre absorbant, ce qui attestait un changement opéré dans la direction de la polarisation; et plus le son était plein et intense, le ton restant le même, plus la lumière ainsi aperçue était brillante. Mais aussitôt que le son cessait de se faire entendre, le verre absorbant reprenait son obscurité, c'est-à-dire que la polarisation reprenait sa direction primitive. Si, au lieu de transmettre le faisceau polarisé à travers l'épaisseur de la lame, qui était seulement de sept millimètres, on le transmettait à travers sa largeur, qui était de trente, aussitôt des lignes fines de couleurs analogues aux premiers ordres d'anneaux paraissaient dans le sens de la longueur de la lame, y modifiaient vivement les stries colorées primitives, et n'offraient plus seulement le blanc-bleuâtre du premier ordre, mais descendaient jusqu'à l'orangé.

Les expérimentateurs observèrent les effets produits de cette manière par les trois premiers termes de la série des sons que la lame pouvait rendre, et que M. Savart avait préalablement reconnus être fa_5, fa_6, et ut_7, en appelant ut_1, l'*ut* de huit pieds ouvert de l'orgue; ce qui, d'après la longueur de cette lame, s'accorde avec la vîtesse de transmission du son dans le verre qui a été indiquée par M. Chaldny. Chacun de ces modes de vibrations a produit des effets de lumière analogues aux précédents; seulement l'éclair a paru plus vif avec le troisième son qu'avec les deux autres, peut-etre parce que le mouvement de vibration qui le produisait était plus régulier et plus entretenu avec plus de constance. Au reste, dans tous ces modes, la réapparition de la lumière devenait très-faible à une distance d'environ un décimètre des extrémités de la lame; et elle paraissait nulle ou presque nulle à ces extrémités mêmes, où en effet il ne doit s'opérer ni condensation ni dilatation sensible, mais un simple transport des particules, du moins en négligeant la réaction infiniment petite exercée sur la lame par l'air auquel elle communique son mouvement de vibration.

Mirage observé sur le lac de Genève par M. JURINE, *communiqué par M.* BIOT.

Le jeudi 17 septembre 1818, à dix heures du matin, le ciel étant nuageux, l'air légèrement chargé de vapeurs et faiblement agité par un vent de nord-est, le thermomètre à + 12$\frac{1}{4}$ de

Réaumur, et le baromètre à $27\frac{3}{6}$ de pouces, M. Soret, se trouvant au deuxième étage d'une maison située au bord du lac, regardait avec un grand télescope une barque chargée de tonneaux, dont les deux voiles étaient déployées, et qui faisait route pour Genève.

Au moment où cette barque arriva à la hauteur de la pointe de Bellerive (cap formé par le rétrécissement du lac, à une lieue au-dessous de Genève, et situé sur la rive gauche), elle changea un peu sa direction primitive en se portant vers la rive gauche. A cet instant M. Soret vit paraître au-dessus de l'eau l'image des deux voiles, laquelle, au lieu de suivre la marche de la barque, se sépara pour en prendre une différente, en cheminant du côté de la rive droite, dans la direction de l'est à l'ouest, tandis que la barque marchait du nord au sud.

Au moment de l'observation, la partie du lac où se trouvait la barque paraissait calme, et, comme à l'ordinaire, d'une couleur d'aigue-marine, tandis que la partie plus rapprochée de l'observateunr était faiblement agitée et d'une teinte grisâtre, due sans doute à la réflexion des nuages.

Quand l'image se sépara de la barque, ses dimensions étaient égales aux deux voiles qu'elle représentait; mais à mesure qu'elle s'en éloigna, elle diminua insensiblement, de manière à se trouver réduite à moitié quand le mirage cessa.

M. Jurine arriva assez à temps pour voir ces deux objets à peu de distance l'un de l'autre. Ils s'avançaient toujours sur le même plan, de manière qu'en faisant mouvoir le télescope horizontalement, ils passaient l'un après l'autre au champ de l'instrument. Quand les rayons solaires qui perçaient de temps en temps au travers des nuages, se portaient sur l'image, on la distinguait aisément à la vue simple; observée au télescope, elle paraissait d'une blancheur éclatante. Mais ce qui frappa le plus les deux observateurs, fut de ne pas voir cette image renversée, comme cela a lieu dans les mirages ordinaires, et de ne pouvoir distinguer au-dessus d'elle ni le corps du bâtiment, ni les tonneaux dont il était chargé; les voiles seules étaient reproduites dans la même position qu'elles occupaient sur la barque, et également enflées.

Entre le corps palingénésique et la surface plane de l'eau, il semblait exister un intervalle, au-dessus duquel on vit pendant quelques instants se réfléchir assez nettement une partie de l'image de ce corps; mais dès qu'il eut atteint la surface agitée, cette réflexion cessa, et M. Jurine observa sur le bord postérieur de la grande voile une ondulation qui paraissait coïncider avec celle des petites vagues environnantes.

Au bout d'un certain temps, une maison voisine ayant masqué la barque, M. Soret monta à un étage supérieur pour continuer l'observation. Quoique l'élévation du nouveau poste fût plus que double de la première au-dessus de la surface de l'eau, il vit également bien l'image qui continuait toujours à s'avancer vers la rive droite, à mesure que la barque se dirigeait vers la gauche. Environ dix minutes après, M. Soret descendit pour annoncer que les bateliers avaient plié les voiles, de manière qu'on ne distinguait plus au grand mât qu'une seule bande blanche. Avant de connaître ce changement, M. Jurine avait remarqué que l'image de la petite voile s'était insensiblement dissipée, et que celle de la grande avait diminué de ses dimensions primitives; et il était tenté d'attribuer cette modification dans l'apparence du spectre, au changement d'horizon, et au rideau que la terre commençait à former derrière lui. Il reconnut son erreur en apprenant ce qui s'était passé sur la barque, et en continuant de voir la bande blanche continuer sa marche jusqu'à ce que des arbres interposés l'eussent complètement cachée à ses regards.

Voyages dans la Grande-Bretagne. Première Partie. Force militaire.

M. Dupin a présenté à l'Académie le premier volume de ses voyages dans la Grande-Bretagne. Ce volume qui traite de la constitution de l'armée, sera suivi immédiatement d'un second, où sont discutés et décrits les études et les travaux militaires en général, mais plus spécialement ce qui se rapporte au génie et à l'artillerie.

Déja, dans le compte des travaux de l'Académie pour 1817 et 1818, on a fait connaître la partie scientifique du voyage de M. Dupin : partie qui lui a ouvert les portes de l'Institut (1).

Depuis l'approbation du manuscrit, l'auteur a fait un nouveau voyage dans la Grande-Bretagne; il y a recueilli des matériaux nouveaux et importants qui donnent un plus grand prix à son ouvrage.

Voici quelle est la division tracée dans l'introduction, qui, bien que concise, présente une idée complète des vues générales de l'auteur.

(1) C'est M. le maréchal duc de Raguse qui a rendu compte de ce qui regarde les arts militaires.

L'ouvrage entier forme six volumes in-4°, avec des planches grandes et nombreuses, présentant trois parties distribuées ainsi qu'il suit :

FORCE MILITAIRE...	1.	Constitution de l'armée.
	2.	Études et travaux de l'armée.
FORCE NAVALE.....	3.	Constitution de la marine.
	4.	Études et travaux de la marine.
FORCE SOCIALE.....	5.	Constitution des forces sociales. (Associations civiles et particulières.)
	6.	Études et travaux civils.

La sixième et dernière partie, sous le titre d'*Études et travaux civils*, comprend spécialement les travaux faits par *association* dans la Grande-Bretagne, et que dirige en France le corps des ponts-et-chaussées.

En traduisant les relations succintes et les descriptions déja publiées par M. Dupin, au sujet de ses voyages, dans l'ouvrage intitulé : *Mémoires sur la marine et les ponts et chaussées de France et d'Angleterre*, malgré des plaintes banales et non méritées sur ce que l'auteur rapporte, nous dit-on, beaucoup trop d'inventions et de perfectionnements britanniques aux recherches et aux découvertes des Français, les Anglais n'ont pu s'empecher de rendre justice à la fidélité générale des descriptions et des observations présentées par M. Dupin

Mémoires sur les populations comparées de France et d'Angleterre.

M. Dupin a lu deux mémoires, à l'Académie, sur les populations de France et d'Angleterre.

Il considère d'abord les accroissements de population depuis le commencement du siècle dernier; il examine pendant ce temps comment a varié la longueur de la vie moyenne, le rapport des naissances aux mortalités, et le rapport de ces deux éléments à la population totale. Il rapproche ensuite les trois genres de rapports qu'il obtient ainsi, pour montrer qu'en les considérant tous ensemble on parvient aux mêmes conclusions, ce qui augmente la certitude des faits nouveaux qu'il s'efforce d'établir.

La proportion suivant laquelle meurent les individus à différents âges, depuis l'instant de leur naissance jusqu'aux limites de l'extrême vieillesse, présente une échelle dont il est très important de connaître les degrés. Ces degrés ne sont pas les mêmes pour des nations qui diffèrent par le climat des contrées qu'elles habitent, par leurs mœurs, leurs usages, leurs travaux et le degré de leur civilisation. M. Dupin établit à cet égard des différences très-remarquables dans les échelles de mortalité en France et dans la Grande-Bretagne.

Plusieurs des faits que nous venons d'indiquer ayant été contestés à l'auteur lors de la lecture de son premier mémoire, il les a développés et expliqués dans un second mémoire, de manière à mettre hors de doute les principes qu'il avait posés.

M. Dupin ne s'est pas contenté de comparer les éléments de la population humaine en France et en Angleterre. Il compare aussi la population des espèces d'animaux domestiques les plus importants : les chevaux, les bêtes à cornes, les bêtes à laine, etc. Il rapproche les rapports de ces espèces avec les rapports présentés par la population humaine et par l'étendue du territoire. Ce travail a dû demander à l'auteur des calculs très-longs et beaucoup de recherches sur des objets d'arithmétique et d'économie politique.

Note sur un météore lumineux, observé à Paris et dans les environs jusqu'à cinq lieues de distance; par M. CAUCHY.

Le 25 juillet dernier, nous promenant dans les environs de Franconville, sur la route de Pontoise, vers neuf heures et demie du soir, nous vîmes un météore lumineux qui partait de l'horizon, et vint, en se dirigeant de l'est à l'ouest, éclater presque sur nos têtes, dans la constellation du cygne. Il ressemblait a une gerbe de feu; il était si brillant, que plusieurs personnes le prirent pour une très-belle fusée d'artifice. Le même météore a été vu par d'autres observateurs, savoir, à Juvisy sur la route de Fontainebleau, à Sèvres sur celle de Versailles, à Saint-Denis et sur la route de Saint-Germain, et à Paris par M. de Humboldt. Tous ont cru comme nous le voir disparaître à-peu-près à leur zénith. Or, comme de Juvisy à Franconville il y a environ huit lieues de distance, si l'on porte à dix degrés, ce qui paraît bien considérable, les erreurs des observations, on trouvera que le météore a disparu à quatre-vingt lieues environ de la surface de la terre. Comme il avait parcouru la distance de l'horizon au zénith en trois ou quatre secondes, il en résulterait qu'il parcourait un chemin de cent lieues environ par seconde. D'après ce qu'on vient de dire, il est à présumer qu'on a vu ce météore à une grande distance de Paris; et il serait à désirer que l'on pût recueillir à cet égard quelque renseignement positif.

On sait déja que ce météore a été observé à Jouarre et à Rambouillet.

OUVRAGES IMPRIMÉS.

Traité du calcul différentiel et du calcul intégral; seconde édition, revue et augmentée; Tom. III, contenant un traité des différences et des séries; par M. Lacroix.

Dans ce volume, comme dans le précédent, l'auteur ne s'est pas borné aux divisions indiquées dans la préface du premier; il en a augmenté le nombre, afin de mieux séparer les matières qui sont ici très-variées. Après l'exposition du calcul direct et inverse aux différences et la théorie des *fonctions génératrices*, se présentent les applications réciproques des séries et du calcul intégral, comprenant ces méthodes pour ainsi dire anomales par lesquelles on a tâché de remplir quelques-unes de ces grandes lacunes que laisse l'imperfection des méthodes directes. Le volume est terminé par des éclaircissements sur quelques articles des volumes précédents, et par des additions concernant l'application de l'analyse à la géométrie dans l'espace.

Essai sur les probabilités ; par M. le marquis DE LAPLACE.

Exercices du calcul intégral ; par M. LEGENDRE.

Cette nouvelle livraison qui complète la troisième partie offre d'abord la table IX sous une forme plus simple et calculée pour tous les degrés de l'angle du module depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 90^\circ$. Par ce moyen, étant donnée l'amplitude φ et l'angle du module θ de toute fonction E ou F, on peut avoir immédiatement une valeur approximative de cette fonction en la comparant aux fonctions données par la table, et qui s'en rapprochent le plus dans les éléments φ et θ. Une interpolation facile conduira promptement à une valeur plus exacte. Cette table servira à faciliter l'application de la théorie des fonctions elliptiques, but principal qu'on s'est proposé dans cet ouvrage.

Une addition au paragraphe second est terminée par cette remarque qui intéresse les astronomes. Il serait d'autant plus utile de perfectionner ces méthodes en rendant les séries plus convergentes, que la réduction en tables est la seule ressource qui reste pour évaluer les fonctions déterminées par des équations différentielles qu'on ne peut intégrer exactement ; et peut-être n'y a-t-il pas d'autre moyen de résoudre les grandes difficultés que présente la théorie des perturbations des planètes, lorsque le développement en série ne peut pas avoir lieu, ou lorsqu'il offrirait un trop grand nombre de termes qui ne pourraient être négligés

Mémoire contenant l'application de la théorie exposée dans le dix-septième cahier du Journal de l'École polytechnique, à l'intégration des équations aux différences partielles du premier et du second ordre; par M. AMPÈRE.

Physique mécanique de Fischer, avec des additions par M. BIOT. *(Troisième édition.)*

Relation historique du voyage de M. Humboldt. Troisième partie, accompagnée d'un atlas des pays situés entre l'Orénoque et les Cordillères de la nouvelle Grenade; d'après les observations astronomiques, le cours du Rio Guaviares, la carte géognostique des mines de Guanaxato, etc.

Essai sur les signes numériques des anciens Egyptiens, par M. JOMARD, *de l'Académie des inscriptions et belles-lettres.*

A l'occasion de ce Mémoire, M. de Humboldt a lu à l'Académie un Mémoire sur les signes numériques des Mexicains. Ces renseignements curieux prouvent bien que ces peuples pouvaient avoir, ainsi qu'on le sait des Romains, une arithmétique suffisante pour les usages civils, mais rien qui se puisse comparer à l'arithmétique des Indiens, pas même à celle des Grecs, qui avec trente-six caractères, lesquels même n'en faisaient véritablement que ving-sept, étaient parvenus à représenter tous les nombres imaginables.

Le monde maritime, ou Tableau géographique et historique de l'Archipel d'Orient, de la Polynésie et de l'Australie; par M. WALCKENAER, *de l'Académie des inscriptions et belles-lettres.*

Nouveau Neptune français, ou collection complète des cartes générales et particulières nécessaires pour naviguer dans toute l'étendue des côtes de France, ainsi que d'un grand nombre de ports, hâvres, rades, etc. Première livraison : Environs de Brest, en trente-sept cartes. Par M. BEAUTEMS-BEAUPRÉ.

Plan de la rade et du barachois des îles Saint-Pierre et Miquelon, levé par M. ABEL-AUBERT DU PETIT-THOUARS.

Pavillons des puissances maritimes en 1819; *figures coloriées, présentées par M.* le comte DE ROSILY.

Trois cent vingt-sept Cartes en dix Neptunes, qui composent l'hydrographie française; présent fait à l'Académie par S. Exc. le Ministre de la marine.

Rapport d'une commission sur la situation des travaux du canal de l'Ourcq et ses dépendances, à l'époque du 1er *janvier* 1816. *Par M.* GIRARD.

RAPPORTS ADOPTÉS PAR L'ACADÉMIE.

Carte du canal de Gotha, et Mémoire envoyé par M. le comte DE PLATEN; *commissaires, MM.* Buache, *et* Girard, *rapporteur.*

Ce mémoire est destiné à faire connaître la direction et les pentes d'un canal navigable, maintenant en exécution sous la direction de M. le comte de Platen, pour opérer la jonction de la mer Baltique à la mer du Nord.

La Suède ne peut exporter les productions de son territoire que par le détroit du Sund; et pendant les guerres, toujours si fréquentes entre deux peuples voisins, les corsaires danois, protégés par les batteries de Cronenbourg, ont toujours inquiété et quelquefois interrompu momentanément le commerce maritime de la Suède.

Vers le milieu du seizième siècle, Gustave Vasa fonda sur la mer du Nord la ville de Gothembourg, d'où, en remontant la rivière de Gotha qui y débouche, on peut pénétrer dans l'intérieur des terres et aller chercher, sur les lieux mêmes qui les produisent, les bois et les métaux dont ce pays pourrait approvisionner une partie de l'Europe.

Pour établir la communication de la mer Baltique avec la mer du Nord, les difficultés se réduisent à franchir la chaîne de montagnes granitiques par laquelle le lac Wener et le lac Weter sont séparés l'un de l'autre, à couper le plateau situé entre le lac de Roxen et l'étang d'Asplangen, et à suivre dans le reste de l'espace, soit la rivière de Gotha pour descendre dans l'Océan, soit la rivière de Motala pour descendre dans la Baltique. La première, assez près de son origine, est traversée par des blocs de granit qui y produisent une espèce de cataracte qu'il s'agissait de franchir. Après divers travaux entrepris et interrompus à diverses époques, on a pris le parti d'ouvrir un canal latéral sur la gauche de la rivière de Gotha, et d'en racheter la chûte par 7 écluses de $9^{m},67$ de largeur, et de 60 mètres de long.

La carte communiquée à l'Académie ne s'étend que depuis le lac Wener jusqu'à la Baltique, et ne comprend que la seconde branche du canal à ouvrir entre les deux mers.

Le bief de partage qui a été creusé dans la chaîne granitique, dont il a été parlé plus haut, est élevé de $90^{m},65$ au-dessus de la mer Baltique; l'élévation du bassin de Naurouse, point de partage de notre canal du midi, au-dessus de la Méditerranée, est de 189^{m}, c'est-à-dire un peu plus que double.

Le bief de partage a 4 milles suédois de longueur; on en descend à l'ouest dans le lac Wener, au moyen de 20 écluses qui rachètent une pente de 48 mètres environ. On passe à l'est du bief dans le lac Weter par une écluse de $3^{m},25$ de chûte. Du lac Weter on passe dans le lac de Boven, et de celui-ci dans le Roxen au moyen d'un canal creusé parallèlement à la rivière de Motala. Enfin, après avoir franchi le seuil qui sépare le lac de Roxen de l'étang d'Asplangen, on débouche par un canal à l'extrémité occidentale d'une baie de la mer Baltique, qui s'enfonce dans les terres de plus de 2 milles. Les 90 mètres de pente depuis le point de partage sont rachetés par 36 écluses figurées sur la carte. La longueur totale du canal, en y comprenant la traversée des lacs, est d'environ 45 lieues de 25 au degré; la largeur au fond est de 14 mètres, et de 28 environ à la surface de l'eau. Il a 3 mètres de profondeur au moins.

Depuis l'an 1810, époque à laquelle les travaux furent commencés sous la direction de M. le comte de Platen, le nombre des ouvriers employés aux travaux pendant les saisons où ils sont praticables, a varié de 3 à 7 mille. Les estimations de la dépense s'élèvent à 15 millions de notre monnaie, dont une partie est fournie par le gouvernement, et l'autre par des souscriptions volontaires. A la fin de 1817, plus de moitié de cette somme était dépensée, et l'on avait exécuté une quantité d'ouvrage évaluée aux trois cinquièmes de l'estimation. Il est très-probable que dans peu d'années la Suède jouira des avantages d'une navigation intérieure. Malgré le degré d'avancement de ces grands ouvrages, on ne peut se flatter encore d'avoir surmonté toutes les difficultés. Le génie, l'habileté et l'expérience sauront en triompher, à l'aide d'une persévérance éclairée et qui soit à l'épreuve de toutes les contrariétés.

Le profil joint à la carte donne tous les éclaircissements qu'on peut désirer. On regrette seulement qu'il ne se prolonge point jusqu'à l'Océan par la branche qui descend à Gothembourg.

Voici la conclusion des commissaires.

« Nous pensons que l'Académie, en témoignant à M. Berzélius l'intérêt avec lequel elle a reçu les divers renseignements qu'il a été chargé de lui donner sur les grands travaux de navigation intérieure qui s'exécutent aujourd'hui en Suède sous la direction de M. le comte de Platen, doit exprimer le désir de pouvoir désormais compter au nombre des communications dont il est accoutumé à l'enrichir, des renseignements ultérieurs sur l'avancement et le succès d'une entreprise qui doit si puissamment concourir à la prospérité de son pays »

M. Berzélius, secrétaire perpétuel de l'Académie de Stockholm, était alors à Paris, et nous avions l'avantage de le voir fort assidu à nos séances.

Corrections et additions faites par M. Navier, *ingénieur des Ponts-et-Chaussées et ancien élève de l'École Polytechnique, à une nouvelle édition du premier volume de l'Architecture de Bélidor; commissaires, MM.* Poisson, Fourrier, de Prony, *et* Girard, *rapporteur.*

M. Navier a laissé l'ancien Traité de Bélidor absolument intact; et sa nouvelle édition ne diffère de l'ancienne que par des notes nombreuses et extrêmement étendues, lesquelles se composent d'observations critiques sur les passages défectueux et erronés, et d'additions faites à ce texte. Les commissaires se sont attachés principalement à ces dernières; ils indiquent une démonstration élémentaire du principe des vitesses virtuelles; diverses méthodes pratiques pour déterminer, par approximation, les aires, les volumes et les centres de gravité; une théorie du choc, en ayant égard à la compression qui a lieu à la rencontre de deux corps..... Dans le chapitre *des frottements*, M. Navier rectifie une fausse théorie du frottement des pilons, qui se trouve dans le texte, et il expose une théorie nouvelle du frottement des engrenages, fondée sur la figure qu'il convient de donner aux dents, et qu'on leur donne effectivement dans les machines bien exécutées.

Dans le chapitre III, qui contient les principes d'hydraulique, après avoir exposé et discuté les lois de l'écoulement des fluides, M. Navier traite du choc des fluides et de l'équilibre des corps flottants : il montre que les règles de Parent et de Borda ne sont pas contradictoires, comme on l'avait cru ; que celle de Parent convient à une roue qui se meut dans un courant d'une largeur indéfinie, et celle de Borda à la roue qui est renfermée dans un coursier. Quant au corps contenu dans une masse fluide d'une étendue indéfinie, il croit qu'on peut établir deux principes généraux ; que, pour un même corps, la résistance est proportionnelle au quarré de la vîtesse, et, pour des corps semblables, au cube de leur dimension homologue ; et il indique les modifications qu'on doit apporter à ces principes, suivant les circonstances.

Les chapitres sur les moulins à blé, à scier les bois, pour la poudre à canon, et sur les moulins qu'on emploie en Angletérre pour battre le blé, renferment des détails et des préceptes également importants, que nous omettons à regret pour nous borner à la conclusion des commissaires.

« L'Académie a pu juger, par l'extrait que nous venons de lui présenter, combien M. Navier, en publiant le premier volume d'architecture de Bélidor, se place au-dessus des éditeurs ordinaires, et même de la presque totalité des commentateurs. La composition de ses notes équivaut à celle d'un ouvrage considérable ; et le mérite de ces mêmes notes lui donne des droits à la reconnaissance publique, et particulièrement à celle des ingénieurs, qui doivent vivement en désirer la continuation pour les volumes suivants. »

Mémoire sur la digue de Cherbourg, comparée au Break-Water ou jetée de Plymouth; par M. le baron CACHIN, *inspecteur-général des Ponts-et-Chaussées. Commissaires, MM.* de Prony, Dupin *et* Girard, *rapporteur.*

Ce mémoire est divisé en deux sections. La première contient une description historique de l'entreprise faite pour fermer la rade de Cherbourg par une digue. La seconde offre le parallèle de cette digue et de la jetée de Plymouth.

D'après la nécessité reconnue d'avoir dans la Manche un port accessible aux plus grands vaisseaux de guerre, l'attention de Vauban s'était portée principalement sur Cherbourg et la Hougue. En 1756, des commissaires s'étant transportés à la Hougue, y dressèrent un nouveau projet plus étendu que celui de Vauban. Le traité de 1753 fut cause qu'on ne donna pour lors aucune suite à cette idée. Elle fut reprise en 1777. M. de la Bretonnière, capitaine de vaisseau, et l'astronome M. Méchain, furent chargés de reconnaître nos côtes depuis Dunkerque jusqu'à Granville. M. de la Bretonnière, dans son rapport, parla exclusivement de Cherbourg; il signala des inconvénients graves qui devaient faire abandonner tout projet sur la Hougue. Parmi plusieurs avantages qu'offrait Cherbourg, il indiqua ceux d'un excellent mouillage, et d'une rade dont l'entrée et la sortie sont également faciles dans presque toutes les circonstances. Il proposait de fermer cette rade par une digue en pierres perdues, qui aurait laissé sur ses extrémités des passes assez larges pour l'entrée et la sortie des escadres. Après plusieurs projets qui ne furent pas même essayés, M. de Cessart proposa une digue de cônes tronqués de charpente, ayant chacun $45\frac{1}{2}$ mètres de diamètre à leur base inférieure, $19\frac{1}{2}$ mètres à leur sommet, sur une hauteur égale de $19\frac{1}{2}$ mètres. Quatre-vingt-dix caisses semblables devaient être échouées en pleine mer, et mises en contact base à base, pour former une ligne continue dirigée de la pointe de Querqueville à l'île Pelée, en laissant aux extrémités deux passes, l'une à l'est, de 1000 mètres, et l'autre à l'ouest, de 2400. Ces caisses devaient être remplies de pierres après leur immersion. On pensait que, par cette disposition, elles diviseraient comme une claire-voie l'action de la mer, et qu'ainsi elles procureraient du calme dans l'intérieur de la rade. Quelques expériences préliminaires parurent ne laisser aucun doute sur la réussite : la construction des cônes sur la plage, leur mise à flot, leur remorque et leur immersion offraient une suite d'opérations dont la hardiesse et la nouveauté excitèrent vivement la curiosité publique. Malheureusement, le succès ne répondit point aux espérances qu'on avait conçues. Des tempêtes consécutives détruisirent les premiers cônes ; on fit remarquer qu'en continuant de travailler sur ce plan, il faudrait vingt années de travaux et 80 millions de dépense. On décida de laisser entre les cônes un intervalle, qu'on fit d'abord de 50 mètres, et puis de 200 ; enfin, après avoir ainsi livré dix-huit caisses isolées, et qui n'avaient pu être complètement remplies, à l'action des vents et de la mer, on finit, en 1789, par recéper comme inutiles tous les cônes que la tempête avait épargnés ; et l'on se trouva ramené au projet d'une digue en pierres perdues, qu'on avait rejeté d'abord.

A la fin de 1790, près de 3 millions de mètres cubes de pierre avaient été déversés dans la direction de la digue sur un développement de 400 mètres; on avait fixé à 45° l'inclinaison du talus en dedans de la rade. Cette inclinaison, du côté du large, devait être égale au triple de la hauteur verticale de la digue.

En 1791, la dépense des travaux faits s'élevait à plus de 31 millions. L'année suivante, une commission fut nommée pour faire un nouveau rapport.

Cette commission s'assura, par l'observation attentive des effets de la mer sur la digue, que les matériaux dont elle était composée n'avaient de stabilité que lorsqu'ils étaient recouverts par des blocs de 15 ou 20 pieds cubes, au moins; mais la modification la plus importante qu'elle proposa fut d'élever le sommet à 3 mètres au-dessus des plus hautes mers de vive eau, seul moyen d'en garantir la solidité et de maintenir le calme dans la rade.

Les travaux, interrompus en 1792, furent repris dix ans après, et la direction en fut confié à M. Cachin.

L'ancienne digue élevée provisoirement jusqu'au niveau des basses mers, en 1784, était depuis vingt ans en expérience. Les tempêtes en avaient abaissé le sommet de 4 à 5 mètres. Le talus intérieur avait conservé l'inclinaison primitive de 45°; mais, du côté du large, il présentait deux inclinaisons différentes. Sa partie inférieure était de 9 mètres de base sur $6^m,3$ d'élévation verticale. L'inclinaison de la partie supérieure était de $47^m,5$ de base sur $6^m,2$ de hauteur. Ces observations apprenaient, sur le *profil de plus grande stabilité*, ce qu'il importait le plus de savoir; il fallait, après avoir opposé un obstacle suffisant au déplacement des matériaux, laisser à l'action de la mer elle-même le soin de dresser, suivant l'inclinaison la plus convenable, la surface extérieure contre laquelle elle s'exerçait. Par cette action, la base horizontale du talus extérieur est devenue à-peu-près quadruple de sa hauteur. Pour résister aux impulsions obliques qui auraient pu imprimer aux matériaux un mouvement selon la longueur de la digue, et dont le résultat eût été de combler les passes, on sentit la nécessité de recouvrir extérieurement la digue de blocs de pierre assez volumineux pour n'être point entraînés. Le succès a complètement justifié les moyens choisis par M. Cachin pour cette opération. La tempête du 18 février 1807, et sur-tout celle du 12 février 1808, la plus violente dont on ait conservé le souvenir, en submergeant le sol de la batterie, en détruisant les ouvrages de charpente construits sur le terre-plein, arrima sur de nouvelles pentes les blocs qui recouvraient la digue, avec une telle régularité, qu'ils semblèrent avoir été construits par la main des hommes. Parvenu à cet état d'équilibre, le profil transversal de la digue, du côté du large, affecta quatre valeurs de talus essentiellement différents, depuis le sommet jusqu'au fond de la mer. On conçoit que ces talus consécutifs se raccordent par des courbes qui en amortissent les angles.

Les expériences faites à Cherbourg n'avaient pas manqué d'attirer l'attention des ingénieurs anglais, qui surent en tirer un parti avantageux dans la construction du *break-water* de Plymouth.

La rade de Plymouth offrait moins de difficultés en ce qu'elle est abritée contre les vents qui soufflent de l'est à l'ouest en passant par le nord. A Plymouth, comme à Cherbourg, les matériaux ont été fournis par des carrières peu éloignées. A Plymouth ce sont des marbres; à Cherbourg, des schistes et des granits. Le profil de la jetée de Plymouth a 300 pieds anglais de largeur à sa base, et 30 pieds à son sommet, qui doit former un terre-plein élevé de 3 pieds au-dessus des hautes mers. Le talus intérieur est de 180 pieds de base; le talus extérieur, de 90 pieds sur 57 de hauteur. La longueur totale de la digue de Cherbourg est de 3768 mètres; et la superficie de son profil transversal, de 1350 mètres quarrés. La dépense d'un mètre courant de ce profil est de 8717 francs.

La longueur totale de la jetée de Plymouth est de 1364 mètres; son profil, de 993 mètres de superficie; la dépense, d'un mètre courant, de 16491 francs. D'après ces données, M. Cachin trouve que les prix du mètre cube de pierres employées à Cherbourg et à Plymouth, seraient à peu-près dans les rapports de 2 à 5; par d'autres considérations omises dans ce premier calcul, les commissaires pensent que ce rapport est celui de 2 à 3.

En proposant à l'Académie l'approbation du Mémoire de M. Cachin et son insertion au Recueil des savants étrangers, les commissaires pensent que cet habile ingénieur, en faisant connaître le résultat de ses observations, les difficultés qu'il a rencontrées dans l'exécution de ses importants travaux, les procédés qu'il a mis en œuvre pour les surmonter, a rendu un service éminent à ceux qui seront appelés, dans la suite, à diriger de semblables opérations.

Recherches trigonométriques, par M. Sorlin; *commissaires, MM.* Legendre, *et* Delambre, *rapporteur. (22 février* 1819.*)*

Dans l'impossiblilité de rapporter ici les nombreuses formules de l'auteur, nous nous bornerons à copier la conclusion des commissaires.

« Les recherches dont nous venons de rendre compte nous ont paru rédigées avec ordre et clarté; les formules naissent les unes des autres par les combinaisons les plus simples, et sont disposées de manière à former un système complet. Elles ont toutes une symétrie qui plaît à l'œil et facilite le travail du calculateur. Elles prouvent enfin une grande habitude de l'analyse trigonométrique. Par ces diverses considérations vos commissaires pensent que le travail de M. Sorlin mérite l'approbation de l'Académie, et l'insertion au recueil des savants étrangers. »

Recherches sur les Pouzzolanes artificielles, par M. Vicat; *commissaires, MM.* Girard, *et* Gay-Lussac, *rapporteur.*

Après divers essais, M. Vicat a reconnu que les argiles réduites en poudre fine et calcinées pendant cinq ou six minutes sur une plaque de fer chauffée au rouge obscur, se comportent ensuite avec la chaux ordinaire, comme les meilleures pouzzolanes d'Italie. La résistance du béton fait avec le ciment d'eau-forte, après trois mois d'immersion dans l'eau, étant représentée par 100, celle du béton fait avec l'argile légèrement calcinée est 92. Les mêmes argiles calcinées en morceaux à un degré plus élevé que le précédent, mais moindre que celui de la brique de première cuite, ont donné un béton dont la résistance est seulement de 72; une plus forte calcination diminue de plus en plus la propriété qu'ont les argiles de former des bétons avec la chaux ordinaire; et lorsqu'elles sont ramenées à l'état de vitrification, tout comme lorsqu'elles sont dans leur état ordinaire, elles sont entièrement privées de cette propriété.

La silice précipitée de sa dissolution dans la potasse a formé avec la chaux un béton dont la résistance était double de celle du béton fait avec le ciment d'eau-forte; mais à l'air il est devenu léger et friable. Du cristal de roche réduit mécaniquement en poudre impalpable, et qu'on peut considérer comme de la silice pure, ne contracte aucune union avec la chaux. L'alumine a présenté des résultats analogues; quant à l'oxide de fer, il n'a contracté aucune union avec la chaux. Tous ces résultats prouvent que c'est l'affinité qui préside à la solidité qu'acquièrent tous les mortiers, et qu'on doit par conséquent chercher à la fortifier.

Ce Mémoire est un supplément à celui dont il est fait mention dans la Notice de l'an 1818; l'Académie, qui y a trouvé le même mérite, l'a de même accueilli favorablement.

Bateau à vapeur de M. Jernstedt; *commissaires, MM.* de Prony, Sané, *et* de Rossel, *rapporteur.*

Ce bateau est resté long-temps en station sur la rive gauche de la Seine, au quai Voltaire. Nombre de témoins peuvent attester l'élégance de ses formes extérieures. Ceux qui ont eu la curiosité de le visiter n'ont pas dû être moins satisfaits du soin que l'on a mis dans l'exécution de toutes ses parties

Le trajet de près de deux mois qu'a fait ce bateau dans la Manche, au cœur de l'hiver, prouve qu'il est capable de résister aux vagues les plus fortes. On serait tenté d'en conclure qu'il aurait pu faire de même une navigation dans l'océan Atlantique; mais la simple possibilité ne suffit pas pour résoudre une question aussi compliquée. Ce bateau est mis en mouvement par une seule roue placée à l'intérieur et au milieu de sa largeur, ce qui la soustrait à toutes les impulsions du dehors. Les pales de la roue n'ont aucune saillie au-dessous d'une rainure dans laquelle elle tourne, ce qui la garantit de tout accident dans les échouages. Cette construction rend le bateau plus susceptible de naviguer en pleine mer. Ne se contentant pas de ces améliorations essentielles, M. Jernstedt s'est occupé avec un égal succès de celles qui tendaient à conserver autant que possible la force du principal moteur, et à rendre sa machine moins exposée à ces explosions terribles, qui, si l'on ne pouvait les prévenir, seraient capables de faire abandonner ce moyen de navigation, malgré les avantages qu'on a la certitude d'en tirer.

Un mécanisme curieux a été imaginé pour donner aux pales de la roue, dans quelque situation qu'elles puissent se présenter, l'inclinaison la plus avantageuse pour faire avancer le bateau. On a cru avec raison que le meilleur moyen serait de maintenir leurs surfaces dans un plan vertical; et c'est la situation qu'on a cherché à leur conserver, malgré le mouvement de rotation. Pour donner une idée complète de ce mécanisme, et en démontrer géométriquement les avantages, le rapporteur entre dans des détails où il nous est impossible ici de le suivre. Nous en dirons autant des précautions prises pour prévenir les explosions. Un autre avantage, qui serait surtout précieux dans les canaux étroits, est celui de pouvoir également marcher dans les deux sens opposés, sans être obligé de virer de bord. « La commission pense que par ces moyens simples et ingénieux on est parvenu à perfectionner le mécanisme qui met en mouvement les bateaux à vapeur, et les met à l'abri des explosions. Sous ces deux rapports, M. Jernstedt lui paraît mériter des suffrages propres à l'encourager à faire de nouveaux efforts pour y ajouter encore, s'il est possible, un nouveau degré de perfection. »

Essai sur l'art de la navigation par la vapeur, par M. GILBERT; *commissaires, MM.* DE ROSSEL *et* DUPIN.

Après une histoire de l'art depuis sa découverte et la description des machines actuellement en usage et des observations judicieuses au sujet des difficultés qui s'opposent au succès de cette navigation, de Paris au Hâvre, l'auteur montre combien elle serait avantageuse sur la Loire, d'Orléans à Nantes, sur la Gironde et sur le Rhin.

Il y a trois conditions à remplir : 1° diminuer le moins possible la force motrice en la décomposant pour la transmettre : 2° régulariser le mouvement pour que le bateau soit tiré par une force dont l'action ait le moins d'inégalités possible ; 3° enfin, donner à tout le système autant de légèreté que peuvent permettre la solidité et la sûreté du travail.

M. Gilbert paraît n'avoir pas connaissance d'un fait, c'est le très-grand avantage qu'il y a, toutes choses égales d'ailleurs, à employer deux corps de pompe de la force de dix chevaux chacune, au lieu d'un corps unique de la force de vingt chevaux. Il explique ce qu'une pratique raisonnée a fait reconnaître de meilleur dans la forme des diverses parties du mécanisme. Toutes les matières qu'il traite sont d'un très-grand intérêt; mais pour qu'elles n'eussent rien laissé à désirer, il eût fallu que l'auteur eût à sa disposition tous les moyens nécessaires et de grandes sommes à consacrer aux expériences.

C'est l'avantage qu'ont eu MM. Watt et Boulton. Ils ont commencé par construire avec tout le soin possible une machine à vapeurs, suivant leur système; ils l'ont fait jouer avec toute la force dont elle était susceptible jusqu'à la rupture d'un des éléments de leur machine. Jugeant alors cet élément trop faible, ils l'ont remplacé par un plus fort; ils ont recommencé les expériences pour reconnaître quel serait le second, le troisième élément qui romprait successivement, et ils ont ainsi déterminé par expérience le degré de résistance qu'il convient de donner à toutes les parties d'une machine à vapeurs.

M. Watt le fils, poursuivant les recherches de son père, a fait des expériences d'un goût analogue. Il paraît que ses travaux ont eu le plus grand succès. Il vient de construire un bateau qui traîne à la remorque un vaisseau de 74, lège et lui fait faire cinq milles et demi à l'heure; il fait le trajet de Margate à Londres avec une vîtesse de huit à neuf milles par heure dans une eau calme. La force du bateau remorqueur est de soixante chevaux.

M. Gilbert, après les descriptions de plusieurs machines existantes, donne aussi le plan d'un bateau remorqueur, et il avait eu cette idée avant les expériences de M. Watt. Malheureusement dans les arts il ne suffit pas de concevoir.

« Quoique le mémoire laisse encore à désirer des recherches sur plusieurs points importants, cependant par le grand nombre de descriptions bien faites et de plans parfaitement dessinés, d'observations et de vues utiles et judicieuses qu'il contient, il sera pour les gens de l'art d'une lecture fort utile, et nous paraît digne de l'approbation de l'Académie. Nous pensons qu'on doit engager l'auteur à compléter les recherches qu'il a soumises à notre examen.»

Lunette construite par M. LEREBOURS; *commissaires. MM.* Bouvard, Burckhardt, Arago, *et* Mathieu, *rapporteur.*

L'objectif composé de deux verres a deux décimètres ou 7po 4li de diamètre, et près de 6 mètres de foyer. La lunette porte toute son ouverture; tous les rayons qu'elle reçoit, même ceux des bords, concourent à former au foyer l'image des objets. Depuis près de trois ans cette lunette est déposée à l'Observatoire, où elle a fréquemment été essayée sur différents astres. Enfin tout nouvellement elle vient d'être soumise à une nouvelle épreuve sur Jupiter et Saturne, avec un grossissement de 400 fois. La netteté des images, qui ne présentent aucune frange colorée qui soit sensible même sur les bords, et la grande quantité de lumière qui arrive au foyer, ont permis de voir distinctement des détails que l'on peut à peine soupçonner avec d'autres instruments.

« Les lunettes achromatiques d'une grande ouverture sont encore bien rares, parce qu'elles entraînent dans de grandes dépenses, et présentent de grandes difficultés dans l'exécution. L'Académie doit donc des éloges et des encouragements à l'habile artiste qui vient de nous enrichir de la belle lunette qui fait l'objet de ce rapport, et auquel nous sommes déja redevables de plusieurs instruments excellents. »

Observations météorologiques sur les circonstances d'un phénomène considéré comme preuve de la théorie des vents alisés; par M. MOREAU DE JONNÈS, *correspondant de l'Académie.*

On a supposé que des courants supérieurs se dirigent dans une direction opposée à celle des vents réguliers connus sous le nom de vents alisés. On a regardé comme une preuve de ces courants supérieurs quelques circonstances qui accompagnèrent, en 1812, l'erruption de la solfatare de l'île Saint-Vincent dans l'archipel des Antilles. Des matières projetées par ce volcan tombèrent comme une pluie abondante dans l'île de la Barbade, située à trente-trois lieues à l'ouest de Saint-Vincent; on a cru qu'elles n'avaient pu êtres portées à cette distance, dans une direction opposée à celle des vents alisés, que par des courants d'air supérieurs, et qu'on suppose se diriger en sens contraire.

Pour discuter cette opinion, en rectifiant les faits, M. de Jonnès commence par la description du cratère qui fut le centre de cette éruption volcanique, laquelle commença le 27 avril, et dura jusqu'au 30, sans qu'aucune matière parvînt aux îles voisines. Dans le courant de la nuit du 1^er^ mai on entendit à la Martinique et à la Guadeloupe, vers deux heures du matin, un bruit lointain qui se prolongea jusqu'au jour, et que l'on prit pour celui d'un combat naval; à Bridge-town de la Barbade, ce fut vers sept heures et demie du matin, que des nuages peu élevés remplirent l'atmosphère de ces éjections cineréiformes que la solfatare de Saint-Vincent avait vomies dans la nuit. Leur chute ne commença à la Martinique

H 2

qu'à une heure après midi, et à la Guadeloupe que vers le soir. On a supposé que les transports de ces matières n'avaient pu se faire dans la direction de la Barbade que par l'action de courants supérieurs aux vents alisés, parce que ceux-ci soufflent de l'est uniformément et sans interruption pendant les mois d'avril et de mai. On n'a point fait attention que les sables avaient été portés, non-seulement dans l'ouest jusqu'à la Barbade, mais encore à la Martinique et même à la Guadeloupe, qui sont situées à trente-six et soixante-quinze lieues dans le prolongement septentrional de la méridienne. Il faudrait donc admettre que les contre-courants qui ont opéré ce transport soufflaient simultanément dans deux directions qui se coupaient à angles droits; ou bien, en supposant qu'ils suivirent alternativement ces deux directions, il faudrait admettre aussi que ces vents supérieurs sont variables et irréguliers, ce que l'analogie ne permet pas de croire, puisqu'ils doivent être semblables aux brises alisées, qui ne soufflent jamais successivement de deux points distants entre eux de 90 degrés. M. de Jonnès calcule la hauteur probable à laquelle ont pu s'élever ces matières; souvent, dans ses excursions sur les montagnes les plus hautes de ces régions, il s'est trouvé à ces mêmes hauteurs, et à d'autres plus considérables, sans trouver jamais aucun indice de l'existence de ces contre-courants supérieurs aux vents alisés. Constamment il a retrouvé les mêmes brises de l'est qui règnent dans la région inférieure; la direction des nuages qu'il voyait au-dessus de lui, prouvait qu'à une élévation encore bien plus grande, toute la masse d'air éprouvait une impulsion identique; il a vu les arbres courbés uniformément vers l'ouest, inclinaison que l'action journalière des vents alisés leur donne uniformément. De ces considérations, l'auteur conclut que si des contre-courants existent, ce n'est qu'à une hauteur tellement considérable, qu'il est impossible qu'aucune force projectile y puisse faire parvenir quelque corps que ce soit. Enfin c'est par erreur que l'on s'est persuadé que, dans les mois d'avril et de mai, les vents alisés soufflent de l'est uniformément. Cette assertion est généralement vraie : mais il y a trouvé des exceptions très-remarquables; et le transport des sables volcaniques de Saint-Vincent à la Barbade a eu lieu par l'action variable des brises australes, qui ont porté presque simultanément ces éjections dans l'est et dans le nord à des distances de trente à soixante-quinze lieues. Nous avons à regret supprimé des détails intéressants et curieux, qu'on trouvera dans les Annales maritimes et coloniales de juillet 1819.

Prix de Statistique ; commissaires, MM. de Laplace, Lacepède, Fourier, Maurice, *et* Coquebert de Montbret, *rapporteur*.

L'Académie avait arrêté que ce rapport serait imprimé en entier et à part. On se proposait de le comprendre dans les distributions que, suivant l'usage, on devait faire à la séance publique qui eut lieu quelques jours après. En l'analysant un an plus tard, nous nous bornerons aux articles essentiels et qui offrent un intérêt durable.

La nouveauté du sujet de prix a paru exiger que la commission fît précéder son rapport de quelques considérations générales, propres à distinguer le concours dont il s'agit de ceux qui ont lieu ordinairement et dont l'objet est la solution d'une question unique qui est la même pour tous les concurrents, et de ceux encore où, ayant plus de liberté dans le choix de leur sujet, le concurrents doivent les prendre néanmoins dans les limites d'une seule science anciennement connue et bien définie. Ce dernier avantage n'appartient pas jusqu'à présent à la statistique dont le nom, quoique généralement adopté, n'offre qu'une idée vague et insuffisante. Le programme a fait voir en quoi elle diffère de l'économie politique, à laquelle elle se contente de fournir les lumières de l'observation et de l'expérience. Les statistiques ne doivent pas être grossies de l'histoire des temps passés et modernes, des jugements sur les personnes et sur les événements, de dissertations sur les antiquités, de détails biographiques ou purement littéraires. Lorsque cette séparation n'a pas été faite par l'auteur, la commission s'est imposé la loi de la faire elle-même ; elle n'a considéré dans un ouvrage de statistique que ce qui en portait le caractère. Elle n'a rencontré cette année qu'une faible partie des difficultés qui pourront se présenter à l'avenir. Il ne lui a été soumis que des travaux du genre topographique.

Le concours a offert, outre quelques productions moins importantes, cinq ouvrages considérables éminemment utiles et d'un mérite distingué.

Une statistique topographique est un ouvrage complexe, une collection de morceaux distincts, quoique liés par leur tendance vers un but commun. Les auteurs doivent être invités à les soigner tous également, et à ne céder jamais à l'attrait d'un goût dominant, de manière à multiplier les détails dans un chapitre sans examiner s'il s'en trouve une égale portion dans les autres..... L'Académie n'exigera pas qu'une statistique annonce dans son auteur des connaissances profondes sur chaque science en particulier ; elle ne demandera qu'une instruction étendue, variée et néanmoins solide... S'il lui arrive de remarquer quelques méprises sur des points de détail, tout en les redressant dans l'intérêt de la vérité, elle ne pensera pas qu'on ait dû dédaigner par cette raison l'ouvrage où ces taches légères se seraient rencontrées. De faibles erreurs de calcul ne seront pas non plus jugées avec rigueur, lorsque les auteurs se seraient montrés d'ailleurs soigneux et exercés... On préférera l'exactitude à des qualités plus brillantes... Aucune doctrine ne saurait reposer sur des faits négligemment observés, adoptés sans preuves et sans discussion.

La statistique d'un département entier est une entreprise trop considérable pour être bien exécutée par une seule personne... On est obligé dans un tel travail de s'en rapporter à un grand nombre de collaborateurs.

Ce sont là de graves difficultés ; elles iraient jusqu'à infirmer toutes les notions que la statistique a procurées, ce qui, sous prétexte de repousser l'erreur, priverait le public de beaucoup de vérités...

Un territoire moins étendu peut être visité par un seul homme, ou par une association d'hommes animés d'un même esprit. Là tout serait observé, scruté, comparé avec la plus extrême attention. Il pourrait résulter d'un semblable travail un ouvrage en quelque sorte *normal*, digne de servir de modèle aux productions du même genre. Le maréchal de Vauban ne dédaigna pas d'en donner un exemple en décrivant paroisse par paroisse l'élection de Vézelai. Une entreprise semblable, formée dans les mêmes lieux après plus d'un siècle, fournirait à l'histoire et à l'économie politique la plus belle et la plus heureuse des applications, en rendant évidents les progrès que la population, l'agriculture et la richesse publique n'ont pu manquer de faire depuis l'époque de ce recensement.

Les auteurs d'ouvrages d'ailleurs fort estimables se sont bornés à reproduire sous une nouvelle forme des matériaux dont le public était déja en possession. Les productions de ce genre ne seront pas assimilées à des ouvrages originaux qui ajoutent à la somme des connaissances acquises, et encore moins à ceux dont les auteurs ont recueilli directement et par eux-mêmes les matériaux qu'ils ont ensuite élaborés.

C'est un ouvrage sur les colonies que la France a recouvrées dans le Nouveau-Monde, qui a obtenu les suffrages unanimes de la commission. Il consiste en quatre cahiers in-folio manuscrits dont l'ensemble est intitulé : *Statistique des colonies françaises occidentales.* L'auteur est M. Moreau de Jonnès, correspondant de l'Académie. Cet ouvrage remplit une lacune fort importante, et sur un point qu'il est plus nécessaire que jamais de bien connaître. Il fournira au public une instruction solide et curieuse, et au commerce national d'utiles renseignements.

Deux autres ouvrages ont été présentés à l'Académie, qui ont laissé a la commission le vif regret qu'il n'y eût pas un autre prix qu'elle pût adjuger à un travail relatif à la *métropole.*

Le premier est la statistique du département de la Charente, par M. Quénot. Paris, Déterville, in-4° de 500 pages, avec une carte.

Le second est la description générale et statistique du département de l'Aude, par M. le baron Trouvé, ancien préfet de ce département. Paris, F. Didot, in-4° de 600 pages, avec cartes et gravures.

Deux autres ouvrages sont venus à la connaissance de la commission.

Le premier est une *Description du département de la Vendée*, par M. Cavoleau, ancien secrétaire-général. Nantes, in-4° de 344 pages;

Le second est une *Description du département du Tarn*, par M. Massol, ancien bibliothécaire de ce département; in-8° de 254 pages. Alby, Laurens, 1818.

Ces quatre ouvrages doivent trouver place dans la collection des Mémoires statistiques dont la réunion formera quelque jour la description complète de la France.

La commission ne peut faire jouir les auteurs que d'un seul genre d'encouragement, c'est de mentionner leurs ouvrages avec la distinction que méritent leur importance, leur étendue et les autres qualités qui sont propres à chacun d'eux. Mais, après avoir rempli ce devoir, elle invitera l'Académie à faire davantage, et à tâcher de procurer du moins à l'un de ces ouvrages une distinction qui réfléchira en même temps sur tous les autres. Elle propose en conséquence à l'Académie, de prier S. E. le ministre de l'intérieur, d'ajouter une seconde médaille au prix ordinaire de cette année; elle a pensé qu'il conviendrait de l'accorder à M. le baron Trouvé, pour les recherches qu'il a faites personnellement pendant quinze ans sur la statistique du département de l'Aude, dont l'administration lui était confiée; recherches dont les résultats composent le vaste et important ouvrage qu'il a publié. (Ce vœu de la Commission, adopté par l'Académie, a été réalisé par S. E. le ministre de l'intérieur, quelques jours après la séance publique du mois de mars 1819.)

Un ouvrage qui a paru à Valence, vers la fin de 1817, n'a pu être admis à concourir. Il a été composé d'après les matériaux recueillis par M. *Descorches de Sainte-Croix*, lorsqu'il administrait le département de la Drôme. C'est un in-8° de 370 pages. L'auteur est M. Delacroix, chef de bureau à la préfecture de la Drôme.

L'auteur s'y montre partout éminemment judicieux et bon critique.

La commission a jugé que si M. Delacroix recevait des encouragements qui le missent en état de développer davantage quelques parties de son travail, sa statistique de la Drôme pourrait devenir un modèle en ce genre.

Tableau des consommations et de l'industrie de Paris en 1817, par M. Bénoiston de Chateauneuf. *Commissaires, MM.* Maurice, *et* Fourier, *rapporteur.*

« Un des membres les plus illustres de l'ancienne Académie des sciences, M. Lavoisier, a traité cette même question il y a vingt-huit ans, dans un mémoire très-succinct. C'est le premier ouvrage de ce genre où l'on trouve réunis un aussi grand nombre de faits. Le tableau de l'industrie française publié dans le cours de cette année, et dont l'objet est beaucoup plus étendu, montre aussi dans tout son jour l'utilité des recherches statistiques. »

Paris contient 714000 habitants, au nombre desquels on en compte environ 25000 non domiciliés, militaires et voyageurs, nationaux ou étrangers. Le nombre moyen des naissances est de 21000 ; le rapport du nombre moyen des naissances des garçons et des filles est celui de 25 à 24 ; le nombre des feux ou ménages est 225000, et celui des habitations 26801. L'estimation des valeurs consommées par une population réunie sur un espace aussi borné, est l'objet spécial du Mémoire. Nous citerons quelques-uns des articles propres à fixer l'attention, et que l'on peut regarder comme constatés avec une exactitude suffisante.

La consommation du pain en une année est de 113,880,000k., ce qui ne donne pas tout-à-fait un demi-kilogramme par jour pour chaque personne, environ 14 onces et $\frac{1}{8}$ de l'ancien poids.

On peut estimer à un sixième de kilogramme par tête, et pour un jour, la consommation de viande. Il entre chaque année 70,000 bœufs, 9,000 vaches, 78,000 veaux, 340,000 moutons et 72 mille porcs. On consomme, de plus, 74 millions d'œufs, plus de 900,000 pigeons et de 1200,000 poulets.

Il se consomme annuellement dans Paris 870,000 hectolitres de vin, environ un tiers d'hectolitre pour chaque personne.

On peut évaluer à 1160,000 stères ou mètres cubes la consommation annuelle de bois de chauffage, ce qui donne un peu plus de cinq stères par feu, environ deux voies et demie.

Les commissaires remarquent à ce sujet que les procédés propres à diriger utilement l'usage de la chaleur, et surtout la distribution de l'air échauffé, sont encore peu répandus.

Ils commencent seulement à s'introduire dans les grands établissements publics; et il n'y a aucun doute qu'ils ne procurent un jour une économie précieuse. L'usage du charbon de terre est plus que quadruplé depuis vingt ans, et ce résultat doit être attribué principalement à l'accroissement remarquable que reçoit chaque année dans Paris l'industrie manufacturière.

L'auteur n'a pu comprendre dans son travail qu'un certain nombre d'objets principaux. Il fait lui-même remarquer l'imperfection inévitable de plusieurs de ces résultats; mais il a beaucoup augmenté le nombre des articles dont la connaissance doit le plus intéresser l'administration, et il les a évalués avec toute l'exactitude que l'on peut obtenir aujourd'hui en pareille matière.

Le Mémoire est terminé par un tableau comparatif des diverses consommations aux deux époques de 1789 et de 1817.

« Nous croyons devoir proposer à l'Académie d'accorder son approbation au Mémoire de M. Bénoiston de Châteauneuf, et d'inviter l'auteur à se livrer avec persévérance aux recherches qu'il a entreprises. Elles présentent dans leur état actuel un grand nombre de résultats utiles dignes de fixer l'attention de toutes les personnes qui s'intéressent aux progrès de l'administration et des sciences économiques. »

Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, par M. Dulac; *commissaires, MM.* Poisson, Girard, *et* Cauchy, *rapporteur.*

L'auteur a particulièrement examiné ce qui se passe au moment ou des pièces de fer commencent à fléchir sous l'action des forces auxquelles elle sont soumises. L'expérience l'a conduit à plusieurs résultats importants et semblables en divers points à ceux que d'autres physiciens ont obtenus pour la résistance des bois au commencement de leur flexion. Sur quoi il est juste d'observer que le Mémoire de M. Dulac, rédigé en 1812 et présenté l'année suivante au conseil des ponts-et-chaussées, est antérieur à ceux de plusieurs d'entre ces physiciens. Partout l'auteur a pris le soin de comparer ce que lui donnaient ses expériences à ce qui se déduit des théories connues. Le simple exposé des expériences, de leur résultat et de la comparaison avec les théorèmes adoptés, nous forcerait d'excéder les bornes que nous sommes forcés de donner à notre extrait; et nous dirons simplement, avec les commissaires, que ce travail a mérité l'approbation de l'Académie, et qu'ils en auraient proposé l'insertion au Recueil des savants étrangers, si l'auteur ne le destinait à faire partie d'un ouvrage qu'il a l'intention de publier incessamment sur cette matière.

Essai sur l'art de la corderie, par M. Bernard Duboul; *commissaires, MM.* Sané, Girard, Dupin, *et* Molard, *rapporteur.*

Déja M. Duboul était avantageusement connu de l'Académie par un mémoire dont il a été rendu compte dans l'Histoire de 1818. Encouragé par ce dernier rapport, M. Duboul annonça que les moyens qu'il avait décrits n'étaient qu'un simple agent d'exécution et un accessoire à un essai sur l'art de la corderie, pour l'impression duquel son Exc. le ministre de l'intérieur lui accordait 1200 francs; mais qu'avant de disposer son travail pour cette impression, il désirait que l'Académie nommât une commission pour l'examiner. Il annonça quatre-vingt-cinq tableaux, dans lesquels il avait classé numériquement les proportions à donner aux fils. C'est ce travail qui a fixé particulièrement l'attention des commissaires. Il commence par des observations instructives qui ont pour but de mettre à portée d'apprécier les diverses qualités des chanvres, de les assortir et les employer de la manière la plus avantageuse, enfin de les faire espader et peigner avec le moins de déchet possible.

A défaut d'une théorie générale qui puisse s'appliquer à tous les cas qui peuvent se présenter dans la pratique de l'art, M. Duboul s'en est créé une qu'il a toujours trouvée d'accord avec l'expérience, et d'après laquelle il a tracé numériquement dans cent quatre-vingts tableaux les règles à suivre pour toutes les opérations de la corderie.

Enfin, après avoir tracé des méthodes à la portée de l'intelligence ordinaire, qui indiquent la grosseur, la longueur et les différents noms de 859 pièces des cordes nécessaires au gréement des vaisseaux de 120 pièces de canon, M. Duboul traite des cordages refaits.

« On sait trop bien que les hommes n'atteindront jamais à la perfection; mais ils ne se lasseront jamais d'y tendre; et, dans cette carrière sans terme, ceux qui rassemblent le plus de moyens de perfectibilité seront éternellement les premiers. L'un des plus puissants est la publication des procédés théoriques et pratiques des arts. On doit donc savoir gré à M. Duboul de faire connaître les résultats d'une longue et heureuse pratique. Cette publication semble d'autant plus utile, qu'en répandant les procédés indiqués par l'auteur, on aura plus d'occasions de s'assurer, par des expériences comparatives, de leurs avantages sur les procédés de pratique actuels.

Machine à fabriquer le papier, établie à Paris par MM. Porlier *et* Durieux; *commissaires, MM.* Huzard, *et* Molard, *rapporteur.*

« On sait que les machines à fabriquer le papier remplacent l'*ouvreur*, le *coucheur*, la presse et autres accessoires employés par les anciens procédés; elles n'exigent, pour transformer la pâte en papier, qu'un simple mouvement de rotation continu dans le même sens, et aucun apprentissage de la part des ouvriers employés à surveiller le travail de la machine.

« C'est à M. Robert d'Essonne que les arts sont redevables de la première machine à fabriquer le papier sur une grande largeur et d'une longueur indéfinie, sans le secours des ouvriers.

« Celle de MM. Porlier et Durieux n'est encore établie qu'en modèle, réduit à-peu-près au quart de la grandeur qu'elle doit avoir pour en obtenir des papiers dans les dimensions d'usage. Néanmoins ce modèle est disposé de manière à pouvoir fabriquer à froid un papier vergeure ou vélin à volonté, de 2 décimètres de largeur et d'une longueur indéfinie, semblable à l'échantillon mis sous les yeux de l'Académie. Cet échantillon, qui a 24 mètres de longueur, a été fabriqué en présence des commissaires dans l'espace de six minutes et au moyen de deux ouvriers; ce qui produit sept feuilles de grand raisin du poids de 40 livres la rame, et correspondrait à l'ouvrage de deux cuves ou au double de ce que trois ouvriers peuvent faire dans le même temps.

« MM. Porlier et Durieux préfèrent la pâte de chiffon *vert* ou *non pourri*, qui s'étend mieux sur la forme sans fin destinée à retenir les filaments à la surface, tandis que l'eau s'en échappe à travers son tissu. Le papier qui provient de cette pâte est plus fort et plus beau que celui que l'on fabrique avec des matières altérées dans les pourrissoirs.

« Ces artistes sont les premiers, à notre connaissance, qui soient parvenus à fabriquer par machine du papier vergeure, d'une longueur indéfinie, lequel est préférable pour l'écriture au papier vélin, parce qu'il retient mieux l'encre et boit moins que le papier vélin. La machine est simple, n'exige que peu de place... Ce premier essai, qui atteste la difficulté vaincue par des moyens qui nous ont paru nouveaux... nous paraît digne des éloges de l'Académie. »

Essai sur la musique, considérée sous le rapport de son influence sur l'homme et sous celui de son application comme moyen médical, par M. FOURNIER PESLAY. *Commissaires, MM.* Dumeril, *et* Lacépède, *rapporteur.*

M. Fournier a recherché avec beaucoup de soin dans l'histoire et dans les auteurs les plus célèbres les faits relatifs à cette action de la musique dont il voulait reconnaître l'influence. Après avoir exposé ces faits en musicien familiarisé avec les chefs-d'œuvre des grands maîtres, il a distingué avec sagacité diverses manières dont la musique avait pû agir sur le moral et le physique de l'homme, et réuni aux observations d'un amateur sensible aux beautés de l'art les réflexions d'un médecin recommandable par ses connaissances et son expérience... Nous croyons en conséquence devoir proposer à l'Académie d'approuver le travail de M. Fournier, et de l'engager à donner à ses recherches toute l'étendue que peut demander l'importance du sujet.

Mémoire relatif à la construction des instruments à cordes et à archet, par M. SAVART, D. M. *Commissaires, MM.* Haüy, Charles, de Prony, *et* Biot, *rapporteur; et MM.* Cherubini, Catel, Berton, *et* le Sueur, *de l'Académie des Beaux-Arts.*

Les instruments à cordes sont composés de deux éléments qui contribuent à former les sons; l'un de ces éléments, ce sont les cordes mêmes que l'on ébranle en les frottant avec un archet; l'autre consiste en un système de tablettes de bois minces, sèches, élastiques, tantôt assemblées en forme de caisse vide, tantôt servant simplement de supports aux cordes qui, dans tous les cas, y sont attachées. Lorsqu'on fait vibrer les cordes, on fait vibrer les tables; et ainsi les mouvements que leurs vibrations excitent dans l'air doivent se mêler à ceux que les cordes font naître, et le son de l'instrument se compose de ces deux effets. La manière dont ces effets se produisent n'avait pas été jusqu'ici nettement analysée par l'expérience; on ne savait pas bien par quel mode de transmission les vibrations, primitivement imprimées aux cordes, se communiquent aux tables, ni l'espèce de mouvement qu'elles exécutent, ni quels sons elles en tirent, ni comment ces sons se marient à ceux des cordes mêmes. Un bon travail sur les instruments à cordes devait commencer par l'analyse de ces divers points essentiels à leur théorie, et c'est ainsi que M. Savart a procédé. Il a reconnu d'abord qu'une plaque métallique, placée sous le chevalet, et séparée de la tablette de l'instrument par deux petits tasseaux de bois ou de liége, entre tout entière en mouvement sous l'influence des pulsations qu'elle reçoit de ce corps; ce qui montre avec évidence le mode d'ébranlement que les tables sonores des instruments de musique reçoivent de l'influence des cordes qui y sont attachées. Mais ces tables n'ont pas, dans tous leurs points, une constitution uniforme et une élasticité constante comme celle des tables métalliques. L'élasticité dans le sens transversal n'est pas la même que dans le sens longitudinal.

Les tables sonores peuvent aussi se mettre en mouvement les unes les autres, et se communiquer leurs vibrations, soit par un contact immédiat, soit par transmission à travers une tige ligneuse. Cette tige est ce qu'on appelle l'*ame* du violon. Le mouvement est transmis aussi, en partie, par les éclisses de bois interposées entre les deux tables, et qui forment le contour de l'instrument. Il l'est encore par l'air contenu dans la caisse; mais de toutes ces transmissions celle qui s'opère par l'ame est la plus efficace de beaucoup. M. Savart pense que cette transmission se fait par la propagation d'ondulations longitudinales, excitées à l'une des extrémités de la tige par celle des deux plaques que l'on ébranle immédiatement.

La transmission des mouvements vibratoires par les ondulations longitudinales et le changement de ces ondulations en vibrations transversales est un fait très-digne d'attention, soit en lui-même, soit par la fréquence jusques ici trop peu soupçonnée de ses applications.

Après avoir déterminé, par des expériences décisives, ce mode de transmission, M. Savart a fait l'application de ces principes à la construction des instruments à cordes, et pour exemple, il a choisi le violon; il s'est proposé de chercher quelle disposition, quelle coupe et quelle forme de surface devaient être les plus convenables pour donner au violon les qualités que l'on regarde comme les plus précieuses, la pureté des sons, leur égalité et la facilité de vibration qui les fait naître instantanément sous les doigts de l'artiste. Pour obtenir ces divers avantages, M. Savart a construit la caisse de son violon avec des tables planes, auxquelles il donne une légère dégradation d'épaisseur, à partir de l'axe où l'ébranlement est excité par le contact du chevalet. Au lieu d'une ligne au plus d'épaisseur que l'on donne aux parties les plus fortes des tables des violons ordinaires, il a pu donner à ses tables trois lignes moins un quart dans l'axe et au bord encore plus d'une ligne; et avec ce degré de force qui assure leur durée, elles ont encore plus de liberté de vibrations que les tables ordinaires.

Le violon de M. Savart a la longueur du violon ordinaire; la forme est celle d'un trapèze dont le plus petit côté est près du manche. Il n'a pas d'échancrures latérales comme les violons ordinaires. L'élévation du chevalet est calculée de manière que l'archet trouve une place suffisante pour passer isolément sur chaque corde et plus encore pour passer sur la dernière. Les éclisses sont des bandes de bois planes, qui conservent ainsi toute la rectitude, toute l'élasticité et la régularité de leurs fibres; qualités qu'il faut nécessairement sacrifier pour les plier à suivre le contour curviligne du violon ordinaire. Il a pu donner à ces bandes plus d'épaisseur qu'on ne le fait de coutume.

Pour mettre la table supérieure en état de résister à la pression exercée par les cordes, on la fortifie par-dessous au moyen d'une barre de bois dirigée dans le sens de la longueur de l'instrument : c'est ce qu'on appelle *la barre* d'harmonie. M. Savart la place dans l'axe de la table, afin de conserver aux deux moitiés de cette table la plus parfaite symétrie d'élasticité. Il s'est assuré que l'ame n'est pas du tout destinée à soutenir la table, mais uniquement à transmettre à la table inférieure le mouvement des vibrations de la table supérieure.

Il a aussi changé la forme des ouvertures de la table supérieure. Au lieu de leur donner la forme d'un *f*, il leur a donné celle d'un rectangle dont la longueur est dirigée dans le sens des fibres ligneuses. Il coupe ainsi un bien moindre nombre de ces fibres et en affaiblit moins l'élasticité. Il montre qu'un des usages de ces ouvertures consiste à renforcer le son de l'instrument par la communication qu'elles établissent entre l'air du dedans et celui du dehors ; enfin, avant d'assembler les plaques, pour en former la caisse, il a tout récemment imaginé de les faire résonner séparément et de modifier leur épaisseur, jusqu'à ce qu'elles rendent exactement le même son.

Après avoir théoriquement analysé toutes les innovations imaginées par M. Savart, les commissaires ont invité M. Lefebvre, chef d'orchestre du théâtre Feydeau, à vouloir bien faire devant eux l'essai du nouveau violon. On y a remarqué une grande pureté de son jointe à l'égalité la plus parfaite. Entendu de près, il paraissait avoir un peu moins d'éclat que celui dont M. Lefebvre se sert habituellement; à une distance plus grande, ils se sont égalés si complètement qu'on les confondait l'un avec l'autre; ou si l'on reconnaissait le nouveau violon, c'était par un peu plus de suavité dans les sons.

L'opinion unanime a été que le nouveau violon pouvait passer pour un violon excellent; or, comme sa construction ne renferme rien d'arbitraire, rien qui dépende du hasard, un luthier habile pourra encore ajouter à ses qualités par un bon choix des bois et par le fini de l'exécution. Mais, sans atteindre ce degré, l'ouvrier le plus ordinaire fera encore ainsi, et fera, à coup sûr, un très-bon violon pour un prix extrêmement modique, parce que l'égalité et la beauté des sons dépendent uniquement des principes théoriques sur lesquels l'instrument est établi.

M. Savart explique, d'une manière fort satisfaisante, pourquoi son violon, entendu de près, doit avoir un peu moins d'éclat. Le défaut d'espace nous empêche d'insérer ici son explication, comme il nous a empêchés d'entrer dans le détail de ses expériences. Voici la conclusion des commissaires.

« L'auteur est ainsi arrivé à découvrir les principes dont dépendent les plus belles qualités des instruments à cordes, et il les a réalisés en les faisant servir à la construction d'un violon nouveau dont les qualités peuvent être considérées comme une excellente confirmation de tous ses résultats. Nous croyons que ce travail, rempli d'invention et de sagacité, mérite l'approbation des deux Académies, et qu'il est très-digne d'être imprimé dans le recueil des savants étrangers.

Ptolémée de M. l'abbé HALMA.

Ce troisième volume contient: la table chronologique des règnes prolongée jusqu'à la prise de Constantinople par les Turcs ; les apparitions des fixes de Ptolémée, des fragments de Géminus et de Cléomède, traduits pour la première fois du grec en français; les recherches historiques de M. Ideler sur les observations astronomiques des anciens, traduites de l'allemand. Le tout est précédé d'un discours préliminaire, et de deux dissertations sur la réduction des années et des mois des anciens à la forme des nôtres, pour servir à l'intelligence de l'édition grecque et française de l'Almageste.

Parmi les choses curieuses que l'on rencontre dans cette collection, nous indiquerons les notes sur l'observatoire du temple de Bélus, et la figure de la ruine que l'on croit un reste de cette fameuse tour; la copie fidèle du canon pascal de S. Hippolyte, en grec; la médaille frappée en 1582 pour la réformation du calendrier : et le dessin du gnomon de Saint-Sulpice, construit en 1743, sous la direction de Lemonnier; le tableau synoptique des mois des Romains, des Grecs et des Alexandrins, et celui de la chronologie astronomique de Ptolémée. De tout ce que le titre ne promet pas, rien ne nous a paru plus neuf et plus intéressant que le Mémoire de M. Ideler sur les formes de l'année julienne, usitées chez les Orientaux, lu en séance publique à l'Académie royale de Prusse le 5 juin 1817, où l'on trouve d'amples détails sur le calendrier turc, ou sur leur Rusname *(livre des jours)*, et enrichi de tableaux instructifs par le traducteur.

Si les deux premiers volumes de M. Halma devaient intéresser particulièrement les astronomes, le troisième, sans leur être plus indifférent, conviendra plus particulièrement encore aux historiens, aux archéologues et aux chronologistes.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1819.

PARTIE PHYSIQUE,

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

CHIMIE.

LE séjour que M. Berzélius, savant chimiste suédois, correspondant de notre Académie, et nouvellement nommé secrétaire-perpétuel de celle de Stockholm, a fait à Paris pendant une partie de cette année, nous a valu une traduction française de son intéressant ouvrage *sur la Théorie des proportions chimiques et sur l'influence chimique de l'électricité*, ouvrage où il cherche à fixer les idées sur les deux points fondamentaux de la doctrine chimique, savoir, la disposition relative des particules élémentaires des corps, lorsqu'elles sont arrivées à une combinaison fixe, et la force impulsive qui les conduit à cet état, ou qui les contraint à en changer et à se réunir en combinaison nouvelles, soit entre elles, soit avec des particules d'autres espèces.

L'auteur part des lois récemment reconnues par les chimistes sur les proportions d'après lesquelles se font les combinaisons diverses des mêmes substances.

Il était si naturel de croire que l'identité dans les qualités chimiques de chaque substance composée, tient à l'identité d'espèce et de proportion des éléments qui la composent, que cette opinion avait été adoptée bien avant que l'on pût en donner des preuves rigoureuses. On fut même long-temps sans chercher ces preuves, parce que l'on se contentait de cet aperçu vague et général.

Cependant les expériences de Bergman sur la précipitation des métaux les uns sur les autres, celles de Wenzel, et surtout celles de Richter sur la décomposition mutuelle de différents sels par double affinité, commencèrent à donner de la précision à cette manière de concevoir la composition des corps; elles prouvèrent que certains oxides, que certains sels neutres n'arrivaient à un état fixe et caractérisé, que par des proportions fixes de leurs parties constituantes; mais un peu plus tard, la plupart des chimistes, exclusivement occupés des discussions que la nouvelle théorie de la combustion avait occasionnées, négligèrent ce genre de recherches.

M. Berthollet fut le premier parmi nous qui s'en occupa sérieusement dans son célèbre ouvrage de la *Statique chimique*. Il reconnut bien le principe qui résultait des expériences de Wenzel et de Richter, que les acides et les bases salifiables possèdent, chacun dans son espèce, des capacités constantes de saturation, et que si une base (par exemple sature deux fois plus d'un certain acide que ne fait une autre base, elle saturera aussi deux fois plus de tout autre acide, et réciproquement. Mais M. Berthollet ne pensa point que deux substances dussent toujours s'unir d'après des proportions fixes: Si ces proportions sont fixes dans certains cas, disait-il, c'est qu'il survient des circonstances qui interrompent l'action chimique, telles que la tendance à se solidifier ou à prendre la forme gazeuse; hors de là, cette action continue à combiner les corps, et rien n'empêche qu'elle ne les tienne unis dans toutes les proportions imaginables.

Il s'éleva, à ce sujet, une discussion animée entre ce savant chimiste et un autre de nos confrères, M. Proust. Ce dernier soutint qu'il n'en est ainsi que pour les simples solutions, telles que celles d'un sel neutre dans l'eau; mais que les vraies combinaisons entre deux mêmes substances n'ont lieu que dans des proportions fixes: que si le contraire semble quelquefois résulter des analyses, l'illusion vient d'un mélange qui se fait de l'excédant de l'un des éléments avec la masse véritablement combinée; mélange très-différent d'une combinaison proprement dite, et qui s'en laisse aisément distinguer. Il alla même jusqu'à soutenir que chaque métal ne pouvait se combiner qu'en deux proportions avec l'oxigène; proposition trop exclusive, et qui fut combattue, en même temps que celle de M. Berthollet, par M. Thénard.

Les idées de M. Dalton sur la manière dont les molécules peuvent se combiner, ayant excité en Angleterre à des re-

L 2

cherches encore plus précises, les belles expériences de M. Wollaston établirent, en quelque sorte d'une manière définitive, non-seulement que les diverses combinaisons caractérisées entre des substances données ont lieu dans des proportions fixes, mais que les quantités de l'une, qui peuvent s'unir successivement à l'autre pour former ces combinaisons, se laissent exprimer par des nombres entiers et par des nombres assez petits.

Peu de temps après, M. Gay-Lussac prouva que tous les gaz se combinent en volume dans des rapports simples, et de telle manière, que leur contraction apparente est aussi en rapport simple avec leur volume primitif. Si les volumes sont en rapports simples, il en est de même des poids. D'une autre part, comme on peut gazéifier plusieurs liquides et plusieurs solides, et qu'on les gazéifierait tous en les exposant à une chaleur assez forte, il est tout naturel de penser que les lois de composition s'appliquent aussi à ces sortes de corps. Ainsi, de la découverte de M. Gay-Lussac, l'on pourrait conclure toute cette doctrine des proportions multiples.

M. Berzélius, qui a beaucoup contribué par ses propres expériences à augmenter le nombre des faits sur lesquels repose maintenant cette doctrine, a cherché, dans l'ouvrage dont nous rendons compte, à en conclure une théorie, ou, ce qui revient au même, à les représenter par une théorie: car, dans ces matières, les théories ne peuvent être que la représentation des faits recueillis.

Adoptant à cet effet le langage de la philosophie corpusculaire, il suppose les substances homogènes formées d'atomes ou de particules de matière, non pas, sans doute, absolument ou métaphysiquement indivisibles, mais sur lesquelles aucune force mécanique ne pourrait produire de division ultérieure.

Lorsque les forces chimiques sont également impuissantes, l'atome est ce que M. Berzélius appelle *simple;* ce qui veut dire que c'est non-seulement une particule de matière insécable, intriturable, mais encore indécomposable pour nous dans toute l'étendue du mot. Des atomes chimiquement simples, mais d'espèces diverses, en se combinant ensemble, forment des atomes composés.

Dans le règne inorganique, le premier ordre de composition ne résulte que de l'union d'atomes de deux espèces; dans le règne organique, au contraire, il y en a toujours au moins trois. Les atomes composés du premier ordre s'unissent, à leur tour, en atomes composés du second, et ceux-ci en atomes du troisième et même du quatrième; mais la tendance des atomes à s'unir diminue à mesure que leur composition augmente. Il lui faut même, pour continuer d'agir, passé un certain degré de composition, des circonstances dont l'homme n'est pas le maître; et, bien que la nature ait formé autrefois et forme peut-être encore dans les entrailles du globe des minéraux d'une composition extrêmement compliquée, et cependant chimiquement homogènes, nous ne sommes en état de rien produire de semblable dans les opérations rapides de nos laboratoires.

On comprend que cette manière de se représenter les éléments des corps, ces atomes divers, supposés d'ailleurs, chacun dans leur espèce, de figures et de grandeurs semblables, se groupant deux à deux, trois à trois, en un mot, formant des réunions dans lesquelles ils entrent en nombres déterminés par l'espace qu'ils peuvent occuper d'après leur figure, s'accorde assez bien avec la règle des proportions multiples, et en donne même une sorte d'explication générale; mais on comprend aussi que la règle des proportions multiples elle-même, et, par conséquent, la théorie qui s'y rapporte, dépend de la détermination de l'atome simple, laquelle ne peut avoir lieu sans quelque mélange d'hypothèse. En effet, on prend pour base de cette détermination celle de toutes les combinaisons connues où l'élément dont on veut déterminer l'atome simple existe dans la moindre qualité relative; et l'on trouve généralement alors que les quantités additionnelles de cette substance qui produisent des composés fixes, ont lieu d'après la règle des multiples par nombres entiers. Dans quelques cas rares, où l'on rencontre des nombres fractionnaires, on est obligé, pour ne pas faire d'exception à la règle, d'admettre qu'il existe des combinaisons inconnues, où la substance fractionnaire se trouve en quantité encore plus petite que dans aucune de celles qu'on connaît. On établit ainsi un atome hypothétique dont les diverses combinaisons fixes rentrent en effet alors dans les multiples par nombres entiers. Parmi les combinaisons que le gaz azote forme avec l'oxigène, par exemple, il y en a, telles que l'acide nitreux et l'acide nitrique, où il entre pour $1\frac{1}{2}$ et $2\frac{1}{2}$; mais si l'azote était un corps composé, qui contînt déja moitié de son volume d'oxigène, ces nombres fractionnaires se changeraient dans les nombres entiers 4 et 6. Or, pour ce cas particulier, on est bien autorisé, à beaucoup d'égards, à admettre cette composition: car plusieurs autres expériences, et nommément celles par lesquelles on décompose l'ammoniaque au moyen de la pile galvanique, semblent annoncer que l'azote est, comme les alcalis fixes, un oxide métallique.

Du moment où l'on est convenu de la combinaison dans laquelle on doit trouver l'atome simple de chaque substance, et en admettant qu'ils sont tous de même volume, il est aisé de déterminer la pesanteur relative des atomes de chaque espèce, et même celle des atomes composés.

M. Berzélius en a dressé une table, où il prend pour unité l'atome d'oxigène, et dans le langage de laquelle il ne lui est pas difficile de traduire toutes les analyses connues. Presque partout il trouve alors des confirmations de la règle des proportions multiples.

Dans le reste de son livre, M. Berzélius cherche à se rendre compte des causes qui rapprochent les atomes ou qui les séparent, c'est-à-dire qu'il essaie de remonter au principe même de l'action chimique.

Il n'est personne aujourd'hui qui ne sache que toute la chimie se laisse ramener aux affinités, dont la plus puissante, la plus importante, est celle qui produit la combustion. Chacun sait également que la théorie de Lavoisier, qui domine depuis trente ans, attribue toute combustion à une combinaison de l'oxigène avec les corps; et la chaleur qui s'y produit, au dégagement du calorique latent qui maintenait cet oxigène à l'état de gaz avant sa combinaison: expression qui, pour être parfaitement juste, exigerait que le produit de la combinaison eût perdu précisément autant de calorique latent qu'il s'en serait manifesté sous forme libre.

Or, il s'en faut de beaucoup que l'expérience soit conforme à ce calcul.

Dans plusieurs combustions, la chaleur qui se manifeste et celle qui reste latente dans le produit de la combustion, forment ensemble une quantité très-supérieure à celle que contenaient et l'oxigène et le corps brûlé. Il arrive même quelquefois, comme dans la combustion du gaz hydrogène, que le produit de la combustion (c'est-à-dire l'eau) contient à lui seul presque le double du calorique latent que possédaient à-la-fois les deux gaz dont l'union la compose. Cette combustion, d'après l'explication reçue, aurait donc dû produire du froid; et cependant chacun sait qu'elle développe une immense quantité de chaleur.

M. Berzélius rapproche ces phénomènes d'une multitude d'autres dans lesquels une combinaison chimique quelconque produit une chaleur considérable, sans qu'il y ait fixation d'aucun gaz, ni aucun changement d'état, ou aucune autre des causes que l'on reconnaît aujourd'hui comme propres à mettre en liberté quelques parties du calorique latent. La magnésie, par exemple, en s'unissant à l'acide sulfurique concentré, s'échauffe souvent au rouge; l'union du soufre avec les métaux produit du feu, aussi-bien que celle des métaux et que celle du soufre lui-même avec l'oxigène.

La théorie de Lavoisier admettait aussi l'oxigénation comme la cause générale de la production des acides; et à ce sujet, M. Berzélius rappelle ce que beaucoup d'expériences prouvent maintenant, que l'oxigénation non-seulement n'est pas nécessaire pour produire des acides, mais qu'avec un grand nombre de corps elle donne, au lieu d'acides, des bases salifiables; qu'avec un seul et même corps elle peut donner, soit un acide, soit une base, selon la quantité d'oxigène qui se fixe.

On ne peut donc se dispenser, selon lui, de rechercher, soit pour la production de la chaleur dans les expériences de chimie, soit pour l'acidité, des causes plus générales et d'un ordre plus élevé que celles qui ne tiendraient qu'à la fixation de l'oxigène; causes dans la dépendance desquelles les combustions et les acidifications par l'oxigène retomberaient elles-mêmes comme des cas particuliers.

C'est par la découverte de l'action chimique de l'électricité, découverte à laquelle M. Berzélius a eu lui-même tant de part, qu'il croit avoir été conduit à reconnaître ces causes. La pile galvanique résout, comme on sait, toute combinaison chimique en ses éléments, en repoussant l'un d'eux vers le pôle positif et l'autre vers le pôle opposé. L'oxigène, les acides, les corps qui agissent comme eux, vont se dégager vers le pôle positif; c'est le pôle négatif qui les repousse : ils se comportent donc, au moment où ils se dégagent, comme s'ils étaient électrisés négativement. M. Berzélius appelle ces substances électro-négatives. C'est l'inverse pour l'hydrogène, pour les alcalis, pour les bases salifiables, que M. Berzélius nomme *électro-positives*. Assez généralement, ces effets se marquent d'autant mieux dans chaque substance, que ses affinités sont plus énergiques dans le sens de la classe à laquelle elle appartient; et comme un même oxide peut jouer alternativement le rôle d'acide ou d'alcali, selon les corps à l'action desquels on l'expose; de même une substance peut être électro-positive par rapport à une autre, et électro-négative par rapport à une troisième. L'oxigène, dont les affinités sont si générales et si fortes, est aussi le corps dont la qualité électro-chimique est le plus marquée; et il se montre électro-négatif par rapport à tous les autres corps.

Pour expliquer cette disposition constante à prendre un caractère électrique déterminé, M. Berzélius a recours à un phénomène observé il y a quelque temps par M. Erman, et que l'on peut appeler une partialité électrique. Il arrive quelquefois que la polarisation de l'électricité se fait d'une manière inégale, et que l'un des pôles l'emporte sur l'autre.

C'est de cette supériorité d'un pôle sur l'autre dans les molécules, de cette unipolarité, comme la nomme M. Berzélius, que dépendrait, et leur manière de se comporter par rapport à la pile, et leur tendance à s'unir entre elles, c'est-à-dire leur action chimique.

Ainsi la combinaison, ou, en d'autres termes, la neutralisation mutuelle des agents chimiques, ne serait pas seulement analogue, ressemblante à celle des deux électricités: selon M. Berzélius, elle en serait un effet direct; la chaleur, l'ignition que la combinaison produit, seraient de même nature que celles que produisent l'éclair ou la commotion électrique, et ce qu'on appelle affinité chimique plus forte ne serait qu'une intensité plus grande de polarisation.

Dans les corps oxigénés, le caractère électro-chimique dépend d'ordinaire du radical, et non pas de l'oxigène; et voilà pourquoi l'oxigénation ne produit pas nécessairement des acides; voilà pourquoi même, avec certains radicaux, tels que ceux de la potasse et de la soude, le plus haut degré d'oxigénation n'arriverait pas jusqu'à l'acidité. Enfin voilà pourquoi il existe des combinaisons très-intimes de substances qui se comportent réciproquement, comme feraient des acides et des bases, bien que ni l'une ni l'autre ne montre séparément les qualités ordinaires d'un acide.

Il y a dans cette manière de voir quelque ressemblance avec les idées que feu Winterl, chimiste hongrois, avait mises en avant vers le commencement de ce siècle, dans ses *Prolusiones chemiæ seculi XIX;* mais Winterl ne s'appuyait que d'expériences fausses, ou de spéculations métaphysiques vagues, et qui n'étaient pas de nature à lui concilier les suffrages des hommes accoutumés à une marche rigoureuse dans les sciences.

M. Berzélius a établi sur les principes dont nous venons de rendre compte, une classification des corps chimiques, à laquelle il a adapté en même temps une nomenclature perfectionnée. Ce travail, assez facile pour les corps simples, ne l'était pas autant pour les corps composés.

On sait que la nomenclature chimique française, devenue aujourd'hui à-peu-près universelle, représentait la composition des corps telle qu'on la supposait à l'époque où l'on en créa les dénominations. Depuis lors, les découvertes chimiques ont apporté de grands changements aux idées reçues. Des corps que l'on croyait simples se sont trouvés composés; d'autres, dans lesquels on ne distinguait entre les éléments qu'une ou deux variations de proportions, que l'on désignait par la terminaison, ont offert des proportions nombreuses, toutes très-caractérisées, très-fixes, dignes de porter des noms particuliers: ainsi les substantifs et les terminaisons adjectives ont dû être multipliés. Il a fallu trouver pour les sels des dénominations qui indiquassent non-seulement l'espèce de leur acide et de leur base, le degré d'oxigénation de l'un et de l'autre, mais encore leur proportion mutuelle. Des moyens semblables ont dû être imaginés pour les combinaisons des corps combustibles.

M. Thomson avait déja entrepris un semblable travail; M. Berzélius en présente un nouvel essai, qui lui paraît plus méthodique : il fait remarquer cependant que lorsque le nombre respectif des atomes de chaque élément sera connu, on y trouvera pour les composés un principe de nomenclature encore plus simple et plus rigoureux.

M. Berzélius a fait une application plus importante encore de ses principes à la classification des minéraux.

La silice et différents oxides une fois considérés comme participant au rôle des acides, toutes les combinaisons terreuses viennent comme d'elles-mêmes se ranger dans la classe des sels; et, d'un autre côté, les lois des proportions multiples viennent donner une sorte de régulateur et de pierre de touche aux analyses minéralogiques, en aidant à distinguer les parties essentielles d'un minéral, des melanges accidentels qui troublent sa pureté.

M. Berzélius divise les substances qui composent la masse du globe, en celles qui sont formées, suivant la loi de la nature inorganique, de l'union de plusieurs composés binaires, et en celles qui se forment de composés ternaires, suivant la loi de la nature organique. Toutes les circonstances accessoires semblent, en effet, prouver que les substances de cette dernière classe doivent leur origine à la vie.

La liste des substances chimiquement simples comprend trois ordres : l'oxigène, les corps combustibles non métalliques, au nombre de huit; et les métaux, actuellement au nombre de quarante-deux, y compris ceux des alcalis et ceux des terres.

M. Berzélius range toutes ces substances d'après leur degré d'intensité électro-négative, en sorte que chacune d'elles est électro-négative par rapport à celles qui sont au-dessous, et électro-positive par rapport à celles qui sont au-dessus dans la liste. Elles deviennent les chefs d'autant de familles minéralogiques, que l'on peut former, soit en prenant toutes les combinaisons dans lesquelles celle que l'on fait chef de famille joue le rôle de base, c'est-à-dire où elle est électro-positive, ou celles dans lesquelles elle joue le rôle d'acide, ou électro-négatif.

L'auteur a fait connaître sa méthode dans un second ouvrage, qu'il a également fait traduire en français pendant son séjour à Paris, sous le titre de *Nouveau système de minéralogie;* et il y donne, outre ses vues générales et son tableau méthodique, quelques échantillons de la manière dont il se propose de traiter chacune de ses familles.

De pareils écrits, quelque peu étendus qu'ils soient, prennent une grande importance lorsqu'ils ouvrent une carrière aussi nouvelle, et qui peut devenir aussi féconde. C'est pourquoi nous avons cru de notre devoir d'en donner l'analyse avec quelque détail.

MM. Gay-Lussac et Welther viennent d'ajouter à la liste de ces substances dues aux diverses combinaisons que les éléments peuvent produire, en suivant la règle des proportions multiples.

Ils ont découvert un acide formé par l'union du soufre et de l'oxigène, et cependant différent et de l'acide sulfurique et de l'acide sulfureux entre lesquels il est intermédiaire. Aussi ces chimistes le nomment-ils *acide hypo-sulfurique*, et ses sels *hypo-sulfates*. Il se forme quand on fait passer du gaz acide sulfureux dans de l'eau qui tient en suspension du peroxide de manganèse. On obtient ainsi du sulfate et de l'hypo-sulfate de manganèse; on décompose ces sels par la baryte, et l'on a de l'hydro-sulfate de baryte, qui est un sel soluble; enfin on fait passer dans la solution de l'acide carbonique qui s'unit à la baryte et se précipite avec elle.

Cet acide est inodore; le vide, la chaleur, le décomposent en acide sulfureux et en sulfurique; ses sels, avec la baryte, la chaux, etc., sont solubles. La chaleur en dégage de l'acide sulfureux, et les convertit en sulfates neutres. Son analyse donne deux proportions de soufre, cinq d'oxigène, et une certaine portion d'eau qui paraît essentielle à son existence.

Ainsi le soufre, avec une proportion d'oxigène, donne l'acide hypo-sulfureux; avec deux, le sulfureux; avec deux et demi, l'hypo-sulfurique; avec trois, le sulfurique.

Nous avons annoncé, dans notre Analyse de l'année dernière, les ingénieux procédés par lesquels M. Thénard est parvenu à augmenter considérablement la quantité d'oxigène que les acides et l'eau peuvent absorber. Les résultats de cet habile chimiste sont principalement intéressants en ce qui concerne l'oxigénation de l'eau. En multipliant les précautions et les opérations délicates, il a fait absorber à ce liquide six cent seize fois son volume de gaz oxigène, et à l'en saturer ainsi entièrement. L'eau, dans cet état, contient une quantité d'oxigène double de celle qui entre essentiellement dans sa composition. Elle est de près de moitié plus dense que l'eau ordinaire; et quand on en verse dans celle-ci, bien qu'elle s'y dissolve aisément, on la voit d'abord couler au travers comme une sorte de sirop ; elle attaque l'épiderme, le blanchit et cause des picotements; la peau même serait détruite par un contact prolongé : au goût elle produit une sensation qui se rapproche de celle de l'émétique ; chaque goutte jetée sur de l'oxide d'argent sec, éprouve une violente explosion, avec dégagement de chaleur et de lumière; beaucoup d'autres oxides, divers métaux, lorsqu'ils sont très-divisés, produisent des effets analogues : il y a toujours alors dégagement de l'oxigène ajouté à l'eau ; et quelquefois une partie de cet oxigène se combine avec le métal, lorsque celui-ci est aisément oxidable. Plusieurs matières animales, entre autres la fibrine et le parenchyme de quelques viscères, possèdent, comme les métaux nobles, la faculté de dégager l'oxigène de l'eau sans éprouver d'altération, surtout quand l'eau oxigénée est étendue d'eau ordinaire.

Cette dernière observation n'appartient pas seulement à la chimie ordinaire : elle est d'une grande importance pour la physiologie, puisqu'on y voit des solides, tels qu'il en existe beaucoup dans les corps animés, agir sur un liquide par leur seul contact, et le transformer en des produits nouveaux, sans en rien absorber, sans lui rien céder, sans éprouver, en un mot, aucun changement dans leur propre nature. Un esprit exercé aperçoit sur-le-champ toute l'analogie de ce phénomène avec ceux des sécrétions, lesquels embrassent, pour ainsi dire, l'économie vivante tout entière.

Nous avons parlé, dans notre Analyse de 1817, de la nouvelle base salifiable ou alcaline découverte dans l'opium par M. Sertürner, et à laquelle ce chimiste a donné le nom de *morphine*, parce que c'est par elle que l'opium exerce sa vertu soporifique.

MM. Pelletier et Caventou, deux jeunes chimistes qui se livrent avec un zèle soutenu à reconnaître ceux des principes immédiats des substances pharmaceutiques, dans lesquels résident leurs propriétés médicales, ont découvert cette année deux autres matières du même genre, et qui doivent également être placées dans la liste des alcalis.

La première, qu'ils ont appelée *strychnine*, a été trouvée d'abord dans la féve de S. Ignace, fruit d'une espèce du genre *strychnos*; et nos chimistes l'ont reconnue ensuite dans la noix vomique, qui est une autre espèce de ce genre, ainsi que dans le bois d'une troisième espèce, nommé communément *bois de couleuvre*. On l'obtient en traitant ces matières par l'alcohol bouillant, et en précipitant par la potasse caustique, ou même en laissant refroidir l'alcohol après l'avoir étendu d'eau, et l'abandonnant à lui-même. Elle se montre sous forme de cristal, en petites écailles. Elle est presque insoluble dans l'eau froide, très-soluble dans l'alcohol; sa saveur est d'une amertume excessive; elle ramène au bleu les sucs végétaux rougis par les acides, et jouit de toutes les propriétés générales des alcalis. Sa décomposition donne de l'oxigène, de l'hydrogène et du carbone; on n'a pu y découvrir d'azote. Dans les végétaux dont nous parlons, elle se trouve unie à un acide particulier, comme la morphine l'est dans l'opium.

MM. Pelletier et Caventou ont décrit avec soin les sels neutres que la strychnine forme avec divers acides; mais ils se sont attachés surtout à observer son action sur l'économie animale. Cette action est de même nature que celle de la noix vomique, mais portée à une intensité épouvantable: les plus petites quantités avalées ou insérées sous la peau, tuent en peu de minutes, avec tétanos et convulsions. Ce sont les mêmes effets que ceux du suc d'*upas*, autre strychnos, célèbre par l'usage qu'en font les habitants de Java pour empoisonner leurs armes, et sur lequel MM. Leschenaud, Magendie et Delille ont fait, en 1811, des expériences que nous avons rapportées dans le temps.

La seconde de ces substances, de nature alcaline, découverte par MM. Pelletier et Caventou, s'extrait de l'augusture (*brucea antidyssenterica*). L'action de ce végétal ressemblant beaucoup à celle de la noix vomique, nos jeunes chimistes y recherchaient la strychnine; mais la substance qu'ils en retirèrent se trouva un peu différente. Elle se dissout beaucoup plus aisément dans l'eau; sa saveur amère est mêlée d'âcreté, son énergie est moindre. Nos chimistes ont nommé ce nouvel alcali *brucine;* et les expériences qu'ils ont faites sur les sels neutres dans la composition desquels il entre, ne sont pas moins exactes ni moins remarquables que celles qu'ils ont faites sur les strychnines.

Nous regrettons de ne pouvoir les mettre en détail sous les yeux de nos lecteurs; mais nous ferons du moins remarquer combien ce nouveau genre d'alcalis produits par la végétation, et composés d'oxigène, d'hydrogène et de carbone, est une acquisition importante pour la chimie, même sous le rapport de sa théorie générale. On voit par là que la nature peut arriver à des effets semblables par les moyens les plus opposés. La potasse, la soude, la baryte, peut-être toutes les bases salifiables minérales, sont des oxides métalliques; l'ammoniaque est une combinaison d'hydrogène et d'azote; et voici maintenant des bases salifiables où il n'entre ni azote, ni métal, mais seulement de l'hydrogène, du carbone et de l'oxigène, les mêmes éléments qui entrent, sans doute en d'autres proportions, dans vingt autres genres de principes végétaux qui n'ont nulle ressemblance avec les alcalis.

Aux trois espèces bien constatées, la morphine, la strychnine et la brucine, il faudra ajouter encore le principe extrait de la coque du Levant par M. Boullai, et celui que M. Vauquelin avait aperçu dans le bois-joli *(Daphne mezereum)*; car on doit dire ici que M. Vauquelin est le premier qui ait eu quelque soupçon d'une substance de cette nature; et que s'il avait un peu plus insisté sur la pensée qu'il conçut alors, ce serait encore à son nom que se rattacherait cette nouvelle classe de composés.

M. Chevreul continue avec une constance inaltérable ses longues recherches sur les corps gras. Cette année, il a examiné le beurre de vache.

En le tenant fondu à une température de 60 degrés, on en sépare encore des portions analogues au petit-lait; la partie supérieure, qui est d'une transparence parfaite, est le vrai beurre à l'état de pureté; il se coagule à 32 degrés. L'alcohol en dissout un peu, et prend quelquefois alors un caractère acide. La saponification le change, comme la graisse de porc, mais dans des proportions un peu différentes, en acide margarique, en acide oléique, et en principe doux. Ce savon a, de plus, une odeur désagréable et tenace, qui lui est particulière, et dont on peut enlever le principe par des lavages. M. Chevreul y a reconnu deux acides spéciaux.

De la nombreuse suite d'expériences qu'il a recueillies, M. Chevreul arrive déja à une sorte de classification des divers corps gras. Les uns, comme la cholesterine, n'éprouvent point de changement par l'action des alcalis; d'autres, comme la cétine, n'en sont acidifiés qu'en partie; d'autres, tels que la stéatine et l'élaïne, sont transformés en principe doux, en acide margarique, et en acide oléique. Enfin il en est, comme le beurre et l'huile de dauphin, qui donnent en outre des acides volatils.

On a observé plusieurs fois, dans les Alpes, de la neige teinte d'un rouge plus ou moins vif, et l'on a beaucoup varié sur les causes qui lui donnent cette couleur.

Ce phénomène s'étant reproduit sur les côtes septentrionales de la baie de Baffins, visitée l'année dernière par les Anglais, sous les ordres du capitaine Ross, on a rapporté en Europe une certaine quantité d'eau provenant de cette neige. Elle était teinte d'un rouge foncé: on y voyait, au microscope, de petits globules de cette couleur; et M. Decandolle, qui en a présenté un flacon à l'Académie, l'a soumise à des expériences d'où il croit pouvoir conclure que sa couleur est due à une matière animale.

MINÉRALOGIE ET GÉOLOGIE.

La branche la plus intéressante, mais peut-être la plus difficile de la connaissance des minéraux; celle qui depuis Pallas, de Saussure et Werner, occupe le plus généralement l'attention des naturalistes, c'est la position respective des substances minérales dans les masses qui forment l'écorce du globe. En effet, c'est dans leur supposition seulement que l'on peut retrouver les traces de leur histoire et les monuments de leur chronologie. Déja elle nous offre des faits généraux bien constatés, d'où se laisse déduire une première classification des terrains, d'après leur plus ou moins d'ancienneté; mais lorsque l'on veut fixer les limites de chacune de ces classes principales, et surtout lorsqu'il s'agit de distribuer, d'après l'ordre de superposition, les espèces particulières de terrains qui appartiennent à chaque classe, il s'en faut de beaucoup que les faits recueillis soient assez précis et assez nombreux. Souvent toute apparence d'ordre échappe à l'observateur; et ce n'est qu'après des recherches pénibles et des combinaisons délicates, qu'il parvient à renouer le fil qui s'était brisé dans ses mains.

On peut très-bien juger de cet état de la science dans un ouvrage que M. de Bonnard, ingénieur en chef des mines, a présenté à l'Académie, et qu'il a intitulé *Aperçu géognostique des terrains*. C'est un exposé des diverses roches connues, des positions où chacune d'elles se rencontre, du plus ou moins d'étendue qu'elles occupent, et des fossiles que contiennent leurs lits. L'auteur a mis à profit les observations les plus récentes des autres géologistes, et celles qu'il a faites lui-même dans de nombreux voyages. Il serait bien difficile d'analyser ici un ouvrage qui n'est lui-même qu'une analyse fort concentrée. Nous en présenterons seulement les résultats principaux. On y voit qu'à l'époque reculée où se formaient les terrains primordiaux, le liquide déposait quelquefois encore, à deux et trois reprises, les mêmes substances qu'il avait déposées d'abord. Les irrégularités, les répétitions des roches deviennent plus fréquentes à la seconde époque, lorsqu'il se dépose aussi des bancs composés des débris de roches primitives, et lorsque les roches qui domineront à l'époque troisième commencent à se montrer. A mesure qu'on avance vers les temps récents, les roches deviennent moins caractérisées, ou plutôt les minéralogistes donnant moins d'attention à leurs différences, ne les distinguent plus d'une manière aussi claire. Il arrive enfin une quatrième époque où il ne se forme plus de ces couches générales qui embrassent presque tout le globe, mais seulement des dépôts partiels qui semblent s'être précipités dans des bassins séparés les uns des autres.

M. de Bonnard fait connaître les roches qui appartiennent à chacune de ces grandes classes, non plus par ordre de formation, parce que les retours, les répétitions lui auraient donné trop de difficultés, mais d'après leur nature minéralogique, ce qui s'écarte peut-être un peu de son plan primitif; mais la géognosie en est là ; le temps seul et les efforts d'observateurs doués de génie, peuvent découvrir des lois qui permettront à la méthode de descendre jusqu'aux lits les plus particuliers.

M. Brongniart a montré par un exemple curieux, qu'en effet les mêmes lits, contenant des fossiles de même nature, se trouvent quelquefois sur les points de la terre les plus éloignés, avec des circonstances dont la similitude va jusqu'à la minutie.

M. Hozack, médecin et naturaliste américain, avait adressé à l'Académie une empreinte de cette espèce singulière de crustacé inconnue aujourd'hui dans les mers, et qui se rencontre assez fréquemment pétrifiée, à laquelle on a donné le nom de trilobite.

M. Brongniart, qui avait fait depuis long-temps une étude particulière de ce genre de fossiles, avait montré que tous les terrains où il existe appartiennent à la classe dite des terrains de sédiments anciens, et que les différences spécifiques qu'il présente sont en rapport avec le plus ou moins d'ancienneté des dépôts qui composent ces terrains.

Ce que l'on a observé sur les trilobites d'Amérique, est en accord parfait avec le résultat des observations faites dans l'ancien monde.

M. Rigollot, membre de l'académie d'Amiens, a adressé des observations sur un genre de fossile plus commun, sur des dents d'éléphants et de rhinocéros, déterrées à la porte d'Amiens, dans des couches de gravier. La vallée de la Somme, comme beaucoup d'autres, est remplie de ces sortes de débris organiques; et déja plusieurs fois nous avons eu occasion d'en parler, d'après les recherches de M. Traullé, correspondant de l'institut, à Abbeville.

Nous devons à M. Brochant un traité élémentaire sur la cristallisation, que l'auteur a inséré dans le Dictionnaire des sciences naturelles. Tous les faits que cette partie importante de l'histoire des minéraux doit aux longues et savantes recherches de M. Haüy, sur les formes des cristaux et sur la manière dont celles de chaque espèce peuvent être ramenées à une forme primitive constante, est exposé dans cet ouvrage avec méthode et clarté. L'auteur y a joint les résultats des nouvelles expériences de M. Beudant sur les causes extérieures et intérieures qui peuvent déterminer dans chaque espèce la production d'une forme secondaire plutôt que d'une autre

M. Sage, accablé par des infirmités cruelles et nombreuses, ne cesse cependant de donner au public quelques produits de sa plume.

L'Académie a reçu de lui cette année une brochure sur ses découvertes minéralogiques, et un ouvrage qu'il a intitulé : *Mélanges historiques et physiques.*

PHYSIQUE VÉGÉTALE ET BOTANIQUE.

Une des plus belles entreprises de l'histoire naturelle philosophique dans ces derniers temps, a été celle de faire voir qu'un grand nombre d'organisations, en apparence très-différentes, se laissent ramener cependant à un plan commun, et se composent de parties de même nature, variant par les proportions seulement.

M. Turpin vient de faire en ce genre un heureux essai, dans son Mémoire sur l'inflorescence des graminées et des cypéracées, mémoire où il étend ses vues au règne végétal presque entier. Les bouquets si variés dont la nature couronne les végétaux, ces épis, ces chatons, ces grappes, ces ombelles, les fleurs composées elles-mêmes ne sont, selon M. Turpin, que des dispositions semblables, dont l'apparente diversité ne tient qu'au plus ou moins de prolongement de la tige commune et des pédicules particuliers de chaque fleur. En réalité toutes les fleurs sont solitaires, et presque toutes sont axillaires; ce qui veut dire qu'elles sortent des aisselles des feuilles, ou de parties analogues aux feuilles, quelque nom qu'elles portent d'ailleurs dans la langue de la botanique.

L'auteur, pour appliquer sa théorie aux graminées, considère leur fleur comme une fleur nue, c'est-à-dire, sans corolle et sans calice, et composée seulement du pistil et des étamines. Cette écaille qui l'enveloppe à l'extérieur, et que les botanistes, qui la nomment valve extérieure de la balle, regardent comme une pièce de la corolle, n'est pour M. Turpin qu'*une bractée*. Il nomme *spatelle* l'autre pièce plus mince qui est du côté de la tige, et qui s'ouvre au moment de la floraison pour laisser paraître les fleurs proprement dites; mais ces bractées et ces spatelles ne sont jamais que des feuilles. Le Mémoire de M. Turpin contient d'ailleurs beaucoup d'observations intéressantes sur les parties intérieures de la fleur, et notamment sur des bourrelets ou parties analogues qui entourent la base du pistil; sur les cotyledons qu'il dit être au nombre de deux dans certaines graminées telles que le froment ou l'avoine, et principalement sur la disposition des bourgeons, qui, selon lui, ont toujours dans les monocotyledons leur première écaille adossée à la tige, tandis que dans les dicotyledons elle est ou latérale ou, ce qui est plus rare, opposée à la tige et adossée à la feuille dans l'aisselle de laquelle naît le bourgeon.

M. Loiseleur des Lonchamps, médecin de Paris, a présenté à l'Académie un traité botanique des plantes usuelles, à la suite duquel se trouvent plusieurs mémoires sur les plantes de notre pays qui pourraient être substituées aux végétaux étrangers pour l'usage de la médecine.

D'après ses expériences, on pourrait substituer à l'ipécacuanha diverses espèces de *tithymales*, le cabaret ou *azarum europeum*, la dentelaire ou *plumbago*, etc. Il donne la préférence aux tithymales. Le séné pourrait être remplacé par le *globularia alypum*, qui croît en Provence; par l'*anagyris fetida*; par le *camelea cneorum*, et même par les rameaux et les feuilles de quelques *daphné* réputés jusqu'à présent caustiques et hydragogues, mais que M. Loiseleur prouve n'être que drastiques. Au *jalap* il substitue assez naturellement d'autres espèces de liserons, et surtout le *convolvulus soldanella* qui habite les bords de la mer, la racine de concombre sauvage (*momordica elaterium*), et même les pétales de quelques rosiers, dont l'action est cependant plus faible. Quant à l'opium, qui se tire aux Indes et dans le Levant d'une variété du grand pavot à graines blanches et à capsules rondes, M. Loiseleur montre comment on pourrait l'extraire de notre pavot ordinaire des jardins à graines noires, qui en fournirait abondamment. Il traite aussi de quelques autres narcotiques, tels que la *stramoine* et la *laitue vireuse*.

Les grands ouvrages de botanique entrepris par quelques-uns de nos confrères se continuent avec ardeur. M. Palisot de Beauvois, qu'une mort prématurée vient d'enlever à la science, avait conduit sa flore d'Oware et de Benin jusqu'à la XIX^e^ livraison.

M. de Humboldt, aidé de M. Kunth, avance chaque année à grands pas dans son immense histoire des plantes de l'Amérique équinoxiale.

Le troisième volume de ses *Nova genera et species plantarum æquinoctialium* a été achevé; le quatrième, qui complète les deux tiers de l'ouvrage, est imprimé en entier : on y trouvera les descriptions de trois mille espèces, parmi lesquelles il en est un grand nombre qui appartiennent à des familles trop long-temps négligées par les botanistes voyageurs

Il a paru trois cahiers des *Mimoses,* ouvrage spécial, consacré à l'une des plus belles familles de plantes de la zone torride, et pour la représentation desquelles les auteurs ont cherché à employer les artistes les plus distingués dans ce genre de travail.

M. de Humboldt a fait paraître la première partie du second volume de la relation historique de son voyage, avec un atlas où se trouvent les cartes des côtes de Caraccas, des landes de Venezuela et des rives de l'Orénoque. L'auteur y traite de plusieurs objets relatifs à la zoologie, tels que la puissance électrique des gymnotes, la récolte des œufs de tortue, les mœurs du jaguar et du caïman, etc.

M. Kunth en particulier a présenté une révision de la famille des bignoniacées.

ZOOLOGIE, PHYSIOLOGIE ANIMALE ET ANATOMIE.

M. Latreille, qui sait allier heureusement les recherches d'érudition avec celles de l'observation et les féconder les unes par les autres, a cherché à déterminer positivement l'espèce des différents insectes qui servaient d'emblèmes dans l'écriture sacrée des anciens Égyptiens, et dont on trouve fréquemment les images dans les monuments de cette nation singulière.

Les plus connus appartiennent à la famille des scarabées que l'on a nommés *pipulaires*, parce que ces insectes enfouissent leurs œufs dans de petites boules qu'ils pétrissent avec la matière des excréments.

M. Latreille commente à leur sujet un passage d'Horus Apollo, et fait voir que les trente doigts que cet auteur leur attribue ne sont que les phalanges qui se trouvent en effet au nombre de trente à leurs six doigts, cinq à chaque doigt.

Une partie des autres attributs donnés à ces insectes a également quelque fonds de vérité; mais il y en a aussi d'entièrement controuvés, dans la vue d'établir de prétendues allégories et de justifier le culte rendu aux scarabées, ou d'expliquer l'emploi que l'on fesait de leur figure dans les hiéroglyphes. Il était difficile qu'il n'en fût pas ainsi lorsque l'on eut perdu en Égypte l'intelligence des hiéroglyphes et celle des mystères de l'ancienne religion; quoi qu'il en soit, les trois espèces des carabées indiquées par Horus Apollo sont, selon M. Latreille: *l'ateuchus sacer,* une espèce de copris voisine du *copris midas*, et le *copris paniscus* ou telle autre espèce très-voisine.

On a représenté aussi très-fréquemment sur les murs de quelques temples égyptiens un insecte de la famille des hyménoptères, posé sur un petit rameau à quatre branches; M. de Latreille y voit ou une guêpe, emblême de toute influence venimeuse, avec la plante qui pourrait guérir les effets du venin, ou une abeille sur le rameau qui doit lui fournir son miel.

Il termine son Mémoire par une note sur quelques insectes que l'on trouve dans les momies, et sur les espèces qui ont servi de modèle aux artistes pour figurer sur les zodiaques les signes du cancer et du scorpion.

M. Moreau de Jonnès continue à communiquer à l'Académie l'histoire des reptiles des Antilles.

Il l'a occupée cette année d'un grand lézard du genre des *scinques* qui habite dans les bois et que l'on appelle aujourd'hui dans nos colonies *lézard de terre*. Il s'y nommait autrefois *broche ou brochet de terre ;* les variations que ses couleurs et sa taille éprouvent, selon l'âge ou d'autres circonstances, et les différentes proportions de sa queue, jointes à quelques confusions de synonymie, avaient fait multiplier cette espèce par les naturalistes au point de la placer cinq fois dans leurs catalogues sous cinq noms différents. L'anolis doré, le gros scinque *(galley-wasp)*, le scinque mabouya, le scinque rembruni et le scinque schneiderien de Daudin ne sont, selon M. de Jonnès, qu'un seul et même animal.

Le même voyageur a parlé de cette énorme grenouille dite par les Anglais *bullfrog*, ou grenouille-taureau, et que nos colons nourrissent pour leur table, quoiqu'ils lui donnent la dénomination impropre de *crapaud*, par la raison qu'elle habite les lieux ombragés et humides comme nos crapauds de France, et non pas les eaux stagnantes comme nos grenouilles. C'est la *grenouille grognante* de Daudin.

Elle ne sort de son repaire que la nuit. Sa force est telle qu'elle franchit en sautant un mur de cinq pieds de haut. La saison sèche lui donne beaucoup de torpeur; mais elle reprend sa vivacité avec la saison des pluies. En domesticité elle devient assez familière.

Les Antilles ne nourrissent qu'un seul batracien, avec la grenouille grognante; c'est une rainette, qui seule porte dans les îles Françaises le nom impropre de grenouille, et que M. de Jonnès décrit pour la première fois avec exactitude, quoique d'autres voyageurs en aient fait quelque mention. Selon l'auteur, l'opinion que les Antilles sont des débris d'un grand continent, est fort infirmée par le petit nombre des espèces de batraciens qui les habitent, et qui peut faire supposer plutôt que ces espèces y sont arrivées séparément à des époques et par des causes inconnues.

On sait qu'il arrive assez souvent dans la zone torride que la chair de certains poissons se trouve vénéneuse, et que ceux qui en ont mangé éprouvent des atteintes cruelles, et perdent même la vie, sans que la vue, l'odorat ni le goût aient rien annoncé qui pût faire soupçonner le danger.

M. de Jonnès décrit les syptômes de ce genre d'empoisonnement ; il donne la liste des espèces de poissons et de crabes, qui prennent le plus fréquemment aux Antilles cette propriété funeste, et soumet au raisonnement et à l'expérience les diverses causes auxquelles on l'attribue. Il montre qu'elle ne peut tenir comme on l'a cru ni aux mollusques ou zoophytes ni aux fruits de mancénilliers dont ces poissons se seraient nourris, ni aux filons métalliques qui se trouveraient parmi les bancs sur lesquels ils habitent; et il soupçonne qu'elle est l'effet d'une sorte de maladie qui développerait dans ces poissons un principe délétère. La chair des tortues prend quelquefois aussi dans la zone torride une qualité malfaisante, et donne des pustules sur toute la surface du corps à ceux qui s'en sont nourris. Tout le monde sait que, dans notre climat, les moules deviennent quelquefois très-malsaines. Ce n'est que dans l'eau de la mer que cette maladie peut naître : car les poissons d'eau douce ne sont jamais vénéneux, et l'eau de la mer, en quelques circonstances, produit des furoncles à ceux qui en ont été mouillés et n'ont pas eu soin de se laver dans l'eau douce. M. de Jonnès a éprouvé lui-même cet effet, ainsi qu'un de ses amis.

Le grand point serait de pouvoir distinguer les poissons devenus malfaisants des autres individus de leur espèce. Quelques-uns disent que dans cet état leur foie devient noir et d'un goût acerbe, et que leurs dents prennent une teinte jaune. Des observations ultérieures peuvent seules confirmer ces assertions; elles sont importantes, et les habitants éclairés de nos colonies ne manqueront pas sans doute de s'en occuper.

Il y a long-temps que les naturalistes ont observé des quadrupèdes dont les petits paraissent au jour bien avant d'avoir acquis le développement ordinaire, avant même qu'on puisse distinguer leurs membres et leurs yeux, et demeurent suspendus aux mamelles de leur mère pendant le reste du temps que les petits des quadrupèdes ordinaires passent dans la matrice.

On a nommé ces animaux didelphes ou marsupiaux, parce que plusieurs d'entre eux ont sous le ventre une poche qui renferme les mamelles et où les petits demeurent cachés jusqu'à ce qu'ils atteignent leur développement, poche que l'on a considérée comme une seconde matrice, mais qui n'existe pas à beaucoup près dans toutes les espèces.

Ces animaux, à la tête desquels est le kangurou pour la grandeur, et dont plusieurs espèces sont bien connues en Amérique sous le nom de *sarigues* et *d'opossum*, ont à l'intérieur une matrice véritable, mais autrement conformée que celle des quadrupèdes ordinaires. Elle communique avec le vagin par deux canaux latéraux en forme d'anses, et dans un certain nombre d'espèces le gland du mâle est divisé en deux pointes qui paraissent pouvoir diriger le sperme vers les orifices de ces deux canaux.

Une opinion très-répandue en Amérique est que les petits des opossums naissent en traversant les mamelles, auxquelles ils demeurent ensuite suspendus; mais les anatomistes ont généralement rejeté cette opinion, attendu qu'ils n'ont découvert aucune voie par où ce passage puisse se faire.

Cependant M. Geoffroy, après avoir annoncé que l'on ne cite aucune observation de fœtus trouvés dans la matrice, tandis que, selon feu Roume de Saint-Laurent, on aurait vu au bout de chaque mamelon de petites bourses claires, où étaient autant d'embrions ébauchés, est conduit à l'idée qu'il pourrait y avoir ici quelque chose d'analogue à une génération ovipare. « Ne peut-il pas arriver (se demande-t-il) « qu'il se développe vers les points mamillaires un appareil « de vaisseaux nourriciers analogues à ceux qui composent « le placenta, mais adaptés à l'origine de la bouche ? »

M. Geoffroy pense donc que l'on s'est peut-être trop pressé de refuser aux didelphes un mode particulier de génération, et qu'il est important de les observer de nouveau.

M. Geoffroy croit de plus avoir remarqué que la faiblesse du développement des organes sexuels ordinaires, tient à ce que l'aorte descendante se continue presque sans diminution de calibre avec l'artère épigastrique, et n'envoie qu'un rameau grêle et de petites branches aux extrémités postérieures et à la matrice.

Enfin dans le cas où l'on voudrait rechercher la cause de cette éjection si prématurée des petits hors de la matrice, M. Geoffroy pense que l'on pourrait l'attribuer à ce que les espèces de canaux en forme d'anses de panier qu'ils traversent ne sont point séparés du vagin par un col, et ne peuvent retenir le petit œuf quand une fois il est sorti de la trompe de Fallope.

Nous pouvons mettre au rang des grands ouvrages de zoologie qui ont paru depuis quelques années, celui que publient MM. Geoffroy Saint-Hilaire et Frédéric Cuvier, sur les mammifères de la ménagerie royale, avec des planches lithographiées et enluminées d'après nature vivante, dans les ateliers lithographiques de M. le comte de Lasteyrie. Il en a paru déja douze livraisons in-fol., contenant chacune six planches, parmi lesquelles on voit des portraits corrects de plusieurs espèces qui n'avaient point encore été bien représentées, ou même qui étaient entièrement nouvelles pour les naturalistes.

M. Delamark, malgré l'affaiblissement total de sa vue, poursuit avec un courage inaltérable la continuation de son grand ouvrage sur les animaux sans vertèbres.

Il nous a donné cette année la première partie de son VI^{e} volume, où il remonte jusqu'aux premiers ordres des mollusques gastéropodes.

L'ouvrage dont M. Daudebart de Férussac avait présenté le plan en 1817, sur les mollusques de terre et d'eau douce, a commencé à recevoir son exécution. L'auteur en a présenté à l'Académie six livraisons, également remarquables par la beauté des figures enluminées, et par le soin avec lequel les espèces y sont recueillies et distinguées. Elles comprennent les limaces et les hélices de Linnæus, ainsi que plusieurs genres démembrés de ceux-là par les naturalistes modernes, et par MM. de Férussac père et fils, qui ont étudié plus long-temps et plus soigneusement que personne avant eux cette famille d'animaux.

Les rainettes grimpent sur les arbres, sur les murs les plus lisses, et même sur les carreaux de vitres, au moyen de petites pelotes qui terminent leurs doigts, et qu'elles fixent fermement aux corps sur lesquels elles les appliquent.

La plupart des naturalistes se sont contentés de supposer que ces pelotes sont pourvues de quelque viscosité; mais il faudrait que cette viscosité fût bien puissante, pour qu'une seule pelote pût tenir suspendu le corps entier de l'animal, comme il arrive quelquefois. M. Delabillardière, qui a étudié de près ce sujet, a reconnu que les rainettes forment le vide sous chacune de leurs pelotes, en tirant en dedans la surface inférieure de ces parties par le moyen de quelques fibres musculaires. Les pelotes sont donc alors pressées contre le corps qu'elles touchent par le poids entier de l'atmosphère.

Depuis long-temps on a cherché à éviter aux commençants les premiers dégoûts inséparables des études anatomiques, en leur offrant des imitations en relief des organes avec leurs couleurs et leurs dimensions. Les figures en cire coloriées sont très-propres à cet usage; et les magnifiques préparations de ce genre, qui ont été fabriquées à Florence sous les auspices du grand-duc Léopold et sous les yeux de Fontana et de M. Fabbroni, ont rendu ce moyen célèbre. Mais la cire est cassante et peu maniable; et il est difficile de l'employer à des préparations composées de parties mobiles et propres à faire connaître la juxtaposition des organes. Fontana avait voulu y substituer le bois, et il avait commencé une grande statue de cette matière qui devait se décomposer en plusieurs milliers de pièces; mais le bois a un autre inconvénient, en ce qu'il se dilate et se contracte suivant l'humidité ou la sécheresse, et que les parties déliées ne s'ajustent jamais bien et se cassent aisément. M. Ameline, professeur d'anatomie à Caen, a imaginé une sorte de pâte de carton, qui se moule comme l'on veut, prend beaucoup de fermeté sans être cassante, et se laisse fixer par divers moyens commodes aux points où on veut la faire tenir; il a construit ainsi, sur un squelette véritable, une statue où tous les muscles et les principaux vaisseaux se laissent détacher et rattacher. Il n'est pas douteux que cette matière, quand des artistes de profession lui imprimeront le fini et l'élégance nécessaires à une imitation complète, ne puisse remplacer avec avantage la cire et le bois.

M. Serre, chirurgien en chef de l'hospice de la Pitié, a fait sur les premiers commencements de l'ossification dans les embryons d'hommes et d'animaux, des observations nombreuses et importantes, d'où il a cru pouvoir déduire ce qu'il nomme les lois de l'ostéogénie, c'est-à-dire les règles générales qui président à la disposition des points primitifs d'ossifications; règles que M. Serre énonce au nombre de cinq.

La première, dite de *symétrie*, c'est qu'en considérant le squelette dans son ensemble, l'ossification y marche des parties latérales vers les parties moyennes. Dans le tronc, par exemple, les côtes s'ossifient avant les vertèbres; les apophyses latérales des vertèbres avant leur corps. Il en est de même à la tête : le premier point osseux se montre aux apophyses zygomatiques des temporaux; les ailes du sphénoïde s'ossifient avant son corps, etc. De là naît, selon M. Serre, cette symétrie si remarquable dans les animaux vertébrés; les deux moitiés du squelette marchant, en quelque sorte, l'une vers l'autre pour se rencontrer dans la partie médiane, il y a deux demi-crânes, deux demi-rachis, deux demi-bassins, etc.

Cependant cette partie médiane présente des os que l'on avait toujours crus originairement simples, tels que les pièces du sternum, le corps de l'os hyoïde, les corps mêmes des vertèbres. M. Serre donne à ce sujet des observations qui lui sont propres. Il rappelle que dans l'œuf les premiers vestiges de l'épine du poulet se présentent sous l'apparence de deux demi-rachis encore membraneux; que cette double membrane s'unit en devenant cartilagineuse. Il annonce que le onzième jour de l'incubation il commence à se montrer sur les corps de quelques vertèbres dorsales deux points osseux très-petits; qu'il s'en montre également le douzième jour sur les cervicales et les lombaires; que la réunion de ces points en un seul corps ne s'opère dans les dorsales et dans quelques cervicales que le treizième ou le quatorzième jour, et que ce jour-là même les lombaires et les caudales montrent encore très-sensiblement leur division.

L'auteur a observé une marche entièrement analogue dans le rachis du têtard et dans celui du lapin. Il l'a retrouvée quant au cartilage dans les embryons humains très-peu développés, et il croit aussi avoir remarqué que l'ossification s'y fait d'abord par deux points; mais on pourrait presque dire, d'après sa description, que dans les fœtus provenant de femmes saines, il les a sentis avec la pointe de son scalpel, plutôt qu'il ne les a vus. C'est du quarantième au soixantième jour de la conception, qu'il a fait sur les différentes vertèbres cette observation difficile, qui prend cependant beaucoup de vraisemblance par l'arrangement que l'on aperçoit dans la suite entre les fibres osseuses; et surtout par ce que l'on remarque dans les embryons provenant de femmes scrofuleuses ou rachitiques. La séparation des deux noyaux est alors beaucoup plus marquée et dure beaucoup plus long-temps. C'est ainsi que M. Serre explique des *spina bifida*, ou fentes contre nature de la partie antérieure de l'épine, qui ont lieu quelquefois, et dont l'auteur décrit plusieurs exemples remarquables.

En choisissant les époques convenables, M. Serre a vu également de doubles noyaux osseux aux os médians de la base du crâne; non-seulement au corps du sphénoïde antérieur où cette division dure assez long-temps, mais encore au corps du sphénoïde postérieur et à l'os basilaire, où la réunion s'opère beaucoup plus vite. Il n'est pas jusqu'au vomer et à la lame verticale de l'ethmoïde qu'il ne voie se former par des lames ou par des granulations latérales.

Quant au sternum, M. Serre, après avoir annoncé que dans les très-jeunes embryons le cartilage s'y manifeste aussi d'abord latéralement, cherche à appliquer sa théorie à l'ossification des pièces de cette partie regardées généralement comme impaires. A cet effet, il rapporte plusieurs variétés de sternums humains où l'on voit des pièces divisées par le milieu, d'autres où les pièces sont disposées alternativement sur deux séries. Les oiseaux et la plupart des reptiles ayant à leur sternum, en avant des pièces bien certainement disposées par paire, un os impair qu'on a nommé *ento-sternal*, celui qui forme la quille du sternum des oiseaux, M. Serre, pour ramener cet os à sa règle, cite divers animaux dans lesquels la pièce que l'on pourrait regarder comme l'analogue de celle-là, offre des traces sensibles de division. Il considère aussi comme indice de division les cavités creusées dans la quille du sternum de la grue et du cygne, pour loger les replis de leur trachée-artère.

Nous avouerons que cette partie du travail de M. Serre est celle qui nous paraît encore exiger le plus de développement, et être susceptible de plus de contradictions. Cependant plusieurs exemples pathologiques rapportés par cet habile anatomiste semblent confirmer que l'état normal et primitif du sternum est d'être divisé longitudinalement.

Enfin, relativement à l'os hyoïde, M. Serre annonce que les deux points osseux de son corps comme ceux du corps des vertèbres, s'unissent dans les sujets sains presque aussitôt qu'ils se forment; mais que, dans les fœtus nés de parents viciés, leur séparation dure plus long-temps; il en a même observé un, né d'un père qui bégayait, et où l'un des points s'était ossifié plus tard que l'autre.

A cette occasion, notre anatomiste rapporte des exemples d'os hyoïdes qui s'unissaient presque sans interruption par des articulations osseuses avec l'apophyse styloïde, et par conséquent avec le crâne, ou en d'autres termes, dans lesquels le ligament stylo-hyoïdien était presque entièrement ossifié.

La deuxième des lois ou règles établies par M. Serre, se nomme la loi de *conjugaison*. Chacun sait que les trous qui donnent passage aux nerfs de l'épine, sont formés par le rapprochement de deux échancrures pratiquées aux parties correspondantes de deux vertèbres contiguës. Le contour de chaque trou résulte donc du rapprochement de deux os. Selon M. Serre, tous les autres trous des os sont également des trous de conjugaison; et l'on peut, en remontant plus haut, vers l'époque de la naissance ou de la conception, retrouver séparées les pièces osseuses dont le rapprochement les a formés.

Ainsi les trous des apophyses transverses des vertèbres cervicales ne sont d'abord fermés en dehors que par une bande cartilagineuse qui a ses points d'ossification séparés; points que M. Serre regarde comme des espèces de côtes cervicales. Chacun sait qu'en effet dans le crocodile, et dans d'autres reptiles, il y a là de véritables côtes fort reconnaissables pour telles.

L'application de la loi était encore plus facile pour beaucoup de trous de la base du crâne, que tous les anatomistes savent se trouver dans le fœtus entre des os distincts, bien que ces os se soudent ensuite entre eux, tels que la fente sphéno-orbitaire, la fente sphéno-temporale, les trous déchirés, le condyloïdien. On doit évidemment l'appliquer aussi dans plusieurs animaux au trou ovale, qui n'est souvent qu'une échancrure du sphénoïde.

Quant à ceux qui, du moins pour des fœtus un peu avancés, feraient quelque difficulté, tels que le trou rond dans beaucoup d'animaux, M. Serre renvoie à des embryons plus jeunes. C'est ce qu'il fera sans doute aussi relativement aux trous orbitaires internes dans les espèces où l'ethmoïde ne se montre pas dans l'orbite. Les anatomistes ne manqueront pas de remonter à ces premiers moments de l'existence pour s'assurer de la généralité de cette règle; ils auront à vérifier, entre autres choses, si le pourtour du trou optique n'est pas un anneau qui s'ossifie successivement, plutôt que le résultat de la conjugaison de deux pièces.

Pour les trous du rocher, M. Serre admet au moins dix points osseux primitifs dans la formation des parties qui composent cet os; en sorte qu'il n'est point embarrassé à trouver des conjugaisons aux fenêtres ronde et ovale, au trou auditif interne, etc.; mais il faudra aussi examiner s'il n'y a rien d'accidentel dans des subdivisions si nombreuses. Ce dont nous nous sommes assurés depuis long-temps, c'est que dans tous les oiseaux et les reptiles la fenêtre ovale résulte de la conjugaison du rocher avec l'occipital latéral; mais que la fenêtre ronde, qui existe dans les oiseaux seulement, et non dans les reptiles, est percée en entier dans l'occipital latéral; en sorte que c'est dans ce dernier os qu'il faudrait admettre des subdivisions pour ne pas trouver la règle en défaut.

Une observation curieuse de M. Serre, c'est que dans le troisième mois de la conception, l'ouverture de l'osselet appelé l'étrier offre deux et quelquefois trois points d'ossification dans son pourtour.

La troisième des règles de M. Serre, ou sa loi de *perforation*, n'est qu'une extension de la seconde. Il pense que les canaux osseux comme les trous ne sont formés que par conjugaisons, et que leurs parois ont consisté d'abord en pièces séparées. Il voit ces pièces longitudinalement placées autour des os longs des très-jeunes fœtus; il les voit autour des canaux semi-circulaires de l'oreille, autour de l'aquéduc de Falloppe; il les retrouve en un mot partout où les os sont percés ou creusés de canaux prolongés.

M. Serre comprenant, contre l'opinion de plusieurs anatomistes modernes, les dents dans la même classe que les os, veut aussi appliquer sa troisième règle aux canaux dentaires; mais il n'y parvient qu'en faisant remarquer que la couronne de chaque dent, et même celle des incisives, consiste d'abord en un certain nombre de petits tubercules séparés. Ce fait très-vrai est étranger à l'histoire de l'ossification ordinaire, et n'empêche pas que le canal dentaire ne se forme par prolongation de la couronne vers la racine, et non par conjugaison de pièces latérales.

La quatrième et la cinquième règle de M. Serre sont relatives aux éminences des os et à leurs cavités articulaires. Notre anatomiste fait observer que les premières sont toujours primitivement des noyaux osseux particuliers, et que les autres résultent du rapprochement de deux ou plusieurs éminences, et par conséquent d'autant de noyaux osseux. Il prouve sa proposition même par rapport au marteau qui est épiphysé à un certain âge, et par rapport à l'enclume; osselet qui, tout petit qu'il est, ayant une facette articulaire en forme d'angle rentrant, se divise dans l'origine en deux pièces.

Parmi les observations intéressantes dont M. Serre a enrichi cette partie de son travail, on doit remarquer celle qui concerne la composition de la cavité cotyloïde. Outre les trois os qui y concourent, de l'aveu de tous les anatomistes, M. Serre en a découvert un quatrième, fort petit, placé entre les autres, et qui ne se retrouve pas dans les animaux à bourse, où l'on sait qu'il existe un quatrième os du bassin très-développé, et articulé sur le pubis, os que l'on a nommé l'os marsupial. Ce serait l'analogue de cet os marsupial qui, selon M. Serre, serait venu se cacher pour ainsi dire dans le fond de la cavité cotyloïde, dans les mammifères ordinaires.

L'auteur a fait une observation analogue sur la cavité articulaire de l'omoplate. Dans les animaux qui ont une clavicule distincte, cette cavité est formée en partie par l'os de l'omoplate, et en partie par la base de l'apophyse caracoïde, qui dans les jeunes sujets est une épiphyse distincte. Mais dans les animaux sans clavicule il s'y trouve une troisième petite épiphyse, qui serait le dernier vestige de l'os claviculaire.

Cette masse considérable de faits intéressants et variés qui composent le Mémoire de M. Serre, va probablement servir de points de départ à de nouvelles et importantes recherches sur les premiers développements du corps animal, et sur les variations qu'il éprouve à cette époque rapprochée de la conception, où l'on ne s'en était pas occupé autant que l'exigeaient les progrès de la science de la vie.

MÉDECINE ET CHIRURGIE.

M. Percy a communiqué une série intéressante d'observations sur les plaies dans lesquelles il s'est manifesté de la phosphorescence. Chacun sait que les matières organiques qui commencent à se corrompre, le bois, le poisson, la chair, sont sujettes à répandre de la lumière; la même chose arrive quelquefois aux plaies; et peut-être en aurait-on recueilli un plus grand nombre d'exemples, si la nature des choses permettait que les pansements se fissent dans l'obscurité. Mais M. Percy, qui pendant vingt-cinq ans de guerre, tantôt heureuse, tantôt malheureuse, a eu plus d'un million de blessés à traiter, ne s'est vu que trop souvent obligé de les soigner sans lumière. C'est ainsi qu'il a observé sur un jeune soldat de Paris une plaie légère à la jambe qui donna une lueur assez vive pendant plus de quinze jours. Ce jeune homme, pour se soulager, avait d'abord humecté ses compresses avec son urine, en sorte que l'on pouvait attribuer la phosphorescence à cette cause ; mais quelque temps après, au siége de Manheim, une lueur non moins vive, un véritable feu follet se montra pendant plus de six jours sur un officier dont la blessure n'avait été pansée qu'avec des compresses humectées d'eau pure.

M. Percy a vu depuis plusieurs autres exemples de ce singulier phénomène, et même il en a observé un sur une plaie provenant d'une engelure.

Il a été lu à l'Académie des mémoires sur plusieurs maladies qui appartiennent à des climats éloignés. M. Deville a décrit l'affreuse épidémie de cholera-morbus, qui a ravagé, en 1818, le Bengale et une grande partie de l'Indostan ; M. Moreau de Jonnès a donné une monographie de la fièvre jaune, telle qu'elle se manifeste aux Antilles, et a fait connaître les maladies qui règnent le plus généralement dans ces îles.

Un Mémoire intéressant de M. le baron Larrey a roulé sur les procédés ingénieux par lesquels ce célèbre chirurgien a extirpé une tumeur squirreuse d'un volume énorme qui tenait au cou et à la mâchoire inférieure, et se trouvait ainsi placée entre des vaisseaux nombreux qu'il était aussi difficile d'épargner que dangereux d'ouvrir.

M. Faure, médecin qui s'attache particulièrement aux maladies des yeux, a présenté à l'Académie un Mémoire sur la pupille artificielle, et sur une méthode nouvelle d'opérer la cataracte, imaginée par le docteur Buchorn de Magdebourg, qui la nomme *keratonixis*. Elle consiste à faire passer l'aiguille par le moyen de laquelle on abaisse le cristallin, non pas comme on l'avait fait jusqu'ici, par quelque point de la sclérotique, mais au travers de la cornée transparente. Cette méthode a très-bien réussi à M. Faure, dont le Mémoire est remarquable d'ailleurs par un exposé fort exact de différents vices qui nécessitent une pupille artificielle, et par une analyse judicieuse des procédés opératoires qui conviennent à chacun d'eux.

AGRICULTURE, ART VÉTÉRINAIRE, ET TECHNOLOGIE.

Tout le monde a entendu parler de la grande entreprise faite par M. Ternaux pour introduire en France la variété de chèvres dont on tire le duvet précieux avec lequel se fabriquent les schals de Cachemire.

M. Jaubert, envoyé en Orient sous la protection du gouvernement, est parvenu jusqu'à certaines hordes de Tartares Kirguises, qu'il savait posséder de ces chèvres. Il leur en a acheté un nombreux troupeau, et à force de soins et de dépenses, il a ramené dans nos ports une grande partie des individus qui le composaient. D'un autre côté, le muséum d'histoire naturelle avait reçu directement du Bengale, de MM. Diard et Duvaucel, ses correspondants, un bouc originaire du Thibet, et qui s'est trouvé semblable à la variété achetée chez les Kirguises. Le duvet de ce bouc, ainsi que celui de tout le troupeau de M. Jaubert, a été reconnu parfaitement convenable au genre de fabrication que l'on avait en vue. A la vérité on s'est assuré ensuite que quelques-unes de nos variétés indigènes possédaient un duvet à peu près aussi fin que celui des chèvres venues de l'Orient. Mais, outre que ce duvet est généralement moins abondant, on ne l'aurait peut-être aperçu de long-temps, si l'on n'avait été provoqué à le rechercher précisément à cause de l'attention que la noble entreprise de M. Ternaux avait inspirée.

M. Teissier, notre confrère, que le ministre de l'intérieur avait chargé de soigner le troupeau amené par M. Jaubert, et de placer dans les bergeries nationales les individus de ce troupeau acquis par le gouvernement, a lu à l'Académie un récit détaillé de toute l'opération. Sur plus de douze cents chèvres que M. Jaubert avait achetées, il n'en a échappé que quatre cents aux incommodités de la navigation et aux maladies qui en avaient été la suite.

Le temps nous apprendra bientôt si la matière première que ces animaux fournissent peut être recueillie avec avantage dans nos climats, et si la France aura fait une acquisition comparable, à quelques égards, à celle des mérinos dont nous avons tracé l'histoire dans le temps, et qui fut due à la persévérance et aux soins éclairés de plusieurs de nos confrères secondés de l'autorité et des avances du gouvernement.

M. Yvart a publié le travail sur l'agriculture de l'Auvergne, dont nous avons rendu compte dans notre analyse de l'année dernière; écrit où l'on trouve à la fois les détails les plus intéressants sur les efforts de quelques propriétaires de cette province, pour améliorer le produit de leurs terres, et les indications les plus utiles sur les moyens qu'ils peuvent encore tenter pour y parvenir.

Les ouvrages pratiques, et principalement ceux qui ont l'agriculture pour objet, n'ont pas tant à offrir des vérités nouvelles, que des applications de vérités connues à des lieux et à des besoins déterminés : c'est pourquoi nous ne pouvons guère, dans un résumé tel que le nôtre, ne pas nous borner à l'indication sommaire de leur but et de leur plan.

Cette remarque est applicable à un livre, d'ailleurs l'un des plus importants qui aient été publiés cette année, et où les Français eux-mêmes apprendront, peut-être avec étonnement, les progrès immenses que leur pays a faits depuis trente ans dans toutes les branches de l'agriculture, des fabriques et du commerce : c'est celui de M. le comte Chaptal sur l'industrie française.

Personne n'avait plus de titres que l'auteur à faire l'histoire de perfectionnements auxquels il a plus que personne contribué, et comme chimiste, et comme fabricant, et comme agriculteur, et surtout comme administrateur.

C'est au milieu de la guerre et des troubles, sous l'empire oppressif du système continental, en un mot, malgré des obstacles de tout genre, que ces prodigieuses améliorations se sont établies, par l'affranchissement des propriétés, par la suppression des douanes intérieures et des corporations d'arts et métiers, et surtout par les lumières que les sciences ont répandues dans toutes les classes de la société, et par le mouvement universel que tant de variations dans les fortunes ont excité dans les esprits.

Cependant il est des branches d'industrie où nous ne sommes point encore arrivés aussi loin que d'autres peuples; et dans ce nombre on peut placer les divers emplois du charbon de terre. Bien que l'éclairage au moyen du gaz inflammable que l'on retire de cette substance soit une invention française, les rues et les fabriques de Londres sont déja illuminées par ce moyen; tandis qu'on n'en a fait encore parmi nous que des essais peu étendus, et qui n'ont pas été sans inconvénients. La raison en est fort simple; c'est que la houille de France étant plus chère et moins abondante en hydrogène que celle d'Angleterre, et l'huile étant au contraire à beaucoup meilleur marché dans le premier de ces pays que dans l'autre, la différence dans le prix paraît être jusqu'à ce jour, chez nous, à l'avantage de l'huile, qui de plus a incontestablement l'avantage de la commodité. C'est ce que M. Clément Desormes a cherché à prouver par des calculs très-détaillés, dans un mémoire lu à l'Académie, et qui depuis a été imprimé.

Aux ouvrages des membres correspondants de l'Académie qui ont paru cette année, nous devons ajouter la nouvelle édition de *l'Art de faire le vin* par M. Chaptal, et le *Cours d'agriculture* de M. Rougier de la Bergerie.

M. le baron Morel de Vindé, l'un des grands propriétaires de France qui s'occupent avec l'ardeur la plus éclairée et la plus soutenue à donner aux agriculteurs des leçons et des exemples, a présenté à l'Académie le plan d'une bergerie qu'il a fait exécuter dans une de ses fermes, et qui paraît réunir au plus haut degré tout ce que l'on peut attendre d'un pareil édifice.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1820.

PARTIE MATHÉMATIQUE.

PAR M. LE CHEVALIER DELAMBRE, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

Mémoire d'analyse sur le mouvement de la chaleur dans les fluides, par M. le baron FOURIER. (4 septembre 1820.)

APRÈS un exposé rapide des travaux des grands Géomètres qui ont posé les fondements de cette théorie, l'auteur fait remarquer que la température variable des molécules fluides est une cause dynamique que l'on ne doit point omettre d'introduire dans le calcul, puisqu'elle influe toujours sur le mouvement dans les substances aériformes, et puisqu'elle concourt aussi à déterminer les mouvements des liquides toutes les fois que la distribution de la chaleur n'est pas uniforme. Les mouvements généraux et périodiques de l'atmosphère, et les courants principaux de l'océan, sont occasionnés par l'inégale distribution de la chaleur solaire, dont l'effet se combine avec ceux de la gravité et de la force centrifuge. Ces considérations et plusieurs autres prouvaient la nécessité de rechercher avec beaucoup de soin l'expression analytique des mouvements de la chaleur dans l'intérieur des fluides. La température de chaque molécule est un élément variable, qui modifie tous les mouvements intérieurs. Il ne suffit pas d'introduire dans le calcul une quantité qui désigne la température, il faut ajouter une équation spéciale qui se rapporte aux variations de la chaleur, en exprimant la distribution instantanée. L'objet du Mémoire est de découvrir cette nouvelle équation, afin de la joindre à celles qui représentent l'effet des forces accélératrices, et de compléter ainsi l'expression analytique des mouvements des fluides. Cette cinquième équation se forme d'une première partie qui exprime la distribution de la chaleur dans les masses solides. Elle coïncide en cette première partie avec l'équation générale que l'auteur, en 1807, avait donnée dans ses premiers Mémoires; et elle contient de plus les termes qui dépendent du déplacement des molécules. Le nouvel examen de ces questions a prouvé que les principes mathématiques de la théorie de la chaleur ne sont ni moins clairs, ni moins rigoureusement démontrés que ceux des théories dynamiques, qu'ils sont féconds en applications utiles, et que les résultats sont conformes à ceux des expériences; enfin que les principes sont indépendants de toute hypothèse physique sur la nature de la chaleur. On était redevable à Newton des premières vues sur la théorie mathématique; Amontons avait fait la première expérience propre à éclairer la question de la propagation de la chaleur: l'académie avait proposé cette question pour le sujet d'un prix pour l'année 1738. Ce prix fut remporté par Euler; deux autres pièces furent approuvées et publiées comme *remplies de vues et de faits très-bien exposés.* L'une était d'Emilie du Châtelet, et l'autre de Voltaire: de cette dernière, on a retenu principalement le distique latin qui en était et l'épigraphe et l'analyse. Pour compléter l'histoire du problème, M. Fourier eût été forcé de parler de lui-même, et de rappeler la pièce qui fut couronnée par l'académie en 1811; mais on n'a pas oublié que cette pièce offrait des méthodes nouvelles et des formules fécondes, qui depuis ont trouvé des applications aussi nombreuses qu'importantes. « Si l'on suppose qu'un liquide pesant est soutenu dans un vase où la masse est actuellement en équilibre, et si l'on conçoit que les molécules viennent tout-à-coup à recevoir des températures inégales, l'équilibre cessera de subsister. Il s'établira dans toutes les parties du liquide des mouvements infiniment variés, et les conditions de ces mouvements ont des rapports nécessaires avec la distribution de la chaleur initiale. Si, indépendamment de l'inégalité de température, qui suffirait pour occasioner ces déplacements, on suppose que la masse fluide est soumise à des impulsions extérieures qui ne se font point équilibre, les mouvements des molécules seront encore plus composés, ils mêleront de plus en plus les différentes parties de la masse, et concourront ainsi à faire varier les températures; en sorte qu'il y a une influence réciproque des effets dynamiques proprement dits, et de ceux qui dépendent de la distribution de la chaleur. Il parait d'abord singulièrement difficile d'assujétir à un calcul exact toutes ces variations de température, et de les comprendre dans une équation générale; mais un examen très-attentif de la question montre qu'elle peut être complètement résolue. »

Pour parvenir à cette solution, l'auteur conçoit dans l'intérieur de la masse un espace prismatique d'une position donnée; il examine tous les changements successifs que subit la quantité de chaleur contenue dans cet espace. Cette quantité varie à chaque instant par la propriété que les molécules du fluide ont de communiquer leur chaleur aux molécules assez voisines; lorsque les températures sont inégales, la chaleur tend à se distribuer d'une manière plus égale, et se dispose insensiblement à l'état d'équilibre. Elle pénètre à travers les surfaces rectangulaires qui terminent le prisme, et l'effet instantané de cette propriété de la chaleur, est celui qui aurait lieu, si la masse était solide. Mais dans un fluide, les molécules elles-mêmes se déplacent; elles apportent dans l'espace prismatique la chaleur qu'elles contiennent; en sortant de ce même espace, elles emportent cette chaleur qui leur est propre. Nous connaissons l'expression analytique de la chaleur communiquée; il reste à tenir compte de la quantité de chaleur transportée. Elle ne dépend que des vitesses des molécules et des directions qu'elles suivent dans leurs mouvements. On calcule combien il entre de chaleur par l'une des faces du prisme, soit par voie de communication, soit à raison de l'écoulement du fluide; on détermine ensuite combien il sort de chaleur par la face opposée, à raison de l'une et de l'autre cause. Appliquant ce calcul à chacun des rectangles qui terminent le prisme, on connaît combien il acquiert de chaleur pendant un temps donné; et si l'on distribue cette chaleur acquise entre toutes les molécules, on connaît l'augmentation moyenne de la température pendant ce même temps. En rapportant les expressions précédentes à la durée d'un instant et à un prisme infinitésimal, on forme l'équation dont nous avons parlé. Elle est à différences partielles, comme celle des mouvements fluides. Par là, on introduit dans l'analyse de ces mouvements une nouvelle variable, la température, et une nouvelle équation qui sert à la déterminer.

Ici, l'auteur expose les cinq équations, dont les premières étaient connues et démontrées depuis long-temps, et la dernière exprime le mouvement de la chaleur dans les fluides incompressibles.

Le 22 mai 1820, M. Fournier avait lu un Mémoire *sur le refroidissement du globe*. Cet écrit ne nous a point encore été communiqué, non plus que le Mémoire de M. Poisson, *sur l'avantage du banquier au jeu de 30 et 40*, lu le 13 mars 1820.

Recherches sur les canaux de navigation, considérés sous le rapport de la chute et de la distribution de leurs écluses; par M. Girard. (26 juin 1820.)

La dépense d'eau d'un canal de navigation à point de partage, est le volume d'eau qui s'écoule chaque année du réservoir le plus élevé de ce canal, et des retenues subsidiaires placées de part et d'autre au-dessous de ce réservoir. Cette dépense se compose, 1° du volume d'eau enlevé dans le même intervalle de temps par l'évaporation naturelle; 2° de celui qui se perd dans les filtrations à travers les terres dans lesquelles le canal est établi; 3° de celui qui est nécessaire pour l'entretien annuel de la navigation ascendante et descendante. L'évaporation est nécessairement proportionnelle à la superficie des eaux exposées à l'air; il faut s'attacher, en réglant les dimensions des canaux, à ne leur donner que la largeur nécessaire pour que les bateaux puissent passer avec facilité, en montant et en descendant. Quelle que soit la nature du sol, on peut toujours, à l'aide de moyens appropriés, diminuer, ou même arrêter tout-à-fait les pertes d'eau occasionées par la filtration. Reste la dépense due à l'entretien de la navigation, et celle-ci est ordinairement beaucoup plus forte que la somme des deux autres. Aussi, quand il s'agit d'exécuter un canal, faut-il s'être assuré d'avance de pouvoir rassembler au point le plus élevé de son cours, une quantité d'eau suffisante pour l'entretien de la navigation. Quand cette première condition s'est trouvée impossible, on a tâché d'y suppléer par diverses inventions très-ingénieuses, mais sujettes à plus d'un inconvénient. Il importerait donc de trouver les moyens de diminuer la dépense sans changer le mode de construction des écluses à sas ordinaires. En tout temps il fut aisé de déterminer la quantité d'eau qu'il fallait tirer d'un bief ou réservoir quelconque, pour y faire monter ou pour en faire descendre un bateau, quand on connaissait la chute de l'écluse qui séparait ce bief du bief inférieur contigu. Plus tard, les ingénieurs français agitèrent la question de savoir comment la dépense du réservoir de partage se trouve modifiée, lorsque plusieurs écluses sont réunies en un seul corps de sas accolés. M. Gauthey, dans un Mémoire imprimé en 1783, exposa les dissidences d'opinions qui s'étaient élevées. M. Ducros, en l'an IX, donna quelques formules propres à exprimer la dépense lorsqu'un bateau traverse, en montant ou en descendant, un nombre quelconque de ses accolés. Ces formules, généralisées par M. de Prony, donnent le moyen de calculer aisément dans tous les cas la dépense d'eau qui a lieu pour le passage d'un ou de plusieurs bateaux à travers un système d'écluses multiples, de chacune desquelles on connaît la chute. Mais on n'avait pas encore traité la question importante de savoir s'il n'existe pas un rapport nécessaire entre cette chute, la dépense d'eau au passage de l'écluse, et le tirant d'eau des bateaux qui la montent ou la descendent. Cette recherche est l'objet du Mémoire de M. Girard. Nous ne pouvons le suivre dans l'énumération des suppositions et des cas qu'il considère successivement, et pour lesquels il donne des formules du genre le plus simple, desquelles il tire des conséquences très-usuelles, qui n'avaient point encore été remarquées. Il en déduit la valeur des actions dynamiques employées à chaque double passage pour chacun des trois cas où la dépense d'eau est positive, nulle ou négative. Il appelle *double passage* la montée d'un premier bateau et la descente d'un second. Quels que soient la dépense d'une écluse, la hauteur de sa chute, et le tirant d'eau des bateaux qui la traversent, la perte de forces vives, indispensable pour opérer le double passage, est toujours proportionnelle au quarré de la hauteur de la chute; et pour la perte des forces vives sur toute la longueur du canal, la somme des quarrés sera toujours d'autant moindre que le nombre des écluses sera plus grand et les chutes plus petites. Il y a donc de grands avantages à donner peu de chute aux écluses. Cette remarque utile paraît avoir échappé jusqu'ici aux ingenieurs qui se sont occupés de projets ou de constructions de canaux. A Venise, où l'on croit que furent construites les premières écluses, on ne dut pas être arrêté par la dépense d'eau, puisque le canal était alimenté par une rivière. Dans l'exécution du canal de Languedoc, il était de la plus haute importance d'économiser l'eau; il suffisait de diminuer la chute des écluses: on la fit si grande, que l'on fut obligé de démolir les premières qui furent construites, pour en construire de plus vastes. Mais cette substitution d'écluses moins élevées eut pour unique motif la trop grande pression d'eau, qui exposait à trop de dégradations toutes les parties de ces écluses primitives. Les ingénieurs les plus célèbres de France et d'Angleterre ont contribué, jusqu'à ces derniers temps, à maintenir les anciennes pratiques. Perronet a imprimé qu'il n'y a aucune raison de diminuer la chute des écluses, qui est, dit-il, le plus ordinairement, de 8, 10 ou 12 pieds. M. Gauthey remarqua depuis qu'il ne convient point de donner des chutes égales aux écluses d'un canal à partage; que les chutes les plus basses doivent etre établies près de ce point, et qu'à mesure qu'on peut alimenter le canal dans ses parties inférieures par de nouvelles prises d'eau, il n'y a point d'inconvénient à augmenter les chutes. Il n'a point cherché le rapport qui peut exister entre la chute des écluses et le volume d'eau consacré à leur service; il pense que la chute la plus convenable est de $2^{m}6$ par un milieu entre la plus grande et la plus petite, qu'il fait, l'une de $3^{m}9$, et l'autre de $1^{m}3$. M. Girard établit ensuite les principes rigoureux d'après lesquels les chutes des écluses successives d'un canal doivent être distribuées. Il démontre que quand un canal ne peut être alimenté que par les eaux rassemblées dans son bief culminant, les chutes des écluses doivent décroître à mesure qu'on les éloigne d'un bief; que ces décroissements de chute doivent être proportionnels à la longueur des biefs qui les précèdent; et qu'un canal éclusé doit être considéré comme un système de canaux partiels séparés par des prises d'eau consécutives, et dans chacun desquels les chutes d'écluses doivent décroître de leur extrémité supérieure à leur extrémité inférieure. Il montre ensuite comment la considération de la dépense d'action dynamique doit conduire au perfectionnement des canaux navigables. Les forces vives ou les actions dynamiques peuvent toujours représenter l'effet utile de quelques machines; l'économie de ces forces en laissera donc une plus grande quantité disponible. Jusqu'ici, l'on a été dans l'usage de considérer la navigation comme également utile dans les deux sens opposés. Il montre que la navigation descendante l'emporte beaucoup, par le poids des matières qu'elle met en mouvement, sur la navigation ascendante. Ce principe admis, le volume d'eau nécessaire à l'entretien de la navigation subira de grandes réductions. L'auteur en donne des exemples numériques. En augmentant le tirant d'eau, et en diminuant la chute, on obtiendra la possibilité de faire circuler un poids déterminé de denrées sur des canaux plus étroits, l'acquisition des terrains sera moins dispendieuse, et l'évaporation sera moindre. L'entretien des écluses sera bien moins considérable, et les réparations ordinaires moins fréquentes. L'auteur se propose de développer dans un Mémoire subséquent ces derniers avantages, et quelques autres qu'il ne fait ici qu'indiquer.

Outre ce Mémoire important, M. Girard a présenté, le 1er mai 1820, un *devis général* du canal S.-Martin, 1 vol. in-4°.

Mémoires sur l'état sanitaire de la flotte britannique.

Dans un voyage que M. Dupin a fait cette année en Angleterre, il s'est occupé spécialement de l'étude des moyens employés dans la marine britannique pour préserver les équipages des maladies les plus fréquentes et les plus dangereuses à bord des vaisseaux.

Il a consigné dans un premier Mémoire tous les résultats statistiques, montrant le progrès de l'état sanitaire de ces vaisseaux.

Dans un second Mémoire, il a fait voir que les soins apportés à la construction, à l'emménagement, à l'installation des bâtiments, au choix, à la variété, à la qualité, à la conservation des vivres et des boissons, à la propreté, à la sagesse, à la discipline des équipages, ont eu pour résultat de diminuer, dans une proportion vraiment étonnante, le nombre des maladies et des morts naturelles à bord des bâtiments de guerre et des bâtiments de transport.

Progrès des sciences et des arts de la marine française, depuis la paix.

Dans un écrit dont l'auteur a lu l'extrait à la séance publique du 28 mars 1820, M. Dupin a fait connaître quels perfectionnements et quelles inventions ont été introduits dans les diverses branches de la marine française.

M. Dupin cite avec un vif sentiment de plaisir et d'estime tous les travaux qui méritent quelque reconnaissance, et s'empresse de faire connaître les auteurs, il n'a oublié que les services qui lui sont dus : c'est la seule lacune qu'il ait laissée dans le tableau qu'il a tracé, mais il est facile au lecteur d'y suppléer par ses souvenirs.

Mémoires contenant des expériences relatives à l'action mutuelle de deux courants électriques, et à celle qui existe entre un courant électrique et le globe de la terre ou un aimant; par M. AMPÈRE. (Septembre, octobre, novembre et décembre 1820.)

Dès que M. Ampère eut connaissance de la découverte de M. Oersted sur le changement de direction produit dans une aiguille aimantée par le fil métallique qui établit la communication entre les deux extrémités d'une pile de Volta, il chercha d'abord à compléter, par diverses expériences, le travail de l'illustre physicien danois, et il découvrit bientôt une nouvelle sorte d'action, celle qu'exerce sur une portion de ce fil une autre portion du circuit voltaïque, sans la présence d'aucun aimant. La découverte de ce fait le conduisit à plusieurs autres observations nouvelles qu'il a successivement communiquées à l'Académie, avec les conséquences qu'il en a tirées, et dont le but général est d'établir l'identité de l'électricité et du magnétisme. Il est à remarquer que l'explication donnée par M. Oersted des phénomènes qu'il a découverts, suppose, au contraire, des propriétés toutes différentes aux fluides électrique et magnétique, quoique dans un ouvrage publié long-temps avant sa découverte, il eût paru porté à en admettre l'identité, mais comme une simple conjecture. Le travail de M. Ampère se divise naturellement en trois parties bien distinctes : la première se compose de faits nouveaux relatifs à l'action mutuelle de deux portions de conducteurs voltaïques, et à celle du globe terrestre sur un conducteur mobile. Il imagina de disposer une portion du circuit voltaïque de manière qu'elle pût se mouvoir sans que ses communications avec les deux extrémités de la pile fussent interrompues ; et il y parvint, soit en la suspendant sur des pointes d'acier qui plongeaient dans du mercure contenu dans de petites coupes de fer ou de platine, soit en la faisant porter sur des rouleaux en contact avec du mercure placé sur des plaques de tôle entourées d'un rebord qui ne permettait pas à ce liquide de se répandre. Il rendit ainsi cette portion du conducteur susceptible de se mouvoir, tantôt en restant parallèle à sa première direction, tantôt en tournant autour d'un axe vertical ou horizontal ; il observa alors les faits suivants :

1° Lorsque deux conducteurs ou plutôt deux portions d'un même conducteur voltaïque sont l'une fixe et l'autre mobile, et qu'on les place dans des directions à-peu-près parallèles, la portion mobile est attirée par l'autre quand les extrémités qui communiquent avec un même pole de la pile sont du même côté dans toutes les deux ; elles se repoussent dans le cas où ces extrémités sont opposées.

2° Ces attractions et répulsions sont absolument différentes des attractions et répulsions électriques ordinaires : celles-ci sont produites par la pile de Volta, quand le circuit est interrompu, et que celles que M. Ampère a découvertes n'existent pas ; elles cessent dès que la continuité du circuit est établie, et c'est alors seulement que ces derniers apparaissent. Dans les premières, il y a répulsion entre les corps électrisés de la même manière, l'attraction a lieu entre des corps électrisés d'une manière opposée, et quand les deux corps qui se sont attirés viennent à se toucher, et qu'ils sont susceptibles de conduire l'électricité, toute attraction cesse entre eux. Dans les attractions et répulsions des fils conducteurs, l'attraction a lieu, au contraire, quand les extrémités de ces conducteurs qui communiquent avec un même pôle de la pile sont du même coté, le contact ne fait point cesser l'attraction, et il y a répulsion quand ce sont les extrémités d'espèces opposées qui sont du même côté.

3° L'action mutuelle des deux parties du conducteur voltaïque reste la même quand, dans cette expérience, on remplace la portion fixe du fil conducteur dont on observe l'action sur la partie mobile, par une portion du même fil qui ne diffère de la première supposée rectiligne, qu'en ce qu'elle forme une ligne pliée et contournée à chacun de ses points, de manière que les distances de ces points à ceux de la partie mobile restent sensiblement les mêmes, et que le reste du circuit n'éprouve aucun changement.

L'importance de ce fait, dont M. Ampère a déduit la loi mathématique de ces nouvelles attractions et répulsions électriques, l'a engagé à le vérifier par des expériences variées. Pour en rendre les résultats plus précis, il a suspendu la partie mobile à égales distances entre deux portions fixes, l'une rectiligne, et l'autre pliée et contournée comme nous venons de le dire; il a établi les communications de manière que la portion mobile fût repoussée par les deux autres, et qu'on pût à volonté n'en mettre qu'une de celles-ci, ou les mettre toutes les deux en communication avec les extrémités de la pile. Dans le premier cas, cette partie mobile a été repoussée par l'action de la portion fixe qui faisait partie du circuit voltaïque; dans le second, elle est restée immobile, en équilibre entre les actions qu'ont exercées les deux portions fixes et dont l'égalité a été ainsi exactement déterminée.

4° Lorsqu'on dispose la partie mobile du conducteur de manière qu'elle ne puisse se mouvoir qu'en tournant autour d'une perpendiculaire commune à sa direction, et à celle de la portion fixe du même conducteur qui agit sur elle, elle tourne autour de cette perpendiculaire d'un mouvement qui s'accélère jusqu'à ce qu'elle arrive dans la situation où elle est parallèle à la portion fixe, et où ces deux parties du circuit voltaïque ont celles de leurs extrémités qui sont en communication avec un même pôle de la pile tournées du même côté; ce mouvement se ralentit, dès que la portion mobile, en vertu de la vitesse acquise, a dépassé cette situation, elle revient bientôt pour la dépasser de nouveau, et s'y arrêter enfin après quelques oscillations.

5° La pile elle-même agit dans ces expériences comme toute autre partie du circuit voltaïque, avec cette seule différence, que la disposition de l'électricité qui a lieu dans le conducteur du pôle zinc au pôle cuivre, existe, au contraire, dans la pile du pôle cuivre au pôle zinc; c'est cette disposition que M. Ampère a nommée *courant électrique*, conformément à l'usage établi par d'autres physiciens; mais sans prétendre prononcer, en adoptant cette expression, sur le mode d'action de l'électricité dans le circuit voltaïque. Le sens de cette dénomination, *courant électrique*, étant ainsi défini, on peut réunir les faits relatifs à l'action de la pile elle-même et à celle du circuit voltaïque, que nous venons d'exposer, sous ce simple énoncé : Deux courants électriques parallèles s'attirent quand ils sont dirigés dans le même sens, et se repoussent dans le cas contraire. Deux courants électriques qui ne peuvent se déplacer qu'en tournant autour de la perpendiculaire commune qui en mesure la plus courte distance, tendent à s'amener mutuellement dans la situation où ils sont parallèles et dirigés dans le même sens.

6° Quand on dispose la pile et les fils métalliques qui la mettent en communication avec un conducteur mobile, de manière à ce que, d'après leurs distances et leurs directions, ils ne puissent avoir d'action sensible sur lui, on observe dans ce conducteur des mouvements que M. Ampère, en plaçant successivement la pile et les conducteurs dans différentes situations, a démontré ne pouvoir être attribués qu'à une action du globe terrestre sur les corps où existe la disposition de l'électricité qu'il a désignée sous le nom de courant électrique;

7° Lorsque le conducteur mobile forme un circuit presque fermé dans un plan vertical, et ne peut que tourner autour de la perpendiculaire à l'horizon qui passe par son centre de gravité, il est amené par l'action du globe terrestre dans une situation où le plan de ce conducteur forme un angle droit avec le méridien magnétique, et où la direction du courant électrique dans sa partie inférieure est dirigée de l'est à l'ouest, et lorsqu'on l'écarte de cette situation, il y revient et s'y arrête après avoir oscillé autour d'elle, précisément comme il le ferait si l'action que la terre exerce était due à un courant électrique situé au-dessous de sa surface et dirigé de l'est à l'ouest perpendiculairement au méridien magnétique.

8° Lorsque le conducteur mobile forme un circuit presque fermé de forme rectangulaire, qu'il est attaché à un axe passant par son centre de gravité, et parallèle à deux des côtés du rectangle, et que cet axe repose sur des appuis, de manière que sa direction soit horizontale et perpendiculaire au plan du méridien magnétique, celui des deux côtés du rectangle qui sont parallèles à l'axe dans lequel le courant électrique a lieu de l'est à l'ouest, est porté par l'action de la terre au midi quand le plan du conducteur est vertical, et en bas quand il est horizontal, tandis que l'autre côté parallèle à l'axe où le courant se dirige alors de l'ouest à l'est, est porté au nord dans le premier cas, et en haut dans le second; dans ce mouvement le plan du conducteur mobile oscille évidemment autour d'un plan perpendiculaire à la direction de l'aiguille d'inclinaison, et c'est précisément dans ce plan qu'il s'arrête, lorsque le centre de gravité de toute la partie mobile de l'instrument étant exactement dans l'axe, son poids n'a aucune action pour changer la direction que la force électro-magnétique de la terre tend à lui donner.

Il est évident que cette force est la même que celle qui dirige l'aiguille aimantée, et on ne peut disconvenir que l'action qu'elle exerce, soit sur un conducteur mobile, soit sur un aimant, ne soit précisément celle qu'exerceraient des circuits voltaïques composés des différents matériaux de notre globe produisant dans son intérieur des courants électriques dirigés de l'est à l'ouest suivant des lignes perpendiculaires au méridien magnétique, et qui agiraient soit sur les conducteurs mobiles comme M. Ampère a montré que les fils conjonctifs de nos piles agissent sur eux, soit sur une aiguille aimantée comme ces fils agissent sur cette aiguille dans les expériences de M. Oersted. C'est sur cette similitude d'effets que notre collègue a cherché à établir que l'électricité est réellement distribuée dans notre globe comme elle le serait dans les circuits voltaïques dont nous venons de parler, soit que cette distribution de l'électricité soit produite par le contact des substances minérales de diverse nature, comme cela a lieu dans nos piles, ou qu'elle soit due à d'autres causes (1).

La seconde partie du travail de M. Ampère est relative à l'action mutuelle des fils conducteurs et des aimants découverte par M. Oersted; elle se compose de quelques nouveaux faits qui complètent les résultats obtenus par ce célèbre

(1) D'après la direction générale de l'est à l'ouest des courants électriques dont M. Ampère admet l'existence dans le globe terrestre, et d'après les expériences de plusieurs physiciens sur l'action galvanique produite par le contact de deux disques d'un même métal dont la température est différente, il pense que le changement successif de température qui a lieu chaque jour dans cette direction, à mesure que le soleil passe d'un méridien à un autre, est une des causes auxquelles on peut attribuer avec quelque probabilité l'existence des courants électriques de la terre; peut-être aussi que l'action de la lumière n'y est pas étrangère, s'il est vrai qu'elle communique à l'acier la propriété magnétique, et si ces propriétés, comme le croit M. Ampère, dépendent d'une disposition semblable de l'électricité dans les aimants; alors les courants électriques n'auraient lieu que dans les couches les plus extérieures du globe terrestre, où la température varie, et on ne devrait avoir recours à l'action galvanique des matériaux de l'intérieur de la terre, que pour expliquer la déclinaison de l'aiguille aimantée, et les variations de l'inclinaison.

physicien, et des conséquences que l'auteur a déduites de ces résultats et de ses propres expériences relativement à l'identité de l'électricité et du magnétisme; il a constaté :

1° Que si M. Oersted n'avait obtenu, dans ses expériences, que des déviations de l'aiguille aimantée toujours moindres qu'un angle droit, cette circonstance était uniquement due à ce que le magnétisme terrestre continuait d'agir sur l'aiguille qu'il employait; en attachant une aiguille aimantée à un axe parallèle à la direction de l'aiguille d'inclinaison, M. Ampère l'a soustraite à l'action magnétique de la terre, et en faisant alors agir sur elle un conducteur voltaïque, il a reconnu qu'elle prenait constamment une direction exactement perpendiculaire à ce conducteur;

2° Qu'outre l'action qu'a décrite M. Oersted par laquelle un conducteur voltaïque change la direction de l'aiguille aimantée, il attire la masse entière de cette aiguille lorsqu'elle lui est présentée dans la direction qu'il tendrait à lui donner si elle n'y était pas déja, et qu'il la repousse quand elle est dirigée en sens contraire;

3° Que le conducteur agit dans tous les cas sur l'aiguille aimantée comme il agirait sur une aiguille qui ne le serait pas, mais à laquelle serait attachée, dans un plan perpendiculaire à la ligne qui en joint les pôles, une portion de circuit voltaïque dont le courant électrique tournerait autour de l'aiguille, relativement à ses pôles, dans le même sens que le soleil paraît autour de notre globe, relativement aux pôles de la terre qui portent le même nom que ceux de l'aiguille, en sorte que l'action ne varie qu'en intensité lorsque, dans les expériences relatives à l'action mutuelle de deux fils conducteurs, on substitue d'abord à l'un d'eux, et ensuite à tous les deux, des aimants disposés de manière que la direction du courant électrique soit la même dans les fils conducteurs qu'ils remplacent, et dans des circuits voltaïques qui, comme nous venons de le dire, tourneraient autour de ces aimants, relativement à leurs pôles, dans le sens où le soleil paraît tourner autour de la terre relativement à ses pôles de même nom que ceux des aimants. On obtient ainsi tous les phénomènes qu'offre l'action mutuelle d'un fil conjonctif et d'un aimant, lorsqu'on ne remplace par un aimant qu'un des deux conducteurs, et tous ceux que produisent deux aimants l'un sur l'autre, lorsqu'on les remplace tous les deux;

4ᵉ Qu'on imite parfaitement toutes les circonstances de l'action connue d'un barreau et d'une aiguille aimantée, lorsqu'on substitue soit au barreau soit à l'aiguille, un fil de cuivre faisant partie d'un circuit voltaïque dont une portion est enfermée dans un tube de verre, et l'autre forme une hélice qui l'entoure de ses spires. Celle des deux extrémités du tube, qui est située, relativement à la direction du courant électrique établi dans l'hélice, comme l'est le pôle austral de la terre relativement à la direction du mouvement apparent du soleil, agit dans toutes les positions qu'on donne au tube et à l'aiguille ou au barreau aimantés qu'on lui présente, précisément comme le ferait, dans les mêmes circonstances, le pôle austral d'un aimant, et l'extrémité opposée comme le pôle boréal.

C'est de l'ensemble de ces faits que M. Ampère a conclu que les phénomènes qu'offrent les aimants sont de purs phénomènes électriques, et qu'ils sont dus uniquement à ce que l'électricité est disposée ou se meut dans un aimant suivant des courbes fermées tracées dans des plans perpendiculaires à l'axe de l'aimant, précisément comme elle est disposée ou se meut dans le circuit voltaïque. Plusieurs physiciens avaient, à différentes époques, regardé comme probable l'identité des fluides électrique et magnétique, mais aucun n'avait essayé de dire comment il fallait que l'électricité fût disposée dans un aimant pour qu'elle produisît les phénomènes qu'il présente; c'est ce qu'a fait M. Ampère, et l'on ne peut disconvenir que tous les faits connus jusqu'à présent ne s'accordent parfaitement avec ses idées sur ce sujet; elles ont contribué aux importantes découvertes de M. Arago sur l'aimantation de l'acier par l'électricité, en le portant à plier le fil conducteur en hélice autour du barreau ou de l'aiguille qu'il veut aimanter, et l'efficacité de ce moyen paraît confirmer complètement les vues qui en ont suggéré l'emploi.

M. Ampère avait d'abord supposé que les courbes fermées, suivant lesquelles des courants électriques agissent dans l'aimant comme dans le circuit voltaïque, entouraient toutes l'axe de l'aimant; il a montré, dans un Mémoire qu'il a lu depuis à l'Académie, qu'on pouvait également expliquer les faits connus en admettant que ces courants ont lieu autour de chaque particule du barreau ou de l'aiguille aimantés. Comme cette question ne peut être résolue que par des expériences délicates qui n'ont pas encore été tentées, M. Ampère n'a pas cru que le moment fût venu d'émettre sur ce sujet une opinion positive.

La troisième partie du travail de M. Ampère consiste dans les recherches qu'il a faites sur les lois mathématiques des attractions et répulsions de deux fils métalliques faisant partie d'un circuit voltaïque; il a déduit ces lois de l'égalité des actions produites par un conducteur rectiligne, et par un conducteur plié et contourné à chacun de ses points, comme nous l'avons dit plus haut, et de quelques résultats généraux des faits déja connus, ou de ceux qu'il avait observés; il en conclut :

1° Que l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de fils conducteurs est, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse du quarré de leur distance;

2° Que si l'on considère une de ces portions infiniment petites comme la diagonale d'un parallélipipède, son action sur l'autre est égale à la somme des actions qu'exerceraient sur cette dernière trois portions du premier fil conducteur, dirigées suvant les trois arêtes qui mesurent les trois dimensions du parallélipipède et de même longueur que ces arêtes;

3° Que l'action dont nous parlons est, à distances égales, proportionnelle à une fonction des angles que les directions des deux portions infiniment petites des fils conducteurs forment avec la ligne qui en joint les milieux, et de l'inclinaison mutuelle des plans de ces deux angles, fonction dont il a déterminé la forme et donné l'expression analytique;

4° Qu'il suit de cette loi qu'en supposant l'électricité disposée comme elle l'est dans le conducteur voltaïque, suivant une série de lignes droites ou courbes tracées à distances égales et infiniment petites sur deux surfaces planes ou courbes, de manière que ces surfaces interceptent, pour un point situé hors de l'espace qui se trouve entre elles, la même portion de l'aire d'une sphère infinie, et que les lignes tracées sur l'une soient, relativement à ce point, les projections des lignes tracées sur l'autre, les deux surfaces exerceront sur lui des actions égales et de même signe quand l'électricité sera disposée dans le même sens sur les deux surfaces, et dans le cas contraire, des actions égales et de signes différents qui se détruiront mutuellement si elles ont lieu en même temps.

Ces résultats fondés sur des déductions nécessaires des données de l'expérience, ne peuvent être mis en doute tant qu'il ne s'agit que de l'action mutuelle des fils conducteurs, découverte par M. Ampère; il les étend non-seulement à celle que M. Oersted nous a fait connaître entre un fil conducteur et un aimant, mais à celle de deux aimants l'un sur l'autre, conformément à la manière dont il conçoit que l'électricité, disposée dans les aimants comme nous l'avons dit plus haut, produit tous les phénomènes magnétiques. Cette extension donnée aux lois mathématiques de l'action mutuelle des conducteurs voltaïques décidera la question de l'identité de l'électricité et du magnétisme, cette question se trouvant ramenée par le travail de M. Ampère à une question qui est uniquement du ressort de l'analyse mathématique, puisqu'il ne s'agit plus que de calculer, d'après les formules qu'il a données, toutes les circonstances de l'action mutuelle de deux aimants que les physiciens ont observées ou mesurées jusqu'à présent, et de voir si les résultats de ces calculs s'accordent constamment avec les données de l'expérience.

Faits nouveaux relatifs à l'aimantation, découverts par M. Arago.

Les observations de M. Oersted sont, comme on vient de le voir, relatives à l'action que le courant voltaïque exerce sur une aiguille *préalablement aimantée.* M. Arago, qui, le premier, a fait connaître à l'Académie l'importante découverte du physicien danois, y a presque aussitôt ajouté ce fait: Que le même courant et l'électricité ordinaire développent la vertu magnétique dans les barreaux de fer et d'acier qui en étaient totalement privés. Voici dans quel ordre les observations relatives à ce nouveau genre d'aimantation ont été communiquées à l'Académie.

Dans la séance du 25 septembre, l'auteur annonça cette remarque curieuse qu'un fil métallique, qui est en communication avec les deux pôles d'une pile de Volta, se charge de limaille de fer comme le ferait un véritable aimant.

Ce phénomène ne dépendait pas d'une aimantation préalable de la limaille, puisque des fils de fer doux, ou d'acier, n'en attiraient aucune parcelle. On l'aurait expliqué tout aussi peu en l'attribuant à des actions électriques ordinaires; car si on répète l'expérience avec de la limaille de cuivre ou de zinc, ou avec de la sciure de bois, on n'observe aucune attraction sensible. — L'aimantation de la limaille de fer n'était que momentanée, mais tout portait à croire qu'en opérant sur de l'acier on obtiendrait une aimantation permanente; en effet, M. Arago aimanta ainsi complètement de petits morceaux d'acier et une aiguille à coudre. — M. Ampère, à qui M. Arago montrait ces expériences, venait de tirer, par induction, de sa belle découverte sur l'action mutuelle de deux courants électriques, la conséquence que les attractions et les répulsions que les aimants exercent suivant les circonstances, les uns sur les autres, dépendent de courants électriques qui circulent autour du fer ou de l'acier, dans des directions perpendiculaires à la ligne passant par les deux pôles; ces vues théoriques lui suggérèrent la pensée qu'on obtiendrait une aimantation plus intense en substituant au fil conjonctif droit dont M. Arago s'était servi, un fil plié en hélice, au centre de laquelle l'aiguille d'acier serait placée. Une expérience que ces deux savants firent en commun, vérifia entièrement la conjecture.

En suivant ces idées, M. Arago produisit instantanément un grand nombre de points conséquents sur un long fil d'acier qu'il avait introduit dans une série d'hélices symétriques formées en roulant le fil conjonctif en spirales, d'abord dans un sens, sur une certaine étendue du fil, ensuite dans le sens contraire pour une étendue égale, et ainsi de suite. Il reconnut de plus, en revenant sur les premières expériences qu'il avait faites à l'aide d'un fil conjonctif rectiligne, que l'aiguille d'acier ne s'aimante point lorsqu'elle est exactement parallèle à ce fil; et que, pour obtenir quelque effet, il faut que le courant agisse transversalement sur l'aiguille.

Le lundi, 25 octobre, M. Ampère lut un mémoire à l'Académie, pour montrer que toutes les circonstances qui viennent d'être rapportées confirment sa théorie des actions magnétiques.

Le lundi, 5 novembre, M. Arago annonce que l'électricité ordinaire produit tous les phénomènes d'aimantation qu'il avait déjà observés en se servant de l'électricité voltaïque. Ainsi un barreau d'acier ayant été placé dans un tube de verre scellé, pour éviter qu'on ne supposât que la *décharge électrique* pouvait, durant l'expérience, l'atteindre en partie, on enroula un fil de cuivre autour du tube; or les étincelles électriques qu'on faisait passer le long de cette hélice communiquaient une forte vertu magnétique au barreau; les pôles nord et sud se formaient à l'une ou à l'autre des extrémités, suivant le sens du courant et celui des spires; on produisit, par une même étincelle, autant de points conséquents qu'on changeait de fois, sur la longueur du fil, le sens de la spirale, etc., etc.

M. Arago fit encore part à l'Académie des résultats qu'il avait obtenus sur l'intensité des charges magnétiques communiquées à des aiguilles d'acier de même longueur, de même poids et de même grosseur, qui avaient été placées dans l'intérieur d'une hélice de deux décimètres de diamètre, et plus ou moins loin de la surface; mais nous attendrons, pour rendre compte de ces expériences, que l'auteur les ait complétées. Et comme plusieurs physiciens étrangers se sont aussi occupés des aimantations produites à distance par l'action de l'électricité ordinaire, il nous a paru convenable de faire remarquer que les résultats annoncés à l'Académie, dans sa séance du 6 novembre 1820, en présence d'un nombre considérable de savants qui ne sont point membres de l'Institut, ont été insérés, par extrait, dans le Moniteur du vendredi, 10 novembre suivant.

Le 24 juillet 1820, M. de Humboldt avait présenté à l'Académie une *nouvelle carte du rio grande* de la Madeleine.

Le même jour, M. Biot avait lu un Mémoire *sur les propriétés* *optiques de la chaux carbonatée magnésifère, vulgairement appelée bitter-spath.*

Le 2 octobre 1820, M. Coquebert-Montbret lut un Mémoire sur la comparaison qu'il a faite à Londres de la livre de *troy* avec le kilogramme, et de laquelle il a conclu le rapport entre la livre *avoir du poids* et le même kilogramme.

Le 30 octobre, M. Biot lut un Mémoire *sur les lois physiques des expériences faites en continuation de celles de M. Oersted ;* et

Le 18 décembre, un second Mémoire *sur les propriétés magnétiques que les fils de métal acquièrent lorsqu'ils servent de conducteurs au courant voltaïque.*

Ces divers Mémoires ne nous ont point été communiqués.

OUVRAGES IMPRIMÉS.

Dans le cours de 1820, M. le marquis de La Place a mis dans la Connaissance des Temps de 1823 plusieurs Mémoires dont nous allons rendre un compte succinct, en suivant l'ordre des matières, plutôt que celui de la date de la composition.

Sur la diminution de la durée du jour par le refroidissement de la terre.

De l'ensemble des anciennes éclipses l'auteur avait conclu que depuis deux mille ans la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde centésimale; et de plus, que si la terre entière a été primitivement fluide, ses dimensions ont diminué progressivement avec sa température; et alors sa vîtesse angulaire de rotation a augmenté graduellement et continuera de s'accroître, jusqu'à ce que la terre soit parvenue à l'état constant de température moyenne, qui convient à celle de l'espace dont elle est environnée, et à l'action de la chaleur solaire. Si l'on transportait ce globe dans un espace dont la température fût moindre d'un degré centésimal, toutes choses égales d'ailleurs, l'aire que ses molécules décrivent dans le plan de l'équateur diminuerait à-peu-près d'un cinquante-millième, si la vîtesse de rotation n'augmentait pas; il faut donc que l'accroissement de la vîtesse, et par conséquent la diminution de la durée de la rotation soient d'un cinquante-millième. Mais avant de parvenir à son état final de température, le globe a une température qui diminue sans cesse, plus lentement au centre qu'à la surface. La terre paraît être dans un état semblable; ce qui résulte des observations thermométriques faites dans des mines profondes et qui indiquent un accroissement de chaleur très-sensible à mesure que l'on pénètre dans la terre. La moyenne des accroissements observés paraît être d'un degré centésimal pour un enfoncement de 32 mètres; un plus grand nombre d'observations fera connaître exactement sa valeur. Cet élément indique une très-grande chaleur à la surface de la terre à des époques fort reculées; la chaleur terrestre doit être excessive à la profondeur d'un million de mètres et surtout au centre de la terre; en sorte que cette partie du globe est probablement à l'état de fusion, et se réduirait en vapeurs si elle n'était contenue par les couches supérieures dont la compression à ces grandes profondeurs est extrême.

Pour calculer l'accroissement de la rotation l'auteur cherche à déterminer la loi de diminution de la chaleur du centre à la surface, ce qui ne peut se faire sans calcul et sans hypothèse. Il nous suffira de dire qu'en satisfaisant aux conditions et aux phénomènes, on arrive successivement à ces deux résultats que la durée du jour n'a pas diminué de $\frac{1}{385}$ depuis Hipparque, et de $\frac{1}{759}$ en mille ans; au reste, l'auteur est fort éloigné de croire que les suppositions qu'il a faites soient dans la nature. Voyez l'ouvrage cité, pages 248 et 257.

Sur la densité moyenne de la terre, par le même, ibid. p. 328.

« Un des points les plus curieux de la géologie est le rapport de la moyenne densité du sphéroïde terrestre à celle d'une substance connue. Newton eut la première idée de ce rapport qu'il avait estimé d'une manière singulièrement approchée. Son raisonnement était que si la terre était moins dense que l'eau, elle en sortirait par sa légèreté, les matières les plus denses se portant naturellement vers le centre quand la masse est fluide; et de l'accroissement de densité vers le centre il avait conclu que la masse entière de la terre est *cinq ou six fois plus dense que si elle était formée d'eau.*

Par les expériences du pendule à Quito, on trouve *cinq* fois environ; les déviations du fil à plomb ont donné un résultat peu différent. Mais l'ignorance où l'on est de la constitution intérieure des montagnes du Pérou, la certitude que l'on a qu'elles sont volcaniques, jointe à l'incertitude des observations, ne permettent pas de prononcer sur la vraie densité spécifique de la terre. Celles de Maskelyne en Écosse étaient beaucoup plus sûres à raison de l'excellence du secteur; le docteur Hutton, dans un travail couronné par la société royale de Londres, a trouvé que la densité de la terre est à celle de la montagne dans le rapport de 9 à 5. D'où Plaifair, par un examen lithologique de la montagne, a déduit 5 à fort peu près pour la moyenne densité de la terre. Avec un appareil de Michel, perfectionné par Cavendish et dont la pièce fondamentale était la balance de torsion que Coulomb inventait de son côté et qu'il a publiée le premier, on a trouvé 5, 48 par un milieu entre 29 expériences dont les extrêmes sont 4, 88 et 5, 79. Il y a donc une grande probabilité que l'erreur est fort petite.

Sur le perfectionnement de la théorie et des tables lunaires, par le même. Ibid. p. 226.

L'Académie des sciences, en proposant pour sujet du prix la formation de tables lunaires uniquement fondées sur la théorie de la pesanteur universelle, a eu pour objet de faire disparaître la seule exception que présentait à cet égard l'ensemble des tables des mouvements célestes. Déjà, par les travaux des géomètres, la théorie lunaire se rapprochait beaucoup des observations, et dans sa Mécanique Céleste, l'auteur était parvenu à réduire à 8"5 la plus grande différence entre les coëfficients des inégalités de son analyse et ceux des tables de M. Burg. Il était donc naturel de penser qu'au moyen d'approximations portées plus loin, la théorie représenterait les observations dans les limites des erreurs dont elles sont susceptibles. Les deux pièces que l'Académie vient de couronner, remplissent cette condition. Elles sont l'une et l'autre le résultat d'un immense travail; et leur comparaison avec nos tables lunaires ne laisse aucun lieu de douter que les formules qu'elles contiennent, réduites en tables, satisferaient aux observations. C'est ce que l'auteur de la première pièce, M. Damoiseau, a prouvé directement, par le calcul de 60 observations de Bradley et de 60 observations faites depuis 1802. On peut donc croire qu'en améliorant encore par la discussion d'un très-grand nombre d'observations, les éléments arbitraires de la théorie, l'auteur donnerait à ses tables toute l'exactitude que l'on peut désirer.

Les auteurs de la seconde pièce, MM. Plana et Carlini, ont suivi moins invariablement la marche de M. La Place, ils ont cherché une analyse plus uniforme et plus générale; l'uniformité de la méthode donne sans doute de l'élégance à l'analyse. Mais quand on se propose de rapprocher le plus qu'il est possible l'analyse, des observations, nous dit aujourd'hui l'auteur de la *Mécanique céleste*, il faut varier la méthode suivant la nature des inégalités; c'est dans le choix de ces méthodes et dans la prévoyance des quantités qui peuvent devenir sensibles par les intégrations successives que consiste l'art des approximations. L'emploi des observations, pour la formation des tables lunaires, a l'avantage de faire connaître les coëfficients des inégalités, avec une exactitude toujours croissante, quand on augmente le nombre des observations; on peut ainsi approcher indéfiniment et par là surpasser la précision de la théorie, dont les approximations deviennent tellement compliquées, lorsqu'on veut les porter fort loin, qu'on est forcé d'y renoncer. La méthode qui emploie les observations peut donc être utilement employée; on la rendra plus exacte et plus facile, si l'on y regarde comme autant de données certaines, les coëfficients sur lesquels la théorie ne laisse point d'incertitude et les rapports qu'elle indique avec précision entre ces coëfficients; ce qui simplifiera le calcul et donnera plus de précision aux résultats.

Nous omettons les objections faites de part et d'autre et que les auteurs se sont franchement et réciproquement communiquées. Voyez la connaissance des temps de 1823 et le Mémoire intitulé : *Observations sur l'écrit de M. de La Place, lu en* 1820 *au bureau des longitudes;* et pour l'analyse des problèmes nous nous bornerons à citer les mémoires de M. de la Place:

Sur les inégalités lunaires dues à l'aplatissement de la terre.

Sur l'inégalité lunaire à longue période, dépendante de la différence des deux hémisphères terrestres.

Éclaircissements sur les Mémoires précédents, *etc. Conn. des temps*, 1823.

Traité de physique élémentaire, par M. Biot. 2e édition. premier volume.

Nouvelles méthodes pour la détermination de l'orbite des comètes. Second supplément, par M. Le Gendre

En exposant dans notre traité d'astronomie les diverses méthodes imaginées par les astronomes et par les géomètres, nous avons rendu ce témoignage à celle de M. Le Gendre, qu'elle est l'une des plus simples qui existent, si même elle n'est pas la plus courte que l'on connaisse. Mais toute méthode a ses inconvénients, comme ses avantages. L'auteur a senti lui-même ce que la sienne laissait à désirer. Pour la seconde fois il vient de travailler à la rendre plus parfaite

Ne pouvant nous livrer ici à aucun développement nous nous contenterons d'annoncer aux astronomes ce nouveau supplément qu'ils trouveront digne de toute leur attention

L'année dernière, M. Dupin a présenté le premier volume de ses voyages, qui comprend tout ce qui se rapporte à la constitution de l'armée britannique.

Le second volume est relatif aux études et aux travaux militaires. Il est divisé, comme le premier, en six livres de six chapitres, qui traitent successivement de la force morale de l'armée, des écoles militaires, des exercices et des petites armes, des bouches à feu, des travaux des parcs et des arsenaux d'artillerie; enfin, des travaux du génie militaire.

Dans le premier livre, l'auteur fait connaître ce qui distingue l'intelligence et le caractère des militaires des trois royaumes; l'influence des idées et des pratiques religieuses, en conformité ou en dissidence avec la foi reconnue par l'État; des récompenses d'honneur considérées comme véhicule des services militaires; des châtiments corporels et des supplices considérés comme un frein mis aux désordres et à l'infraction des devoirs; enfin de la discipline des corps. soit intérieure, soit à l'extérieur, et dans ses rapports avec la sécurité des citoyens. Ce livre, comme on voit, n'appartient pas moins au moraliste qu'au militaire, et, par son objet, mérite de fixer l'attention de toutes les classes de lecteurs : un célèbre publiciste en a fait connaître l'esprit et le mérite dans un article auquel nous n'avons rien à ajouter (1).

---

(1) Voyez dans la *Revue Encyclopédique* l'analyse rédigée par M. le comte Lanjuinais; juillet 1820.

Dans le second livre, depuis les écoles élémentaires des enfants des soldats jusqu'aux écoles spéciales du génie, M. Dupin examine quelles sont les méthodes suivies pour l'enseignement, et quel est le fruit de cet enseignement : quel cercle de connaissances théoriques et pratiques embrasse chaque espèce d'étude; quels soins physiques et moraux sont donnés au bien-être, à la propreté, à la santé, à la sagesse des élèves : ce livre est le travail d'un académicien, qui porte dans l'examen des institutions relatives à l'instruction, les vues qu'il a puisées dans la connaissance générale des sciences et des arts appliqués aux besoins spéciaux de la société.

Nous n'entrerons pas dans les détails techniques des livres suivants; nous nous contenterons d'y remarquer les parties qui se rapportent plus particulièrement aux sciences physiques et mathématiques.

M. Dupin rapporte une foule d'expériences sur les petites armes et les bouches à feu de France et d'Angleterre; il compare à chaque instant les résultats, et de cette comparaison sortent souvent des conséquences d'un extrême intérêt pour le perfectionnement du matériel de notre artillerie. Il donne la description détaillée du grand et bel appareil du pendule ballistique de Woolvich, avec la série des opérations et des calculs employés dans les expériences faites à l'aide de ce pendule.

Il décrit des machines que personne avant lui n'avait fait connaître en France : telles sont les presses hydrauliques appliquées à l'aplanissement des bois, au tournage, au forage des métaux, etc.

Enfin, dans le dernier livre, il présente des renseignements précieux sur la force défensive de la Grande-Bretagne, tirée, soit des obstacles de la nature, soit des travaux de l'art.

Les deux volumes relatifs à la force militaire de la Grande-Bretagne, considérés sous le point de vue purement militaire, sont maintenant jugés par les officiers qui décident en ce genre du suffrage public.

Malgré des dissidences de jugements inévitables sur une foule de points mis en discussion par des rivalités nationales, les critiques anglais et français se sont réunis pour rendre hommage à l'impartialité de l'auteur, à la justesse de ses observations, à la fidélité de ses descriptions, et souvent à la profondeur de ses vues comme à l'énergie de leur expression.

Force navale de la Grande-Bretagne, premier volume :
CONSTITUTION DE LA MARINE.

M. Dupin vient de présenter à l'Académie le premier volume de la seconde partie de ses voyages, relative à la force navale.

La force navale de l'Angletrre est pour les autres nations un objet encore plus instructif et plus important que la force de son armée de terre. Car c'est par la force navale qu'elle a conquis tant de richesses et de contrées, et qu'elle a exercé sur le sort des nations européennes une si puissante influence.

Cette partie est celle pour laquelle le public est en droit d'attendre le plus de l'auteur. M. Dupin, officier supérieur au génie maritime, habitué par son état à rapporter à la marine toutes ses observations, a profité de son expérience pour approfondir les institutions maritimes de la Grande-Bretagne, dont il offre le tableau complet dans le premier volume relatif à la force navale.

Il donne d'abord un aperçu rapide des progrès de la puissance maritime des rois d'Angleterre et de leurs entreprises pour s'assurer la domination des mers : il traite ensuite des rapports de l'autorité royale et de l'autorité législative avec la force navale. Lois pénales, enquêtes et jugements parlementaires, budjets, comités d'examen des finances; en un mot tout ce qui peut intéresser l'homme d'État et le législateur est réuni et classé dans un premier livre, avec un esprit d'analyse et une concision très-remarquables.

Le second livre traite du commandement des forces navales, du conseil de l'amirauté, des amiraux, des états majors, des équipages et de l'infanterie des vaisseaux.

Les trois livres suivants sont consacrés aux grandes administrations de la marine. M. Dupin explique avec détail, l'ordre et la marche du service, les avantages et les inconvénients de la coordonnance et de la subdivision de chaque espèce de pouvoir et d'attributions, etc.

Le sixième et dernier livre traite successivement du pied de paix et du pied de guerre, des levées, des prises, des pertes, des pensions, des retraites et des invalides.

Dans ce livre, M. Dupin explique les progrès de la force effective britannique, et fait connaître une foule de faits nouveaux propres à dévoiler les causes de la grandeur et de la prospérité de cette force.

L'auteur achève en ce moment l'impression du second volume qui comprend les études et les travaux de la marine, avec un atlas composé de nombreuses et belles planches

Immédiatement après l'avoir fait paraître, il s'occupera de publier la troisième partie qui comprendra les travaux des ponts et des chaussées, des canaux et des ports de commerce.

M. Dupin a fait hommage à l'Académie du discours qui sert d'introduction au cours de mécanique ouvert cette année, pour la première fois, près du conservatoire des arts et métiers.

Dans le discours où M. Dupin développe le plan et les vues qui dirigeront le nouvel enseignement qui lui est confié, il présente, sur les rapports de nos forces physiques et de nos forces intellectuelles appliquées aux travaux des arts, des considérations qui fixent les degrés d'importance et d'utilité relatives de ces forces dans les diverses espèces de travaux; ainsi que les soins qu'il convient d'apporter à leur culture simultanée.

Éléments de statique, suivis d'un Mémoire sur la théorie des moments et des aires, ouvrage adopté pour l'instruction publique, par M. L. Poinsot; *troisième édition revue et corrigée par l'auteur.*

Le chapitre Ier offre plusieurs démonstrations, remarques ou propositions nouvelles sur la théorie des couples, sur la réduction générale d'un système quelconque de forces. Dans le chapitre II on trouve une discussion plus approfondie de ce point important de la composition des forces qui regarde la condition d'une résultante unique. Dans le chapitre IV on ajoute plusieurs choses à l'article du *levier* et à l'article général des *machines composées.* On donne la théorie et la construction de quelques espèces de balances; la loi de l'équilibre d'un fil sollicité par une infinité de forces perpendiculaires à la direction, ou de forces parallèles entre elles : l'équation la plus simple de la chaînette. La loi d'une machine nouvelle, nommée le genou, et qui paraît assez ingénieuse pour être admise dans les éléments ; enfin une solution directe de cet ancien paradoxe que présente la balance de Roberval, et qu'on étend à d'autres machines semblables, fournies par la réunion de deux leviers quelconques ou de deux tours et même de deux vis égales et parallèles.

Quant au Mémoire sur la comparaison des moments et des aires, on a cru devoir le conserver à-peu-près tel qu'il a été lu pour la première fois à l'Académie ; mais il est bon d'observer que ce Mémoire déja si simple aurait pu se réduire et se simplifier beaucoup plus par des moyens que l'auteur indique ; il a voulu laisser subsister encore d'anciens énoncés et ne pas trop s'éloigner des expressions qu'on trouve dans les autres ouvrages. Il a cru que cette manière de présenter les choses, sans nuire à la clarté du Mémoire, serait pour quelques lecteurs une transition instructive de l'ancienne méthode à la nouvelle, et qu'elle était surtout propre à recommander la théorie des couples, par cette facilité avec laquelle on expose, comme une suite d'évidents corollaires, ce qui formait auparavant de belles et importantes propositions de mécanique, qui avaient paru fort difficiles à découvrir.

Traité élémentaire de Calcul différentiel et de calcul intégral, par S. F. LACROIX; *troisième édition, revue, corrigée et augmentée.* (Paris, 1820.)

Le succès bien constaté de cet ouvrage nous dispense d'en reproduire ici l'analyse. Nous nous bornerons à dire qu'à la suite des deux grandes divisions annoncées dans le titre, on trouve le calcul direct et inverse des différences, l'application du calcul intégral à la théorie des suites, et enfin deux notes intéressantes, l'une sur la méthode des limites, et l'autre sur les logarithmes imaginaires.

RAPPORTS APPROUVÉS PAR L'ACADÉMIE.

Sur un planétaire de M. TOMBINI. *Comm. MM.* Arago, de Rosily, *et* Rossel, *rapporteur.*

Les conclusions sont d'accorder au zèle de l'auteur les éloges que méritent tous ceux dont les travaux se dirigent particulièrement sur les moyens de propager la science et de faire participer aux avantages qu'elle procure, un plus grand nombre de citoyens. 10 janvier 1820.

Sur un instrument au moyen duquel on peut tracer sur une planche métallique les caractères d'une écriture appelée expéditive française, par M. BARBIER. *Comm. MM.* Molard, Bréguet, *et* de Prony, rapporteur. (15 mai 1820.)

L'Académie, en donnant des éloges au mérite de ses conceptions et au talent dont il a fait preuve, invite M. Barbier à s'occuper des moyens de rendre son instrument plus simple et moins dispendieux.

Moyen proposé par M. Pottié, *de Bordeaux, pour relever les navires coulés bas, soit à la mer, soit dans les ports ou les cours d'eau. Commissaires : MM.* Girard, *et* Dupin, *rapporteur.* (29 mai 1820.)

Le port de Bordeaux, dans la longueur d'une lieue qu'embrasse son étendue, contient quatorze bâtiments submergés, dont la plupart se trouvent placés dans la situation la plus désavantageuse à la navigation. Pour retirer les navires submergés M. P. fait usage d'une très-grosse vrille, terminée par une pointe, ayant la forme du bout d'un glaive à deux tranchants. Enfoncée seulement à moitié dans le flanc d'un navire, elle peut sans être arrachée du bois, soulever un poids de 12900 kilogrammes; enfoncée autant que possible elle en soulèverait un de 25800. Après la description des moyens subsidiaires qui mettront en jeu la machine et quelques remarques sur les effets qu'on en peut espérer, les commissaires déclarent que les moyens proposés par M.P. méritent d'être connus. En conséquence ils proposent à l'Académie d'accorder ses encouragements à l'auteur, en l'engageant à continuer de s'occuper du sujet auquel il travaille depuis long-temps et à rendre ses procédés utiles pour la pratique.

Mémoire de M. Poncelet, *sur les propriétés projectives des sections coniques. Commissaires, MM.* Arago, Poisson, *et* Cauchy, *rapporteur.* (5 juin 1820.)

On voit, disent les commissaires, que le Mémoire de M. Poncelet suppose dans son auteur un esprit familiarisé avec les conceptions de la géométrie et fécond en ressources dans les recherches des propriétés des courbes, ainsi que dans la solution des problèmes qui s'y rapportent. Nous pensons en conséquence que ce Mémoire est digne de l'approbation de l'Académie, et nous proposerions de l'insérer dans le Recueil des Savants étrangers, si l'auteur ne le destinait à faire partie d'un ouvrage, qu'il a l'intention de publier sur cette matière.

Memoire relatif à la communication des mouvements vibratoires, par M. Félix Savart. *Commissaires, MM.* Poisson, *et* Biot, *rapporteur.* (12 juin 1820.)

Ce Mémoire peut être considéré comme une suite de celui dont nous avons rendu compte dans l'analyse de l'an 1819. On peut ranger les mouvements vibratoires en deux classes: l'une dans laquelle les surfaces des corps qui vibrent sont agitées perpendiculairement à leur plan tangent, et la seconde dans laquelle elles sont agitées suivant ce plan. En divisant ainsi la question générale, on peut dans les deux cas de vibrations les plus simples chercher des données qui guident par la suite les spéculations des géomètres et auxquelles ils puissent attacher le calcul, seul fil capable de nous conduire dans le labyrinthe de ces faits.

Si, comme dans les expériences de M. Chladni, la surface est plane, horizontale, et ébranlée perpendiculairement à son plan, alors les petits grains de sable sont lancés verticalement avec une vivacité extraordinaire; et comme la surface qui les lance se courbe en vibrant, l'impulsion qu'elle leur donne les porte vers la ligne nodale, où ils viennent graduellement se ranger. Mais si le corps vibrant de verre ou de métal est ébranlé par une friction longitudinale, en promenant un drap mouillé sur quelque partie de sa surface inférieure, on voit bien encore les grains de sable se rassembler sur un certain nombre de lignes nodales, mais ils y courent sans quitter la surface vibrante sur laquelle ils ne font que glisser. Pour distinguer ces modes si divers de mouvements, M. Savart les désigne par les noms de *transversal* et de *longitudinal*. Ces expressions ne s'appliquent qu'aux particules matérielles qui composent les surfaces, sans vouloir inférer que la même espèce de mouvements s'étende à toutes les particules qui composent l'intérieur des corps. Cela posé, si l'on répand du sable fin et sec sur une lame plane rectangulaire, et qu'on la fasse vibrer par friction comme nous venons de le dire, ou pour l'ébranler plus régulièrement encore, si l'on se borne à frapper un de ses bouts perpendiculairement avec quelque corps dur, tel qu'un tube de métal, on voit bien le sable glisser sur la surface par un mouvement longitudinal et venir se ranger suivant un certain nombre de lignes nodales fines, mais le nombre de ces lignes qui indiquent autant de divisions de la surface n'est pas du tout égal ni proportionnel aux nombres qui expriment les sons successifs; au lieu que cette proportionnalité s'observe très-exactement dans les subdivisions des colonnes cylindriques d'air qui vibrent dans les tubes ouverts par leurs deux extrémités, l'identité n'a pas lieu même entre les deux surfaces de la même verge; c'est-à-dire que si, après avoir observé les lignes nodales sur une des faces de la verge pour un certain son, on recommence l'expérience en plaçant le sable sur l'autre face, on obtiendra bien le même son, mais les lignes nodales seront différentes de celles de la première face, et cette différence se soutient constante pour chaque face, par quelque bout qu'on la frappe, et quel que soit le nombre des chocs qu'on lui fasse subir. On l'observe également sur les lames de verre, de bois ou de métal; elle se manifeste de même si, au lieu d'ébranler la verge par des chocs, on fixe à l'une de ses extrémites un petit bout de tube que l'on excite par friction; toujours pour le même son, le même mode s'établit sur chaque face en restant différent pour l'une et pour l'autre. Les lames ont ainsi un envers et un endroit impossible à distinguer par les apparences extérieures. Lorsque l'épaisseur excède 2 ou 3 millimètres, il existe toujours une correspondance parfaite entre les deux systèmes de lignes; les nœuds de chaque face sont, dans chaque son, exactement intermédiaires entre les nœuds de la face opposée. Lorsque les lames sont très-minces cette opposition est moins précise et plus susceptible d'être accidentellement dérangée. Le nombre des lignes nodales pour un même ébranlement varie également avec l'épaisseur de la lame; enfin leur forme même varie avec sa largeur : ce n'est que dans les lames les plus étroites qu'elles sont rectilignes; la largeur augmentant, chaque ligne nodale se tord de manière à offrir deux courbures contraires dont l'axe de la lame forme le point de partage. Généralement toutes les lames minces ou épaisses, étroites ou larges, si elles ont la même longueur, et si elles sont de la même nature, produisent le même son pour des modes d'ébranlement pareils; d'où l'on doit conclure avec M. Savart que l'espèce d'agitation et de vibration intérieure qui produit le son est vraisemblablement distinct du mode de division. Toutefois le mode de division est lié d'une manière très-intime avec le mouvement intestin par lequel le son est produit. M. Savart prouve cette liaison par une expérience qui la rend pour ainsi dire palpable. Il excite des vibrations longitudinales dans un tube de verre creux qu'il a rempli à peu près jusqu'à moitié d'un liquide quelconque, et que l'on tient horizontal. Le liquide est agité dans les parties situées entre les lignes nodales de la surface, tandis qu'il demeure au repos sur ces lignes mêmes. Les surfaces des plaques circulaires montrent aussi des oppositions de lignes nodales analogues à celles des lames, de sorte que le phénomène paraît s'étendre à tous les corps solides mis en vibrations longitudinales.

M. Savart examine ensuite comment un mouvement, soit transversal, soit longitudinal, une fois imprimé à un solide agit sur d'autres corps en contact avec lui. Il a d'abord mis une verge solide, plane et étroite en contact par un de ses points avec une autre verge perpendiculaire à sa longueur; ensuite il a disposé de même une troisième verge en contact rectangulaire, puis une quatrième et ainsi de suite indéfiniment. Alors le mouvement imprimé à la première verge se transmet par communication successive à toutes les autres, de manière que de l'une à l'autre un mouvement transversal produit dans la verge suivante un mouvement longitudinal, et réciproquement en alternant ainsi depuis la première jusqu'à la dernière avec une constance et une régularité parfaites; chaque verge ayant, comme il a été dit ci-dessus, son envers et son endroit, et montrant le même rapport dans la position des lignes nodales. Si les verges de rang impair sont toutes égales entre elles, et que celles de rang pair soient aussi toutes égales entre elles quoique différentes des premières, toutes les verges d'une même série produiront le même son, manifesteront les mêmes phénomènes; mais d'une série à l'autre, le son sera dissemblable, ainsi que la disposition des lignes nodales. M. Savart a vu que les intervalles des nœuds s'agrandissent sur celles des verges qui vibrent longitudinalement, et se rapprochent sur les autres. D'où résulte une compensation telle, que les périodes de ces deux genres d'oscillation soient isochrones et consonnantes entre elles. De cette expérience, et de plusieurs autres analogues, M. Savart conclut avec beaucoup de vraisemblance qu'en général lorsqu'un système de corps solides, liés entre eux convenablement, vient à prendre un mouvement vibratoire, qui produit un son soutenu et appréciable, toutes les parties de ce système exécutent des vibrations simultanées, dont la période est parfaitement la même, et de laquelle résultent des sons parfaitement égaux.

Nous omettons à regret les expériences sur deux plaques circulaires mises en contact, les sons qu'elles rendent et les lignes qu'on y remarque; sur les curseurs pesants que l'on fixe à la surface des corps solides; sur l'effet des liquides employés comme curseurs pour modifier le son des cloches d'harmonica, et qui en font baisser le son plus ou moins, suivant la nature du fluide, et sur d'autres points que

M. Savart se propose d'éclaircir dans un Mémoire subséquent.

Les commissaires terminent en disant que le Mémoire de M. Savart offrira aux recherches des géomètres des éléments précieux, présentés avec beaucoup de netteté, de méthode, et avec une grande sévérité d'observation. « Par ces diverses « qualités, jointes à la nouveauté des résultats qu'il renferme, « ce Mémoire nous paraît un excellent complément du pre- « mier travail qu'il a présenté à l'Académie, sur les mouve- « ments vibratoires, et auquel elle a donné l'approbation la « plus honorable. Nous pensons que celui-ci mérite une dis- « tinction pareille, et qu'il sera également bien placé à la « suite de l'autre, dans le Recueil des Savants étrangers »

Mémoire de M. Navier, *qui traite de la flexion des lames élastiques. Commissaires :* MM. Fourier, Girard, et Prony, *rapporteur.*

Pour arriver à des formules intégrables et applicables aux conditions de la stabilité des constructions de charpente, l'auteur a supposé les changements de forme très-petits, en ajoutant à cette hypothèse celle de considérer les corps flexibles et élastiques comme des lames d'une largeur et d'une épaisseur uniforme, pliées seulement dans le plan de la section longitudinale perpendiculaire à la largeur, et celle de faire le moment de la résistance à la flexion, pour un point quelconque de la courbe élastique, proportionnel à l'angle de contingence. En restreignant ainsi les conditions du problème, il a d'ailleurs considéré sous le point de vue général la figure initiale, et il a traité successivement le cas de la lame droite et de la lame courbe. Il nous est impossible d'exposer ici les formules trouvées par M. Navier pour ces deux cas différents, non plus que les épreuves auxquelles il a soumis ces formules. Nous nous contenterons de transcrire le dernier paragraphe du rapport.

« La partie expérimentale est peu considérable, mais elle « est faite avec soin, et d'ailleurs les nombreuses expériences « de MM. Girard, Dupin, Duleau et Barlow fournissent une « ample matière aux vérifications. Ce travail comprend le « cas de l'élasticité qu'on peut appeler *linéaire*. Un second « Mémoire, que l'auteur a présenté à l'Académie, a pour « objet la théorie de l'équilibre des surfaces élastiques « et son application aux questions de construction qui « peuvent s'y rapporter; celles par exemple qui concernent « les planchers. Ces nouvelles recherches forment ainsi un « supplément intéressant au Mémoire dont nous venons de « rendre compte, et offrent un motif de plus pour faire con- « naître ce Mémoire au public. — Nous pensons que l'Aca- « démie fera une chose utile et agréable aux constructeurs, « en le mettant au nombre de ceux qu'elle destine à être « imprimés dans ses recueils. »

Préface et planches d'un traité de géométrie descriptive, par M. HACHETTE, *ex-professeur à l'école polytechnique. Commissaires:* MM. Lacroix et Poisson. (11 septembre 1820.)

Déja M. Hachette a offert à l'Académie un exemplaire des épures de géométrie descriptive, coupe de pierres, charpentes, ombres, perspectives et machines, et dont un certain nombre a été ajouté par lui à la collection primitive, pendant qu'il était chargé de l'enseigner à l'école polytechnique. Ces dessins réduits composent le recueil de planches qu'il a présentées en dernier lieu, et dont l'exécution est remarquable par son élégance. Le plan du discours qui doit en donner l'explication est développé dans une notice contenant l'histoire de la science, et où M. Hachette rappelle ses remarques sur la théorie des surfaces réglées (ou gauches) qui l'a conduit à un procédé pour mener, par des considérations géométriques, des tangentes à une courbe quelconque dans l'espace, procédé sur lequel MM. Le Gendre et Arago ont fait un rapport favorable. L'auteur vient encore de le simplifier en substituant aux surfaces réglées en général des surfaces cylindriques. Nous pensons donc que le projet conçu par M. Hachette de développer les applications de la géométrie descriptive et la construction des épures mérite l'approbation de l'Académie, qui doit l'inviter à en poursuivre l'exécution.

Théorie de l'audition, *par* M. Morel, *capitaine au corps royal du génie, et sous-inspecteur à l'école polytechnique. Commissaires :* MM. Prony, Fourier, et Lacepède, *rapporteur.* (18 septembre 1820.)

Dans la première partie, l'auteur expose la manière dont il considère l'organisation de l'oreille. La seconde concerne l'audition, et la troisième présente la théorie musicale. Les trois membranes, que renferme l'oreille, frémissent ou vibrent lorsqu'un son formé extérieurement agit sur ces organes, et cette faculté vibratoire est pour M. Morel le principe physique de l'audition. Elles sont tendues à divers degrés : cette tension les met, en quelque sorte, à l'unisson des différents tons, et cette aptitude à des tensions diverses est un des principes de la théorie qui fait l'objet du Mémoire.

« Cet ouvrage très-étendu renferme, indépendamment de « la théorie considérée en elle-même, un grand nombre « d'aperçus curieux ou de considérations utiles; et l'on doit « surtout féliciter l'auteur des liaisons rigoureuses par les- « quelles il a su enchaîner ses principes, ses axiomes, ses « idées principales, et les faire dériver l'un de l'autre..... Il « ne se dissimule pas que toute sa théorie repose sur l'exis- « tence dans le labyrinthe de l'oreille, d'une membrane « tendue, susceptible de vibrer, et sur l'une des surfaces de « laquelle le nerf auditif s'épanouit en filets infiniment dé- « liés et tellement nombreux qu'elle en est, pour ainsi dire, « totalement couverte. Il prévoit les objections qu'on pourra « lui faire à ce sujet..... Nous ne proposerons pas à l'Acadé- « mie de donner aujourd'hui son assentiment à une théorie « qui peut encore être contestée dans quelques-uns des phé- « nomènes supposés pour l'établir, mais nous lui propose- « rons d'accorder son approbation au zèle très-digne d'é- « loges d'un auteur dont les savantes recherches peuvent être « utiles aux progrès des sciences physiques, et qui nous « paraît bien mériter l'honorable encouragement que nous « demandons pour lui. »

Mémoire relatif à l'action de la pile voltaïque sur l'aiguille aimantée, par M. Boisgiraud. *Commissaire :* MM. Charles, et Ampère, *rapporteur.*

A peine connaissait-on en France la découverte de M. Oersted, que M. Boisgiraud s'empressa de faire des expériences sur un sujet si intéressant. Ce récit des expériences est l'objet des mémoires de ce jeune physicien, dont nous pensons que la science doit attendre des travaux importants, si l'on en juge par la sagacité avec laquelle il a discuté les résultats qu'il obtenait, et les précautions qu'il a prises pour s'assurer de leur réalité. Parmi les expériences variées qu'il a ajoutées à celles de M. Oersted, il en est une qui est extrêmement remarquable. Elle consiste à faire agir un fil conjonctif horizontal, sur une petite aiguille aimantée flottant sur l'eau, et à observer, quand on place l'aiguille dans une direction perpendiculaire au fil, de manière que leur plus courte distance passe par le milieu de l'aiguille, dans quel cas l'équilibre est stable ou instable. Il résulte de cette observation que l'action du fil conjonctif sur l'aiguille ne se réduit pas à une action sur ses pôles, mais qu'elle s'exerce sur tous les points de sa longueur; en sorte que l'équilibre se trouve stable précisément quand il ne devrait pas l'être dans le cas d'une action seulement sur les pôles et *vice versâ.* Nous pensons, ajoutent les commissaires, que la publication de ce mémoire serait utile aux progrès de la nouvelle branche de physique qui semble devoir naître des belles expériences de M. Oersted, et qu'il mérite d'être inséré dans les Mémoires des Savants étrangers.

Sopra i principi fundamentali della teoria delle funzioni analitiche di La Grange, Memorie due di AGATINO SAN-MARTINO. *Commissaires :* MM. Le Gendre, Arago, et Maurice, *rapporteur.*

On n'a peut-être pas oublié qu'en 1812 un étranger imagina de publier une *réfutation de la Théorie des fonctions de La Grange.* Mais au travers de tous les termes d'école dont le critique avait enveloppé ses volumineuses objections, il fut facile de s'assurer qu'elles étaient dépourvues de tout fondement. Mais si cette prétendue *réfutation* fit si peu de bruit chez nous, et n'y produisit aucun effet, il paraît qu'il n'en a pas été de même partout ailleurs, et nous apprenons, par les Mémoires de M. San-Martino, que certains géomètres écrivirent dans les journaux d'Italie, en y soutenant les principes du critique. En homme imbu des saines doctrines qu'il professe avec distinction, à Catane en Sicile, M. San-Martino prit la plume pour en raffermir les fondements qu'on cherchait à ébranler par des subtilités qui avaient séduit quelques lecteurs; c'est ce qu'il a cherché à faire dans les deux Mémoires qu'il a transmis à l'Académie. Dans le premier, il se propose d'établir le théorème de La Grange sur une base inébranlable; dans le second, d'en déduire les principes du calcul différentiel; et dans l'un et dans l'autre, de montrer la futilité des objections élevées, tant contre le théorème lui-même et sa démonstration, que contre les déductions qu'on en a tirées. Les Mémoires du savant professeur de Catane se distinguent bien plus par la logique sévère qui l'a dirigé, que par des traits positifs d'invention, auxquels il ne faut plus guère s'attendre dans une matière aussi rebattue. L'auteur convient en effet qu'il a eu connaissance du moyen employé par M. Poisson pour compléter de tout point la démonstration de la formule fondamentale de la théorie des fonctions, et il est alors facile de prouver qu'il n'a fait que présenter cette démonstration dans un ordre convenable, et avec des détails qui la rendent aussi rigoureuse qu'on peut le souhaiter. Quant aux moyens de différentiations, les commissaires y signalent deux procédés brefs et ingénieux qu'ils ne se souviennent pas d'avoir vus ailleurs, et qui annoncent que M. San-Martino, s'il s'occupait d'un sujet moins usé, saurait faire un heureux emploi des ressources du calcul. Il a joint à ses deux Mémoires manuscrits deux ouvrages imprimés à Catane en 1814 et 1816, qui ont trait également à la manière actuelle de présenter les théories qui se rattachent au calcul différentiel, et l'on voit dans sa lettre d'envoi que ce ne sont pas les seuls par lesquels il a signalé son zèle pour les sciences exactes. Les commissaires pensent que l'Académie doit, en le remerciant de ces diverses communications, transmettre à leur auteur les encouragements qu'elle accorde volontiers aux savants qui s'occupent avec succès, soit d'étendre le domaine des sciences, soit d'en affermir les bases, et d'en éclairer les avenues. Ce sera pour elle, sans doute, une satisfaction de compter un géomètre de plus dans la patrie d'Archimède.

Expériences sur le développement de l'électricité dans les corps, par la pression et la dilatation, par M. BECQUEREL, *officier du génie, ancien élève de l'école polytechnique. Commissaires: MM.* Poisson, et Biot, *rapporteur.*

On ne peut voir qu'avec intérêt des recherches expérimentales qui ont pour but d'éclaircir les premiers points où s'arrêtent nos connaissances actuelles, surtout lorsqu'il en résulte des effets d'une nature nouvelle, d'une assez grande intensité pour qu'ils puissent être, non-seulement constatés avec facilité, mais mesurés avec exactitude. Tels sont ceux que M. Becquerel a fait connaître dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte. Il y a déja trente-cinq ans que Coulomb avait reconnu qu'une pression ou une dilatation passagère, influaient sur la quantité et sur la nature de l'électricité qui se développe dans le frottement des corps. Il n'eut pas l'idée d'étudier cette influence par des expériences directes, et de la rendre plus sensible à l'aide de pressions et de dilatations exercées à dessein et avec énergie, sur des corps isolés. En 1814, M. Libes avait reconnu qu'un disque de métal isolé, pressé sur une étoffe de taffetas gommé, sortait du contact électrisé résineusement. L'effet était d'autant plus marqué que la compression était plus forte; il cessait lorsque l'enduit était usé par la friction, en sorte que le taffetas eût perdu cette glutinosité qui le faisait d'abord se coller à la surface du métal. La part que l'on crut devoir attribuer, dans le phénomène, à la glutinosité de l'enduit résineux, empêcha d'en apercevoir la généralité, et l'observation, toute curieuse qu'elle était, demeura isolée et inféconde. En 1811,

M. Dessaignes fit une série d'expériences très-étendues sur le développement d'électricité qui s'opère dans tous les corps imparfaitement conducteurs, lorsqu'on les met en contact avec le mercure, lorsqu'on les y plonge ou qu'on les en retire. Nombre de physiciens avaient déjà constaté l'existence de ce fait; mais leurs expériences offraient des résultats qui semblaient opposés. M. Dessaignes éprouva lui-même ces contradictions accidentelles. M. Haüy donna une extension plus évidente à ces phénomènes, en découvrant que plusieurs substances minérales acquièrent, par la pression, un état electrique qu'elles conservent ensuite obstinément. D'autres minéraux présentèrent cette propriété dans un degré moindre, d'autres enfin lui en parurent privés.

C'est ici que commencent les recherches de M. Becquerel; il soupçonne que l'exception offerte par certains corps n'était qu'apparente, et tenait uniquement à ce qu'ils n'avaient pas, comme les premiers, la faculté de retenir en eux-mêmes, par une influence propre et intérieure, l'électricité que la compression y développait; il conçut que, pour rendre cette électricité sensible, il suffirait d'isoler ces corps pendant et après la compression qu'on leur fait subir. Le succès de cette épreuve très-simple surpassa ses espérances. En isolant ainsi les disques qu'il mettait en expérience, il a trouvé que, non-seulement les minéraux, mais toutes les substances de nature quelconque, étant isolées et pressées les unes contre les autres, sortent de la pression dans des états différents, l'un avec un excès d'électricité vitrée, l'autre avec l'excès correspondant d'électricité résineuse.

On sait, d'après la découverte de M. Volta, que tous les corps, lorsqu'ils sont mis seulement en contact les uns avec les autres, sortent de contact dans des états différents; mais les phénomènes décrits par M. Becquerel semblent, par leur intensité, et par plusieurs particularités qui les accompagnent, être d'une autre espèce. Le rapporteur en cite des exemples qu'il serait trop long de rapporter ici.

M. Becquerel a cru reconnaître que la dilatation subite de certains corps développait aussi une électricité, mais ses expériences à cet égard ont besoin d'être répétées avec des précautions nouvelles, et liées à des moyens de mesure délicats et précis. Ces réflexions, et celles que la lecture du Mémoire fait naître dans l'esprit du physicien attentif, prouvent sans doute que le développement des principes électriques est encore un phénomène très-obscur; mais elles font en même temps sentir que l'examen de ce phénomène offre un des plus beaux sujets de recherches que les observateurs puissent se proposer.

« Sous ce point de vue, ajoutent les commissaires, nous « croyons que l'Académie doit accueillir avec intérêt les faits « nouveaux que lui a présentés M. Becquerel, et l'engager à « en suivre la trace avec la même persévérance qu'il a montrée « dans le travail dont nous venons de rendre compte à l'Aca- « démie. Nous pensons enfin que son Mémoire mérite d'être « inséré dans le Recueil des Savants étrangers. »

Mémoire de M. DE PARAVEY *sur les sphères antiques. Commissaires : MM.* Cuvier, Prony, Burckhard, Ampère, Fourier, *et* Delambre, *rapporteur.* (5 février 1821.)

Ce rapport étant fort long, et quelques opinions du rapporteur ayant été contestées par l'un des commissaires, nous nous bornerons à exposer les idées de M. de Paravey, et les conclusions adoptées par l'Académie.

L'objet de l'auteur est de prouver que toutes nos connaissances nous viennent de la Chaldée. Il le prouvera en discutant l'origine des lettres et des chiffres des peuples divers, et en traitant de l'origine de leurs constellations. Il pense que les planisphères d'Égypte ont été sculptés d'après Hipparque, et dans le premier siècle de notre ère. Il annonce que les constellations chaldéennes ont un rapport sensible avec le climat et l'agriculture du pays. Ce sera la matière d'un Mémoire particulier. Par un grand nombre de rapprochements, qui supposent de longues recherches, et qui, pour être justement appréciés, exigeraient la connaissance des langues orientales, l'auteur veut établir que les constellations des Hindous, celles des Chinois, des Arabes et des Égyptiens offrent de telles ressemblances, qu'il paraît impossible qu'elles ne sortent pas d'une source commune; ce qui n'est contesté par personne : enfin, que la sphère primitive est celle des Chaldéens, ce qui est au moins probable. Les douze constellations zodiacales des Chaldéens et des Égyptiens sont les mêmes que celles des Grecs (à la balance près); elles ont les mêmes figures, elles sont désignées partout par les mêmes symboles. Ptolomée, qui nous parle des constellations chaldéennes, ne dit rien de celles des Égyptiens; il rapporte des Chaldéens deux observations de Mercure faites à vue, il ne donne aucune observation des prêtres d'Égypte; ce qui peut appuyer la préférence donnée aux Chaldéens. Outre la division du zodiaque en douze signes, les Hindous, les Chinois, les Arabes et les Coptes ont eu dès long-temps la division en vingt-huit ou vingt-sept constellations et un tiers.

L'auteur croit que cette division n'a été imaginée que pour l'astrologie; il est incontestable que les astrologues l'ont employée, mais il paraît également certain que ces 27 $\frac{1}{3}$ constellations répondent à la marche périodique de la lune, qui est de vingt-sept jours et un tiers, à fort peu près. Selon M. de Paravey, cette division, et sa correspondance entre les constellations, soit australes, soit boréales, et les constellations zodiacales, a pour époque la conquête de l'Inde par les Mongols. En calculant avec plus de soin les solstices que paraissent indiquer les Pouranas, il croit que ces solstices doivent se rapporter à l'an 1200 avant notre ère, et qu'ils n'ont été fixés que très-grossièrement. Ces vingt-huit constellations se divisaient en quatre séries, de sept chacune, auxquelles sont affectées les sept planètes, arrangées dans l'ordre des jours de notre semaine, qui se trouve ainsi usité jusqu'aux extrémités de notre globe.

Les Hindous ont placé ζ des poissons et l'épi de la Vierge vers les deux équinoxes, ce qui a dû avoir lieu vers le cinquième siècle de notre ère; mais on a pu se tromper de quelques degrés, ou de deux à trois cents ans. Les deux séries de dix signes chacune d'Esné et de Dendéra commencent également par les Poissons et une Vierge tenant un épi. On voit donc un même système d'origine pour les années et les saisons chez tous les peuples de l'Inde, de la Chine et de l'Égypte.

Pour preuve des communications entre les divers peuples, M. Paravey cite les symboles par lesquels les astronomes de tous les pays désignent les constellations zodiacales. Il cite en particulier le symbole qui indique les Gémeaux. C'est sous cette figure qu'à Sparte on honorait les Gémeaux ou

Castor et Pollux. (*Voyez* Plutarque, *de l'Amour fraternel.*) Le signe qui désigne le capricorne, est la figure que présentent les sept étoiles de la tête, jointes entre elles par de simples lignes droites. Les autres origines qu'il indique sont toutes connues, à la réserve de trois, qui peuvent paraître un peu douteuses.

Si les Poissons et l'Épi sont aux équinoxes, Pollux et la croupe du sagittaire seront aux solstices. Ces solstices sont ainsi indiqués dans le planisphère de Dendéra, où l'on voit que la tête de Pollux est le signe le plus voisin du pôle boreal de l'équateur, et le sagittaire le signe le plus éloigné de ce même pôle. Car M. de Paravey insiste fortement sur ce que le planisphère de Dendéra, étant situé dans un temple exactement orienté et dans une salle également orientée, a dû être orienté lui-même et construit sur l'axe nord et sud que forment naturellement dans nos planisphères les colures des solstices : d'où il suit que l'axe même de la salle où se trouve ce planisphère détermine le lieu du solstice. Les diagonales du parallélogramme feront avec cet axe des angles d'environ 45°, et marqueront les commencements des saisons. Or on sait qu'anciennement les équinoxes étaient au milieu du printemps et de l'automne, et les solstices au milieu de l'été et de l'hiver. Ces diagonales passeront par le milieu du Taureau, du Lion, du Scorpion et du Verseau; les deux axes par le milieu du Bélier, du Cancer, de la Balance et du Capricorne. L'équivoque vient de ce que quelques auteurs prennent ces commencements de saisons pour des équinoxes et des solstices, et réciproquement.

Suivant l'auteur, le grand zodiaque rectangulaire du portique de Dendera présente des femmes toutes semblables entre elles, tournées dans le même sens, dont la tête est surmontée d'une étoile; ces femmes indiquent les six signes dans chaque colonne de ce zodiaque : la dernière tourne le dos à toutes les autres, elle doit donc indiquer la *trope* ou la conversion du soleil, qui commence à se rapprocher de l'équateur dès qu'il est arrivé au point solsticial, c'est-à-dire à la tete de Pollux, à très-peu-près. Il trouve dans le temple du soleil, à Palmyre, un Zodiaque orienté de la même manière que celui de Dendera; la ligne nord et sud y passant aussi par la croupe du Sagittaire et par les Gémeaux.

Il est tenté de croire que les sculptures d'Égypte ont été dessinées d'après les écrits d'Hipparque. M. Visconti avait imprimé déja que les monuments d'Égypte sont postérieurs à l'âge d'Alexandre, et que très-probablement ils sont du temps de Tibère. Il nous recommande *d'être réservés, et de nous abstenir de toute opinion péremptoire.* Un nouvel examen de la question nous conduit à cette même conclusion. Les Égyptiens partageaient le zodiaque en douze signes comme nous; ces signes portent les mêmes noms, ils ont les mêmes figures, voilà tout ce qui est certain; tout le reste est vague et peut s'interpréter de diverses manières. On peut pencher pour une explication plus que pour une autre; on peut appuyer celle qu'on préfère d'arguments plus ou moins plausibles. De cette lutte des opinions il ne peut rien sortir qui contribue le moins du monde à l'amélioration de nos tables, ni de notre système astronomique. Ce point est le seul qui intéresse l'académie. Ce qui concerne l'histoire des peuples et celle de l'art n'est nullement de notre compétence.

CONCLUSION

« Nous pourrons, sans rien prononcer, applaudir aux re-
« cherches laborieuses, aux connaissances acquises qui four-
« niront des renseignements encore inaperçus, à la sagacité
« qui saura les rapprocher, pour les faire valoir les uns par
« les autres; et par ces raisons, nous engagerons M. de Pa-
« ravay à poursuivre son entreprise, à compléter les mé-
« moires que nous avons lus, à les mettre dans un ordre
« plus méthodique; à faire disparaître quelques aperçus trop
« hasardés, auxquels il ne met lui-même aucune impor-
« tance, à rédiger les mémoires qu'il n'a fait encore que
« nous annoncer; et, si ses recherches n'ajoutent rien à l'his-
« toire mathématique de l'astronomie, elles ne seront pas
« sans intérêt pour ceux qui veulent s'instruire des mœurs
« des peuples, de leurs institutions, et de la partie, soit ci-
« vile, soit même astrologique de leurs calendriers. »

OUVRAGES PRÉSENTÉS PAR DES SAVANTS ÉTRANGERS.

Hypothèses et époques des planètes de Cl. Ptolémée, hypotyposes de Proclus Diadochus, traduites pour la première fois du grec en français, sur les manuscrits de la bibliothèque du Roi, suivies de trois mémoires traduits de l'allemand de M. Ideler, sur les connaissances astronomiques des Chaldéens, sur le cycle de Méton et sur l'ère persique; précédées d'un discours préliminaire et de deux dissertations sur les mois macédoniens et le calendrier judaïque; par M. l'abbé HALMA (*Paris* 1820). M. Delambre, rapporteur.

M. Halma, à qui nous devons la seule traduction, et presque la seule édition lisible de l'astronomie de Ptolémée, a cru devoir joindre à cette édition tout ce qui nous reste en grec des opuscules de ce célèbre astronome, tous ses commentateurs et même les auteurs élémentaires dont la lecture était autrefois indispensable à celui qui voulait entendre la *syntaxe mathématique*, puisque ce grand traité supposait des connaissances déja exposées dans des ouvrages plus anciens.

Le discours préliminaire où l'éditeur rend compte du plan qu'il a suivi dans ce quatrième volume, n'est pas la partie la moins intéressante de la nouvelle livraison. Il y juge avec impartialité les auteurs qu'il va reproduire, et dont il indique les défauts aussi-bien que les qualités.

Le premier des ouvrages qui paraissent ici pour la premiere fois est un abrégé, dans lequel Ptolémée (si toutefois Ptolémée est le véritable auteur de cet opuscule) expose sommairement tout ce qu'il a donné avec les détails convenables dans son grand ouvrage; ce traité est adressé à Syrus, comme tous les écrits qui sont incontestablement de l'auteur de la *syntaxe mathématique;* Ptolémée y parle de lui-même à la première personne... *Nous avons montré... Ici nous nous proposons...*, et autres expressions semblables qui n'empêcheraient nullement de soupçonner un abréviateur autre que l'auteur primitif.

Le second ouvrage est celui que Proclus a nommé *hypotypose*, ou *tableau des hypothèses astronomiques.* On ne connaissait guère cet opuscule que par la tradition très-libre qu'en avait donnée Valla, dont le nouvel éditeur relève les bévues et nous raconte les malheurs. Il y ajoute des détails curieux sur la colonne dite de Pompée, sur la colonne moins durable sur laquelle, nous dit-on, Ptolémée avait inscrit tous les éléments de ses tables astronomiques; sur le Kasr, le Birs-Nembroud, le Muje-Libé, et autres ruines de Babylone, dont il nous donne les dessins, suivis d'une inscription en lettres babyloniques et cunéiformes qui nous a été rapportée par Rich, et que malheureusement personne jusqu'ici n'a su déchiffrer.

Les dissertations sur les mois macédoniens et le calendrier judaïque, sont pleines d'une érudition dont nous ne serions pas juges très-compétents.

Bouillaud avait donné une édition grecque et française de l'inscription que Ptolémée avait dédiée au *Dieu sauveur* sur l'une des colonnes du temple de Canobe. Bouillaud avait cru trouver des fautes dans cet extrait de la *syntaxe* de Ptolémée, et sa raison était que plusieurs nombres y différaient assez sensiblement de ce qu'on lit dans l'ouvrage original. Nous en avions conclu que l'inscription corrigée par Bouillaud ne nous apprenait rien que nous ne sussions déja, et que l'inscription avec ses fautes ne pouvait que nous induire en erreur. Nous ignorions entièrement qu'il existât un petit traité qui porte le nom de Ptolémée, et qui, comme l'inscription, a pour titre *hypothèse et éléments*. Bouillaud nous a paru n'en avoir lui-même aucune connaissance. Nous croyons qu'il n'en a fait aucune mention; mais n'ayant plus entre les mains l'édition donnée par Bouillaud, et qui est à la bibliothèque du Roi, nous n'osons rien assurer positivement à cet égard. Nous venons de lire cet opuscule dans l'édition de M. Halma, et nous y avons trouvé des phrases qui n'auraient pas manqué de fixer notre attention. Ptolémée nous avertit que son extrait est généralement conforme à la *syntaxe mathématique*, mais qu'il en diffère en quelques détails qu'il a corrigés d'après de nouvelles observations, soit en ce qui concerne quelques nombres, soit même pour quelques variantes qu'il a introduites dans certaines hypothèses. Ces corrections pourraient donc mériter l'attention des astronomes, si l'on pouvait répondre de la fidélité d'une copie, où tout est donné sans aucun développement, sans aucune preuve, et sans aucune observation qui puisse commander la confiance. Malheureusement Ptolémée ajoute que, pour faciliter la construction des instruments destinés à représenter les mouvements célestes, il se permettra quelques inexactitudes et quelques simplifications. On sait en effet que, dans la construction des planétaires, on cherche des nombres commodes plutôt que des nombres rigoureusement conformes aux tables astronomiques, en sorte que l'on ne sait plus sur quoi l'on peut compter. D'ailleurs tous les mouvements moyens sont des mouvements diurnes; et quoique la précision y soit poussée jusqu'aux sexagésimales du sixième ordre, comme les époques y sont réduites à la première année du règne d'Auguste, et ne sont exprimées qu'en minutes, il y a trop de jours dans l'espace de 719 ans qui séparent Auguste de Nabonassar, pour que la réduction de l'une à l'autre époque puisse être opérée sans quelque incertitude : voilà pour les nombres. Quant aux changements légers que nous avons remarqués dans les théories, ils nous ont paru de ces simplifications que Ptolémée s'est permises en faveur des artistes constructeurs, et ils ne posent que sur des suppositions surannées qui n'ont jamais été que très-inexactes, et qu'il était impossible de corriger; et s'il est vrai que Ptolémée ait fait quelque correction à ses tables ou à ses théories, c'est dans ses tables manuelles qu'on les trouveraitavec moins d'incertitude.

Ce traité des hypothèses est fort concis. Les théories qu'il doit expliquer sont excessivement compliquées, il en résulte nécessairement une obscurité que le traducteur est loin de dissimuler; il conseille même d'ajourner cette lecture, et de commencer par celle des hypotyposes de Proclus; mais le plus sûr à notre avis sera toujours de recourir à la *syntaxe mathématique*, où les mêmes explications se trouvent éclaircies par des démonstrations, par des calculs, et surtout par des tables que nous avons réduites en formules, pour avoir dans toute leur pureté et leur intégrité, les hypothèses souvent très-obscures de l'astronomie ancienne.

Proclus est moins laconique, mais il est trop verbeux : il entremêle sans nécessité ce qui appartient aux différentes planètes, au lieu d'aller par degrés du plus simple au plus composé. Il reproduit souvent les mêmes idées, il paraît pressé de montrer toute sa science, et cette science n'est rien moins que profonde ou bien sûre.

En rendant compte de ces hypotyposes, dans l'histoire de l'astronomie ancienne, nous avions témoigné le regret de n'avoir pu nous procurer que la traduction de Valla, et nous avons noté en marge de notre exemplaire plusieurs passages sur lesquels on ne pouvait prononcer qu'en consultant le texte grec. Aujourd'hui, en lisant ce texte, nous avons fait une attention particulière à tous ces passages, et nous avons recueilli fidèlement ce qui ne se trouve pas aussi explicitement dans la *Syntaxe* de Ptolémée.

Ainsi en parlant de l'armille solstitiale, à laquelle Valla donne une *demi-aune* de diamètre, nous avions mis en parenthèses le mot *ulna* dont le traducteur s'était servi. Le texte grec porte *une demi-coudée*. Si la coudée avait de vingt à vingt-un pouces, le rayon de l'armille n'en avait guère que cinq à six. Proclus nous dit qu'il faudra diviser le cercle, non-seulement en degrés, mais chaque degré en autant de parties que pourra le permettre la petitesse du rayon. C'est beaucoup si le degré a pu être divisé en six parties de dix minutes chacune. Telle est donc la précision qu'on peut attendre de ces armilles si célèbres. Ptolémée nous dit que le cercle intérieur portait des pinnules parallélogrammiques fendues dans leur longueur et garnies de deux gnomons ou règles, qui allaient marquer plus exactement sur le limbe extérieur les deux points diamétralement opposés, auxquels répondait l'astre. Proclus change ces petits solides en de simples triangles, ce qui n'est pas d'une grande importance.

Nous trouvons plus loin que l'auteur le plus ancien qui nous ait tracé des analemmes est un Diodore, duquel, sans Proclus, nous n'aurions jamais entendu parler.

Proclus attribue à Hipparque la première idée des parallaxes; nous savions du moins qu'il était le plus ancien auteur qui eût donné des méthodes trigonométriques pour calculer, non-seulement les parallaxes de hauteur, mais celles de longitude et de latitude, et qui fût en possession d'une théorie des éclipses de lune et de soleil.

En citant plusieurs fois Aristarque de Samos, Proclus ne paraît connaître que le traité des *grandeurs et des distances*, qui nous a été conservé; il ne dit mot d'un autre ouvrage dans lequel, au rapport d'Archimède, il aurait combattu les astrologues, qui plaçaient la terre immobile au centre du monde. Remarquons en passant, qu'Archimède ne nomme que des astrologues. Le nom d'astronome était alors totalement inconnu, ou d'un usage extrêmement rare; nous ne le croyons pas plus ancien que quelques écrits de Platon.

En deux endroits différents, Proclus parle des éclipses annulaires, qui étaient impossibles dans la théorie de Ptolémée, puisqu'il supposait le diamètre du soleil constant et égal au diamètre apogée de la lune. Dans cette supposition, continue Proclus, le péripatéticien Sosigène se serait trompé quand il nous dit que dans les éclipses où le soleil est périgée, son disque n'est pas entièrement couvert par celui de la lune, mais qu'on en voit les bords qui dépassent de tout côté ceux de la lune. Nous avons remarqué ailleurs que de tous les auteurs grecs Cléomède, qui vivait sous Auguste, Proclus, qui vivait au cinquième siècle de notre ère, sont les seuls qui parlent des éclipses annulaires, sans oser cependant en assurer la possibilité.

Proclus décrit l'astrolabe d'Hipparque qui servait à observer directement les longitudes et les latitudes des planètes et des étoiles. Le traducteur Valla supprime, on ne sait pourquoi, ce chapitre, et le remplace par une description du planisphère ou de l'astrolabe plan, autre invention d'Hipparque, et la description qu'il en donne est tirée d'un écrit de Philoponus.

La fin du livre de Proclus est un galimatias à peu près inintelligible, que le traducteur latin a remplacé par une petite dissertation dans laquelle il fait usage de quelques phrases de Pline. Il avait pris une pareille licence dans l'introduction de l'ouvrage, autre galimatias platonique dont il s'était contenté de donner à peu près la substance.

Après avoir lu avec beaucoup d'attention le texte grec de ces hypotyposes, celui des hypothèses et des éléments de Ptolomée, enfin l'inscription de Canobe, nous ne voyons aucun changement essentiel à faire à l'idée que nous avons tâché d'en donner dans l'histoire de l'astronomie ancienne, mais nous avons acquis une certitude qui nous manquait, celle du véritable contenu de ces trois ouvrages, et de ce qu'il est possible d'en tirer.

Le Mémoire de M. Ideler sur l'astronomie des Chaldéens avait excité vivement notre curiosité. Nous étions très-empressés de voir ce qu'on pourrait dire de nouveau pour exalter ces vieux astrologues que quelques personnes ont encore la bonté de considérer comme des astronomes. Sans se laisser éblouir par ce qu'il appelle les *phrases et les traits d'esprit* dont Bailly avait orné son histoire d'astronomie, il n'en témoigne pas moins sa surprise de ce que des *Allemands* ont osé soutenir que *les prétendues observations des Chaldéens sont, sinon incertaines, du moins très-peu déterminées.* Ces savants ont demandé *où étaient les preuves des connaissances des Chaldéens*, vu qu'*il n'est parlé nulle part de supputation de temps, de hauteur du pôle, de méridien, d'instruments, ni de méthodes, enfin rien de ce qu'on met au nombre des éléments indispensables de l'observation et du calcul.* Leurs prêtres, *par superstition, ont inscrit dans leurs temples quelques éclipses qui les ont conduits peut-être à quelques périodes; mais qui ne supposent nullement qu'ils aient eu besoin d'être astronomes, et moins encore qu'ils aient été les maîtres des autres nations dans la science astronomique.*

C'est par de tels *préjugés*, dit M. Ideler, que l'on croit pouvoir combattre l'opinion généralement reçue par les anciens, que les Babyloniens sont les créateurs *de l'astronomie*, et qu'ils l'ont enseignée aux Grecs.

Exiger la preuve positive d'un fait peu croyable en lui-même, demander sur quoi l'on s'appuie pour accorder aux Chaldéens des connaissances que l'on refuse à tous les autres peuples à cette époque, voilà ce que M. Ideler taxe de préjugé; et ce qu'il regarde comme une preuve victorieuse en sa faveur, c'est une opinion généralement répandue chez des peuples qui ignoraient jusqu'au nom de l'astronomie. Comme si cette opinion était autre chose qu'un préjugé, et un préjugé fondé sur une équivoque! On appelait *astrologie* la science qui apprenait à lire dans les astres les évènements futurs; de véritables astronomes ont depuis observé les astres pour étudier les lois de leurs mouvements, et prédire les phénomènes, et l'on a conclu que l'astrologie et l'astronomie étaient une seule et même science. Le fait est que les premiers observateurs n'étaient que des astrologues qui n'avaient aucune idée de géométrie; que les Grecs en adoptant leurs rêveries astrologiques et leur zodiaque ont su y appliquer leurs connaissances géométriques et sont devenus astronomes, sans renoncer encore à l'astrologie; que les Arabes ont encore enchéri sur la crédulité de quelques Grecs, et que Regiomontan lui-même au quinzième siècle ne cherchait à perfectionner l'astronomie que pour donner plus de certitude aux prédictions astrologiques; qu'enfin, il y a 140 ou 150 ans au plus on a commencé à rougir de l'astrologie, et qu'on s'est borné à être tout simplement astronomes.

Mais, laissant les raisonnements vagues, voyons les preuves positives de M. Ideler. Il fait valoir que 720 ans avant notre ère, les Chaldéens ont observé qu'une heure après son lever, la lune avait commencé à s'éclipser, et que l'éclipse fut totale.

Dans une seconde observation l'éclipse fut d'un quart de diamètre à minuit juste.

Dans la troisième l'éclipse commença à sept heures du soir, le milieu fut observé à huit heures et demie, et l'éclipse s'étendit à moitié du diamètre.

Nous citons les propres expressions de M. Ideler, et nous y cherchons vainement cette certitude qu'il nous vante. Nous nous bornons aux éclipses qu'il a citées comme les plus propres à étayer son système.

Une quatrième éclipse commença à cinq heures temporaires après minuit; le milieu arriva à 6 heures environ. D'après ces observations vagues, Ptolémée calcule le temps équinoxial en heures et minutes, et ce calcul fait par Ptolémée, d'après la différence qu'il supposait entre les méridiens d'Alexandrie et de Babylone, M. Ideler nous le donne comme l'observation même des Chaldéens, et se garde bien de parler des cinq et six heures après minuit.

Dans une cinquième éclipse la lune fut obscurcie de la moitié de son diamètre, une heure avant minuit; enfin dans la sixième, une demi-heure avant minuit, la lune parut éclipsée de deux doigts dans la partie australe.

Pour démontrer l'exactitude des Chaldéens, M. Ideler calcule ces éclipses par les tables de Mason; il trouve pour les erreurs du temps 6, 48, 12, 49, 64, 15 et 35'; les erreurs sur la quantité de l'éclipse ne sont guère que d'un seul doigt. Il ne trouve pas la même exactitude à beaucoup près par les tables de Burg, et il conclut une correction de — 2', sur le mouvement séculaire du nœud. Il omet que Ptolémée est soupçonné d'avoir altéré ces éclipses pour les faire cadrer avec ses hypothèses.

Il avoue que l'histoire ne fait mention d'aucun Chaldéen en particulier comme astronome: c'est, nous dit-il, que les prêtres de Babylone observaient en commun; et en effet, pour noter l'heure que marquait une clepsydre au commencement d'une éclipse, pour estimer à-peu-près une éclipse d'un sixième, d'un quart ou d'une moitié du diamètre, il ne fallait pas des hommes bien habiles, et les prêtres auraient pu s'en reposer sur le portier du temple. Il n'ajoute pas qu'ils calculassent en commun; pour les théories, il est peu probable qu'elles soient l'ouvrage d'une réunion de savants. Ainsi du silence des historiens on pourrait conclure que les Chaldéens peuvent avoir eu quelques observateurs, mais que réellement ils n'ont jamais eu un seul astronome.

Dans les observations que nous venons de rapporter, M. Ideler trouve une preuve *évidente* que les Chaldéens avaient une manière déterminée et invariable de supputer le temps. S'il parle d'une forme quelconque de calendrier, nous voulons bien le croire, et même d'après Sextus Empiricus nous accordons aux Chaldéens des clepsydres, quoique nous n'en sentions pas l'absolue nécessité. Avec cet instrument, inventé quelques siècles plus tard par Héron d'Alexandrie, et même avec une fontaine garnie d'un robinet, on pouvait mesurer l'eau écoulée depuis le coucher du soleil, jusqu'au lever de la lune, jusqu'au commencement et à la fin de l'éclipse, enfin jusqu'au lever du soleil. Les poids comparés de ces diverses portions d'eau et le poids total permettaient de partager la nuit en douze heures temporaires, de trouver le minuit et le temps des diverses phases de l'éclipse. Voilà la seule conséquence qu'on puisse regarder comme probable, en supposant toutefois que ces heures n'aient pas été trouvées par une estime grossière et sans le secours d'aucun instrument quelconque, ce qui serait peut-être encore plus probable.

On ignore quelle était la forme de leurs mois et celle de leurs années. M. Ideler croit très-*vraisemblable* que l'année était solaire et le mois lunaire; il en conclut que les dates égyptiennes des observations Chaldéennes sont le résultat d'une réduction faite par un astronome grec. Mais il ajoute que si *cette réduction n'offrait pas des difficultés insurmontables*, leur supputation a dû être réglée sur des principes à la fois justes et simples. On ne voit pas dans le fait où seraient les difficultés; les éclipses sont toujours datées de l'année du règne; le canon des Rois donne la date du commencement de chaque règne; et quand on a l'année et la quantité de l'éclipse, il n'y a nul embarras à trouver à quel mois et quel jour égyptien a dû arriver l'éclipse; et les tables, telles que celles d'Hipparque ou Ptolémée, donnaient tout naturellement la réduction cherchée. Aussi n'est-ce pas la date de l'éclipse qui peut éveiller nos soupçons, mais l'exactitude du temps de chaque phase. Qui nous assurera que ces temps aient été marqués par les Chaldéens à un quart ou une demi-heure, ou que Ptolémée n'ait pas disposé au besoin d'une heure ou deux pour rapprocher l'observation de son calcul?

M. Ideler ne doute pas que les Chaldéens ne connussent les heures équinoxiales, nous en doutons beaucoup. Les heures équinoxiales ne sont mentionnées nulle part, si ce n'est dans les réductions des astronomes grecs; et les cadrans chez les Chaldéens, ainsi que chez les Grecs et les Arabes, n'ont marqué jamais que les heures temporaires. Au reste peu nous importe, et nous avons indiqué nous-même un moyen fort simple par lequel les Chaldéens auraient pu arriver à cette connaissance que personne ne leur a supposée jusqu'ici.

M. Ideler reproche à Larcher de n'avoir eu aucune idée de gnomonique, parce qu'il ne sait pas que pour tracer un cadran solaire il faut être en état d'en placer l'axe parallèlement à l'axe du monde; il paraît oublier lui-même que l'axe d'un cadran est une invention moderne, qui suppose les heures équinoxiales; qu'on n'en trouve aucune mention, ni chez les Grecs, ni chez les Arabes, non pas même dans le livre d'Aboulhassan, qui se vantait en l'an 1200 de notre ère d'être le premier qui eût imaginé les heures équinoxiales.

Il n'ose pas assurer *que jamais les Chaldéens aient observé une éclipse de soleil*, chose sur laquelle *il convient que l'histoire se tait.*

Il est si persuadé de l'exactitude des temps dans les éclipses de lune chaldéennes, qu'il ne peut se figurer qu'on se soit servi de clepsydres, ou du moins il *suppose* qu'on a vérifié le temps vrai de chaque phase, en le déterminant par la position des étoiles, relativement à l'horizon ou au méridien, ce qui supposerait une trigonométrie et un catalogue de quelques étoiles au moins, choses sur lesquelles l'histoire se tait, comme sur les éclipses de soleil.

Il convient d'après Diodore que les Chaldéens ne savaient pas prédire les éclipses de soleil, mais il assure positivement qu'ils savaient calculer et prédire les éclipses de lune. *C'est ce qu'ils ont fait réellement*, nous dit-il, *et c'est la troisième conclusion que les observations qui nous restent d'eux nous autorisent à tirer, car il est impossible qu'ils n'eussent pas des tables astronomiques, résultat d'une longue suite de recherches sur les révolutions célestes. Il est certain*, dit-il encore, *que les Chaldéens connaissaient la période de 18 ans, car Ptolémée l'attribue à d'anciens mathématiciens.* Avec de pareilles formules et des assertions si hardies, on démontre tout et l'on n'est embarrassé sur rien. Mais comment se fait-il qu'Halley ait été le premier à soupçonner que l'une des trois périodes Chaldéennes, soit le Saros, soit le Néros ou enfin le Sossos pouvait être la période de 18 ans? Jusqu'à cet astronome on n'y avait vu que des périodes de 60, de 600 ou de 6000 ans.

Nous ne nous arrèterons point à montrer la faiblesse de ces divers arguments, et nous nous bornerons à conclure que le procès des Chaldéens est perdu sans retour, puisqu'un savant, aux connaissances duquel nous nous plaisons à rendre hommage, un professeur d'astronomie, profondément versé dans les langues grecque et arabe, n'a pu citer, en faveur de ses clients les Chaldéens, que des choses qui se trouvent partout et dont nous avons tiré des conséquences diamétralement opposées à celles de M. Ideler, qui d'ailleurs est avantageusement connu par ses tables logarithmiques et en nombres naturels pour la division centésimale du cercle.

Le Mémoire du même auteur sur le cycle de Méton est destiné à éclaircir quelques points fort obscurs du comput civil des Athéniens. Nous ne voyons rien à opposer à des conjectures qu'il appuie de raisonnements fort probables. Le Mémoire sur l'ère persique est du même genre. Ce que nous y voyons de plus intéressant pour nous, c'est que l'auteur ne partage nullement l'engouement de M. Gatterer pour l'année gélaléenne et l'intercalation persane. « Cette année, « disait M. Gatterer, est la meilleure de toutes les années « solaires civiles qui aient été jamais instituées!..... O chose « admirable! une année plus parfaite que celle de Grégoire XIII se trouve introduite et mise en usage en Asie, « un demi-siècle avant ce pontife! » M. Ideler n'a pas de peine à démontrer combien cet éloge est exagéré. Il le fait en exposant les inconvénients de cette année en elle-même, et ceux de son intercalation.

Nous avons analysé suffisamment toutes les parties qui composent le volume que publie en ce moment M. Halma. Il le fera suivre bientôt du premier volume du commentaire de Théon sur la *syntaxe mathématique*. Après la syntaxe même, ce commentaire est sans contredit ce qui nous reste de plus complet et de plus intéressant sur l'astronomie des Grecs, et même sur celle des Chaldéens, qui nous serait totalement inconnue sans les éclipses de lune et les deux observations de Mercure que Ptolémée nous a conservées. Les lacunes du commentaire seront remplies par les suppléments de Pappus et de Cabasilas, par les remarques de Régiomontan, et par les *Tables manuelles* de Ptolémée, inédites jusqu'à ce jour, et qui offrent, quand on les compare aux tables de la syntaxe, des variantes bien mieux constatées que celles de l'inscription de Canope. Il est à regretter seulement que M. Halma n'ait pu se procurer le troisième et le cinquième livre de ce commentaire, qui n'ont jamais été publiés, et qui existent, nous dit-on, dans les bibliothèques de Florence ou de Venise. M. Peyrard aurait pu lui en rapporter des copies, comme il rapportera les fragments d'Archimède, d'Apollonius et de Pappus, dont il est occupé maintenant à faire la recherche la plus exacte dans les bibliothèques d'Italie.

Enfin, M. Halma nous promet le texte grec d'Aratus avec la traduction française en regard. Cette traduction sera la première qui aura jamais été publiée en notre langue, car Pingré n'a fait la sienne que d'après Cicéron. Enfin M. Halma nous annonce que cet immense travail sera couronné par la géographie mathématique de Ptolémée, qui pour la première fois aussi paraîtra en français avec le texte grec en regard.

Encore un mot sur les Chaldéens, qui comptent aujourd'hui même tant de zélés partisans. Les Chaldéens, comme tous les autres peuples de l'univers, ont senti la nécessité de déterminer de leur mieux la durée de l'année solaire, le retour des saisons, et les phases de la lune. Ils y ont employé principalement les levers et les couchers des astres. Les prêtres de Bélus ont tiré de ces observations de quoi faire des espèces d'Almanachs, de quoi prédire les temps des chaleurs et de la sécheresse, ceux des pluies, et enfin les clairs de lune. Ces recherches faciles ont été admirées, rien n'était plus naturel. Ces prêtres ont été considérés comme des devins et des magiciens. Ils ont reconnu de bonne heure que le métier de charlatan pouvait leur être très-avantageux; ils ont donc soigneusement gardé pour eux seuls toutes leurs remarques, afin que personne ne pût leur enlever le monopole de leurs almanachs et de leurs prédictions. L'ignorance et la crédulité populaire les ont favorisés. On a exalté leur science, on l'a considérablement exagérée. On a dit qu'ils savaient prédire les années de sécheresse et de stérilité, celles de pluies et d'abondance; les épidémies et les tremblements de terre; les éclipses de lune et le retour des comètes. Contents de leurs succès, ils n'ont ni répandu ni augmenté leurs petites connaissances. Ils ont imaginé la doctrine astrologique; ils ont joué avec plus d'éclat et de gloire le personnage que joue encore le célèbre Mathieu Lansberg, *mathematicien* de Liége. Ils passent aujourd'hui même assez généralement pour les créateurs de l'astronomie, dont ils n'ont jamais connu que les premiers et les plus indispensables éléments, qu'ils ont déterminés de la manière la plus imparfaite. Ce que nous disons des Chaldéens s'applique de même aux Égyptiens. Bailly et nombre d'autres, depuis le commencement de notre ère, se sont complu à composer des romans plus ou moins ingénieux. Voilà le nôtre, ou plutôt l'histoire la plus probable *et la plus naturelle* des Chaldéens.

Nota. Le Mémoire de M. Ideler sur les Chaldéens a précédé de deux ans la publication de l'Histoire de l'astronomie ancienne, où nous avons les premiers tenté de détruire un préjugé reçu bien légèrement, mais aujourd'hui si profondément enraciné, que de long-temps on n'en pourra triompher.

Jamais l'académie ne nomme de commission pour examiner les ouvrages imprimés; elle se contente d'inviter un membre à lire l'ouvrage pour lui en faire un simple extrait. Le commissaire peut y joindre ses réflexions, s'il le juge à propos; mais jamais l'académie ne met aux voix ni ses jugements ni ses conclusions, et il n'en reste aucun vestige dans les registres. Des circonstances étrangères au nouveau volume de M. Halma nous ont engagé à *écrire* le rapport *verbal* que nous en avons fait; rien de ce que nous y disons de Ptolémée, de Proclus, de M. Ideler et des Chaldéens, ne peut passer pour le jugement de l'académie. Ce sont nos opinions personnelles; ce sont celles que nous avons professées dans nos divers ouvrages; mais nous avons cru qu'il n'était pas inutile de les rappeler et de les résumer ici en peu de mots.

Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement, par M. L. Puissant; *seconde édition.*

Cet ouvrage contient beaucoup plus de choses que le titre ne semble en promettre. Car on y trouve une théorie analytique et complète de la construction de toutes les cartes, tant générales que particulières, l'application de l'analyse trigonométrique à divers problèmes de Géodésie, l'usage des instruments à réflexion dans les reconnaissances militaires, le figuré géométrique des terrains, par le moyen des courbes de niveau équi-distantes, ou des lignes de plus grande pente et l'expression du relief des montagnes par les effets de la lumière et des ombres. L'auteur ne se dissimule pas que plusieurs des matières qu'il a traitées sont susceptibles de l'être d'une manière simple et élémentaire; mais il a désiré que ses théories fussent plus générales et ses démonstrations plus élégantes. En parlant de la projection stéréographique, il dit en deux endroits la *Projection de Ptolémée*, quoique le suffrage unanime de l'antiquité en donne l'invention à Hipparque. Il est vrai que nous avons la traduction latine d'une traduction arabe, qui porte pour titre : *Planispherium Ptolemæi.* Cet ouvrage, quand il serait de Ptolémée, ne contient rien qui ne fût dans celui d'Hipparque, et nous avons quelques raisons de croire qu'il n'est qu'une copie de l'ouvrage, vraiment original. Voyez *Histoire de l'astronomie ancienne*, tom. 2, pag. 453—454; et l'*Histoire de l'astronomie du moyen âge*, pag. lxix.

ÉLOGE

DE M. DELAMBRE,

Prononcé dans la séance de l'Académie Royale des Sciences, le 2 juillet 1823, par M. le baron FOURIER, *secrétaire perpétuel.*

MESSIEURS,

Acquérir dès sa première jeunesse la connaissance des grands ouvrages de l'antiquité, et celle des langues et de la littérature modernes; se consacrer à l'étude du Ciel, et attacher son nom à une entreprise mémorable qui intéresse tous les peuples: écrire l'histoire des sciences les plus anciennes et celle des découvertes les plus récentes; joindre aux dons de l'esprit les plus nobles qualités du cœur, voilà en peu de mots la vie entière du savant illustre dont je vais rappeler le caractère et les travaux. Il n'y a personne qui ne pût reconnaître M. Delambre à ces traits; et les présenter aujourd'hui, c'est renouveler les regrets universels que sa perte a causés.

Delambre est né à Amiens, le 19 septembre 1749; l'abbé

Delille, qui enseignait les lettres dans le collége de cette ville, et qui devait bientôt illustrer son nom, distingua parmi ses disciples un enfant du caractère le plus doux, doué d'une mémoire prodigieuse, à qui les langues anciennes étaient déja familières. Il se plut à développer en lui les premiers germes du talent et du goût; et, ce qui est une condition nécessaire de tous les succès durables, il inspira au jeune Delambre la passion des longues études. Ainsi se forma l'amitié généreuse et inaltérable qui unissait ces deux hommes célèbres.

Après le cours des premières études, il restait à poursuivre dans la capitale une carrière commencée sous de favorables auspices: mais cette nouvelle dépense excédait les ressources d'une famille qui avait à supporter des charges nombreuses. Heureusement cette famille avait fondé autrefois une place gratuite dans un des grands colléges de l'Université de Paris: la ville d'Amiens en disposa en faveur de M. Delambre. Le bienfait remonta vers sa source; on ne pouvait pas lui donner une destination plus juste et plus heureuse: celui qui en était l'objet, n'avait pas cessé d'occuper le premier rang dans ses études littéraires, et il devait un jour honorer sa patrie par d'immortels travaux. L'élève de Delille obtint des succès éclatants dans tous les genres d'instruction classique; il acheva le cours qui porte le nom de philosophie: mais il revint bientôt à cette littérature ancienne qu'il avait cultivée dès ses premières années.

Le temps destiné à la place qu'il occupait, s'était écoulé rapidement, et sa famille, obligée de subvenir à beaucoup d'autres dépenses, convaincue d'ailleurs que le talent devait suffire à tout, lui laissa le soin de pourvoir à son établissement. Il passa alors plus d'une année dans l'attente d'une meilleure situation, et supporta avec constance les privations les plus extraordinaires, ou plutôt il les oubliait facilement; tout ce que d'autres auraient jugé nécessaire lui paraissait à peine désirable. On ne pourrait croire, s'il ne l'eût rapporté lui-même, quelle fut dans cette retraite l'extrême modicité de sa dépense. C'est alors qu'il se livra sans réserve à des études historiques et littéraires qui ont été l'origine de ses grands travaux. Il entreprit des traductions assez étendues d'ouvrages latins, grecs, italiens ou anglais, non dans l'espoir de retirer de ce travail aucun profit, ce qui lui eût été facile, mais dans la seule vue de perfectionner son instruction. Il commença aussi, par le même motif, à se livrer à l'étude des sciences mathématiques.

Il vivait seul, obscur et ignoré, mais heureux et libre, sans autre passion que celle de l'étude. Son temps, seul bien qu'il possédât, lui restait tout entier; aucune visite importune n'interrompait ses loisirs; enfin son talent se fortifiait chaque jour, et croissait pour la gloire de l'astronomie et des lettres. La solitude inspire le génie; elle appelle les grandes pensées, dissipe le désir présomptueux d'une renommée hâtive et vulgaire, et prépare les ouvrages immortels qui feront l'admiration des siècles.

Le mérite extraordinaire de M. Delambre, la douceur habituelle de son caractère et de ses mœurs, la résolution même qu'il avait prise de recommencer seul le cours entier de ses études, attirèrent l'attention. On lui proposa de consacrer quelques années à l'enseignement : il y consentit, et se rendit à Compiègne, où il résida peu de temps; car le séjour de la capitale était devenu nécessaire à ses études. De retour à

Paris, il poursuivit la même carrière, mais avec de plus grands avantages, qu'il n'aurait pu refuser sans imprudence, et qui lui procurèrent bientôt une existence indépendante et assurée. C'est dans ce temps de sa vie, que Delambre se sentit vivement entraîné dans la carrière des sciences : il approfondit les théories mathématiques, étudia la physique et l'astronomie, et continua de cultiver la littérature et l'histoire. Il se distinguait par la persévérance de ses vues; ce fut toujours le caractère principal de son esprit. Personne n'a mis plus de suite dans ses travaux, et n'a parcouru avec plus de constance le vaste champ des connaissances humaines.

Lorsqu'il se présenta au Collége de France pour entendre les leçons de M. Lalande, il avait déja lu ses ouvrages, et en avait rédigé un commentaire complet : on le remarqua pour la première fois dans une séance où le célèbre professeur lui offrit l'occasion de citer de mémoire un passage d'*Aratus*. Il rapporta non-seulement le passage entier du poète grec, mais tous les commentaires anciens auxquels ce texte avait donné lieu; Lalande voulut connaître les notes qu'un lecteur aussi instruit avait pu écrire en étudiant son Traité d'astronomie : il jugea aussitôt tout ce que les sciences venaient d'acquérir et ce qu'elles devaient espérer. Dès ce moment, il regarda Delambre comme son collaborateur ; il le pria de ne point assister à des leçons publiques qui désormais lui seraient inutiles; mais travailla seul avec lui, et lui confia les calculs astronomiques les plus composés. Il détermina M. Dassy, dont le fils avait reçu long-temps les leçons de M. Delambre, à établir dans son hôtel un observatoire spécial. Delambre acquit à ses frais les instruments nécessaires, et s'appliqua aux observations; il entreprit en même temps les recherches les plus étendues, forma le dessein de perfectionner toutes les tables astronomiques, et consacra sa vie à l'étude et à la description du ciel. Cette même pensée s'était déja présentée à son esprit pendant son séjour à Compiègne; elle lui avait été suggérée par un très-habile médecin qui était le confident de ses études, et qui avait remarqué ses dispositions extraordinaires pour les occupations graves et persévérantes. M. Lalande qui désirait ardemment les progrès de l'astronomie, et n'a jamais séparé les intérêts de cette science des siens propres, voulut connaître et remercier celui qui avait donné un conseil aussi honorable et aussi judicieux. On a conservé les lettres qu'il a écrites dans cette occasion; jamais la reconnaissance qu'inspire un bienfait personnel ne s'est plus vivement exprimée.

Nous avons maintenant à indiquer les recherches importantes auxquelles Delambre se livra, et qui l'ont introduit dans l'Académie des sciences.

Herschel venait d'observer aux extrémités du monde planétaire un astre jusqu'alors inconnu, decouverte éclatante qui offrit une nouvelle preuve de la vérité des théories modernes. On trouva cette planète assujettie aux lois mathématiques de la gravitation; on put en décrire le cours et marquer les lieux du ciel qu'elle avait occupés. On reconnut alors que cet astre avait été observé auparavant par divers astronomes qui ne l'avaient pas distingué des étoiles fixes. Delambre entreprit de former des tables du mouvement de cette planète, et ne tarda point à les publier: elles représentaient fort exactement toutes les observations que l'on possédait alors. L'Académie des sciences avait proposé cette question pour le sujet d'un de ses prix annuels: le travail de Delambre fut couronné; il était un témoignage remarquable de la perfection récente qu'avaient acquise les méthodes astronomiques. En effet, quoique l'astre d'Herschel n'eût point encore décrit la dixième partie de son cours, son mouvement fut déterminé avec autant de précision que celui des autres planètes dont la connaissance remonte à des époques immémoriales.

On doit aussi à Delambre les Tables du soleil qui furent publiées dans ce même temps, et celles de Jupiter et de Saturne. Il entreprit encore de former des Tables écliptiques des satellites de Jupiter, et acheva en quelques années cet ouvrage difficile et immense.

L'objet des Tables astronomiques est de représenter l'état du ciel pour un instant donné; on se fonde sur le principe général de la constance des lois naturelles, et l'on parvient par l'étude du passé à la connaissance de l'avenir. Ces recherches sont dirigées par la géométrie qui, selon l'expression de Platon, réside dans le ciel; elles le sont aussi par les autres théories mathématiques que les modernes ont inventées, et qui ont servi à découvrir les causes et les lois des mouvements célestes.

On reconnut d'abord que les faits les plus généraux étaient des conséquences nécessaires des lois mathématiques de la gravitation; ensuite, des observations plus précises indiquèrent dans le cours des astres des irrégularités qui paraissaient n'être point assujetties aux mêmes causes. On demanda si la résistance des matières éthérées n'altérait point les mouvements célestes, si la gravité agissait suivant une loi aussi simple qu'on l'avait supposé, si la transmission de cette force était instantanée, ou si elle était progressive comme l'impression de la lumière. Ces doutes ne subsistent plus aujourd'hui, et c'est dans le sein de cette Académie qu'ils ont été résolus. Les inégalités qui semblaient inexplicables sont des résultats nécessaires de l'action mutuelle des corps célestes : ces inégalités ne sont point des exceptions aux lois mathématiques de la pesanteur; au contraire, elles les confirment. Le monde planétaire oscille entre des limites qu'il ne peut point dépasser; il contient en lui-même ses principes de stabilité et de durée, qui suffisent pour le régir et pour le conserver. C'est l'imperfection de nos connaissances qui portait à recourir à des causes subsidiaires ou réparatrices : plus on étudia l'Univers, plus on admira l'unité et la simplicité de ses lois; jamais les sciences ne se sont perfectionnées sans rendre plus manifeste l'ordre immuable qu'une sagesse infinie a prescrit à toute la nature.

On agitait toutes ces grandes questions du système du monde, lorsque M. Delambre se livrait avec ardeur à l'étude de l'astronomie. Il assistait à la séance de l'Académie des sciences de Paris où M. de Laplace venait de communiquer ses importantes découvertes sur les inégalités respectives de Saturne et de Jupiter; Delambre forma aussitôt le dessein d'appliquer les résultats de cette profonde analyse, et de perfectionner ainsi les tables des deux planètes.

Recueillir, discuter, et rendre comparables toutes les observations connues, les rapprocher des résultats théoriques, distinguer par ce moyen les éléments qui doivent servir à former les tables, enfin assigner à ces éléments les valeurs propres à faire coïncider les théorèmes d'analyse avec les faits observés, voilà en général la marche que l'on suit dans la composition des Tables astronomiques.

Delambre s'appliqua surtout à celles des satellites de Jupiter; entreprise difficile et d'une prodigieuse étendue, dans laquelle il fut soutenu par deux motifs puissants, l'utilité publique et la grandeur propre du sujet. Les astres qui accompagnent Jupiter sont les premiers corps célestes que le télescope nous ait fait découvrir; ils disparaissent lorsqu'ils pénètrent dans l'ombre de la planète. Ces phénomènes, entièrement semblables aux éclipses lunaires, se reproduisent beaucoup plus fréquemment, puisqu'un seul des satellites est éclipsé quatre fois dans l'intervalle de sept jours. Galilée, qui contempla le premier ces curieux phénomènes, jugea aussitôt que ce genre d'observations servirait à perfectionner les connaissances géographiques. En effet, lorsque le cours des satellites fut connu, et réduit en tables assez exactes, on rectifia une multitude d'erreurs énormes dans la détermination des longitudes, et surtout vers la partie orientale de l'ancien continent. A la vérité, plusieurs causes concourent à limiter l'usage et la précision de cette méthode; mais elle n'en est pas moins une source précieuse de découvertes: et l'on regardera toujours comme une des plus heureuses conséquences des inventions modernes, que ces astres si long-temps ignorés, et qui semblaient devoir toujours échapper à nos sens, offrent aujourd'hui au navigateur dans les attérages, le moyen le plus facile de reconnaître les positions respectives des lieux du globe où il est parvenu. Ce n'est pas le seul résultat digne d'admiration que présente le monde de Jupiter; il n'y a peut-être aucune partie du ciel dont le spectacle soit plus propre à intéresser l'esprit. C'est l'observation attentive des éclipses des satellites qui nous a appris que l'action de la lumière n'est pas instantanée, et nous a donné la mesure précise du temps qu'elle emploie pour se propager depuis le soleil jusqu'à nous;

découverte capitale faite par Roemer à l'Observatoire de Paris, et qu'une autre théorie a pleinement confirmée.

Le système formé de Jupiter et de ses quatre satellites est un monde distinct, dont les révolutions rapides nous représentent celles qui doivent s'accomplir dans le système général du soleil et des planètes. Ainsi l'étude des inégalités des satellites abrège en quelque sorte les temps astronomiques ; elle nous rend sensibles des phénomènes qui ne se développeront dans le système planétaire qu'après une suite immense de siècles.

Les trois premiers satellites de Jupiter sont assujétis par leur action mutuelle et par celle de la planète, à deux lois très-remarquables, non moins simples et non moins constantes que celles de Képler. Leur mouvement et leur situation ont une dépendance réciproque, telle, que la position de ces deux astres étant connue, celle du troisième est par cela même déterminée ; et il en résulte, par exemple, qu'ils ne pourront jamais être éclipsés tous les trois à la fois. M. de Laplace avait découvert ces lois, en démontrant qu'elles sont des conséquences nécessaires de l'action mutuelle des satellites, et que la même cause tend perpétuellement à les maintenir. Toutes les observations ont offert des preuves subsistantes de la vérité de ces lois : ces admirables théorèmes ont servi de fondement aux recherches de M. Delambre. Il s'occupait depuis plusieurs années de la composition de ces tables écliptiques, lorsque l'académie des sciences choisit la même question pour le sujet d'un prix. On le décerna à son ouvrage : il avait été couronné pour l'astre d'Herschel; il le fut une seconde fois pour ceux de Galilée, et très-peu de temps auparavant il avait été élu membre de l'Académie.

Vers ce même temps, on se disposait en France à l'exécution d'un grand et difficile projet dont toutes les nations éclairées ont reconnu et désiré les avantages, celui d'établir un système de mesures uniformes fondé sur des bases naturelles et invariables. On résolut de choisir, pour l'élément principal du système métrique français, une partie déterminée du méridien terrestre, et l'on eut ainsi l'heureuse occasion de renouveler des opérations géodésiques très-importantes, et qui ont porté au plus haut degré de précision la connaissance de la figure et des dimensions du globe terrestre. On confia à MM. Delambre et Méchain le soin de mesurer un arc du méridien depuis Dunkerque jusqu'à Barcelone; nous ne pouvons point exposer ici le caractère, les difficultés, les progrès de cette vaste entreprise. C'est à M. Delambre qu'on en doit principalement le succès; il en a écrit l'histoire, et c'est dans ses ouvrages qu'il faut acquérir une juste et exacte connaissance des soins qu'elle exigeait, et des résultats qu'elle a produits.

On ne pouvait point se proposer de tracer cette ligne méridienne de plus de deux cents lieues de long, et de la mesurer effectivement dans toute son étendue; c'est à la géométrie à suppléer à l'application immédiate des mesures. Mais quelle multitude d'obstacles se présente dans l'exécution! Les températures de l'air et des corps solides changent continuellement; l'atmosphère, dont l'état est si variable, détourne la direction de la lumière; l'inégale hauteur des points observés, la difficulté de choisir, de placer, de conserver les signaux; tout conspire contre l'exactitude des résultats; enfin, ils peuvent être altérés par l'attraction des montagnes, et sujets aux inégalités de la figure ou de la masse du globe. La physique, l'astronomie, l'analyse mathématique réunissent leurs lumières pour discuter ces causes d'incertitude ou d'erreur, et pour distinguer dans chacune des opérations le genre de preuves qui lui est propre.

On se borne ici à citer comme une vérification frappante, celle qui eut lieu lorsque l'on voulut comparer les deux bases de Melun et de Perpignan, dont chacune est d'environ trois lieues. M. Delambre avait mesuré l'une et l'autre sur le terrain par l'application de la règle. Or, une seule de ces mesures était nécessaire, et comme ces deux bases étaient comprises dans une chaîne commune de triangles consécutifs, on pouvait déduire l'une de l'autre par le calcul. On soumit donc les opérations à cette épreuve singulière, et d'autant plus décisive que la distance des bases est environ deux cent vingt lieues. Or on trouva qu'il n'y avait pas un tiers de mètre de différence, entre le résultat du calcul et celui de la mesure effective. Ainsi, l'on venait de déterminer par une opération trigonométrique une longueur d'environ trois lieues placée à plus de deux cents lieues de distance, et l'erreur était moindre qu'un pied, c'est-à-dire la trente-six millième partie de la longueur calculée. Je ne dirai pas que M. Delambre fut surpris de cette coïncidence; il en fut du moins extrêmement satisfait, elle était une conséquence de ses soins et de l'étonnante précision des instruments. Ceux qui avaient servi à mesurer les angles, et que l'on a employés aussi dans les observations astronomiques, sont les cercles multiplicateurs de Borda. Leur avantage consiste surtout dans la répartition ingénieuse d'une seule erreur sur une multitude d'observations. Quant au procédé dont on s'est servi pour mesurer les bases, et que l'on doit encore à ce grand physicien, il consiste dans l'application effective d'une mesure de platine qui est à-la-fois une règle et un thermomètre.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des difficultés propres aux opérations géodésiques; mais les auteurs de ce grand travail furent souvent arrêtés par des obstacles d'un autre genre. Leur carrière fut troublée par de vives inquiétudes, par l'injustice et la douleur. Méchain qui nous a laissé un grand nombre d'observations précieuses, eut à supporter une assez longue captivité, et les suites douloureuses de fatigues sans cesse renouvelées. L'opération principale étant achevée, il désira, comme il en avait toujours eu le dessein, de la prolonger jusqu'aux îles Baléares, et mourut sur une terre étrangère, avant que les résultats de ses pénibles travaux eussent été rendus publics. Delambre à qui il fut donné de prendre une part beaucoup plus étendue à cette entreprise, en a rassemblé tous les éléments, et les a publiés dans un ouvrage capital que l'on doit regarder comme un des plus beaux monumens des sciences. Il avait quitté Paris dans les derniers jours du mois de juin 1792. Il est facile de juger combien l'état politique où la France se trouvait alors, et les passions violentes qui agitaient toutes les parties du royaume, étaient peu favorables à une entreprise savante dont les hommes éclairés appréciaient seuls les avantages.

Les dispositions qu'il était nécessaire de faire pendant la nuit, l'emploi des signaux et d'instruments inconnus firent naître des soupçons; les habitants des villages s'attroupèrent: on interrogea les astronomes, on voulut connaître les instructions qui leur avaient été remises, et elles parurent cacher quelque mystère coupable. M. Delambre, toujours persuadé que la bonne foi, la patience et le désir d'être utile devaient triompher de tous les obstacles, montrait les instruments, en indiquait l'usage; et, pour me servir de ses propres expressions, il entreprit de donner sur les places de Lagny, d'Épinay, de Saint-Denis, des leçons de géodésie astronomique, et il parvint à convaincre quelques-uns de ses auditeurs. Mais des scènes aussi fatigantes et aussi dangereuses s'étant renouvelées, on fut réduit à discontinuer le travail. À la vérité ce premier obstacle ne fut pas durable, et l'on permit à Delambre de poursuivre ses premières opérations; mais peu de temps après il eut à supporter une persécution plus longue et plus odieuse. Il fut exclus, sous les plus vains prétextes, de la commission qui présidait à l'établissement des nouvelles mesures. Dans cette décision dont le texte a été conservé, on lui fait un crime de ses opinions modérées, et en conséquence on lui interdit de concourir à la mesure de la méridienne. Ce même ordre exclut Borda, Delambre, Coulomb, Laplace et Lavoisier; il porte la signature de Robespierre, de Billaut-Varenne, de Couthon, de Collot-d'Herbois. Qui ne serait frappé, Messieurs, de ce rapprochement fatal de noms illustres et de noms terribles! Mais je n'arrêterai pas davantage votre attention sur des temps funestes qui sont déja loin de nous; l'histoire des sciences ne se plaît que dans les souvenirs de la concorde publique.

Delambre, qui avait dû concevoir de vives inquiétudes, s'attacha à se faire oublier. Rendu à ses occupations sédentaires, il partagea sa vie entre les sciences et les lettres. Les Muses ornèrent une seconde fois sa retraite; elles avaient encouragé sa jeunesse, elles le consolèrent dans l'âge mur; les Muses sont hospitalières; elles donnent asyle à toutes les infortunes; elles accueillent le mérite outragé, et l'élèvent au-dessus des injustices contemporaines; elles sourient à ceux dont le temps est l'unique patrimoine, et charment leur solitude: dans toutes les conditions de la vie, elles suggèrent de douces espérances et de nobles sentiments.

Après deux années d'interruption, Delambre, qui avait conservé soigneusement tous les résultats de son travail, eut enfin la faculté de s'y consacrer entièrement; il le reprit d'abord sous un autre titre, et ensuite on ne tarda point à renouveler les dispositions qui avaient pour objet la mesure de l'arc du méridien. Il poursuivit avec constance tous les détails de cette immense entreprise; elle fut achevée avant la dernière année du siècle. Les résultats que l'on avait obtenus furent calculés suivant différentes méthodes dont plusieurs furent proposées par Delambre. On fit aussi dans ces calculs l'application d'un théorème très-remarquable de M. Legendre, et qui convient spécialement aux mesures géodésiques.

Si l'on considère l'importance du sujet, les questions d'astronomie, de géométrie et de physique qu'il fut nécessaire de traiter, les noms célèbres des savants français ou étrangers qui concoururent à cet examen, les conséquences capitales et durables de ce travail, on peut dire qu'aucune autre application des sciences n'est comparable à celle-ci, et n'offre le même caractère d'exactitude, d'utilité et de grandeur. C'est le jugement qu'en ont porté toutes les Académies de l'Europe, et l'opinion de l'Institut de France fut solennellement exprimée, lorsqu'on lui proposa de désigner l'application la plus importante des sciences mathématiques ou physiques dans le cours de dix années; les suffrages unanimes décernèrent ce prix à l'auteur de la base du système métrique.

La longueur d'une partie déterminée du méridien fut donc connue avec une extrême précision. Ce résultat et celui des mémorables expériences de M. Lefèvre-Gineau ont servi de fondement à l'établissement des mesures françaises.

L'ensemble de cette grande opération comprend encore les expériences qui ont été faites en divers lieux sur la longueur du pendule suivant les procédés inventés par Borda, et toutes les observations qui ont eu pour objet de prolonger l'arc du méridien jusqu'à Formentera, et de le prolonger aussi vers le nord en joignant les travaux géodésiques de la France avec ceux de la Grande-Bretagne.

Une des conséquences les plus remarquables des sciences modernes est celle qui se rapporte à la forme elliptique du globe terrestre. L'aplatissement des régions polaires, déterminé par le mouvement de ce globe autour de son axe, est démontré par toutes les mesures géodésiques, il l'est aussi par la comparaison des longueurs du pendule; et, ce qui est un des témoignages les plus étonnants de la perfection des théories astronomiques, la mesure de cet aplatissement se déduit avec la plus grande exactitude de l'observation attentive du mouvement de la lune. On a découvert dans le cours de cet astre des irrégularités dues à l'action de la terre, et qui n'auraient point lieu si cette planète était exactement sphérique. On a déterminé par ces inégalités mêmes la quantité de l'aplatissement terrestre avec plus de précision encore qu'on ne l'a pu faire par des mesures immédiates, en se transportant successivement dans les diverses régions du globe.

On trouve en cela une preuve frappante des progrès des sciences : car il n'y a pas un siècle que la question de la figure elliptique du globe était incertaine. Non-seulement l'aplatissement des contrées polaires était contesté dans le sein des académies, on avait même proposé et long-temps soutenu l'opinion directement contraire. Aujourd'hui tous les doutes sont résolus. Les opérations géodésiques faites en France, en Angleterre, dans l'Amérique équatoriale, dans les possessions anglaises de l'Inde; la comparaison des longueurs du pendule à secondes, observées dans divers climats, et, comme nous l'avons dit, la théorie des inégalités lunaires donnent les mêmes valeurs pour la mesure de l'ellipticité terrestre. On ne traitera jamais cette question de la figure de la terre, si féconde en grands résultats, sans citer l'opération dont nous sommes principalement redevables à M. Delambre. Elu dans la plupart des académies étrangères, et membre du bureau des longitudes de France, il fut nommé dans l'institut secrétaire perpétuel pour les sciences mathématiques.

Nous rappellerons maintenant le temps de sa vie où il contracta l'union la plus heureuse et la plus digne de lui. Il avait été accompagné dans ses voyages géodésiques par un très-jeune homme, M. Leblanc de Pommard, que sa mère avait instruit; qui avait reçu d'elle, outre les principes des meilleures études littéraires, la connaissance des plus beaux ouvrages de la littérature étrangère. M. Delambre, dont ce jeune homme partageait les travaux, s'attacha de plus en plus à lui, perfectionna ses talents, l'éclaira par ses conseils et par ses exemples. Sa mère connaissait tout le prix d'une telle amitié, et il est facile de concevoir combien son cœur fut touché d'un aussi grand bienfait. Madame de Pommard, devenue veuve, épousa l'ami et le protecteur de son fils, celui dont l'Europe savante honorait le caractère et les talents; elle les admirait elle-même: personne ne sait mieux apprécier les hautes qualités du cœur et de l'esprit. Les motifs qui avaient déterminé cette union la rendirent fortunée; mais cette famille si heureusement unie ne devait pas jouir d'un bonheur durable. Elle fut inopinément frappée par la perte déplorable de ce fils, objet unique de tant de vœux, de soins et d'espérances; sa mère, livrée à une profonde douleur, trouva du moins quelque adoucissement dans la tendre affection de M. Delambre. Dix-huit années s'écoulèrent dans le sein de l'amitié, de la confiance et de la paix, dans des occupations chéries et le commun exercice d'une bienfaisance habituelle. Delambre avait succédé à Lalande dans la chaire d'astronomie du collége de France, et il fut nommé l'un des principaux titulaires de l'Université. Il a rempli durant vingt années, dans une des classes de l'institut et dans l'Académie royale des sciences, la fonction que les suffrages de ses collègues lui avaient confiée, et n'a cessé de se montrer impartial, vrai, équitable. Il n'a fait en cela que s'acquitter d'une obligation contractée, et le respect pour de tels devoirs n'est point un sujet d'éloges; mais il est utile de citer le zèle empressé qui l'animait, et cette bienveillance ingénieuse qui lui était si naturelle, qu'aucun motif personnel et l'injustice même n'auraient pu l'altérer. Dans ses rapports annuels, dans les éloges historiques qu'il a publiés, et dans le tableau des progrès des sciences, on retrouve l'érudition savante qui le distinguait éminemment, un talent d'écrire formé sur les plus beaux modèles, et surtout cette disposition du cœur qui lui rendait agréable et facile l'habitude de montrer les productions des autrs sous le jour le plus favorable, sans porter aucune atteinte à la vérité de l'histoire.

Ses travaux littéraires et scientifiques sont trop étendus pour que nous puissions ici les rappeler tous et en exposer distinctement l'objet; mais nous les faisons connaître dans une notice bibliographique. Elle comprend tous les ouvrages ou mémoires que Delambre a publiés séparément, ou insérés dans les collections académiques de Paris, de Berlin, de Turin et dans celle de la Connaissance des Temps. C'est dans de telles énumérations que se trouvent les véritables titres de la gloire littéraire; rien n'est plus propre à la montrer dans tout son éclat, sans exagération et sans effort. Si l'on applique cette pensée aux ouvrages de Delambre, il est aisé de juger quel rang ils occupent dans l'histoire des sciences. Avant lui, les calculs astronomiques étaient fondés sur des méthodes numériques, indirectes et irrégulières; il les a toutes changées ou perfectionnées. La plupart de celles dont les astronomes se servent aujourd'hui lui appartiennent; il les a déduites de formules analytiques qui rendent les opérations plus sûres, plus uniformes et plus faciles. Il a publié de nouvelles tables du soleil, celles de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et des satellites de Jupiter. Des travaux récents, fondés sur un plus grand nombre d'observations exactes, ont beaucoup perfectionné quelques-unes de ces tables; mais dans l'état actuel de l'astronomie, et jusqu'à ce jour, les tables de Delambre que l'on vient de citer sont celles qui servent à calculer la Connaissance des Temps et les éphémérides astronomiques et nautiques de la plupart des peuples.

Enfin, l'opération géodésique qui lui est due principalement est la plus parfaite et la plus étendue que l'on ait exécutée dans aucun pays. Elle sert de modèle à toutes les entreprises de ce genre qui ont été formées depuis.

Il est d'autant plus remarquable que les travaux de M. Delambre aient eu cette influence sur les méthodes de l'astronomie, qu'il n'a cultivé cette science qu'à un âge assez avancé : il avait plus de trente-cinq ans lorsqu'il commença à observer. L'histoire des sciences offre quelques exemples semblables : Newton était en possession de toutes ses grandes découvertes mathématiques à un âge que Leibnitz n'avait pas encore atteint lorsqu'il se livra à l'étude de ces sciences, et Leibnitz fut peu d'années après l'un des inventeurs de l'analyse infinitésimale; mais il faut ajouter que Leibnitz et Delambre s'étaient consacrés à d'autres études dès leur première jeunesse: ils avaient acquis, si l'on peut parler ainsi, les mœurs littéraires, et leur esprit était exercé aux longues recherches. Les ouvrages de M. Delambre composent une bibliothèque astronomique presque complète : dans son Traité d'astronomie, il rapporte et compare toutes les méthodes connues; dans l'ouvrage qui contient l'histoire de cette science, il en représente les progrès successifs depuis les époques les plus reculées jusqu'à l'année 1822; les dernières parties de cet ouvrage seront incessamment publiées par les soins de notre collègue M. Mathieu, son ancien disciple et son ami.

Nous ne rappellerons point ici les questions qui se sont élevées sur l'origine des connaissances astronomiques des anciens peuples. Cette discussion exige l'étude attentive de tous les monuments, et la solution de plusieurs questions difficiles de géométrie sphérique; elle suppose aussi l'examen des sources historiques les plus anciennes. Ces sources sont toutes indiquées dans l'ouvrage de Delambre, et ses savantes analyses sont nécessaires, quelle que soit l'opinion que l'on se forme à ce sujet. Ce qui distingue surtout son histoire de l'astronomie ancienne des ouvrages qui l'ont précédée, et qui ont le même objet, est le soin que l'auteur a pris d'expliquer clairement les méthodes propres à chaque astronome. Il les traduit au moyen des signes analytiques modernes; et, ce qui est remarquable, cette interprétation perfectionne presque toujours les méthodes.

Les travaux longs et opiniâtres auxquels il n'a cessé de se livrer, dont rien ne pouvait le distraire, et qui étaient à peine interrompus par quelques heures de sommeil, altérèrent de plus en plus sa santé dans les dernières années. La maladie qui l'a enlevé aux sciences s'est déclarée dans le mois de juillet 1822; la perte totale de ses forces, des syncopes longues et fréquentes annoncèrent d'abord une issue funeste. Il parut lui-même la prévoir, et conserva jusqu'au dernier instant la douceur inaltérable de son caractère et la sérénité de son esprit : il succomba le 19 août 1822, non sans avoir beaucoup souffert, mais sans avoir proféré aucune plainte.

Si j'avais à rappeler des scènes de regrets et de douleurs, les tendres sollicitudes de son épouse et de ses parents, que pourrais-je ajouter aux paroles nobles et touchantes qui furent prononcées à ses obsèques, lorsqu'il reçut notre dernier adieu, et quel suffrage pourrait honorer sa mémoire autant que celui qui fut si éloquemment exprimé par son illustre collègue, témoin de ses travaux et de ses vertus?

On vient de présenter les traits les plus remarquables de la vie de M. Delambre : si le bonheur consiste dans les nobles occupations de l'esprit, dans les affections bienveillantes et la jouissance de soi-même, quelle destinée fut plus heureuse que la sienne? Elle ne fut pas exempte sans doute de peines passagères; mais il a joui des biens vraiment désirables, ceux que procurent l'étude, l'amitié et la vertu. Dans toutes les situations de la vie il honora son caractère, soit par la modération de ses désirs, lorsqu'il fut privé des avantages de la fortune, soit par l'usage qu'il en fit lorsqu'il les posséda. Il a connu dès sa jeunesse, et puisé dans les sources mêmes tout ce que l'antiquité nous a transmis de vrai, de grand, de sublime; il a passé sa vie dans la contemplation des phénomènes de l'Univers, et dans le commerce intime des plus célèbres contemporains. Les sentiments de la haine, les repentirs amers, les désirs ambitieux n'ont point troublé son cœur; il n'a offensé personne, l'envie même a respecté son repos. Combien peu de grands hommes ont joui de cet avantage, et qu'il nous serait facile de rendre cette réflexion plus frappante en citant les noms immortels qui l'ont précédé, et rappelant ici l'exil de Tycho, l'indigence de Kepler, les illustres infortunes de Galilée! L'étendue et la nature des ouvrages que Delambre nous a laissés le placent pour jamais au rang des premiers promoteurs des sciences : la poésie et l'amitié ont consacré son nom; il n'a manqué à sa mémoire, Messieurs, qu'un successeur qui sût mieux que moi peindre dignement son caractère et son génie : mais la voix éloquente et fidèle de l'histoire suppléera bientôt à la mienne : elle s'élèvera dans tous les siècles, pour perpétuer le souvenir de tant d'utiles et glorieux travaux

NOTICE CHRONOLOGIQUE

DES OUVRAGES

DE M. DELAMBRE.

Traités, Tables astronomiques, Mémoires, Éloges historiques, Analyses historiques, Rapports et extraits.

Ces ouvrages ont été publiés séparément ou dans la Collection des Mémoires de l'Institut de France. — De l'Académie de Berlin. — De l'Académie de Turin. — De l'Académie de Stockholm. — Des Sociétés savantes et littéraires, et autres collections. — Dans la Connaissance des Temps.

Ouvrages séparés.

Tables de Jupiter et de Saturne. Paris, 1789, in-4°.

Tables du soleil, de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et des satellites de Jupiter. Paris, 1792, in-4°.

Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien. Paris, 1799, in-4°.

Tables trigonométriques décimales, calculées par Borda, revues, augmentées et publiées par M. Delambre. Paris, 1801, in-4°.

Tables du soleil (publiées par le bureau des longitudes). Paris, 1806, in-4°.

Base du système métrique décimal, ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes, par MM. Méchain et

Delambre, rédigée par M. Delambre. Paris, de 1806 à 1810, 3 vol. in-4°.

Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel, présenté le 6 février 1808 par la classe des sciences mathématiques et physiques de l'institut. Paris, 1810, in-4°.

Abrégé d'astronomie, ou leçons élémentaires d'astronomie théorique et pratique. Paris, 1813, in-8°.

Astronomie théorique et pratique. Paris, 1814, 3 vol. in-4°.

Tables écliptiques des satellites de Jupiter. Paris, 1817, in-4°.

Histoire de l'astronomie ancienne. Paris, 1817, 2 vol. in-4°.

Histoire de l'astronomie du moyen âge. Paris, 1819, in-4°.

Histoire de l'astronomie moderne. Paris, 1821, 2 vol. in-4°.

Histoire de l'astronomie au dix-huitième siècle, in-4°, sous presse.

Histoire de la mesure de la terre, in-4°, sous presse.

Publiés dans les Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, de la première classe de l'Institut et de l'Académie royale des sciences.

Occultation de Vénus par la lune, 12 avril 1785. (Mémoires, académ. des sciences de Paris, an 1784, page 654.)

Passage de Mercure sur le soleil, 7 mai 1799. (Mémoires, Institut, Paris, classe sciences mathématiques et physiques, tome 3, page 392.)

Analyse des travaux de l'Académie partie mathématique, et rapports sur divers sujets.

Eloges historiques de MM. Cousin, Bory, Jeaurat, Méchain, Brisson, Coulomb, Lalande, Berthoud, Montgolfier, Fleurieu, Maskelyne, Bougainville, Malus, Lagrange, Bossut, Lévêque Rochon, Messier, Perrier.

Dans les Mémoires de l'Académie de Berlin.

Mémoire sur les éléments de l'orbite solaire, dans lequel on détermine par de nouvelles observations l'apogée, la longitude moyenne et la plus grande équation du soleil. (Mém., Berlin, an 1785, page 191.)

Dans les Mémoires de l'Académie de Turin.

Réduction à l'écliptique, formules nouvelles pour en déterminer le maximum, ainsi que la longitude à laquelle il répond (Mém. Turin, tome IV, page 113.)

De l'usage du calcul différentiel dans la construction des tables astronomiques. (Mém. Turin, tome V, page 143.)

Dans les Mémoires de l'Académie de Stockholm.

Om Parallax-Vinklars utracknande, 1788, tome 9.

Dans les Collections intitulées, Mémoires des Sociétés savantes et littéraires, Bulletin des sciences. — Société philomatique.

Observations diverses et Rapports.

Dans la Connaissance des Temps.

Ce dernier recueil contient un très-grand nombre de Notices, Mémoires et Extraits divers, par M. Delambre. Tous ces articles doivent être consultés; on y trouve des recherches qui n'ont été publiées dans aucune autre collection.

Les tables de la Connaissance des Temps, qui ont été rédigées avec soin, dispensent d'une énumération qui nous aurait obligés de donner à cette notice bibliographique une étendue excessive.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1820.

PARTIE PHYSIQUE.

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

MÉTÉOROLOGIE.

M. MOREAU de Jonnès, qui considère les Antilles sous tous les rapports, a occupé cette année l'Académie de plusieurs objets ralatifs à la météorologie de ces îles.

En prenant un terme moyen de six ans, on trouve qu'à la Martinique et à la Guadeloupe le nombre des jours de pluie est de 230, dont 35 ou 40 de pluies excessives. Ce nombre est à celui des jours de pluie qui ont lieu à Paris comme 5 à 3. Si l'on faisait entrer toutes les Antilles dans la comparaison, leur nombre de jours de pluie serait à celui de Paris comme 7 à 4. La quantité moyenne d'eau à la Guadeloupe et à la Martinique, est de 216 centim. (80 pouces), distribués assez irrégulièrement entre les diverses régions et entre les divers mois de l'année. Il pleut davantage dans les parties élevées; ce que M. de Jonnès attribue moins à l'élévation en elle-même qu'au voisinage des forêts. C'est sous le vent de leurs montagnes qu'il tombe le plus de pluie, parce que ces montagnes ne sont point assez élevées pour intercepter les nuages.

La Martinique a éprouvé, le 16 octobre, un tremblement de terre, plus remarquable par sa durée que par sa force, et qui est arrivé au milieu d'un coup de vent violent. Il n'a point causé d'accident; mais l'on a pu s'assurer à cette occasion que la fièvre jaune ne vient point, comme on l'a dit assez souvent, de vapeurs qui s'exhalent lors des tremblements de terre.

Sainte-Lucie, qui est séparée de la Martinique par un canal très-profond et de sept lieues de largeur, a participé à ce tremblement. En même temps des pluies abondantes, qui avaient duré pendant les trois jours précédents, ont produit de grands éboulements, fait glisser le long des pentes des terrains entiers avec les cannes dont ils étaient plantés, et détaché d'énormes blocs de basalte, dont la chute a fait périr plusieurs individus.

Quoique le nombre des pierres tombées de l'atmosphère soit assez grand, et que l'on ait constaté ce phénomène avec assez de soin pour en mettre hors de doute la réalité, les observations de détail que ces pierres ont offertes ne suffisent point encore pour qu'on puisse assigner exactement toutes les circonstances qui accompagnent leur chute.

M. Fleuriau de Bellevue, ayant eu occasion d'examiner celles qui tombèrent au mois de juin 1819 dans les environs de Jonzac, département de la Charente-Inférieure, a présenté à l'Académie un Mémoire où, après les avoir décrites avec beaucoup de détails, et rapporté tout ce que l'on a observé au moment où elles ont paru, il cherche à expliquer les faits intéressants qu'il rapporte; ce qui le conduit à combattre quelques-unes des idées théoriques des physiciens qui se sont le plus occupés de cette matière.

Le ciel était serein, et le soleil levé depuis deux heures, lorsqu'on entendit plusieurs détonations qui partaient d'un météore lumineux de forme irrégulière, mais allongée, qui parcourait rapidement une ligne droite du N. N. O. au S. S. E., et qui paraissait élevé de 50 à 60° au-dessus de l'horizon. Au même instant une chute de pierres eut lieu dans un espace de plusieurs milliers de toises. L'une de ces pierres pesait six livres, et toutes avaient des formes plus ou moins angulaires. Leur pesanteur spécifique était un peu moindre que celle des autres pierres météoriques, et elles en différaient encore par l'absence de nickel, comme M. Laugier, qui en a fait l'analyse, l'a constaté. Elles se composent d'une aggrégation crystalline de deux substances, l'une généralement d'un blanc mat et fort tendre; l'autre, d'un gris verdâtre, opaque, plus dure, et en moindre quantité que la première, dans laquelle elle est assez uniformément disséminée. On n'y aperçoit aucune parcelle de fer, et elles ne sont que très-peu attirables à l'aimant. Leurs caractères sont donc les mêmes que ceux de l'aërolithe tombé à Stannern en Moravie; et elles lui ressemblent encore par la couche vitreuse et brillante dont elles sont revêtues. Cette espèce de vernis présente même des particularités importantes, qui font naître quelques idées sur le mouvement dont ces pierres étaient animées dans leur chute; ce sont des stries qui paraissent naître d'un point commun, s'étendre en divergeant, et s'arrêter sur les bords d'une des plus larges faces, nommée par M. Fleurieu, grande face, ou face inférieure, où elles se réunissent pour former une arête uniforme et saillante. On croirait voir un liquide épais qui s'est desséché après avoir coulé le long des pentes que les faces obliques de la pierre lui présentaient, et après s'être arrêté où ces faces s'arrêtaient elles-mêmes. C'est principalement sur ce fait que M. de Fleurieu s'appuie pour établir la direction du mouvement de ces pierres. Il pense : 1° Que la croûte qui les enveloppe n'a pu prendre sa disposition que lorsqu'elles étaient en mouvement; 2° que ce mouvement était simple; 3° qu'il était perpendiculaire à la grande face.

Examinant ensuite l'origine de ces pierres, il est conduit à combattre l'idée de M. Chadni, qui suppose que les aërolithes éprouvent, en parcourant notre atmosphère, un degré plus ou moins grand de fusion; celle de M. Leman, qui attribue les effets du feu, que leur croûte vitreuse démontre, à la combustion des substances combustibles qu'ils contiennent; et celle de M. Isarn, qui suppose les aërolithes produits par la condensation subite de certains gaz. Il pense que ces corps arrivent sur la terre dans toute leur intégrité; que le feu qui les accompagne résulte de l'inflammation de l'atmosphère dont ils sont environnés; qu'ils éclatent par l'action inégale de ce feu; que le nombre des détonations qui accompagnent ordinairement leur chute, prouve qu'ils ne se divisent que successivement par l'effet de causes extérieures, et non point par une cause unique et centrale, et que chaque portion de l'aërolithe, éprouvant à son tour l'effet du feu, se vitrifie à sa surface; d'où résultent ces stries dont nous avons rapporté l'explication plus haut.

CHIMIE.

Nous avons entretenu plusieurs fois nos lecteurs des belles découvertes de M. Gay-Lussac sur l'acide du bleu de Prusse et sur ses combinaisons. Ce sujet intéressant est loin d'être épuisé, et chaque jour il enrichit la chimie de vérités nouvelles.

Un chimiste anglais, M. Porrett, a découvert que le sel connu sous le nom de prussiate triple de potasse, que l'on regardait comme composé d'acide prussique, d'oxide de fer et de potasse, est réellement une combinaison binaire, formée de potasse, et d'un acide particulier qui renferme les éléments de l'acide prussique et de l'oxide de fer; acide dont les affinités énergiques enlèvent le péroxide de fer aux acides les plus puissants pour donner immédiatement le bleu de Prusse.

M. Robiquet est parvenu, par un procédé nouveau, à obtenir pur et à l'état solide cet acide que M. Porrett n'avait eu que dissous dans beaucoup d'eau : en effet l'acide hydrochlorique concentré décompose le bleu de Prusse, en retenant le fer, et laisse précipiter l'acide de M. Porrett sous forme de poussière blanche que l'on purifie encore par de nouveaux lavages avec l'acide hydrochlorique.

Les expériences multipliées et ingénieuses auxquelles M. Robiquet a soumis cet acide de M. Porrett, ont prouvé qu'il ne contient pas d'oxygène, et que le fer y est par conséquent à l'état métallique; l'auteur le considère comme formé d'acide hydrocyanique et de cyanure de fer, et c'est son union avec le péroxide de fer qui est le bleu de Prusse.

MM. Pelletier et Caventou, continuant leurs recherches sur l'analyse végétale, ont fait une découverte de la plus haute importance. C'est celle du principe fébrifuge du quinquina qui appartient à cette nouvelle classe d'alcalis végétaux, composée d'oxygène, d'hydrogène et de carbone, dont nous avons déja annoncé cinq espèces dans notre analyse de l'année dernière. Ce principe avait été aperçu par M. Gomès, chimiste portugais, qui cependant n'en avait pas reconnu la nature alcaline; il se trouve dans la matière colorante du quinquina uni à un acide qui le rend soluble. En lavant cette matière avec de l'eau légèrement alcalisée, qui s'empare de l'acide, on fait précipiter le principe fébrifuge, qui ne conserve plus qu'un peu de matière grasse, dont on le délivre en le dissolvant dans l'acide hydrochlorique faible, et en précipitant par un alcali. On peut aussi traiter immédiatement la matière colorante par l'acide hydrochlorique et précipiter par la magnésie. Les auteurs nomment ce principe *cinchonine.* Il est blanc, cristallin, amer comme le quinquina sans en avoir la qualité astringente, indissoluble dans l'alcohol et dans l'eau, mais faiblement dissoluble dans l'éther; il forme des sels solubles avec la plupart des acides, si ce n'est avec le gallique, l'oxalique et le carbonique.

La cinchonine existe dans le quinquina gris; le quinquina jaune contient un principe très-semblable, bien qu'avec de petites différences, et que les auteurs ont nommé quinine; enfin le quinquina rouge les contient tous deux dans une proportion considérable.

On conçoit aisément toute l'importance d'une semblable découverte, surtout pour la recherche d'un succédané de quinquina dans les végétaux indigènes; le Mémoire de

MM. Pelletier et Caventou offre d'ailleurs plusieurs autres résultats intéressants, surtout relativement à deux matières colorantes rouges qui se trouvent dans le quinquina, et dont l'une est soluble dans l'eau, et l'autre insoluble.

Les mêmes chimistes ont examiné divers végétaux de la famille des colchiques, très-employés en médecine, tels que le *veratrum album*, le *veratrum cebadilla*, et le *colchique vulgaire* lui-même, et ils ont trouvé une septième substance alcaline composée qu'ils ont appelée *vératrine*.

Elle est blanche, âcre, et à petite dose produit des éternûments et des vomissements violents. Elle fond à la chaleur et prend par le refroidissement l'apparence de la cire. Sa décomposition ne donne point d'azote; elle a peu de faculté saturante, et donne avec les acides des sels non cristallisables.

Les plantes d'où on l'a tirée, fournissent d'ailleurs d'autres substances intéressantes à connaître, mais pour le détail desquelles nous sommes obligés de renvoyer à l'ouvrage même, qui est imprimé dans les Annales de chimie.

M. Gay-Lussac a donné communication d'un procédé qui empêche les toiles, sinon de brûler, du moins de jeter une grande flamme en brûlant, ce qui peut avoir de grands avantages pour les décorations des théâtres, et arrêter une infinité d'incendies. Il consiste à les enduire de sels neutres très-fusibles, tels que le phosphate d'ammoniaque et le borate de soude.

M. Goldsmith a fait connaître un procédé par lequel on applique sur le verre des espèces de dendrites métalliques qui ne sont pas sans agrément. On place sur le verre quelques grains de limaille de fer et de cuivre, sur chacun desquels on verse une goutte de nitrate d'argent. L'argent se précipite à l'état métallique; en même temps le fer et le cuivre s'oxident, et on arrange, selon l'effet qu'on veut produire, les ramifications de ces différentes matières au moyen d'une petite tige de bois. Enfin on expose le verre au-dessus d'une bougie, qui en évaporant la liqueur noircit le dessous de la plaque, et relève ainsi l'éclat des dendrites appliqués à la face opposée.

MINÉRALOGIE.

M. Cordier, dans un Mémoire dont nous avons rendu compte l'année dernière, nous a appris que la pierre d'alun compacte ne se trouve pas seulement à la Tolfa et dans quelques endroits de l'Italie et de la Hongrie, mais qu'on la rencontre dans plusieurs volcans brûlants, et dans les volcans éteints de l'Auvergne; il a de plus établi cette pierre comme une espèce minéralogique caractérisée. Cette année le même minéralogiste en a décrit les cristaux d'après de beaux échantillons de la Tolfa qui lui ont été communiqués par M. le chevalier de Parga, conseiller d'état du roi d'Espagne.

Ces cristaux n'excèdent pas trois millimètres. Leur forme primitive est un romboëdre de 89° et de 91° d'angles, en sorte qu'à l'œil on la confondrait avec un cube. Il est sous-divisible dans le sens d'un plan perpendiculaire à l'axe. Outre la forme primitive, on en connait une variété tronquée par les sommets, et dont la troncature peut aller jusqu'à convertir le cristal en une lame hexagone. Leur pesanteur spécifique est de 2,7517; leur analyse a donné:

Acide sulfurique	35,263
Alumine	37,533
Potasse	10,577
Eau	14,827

M. Beudant qui a examiné sur place en Hongrie des roches de la même nature, les a vues au milieu d'autres roches auxquelles elles passent insensiblement, et qui lui ont paru résulter de la décomposition des pierres ponces, et d'une nouvelle combinaison de leurs éléments. Elles renferment souvent des débris organiques.

GÉOLOGIE.

Les roches appelées *serpentine*, ou *gabbro* des Italiens, et dans les derniers temps *ophiolithes*, et ces autres roches que les Italiens nomment *granitone* et auxquelles on vient de donner le nom d'*euphotides*, forment, soit chacune à part, soit associées l'une à l'autre, des étendues considérables de terrain, et les géologistes les plus habiles avaient pensé jusqu'à présent qu'elles s'enfonçaient toujours sous les roches calcaires qui les avoisinent, et appartenaient en conséquence à des formations plus anciennes; on les rapportait sinon aux terrains primordiaux, du moins aux premiers terrains de transition.

M. Brongniart, qui a beaucoup étudié la position de ces roches dans son dernier voyage d'Italie, croit en avoir reconnu des couches bien postérieures à tous les terrains de transition.

Il les a vues distinctement en trois lieux différents de la crête des Apennins, savoir : au-dessus de la Spezia, au-dessus de Prato, et entre Florence et Bologne, reposant sur des jaspes et sur des bancs de différents calcaires de sédiment et d'aggrégation, tels que le calcaire compacte, à grain fin gris brun, traversé de veines spathiques, qui forme en certains endroits une grande partie de la masse des Apennins ; le calcaire solide, d'apparence grenue et micacée d'un gris bleuâtre, appelé *pietra serena* par les Florentins, et cet autre calcaire grenu et micacé, de texture schisteuse, nommé *macigno* ou *bardellone*.

On voit quelquefois entre les lits de ces pierres des noyaux de silex, toujours étrangers aux anciens terrains de transition, mais ils ne renferment point comme ces derniers des métaux ni des *antracites;* si on les compare, au contraire, avec ceux qu'on appelle *alpins,* et qui sont certainement plus modernes que les terrains de transition, on trouve qu'ils ont avec eux la plus grande ressemblance ; ainsi les couches d'ophiolithes placées sur les pierres de nature alpine, sont elles-mêmes nécessairement plus modernes que les terrains de transition.

A la vérité M. Brongniart a remarqué en quelques endroits, notamment au *Monte-Ramazzo,* au-dessus de Gènes, que l'ophiolithe y repose immédiatement sur des terrains talqueux et schisteux anciens, mais il pense qu'en ces endroits les calcaires qui devraient s'interposer sont venus à manquer.

Il a observé en ce même lieu que le marbre célèbre dans les arts sous le nom de *vert de mer*, et qui se compose de calcaire et de serpentine, appartient aux terrains ophiolithiques.

L'auteur nous fait aussi connaître, dans le cours de son Mémoire, que les émanations du gaz hydrogène qui entretient les feux si célèbres de *Pietra Mala*, entre Florence et Bologne, et ceux de *Barigazzo*, entre Pistoia et Modène, sortent du calcaire arénacé; mais les autres vapeurs, non moins remarquables, d'une chaleur excessive et qui portent l'acide boracique dans les petits lacs des environs de Volterre, traversent le calcaire compacte.

Quant à l'opinion qui fait le principal objet de son travail, elle est tellement différente de celle de tous les géologistes qui ont jusqu'à présent visité l'Italie, que M. Brongniart se demande s'il n'y aurait pas en ce pays deux formations ophiolithiques? Il est surtout porté à le penser d'après une description très-explicite donnée par M. Brocchi, du promontoire d'*Argentaro* près d'*Orbitello* où il paraîtrait que la serpentine est bien certainement sous le calcaire.

Les géologistes avaient d'abord porté leur attention sur les grandes masses pierreuses qui forment en quelque sorte l'ossature ou la charpente du globe : les grandes chaines granitiques, ou schisteuses, les couches de marbres salins, les montagnes calcaires d'une grande étendue avaient été les objets de leurs études, mais pendant long-temps ils avaient négligé les terrains plus modernes que forment nos plaines et nos collines inférieures; on peut même avancer qu'il y a vingt ans, les détails de ces terrains, les lois de leur composition étaient à-peu-près inconnus; on les considérait comme des dépôts de transport locaux et très-limités, qui méritaient à peine que l'on s'en occupât, tandis qu'en réalité ils offrent à l'esprit autant et plus de sujets d'observations, de méditations et même de découvertes, que les terrains primordiaux et ceux qui les accompagnent immédiatement. Les recherches faites aux environs de Paris, par MM. Cuvier et Brongniart, celles que d'autres savants ont faites en diverses parties de l'Angleterre, ont commencé à ouvrir cette nouvelle mine; on a vu que de certaines successions d'êtres organisés, des bancs correspondants de pierres diverses remplissent dans un ordre déterminé des espaces infiniment plus considérables qu'on ne l'avait pensé; on s'est convaincu que l'histoire des hommes elle-même était intéressée à ces traces des révolutions qui ont précédé immédiatement l'établissement des peuples; et on s'est livré avec ardeur à une branche entièrement nouvelle de faits.

M. Prévost, élève de M. Brongniart, a étudié dans cette vue les environs de Vienne en Autriche, et il y a retrouvé plusieurs des circonstances les plus importantes reconnues dans nos environs.

Le bassin de Paris, renfermé dans une grande excavation de la craie, se compose de trois formations principales : une calcaire d'origine marine, placée inférieurement, et qui donne nos pierres à bâtir; une intermédiaire, principalement gypseuse et qui ne renferme que des produits de la terre et de l'eau douce; enfin une supérieure de nature sableuse de nouveau produite par la mer, et recouverte encore par une dernière couche de terrain d'eau douce.

Le fond du bassin de Vienne, appuyé sur la base septentrionale des Alpes, n'est pas de craie, mais de ce calcaire compacte que l'on a nommé alpin et fort inférieur à la craie, recouvert de cette espèce de poudingue nommée en Suisse *nagelflue;* les terrains tertiaires marins qui remplissent ce bassin sont, comme les nôtres, recouverts de terrains d'eau douce, mais notre formation gypseuse y manque, et ils ressemblent par leurs coquilles, non pas à notre calcaire marin inférieur, mais au supérieur; et à cette occasion M. Prevost ayant comparé des coquilles de nos deux terrains d'origine marine, y a remarqué des différences plus considérables que ne les avaient aperçues MM. Brongniart et Cuvier dans leur premier travail.

Mais des coquilles auxquelles celles des environs de Vienne ressemblent encore plus qu'à celles de Paris, ce sont celles qui remplissent les couches des collines du pied de l'Apennin, et que M. Brocchi a fait si bien connaître dans son bel ouvrage intitulé : *Conchiologia subapennina.*

M. Prevost a retrouvé aussi les mêmes coquilles dans beaucoup de terrains superficiels du midi de la France.

PHYSIQUE VÉGÉTALE.

M. de Humboldt qui avait publié en 1816 un ouvrage particulier dont nous avons rendu compte, sur la distribution proportionnelle des espèces de végétaux de différentes familles dans les différents climats, et sur les rapports de cette distribution avec la chaleur moyenne annuelle de chaque pays, ou ce que ce grand physicien a nommé les *lignes isothermes,* est revenu cette année sur le même sujet, riche d'une foule d'observations nouvelles, qui pour la plupart ont confirmé de la manière la plus frappante, les règles qu'il avait établies. Ces questions se lient intimement à toute l'histoire des hommes; l'abondance des graminées, celle des palmiers ou des conifères ont influé sur l'état social des peuples, sur leurs mœurs et le développement plus ou moins rapide de leurs arts; mais le nombre relatif des espèces de chaque famille n'exprime pas l'importance réelle de la famille, de l'aspect qu'elle donne à un pays, de l'influence qu'elle exerce sur les habitants. Souvent une espèce d'une famille peut occuper à elle seule plus de terrain que de nombreuses espèces d'une autre famille. Le détail de cette étude fait voir qu'il y a des genres et des familles qui appartiennent exclusivement à certaines zones, à des conditions spéciales de climat, mais qu'un plus grand nombre a des représentants dans toutes les zones. La proportion n'est pas répartie de même pour les espèces; dans la zone glaciale et sur les hautes montagnes, la variété des formes génériques ne diminue pas au même degré que celle des espèces. Il y a d'ailleurs des différences qui tiennent aux communications des continents, et à leur population végétale primitive. Ainsi l'on croit déja pouvoir distinguer dans la zone torride quatre systèmes de végétation; savoir, ceux du nouveau continent, de l'Afrique occidentale, de l'Inde et de la Nouvelle-Hollande. Malgré toutes ces complications, M. de Humboldt ne pense pas que l'on doive renoncer à une étude aussi importante, pas plus que l'on n'a renoncé à dessiner des cartes, lorsque l'on s'est aperçu des sinuosités infinies des rivières et des côtes. Il a même dressé une table de ses observations, qui offre les résultats les plus intéressants; l'on y voit dans quelle proportion chaque famille de plante, dans chaque zone et dans chaque continent, se trouve avec la masse entière des plantes phanérogames ou à fructification connue, et si cette proportion diminue en allant vers le nord ou vers le midi.

Ces faits donnés par la géographie des végétaux se lient en quelque sorte à toutes les branches de la physique du globe.

Ainsi un habile ingénieur anglais, M. Webb, ayant mesuré trigonométriquement les plus hauts pics de cette grande chaîne de l'Himâlaya qui borne l'Inde au nord, en avait trouvé qui s'élèvent au-dessus de tout ce que l'on connaissait de plus élevé sur la terre : il en est un par exemple de 7820 mètres de hauteur qui surpasse autant le Chimborasso, que le Mont-Blanc surpasse le Mont-Perdu. Mais on attaqua la justesse de ces mesures, principalement parce qu'au revers septentrional de la chaîne la neige perpétuelle ne descend pas aussi bas qu'on devrait le croire d'après la latitude, et parce qu'il y croît des plantes qui ne viendraient nulle part ailleurs à cette hauteur, et l'on avait soupçonné que la réfraction avait été pour quelque chose dans l'erreur dont on accusait ces évaluations.

M. de Humboldt a présenté à l'Académie, des calculs qui prouvent que, pour rabaisser ces montagnes seulement au niveau du Chimborasso, il faudrait supposer que le coëfficient de la réfraction est de 0,3 au lieu de 0,08, quantité qui n'est pas admissible dans une zone aussi méridionale.

Il est bien vrai que dans les passages et au revers de l'Himâlaya qui regarde les plateaux de la Tartarie, la neige fond en été à la hauteur de 5077 mètres, hauteur où sous l'équateur même elle est certainement éternelle. M. Webb n'en a pas trouvé à 300 pieds encore plus haut, quoiqu'il fît cette observation au 31°. de latitude nord. A cette même latitude, au nord de la crête de l'Himâlaya, on trouve des pâturages, du froment, une belle végétation à 4549 mètres de hauteur, tandis que, sur la pente méridionale de ces mêmes montagnes, les phénomènes ne sont pas très-différents de ce que l'on observe dans les autres contrées du globe.

Des circonstances aussi remarquables ne pouvaient manquer d'attirer l'attention de M. de Humboldt. Il fait remarquer à ce sujet que la limite des neiges perpétuelles est un des résultats les plus compliqués des causes physiques; qu'elle suit moins la loi des lignes-isothermes ou d'égale chaleur moyenne de l'année, que celle des lignes isothères ou d'égale chaleur extrême de l'été, deux genres de lignes qui sont loin d'être parallèles. On sait en outre que, dans l'intérieur des grands continents, la chaleur annuelle et plus encore la chaleur d'été, à latitude égale, sont plus fortes que sur les côtes, à cause du rayonnement du sol. On conçoit donc que, sur les montagnes adossées à de grands plateaux, les neiges perpétuelles doivent être plus reculées vers les hauteurs; on observe des effets semblables jusque dans la chaîne du Caucase.

M. de Humboldt analyse et apprécie plusieurs autres causes qui contribuent à ces variations, et confirme ce qu'il en dit par les innombrables observations qu'il a faites à ce sujet dans toutes les parties de l'Amérique.

M. l'abbé Rigaud, directeur du séminaire de Meaux, ayant remis à M. Dupetit-Thouars une fleur de pavot oriental d'un aspect très-singulier, ce botaniste reconnut de suite que les étamines s'y trouvaient changées en pistil, et que, prodigieusement renflées par cette métamorphose, elles formaient une couronne de plusieurs rangs, qui avaient quelque ressemblance avec certaines anémones.

Le calice et la corolle étaient tombés, mais, suivant le rapport de M. Rigaud, ils n'avaient rien de remarquable.

A la base se trouvaient quelques filets plus menus; c'étaient des étamines, approchantes un peu de leur forme ordinaire, mais elles s'altéraient de plus en plus.

Enfin venaient plusieurs rangs où elles étaient entièrement dénaturées.

A la partie extérieure il se trouvait une sorte de pédoncule, vert et renflé vers son milieu : c'était le filament; sa partie postérieure était recouverte par une membrane mince et rabattue, contiguë au sommet, de forme triangulaire; deux arêtes velues les bordaient jusqu'au sommet; en retournant cette partie, on voyait que l'intérieur était aplati, et sur son milieu se trouvait une couche de grains détachés. M. Dupetit-Thouars les reconnut pour des ovules, mais qui se trouvaient à nu. Quant à la membrane et à ses sillons, il n'eut pas de peine à voir que c'était une portion analogue au stigmate rayonné du vrai pistil.

Ces filaments se réunissaient à la base, mais en se groupant en plus ou moins grand nombre. C'est ce qui était plus facile à apercevoir en écartant le rang supérieur de l'ovaire qu'ils entouraient; ainsi ils formaient une sorte de monadelphie tendante vers la polyadelphie.

L'auteur avait déjà observé une monstruosité semblable dans la joubarbe : on peut les regarder comme une interversion de l'ordre dans lequel se font d'ordinaire ces sortes de métamorphoses.

Mais M. Dupetit-Thouars, liant ces phénomènes à d'autres, espère arriver à prouver sous peu de temps :

1° Que la fleur n'est que la transformation d'une feuille et du bourgeon qui en dépend;

2° Que la feuille donne les étamines, et en outre le calice et la corolle, quand il y en a.

3° Que le bourgeon devient le pistil, ensuite le fruit et la graine;

4° Que le pistil étant la concentration d'une ou de plusieurs feuilles, il doit donner naissance à une réunion successive de bourgeons, dont les feuilles deviennent les ovules destinées à recevoir l'embryon.

Mais à ses propositions, qui se déduisent en effet assez naturellement de la transformation dont nous venons de parler, il en ajoute d'autres qui ne paraissent pas y tenir d'aussi près, savoir :

Que l'embryon est formé par la réunion de deux molécules détachées, l'une ligneuse, l'autre parenchymateuse, dont il paraît probable que l'une est fournie par l'étamine, l'autre par le pistil;

Que dès qu'une fois l'embryon est perceptible aux sens, il est détaché, ne présentant jamais d'apparence de cordon ombilical; ainsi il ne croît que par intus-susception;

Enfin que, dans ce cas, l'embryon est renversé, les cotylédons faisant la fonction des racines, et la radicule celle de tige ou de partie aérienne.

M. Dutrochet a adressé pour le concours de physiologie expérimentale fondé par M. de Montejon, un ouvrage de première importance sur l'accroissement et la reproduction des végétaux.

Tout en convenant avec M. Mirbel que les fibres ligneuses ne sont qu'un tissu cellulaire différemment modifié, il pense néanmoins qu'on doit les considérer comme des organes particuliers destinés à conduire la sève. Il regarde le parenchyme de l'écorce et la moelle de la tige comme des substances analogues disposées en sens inverse. Il donne à l'une le nom de médule corticale, et à l'autre celui de médule centrale, et il en prouve l'analogie par des observations nouvelles. On sait que les pédoncules des fruits mûrs se séparent du rameau avec lequel ils sont articulés, et que la plaie qui en résulte se cicatrise très-promptement. M. Dutrochet voulut voir si en coupant une petite tranche d'un rameau de poirier, un peu au-dessous de la plaie du pédoncule qui s'était détaché naturellement avec son fruit, cette plaie nouvelle se cicatriserait. Il reconnut, après avoir répété plusieurs fois la même expérience, qu'il est constamment arrivé qu'une portion du rameau ainsi tronqué s'était desséchée au-dessus de la section, et qu'il s'était produit de l'écorce entre cette partie desséchée et la partie restée vivante, en sorte qu'il y aurait eu encore ici une cicatrisation, sans que l'écorce extérieure ni les fibres ligneuses y eussent participé. Cette formation de nouvelle écorce est évidemment, selon lui, une métamorphose de médule centrale en médule corticale, et la preuve de l'identité de ces deux substances; mais la cicatrisation ne peut avoir lieu que sur des rameaux très-jeunes qui n'ont que peu de fibres ligneuses et dont la médule centrale est encore humide. Enfin l'auteur regarde la médule comme la partie essentiellement vivante du végétal.

Ainsi toutes les parties qui composent la tige des végétaux dicotylédons ont de l'analogie entre elles. La médule corticale est analogue à la médule centrale; les couches de fibres corticales sont analogues aux couches de fibres ligneuses, mais elles sont disposées en sens contraires; l'écorce et le bois ne sont que contigus sans avoir entre eux de communication. L'auteur donne à l'écorce le nom de système cortical, et aux parties qu'elle entoure celui de système central. Ces deux systèmes ont chacun leurs rayons médullaires, qui ne sont point continus, comme on l'a cru, mais seulement juxta-posés par leurs extrémités.

L'accroissement en diamètre s'opère suivant deux directions différentes : 1° dans le sens de l'épaisseur, par la formation de couches successives; 2° dans le sens de la largeur, par l'augmentation d'ampleur des couches.

M. Dutrochet pour étudier l'accroissement en largeur du systême cortical, choisit pour exemples des racines de l'*échium vulgare* et du *dipsacus fullonum*, où l'on en voit clairement le mécanisme. Ces racines, coupées transversalement, offrent un système cortical composé de festons concentriques; exterieurement elles sont cannelées dans leur longueur, et ce sont ces cannelures dont la coupe transversale se présente sous la forme de festons. Ces festons sont des faisceaux de fibres longitudinales, séparés les uns des autres par des lignes de tissu cellulaire, qui sont les rayons médullaires corticaux. Une ligne du même tissu cellulaire se montre au milieu de chaque feston. Bientôt après un nouveau feston ou faisceau de fibres apparaît dans le milieu de cette ligne de tissu cellulaire qui occupe le centre du premier feston. Le nouveau feston se développe, et divise par le sommet celui dans lequel il est né. Alors les deux fragments latéraux du feston divisé forment encore chacun un feston nouveau par la naissance, dans leur milieu, d'une ligne nouvelle de tissu cellulaire. Il résulte de là qu'un feston simple primitivement se trouve en faire trois, ce qui augmente dans la même proportion le nombre des rayons médullaires corticaux. Cette observation nouvelle et intéressante offre deux faits très-remarquables : le premier est la tendance des fibres longitudinales à développer dans leur milieu de nouveaux rayons médullaires ; le deuxième est la tendance qu'ont les rayons médullaires à développer aussi dans leur milieu des faisceaux de fibres longitudinales. C'est ce que M. Dutrochet appelle production médiane.

L'auteur traite ensuite de l'accroissement en largeur du système central. Il choisit pour objet d'étude une jeune pousse du *clematis vitalba*, dont la coupe est une aire à six angles saillants et à six rentrants ; les angles saillants sont formés par des faisceaux de fibres longitudinales, et la coupe transversale offre des festons analogues à ceux du système cortical de l'*echium vulgare*. Les faisceaux saillants du *clematis* appartiennent au système central, ils sont séparés les uns des autres par des rayons médullaires centraux, et ces rayons, ainsi que les faisceaux de fibres interposés entre eux, se multiplient comme ceux du système cortical de la racine de l'*echium vulgare ;* d'où il résulte que le système cortical et le système central ont le même mode d'accroissement en largeur.

L'accroissement des deux systèmes en épaisseur s'opère par la formation de couches successives. L'opinion de la transformation du liber en bois a long-temps prévalu ; d'autres systèmes ont encore été proposés sur la formation des couches ligneuses, mais aucun d'eux, suivant M. Dutrochet, n'est admissible ; la couche de liber et celle d'aubier n'ont aucune liaison organique entre elles, elles ne sont que juxtaposées ; la nouvelle couche de liber est une extension du liber ancien, et la nouvelle couche d'aubier est une extension de l'ancien aubier.

La couche de liber et d'aubier de nouvelle formation est séparée de l'ancienne par une couche mince de tissu cellulaire : c'est ce qu'on peut observer facilement sur la coupe transversale d'une tige de *rhus typhinum ;* on y voit distinctement les couches ligneuses séparées par des couches d'un tissu cellulaire roussâtre, parfaitement semblable à celui de la moelle centrale, et les vaisseaux qu'on observe dans les couches de ce tissu sont analogues à ceux de l'étui médullaire.

M. Dutrochet confirme encore les mêmes faits par des observations qui lui sont propres. Il a remarqué que la moelle des bourgeons du sommet des branches et de ceux qui naissent dans les aisselles des feuilles correspond toujours à la moelle centrale et à son étui, et que la moelle des bourgeons adventifs correspond à la couche médullaire placée au-dessous de la couche extérieure d'aubier, et il a vu de même que les vaisseaux de l'étui médullaire de ces bourgeons adventifs tirent leur origine de la même couche médullaire. Ces observations prouvent évidemment que les couches ligneuses sont séparées les unes des autres par des couches de moelle accompagnées chacune d'un étui médullaire.

C'est par cette régénération de la moelle et de son étui que la végétation commence au printemps ; la couche d'aubier vient ensuite, et recouvre en dehors cette couche médullaire que l'on n'aperçoit pas dans un grand nombre de végétaux, à cause de son peu d'épaisseur, mais que l'on distingue facilement sur la coupe transversale des tiges du *rhus typhinum.* Ainsi ce n'est point, suivant M. Dutrochet, une simple couche d'aubier qui se forme chaque année ; il y a une reproduction complète de la moelle, de son étui et des fibres ligneuses. C'est un système central tout entier qui enveloppe l'ancien. Le même phénomène a lieu dans le système cortical : ce ne sont point de simples couches intérieures d'écorce qui se forment annuellement ; chacune de ces couches est un système cortical complet, composé extérieurement d'une couche de parenchyme ou médule corticale, et intérieurement d'une couche de fibres.

L'auteur compare ensuite l'accroissement en épaisseur avec l'accroissement en largeur, en rappelant que ce dernier s'opère par des productions médianes, que des faisceaux de fibres naissent dans le milieu du tissu cellulaire, et qu'il naît aussi du tissu cellulaire dans le milieu des faisceaux de fibres ; il pense que les couches concentriques se forment suivant les mêmes lois. Il voit les deux couches nouvelles de fibres naître entre les deux couches de médule, l'une centrale, l'autre corticale, par la production desquelles commence la végétation au printemps ; il voit réciproquement les deux nouvelles couches de fibres corticales et centrales juxtaposées, donner naissance à de nouvelles couches médullaires ; ce qui se rattache au phénomème général de la reproduction médiane : et la manière dont s'opère l'accroissement dans ces diverses circonstances, où l'analogie est évidente, a convaincu l'auteur que les couches ne sont point produites par le cambium, mais bien par un véritable développement du tissu, comme M. Mirbel l'avait déja dit.

L'auteur jette ensuite un coup d'œil général sur l'accroissement en diamètre des dicotylédons.

L'accroissement en épaisseur a lieu tant que dure la vie du végétal, mais l'accroissement en largeur s'arrête dans les parties qui deviennent solides ; ainsi le bois ne prend plus d'accroissement ; mais l'écorce, dont la texture a peu de densité, continue de s'élargir, et la partie fibreuse des végétaux herbacés continue également de s'étendre en largeur.

A la suite de ces observations, l'auteur dit un mot des rapports variables de volume qui existent entre le système cortical et le système central. Le premier en a presque toujours moins ; quelquefois cependant il l'emporte en volume : celui de la racine de l'*echium vulgare* a environ huit fois plus d'épaisseur que le système central ; et dans la racine de *l'eryngium campestre,* le premier est au second dans le rapport de 21 à 4.

Enfin il explique la formation des bourrelets d'après les principes établis dans sa théorie.

Dans la seconde partie de son travail, M. Dutrochet traite de l'accroissement des monocotylédons. Leur accroissement en longueur s'opère de la même manière que chez les dicotylédons ; mais comme ils sont privés de rayons médullaires, et que l'accroissement par couches successives est essentiellement lié à l'existence de ces rayons, l'augmentation en diamètre des monocotylédons, lorsqu'il a lieu, ne se fait pas suivant les mêmes lois. Ainsi l'existence des rayons médullaires dans les dicotylédons est le caractère essentiel qui les distingue des monocotylédons.

Dans sa troisième partie, l'auteur donne quelques vues sur la cause qui détermine la tige à se lever au-dessus de la terre, et la racine à y descendre. Il offre des observations sur l'origine et l'accroissement en longueur des racines du *nymphæa lutea* et du *typha latifolia.*

La tige souterraine du *nymphæa* est composée d'un système cortical fort mince et demi-transparent, et d'un système central, dont le tissu cellulaire, d'une couleur blanche, renferme des fibres jaunes, fléchies irrégulièrement. Lorsqu'une de ces fibres, en se ployant, forme un coude qui s'approche du système cortical, il se manifeste dans ce dernier une production hémisphérique, concave en dessus et convexe en dessous; c'est le système cortical de la racine naissante, dont la fibre coudée doit former le système central. Cette fibre, d'abord séparée de la poche corticale, s'en approche, applique le sommet de sa courbure contre la surface concave de cette poche, et s'en fait une enveloppe en forme de coiffe; puis la racine naissante se produit au dehors, en déchirant l'écorce de la tige au-dessous de laquelle s'est formée celle qui l'enveloppe.

Il résulte de cette observation: 1° que le système cortical et le système central de la racine sont primitivement isolés, mais que l'un et l'autre existent avant de former un tout organique par leur assemblage; 2° que le système central pénètre dans le système cortical; 3° que le système cortical de la racine se forme au-dessous de l'écorce de la tige d'où elle prend naissance, et qu'elle perce cette écorce pour se produire au dehors.

Le *spargnium erectum*, ainsi que plusieurs autres plantes, a deux sortes de tiges, les unes aériennes, les autres souterraines; les bourgeons qui produisent les dernières naissent dans les aisselles des feuilles qui enveloppent la base de la tige aérienne; ils se présentent d'abord à la surface de l'écorce sous la forme d'une petite calotte hémisphérique composée de couches superposées. C'est le système cortical du bourgeon naissant. Une saillie du système central de la tige s'approche peu-à-peu de cette calotte corticale, s'introduit dans son intérieur et s'en enveloppe; la calotte s'allonge, et ses couches deviennent de petits cônes creux emboîtés les uns dans les autres. L'auteur leur donne le nom de piléoles. Le bourgeon, en se développant en longueur, déchire la piléole terminale, qui devient une feuille engaînante; la seconde se déchire ensuite, puis la troisième; elles deviennent des feuilles comme la première, et leurs scissures sont alternes. Ces observations prouvent que le système central et le système cortical des tiges et des racines sont primitivement isolés, que le système central pénètre dans le système cortical, que celui de la tige prend son écorce à la surface extérieure de la tige qui lui donne naissance, et que la racine au contraire la prend à la surface intérieure de l'écorce; qu'ainsi les tiges et les racines opposées par leur direction, le sont aussi par le mode de leur origine. Celles du *typha latifolia*, observées de la même manière et dans les mêmes circonstances, ont offert les mêmes résultats.

L'auteur observe que la pointe des bourgeons est composée de couches qui sont les rudiments des feuilles.

Il termine cette partie par un coup d'œil général sur l'élongation des tiges et des racines.

L'élongation des tiges et des racines se fait par un développement successif des fibres qui sortent du centre d'un bourgeon, en sorte que les plus nouvelles sont plus voisines du centre de la tige que les plus anciennes; ainsi la production centrale n'appartient point uniquement aux monocotylédons, mais les dicotylédons forment des couches qui sont indépendantes de l'élongation.

Les pétioles des feuilles reçoivent de l'étui médullaire des vaisseaux qui pénètrent dans leur tissu; ainsi les feuilles communiquent dans l'origine avec le centre du végétal, par où arrive la sève ascendante, d'après l'observation de Coulomb. La formation de la première couche d'aubier, donne en outre à ces feuilles une nouvelle communication vasculaire, et comme cette première couche d'aubier est continue avec la couche d'aubier la plus intérieure du végétal, il en résulte que la feuille a également des communications vasculaires avec la couche de nouvelle formation par laquelle s'opère la descente de la sève; ainsi la feuille a des vaisseaux adducteurs issus de l'étui médullaire qui conduisent la sève ascendante, et des vaisseaux réducteurs continus avec la couche d'aubier qui conduisent la sève descendante.

Les observations de l'auteur sur l'origine des tiges et des racines lui ont appris que leurs extrémités sont terminées par des fibres coudées, et c'est par le développement médian de ces fibres dans l'endroit où elles sont coudées qu'elles s'allongent; mais il y a aussi une élongation dans toutes les parties des tiges naissantes jusqu'à ce qu'elles soient devenues ligneuses.

M. Dutrochet s'est proposé aussi de découvrir l'origine et la nature de l'embryon de la graine, de connaître ses enveloppes et les autres organes qui l'accompagnent. Dans cette vue il a examiné avec beaucoup de soin les ovules de plusieurs espèces de végétaux depuis le moment où l'on commence à les apercevoir jusqu'à leur maturité. Les ovules qu'il a étudiés sont ceux du *phaseolus communis*, du *pisum sativum*, du *fagus castanea*, du *galium apparine*, du *spinacia oleracea*, du *mirabilis jalappa*, du *lavongymus latifolius*, et du *nymphea lutea*.

Il serait trop long de rapporter ici toutes les observations de l'auteur, et difficile de les faire entendre sans le secours des figures. Nous sommes obligés de renvoyer au Mémoire et aux dessins des divers organes que M. Dutrochet a observés et décrits avec beaucoup de soins et de détails.

Cet ouvrage offre une théorie nouvelle de l'organisation végétale, fondée sur des observations dont plusieurs ont été vérifiées par les juges du concours; et il a paru digne du prix pour lequel il avait concouru.

Nous pensons que nos lecteurs nous sauront gré de leur en avoir donné dès à présent une idée un peu complète.

BOTANIQUE.

M. Du Petit Thouars a soumis à l'Académie un grand travail sur les *orchidées*, famille non moins célèbre en botanique par la beauté des plantes qu'elle renferme, que par les singularités de la structure de ses fleurs. Ce travail commencé dans l'Inde, et avant que l'auteur pût prévoir tout ce que l'étude des orchidées devait faire de progrès par les travaux de MM. Swartz et Robert Brown, est déja connu par un tableau publié il y a quelques années, et qui offre vingt-un genres et plus de quatre-vingts espèces; toutes ces plantes ont été observées, analysées et décrites sur le frais. M. Du Petit Thouars a mis, sous les yeux de l'Académie, trente-six planches déja gravées, et appartenantes au genre qu'il appelle *angorchis*.

Nous avons parlé, dans notre analyse de 1816, de la famille des *boopidées*, formée par M. Cassini de quelques plantes à fleurs composées, mais où les anthères réunies seulement par leur partie inférieure, n'ont point d'appendices dans le haut, et où la graine suspendue au sommet, à la voûte de la cavité de l'ovaire, contient un albumen épais et charnu.

M. Robert Brown qui travaillait de son côté sur les mêmes plantes, leur donnait le nom de calycérées, et M. Richard vient d'en faire l'objet d'un grand travail, où il donne la description la plus détaillée des espèces qu'il a pu observer, avec une analyse très-exacte de leur fructification. Cette famille placée entre les synanthérées ou composées, et les dipsacées, se rapproche davantage des premières; leur involucre est d'une seule pièce; leur réceptacle garni de petites bractées; leur calice divisé en cinq lanières, souvent inégales; leur corolle régulière à très-longs tubes; ses lanières ont chacune trois nervures. De petites glandes alternent entre les bases des étamines, le style est lisse et terminé par un stigmate renflé et simple. Après que la fleur est tombée, les lanières du calice se durcissent et se changent en épines ou en sorte de cornes. La semence, comme nous l'avons dit, est renversée et contient dans son axe un embryon droit.

M. Jaume Saint-Hilaire a présenté une monographie des froments, c'est-à-dire une description particulière des espèces et des variétés de ce genre de graminées si important dans l'histoire de la civilisation. Il en porte le nombre à soixante. Le même botaniste a donné un nouveau travail sur les genres *aspalathus, borbonia* et *liparia*, qu'il avait déja décrits en 1813; mais un voyage qu'il a fait en Angleterre, lui a procuré 22 espèces nouvelles; il a d'ailleurs rectifié quelques erreurs de synonymie d'après l'herbier de Linnæus qu'il a eu l'occasion de consulter, et apporté diverses corrections aux caractères des deux derniers de ces genres.

M. Richard fils en a lu une des *hydrocotyles* ou *écuelles d'eau*, genre dont il n'existe en France qu'une espèce, et dont on en connaît maintenant cinquante-neuf. Sur ce nombre, vingt-sept ont été découvertes par l'auteur, en visitant seulement les herbiers des botanistes de Paris.

M. Richard les divise en sept tribus, établit leurs caractères, et cherche à fixer plus exactement ceux qui distinguent ce genre des genres les plus voisins.

L'Académie a vu avec intérêt des figures de plantes, exécutées par les procédés lithographiques de M. Guyot; il lui a paru que ces procédés peuvent, avec quelques légers perfectionnements, arriver au point de précision nécessaire à l'histoire naturelle, en même temps qu'ils offriront leurs secours à cette science, à bien meilleur marché que la gravure en taille-douce.

Le 4me volume des nouvelles plantes équinoxiales de MM. de Humboldt, Bonpland et Kunth, a été publié en entier dans le courant de cette année; avec lui se termine une des grandes divisions du règne végétal, celle des dicotylédons à corolles monopétales; les 4 volumes renferment les descriptions de 3000 espèces nouvelles, et les figures de 412; les deux derniers volumes que MM. de Humboldt et Kunth espèrent mettre au jour dans le courant de 1821, contiendront encore plus de 1200 espèces des familles à corolles polypétales, et ces infatigables naturalistes ont donné en outre six fascicules de leur magnifique ouvrage, qui a pour objet spécial les mimoses et les genres voisins, et qui en représente les espèces par de si belles figures en couleur.

La flore d'Oware et de Benin, de feu notre confrère M. de Beauvois, s'est close à la 20^me^ livraison, qui termine le 2^me^ volume.

ZOOLOGIE.

La zoologie a continué à s'enrichir de plusieurs livraisons de l'histoire des mammifères, par MM. Geoffroy Saint-Hilaire et Frédéric Cuvier, ouvrage qui offre déja, indépendamment des nombreuses observations des auteurs, 140 figures toutes lithographiées d'après nature vivante, et qui surpassent incontestablement toutes celles qui ont été données jusqu'à ce jour d'animaux de cette classe.

Un zoologiste anglais, le docteur Shaw, avait fait connaître un animal qu'il regardait comme une espèce de paresseux, mais que d'autres naturalistes, nommément M. Cuvier, avaient soupçonné de n'être qu'un ours auquel les dents de devant auraient été arrachées. C'est ce qui vient de se confirmer; et M. Tiedeman, qui a observé un individu non mutilé de cette espèce, vient d'en publier la description et la figure sous le nom d'*ursus longirostris*. Cet ours vient des Indes orientales, où il a aussi été observé par M. Buchanan.

M. *Moreau de Jonnès* continuant son histoire des reptiles des Antilles, a donné cette année ses observations sur l'espèce de *gecko* que l'on nomme dans ces îles *mabouia des bana-*

niers. C'est le *gecko lisse* de Daudin (1), beaucoup plus fort que le *mabouia des murailles* ou *gecko à queue épineuse;* il parvient à près d'un pied de longueur, sa couleur est un cendré roussâtre, taché de noir sur le dos. Lorsque sa queue a été cassée par accident, ce qui lui arrive assez souvent, elle renaît difforme, renflée, et quelquefois assez semblable à une rave. Il habite de préférence les lieux solitaires, et se tient surtout dans ces cornets que forment à leur base les grandes feuilles des bananiers, d'où il sort le soir pour prendre des insectes ou pour dévorer les œufs des anolis, autre genre de lézards beaucoup plus agiles mais généralement plus petits.

Le même observateur a présenté à l'Académie, et déposé au cabinet du Roi, un individu de la terrible vipère de la Martinique (le trigonocéphale fer de lance), de cinq pieds de longueur.

Parmi ces animaux que M. Cuvier a réunis dans l'embranchement qu'il appelle *articulés,* il en est une classe qu'il a le premier distinguée sous le nom de *vers à sang rouge*, et que M. de la Marck a nommée *annélides.* Elle comprend les vers communs ou *lombrics,* les *sangsues* et une multitude de vers de mer ou d'eau douce que l'on a subdivisés d'après leurs organes du mouvement, de la respiration et de la manducation. M. *Savigny* a fait de cette classe l'objet d'études nouvelles et aussi exactes que détaillées. Il a donné d'abord une attention particulière à ces soies élastiques et souvent

---

(1) C'est aussi son *gecko rapicauda*, son *gecko surinamensis*, son *gecko squalidus*, et la *salamandre terrestre* de Fermin. *Voyez* Cuvier, *Règne animal*, II, p. 48.

brillantes comme de l'or qui servent au plus grand nombre des genres d'organes du mouvement, et surtout à celles de forme crochue, apanage plus spécial de l'une des familles qu'il a reconnues. Des descriptions non moins exactes des mâchoires, des antennes, des branchies, des appendices membraneux de chaque articulation l'ont occupé ensuite; embrassant enfin les annélides dans leur ensemble, il les a divisées en cinq ordres: les *néréidées*, pourvues de pieds rétractifs, munis de soies, à tête distincte, à bouche en forme de trompe, souvent armée de mâchoires.

Les *serpulées*, pourvues de pieds munis de soies, dont une partie en forme de crochets, sans tête distincte;

Les *lombricines*, sans pieds ni têtes distincts, mais pourvues encore de petites soies;

Les *hirudinées*, dépourvues de tête distincte, de pieds et soie, mais à bouche en forme de ventouse; enfin, celles qui n'ont pas même ce dernier caractère.

L'auteur divise chaque ordre en familles, chaque famille en genres, d'après les détails de leurs branchies et de leurs organes. Il nous est impossible de le suivre dans toutes ces subdivisions, mais les naturalistes jouiront bientôt de son travail, et même ils peuvent déja en trouver quelques données que M. Delamarck a bien voulu adopter dans son Histoire des animaux vertébrés.

Rien ne prouve mieux la prodigieuse richesse de la nature que ces infinités de structures délicates, singulières, belles même à la vue, que l'attention d'un seul naturaliste a été capable de découvrir sur des êtres si méprisés, cachés dans les antres de la mer, et que la vue de l'homme semblait ne devoir jamais atteindre.

ANATOMIE COMPARÉE.

Les insectes sont peut-être de tous les animaux ceux où la nature a développé la mécanique la plus merveilleuse; tous les genres de mouvements qui distinguent entre elles les autres classes, se rencontrent dans celle-ci, et peuvent quelquefois être exercés par le même individu au degré le plus parfait, comme avec la vigueur la plus marquée; mais il s'en faut de beaucoup qu'ils aient été étudiés sous ce rapport avec autant de soin que les animaux vertébrés; on ne connaissait même que d'une manière assez superficielle les organes de leur mouvement. Les parties dures ou élastiques, qui leur servent de leviers ou de point d'appui, se trouvant pour la plupart placées à l'extérieur, on en avait abandonné l'examen à la zoologie, qui n'avait pas eu besoin de les décomposer, ni d'en reconnaître les éléments.

M. Audouin, jeune naturaliste de Paris, a voulu remplir cette lacune de l'anatomie comparée; il a examiné les pièces dont se compose la charpente solide des insectes, et s'étant bientôt aperçu que ces pièces ont entre elles, d'un insecte à l'autre, des rapports de position, de fonctions, et souvent de nombre et de forme, comparables aux rapports des pièces du squelette dans les animaux vertébrés, il a cherché à généraliser ses observations; il a poursuivi chaque pièce au travers des métamorphoses variées qu'elle subit dans les divers ordres et les divers genres d'insectes; il est parvenu ainsi à les dénombrer, à les caractériser, et à déterminer, jusqu'à un certain point, les lois de leurs variations.

M. Audouin a présenté à l'Académie, dans un ouvrage fort étendu accompagné de beaux dessins et de nombreuses préparations, la portion de ses recherches qui concerne le thorax ou plutôt le tronc, cette partie intermédiaire du corps de l'insecte qui porte les pieds et les ailes, et qui se trouve par conséquent le siège des principaux organes du mouvement.

M. Audouin considère d'abord le tronc dans les insectes ordinaires, ceux qui ont six pieds (*les insectes hexapodes*); l'exposé de ses parties, et une nomenclature fixe, créée pour elles, devaient naturellement se placer à la tête de l'ouvrage.

Le tronc de l'insecte se laisse toujours diviser en trois anneaux, dont chacun porte une paire de pattes, et que M. Audouin nomme, d'après leur position, *pro-thorax*, *mésothorax*, et *métathorax;* outre les pieds, le *mésothorax* porte la première paire d'ailes, et le *métathorax* la seconde; chacun de ces anneaux est composé de quatre parties, une inférieure, deux latérales, formant à elles trois la *poitrine;* une supérieure qui forme le *dos*. L'inférieure prend le nom de *sternum;* la partie latérale, ou le *flanc*, se divise en trois pièces principales; une qui tient au sternum et se nomme *episternum;* l'autre placée en arrière de celle-là et à laquelle la hanche s'articule, est nommée *épimère*. On nomme *trochantin*, une petite pièce mobile qui sert à l'union de l'épimère et de la hanche; la troisième pièce du flanc placée au-dessus de l'épisternum et dans le mésothorax et le métathorax sous l'aile est nommée *hypoptère;* quelquefois il y a encore autour du stigmate, une petite pièce cornée qui se nomme *péritrème*. La partie supérieure de chaque segment, que l'auteur nomme *tergum*, se divise en quatre pièces nommées d'après leur position dans chaque anneau *præscutum*, *scutum*, *scutellum* et *post-scutellum ;* la première est souvent, et la quatrième presque toujours cachée dans l'intérieur; les naturalistes n'ont guère distingué que le *scutellum* du mésothorax, qui en effet est souvent remarquable par sa grandeur et sa configuration, mais on retrouve son analogue dans les trois segments. Ainsi le tronc des insectes peut se subdiviser en 33, et si l'on compte les péritrèmes et les hypoptères, le nombre de ses pièces peut aller à 39, plus ou moins visibles à l'extérieur; une partie de ces pièces donne en outre en dedans diverses proéminences, qui méritent aussi des noms à cause de l'importance de leurs usages. Ainsi de la partie postérieure de chaque segment du sternum s'élève en dedans une apophyse verticale, quelquefois figurée en V, et que M. Audouin appelle l'*entothorax ;* elle fournit des attaches aux muscles et protège le cordon médullaire. Son analogue se montre dans la tête, et quelquefois dans les premiers anneaux de l'abdomen. D'autres proéminences intérieures résultent de prolongements de pièces externes voisines soudés ensemble : M Audouin les nomme *apodèmes.* Les unes donnent attache aux muscles, d'autres aux ailes; enfin il y a encore de petites pièces mobiles, soit à l'intérieur entre les muscles, soit à la base des ailes, que l'auteur nomme *épidèmes.*

Nous avons dit que l'on retrouve toujours les pièces principales ou leurs vestiges, mais il s'en faut bien qu'elles se laissent toujours séparer; plusieurs d'entre elles sont même toujours unies dans certains genres ou dans certains ordres, et ne se distinguent que par des traces de sutures.

M. Audouin a cru devoir également donner des noms aux trous, ou aux vides circonscrits par l'ensemble de chaque anneau; le trou antérieur de la tête porte le nom de *buccal*, le postérieur celui d'*occipital;* il nomme *pharyngien* le vide du *prothorax*, *œsophagien* celui du *mésotorax*, et *stomacal* celui du *métathorax*, distinguant leurs deux orifices selon qu'ils sont antérieur ou postérieur.

Après ce résumé de l'analyse des pièces et cette fixation de leurs noms, M. Audouin passe à l'examen détaillé de leur développement respectif dans les différents ordres; il fait voir que dans aucun d'eux l'on ne rencontre d'autres éléments, et que les anomalies les plus bizarres en apparence ne tiennent qu'à des variétés de formes et de grandeurs de ces seules et mêmes pièces.

Ainsi prenant d'abord le mésothorax pour objet de son étude, et examinant ses rapports de grandeur avec le segment qui le précède et celui qui le suit, il le montre peu développé dans les coléoptères et les orthoptères où il porte des élytres de peu d'usage dans le vol; plus étendu dans les névroptères, les hémiptères, où les deux paires d'ailes sont presque égales en importance; atteignant le maximum de son développement dans les hyménoptères, les lépidoptères, les diptères, où la première paire d'ailes est l'instrument principal du vol; il fait voir que l'accroissement de ce mésothorax entraîne la réduction des deux autres segments. Quelque chose d'analogue s'observe dans la proportion des pièces de chaque segment entre elles. S'il y en a une fort diminuée, c'est que quelque autre est fort agrandie. Quelquefois l'accroissement d'une pièce déplace la pièce voisine, et c'est ainsi que l'épimère du mésothorax des *cétoines*, par exemple, devenant fort grand, relève l'episternum et lui fait offrir cette pièce écailleuse en dehors de la base des élytres que les entomologistes ont bien remarquée, sans en connaître la nature; dans les *libellules* au contraire, l'épisternum du mésothorax prenant un grand volume, s'élève à la partie supérieure, et s'unit à celui du côté opposé sur le milieu du dos et en avant, entre le prothorax et le tergum du mésothorax. Dans les *cigales* c'est l'épimère du métathorax qui se prolongeant sous le premier anneau de l'abdomen y forme la valvule qui clôt la cavité où réside l'instrument sonore de ces insectes. Il n'est pas impossible d'assigner aussi quelques règles à cette proportion mutuelle des parties de chaque segment. En général le sternum se développe davantage dans les insectes qui font beaucoup d'usage de leurs pieds; la distinction des pièces de chaque partie se proportionne au développement de la partie elle-même. Ainsi c'est également dans les *lépidoptères*, les *hyménoptères* et les *diptères* que les quatre pièces du dos du mésothorax sont le plus sensibles et le mieux divisées. Dans les autres ordres elles sont souvent presques rudimentaires et confondues ensemble.

La distinction des pièces du *métathorax* devait être comme le développement général de ce segment dans son entier, inverse de celle du mésothorax. Ainsi c'est dans les coléoptères, où la seconde paire d'ailes (les ailes membraneuses) est la plus importante, que ce segment prend le plus de volume, et que les pièces qui le composent se séparent le plus aisément. Une observation curieuse de l'auteur, c'est que dans les hyménoptères le premier anneau de l'abdomen s'unit toujours intimement au tergum du métathorax, et que lorsque l'abdomen est porté par une sorte de pédicule, comme il arrive si souvent dans cet ordre, c'est le second de ses anneaux qui subit un étranglement et non le premier.

Dans l'étude du prothorax, dont le tergum est ce que l'on nomme vulgairement *corselet* dans les coléoptères, et *collier* dans d'autres insectes, l'auteur fait connaître une particularité remarquable. L'épisternum et l'épimère de certains orthoptères, comme le *taupe-grillon*, ne s'unissent pas comme à l'ordinaire aux bords du tergum, mais passent dessous et se joignent l'un à l'autre, en sorte que le tergum les recouvre et les embrasse, premier indice, selon M. Audouin, de ce qui arrive dans les *crustacés décapodes* (les crabes et les écrevisses), où les flancs sont embrassés par une énorme cuirasse.

Dans les *lépidoptères* les flancs du prothorax s'unissent de même entre eux, mais le tergum de ce segment est réduit à une sorte de vestige ou d'appendice à peine visible.

L'auteur pense que l'extrême de cette disposition est ce qui fait le caractère particulier des *arachnides*, que leur tergum n'existe plus, et que leurs flancs unis l'un à l'autre forment le dessus de leur tronc.

Dans plusieurs hyménoptères le tergum du prothorax s'unit à celui du mésothorax, et ne recouvrant plus son épimère ni son épisternum, leur permet de s'articuler avec la tête. Les rapports de la puissance des ailes avec le développement et la distinction des pièces du tergum des deux segments qui les portent sont tellement constants, que toutes les fois que les ailes manquent à certains insectes d'un ordre communément ailé, ainsi qu'il arrive par exemple dans les fourmis, les quatre pièces du tergum se confondent entre elles; c'est par une raison semblable, selon l'auteur, que le tergum du premier segment, lequel ne porte jamais d'ailes, est aussi plus rarement divisé que les autres, et forme dans les coléoptères un corselet d'une seule pièce (en prenant ce rapport dans un autre sens); ni ce premier segment, ni les segments quelconques des insectes où le tergum n'est pas divisible, ne peuvent porter des ailes.

C'est aussi dans le développement proportionnel plus considérable et dans la divisibilité des segments qui doivent porter des ailes, que M. Audouin place la principale différence de l'insecte parfait à sa larve.

Cette considération conduit M. Audouin à l'étude du tronc, dans les insectes sans ailes et à pieds nombreux, ainsi que dans les arachnides et les crustacés. Il pose en principe que les pièces que ces animaux possèdent se retrouvent toutes dans les insectes à six pattes, mais que ceux-ci ont de plus des pièces que les premiers n'ont pas.

Ainsi, comme nous venons de le dire, tout le tergum manquerait aux araignées; leur tronc résulterait de la réunion d'autant de segments qu'elles ont de paires de pattes; leurs flancs s'uniraient de part et d'autre sur la ligne moyenne.

M. Audouin croit même apercevoir, dans les sillons du tronc de certaines araignées, des traces de leurs unions.

Le plastron qui est entre les pattes des crustacés se composerait de la suite des sternums de leurs segments; les parois osseuses qui remontent sous leur carapace représenteraient les flancs de ces mêmes segments couverts et embrassés par la réunion de leurs tergums, comme nous avons dit que cela arrive au prothorax dans les sauterelles. En dedans du tronc, des cloisons analogues aux apodèmes des insectes, marquent, selon l'auteur, les sutures des segments.

Quant aux insectes à pieds nombreux et sans ailes, leurs segments représenteraient, en quelque sorte, autant de prothorax.

Ce travail fondé entièrement sur des faits et sur une grande multitude d'observations, dans lesquelles deux autres jeunes naturalistes, M. Odier, et M. Adolphe Brongniart, fils de l'un de nos confrères, ont assisté M. Audouin, n'est pas moins remarquable par son exactitude que par son étendue.

Il a trouvé un garant respectable dans M. Latreille, qui, étudiant de son côté d'une manière spéciale l'un de ces nombreux éléments du tronc des insectes, se rencontrait parfaitement sur ce point avec notre jeune observateur.

L'objet principal de M. Latreille était de déterminer la nature de ces appendices singuliers placés près du cou et au-devant des ailes, dans les insectes dont M. Kirby a cru devoir faire un ordre nouveau, sous le nom de *Strésiotères*. Ces pièces que l'on a prises, tantôt pour des rudiments d'ailes, tantôt pour des espèces d'élytres, répondent à celles que M. Audouin appelle épimères, mais ce sont des épimères un peu déplacées et devenues plus libres.

On voit quelque chose d'approchant au-devant des ailes de quelques phalènes où ces pièces ont été depuis longtemps nommées *épaulettes* par quelques naturalistes.

M. Latreille présume que ces épaulettes des lépidoptères leur servent à écarter et à fendre leur peau de chrysalide, au moment où ils doivent prendre leur état.

Ce célèbre entomologiste donne à cette occasion, sur les appendices du tronc des insectes en général, plusieurs observations curieuses qui se laissent ramener aux règles établies par M. Audouin, et en ajoute de non moins intéressantes sur d'autres parties de ces animaux.

Il annonce, par exemple, avoir découvert le tympan de l'oreille dans une espèce de criquet, *acridium lineola*, et le conduit auditif dans d'autres insectes.

M. Audouin a fait dans un mémoire particulier une application de sa doctrine à ces animaux articulés fossiles, si extraordinaires que Linnæus avait cru pouvoir leur donner l'épithète *paradoxes*, et sur lesquels M. Brongniart, qui les nomme *trilobites*, a fait un travail important.

M. Audouin voit dans les trois lobes qui divisent chacun des segments de ces animaux, le tergum et la partie supérieure des flancs, et en conséquence il confirme l'opinion mise en avant par M. Brongniart que les trilobites doivent être associés à certains genres de la famille des cloportes, dans lesquels on observe en effet une disposition semblable.

M. Latreille, au contraire, se fondant sur ce que l'on n'a pu encore voir ni les antennes, ni les pieds de ces animaux dont le test ne se présente guère que par le dos, estime que l'on doit plutôt les regarder comme analogues à ce genre de testacés que l'on a nommés *oscabrions*, et qui portent sur le dos une suite de pièces transversales. Les trilobites selon lui seraient des oscabrions dont la première pièce coquillière serait plus grande, et dont les suivantes seraient divisées chacune en trois.

Dans un autre mémoire, présenté avant celui dont nous venons de rendre compte, M. Audouin, se livrant davantage à la recherche d'analogies éloignées, avait considéré la tête des insectes comme formée de trois segments, dont le premier (le chaperon) aurait pour appendices le labre et les mandibules, le second, les antennes et la lèvre, le troisième, les yeux et les maxilles. La division de ce deuxième et de ce troisième segment ne pouvait tomber sous les yeux, car, selon M. Audouin lui-même, ils seraient toujours unis dans les insectes ordinaires. En partant toutefois de cette supposition, qu'il cherchait à ramener la structure des crustacés et des arachnides à celle de ces insectes ordinaires, sa manière de voir était : dans les crustacés le premier segment de la tête aurait disparu tout-à-fait ; il ne resterait du second segment que les petites antennes qui répondraient à la lèvre inférieure, et du troisième, que les yeux et les grandes antennes, lesquelles répondraient aux maxilles ; les mandibules des crustacés répondraient ainsi à la première paire de pattes des insectes et ainsi de suite.

Il ne resterait aux arachnides que le troisième segment de la tête qui comprend les yeux, et par conséquent ce que l'on appelle leurs mandibules représenterait les maxilles, et leurs maxilles répondraient aux premières pattes des insectes.

Partant de là, M. Audouin considérait les insectes hexapodes, les arachnides et les crustacés, comme différant relativement au tronc, par ceux de leurs segments qui se sont le plus développés.

Dans les insectes, ce sont les trois premiers après les trois de la tête ; dans les arachnides, les quatre qui viennent après le quatrième, c'est-à-dire, après le prothorax : dans les écrevisses, les cinq à compter du dixième et y compris le quatorzième. En effet, les petites antennes, les grandes antennes, les mandibules et les six paires de mâchoires qui suivent les mandibules indiquent l'existence de neuf segments. Les serres sont donc attachées au dixième. Ainsi, en dernière analyse, toutes les différences de la charpente de ces trois classes d'animaux articulés dépendraient de l'absence, de la diminution ou de l'accroissement de tels outils de leurs anneaux.

Ici, comme l'on voit, l'auteur abandonnait le champ de l'observation, pour entrer dans celui des hypothèses, et s'exposait davantage à la contradiction. Effectivement, il y a, et il doit y avoir plusieurs manières de voir, du moment que ce n'est plus qu'avec les yeux de l'esprit que l'on voit. Ainsi d'autres naturalistes qui se sont occupés de ce rapprochement des arachnides et des crustacés avec les insectes ordinaires ont suivi des routes assez différentes.

Nous avons parlé, dans notre analyse de 1815, d'un travail de M. Savigny sur ce sujet, où il laisse aux mandibules et aux deux paires d'organes manducatoires qui les suivent dans les crustacés, les noms de mandibules, maxilles, et lèvre inférieure, et où il regarde les trois paires d'organes manducatoires suivantes comme analogues aux trois paires de pattes des insectes ordinaires; mais où il cherche à établir que dans les arachnides, ce sont les premières paires d'organes manducatoires qui représentent les premiers pieds, tandis que les vraies mâchoires ont disparu avec les antennes et presque toute la tête.

M. Latreille, dans un Mémoire présenté cette année, regarde au contraire le corps des crustacés, comme divisé en quinze segments; dont un pour la tête, sept pour le tronc, et sept pour la queue ou l'abdomen. Il rapporte au tronc et considère comme des pieds les deux paires les plus extérieures des organes manducatoires; il retrouve ces quinze anneaux dans les autres insectes, mais avec quelques soudures et des appendices de moins. Il voit des antennes, mais très-modifiées quant à leurs formes et à leurs usages, dans ce que l'on appelle les premières mâchoires des branchiopodes et des arachnides, attendu que ces mâchoires sont toujours placées au-dessus de la lèvre supérieure. Les formes bizarres que prennent les derniers pieds des crustacés, ceux des calyges, par exemple, qui se partagent en deux longs filets barbelés, lui font naître l'idée que ces filets enveloppés d'une membrane représenteraient assez bien une aile d'insecte. Les lames respiratoires des larves d'éphémères lui paraissent encore plus ressembler à des ailes. Accumulant ces sortes d'analogies, il en vient à appeler les ailes des sortes de pattes trachéales.

Jusque-là, on s'en tenait cependant à comparer entre elles des classes d'animaux articulés seulement; M. Geoffroy de Saint-Hilaire est allé plus loin, et a cherché à établir un rapprochement entre l'embranchement tout entier des animaux articulés, et celui des animaux vertébrés.

Les insectes n'ayant point de système artériel, il admet que l'appareil nerveux répand immédiatement autour de son axe les matériaux de l'organisation dont le développement se fait en dedans du canal vertébral; en sorte que ce seraient les anneaux des insectes et des crustacés qui représenteraient leurs vraies vertèbres; prenant pour point de comparaison la tortue, dont les côtes sont déja arrivées à la surface du corps, en faisant rentrer dans l'intérieur les articulations des membres pectoraux et leurs muscles, il conçoit que si ces vertèbres encore diminuées s'ouvraient, elles laisseraient en quelque sorte le cordon médullaire libre dans la grande cavité des viscères, et il exprime sa pensée en disant que tout animal habite en dedans ou en dehors de sa colonne vertébrale; il appuie son sentiment de cette considération, que les anneaux de la queue des crustacés se divisent en quatre parties comme les vertèbres.

Venant ensuite au détail, il se représente le corps de l'insecte comme divisé en six parties ou segments principaux; rappelant que la tête des vertébrés a été considérée par M. Oken et d'autres anatomistes, comme une suite de trois vertèbres, il pense que le premier segment des insectes, leur tête, ne représente que la première des trois vertèbres des vertebrés, et comprend les os du cerveau, ceux de la face, et les os hyoïdes; le deuxième segment des insectes, celui qui porte leur première paire de pattes (le prothorax de M. Audouin) est, selon M. Geoffroy, la seconde vertèbre de la tête des vertébrés, et répond aux os du cervelet, du palais et du larynx; le troisième segment, qui porte les ailes supérieures, et que M. Geoffroy réduit à l'écusson, comprend les pariétaux, les interpariétaux, et les os de l'oreille, c'est-à-dire, d'après la manière de voir de l'auteur, que nous avons exposée dans notre analyse de 1817, les os des opercules des poissons. Le quatrième segment auquel M. Geoffroy attribue les quatre pattes postérieures, et la deuxième paire d'ailes, répond à la poitrine; le cinquième qui est l'abdomen des insectes, à l'abdomen des vertébrés; et le sixième qui est l'anneau de clôture, à leur coccix.

De cette relation, appliquée aux parties ou aux appendices de chaque segment, il résulte entre autres choses que les élytres ou les ailes supérieures répondent aux opercules et par conséquent aux os de l'oreille, que le stigmate du corselet est une ouverture auditive, et que ceux de l'abdomen sont analogues aux pores de la ligne latérale des poissons. Les ailes postérieures ont paru seules offrir quelques difficultés à l'auteur, mais il a fini par les croire les analogues des vessies natatoires des poissons, ou, ce qui dans son opinion revient au même, des sacs aériens des oiseaux; se rapprochant ainsi de M. Latreille, qui attribue aux ailes en général une origine trachéale.

M. Geoffroy, passant aux crustacés, considère leur thorax comme formé de deux sortes de vertèbres dont la série aurait sa partie antérieure reployée sur la partie suivante; c'est dans l'appareil osseux de l'estomac, qu'il cherche les corps et les parties latérales des vertèbres de cette première série ou de la tête; les mêmes qui dans les vertébrés ordinaires forment les os de la base du crâne. La grande carapace qui recouvre ce thorax se compose de la partie annulaire de ces mêmes vertèbres de la tête, ou des os extérieurs du crâne; enfin les vertèbres pectorales forment en dessous l'axe auquel s'attachent les pates. M. Geoffroy considère ces pates, ainsi que toutes les appendices de la queue, auxquelles on a donné le nom de fausses pates, comme représentant des côtes, et fait remarquer à ce sujet que les côtes sont déja employées à la locomotion dans plusieurs vertébrés, et notamment dans les serpents. Que si les appendices de la queue ou fausses pates des écrevisses sont plus petites que les vraies pates, c'est par suite d'un système de compensation, et parce que les vertèbres auxquelles elles adhèrent sont plus grandes que les vertèbres pectorales auxquelles tiennent les pattes véritables.

M. Geoffroy s'appuie aussi de l'analyse chimique des croûtes des écrevisses, pour montrer leur analogie avec les os, et rappelle que dans plusieurs poissons les os de la tête sont aussi repoussés à l'extérieur et immédiatement sous l'épiderme.

M. Latreille, que ses immenses travaux sur la partie positive de l'Entomologie ont rendu si célèbre, s'est cru obligé de se livrer aussi à quelques recherches théoriques sur les moyens de rapprocher les insectes des vertébrés. Il pense que pour y parvenir, il faut comparer d'abord les crustacés avec les poissons de l'ordre des suceurs, tels que les lamproies, et c'est principalement par leurs organes de la respiration qu'il les compare.

Partant des têtards de grenouilles, passant par les poissons ordinaires aux cartilagineux, de là aux crustacés et jusqu'aux cloportes, il voit les branchies, d'abord concentrées près de la gorge, s'étaler le long du corps, et se porter de plus en plus vers la queue. Parmi les poissons suceurs, il en voit, tels que les gastrobranches, qui semblent n'avoir que des mâchoires latérales; ces poissons manquent de côtes, et leurs vertèbres semblent s'anéantir. En admettant que leur os hyoïde est prodigieusement agrandi, on aurait, selon M. Latreille, ce plastron pectoral qui, dans les écrevisses, porte les branchies sur ses côtés, et les pieds de ces derniers animaux ne seraient que des appendices articulés des rayons branchiaux. Dans ce système, le test remplace les os de la tête, les opercules et les côtes. Si l'on passe aux crustacés à longue queue, et surtout aux squilles, on trouve que le test diminue; que les étranglements se marquent davantage sur le dos; le cœur s'allonge comme en un vaisseau dorsal; bientôt, comme dans les chevrettes, l'animal finit par n'être qu'une suite de segments presque semblables, avec une tête libre; les appendices de la queue représentent les nageoires ventrales et anales; et les ailes peut-être les nageoires pectorales; les organes manducatoires seraient les mâchoires désarticulées à leurs symphises; enfin les antennes seraient des narines en quelque sorte retournées, et de concaves qu'elles étaient, devenues de longues productions saillantes.

D'après un aperçu inséré dans un rapport du même auteur sur le travail de M. Savigny, relatif aux annélides, les organes masticatoires des néréides ne seraient ni des mâchoires, ni des pieds transformés en mâchoires, et ne pourraient être comparés qu'aux dents intérieures de l'estomac des écrevisses; et le reste du corps des annélides correspondrait à celui des mille-pieds, par le nombre de ses segments, des appendices qui leur sont annexées, et souvent même par l'ordre des organes de la respiration.

Il nous serait facile de rapporter encore un grand nombre de manières d'envisager les rapprochements des insectes et des animaux vertébrés, si, ne nous bornant point, comme nous le devons, à rendre compte des Mémoires présentés à l'Académie, nous pouvions donner aussi des extraits des ouvrages publiés par les naturalistes français ou étrangers qui se sont livrés aux spéculations de ce genre, surtout en Allemagne, où elles ont été fort en vogue pendant quelque temps; mas l'espace qui nous est accordé ne nous permettant pas ces excursions, nous nous bornerons à faire remarquer que, dussent plusieurs de ces essais manquer encore leur but, la science aurait toujours à se féliciter de ce grand mouvement imprimé aux esprits. Sur cette route, quelque hasardeuse qu'elle soit, les observations les plus précieuses se recueillent, les rapports les plus délicats se saisissent, et quand, en définitive, on découvrirait que les vertébrés et les insectes ne se ressemblent pas autant qu'on l'avait cru, il n'en sera pas moins vrai que l'on sera arrivé à connaître beaucoup mieux les uns et les autres.

C'est ainsi que dès à-présent on ne peut douter que le crâne des animaux vertébrés ne soit à-peu-près ramené à une structure uniforme; et que les lois de ses variations ne soient à-peu-près déterminées.

S'il reste encore quelque doute relativement à certaines parties de la face, le plus grand nombre de ses parties est déja soumis à des lois fixes. Des dissentiments subsistent encore touchant les parties intérieures et extérieures du thorax; mais les choses en sont au point, que l'on ne peut tarder, au moyen de quelques concessions mutuelles, d'arriver à des résultats satisfaisants pour toutes les opinions.

M. Geoffroy Saint-Hilaire, dont les travaux ont tant contribué aux progrès de ces études, en a fait sentir l'importance dans deux Mémoires intitulés, l'un : *De quelques règles fondamentales de la Physiologie naturelle;* l'autre, *De la génération de quelques idées dans les études anatomiques;* et joignant l'exemple au précepte, il a exposé, dans trois autres Mémoires, les résultats de ses nouvelles recherches sur l'os qui sert de base à tout le crâne, et que l'on a nommé *sphénoïde;* sur celui qui forme l'arrière du crâne, et qu'on a appelé *occipital;* enfin sur celui que l'on appelle *carré* dans les oiseaux, et qui répond à l'os de la caisse des fœtus des mammifères

On sait depuis plusieurs années que l'os sphénoïde est d'abord divisé en deux os qui se suivent, et qui demeurent même très-long-temps distincts dans certains quadrupèdes :

c'est d'après ce fait que M. Oken et d'autres anatomistes ont considéré cet os comme représentant deux vertèbres; on a appris aussi, depuis la même époque, que dans le plus grand nombre des quadrupèdes, les apophyses ptérygoïdes internes du sphénoïde demeurent, presque pendant toute la vie, distinctes de ses autres parties; enfin il y a très-long-temps que ceux qui ont décrit les progrès de l'ossification dans les fœtus humains, ont annoncé que vers la naissance, le sphénoïde antérieur se divise en deux moitiés, et le postérieur en trois, savoir: le corps et les grandes ailes; mais dans les fœtus moins avancés, les ailes d'ingrassias sont distinctes. Le corps même du sphénoïde postérieur est aussi divisé en deux parties. Enfin, M. Geoffroy a vu les apophyses ptérygoïdes externes séparées des grandes ailes; et il pense aussi que les sinus sphénoïdiens peuvent être regardés comme des os particuliers; en sorte qu'en réalité, le sphénoïde serait composé de sept paires d'os, auxquels l'auteur donne des noms, savoir :

Aux ailes d'ingrassias, celui d'*ingrassial;*

Aux cornets sphénoïdaux, celui de *bertinal*, d'après Bertin, qui les a le premier bien décrits;

Aux corps du sphénoïde antérieur, celui d'*ento-sphénal;*

Aux grandes ailes temporales, celui de *ptéréal;*

Aux apophyses ptérygoïdes externes, celui de *ptérygoïdal;*

Aux internes, celui d'*hérisséal,* d'après Hérissant, qui les a particulièrement étudiées dans les oiseaux;

Enfin au corps du sphénoïde, celui de *hippo-sphénal,* parce qu'il forme ce que l'on a nommé la selle turcique.

M. Geoffroy pense que, si l'on considère les deux sphénoïdes comme deux vertèbres, on peut regarder le palatin comme représentant la côte de la première, et l'apophyse ptérygoïde interne comme formant la côte de la seconde de ces vertèbres.

Quant à l'os carré, M. Geoffroy l'ayant vu, dans un fœtus de crocodile divisé par des sutures en deux grandes lames et en deux petites, il l'a suivi dans de jeunes oiseaux, et il a trouvé aussi chez eux deux lames principales, et deux petites pièces accessoires, qui ne s'unissent à l'os carré que lorsque le squelette est entièrement consolidé. Cherchant dans l'homme les analogues de ces deux petites pièces, M. Geoffroy les trouve dans l'apophyse styloïde, et dans l'espèce de capsule dont cette apophyse semble sortir, et qu'on a nommée l'*apophyse vaginale;* et il annonce que dans les fœtus de certains animaux, cette apophyse vaginale est un noyau osseux particulier.

Il considère ensuite la caisse elle-même pour y retrouver les deux principales pièces de l'os carré.

Dans les carnivores, tels que le chien, le chat, une lame en forme de coquille, naissant du rocher, s'ossifie par degrés, complète ainsi les parois de la caisse, et enchâsse le cadre du tympan qui, lui-même un peu en forme de coquille, donne par son bord interne cette cloison circulaire qui divise, comme on sait, la caisse de ces carnivores en deux chambres.

Dans le hérisson, le cadre du tympan est très-large; le rocher ne produit point de lame pour compléter avec lui les parois de la caisse, mais il y est suppléé par une lame que le sphénoïde postérieur donne de sa partie voisine de l'os basilaire, en sorte que dans cet animal le sphénoïde concourt avec l'os du tympan et avec le rocher à envelopper la cavité de la caisse.

Il y a quelque chose d'analogue dans *le sarigue;* M. Cuvier a même observé que dans cet animal, le sphénoïde postérieur entre dans la composition de l'apophyse glénoïde; que dans le *dasyure,* la lame qu'il fournit à la caisse se renfle en une grande vessie à parois minces et solides, en sorte que presque toute la cavité d'une énorme caisse tire ses parois du sphénoïde; que dans le *phalanger,* le sphénoïde contribue à la composition de l'apophyse mastoïde, en même temps que de la caisse; que dans le *Kanguroo,* il entre dans la composition de la première, mais non de la seconde; enfin, que dans le *phascolome*, c'est le temporal qui contribue, par une de ses productions, à ceindre la caisse par devant, tandis que les parois inférieures et postérieures de cette cavité, ne recevant d'os ni du sphénoïde, ni du rocher, demeurent cartilagineuses (à moins toutefois qu'il n'y ait un os séparé, perdu dans les squelettes que nous possédons).

M. Geoffroy trouve que cette partie de la caisse, qui ne s'ossifie qu'après le cadre du tympan, et qui s'attache avec l'âge, tantôt au rocher, tantôt au sphénoïde, tantôt au temporal, est dans les jeunes sujets séparée par une suture de l'os auquel elle vient à adhérer par la suite; il en conclut que c'est primitivement une pièce à part, et il lui donne le nom d'os *cotyléal.* Elle se sépare aisément, selon l'auteur, dans le chat de dix jours; on en voit même se séparer encore une autre pièce dans le fœtus du chat ou dans le chat naissant; il assure aussi que l'on peut détacher ce cotyléal dans l'enfant naissant; et comme d'ailleurs, selon M. Serres, le cadre du tympan de l'homme se divise en deux parties dans les jeunes fœtus, M. Geoffroy retrouve dans la caisse de l'homme les mêmes trois pièces que dans les carnivores, et cinq, en comptant le vaginal et le stylhyal. Or, nous venons de voir que dans les oiseaux il n'en a découvert que quatre; aussi se propose-t-il bien de chercher à déterminer quelle est celle qui leur manque, ainsi que de les retrouver toutes dans les poissons.

Dans la vue de s'assurer davantage de la généralité et de la constance de ces lois sur la composition du crâne, M. Geoffroy a fait une étude particulière des crânes de fœtus monstrueux, sur tout de ceux qu'on a nommés acéphales, ou plutôt anencéphales, parce que leur cerveau est détruit ou sorti du crâne par quelque ouverture.

Les os du crâne, n'étant plus soutenus par dedans, ne prennent point leur développement naturel; mais quelque étranges que paraissent les monstruosités qui en résultent, on y retrouve les mêmes pièces que dans les crânes réguliers; seulement elles ont pris d'autres proportions relatives, ou bien elles sont plus ou moins déplacées, ou bien enfin elles conservent, les unes plus long-temps que les autres, la distinction de leurs noyaux primitifs.

M. Geoffroy a choisi trois de ces crânes défigurés, et a montré la nature et les causes des changements subis par chacun de leurs os. Dans l'un d'eux, par exemple, l'occipital supérieur est divisé en deux, comme dans beaucoup de reptiles; et un peu plus haut se trouvent deux autres pièces disposées comme les interpariétaux de quelques mammifères.

M. Geoffroy fait remarquer, à ce sujet, que dans l'état ordinaire, l'occipital supérieur du fœtus de l'homme est divisé d'abord en quatre parties, et soutient que les deux supérieures, qui sont les plus grandes, répondent aux deux interpariétaux des fœtus des ruminants et d'autres quadrupèdes. Elles se soudent de meilleure heure, par des raisons analogues à celles qui produisent la même réunion précoce entre les deux parties du frontal de l'homme.

Cette constance des éléments du crâne est telle, que M. Geoffroy en a trouvé tous les os, mais réduits à une petitesse excessive, dans un fœtus qui n'avait au-dehors aucun reste apparent de tête ni de cou.

L'auteur termine ce travail par une classification des différentes monstruosités par défaut, relatives à la tête, qui pourra servir de base et de principe de nomenclature pour les recherches ultérieures sur ce sujet fécond.

L'on avait remarqué de tous temps que les serpents n'ont pas de paupières, que leurs yeux sont protégés à l'extérieur par une membrane sèche et transparente. On avait supposé que cette membrane était leur cornée, et l'on avait conclu qu'ils n'ont pas de larmes.

Mais il n'en est pas ainsi : sous cette peau transparente est une solution de continuité qui la sépare de la véritable cornée ; et ce vide, cette cavité possible, qui répond à celle qui existe au-devant de tout autre œil, quand les paupières sont fermées, et qui est tapissée par une conjonctive en forme de sac, a réellement dans l'angle interne, comme les paupières des yeux de la plupart des mammifères et des oiseaux, une petite ouverture, un véritable point lacrymal, orifice d'un canal qui, dans les serpents non venimeux, aboutit à la bouche, et, dans les venimeux, aux fosses nasales. C'est ce que M. Jules Cloquet a fait connaître à l'académie, et accompagné de préparations ingénieuses et de figures exactes. Il y décrit en même temps les diverses configurations de l'os lacrymal et de la glande du même nom dans les serpents les plus connus.

L'Académie avait proposé pour sujet du prix à décerner cette année, l'anatomie comparative du cerveau dans les quatre classes d'animaux vertébrés. Ce prix vient d'être remporté par M. Serres, chef des travaux anatomiques à l'hospice de la Pitié, et le travail important et volumineux qu'il a présenté au concours, accompagné d'une multitude de dessins, a tellement satisfait à ce que les anatomistes pouvaient désirer, que nous croyons devoir leur en présenter ici pour hâter leur jouissance, une analyse étendue, que nous empruntons en grande partie à l'auteur.

Depuis trois siècles environ on s'est beaucoup occupé de l'anatomie du cerveau; on a senti toute l'utilité dont pouvait être pour ce sujet l'anatomie comparative; mais une partie de ces efforts ont été infructueux, à cause peut-être du point de départ.

Les anatomistes cherchèrent d'abord les *ressemblances* dans l'encéphale des animaux comparé à celui de l'homme, qui leur était particulièrement connu; ces ressemblances furent saisies chez les mammifères, parce qu'aux proportions près, cet organe est la répétition de lui-même, dans les différentes familles dont cette classe se compose.

On y trouva tout, comme chez l'homme; on y dénomma tout, comme chez lui; on arriva ainsi à l'anatomie des oiseaux avec des idées toutes formées, mais dès les premiers pas on se trouva arrêté dans la détermination des parties dont se compose leur encéphale. Les lobes cérébraux et le cervelet furent bien reconnus, mais on méconnut les tubercules quadrijumeaux, à cause de leur changement de forme et de proportion; on méconnut également la couche optique, et on crut à une composition différente de leur encéphale.

La chaîne des ressemblances parut dès-lors rompue, et lorsqu'on en vint aux poissons, il sembla impossible de la renouer, par une circonstance que nous allons faire connaître.

Les anatomistes s'étaient habitués, on ne sait trop pourquoi, à disséquer le cerveau humain par sa partie supérieure, et celui des mammifères d'avant en arrière; cette méthode eut peu d'inconvénients chez eux, elle en eut également de faibles chez les oiseaux, parce qu'il était difficile de méconnaître les lobes cérébraux et le cervelet.

Il n'en fut pas de même chez les poissons; leur encéphale se compose d'une série de bulbes alignés d'avant en arrière, tantôt au nombre de deux, de quatre et quelquefois de six: à quelle paire devait-on assigner le nom de lobes cérébraux? était-ce aux antérieurs, aux moyens, ou aux postérieurs? Les anatomistes n'ayant aucune base pour établir l'une ou l'autre de ces déterminations, elles furent tour-à-tour adoptées et rejetées.

On conçoit qu'avant de chercher à rétablir les rapports des différents éléments de l'encéphale, il était indispensable de faire cesser cette confusion, de déterminer leur analogie, et d'établir cette détermination sur des bases qui fussent les mêmes pour toutes les classes.

Cette recherche fait l'objet de la première partie du travail de M. Serre, dans lequel il décrit séparément le cerveau pour chaque classe en particulier, en considérant cet organe depuis les embryons devenus accessibles à nos sens, jusqu'à l'état parfait, et à l'âge adulte des animaux.

L'analogie de chaque portion de l'encéphale étant déterminée, il a consacré la dernière partie de son ouvrage à l'étude de leurs rapports comparatifs dans les quatre classes des vertébrés : les propositions générales qui suivent sont l'expression de ces rapports.

La moelle épinière se forme avant le cerveau dans toutes les classes.

Elle consiste d'abord, chez les jeunes embryons, en deux cordons non réunis en arrière, et qui forment une gouttière; bientôt ces deux cordons se touchent et se confondent à leur partie postérieure; l'intérieur de la moelle épinière est alors creux; il y a un long canal qu'on peut désigner sous le nom de ventricule ou de canal de la moelle épinière : ce canal se remplit quelquefois d'un liquide, ce qui constitue *l'hydropisie de la moelle épinière*, maladie assez commune chez les embryons des mammifères.

Ce canal s'oblitère au cinquième mois de l'embryon humain, au sixième de l'embryon du veau et du cheval, au vingt-cinquième jour de l'embryon du lapin, au trentième jour du chat et du chien; on le retrouve sur le têtard de la grenouille et du crapaud accoucheur jusqu'à l'apparition des membres antérieurs et postérieurs.

Cette oblitération a lieu dans tous ces embryons par la déposition de couches successives de matière grise, sécrétée par la *pie-mère* qui s'introduit dans ce canal.

La moelle épinière est d'un calibre égal dans toute son étendue chez les jeunes embryons de toutes les classes : elle est sans renflement antérieur ni postérieur, comme celle des reptiles privés des membres (vipères, couleuvres, anguis fragilis), et de la plupart des poissons.

Avec cette absence des renflements de la moelle épinière coïncide, chez tous les embryons, l'absence des extrémités antérieures et postérieures; les embryons de tous les mammifères, des oiseaux et de l'homme, ressemblent sous ce rapport au têtard de la grenouille, et des batraciens en général.

Avec l'apparition des membres coïncide, chez tous les embryons, l'apparition des renflements antérieurs et postérieurs de la moelle épinière : cet effet est surtout remarquable chez le têtard des batraciens à l'époque de sa métamorphose; les embryons de l'homme, des mammifères, des oiseaux et des reptiles éprouvent une métamorphose entièrement analogue à celle du têtard.

Les animaux qui n'ont qu'une paire de membres n'ont qu'un seul renflement de la moelle épinière; les cétacés sont particulièrement dans ce cas : le renflement varie par sa position, selon la place qu'occupe sur le tronc la paire de membres : le genre *bipes* a son renflement situé à la partie postérieure de la moelle épinière. Le genre *bimane* l'a, au contraire, à la partie antérieure.

Dans les monstruosités que présentent si fréquemment les embryons des mammifères, des oiseaux et de l'homme, il se présente souvent des *bipes* et des *bimanes*, qui, comme les *cétacés* et les reptiles que nous venons de citer, n'ont qu'un seul renflement situé toujours vis-à-vis de la paire de membres qui reste.

La moelle épinière des poissons est légèrement renflée vis-à-vis du point qui correspond à leurs nageoires. Ainsi les *jugulaires* ont ce renflement derrière la tête, à la région cervicale de la moelle épinière, les *pectoraux* vers la région moyenne ou dorsale; et les *abdominaux* vers la partie abdominale de la moelle épinière.

Les *trigles* remarquables par les rayons détachés de leurs pectorales, le sont aussi par une série de renflements proportionnés pour le nombre et le volume, au volume et au nombre de ces mêmes rayons auxquels ils correspondent.

Les poissons électriques ont un renflement considérable correspondant au nerf qui se distribue dans l'appareil électrique (raie, silure électriques).

La classe des oiseaux offre des différences très-remarquables dans la proportion de ses deux renflements.

Les oiseaux qui vivent sur la terre comme nos oiseaux domestiques, et ceux qui grimpent le long des arbres, ont le renflement postérieur beaucoup plus volumineux que l'antérieur. L'autruche est surtout remarquable sous ce rapport.

Les oiseaux qui s'élèvent dans les airs, et y planent souvent des journées entières, offrent une disposition inverse; c'est le renflement antérieur qui prédomine sur le postérieur.

M. Gall a avancé que la moelle épinière était renflée à l'origine de chaque nerf; M. Serre ne croit pas que cette opinion soit confirmée par l'examen de la moelle épinière des vertébrés, à quelque âge de la vie intra ou extra-utérine, qu'on la considère.

M. Gall cherchait dans ces renflements supposés l'analogue de la double série de ganglions qui remplacent la moelle épinière dans les animaux articulés.

Cette analogie se trouve, comme d'autres auteurs l'ont déjà avancé, non dans la moelle épinière, mais dans les ganglions inter-vértébraux.

Ces ganglions, qui ont peu occupé les anatomistes, sont proportionnés dans toutes les classes au volume des nerfs qui les traversent : ils sont beaucoup plus forts vis-à-vis des nerfs qui se rendent aux membres, que dans aucune autre partie.

La moelle épinière est étendue jusqu'à l'extrémité du coccix, chez l'embryon humain, jusqu'au quatrième mois. A cette époque, elle s'élève jusqu'au niveau du corps de la secon devertèbre lombaire, où elle se fixe à la naissance.

L'embryon humain a un prolongement caudal signalé par tous les anatomistes, qui persiste jusqu'au quatrième mois de la vie utérine; à cette époque, ce prolongement disparaît, et sa disparition coïncide avec l'ascension de la moelle épinière dans le canal vertébral, et l'absorption d'une partie des vertèbres coccygiennes.

Si l'ascension de la moelle épinière s'arrête, le fœtus humain vient au monde avec une queue, ainsi qu'on en rapporte un grand nombre de cas : le coccix se compose alors de sept vertèbres.

Il y a donc un rapport entre l'ascension de la moelle épinière dans son canal, et le prolongement caudal du fœtus humain et des mammifères.

Plus la moelle épinière s'élève dans le canal vertébral, plus le prolongement caudal diminue, comme dans le cochon, le sanglier, le lapin ; au contraire, plus la moelle épinière se prolonge et descend dans son étui, plus la queue augmente de dimension, comme dans le cheval, le bœuf, l'écureuil.

L'embryon des *chauves-souris* sans queue ressemble sous ce rapport à celui de l'homme : il a d'abord une queue qu'il perd rapidement, parce que chez ces mammifères l'ascension de la moelle épinière est très-rapide, et qu'elle s'élève très-haut

C'est surtout chez le têtard des batraciens que ce changement est remarquable: aussi long-temps que la moelle épinière se prolonge dans le canal coccygien, le têtard conserve sa queue. A l'époque où le têtard va se métamorphoser, la moelle épinière remonte dans son canal, la queue disparaît, et les membres se prononcent de plus en plus.

Si la moelle épinière s'arrête dans cette ascension, le batracien conserve sa queue comme le fœtus humain.

Le fœtus humain, celui des chauves-souris et des autres mammifères se métamorphosent donc comme le têtard des batraciens.

Chez les reptiles qui n'ont pas de membres (les vipères, les couleuvres), la moelle épinière ressemble à celle du têtard avant sa métamorphose.

Chez tous les poissons, la moelle épinière présente le même caractère; elle offre souvent à sa terminaison un très-petit renflement.

Parmi les mammifères, les cétacés ressemblent sous ce rapport aux poissons.

Les embryons humains monstrueux qui n'ont pas les membres inférieurs, se rapprochent sous ce rapport des cétacés et des poissons.

L'entre-croisement des faisceaux pyramidaux est visible chez l'embryon humain, dès la 8e semaine.

Chez les mammifères l'entre-croisement devient de moins en moins apparent en descendant des quadrumanes aux rongeurs.

Chez les oiseaux, on ne remarque qu'un ou deux faisceaux tout au plus dont l'entre-croisement soit distinct.

Chez les reptiles il n'y a point d'entre-croisement.

Chez les poissons l'entre-croisement n'existe pas.

Le volume de la moelle épinière et celui de l'encéphale sont en général en raison inverse l'un de l'autre chez les vertébrés

L'embryon humain ressemble sous ce rapport aux classes inférieures; plus il est jeune, plus la moelle épinière est forte, plus l'encéphale est petit.

Dans certaines circonstances la moelle épinière et l'encéphale conservent un rapport direct de volume; ainsi plus la moelle épinière est effilée, étroite, plus l'encéphale est étroit et effilé, ce qu'on voit partout dans les serpents. La moelle épinière diminuant de longueur, et augmentant de volume, le cerveau s'accroît dans des proportions égales; c'est ce qui arrive dans les lézards, les tortues.

Chez les oiseaux, plus le col est allongé, plus la moelle épinière est étroite, plus le cerveau est effilé.

Ce rapport direct de volume entre la moelle épinière et le cerveau, ne porte pas sur tout l'encéphale; il a lieu uniquement avec les tubercules quadrijumeaux.

La moelle épinière et les tubercules quadrijumeaux sont rigoureusement développés en raison directe l'un de l'autre: de telle sorte que le volume ou la *force* de la moelle épinière étant donné dans une classe, ou dans les familles de la même classe, on peut déterminer rigoureusement le volume et la force des tubercules quadrijumeaux.

L'embryon humain est dans le même cas; plus il est jeune, plus la moelle épinière est forte, plus les tubercules quadrijumeaux sont développés.

Les tubercules quadrijumeaux sont les premières parties formées dans l'encéphale; leur formation précède toujours celle du cervelet, chez l'embryon des oiseaux, des reptiles, des mammifères et de l'homme.

Chez les oiseaux, les tubercules quadrijumeaux ne sont qu'au nombre de deux, et ils occupent, comme on le sait, la base de l'encéphale, ce qui les a long-temps fait méconnaître.

Ils ne parviennent à cet état qu'après une métamorphose très-remarquable. Dans les premiers jours de l'incubation ils sont, comme dans les autres classes, situés sur la face supérieure de l'encéphale, formant d'abord deux lobules, un de chaque côté; au dixième jour de l'incubation, un sillon transversal divise ce lobule, et à cette époque il y a véritablement quatre tubercules situés entre le cervelet et les lobes cérébraux.

Au douzième jour commence le mouvement très-singulier par lequel ils se portent de la face supérieure vers la face inférieure de l'encéphale.

Pendant ce mouvement, le cervelet et les lobes cérébraux, séparés d'abord par ces tubercules, se rapprochent successivement, et finissent par s'adosser l'un contre l'autre, comme on l'observe sur tous les oiseaux adultes.

Chez les reptiles, les tubercules quadrijumeaux ne sont qu'au nombre de deux dans l'état adulte; mais au quinzième jour du têtard de la grenouille, ils sont divisés comme ceux de l'oiseau au dixième jour.

Dans cette classe les tubercules ne changent pas de place; ils restent toujours situés à la face supérieure de l'encéphale, entre le cervelet et les lobes cérébraux, et leur forme est toujours ovalaire.

Chez les poissons, le volume considérable que prennent les tubercules quadrijumeaux les a fait considérer jusqu'à ce jour comme les hémisphères cérébraux de l'encéphale.

Ce qui a contribué à accréditer cette erreur, c'est qu'ils sont creusés d'un large ventricule, présentant un renflement considérable, analogue pour sa forme et sa structure au corps *strié* de l'encéphale des mammifères.

Ces tubercules sont toujours binaires chez les poissons, et leur forme se rapproche de celle d'un sphéroïde légèrement aplati en dedans.

Chez les mammifères et l'homme, les tubercules quadrijumeaux ne sont qu'au nombre de deux pendant les deux tiers environ de la vie utérine; ils sont alors ovalaires et creux intérieurement, comme chez les oiseaux, les reptiles et les poissons.

Au dernier tiers de la gestation, un sillon transversal divise chaque tubercule, et alors seulement ils sont au nombre de quatre.

La diversité que présentent ces tubercules dans les différentes familles des mammifères, dépend de la position qu'occupe ce sillon transversal.

Chez l'homme, il occupe ordinairement la partie moyenne; les tubercules antérieurs sont égaux à-peu-près aux postérieurs.

Chez les carnassiers, le sillon se porte en avant, ce qui fait prédominer les tubercules postérieurs.

Chez les ruminants et les rongeurs, le sillon se porte en arrière, et alors ce sont les tubercules antérieurs qui prédominent sur les postérieurs.

Dans certains encéphales de l'embryon humain et des mammifères, les tubercules restent *jumeaux*, ce qui rapproche ces encéphales de celui des poissons et des reptiles.

Observons que primitivement les tubercules quadrijumeaux de l'homme et des mammifères, sont creux comme chez les oiseaux, les reptiles et les poissons. Remarquons aussi que l'oblitération de leur cavité s'opère comme l'oblitération du canal de la moelle épinière; c'est-à-dire par la déposition de couches de matière grise sécrétée par la *pie-mère* qui s'introduit dans leur intérieur.

Les tubercules quadrijumeaux sont développés dans toutes les classes et les familles de la même classe, en raison directe du volume des nerfs optiques et des yeux.

Les poissons ont les tubercules quadrijumeaux les plus volumineux, les nerfs optiques et les yeux les plus prononcés.

Après les poissons viennent en général les reptiles, pour le volume des yeux, des nerfs optiques et des tubercules quadrijumeaux.

Les oiseaux sont également remarquables par le développement de leurs yeux; ils le sont aussi par le volume de leurs nerfs optiques et des tubercules quadrijumeaux.

Chez les mammifères, les yeux, les nerfs optiques et les tubercules quadrijumeaux vont toujours en décroissant des rongeurs aux ruminants, des ruminants aux carnassiers, aux quadrumanes et à l'homme, qui occupe sous ce rapport le bout de l'échelle animale.

Comme les tubercules quadrijumeaux servent de base à la détermination des autres parties de l'encéphale, nous avons dû accumuler toutes les preuves qui s'y rapportent.

Les poissons ayant les tubercules quadrijumeaux les plus volumineux, ont aussi les inter-pariétaux les plus prononcés.

Après les poissons viennent les reptiles, puis les oiseaux; enfin, parmi les mammifères, les rongeurs ont les inter-pariétaux les plus grands; viennent ensuite les ruminants, les carnassiers, les quadrumanes et l'homme, sur lequel on ne les rencontre qu'accidentellement.

Il pourra paraître singulier que le cervelet ne se forme qu'après les tubercules quadrijumeaux; mais ce fait ne présente d'exception dans aucune classe.

Pour avoir des notions exactes sur le cervelet des classes supérieures, il faut d'abord les emprunter aux poissons.

Chez les poissons, cet organe est formé de deux parties très-distinctes :

D'un lobule médian, prenant ses racines dans le ventricule des tubercules quadrijumeaux;

Des feuillets latéraux, provenant du corps restiforme.

Ces deux parties sont isolées, disjointes dans toute la classe des poissons, ce qui les avait fait méconnaître.

La grande différence que présente le cervelet des classes supérieures dépend de la réunion de ces deux éléments, dont l'un conserve le nom de *processus vermiculaire supérieur du cervelet*, et provient, comme chez les poissons, des tubercules quadrijumeaux (*Processus cerebelli ad restif.*); tandis que l'autre, provenant des corps restiformes, constitue les hémisphères du même organe.

Quoique réunis, ces deux éléments conservent une entière indépendance l'un de l'autre.

Le processus vermiculaire supérieur du cervelet (le lobe médian), et les hémisphères du même organe, sont développés dans toutes les classes en raison inverse l'un de l'autre.

Dans les familles composant la classe des mammifères, le même rapport se remarque rigoureusement : ainsi les rongeurs, les ruminants, les carnassiers, les quadrumanes et l'homme, ont ce processus et les hémisphères du cervelet développés en raison inverse l'un de l'autre.

Dans toutes les classes (les reptiles exceptés), le lobe médian du cervelet (processus vermiculaire supérieur) est développé en raison directe du volume des tubercules quadrijumeaux.

Dans toutes les classes, les hémisphères du cervelet sont développés en raison inverse de ces mêmes tubercules.

Dans les familles composant la classe des mammifères, ce double rapport est rigoureusement le même : ainsi les rongeurs qui ont les tubercules quadrijumeaux les plus volumineux, ont le lobe médian du cervelet le plus prononcé, et les hémisphères du même organe les plus faibles.

L'homme, au contraire, qui occupe le haut de l'échelle, pour le volume des hémisphères du cervelet, a le plus petit lobe médian et les plus petits tubercules quadrijumeaux.

Le cervelet se développe dans toutes les classes par deux feuillets latéraux non réunis sur la ligne médiane.

La moelle épinière est développée dans toutes les classes en raison directe du volume du lobe médian du cervelet.

La moelle épinière est développée dans toutes les classes en raison inverse des hémisphères du même organe.

Ces faits généraux sont surtout importants, pour apprécier les rapports de la protubérance annulaire.

La protubérance annulaire est développée en raison directe des hémisphères du cervelet.

La protubérance annulaire est développée en raison inverse du lobe médian du même organe. (Processus vermiculaire supérieur.)

La protubérance annulaire est développée en raison inverse des tubercules quadrijumeaux et de la moelle épinière.

La couche optique n'existe pas chez les poissons; ce qu'on avoit pris pour elle est un renflement propre aux tubercules quadrijumeaux.

Chez les reptiles, les oiseaux, les mammifères et l'homme, le volume de la couche optique est en raison directe du volume des lobes cérébraux.

Dans ces trois classes, la couche optique est développée en raison inverse des tubercules quadrijumeaux.

Chez l'embryon humain, ce rapport est le même; les tubercules quadrijumeaux décroissent à mesure que la couche optique augmente. Chez les embryons des autres mammifères, chez le fœtus des oiseaux et le têtard des batraciens, ce mouvement inverse s'observe également.

Ainsi, la couche optique est développée dans les trois classes où elle existe, en raison directe des lobes, et en raison inverse des tubercules quadrijumeaux.

La glande pinéale existe dans les quatre classes des vertébrés.

Elle a deux ordres de pédoncules, les uns provenant de la couche optique, les autres des tubercules quadrijumeaux.

Les corps striés n'existent pas chez les poissons, les reptiles et les oiseaux.

Chez les mammifères leur développement est proportionné à celui des hémisphères cérébraux.

Les hémisphères cérébraux sont développés en raison directe du volume de la couche optique et des corps striés.

Chez les poissons, ils forment un simple bulbe arrondi, situé au-devant des tubercules quadrijumeaux, et dans lequel s'épanouissent les pédoncules cérébraux.

Chez les poissons, les reptiles et les oiseaux, les lobes cérébraux constituent une masse solide, sans ventricule intérieurement.

La cavité ventriculaire des lobes cérébraux distingue inclusivement les mammifères et l'homme.

Un rapport inverse très-curieux s'observe, à cet égard, entre les trois classes inférieures et les mammifères, relativement aux tubercules quadrijumeaux et aux lobes cérébraux.

Dans les trois classes inférieures, les tubercules quadrijumeaux sont creux et conservent un ventricule inférieur; les lobes cérébraux sont solides et sans ventricule.

Dans les mammifères et l'homme, au contraire, les tubercules quadrijumeaux sont solides, forment une masse compacte, et les lobes cérébraux se creusent d'un large ventricule.

Dans les trois classes inférieures, les lobes cérébraux sont sans circonvolutions, ce qui se lie avec leur masse compacte intérieure.

Dans les mammifères, au contraire, avec la cavité des lobes apparaissent les circonvolutions cérébrales.

La corne d'Ammon n'existe, ni chez les poissons, ni chez les reptiles, ni chez les oiseaux.

Elle existe chez tous les mammifères; elle est plus développée chez les rongeurs que chez les ruminants; chez ces derniers, que chez les carnassiers, les quadrumanes et l'homme, où elle est, toutes choses d'ailleurs égales, moins prononcée.

M. Serre n'a rencontré le petit pied d'Hippocampe dans aucune famille des mammifères.

Chez l'homme, il manque quelquefois aussi.

La voûte à trois piliers manque chez les poissons et les reptiles.

Elle manque aussi chez la plupart des oiseaux; mais on en rencontre les premiers vestiges sur quelques-uns, tels que les perroquets et les aigles.

La voûte à trois piliers suit, chez les mammifères, le rapport de développement de la corne d'Ammon.

Elle est plus forte chez les rongeurs que chez les ruminants; chez ceux-ci, que chez les carnassiers, les quadrumanes et l'homme.

Il n'y a aucun vestige du corps calleux dans les trois classes inférieures.

Le corps calleux, ainsi que le pont de Varole, sont des parties caractéristiques de l'encéphale des mammifères.

Le corps calleux est développé en raison directe du volume des corps striés et des hémisphères cérébraux: il augmente progressivement des rongeurs aux quadrumanes et à l'homme.

Le corps calleux est développé en raison directe du développement de la protubérance annulaire.

Les hémisphères cérébraux, considérés dans leur ensemble, sont développés en raison directe des hémisphères du cervelet, et en raison inverse de son processus vermiculaire supérieur.

Les hémisphères cérébraux sont développés en raison inverse de la moelle épinière et des tubercules quadrijumeaux.

M. Gall a dit que la matière grise se formait avant la matière blanche; cette opinion n'est pas d'accord avec les faits, en ce qui concerne la moelle épinière.

M. Cuvier a le premier constaté que dans le genre *astérie*, le système nerveux est composé de matière blanche, sans matière grise.

Pendant l'incubation du poulet, on observe que les premiers rudiments de la moelle épinière sont également composés de matière blanche; la matière grise n'apparaît que plus tard.

Chez l'embryon humain et celui des mammifères on observe constamment aussi que la matière blanche précède la matière grise dans sa formation, toujours en ce qui concerne la moelle épinière.

Mais, dans l'encéphale proprement dit, l'ordre de l'apparition de ces deux subtances est inverse.

Ainsi, la couche optique et le corps strié ne sont, chez les jeunes embryons, que des renflements composés de matière grise; la matière blanche ne s'y forme que plus tard.

Sur le fœtus humain, avant la naissance, le *corps strié* ne mérite pas ce nom, parce que ces stries de matière blanche, qui lui ont valu ce nom, ne sont pas encore formées.

Les stries de matière blanche qu'on aperçoit sur le quatrième ventricule de l'homme, n'apparaissent également que du douzième au quinzième mois après la naissance.

D'où il résulte que, sur la moelle épinière, la matière blanche se forme avant la matière grise; tandis qu'au contraire, dans l'encéphale, c'est la matière grise qui précède la matière blanche.

Tel est le grand ouvrage de M. Serre, en quelque sorte réduit en aphorismes; nous ne doutons pas que cette espèce de Table de matières n'en donne déja aux anatomistes une idée aussi avantageuse que celle qu'en a conçue l'Académie.

PHYSIOLOGIE.

Dans nos analyses de 1817 et 1818 nous avons donné le sommaire des expériences ingénieuses et délicates faites par M. Edwards concernant l'action de l'air et de la température sur la vie des grenouilles, et nous avons indiqué les principales vérités physiologiques qui résultent de ces expériences.

Ce savant observateur a étendu ce genre important de recherches et en a présenté le résumé général dans un mémoire intitulé de *l'influence des agents physiques sur les animaux vertébrés*. Il a reconnu que la peau remplit dans les grenouilles des fonctions plus importantes pour la vie que celles des poumons, car en l'enlevant on les fait périr bien plutôt qu'en extirpant les poumons, et lorsque l'on fait respirer l'animal par les poumons seulement en enveloppant sa peau d'huile ou d'un autre liquide, on a peine à soutenir son existence. L'auteur s'est occupé ensuite de la transpiration; il a remarqué que, toutes choses égales d'ailleurs, elle va en diminuant dans des intervalles successifs. Le mouvement de l'air, sa sécheresse, sa chaleur l'augmentent beaucoup. M. Edwards a consigné dans des tableaux fort précis, ses résultats numériques à cet égard. Il a examiné aussi et représenté par des tableaux la faculté qu'ont ces animaux d'absorber l'eau dans laquelle on les plonge, faculté qui va en décroissant jusqu'à un certain degré que l'on peut considérer comme celui de la saturation. Entre 0 et 40°, l'abaissement du thermomètre favorise cette absorption.

On a vu dans nos extraits précédents, que la grenouille adulte ne trouve dans l'eau une quantité d'air suffisante à sa respiration, qu'autant que la température est au-dessous de 10°, et qu'au-dessus de ce terme l'air atmosphérique lui devient indispensable.

Le têtard de grenouille n'est pas dans le même cas, et l'auteur en a conservé un grand nombre jusqu'à 23° de température sans les laisser venir respirer à la surface; mais ce qu'il a observé de plus important sur les têtards, c'est qu'en les empêchant de respirer par les poumons, en les réduisant à respirer par les branchies, on peut retarder et même empêcher leur métamorphose.

La température exerce sur la respiration des poissons une action analogue; plus elle est froide, et plus long-temps le poisson peut se passer de venir respirer à la surface. MM. Silvestre et Brongniart qui ont fait autrefois des expériences sur la nécessité de l'air élastique pour cette classe d'animaux, avaient aussi remarqué les variations qui à cet égard dépendent de la température.

Les poissons mis hors de l'eau perdent, avant de mourir, du douzième au quinzième de leur poids par la transpiration.

Les tortues, les serpents et les lézards, dont la peau est moins perméable que celle des grenouilles, ne peuvent vivre entièrement sous l'eau, quelque aérée, quelque froide qu'elle soit. Ils perdent aussi beaucoup moins par la transpiration.

Quant aux animaux à sang chaud, M. Edwards a remarqué que les jeunes mammifères et les jeunes oiseaux produisent beaucoup moins de chaleur que les adultes, et que quelques-uns d'entre eux, pendant les premiers jours de la vie, ont de la peine, quand ils sont isolés de leur mère, à se soutenir par un temps froid à quelques degrés au-dessus de la température ambiante; ce sont ceux qui naissent avec un canal artériel large et ouvert, et où par conséquent la communication entre les deux circulations demeure plus complète pendant les premiers jours. L'auteur est porté à croire que les animaux dans ce cas sont aussi ceux qui naissent les yeux fermés.

M. Edwards a constaté par de nouvelles expériences le fait que les oiseaux, toutes choses égales d'ailleurs, ont une respiration plus étendue et produisent plus de chaleur; enfin il a observé que dans les animaux à sang chaud, privés de respiration, l'abaissement de la température est favorable à la prolongation de la vie, comme dans les animaux à sang froid.

M. Edwards s'est aussi occupé de constater les variations que les saisons occasionnent dans l'étendue de la respiration des animaux, étendue qu'il mesure d'après la quantité d'oxygène qu'ils consomment, ou, ce qui revient au même, d'après la quantité d'air qu'il leur faut pour prolonger leur vie pendant un temps donné, ou bien enfin, en prenant le rapport inverse d'après le temps qu'ils peuvent vivre dans une quantité donnée d'air.

Il a trouvé, de cette manière et de plusieurs autres, que l'étendue de la respiration, et la consommation de l'oxygène qui en résulte, sont plus fortes en hiver qu'en été; mais l'emploi de l'oxygène consommé n'est pas le même dans les deux saisons. A la vérité, M. Edwards trouve qu'il y en a toujours plus ou moins d'absorbé, mais cette absorption diminue beaucoup en automne et en hiver; elle devient même alors très-petite; tandis que la production de l'acide carbonique devient au contraire plus grande. L'auteur est arrivé à un résultat non moins singulier par rapport à l'azote: en hiver l'azote paraît être en partie absorbé par les animaux; il en reste moins dans l'air où s'est faite la respiration; tandis qu'en été ils l'exhalent et en laissent plus qu'ils n'en avaient trouvé. C'est vers la fin d'octobre et le commencement de mai que s'opère, selon M. Edwards, cette singulière conversion de fonctions.

En été la chaleur des animaux est un peu plus considérable qu'en hiver, et cependant la production est moindre à proportion; ce qui se déduit non-seulement de ce que leur respiration a moins d'étendue, mais aussi de ce qu'un refroidissement artificiel abaisse davantage la température dans le même temps, toutes les circonstances étant d'ailleurs les mêmes.

Ces observations s'appliquent aux animaux à sang froid, comme à ceux à sang chaud.

L'absorption est cette faculté si essentielle à la vie, par laquelle les êtres organisés incorporent à leurs humeurs les substances étrangères en leur faisant traverser le tissu de leurs solides. Depuis la découverte des vaisseaux lymphatiques, la plupart des anatomistes ont pensé que ces vaisseaux étaient, dans les animaux d'un ordre élevé, les organes principaux de cette fonction; quelques-uns même ont cherché à prouver qu'ils en étaient les organes exclusifs, mais dans ces derniers temps on en est revenu à des idées moins restreintes.

M. Magendie en particulier a présenté, il y a quelque temps, à l'Académie divers Mémoires importants, dont nous avons rendu compte, où il cherche à prouver que les veines sanguines sont douées de la faculté absorbante; que les vaisseaux lactés n'absorbent peut-être que le chyle, et qu'il n'est pas démontré que les autres vaisseaux lymphatiques soient en aucune façon des vaisseaux absorbants.

M. Tiedeman, professeur à Heidelberg, et M. Gmelin viennent de publier des expériences desquelles il résulte clairement que les sels, diverses substances odorantes, etc. passent directement dans le sang par l'absorption des veines intestinales.

Les voies de l'absorption une fois reconnues, il s'agissait de savoir par quel mécanisme cette fonction s'opère. M. Magendie s'est occupé de cette question. Il rejette les radicules, les orifices, les bouches absorbantes, supposées plutôt qu'observées par divers anatomistes; à plus forte raison repousse-t-il cette sensibilité propre, ce tact éminemment délicat que leur attribue l'imagination poétique de certains physiologistes. Ayant observé qu'en gonflant outre mesure les vaisseaux sanguins par l'injection d'une certaine quantité d'eau, il retardait ou affaiblissait beaucoup l'absorption des substances appliquées à ces vaisseaux, et qu'en les remplissant autant qu'il était possible, il supprimait entièrement l'absorption, il jugea que des circonstances contraires produiraient des effets opposés; en conséquence il réduisit par des saignées la quantité du liquide contenu dans les vaisseaux, et l'absorption devint aussitôt plus rapide et plus complète. Pour s'assurer que c'était au volume du liquide et non à sa nature qu'il fallait attribuer ces différences, il remplaça dans une troisième série d'expériences la quantité de sang qu'il tira, par une quantité égale d'eau, et l'absorption demeura telle qu'elle aurait été si aucun changement ne fût arrivé.

D'après ces expériences, M. Magendie regarde l'attraction capillaire des parois des vaisseaux comme la cause la plus probable de l'absorption; et ce fait, que les substances solubles dans nos humeurs et capables de mouiller nos vaisseaux sont les seules qui puissent être absorbées, lui paraît un motif de plus d'adopter son opinion; mais l'attraction capillaire n'étant pas une propriété vitale, ne doit pas cesser avec la vie, et en effet M. Magendie assure avoir encore vu l'absorption s'opérer sur des artères et sur des veines détachées du corps, et dans lesquelles il faisait circuler artificiellement un liquide.

Cette action doit avoir lieu sur les gros vaisseaux comme sur les petits, sauf ce qui dépend de la multiplication des surfaces dans ces derniers; et encore ici l'expérience a confirmé cette conclusion; des substances vénéneuses appliquées immédiatement et avec les soins convenables soit à de grosses artères soit à de grosses veines, ont pénétré dans le sang de ces vaisseaux.

Chacun aperçoit toutes les conséquences qui peuvent dériver de ces expériences pour la pratique de la médecine, et les nombreuses et fécondes indications curatives que lui fournirait ce seul fait, que plus les vaisseaux sanguins sont distendus, moins l'absorption est active.

Une des grandes questions de la physiologie est celle de savoir si le cœur est la seule puissance active qui produise la circulation, ou si son action est aidée par celle des artères; et dans ce dernier cas, si toutes les artères sont au nombre des puissances auxiliaires.

M. Sarlandière a soumis à l'Académie un Mémoire où il cherche à prouver que la circulation n'est sous l'influence exclusive du cœur que dans les gros troncs; qu'elle diminue avec le calibre des vaisseaux; mais que dans leurs petits rameaux, le sang dans un état d'oscillation perpétuelle, cherche ou attend en quelque sorte une issue, soit pour retourner au cœur, soit pour pénétrer dans les vaisseaux capillaires; en sorte qu'une fois arrivé à ces petits rameaux, il n'appartient que faiblement au torrent général de la circulation, mais qu'il se trouve jusqu'à un certain point aux ordres du système capillaire, lequel serait ainsi le véritable régulateur de l'économie animale. L'auteur apporte en preuve d'abord les effets manifestes des piqûres; ensuite les effets plus obscurs des passions et des inflammations.

MÉDECINE.

La fièvre jaune, ce fléau de nos îles à sucre, n'est pas moins terrible que la peste du Levant; d'après une notice sur la mortalité qu'elle a occasionée, elle a enlevé le quart, quelquefois le tiers et davantage de la population des villes où elle s'est introduite. Long-temps confinée dans les contrées chaudes du nouveau continent, elle semble aujourd'hui menacer toute l'Europe. Quatre fois depuis vingt ans elle a ravagé Cadix; plus de vingt-cinq mille ames dans ce seul port, ont succombé à ses atteintes. Elles s'est montrée non moins cruelle en d'autres ports de la péninsule et jusqu'à Livourne. Il n'est donc pas étonnant que les gouvernements aient cherché à faire mieux étudier cette maladie, et se soient enquis avec zèle des moyens d'en préserver leurs peuples, ni que les hommes de l'art qui ont eu l'occasion de l'observer dans les lieux où elle est plus fréquente, se soient empressés d'offrir le tribut de leurs lumières.

Le nombre des ouvrages, et des bons ouvrages qui traitent de la fièvre jaune, a donc été fort considérable; mais comme sur tant d'autres des matières les plus importantes de la médecine, il s'en faut de beaucoup que tant de science et des observations si multipliées, faites avec tant de soin et de courage, aient conduit à des résultats certains.

La question principale, elle-même, celle qui intéresse surtout l'administration, est loin encore d'être décidée. La fièvre jaune se propage-t-elle par contagion d'homme à homme? les malheureux qui en sont une fois infectés la portent-ils partout avec eux?

Des mesures sanitaires analogues à celles que l'on prend contre la peste sont-elles nécessaires pour l'éloigner de nous? sont-elles suffisantes?

Ou bien cette calamité naît-elle seulement de l'action combinée de l'air, du sol, de la température, et des émanations malsaines et putrides, en sorte que d'une part, les barrières extérieures seraient des obstacles impuissants contre elle, pour les lieux soumis à l'influence de ces causes; mais que d'une autre part, les malades ne la porteraient point dans les lieux où ces causes n'agissent pas, et que l'approche de ces malheureux n'ajouterait rien au danger pour les individus qui s'intéressent à leur sort?

Dans le premier cas, les malades seront séquestrés de leurs amis, de leurs parents; le courage le plus noble, ou la charité la plus vive oseront seuls les secourir; l'entrée de nos ports sera soumise à des formalités gênantes; le commerce sera entravé; on ne pourra plus communiquer avec l'Amérique, autrement qu'avec l'Égypte ou la Turquie? Mais au moins l'on sera sûr de ne plus revoir nos villes dépeuplées par un fléau cruel.

Dans le second cas, on pourra craindre sans doute que ce mal ne renaisse quelque jour; mais en attendant on se dispensera de précautions effrayantes et inutiles, et à l'apparence de l'épidémie, l'on prendra les mesures qu'elle réclame, sans voir la société en quelque sorte dissoute par la terreur.

Malheureusement chacune de ces opinions a des partisans également habiles, également loyaux, également expérimentés: et si les gouvernements n'avaient d'autre règle à suivre qu'une solution scientifique rigoureuse, ils ne verraient de tous côtés que de la perplexité et des embarras.

M. Devèze, par exemple, qui a vu et traité la fièvre jaune à Saint-Domingue, et lors de ses plus grandes irruptions à Philadelphie, s'est déclaré depuis long-temps contre la contagion, et vient de reproduire sa doctrine dans un ouvrage présenté cette année à l'Académie, et qui a été publié.

Il a vu la maladie aux Antilles, régnant sporadiquement; il l'y a vue attaquer vivement les étrangers, moissonner des armées entières arrivant d'Europe, et jamais il n'aperçut que l'approche des malades ajoutât au danger pour les individus sains. Le climat exerce ses fureurs sur les individus habitués à une autre température; mais le climat seul agit; les

Créoles, qui d'ordinaire sont moins susceptibles d'être attaqués de ce mal que les Européens, y deviennent tout aussi sujets que ceux-ci, lorsqu'ils ont passé quelques années dans des pays tempérés; à Philadelphie, selon M. Devèze, la fièvre jaune est née de la chaleur combinée avec les émanations putrides des canaux et des rues mal nettoyées; mais elle ne subsiste, elle ne se répand que dans les lieux où subsistent les causes qui l'ont produite; ceux-là seulement en sont atteints qui s'exposent aux foyers d'infection; elle ne s'étend pas aux champs aérés, aux collines, aux lieux élevés; les malades qui l'ont contractée dans la ville se dispersent dans les campagnes, ils vont y mourir sans y porter le mal; on peut en approcher et les soigner impunément; c'est presque toujours par des suppositions gratuites que l'on en a attribué l'importation à des vaisseaux venus des Antilles. Que si des navires où elle avait régné l'ont introduite dans quelques ports; que si des hôpitaux où beaucoup de fiévreux étaient entassés, l'ont disséminée autour d'eux, c'est que ces vaisseaux, ces hospices, étaient eux-mêmes devenus des foyers d'infection, et agissaient comme auraient pu faire des eaux stagnantes et corrompues. Cette opinion a été appuyée par M. Sedillot, dans un Mémoire également lu à l'Académie, et où il l'étend au typhus et à la peste elle-même; tandis que dans un Mémoire conçu dans des idées absolument contraires, M. Audouart a cherché à établir que jusqu'à la fièvre intermittente peut devenir contagieuse.

Pour nous en tenir à la fièvre jaune, un de ceux qui ont soutenu avec le plus de force sa nature contagieuse, est M. Moreau de Jonnès, qui s'y est vu exposé comme militaire, et qui l'a observée avec autant de soin que s'il eût été médecin.

Dans un ouvrage étendu, intitulé : *Monographie de la fièvre jaune*, il fait remarquer que ce mal affreux attaqua les Européens, dès le second voyage de Colomb ; qu'il les moissonna toutes les fois qu'ils vécurent beaucoup avec les naturels ; qu'il n'a été porté en Europe et aux États-Unis, qu'à des époques rares, déterminées ; que jamais il n'y a été sporadique ; que dans des occasions bien constatées, il a été manifestement transmis par communication, tandis qu'en d'autres occasions non moins certaines, on s'en est garanti par une séquestration complète. D'où il conclut que si le mal ne se répand pas au-delà de certaines limites, que s'il n'attaque pas tous ceux qui approchent des malades, c'est que sa communication exige certaines conditions qui heureusement ne se rencontrent pas toujours, ni partout ; qu'en un mot, ce n'est point une maladie indéfiniment contagieuse ; que peut-être, ce n'est pas même une maladie qui exige un contact immédiat ; mais qu'exclusivement originaire de certains lieux, ceux qui en sont atteints peuvent la transmettre en d'autres lieux, lorsque le sol et le climat s'y prêtent à son développement ; lieux où cependant toute ces circonstances ne l'eussent pas produite, si ce nouveau ferment n'était pas survenu.

Une opinion combinée, en quelque sorte, des deux autres, a été développée dans un Mémoire spécial, par M. Girardin, qui a observé la fièvre jaune à la Louisiane.

Selon lui, cette maladie est ordinairement sporadique et non contagieuse ; mais à certaines époques, elle règne épidémiquement ; elle devient alors plus douloureuse, plus meurtrière, plus effrayante dans ses symptômes ; et lorsqu'elle est arrivée à un certain degré, elle devient susceptible d'être transportée, même dans les lieux les plus sains par eux-mêmes, pour peu que la température s'y prête.

Lorsque l'on a lu avec attention les ouvrages dont nous venons de parler, et ceux qui ont été publiés en si grand nombre, à l'appui de chacune de ces opinions, il est difficile de se défendre de l'idée que cette opposition apparente tient plus à des subtilités de théorie, qu'elle n'offre d'utilité pratique. Peu importerait, en effet, relativement à la police médicale, que la fièvre jaune eût besoin du contact immédiat pour être propagée ; peu importerait même qu'en certains cas, elle pût naître par des causes locales et sans aucune importation, si d'ailleurs, comme tout le monde paraît en convenir, les individus qui en sont atteints, les navires où elle a régné, où elle règne, peuvent être considérés comme des centres d'infection, être rangés eux-mêmes au nombre de ces causes locales qui peuvent la faire naître en des lieux où elle n'aurait pas existé sans cela.

Les gouvernements, sans s'inquiéter alors des systèmes et des distinctions sur les virus, les contagions et les infections, n'en auraient pas moins le devoir de prendre des précautions sérieuses; on ne peut même contester que dans le doute il ne soit de leur devoir d'embrasser l'opinion la plus sûre.

De tous temps les médecins habiles ont reconnu que pour traiter avec succès une maladie, il ne faut pas s'en tenir à ce qu'annoncent les symptômes les plus apparents, ni supposer que la cause du mal soit précisément au point où se manifestent la douleur et l'inflammation.

M. Portal depuis bien des années a fait des applications de cette théorie aux maladies qui tirent leur origine du foie, mais dont les symptômes ou les effets sont tels qu'on pourrait être tenté d'en placer le siége dans l'estomac ou dans les intestins. Il l'a reproduite dans un mémoire important qu'il a lu cette année à l'Académie sur les entérites ou inflammations des intestins qui surviennent à la suite des maladies du foie; les rapports nombreux de ce viscère avec le canal intestinal, soit par leur situation mutuelle, soit par les nerfs et les vaisseaux qui se rendent de l'un à l'autre, soit enfin par leur communication directe au moyen du canal de la bile, sont en effet si nombreux, qu'il est bien difficile que le foie soit affecté sans que l'affection se communique aux intestins, et M. Portal a montré qu'en plusieurs cas l'on commet des erreurs funestes aux malades, en traitant ces entérites symptomatiques comme des maladies primitives, et en négligeant d'examiner l'état du foie et de la bile.

La bile altérée occasionne très-souvent des inflammations violentes et des érosions dans le canal alimentaire, et il y a des exemples de personnes que l'on a crues empoisonnées à cause de ces signes équivoques. Le choléra-morbus et la passion iliaque ont eu plus d'une fois leur cause primitive dans le foie, selon M. Portal. L'auteur, à l'appui de sa doctrine, rapporte des exemples nombreux et intéressants tirés de sa pratique, et où des maladies graves de ce genre ont été promptement guéries, lorsque l'on s'est attaché à les poursuivre dans leur véritable siége.

M. Percy a fait voir le modèle en plâtre d'un bras où s'était manifesté une éléphantiasis d'un volume monstrueux: le malade en est mort vingt-deux jours après l'amputation, et à l'âge de vingt-deux ans.

M. Desmoulins, docteur en médecine, a présenté un mémoire sur le volume et la masse du système nerveux dans les marasmes occasionnés par diverses maladies; ayant toujours trouvé le cerveau et les nerfs des personnes mortes dans cet état, aussi volumineux à proportion que dans les personnes saines, il pense que l'excès d'irritabilité qui s'observe d'ordinaire dans ce marasme tient précisément à cette conservation du système nerveux, au milieu de la déperdition qu'éprouvent les autres organes, et au défaut d'équilibre qui en résulte.

M. le docteur Chomel a présenté à l'Académie une observation faite sur une jeune personne sujette à des accès d'hystérie, qui fut atteinte d'une toux périodique très-violente. La belladonne transforma cette toux en véritables attaques d'hystérie, qui cédèrent ensuite facilement au quinquina.

M. le docteur Fournier-Pescay a lu l'année dernière à l'Académie un grand travail sur l'action de la musique sur notre système nerveux, et sur les effets médicinaux qui en résultent quelquefois; il en rapporte des exemples vraiment surprenants. Ce travail dont nous aurions dû rendre compte dans notre précédente analyse, et qui s'est trouvé oublié par une erreur de bureau, ayant été imprimé depuis dans le Dictionnaire des sciences médicales, nous nous bornerons à y renvoyer les lecteurs.

ART VÉTÉRINAIRE.

M. Tessier a continué de faire part à l'Académie de ses observations sur les chèvres cachemires, importées en France par les soins de M. Ternaux et sous la conduite de M. Jaubert

Le troupeau établi à Perpignan, après avoir repris sa santé. a commencé à se multiplier. Après les mises bas, au mois de mars, le duvet dont on avait aperçu de faibles rudiments dès le mois d'avril, a commencé à se pelotonner, ce qui peut être regardé comme une sorte de maturité; on l'a enlevé avec des peignes de corne, et on l'a obtenu ainsi presque pur et débarrassé de jarre. Chaque animal en a fourni, terme moyen, trois onces et demie; quelques chèvres et un gros bouc en ont donné six onces, il y a eu très-peu de perte, et tout annonce que cette race s'acclimatera aisément; les chèvres paraissent meilleures laitières que les indigènes; les gros poils varient beaucoup en longueur, et l'on a remarqué que parmi les individus à poils ras il y a quelquefois plus de duvet; le duvet est plus fin sur les individus de couleur grise.

On espère, en les plaçant plus haut dans les Pyrénées, leur faire produire plus de duvet, et les perfectionner aussi sous ce rapport par de l'attention dans le choix des individus que l'on destinera à la propagation, et par des croisements faits avec intelligence avec celles de nos races indigènes qui produisent un duvet analogue.

AGRICUTURE.

M. Huzard, fils de l'un des membres de l'Académie, a rendu dans plusieurs lettres communiquées par M. son père, un compte détaillé de l'état des récoltes dans un assez grand nombre de départements du centre et du midi de la France; il s'est principalement occupé d'examiner si le froid tardif de l'hiver avait fait autant de mal qu'on le présumait, et il s'est assuré qu'il s'en fallait de beaucoup que notre agriculture eût autant souffert que quelques écrivains périodiques s'étaient plu à le répandre.

En même temps, il a tracé le plan des améliorations opérées dans les cantons qu'il a parcourus, soit par un meilleur assolement ou par l'établissement de prairies artificielles; les voyages agricoles de nos confrères MM. de Candolle et Yvart ont fait beaucoup de bien; celui d'Arthur Young lui-même, quoique déja ancien, n'a pas été inutile; l'exemple gagne de proche en proche; et si l'aisance de nos agriculteurs répondait aux moyens d'instruction, nous n'aurions rien à envier à nos voisins.

Le même auteur a offert à l'Académie quelques mémoires sur l'agriculture de la Grande-Bretagne et de l'Irlande, où il a fait différents voyages; sur les assemblées agricoles, qu'il serait peut-être utile d'imiter en France; sur quelques bonnes races d'animaux domestiques que le gouvernement s'est hâté de faire venir, et qu'il répand dans nos campagnes.

Les détails où il est entré sur quelques-unes de nos races de chevaux, et sur les moyens employés par le gouvernement pour les propager et les améliorer, établissent d'une manière certaine que si nous ne sommes pas encore au point où nous étions, il y a un demi-siècle, pour la quantité, nous marchons à grands pas au-delà pour les qualités.

M. Huzard fils a aussi fait hommage à l'Académie d'une seconde édition fort augmentée de son *Esquisse de Nosographie vétérinaire;* ouvrage qui ouvre une nouvelle route à l'étude des maladies des animaux, en la débarrassant de cette nomenclature triviale et dégoûtante qui en entravait la marche.

M. Chaptal a publié la troisième édition de ses Mémoires sur la fabrication du sucre de betterave; industrie qui résiste au plus grand danger qu'elle eût à redouter, le rétablissement des communications avec les colonies, et dont la multiplication rapide du livre de M. Chaptal prouve mieux, que toute autre chose, l'utilité réelle. Le public ne se serait pas autant empressé d'acquérir cet ouvrage, si beaucoup d'agriculteurs et de fabricants ne se fussent bien trouvés de suivre les avis importants qu'il renferme.

M. Aubergier, dans un Mémoire sur l'art de cultiver la vigne, de faire le vin et de distiller les eaux-de-vie et l'alcohol, a présenté des vues que l'Académie a jugées intéressantes, bien qu'elles ne soient pas toujours applicables; il paraît avoir établi sur de nombreuses expériences, qu'il existe dans la pellicule du raisin une huile volatile qui communique son âcreté à l'eau-de-vie de marc, quand elle n'est pas fabriquée avec les appareils perfectionnés.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE M. DE BEAUVOIS,

LU A LA SÉANCE PUBLIQUE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, DU 27 MARS 1820.

PAR M. LE BARON CUVIER.

AMBROISE-MARIE-FRANÇOIS-JOSEPH PALISOT, BARON DE BEAUVOIS, Membre de l'Académie des Sciences de l'Institut royal, et de plusieurs autres sociétés savantes, est encore au nombre de ces hommes, dont la vie prouve à quel point l'étude assidue de la nature est une source plus assurée de bonheur particulier; combien elle offre des chances plus probables de se rendre utile au public; combien même, lorsqu'elle conduit à des malheurs, elle donne plus de ressources pour les supporter, que cette carrière orageuse des affaires, où il est si rare de voir des hommes assez forts ou assez favorisés de la fortune, pour ne pas devenir les jouets des événements, ou pour n'avoir jamais à se reprocher des fautes, ou des actes gravement répréhensibles. Botaniste instruit, collecteur heureux, auteur d'ouvrages estimés, il s'est fait sans peine dans les sciences un nom durable; les fatigues auxquelles il s'est livré, pour procurer à l'histoire naturelle quelques richesses de plus, n'ont jamais altéré la paix de son ame. Magistrat, membre d'assemblées politiques, il a été accablé au contraire de persécutions et de souffrances, qui durent souvent lui paraître d'autant plus douloureuses, qu'elles ne lui laissèrent pas toujours la consolation de pouvoir se dire que ses préventions et ses erreurs, ou du moins celles du parti qu'il avait embrassé, n'y eussent pas contribué.

Il était né à Arras, le 28 octobre 1755, d'une famille ancienne qui occupait depuis deux siècles, dans l'Artois, des emplois considérables, et qui avait donné quatre premiers Présidents au Conseil supérieur de cette province. Son père, après avoir été quelque temps conseiller au même Conseil, fut contraint, pour des raisons de fortune, d'exercer la charge de receveur général des domaines et bois, dans les généralités de Picardie, de Flandre et d'Artois, qui était dans sa famille depuis 1685. Notre Académicien, après avoir servi un moment dans les Mousquetaires, se destina à la robe; il s'était fait recevoir avocat, et traitait d'une charge d'avocat du roi au Châtelet, lorsqu'il se vit obligé de changer de projets, par la mort de son frère aîné, qui arriva peu de temps après celle de son père, et qui fit passer sur sa tête la charge de finance dont nous venons de parler.

Cette charge était lucrative, mais ne donnait pas beaucoup de travail au titulaire; et le jeune receveur général avait trop d'activité pour ne pas désirer encore quelque moyen d'occuper ses loisirs. Il en trouva de nombreux et d'agréables aux leçons de M. Lestiboudois, professeur d'histoire naturelle à Lille, homme savant et respectable qui avait le talent d'inspirer le goût de la science à ses auditeurs. Il cultiva avec tant de soin et avec un bonheur si marqué les dispositions de son nouvel élève, qu'elles prirent bientôt le caractère d'une véritable passion. Seul, ou avec son maître, M. de Beauvois ne cessait de recueillir des plantes et des insectes. Déja il avait, pour ainsi dire, épuisé sa province, lorsqu'en 1777, un édit du Roi, provoqué par M. Necker, supprima les charges de receveurs généraux des domaines, et, le rendant entièrement à la vie privée, lui permit de chercher des sources plus abondantes d'instruction.

Il vint s'établir à Paris, et y suivit assidûment les herborisations de M. de Jussieu. En peu de temps, on le compta au nombre des hommes dans lesquels la botanique pouvait placer ses espérances. Dès 1782, l'Académie le nomma son correspondant, et en 1783 et 1786, ses amis ne virent point de difficulté à ce qu'il se présentât comme candidat, pour les places que Duhamel et Guettart avaient laissées vacantes.

C'est dès-lors aussi qu'il annonça en botanique les idées particulières qui ont fait l'objet le plus constant de ses travaux, pendant le reste de sa vie. A cette époque, le système de Linnæus, fondé principalement sur le sexe des plantes, avait donné une grande activité à l'étude des organes de la fructification; et l'on s'occupait surtout avec ardeur de les rechercher dans ces familles rebelles des champignons, des mousses, des fougères, que Linnæus avait nommées *Cryptogames* ou *à noces cachées*, par la raison que l'on ne peut y découvrir avec certitude ni les étamines, ni les pistils. L'opinion de cet homme célèbre, qui avait regardé les urnes des mousses comme leurs anthères, ne prévalait déja plus. En 1781, l'académie de Pétersbourg avait couronné un mémoire d'Hedwig, où les urnes étaient au contraire considérées comme des capsules, et les poussières vertes qu'elles renferment, comme des semences, tandis que les étamines auraient été certains filets déliés cachés dans d'autres parties de ces plantes. La plupart des botanistes paraissaient disposés à adopter les idées nouvelles. En effet, ces poussières vertes, jetées sur la terre par Hedwig, avaient germé, et il semblait ne manquer au système de ce naturaliste que d'être appliqué à quelques genres sur lesquels il n'avait pu encore étendre ses observations. Malgré ces apparences favorables, M. de Beauvois ne fut point satisfait des idées d'Hedwig, ni séduit par l'assentiment presque général qu'elles obtinrent. Les systèmes hétérodoxes de MM. de Necker et Médicus, qui voulaient faire naître les cryptogames par une sorte de génération spontanée, de cristallisation organique, le séduisirent encore bien moins. *Tout être vivant vient d'un œuf*, avait dit son maître Linnæus, d'après Harvey, et quiconque prétendait chercher une autre origine à la vie lui paraissait un blasphémateur : or l'œuf, ajoutait-il, a besoin d'être fécondé ; ainsi non seulement les plantes ont toutes des graines, mais elles ont toutes aussi des étamines, ou au moins du pollen, pour féconder ces graines. Tel était le raisonnement de M. de Beauvois ; et c'est d'après ce raisonnement qu'il dirigeait ses observations, se croyant bien assuré qu'en cherchant avec patience, il découvrirait ce dont il lui semblait avoir d'avance la démonstration. Il crut en effet promptement voir ses espérances se réaliser.

Les premiers cryptogames où il aperçut des organes qu'il jugea mâles et femelles, furent les champignons, et surtout les hydnums, ou ces champignons dont le chapeau est hérissé de pointes en dessous; la base de chaque petite pointe se garnit, à une certaine époque, d'une poussière que M. de Beauvois compare au pollen; les pointes elles-mêmes, qu'il prend pour des stigmates, se recourbent alors pour recevoir cette poussière fécondante; elles se redressent ensuite, se renflent, et l'on découvre enfin dans leur intérieur une autre poussière plus menue, que M. de Beauvois regarde comme la graine. Quelque chose d'analogue se passe dans les agarics ou champignons lamelleux. C'est dans l'intérieur des lamelles que se trouvent les graines; le pollen naît à l'extérieur, et on le recueille aisément en plaçant une glace sous le champignon, à l'instant où son chapiteau se développe. Dans les jeunes clavaires, il y a au sommet un mamelon d'où une poudre fine s'échappe et se répand sur la surface de la plante. Celle-ci est hérissée de petites verrues, dont chacune contient des graines.

Dans les vesses de loup ou lycoperdons, tous les botanistes ont observé une poussière qu'ils ont prise pour la semence; mais comme elle est très-combustible et qu'elle flotte sur l'eau, M. de Beauvois aima mieux la regarder comme un pollen. Il pensa que la semence est contenue dans un réseau plus intérieur, qui a son issue par la même ouverture que le pollen, et c'est, selon lui, au moment où elles sortent ensemble qu'une de ces poussières féconde l'autre. Il a comparé depuis cette fécondation à celle qu'éprouvent les œufs de la grenouille, au moment où ils sont pondus.

Lorsqu'on étudie avec attention la marche de l'esprit dans les hommes qui ont eu des conceptions originales, on aperçoit souvent qu'une première idée qui leur a souri les a conduits ensuite dans toutes leurs recherches, et même dans tous leurs systèmes; partout dans leurs ouvrages, elle se reproduit sous diverses formes, et à défaut d'expériences ou de faits, ils sont ingénieux à appeler des hypothèses à son secours.

C'est ce qui arriva à M. de Beauvois.

Il ne se fut pas plus tôt persuadé que la semence de certains champignons était intérieure et plus menue que leur pollen, et qu'elle pouvait être fécondée, non pas dans l'ovaire, et encore tendre et petite, comme se féconde celle de toutes les autres plantes, mais au moment de la sortie, et lorsqu'elle est déja toute développée, qu'il appliqua sa doctrine aux mousses.

Au milieu de cette poussière verte qui remplit les urnes des mousses, et qu'Hedwig regarde comme la graine, est une espèce de noyau ou de petit axe plus ou moins renflé, nommé par les botanistes la columelle.

Ceux qui en avaient observé l'intérieur n'avaient pu y voir qu'un parenchyme plus ou moins celluleux; M. de Beauvois crut y remarquer de très-petits grains, et aussitôt il pensa que c'était là la véritable semence; la poussière verte qui remplit l'urne ne fut plus à ses yeux que le pollen; les mouvements des cils qui garnissent le bord de l'urne n'eurent pour objet que de comprimer ce pollen contre les semences, afin de les féconder au moment où elles vont s'échapper; et lorsqu'on lui objectait qu'Hedwig avait fait lever des mousses en semant la poussière verte, il répondait qu'apparemment Hedwig avait semé en même temps sans s'en apercevoir cette autre poussière plus menue qui est renfermée dans la columelle.

On sent que pour confirmer une opinion si nouvelle, il aurait fallu non seulement montrer cette poussière de la columelle, mais encore la pouvoir semer séparément de la poussière verte, et il ne paraît pas que M. de Beauvois ait jamais tenté cette dernière expérience.

La même objection a pu être faite à son opinion sur les lycopodes. On observe dans ces cryptogames des capsules très-différentes de celles des mousses, et qui contiennent une poussière inflammable bien connue par l'usage qu'on en fait dans les spectacles : cette poussière, qu'Hedwig a prise aussi pour la semence, parut incontestablement à M. de Beauvois devoir être le pollen ; mais au milieu de cette poussière sont mêlés quelques corps transparents qu'il regarde comme ces espèces de bourgeons ou de bulbes propres à donner de nouvelles plantes. Ce sont eux qui ont germé, selon lui, dans les expériences d'Hedwig : les véritables semences sont des grains plus gros renfermés dans de petites capsules que recèlent les aisselles des feuilles de la partie inférieure de l'épi ; mais on ne voit pas non plus qu'il ait jamais essayé de les faire germer, bien que l'expérience eût été beaucoup plus facile qu'avec celles des mousses.

L'Académie, qui a toujours eu pour principe de ne se rendre qu'à des calculs ou à des expériences positives, ne put donc considérer comme démontrée l'opinion qui lui était soumise par M. de Beauvois ; et bien que M. de Jussieu, dans son *Genera plantarum*, et M. Delamarck, dans le *Dictionnaire de botanique de l'Encyclopédie*, article *Champignon*, en aient quelque temps après publié des extraits, elle ne fit point pour lors une grande sensation parmi les botanistes.

Il est vrai que l'auteur avait quitté la France, et que des idées, qui ne sont pas présentées et défendues par celui qui les a conçues, sont plus sujettes que d'autres à tomber dans l'oubli. La vérité elle-même a besoin de patrons pour se produire avec succès dans le monde, quelque évidente qu'elle puisse être; à plus forte raison des vues dont la preuve est encore aussi incomplète.

M. de Beauvois n'ignorait pas qu'il s'exposait à ce risque lorsqu'il se détermina à voyager; mais sa passion pour s'instruire l'emporta sur sa passion pour la gloire; l'intérêt de ses systèmes, la juste espérance d'entrer bientôt à l'Académie ne lui semblèrent rien auprès de l'honneur d'y entrer avec des titres plus éclatants et plus nombreux.

Il abandonna même ses affaires et sa famille. Ses comptes n'étaient point apurés, sa charge n'était point liquidée; il se reposait de ces détails, ainsi que de la gestion de ses autres biens, sur une jeune femme qu'il laissait en France, et dont l'inexpérience nuisit beaucoup à sa fortune.

C'était la lecture des voyageurs qui lui avait inspiré ce goût subit. La relation de l'Arabie par Niebuhr, et le récit touchant qu'il fait de la mort de Forskahl, l'avaient transporté au point, qu'il résolut de terminer ce que le naturaliste danois n'avait fait que commencer. Il voulait même, après s'être rendu dans la mer Rouge, traverser l'Afrique et revenir par le Sénégal ou par la Guinée; et peut-être se serait-il livré à cette téméraire entreprise, s'il eût été le moins du monde secondé par le gouvernement. Mais le contrôleur-général, M. de Calonne, après l'avoir accueilli une première fois avec faveur, le reçut si froidement la seconde, qu'il se détermina à ne plus rien demander à personne, et à ne plus entreprendre que ce qu'il pourrait exécuter par ses propres moyens.

Une occasion telle qu'il la désirait ne tarda point à se présenter.

Il existe au fond du golfe de Guinée, au sud de la rivière Formose, dont une branche porte aussi le nom de rivière de Benin, un petit royaume allié ou tributaire de celui de Benin, dont les habitants se nomment eux-mêmes Jackeris, et que les Européens appellent Oware ou Awerri, peut-être du nom du Portugais don Juan Alfonso d'Aveiro, à qui l'on en doit la découverte. Vers 1784, un capitaine négrier nommé Landolphe, qui faisait la traite pour la maison Brillantais-Marion de Saint-Malo, était parvenu à inspirer au roi de ce pays le désir de voir s'y former un comptoir français, et, à cet effet, ce prince lui avait confié un de ses sujets nommé Bondakau, qu'il lui avait même donné comme son fils, et qu'il l'avait chargé de faire élever à l'européenne. Landolphe montra quelque temps à Paris ce prétendu prince, vêtu comme l'étaient alors les gens de qualité. On le présenta au roi de France, et il fut introduit dans plusieurs maisons respectables. Sur les espérances que les promesses de ce nègre firent naître, Landolphe obtint une autorisation du gouvernement français, et une compagnie de négociants lui fournit quelques fonds pour former un établissement. Ce capitaine avait fait connaissance avec M. de Beauvois, et par lui avec M. de Jussieu, à qui il demanda un jardinier habile qui pût diriger ses cultures. M. de Jussieu s'occupait d'en chercher un, lorsqu'au bout de quelques jours M. de Beauvois vint lui dire : « Je vous ai trouvé un homme dont je réponds; ce sera moi. »

En effet, son imagination avait été saisie de l'idée que ce pays peu visité jusque-là lui offrirait en abondance les productions nouvelles qu'il brûlait de recueillir, et qu'il n'y serait pas abandonné à lui-même comme dans ceux qu'il avait eu d'abord le projet de parcourir. Il y trouvait de plus l'avantage qu'une fois solidement établi sur la côte d'Afrique, il s'y procurerait des moyens plus assurés de reprendre ses premiers plans, et de traverser cette partie du monde. Du reste on pense bien qu'il n'avait l'intention d'entrer au service de la nouvelle compagnie ni comme jardinier, ni sous aucun autre titre. Loin d'en rien accepter, il fit de ses propres deniers des achats considérables d'instruments, de livres et de meubles, et se munit de provisions de tout genre pour lui et pour les siens. Il emmena avec lui deux de ses domestiques, et il fit même partager son enthousiasme à son beau-frère, au point de le déterminer à le suivre et à se dévouer personnellement à toutes les fatigues et à tous les périls de l'entreprise. Les dangers du climat, que Landolphe ne lui laissa point ignorer, n'eurent pas plus de pouvoir sur lui que toutes les autres raisons qui auraient pu le retenir, et il s'embarqua à Rochefort le 17 juillet 1786, pour un voyage qu'il croyait devoir durer quatre ans, mais que des événements sans nombre prolongèrent bien au-delà de ses calculs.

La petite escadre relâcha deux mois à Lisbonne, huit jours à Chamah, comptoir hollandais sur la côte d'Or, entre le cap des Trois-Pointes et le cap Corse; deux jours à Koto, comptoir danois de la même côte, sur la rivière de Volta; autant à Amokou, comptoir français, et à Juida.

Partout M. de Beauvois faisait déja des récoltes qu'il adressait à son maître, M. de Jussieu, par les vaisseaux qu'il rencontrait.

On arriva enfin aux lieux où il espérait en faire d'infiniment plus riches. Les navires entrèrent le 17 novembre dans la rivière de Formose, et furent accueillis par les habitants d'Oware avec la plus grande cordialité; mais à peine les nouveaux colons furent-ils débarqués, qu'ils s'aperçurent d'une manière bien cruelle qu'il ne suffit pas pour s'établir solidement en Afrique d'être appelés par les rois nègres et bien reçus par leurs sujets.

Tous ces inconvénients, auxquels on songe si peu quand la soif de l'or ou l'ardeur des découvertes entraînent dans des climats lointains, s'accumulèrent sur eux. La chaleur les brûlait le jour; l'humidité froide leur était insupportable la nuit; le sommeil ne pouvait calmer leurs souffrances: couchés sur un sol humide, des rats énormes se jouaient sur leurs corps, et dévoraient leurs provisions; les maringouins les ensanglantaient par leurs piqûres. Les nègres, accoutumés à ces incommodités, n'imaginèrent pas qu'on eût besoin de s'en garantir; à peine donnèrent-ils quelques secours. Le prince Bondakau, sur la protection duquel on avait fondé des espérances si flatteuses, honteux de n'être plus qu'un homme du commun, évitait tant qu'il pouvait ses anciens amis de France. Quand ses vêtements d'Europe furent usés, il reprit toutes ses habitudes; il oublia en peu de temps ce qu'on lui avait enseigné de français. Bientôt les inondations que chaque marée produisait sur le sol de l'établissement, l'odeur empestée de la vase qui encombrait les bords de la rivière, menacèrent de fléaux plus funestes que les premiers. Cette maladie, si cruelle pour les Européens dans la zone torride, et qui les poursuit quelquefois jusque dans leur patrie, la fièvre jaune, ne tarda point à se déclarer. M. de Beauvois vit expirer son beau-frère et les deux hommes qu'il avait amenés. Il nous assure, dans sa relation, que sur trois cents Français partis avec lui, il en périt deux cent cinquante pendant les quinze mois qu'il resta à Oware; lui-même n'échappa à une première atteinte qu'en se faisant reporter sur le vaisseau resté en rade, et qui, transformé en hôpital, était cependant encore plus sain que la terre. Deux autres attaques le réduisirent à un état de langueur déplorable. Toutefois il ne perdit jamais courage; tant que ses forces le lui permirent, tant qu'il put avoir un nègre pour l'accompagner ou pour faire avancer son canot, il parcourut le pays en suivant les différents embranchements de la rivière qui arrose cette espèce de delta, et recueillant tout ce qui s'offrait d'intéressant soit pour l'histoire morale des peuples, soit pour l'histoire naturelle. Il ne vit pas seulement la cour du roi d'Oware, prince déja un peu moins barbare que ceux qui demeurent plus avant dans les terres, mais dont le royaume est peu étendu et les sujets pauvres et peu nombreux. Après avoir fait un voyage à Agaton, premier entrepôt du royaume de Benin, il en fit un second à Benin même, où il séjourna quelque temps, et fut accueilli par le roi. Celui-ci, dont les états ont une cinquantaine de lieues de diamètre, se croit le plus puissant monarque de l'univers. Ses sujets vont plus loin; ils sont convaincus que c'est un être surnaturel. Non-seulement, comme ceux du grand Lama, ils ont l'opinion que leur souverain demeure toujours le même, que son ame transmigre seulement de son corps à celui de son successeur; mais surpassant encore les habitants du Thibet, ils imaginent qu'il ne mange jamais; M. de Beauvois pensa être fort maltraité pour avoir témoigné la curiosité d'assister à un de ses repas. Certainement c'est une des doctrines politiques les plus bizarres qu'aucun législateur ait encore établies, que celle qui rend le maître-d'hôtel du prince dépositaire nécessaire du premier secret de l'état; mais une doctrine plus cruelle, bien qu'elle n'exige pas de secret, c'est celle qui demande sans cesse à ce peuple des sacrifices humains. Ils sont encore très-nombreux au Benin; et dans les fêtes auxquelles M. de Beauvois fut invité, il eut plus d'une fois l'horreur d'en être spectateur.

Après avoir étudié, autant qu'il le put, les mœurs des nègres de l'intérieur, il revint à Oware, et en partit par une autre route pour Bono-Pozzo, dernière place du royaume du côté du désert. Son projet était de s'engager dans le désert même, et de traverser l'Afrique, s'il avait pu seulement trouver un seul homme pour le suivre; mais ses nègres l'abandonnèrent, et il se vit enfin obligé de revenir à l'établissement.

Cependant sa faiblesse augmentait à chaque rechute, et une dernière attaque le réduisit à un tel état, que son ami Landolphe ne vit d'autre moyen de le sauver que de l'embarquer de force sur un vaisseau négrier qui se rendait à Saint-Domingue. Partant presque sans en avoir été prévenu, et sur un navire déja encombré, il ne put emporter avec lui que ses journaux : tout ce qu'il laissait dans les mains de Landolphe fut détruit en 1791, lorsque l'établissement fut pillé par des Anglais, six mois avant la déclaration de guerre; les papiers même qu'il emporta furent brûlés en 1793 dans l'incendie du Cap-Français ; et des fruits de tant de pénibles travaux, il n'a échappé que les parties envoyées directement d'Oware à M. de Jussieu, qui les conservait précieusement, et les remit intactes à son ami après douze ans d'absence.

Tous les dangers ne cessèrent point pour M. de Beauvois quand il eut quitté l'Afrique. Un capitaine inepte et brutal fit durer la traversée cinq mois; d'affreuses calamités accablèrent l'équipage ; on fut obligé de jeter à la mer cent quatre-vingts nègres morts de consomption ou de petite-vérole, sur deux cent cinquante que le vaisseau transportait. M. de Beauvois, traité avec barbarie par le capitaine, qui le croyait un espion des armateurs, fut attaqué du scorbut et d'une éruption de mauvaise nature. Il aurait infailliblement péri sans le boulanger du vaisseau, qui lui donna des soins. Enfin il arriva, le 28 juin 1788, au Cap-Français de Saint-Domingue, dans une si grande faiblesse, qu'un chirurgien, nommé Durand, ne voulut le recevoir chez lui que par charité, et pour ne pas le laisser mourir sans lui procurer au moins les secours de la religion.

La force de son tempérament semblait ne plus le retenir à la vie que pour quelques jours, lorsqu'il eut le bonheur d'apprendre que son oncle, le baron de la Valletière, était commandant du môle St.-Nicolas, et occupait dans le voisinage de cette place une habitation salubre. Il s'y fit transporter : le changement d'air, les soins de l'amitié, le repos le rétablirent peu à peu ; il trouva même tant d'agrément dans ce nouveau séjour, qu'il fit le projet de vendre toutes ses propriétés en France pour en acquérir en Amérique; et n'ayant pu demeurer colon africain, il essaya de devenir colon de

Saint-Domingue. En attendant, il étudiait l'île avec soin, et la parcourait en tous sens avec ardeur. Nous savons, par un officier distingué qui l'accompagnait quelquefois, qu'il découvrit près du môle Saint-Nicolas une espèce nouvelle de sauge, dont on a dès-lors tiré un grand parti pour la médecine. Il ne perdait point pour cela de vue ses idées sur les fructifications des mousses, et nous voyons qu'il adressa de Saint-Domingue au rédacteur du *Journal de Physique,* des mémoires pour les reproduire et pour les défendre.

L'île de Saint-Domingue, bien qu'habitée depuis plus d'un siècle par des Français, était encore assez peu connue pour que M. de Beauvois eût pu y multiplier ses découvertes, et s'y rendre presque aussi utile à la science qu'il l'aurait été en Afrique, si les événements ne lui eussent promptement rendu toute recherche scientifique impossible. Ce n'était point dans des circonstances ordinaires qu'il y était arrivé. Déja en France tous les esprits excités par les discussions du ministère avec la magistrature aspiraient ouvertement vers un autre ordre de choses. L'annonce d'une prochaine convocation des états-généraux transforma en espérance ce qui n'avait été qu'en désir. Les affaires intérieures de la France n'étaient pas les seuls objets qui occupassent les hommes avides de nouveautés. Une société formée en Angleterre, qui s'était procuré en France des affiliés ardents, réclamait avec force l'abolition de la traite. Le bruit s'en était bien vite répandu à Saint-Domingue; on y avait promptement appris que des amis des noirs tenaient un rang considérable parmi les hommes qui cherchaient à établir en France l'égalité civile et la liberté politique; et aux yeux des colons, l'abolition de la traite ne pouvait manquer d'entraîner promptement l'abolition de l'esclavage, ou au moins l'égalité des droits entre les hommes de couleur libres et les blancs. Or, l'idée seule de l'égalité avec un homme de couleur révoltait l'orgueil des blancs plus encore que l'abolition de l'esclavage ne leur semblait compromettre leurs intérêts. Ainsi se forma dans l'esprit des colons cette alliance bizarre d'idées contraires, par laquelle seule on peut expliquer les révolutions de Saint-Domingue : d'une part, opposition à la France et aux agents du roi, qui prenait les couleurs de la démocratie; de l'autre, repoussement dédaigneux et plus qu'aristocratique des demandes les plus naturelles de tous ceux qui conservaient quelque trace de sang mélangé. On ne sait que trop ce qui en résulta : le parti dominant parmi les blancs expulsa ou réduisit à l'impuissance les agents de l'autorité royale, en même temps qu'il fit subir des humiliations sans nombre aux hommes de couleur; ceux-ci, à leur tour, se vengèrent avec la fureur qui appartient à leur sang et au climat; et en définitive, les esclaves des uns et des autres, excités par l'exemple de leurs maîtres et avertis de leur force, détruisirent tout ce qui avait eu quelque prééminence par la couleur, par la fortune ou par la liberté personnelle.

Il semblait que M. de Beauvois, qui n'était allé en Afrique que comme naturaliste et philosophe, qui avait été témoin des souffrances horribles que la traite fait éprouver aux nègres, qui avait lui-même partagé ces souffrances; que M. de Beauvois, qui n'était pas colon, et qui ne possédait point d'esclaves, aurait dû pencher plutôt vers les idées des amis des noirs, ou du moins qu'il n'aurait pas dû se déclarer contre les modestes prétentions des hommes de couleur libres.

Il en fut tout autrement; et c'est par l'histoire de son voyage que l'on peut expliquer cette singularité.

Il avait vu en Afrique les deux tiers de chaque peuplade, réduits à l'esclavage le plus absolu : il avait été témoin de la manière atroce dont les chefs en usent avec ces malheureux, que l'on enterre vivants avec les corps de leurs maîtres, que partout la superstition fait sacrifier en grand nombre, au milieu de tourments horribles ; dont on vend encore la chair dans quelques contrées. Lui-même, dans une fête que donna l'un des ministres du roi de Benin, en avait vu égorger trois; et le roi, peu de temps après, en fit sacrifier quinze. Rempli d'horreur à de tels spectacles, il était naturel qu'il regardât les esclaves que l'on vendait aux chrétiens, comme plus heureux que ceux que l'on gardait dans le pays : et s'il avait songé qu'en Afrique il n'est point d'homme libre qui ne soit exposé à devenir esclave, ou par le sort de la guerre, ou par les jugements si souvent iniques des grands; s'il avait lu la relation que vient de donner M. Bowdich, et avait vu ces misérables auxquels, avant de les offrir en sacrifice, on passe des couteaux au travers des joues et des épaules, et que l'on traîne ainsi, tout sanglants, parmi les flots d'une populace que cet aspect remplit de joie ; s'il avait su qu'à certain jour marqué, et à un signal donné, le roi des Aschantes, pour procurer à ses entreprises la faveur des dieux, fait égorger subitement non seulement tous les esclaves, mais tous les hommes libres que l'on rencontre dans les rues, il aurait sans doute étendu son opinion à tous les habitants.

Il pensait même que la traite, en donnant de la valeur aux hommes, engageait les princes nègres à les épargner, et que sans elle ces horribles cruautés se multiplieraient à l'infini, opinion qui semble confirmée par le propre discours que le roi des Aschantes a tenu à la dernière ambassade que les Anglais lui ont envoyée.

Ainsi, dans ses idées, pour que l'on pût abolir la traite, sans faire aux nègres de l'Afrique plus de mal que de bien, il aurait fallu commencer par les civiliser, par donner de l'emploi au superflu de leur population. Il aurait fallu détruire radicalement chez eux les superstitions qui reprendront un empire plus étendu, aussitôt qu'elles ne seront plus combattues par l'intérêt. On ne taxera donc pas sur ce point M. de Beauvois d'inhumanité, et ceux qui croiront que son humanité était mal entendue, respecteront ses intentions; mais peut-être n'aura-t-on pas la même indulgence pour l'opiniâtreté avec laquelle il s'efforça de faire refuser les droits politiques dans les colonies aux nègres libres, et même aux hommes libres de couleur mêlée.

Nous devons l'avouer, il partagea contre eux les préventions orgueilleuses des blancs; il agit, il écrivit pour soutenir ces préventions. C'est que, d'après ce qu'il avait observé sur le physique et sur le moral des nègres, il n'avait jamais pu se persuader que leur race appartînt à la même espèce que nous, et qu'ils fussent capables d'arriver au même degré de civilisation. Non seulement il leur voyait une autre peau, d'autres cheveux, une autre forme de tête, de dents, un tempérament différent. Sur le sol le plus fertile, avec un naturel doux, des dispositions à l'hospitalité, de la propension pour les plaisirs de famille, en un mot, au milieu de tous les moyens d'arriver à l'état social le plus heureux, il les avait trouvés livrés sans exception aux superstitions les plus absurdes, les plus cruelles, à la sensualité la plus brutale. A aucune époque, l'histoire ne les lui avait montrés autrement.

La religion, cette mère de la civilisation, était restée sans action sur eux. Il avait vu dans la ville d'Oware la croix que les missionnaires portugais y ont plantée autrefois, adorée encore, mais en qualité de fétiche; l'autel, les bénitiers qu'ils y ont laissés, servir à des opérations de magie, et, comme il le dit lui-même, le temple du vrai Dieu consacré au culte du démon. Les mahométans, qui avaient moins de répugnances à vaincre pour convertir les nègres, n'ont pas eu plus de succès que les chrétiens; et toute l'influence de leurs prêtres se borne à vendre chèrement des passages du Coran, écrits sur des morceaux de papier que l'on emploie comme amulettes. M. de Beauvois se persuadait donc que cet état humiliant et dégradé tient à la nature même de l'espèce; que ce caractère est indélébile, et qu'il doit s'en conserver des traces dans tous les produits où il reste quelques traces du mélange du sang.

Il oubliait trop combien tous les hommes, et les blancs comme les autres, peuvent être profondément modifiés par les préjugés dont ils sont imbus dans l'enfance. Les Égyptiens, que personne n'accusera d'avoir manqué de dispositions intellectuelles, ont conservé jusqu'à Constantin le culte des animaux; le prince le plus célébré par les poëtes, à l'époque la plus brillante des lettres, l'empereur Auguste a fait sacrifier des hommes aux mânes de son père adoptif; il a refusé deux fois des fêtes à Neptune, pour le punir, disait-il, d'avoir deux fois fait périr sa flotte. Qui oserait, après cela, faire des reproches au roi des Aschantes ou à celui de Benin, et croire que leur ignorance ou leur cruauté tient à leur organisation? Enfin, quand il serait vrai que les nègres appartinssent à une autre espèce que nous, ne suffit-il pas qu'ils soient raisonnables et sensibles, pour avoir le droit d'être traités comme des hommes? Des nations éclairées ont porté des lois contre ceux qui exercent des cruautés envers des animaux; et lorsqu'il s'agit d'êtres qui parlent, qui aiment, qui pleurent comme nous, est-il à propos de disputer sur leur origine et sur leur espèce? D'ailleurs, c'est surtout pour l'intérêt des blancs, pour leur intérêt moral, qu'il est nécessaire d'affranchir les noirs; car le plus grand mal de l'esclavage est peut-être la corruption qu'il produit dans les maîtres.

Quoi qu'il en soit, on comprend aisément dans quel parti dut se jeter un homme arrivé à Saint-Domingue avec de telles idées. Ce fut celui qui se nommait lui-même le parti patriote, et qu'on appelle communément le parti de Saint-Marc, d'après le lieu où se réunit la première assemblée générale dans laquelle il domina.

M. de Beauvois n'était pas de cette première assemblée; mais il avait été élu à l'assemblée provinciale du Nord, qui siégeait au Cap-Français, et il y soutint toutes les mesures de l'assemblée de Saint-Marc. Dès le mois de janvier 1790, cette assemblée du Nord ayant rétabli de son autorité privée le conseil supérieur du Cap, que le roi avait supprimé quelques années auparavant, elle y avait appelé M. de Beauvois, à qui sa réception d'avocat donnait un titre à cet honneur : honneur cruel; car il se vit contraint par là, en mars 1791, d'être un des juges du malheureux Vincent Ogé, mulâtre qui fut condamné avec plusieurs de ses partisans à un supplice dont le nom seul fait frémir aujourd'hui, pour avoir essayé de faire exécuter, par la force des armes, les lois que l'assemblée Constituante avait rendues en faveur de sa caste.

Le parti de l'assemblée de Saint-Marc, continuant à dominer parmi les colons blancs, M. de Beauvois fut nommé à la deuxième assemblée coloniale, qui se réunit au mois d'août 1791, époque désastreuse pour Saint-Domingue, où les hommes de couleur libres commencèrent à s'assembler dans les provinces de l'ouest, afin de conquérir par la force les droits civils que les blancs persistaient à leur refuser, et où, presque en même temps, les esclaves noirs s'insurgèrent dans la province du nord, et mirent tout à feu et à sang dans la plaine du Cap. Ce dernier mouvement était le plus terrible, celui qui exigeait les mesures les plus promptes. M. de Beauvois s'arma, et commanda plusieurs détachements envoyés contre les nègres; mais le nombre de ces derniers suppléant à leur ignorance, ils faisaient sans cesse des progrès. Il fallut bientôt demander des secours, non pas à la France, qui était trop éloignée, et de qui les hommes de Saint-Marc attendaient peu de chose, mais aux colonies européennes les plus voisines, sans distinction de nation, car la révolte des esclaves les menaçait toutes. A plusieurs reprises, on envoya des députations à la Martinique, dans la partie espagnole de Saint-Domingue, à la Jamaïque et aux États-Unis.

Au mois d'octobre 1791, M. de Beauvois fut dépêché à Philadelphie avec un négociant du Cap nommé Payan, afin de solliciter le zèle du ministre de France M. de Ternan; il y résida pendant près de deux ans, mettant la plus grande ardeur à procurer des fonds et des vivres à la ville du Cap, que la guerre avec les nègres réduisit souvent à un état voisin de la famine.

Mais, dans l'intervalle, la révolution avait suivi sa marche inexorable. Les idées qui l'emportaient en France, ne laissaient plus espérer que les assemblées législatives transigeassent avec les prétentions des blancs. Le mécontentement de ceux-ci augmentait sans cesse. Des commissaires envoyés de France, les trop fameux Polverel et Santhonax, mal accueillis par eux, s'appuyèrent sur les mulâtres. La discorde entre les castes augmenta partout; elle éclata en diverses occasions par des combats sanglants. Enfin, après plusieurs mois de désordre, le commandant des troupes, Galbaud, gagné par le parti de Saint-Marc, s'étant prononcé contre les commissaires, fut mis, par leur ordre, aux arrêts sur la flotte. Tout prisonnier qu'il était, il réussit à insurger les équipages; il fit avec eux une descente dans la ville du Cap, s'empara des forts, et mit les commissaires en fuite. Les mulâtres, pour les secourir, soulevèrent les esclaves. Galbaud à son tour, avec ses officiers, se sauva sur les vaisseaux. Les matelots et les nègres, également sans conducteurs, se livrèrent à l'envi au pillage; et au milieu de cette confusion, le 21 juin 1793, la ville du Cap devint la proie d'un horrible incendie.

M. de Beauvois, que les commissaires avaient rappelé de sa mission, arriva des États-Unis le troisième jour après cet évènement.

Une épaisse fumée couvrait encore la ville. Il la traversa au milieu des ruines et des cadavres, et, ce qui lui parut encore plus affreux, au milieu de bandes d'esclaves des deux sexes, livrés à toutes les fureurs de l'ivresse et de la débauche. C'est ainsi qu'il parvint jusqu'aux restes enflammés de la demeure qu'il avait occupée, et n'y trouva plus que les cendres de ces collections, de ces ouvrages, pour lesquels il avait consumé tant d'années et enduré tant de souffrances.

Mais l'état où il retrouvait ses propriétés, et son pays adoptif, ne fut pas la dernière de ses misères.

Les commissaires, rentrés en triomphe dans la ville à la tête des hommes de couleur, firent arrêter tous les blancs qui avaient été membres des autorités; les magistrats du conseil supérieur, objets plus particuliers de la vengeance des mulâtres, à cause du jugement qu'ils avaient prononcé contre Ogé, furent mis au cachot. M. de Beauvois, l'un d'eux, fut enfermé pendant plusieurs jours avec le doyen du conseil, vieillard de quatre-vingts ans, dans un souterrain humide où les rats et les blattes les dévoraient. Sans cesse menacé du dernier supplice, il fut assez heureux pour qu'une mulâtresse, qui avait appartenu à son oncle, obtînt pour lui de n'être que déporté de la colonie; mais il lui fut fait défense de reparaître, si ce n'est quatre ans après la paix générale. Il se hâte de fuir, comptant encore retrouver sur son vaisseau les effets qu'il avait apportés des États-Unis : vain espoir; le vaisseau était parti pour le Port-au-Prince, et en route il avait été pris par des corsaires anglais : enfin, pour comble d'infortune, le navire sur lequel on le déportait fut pris lui-même par un autre corsaire anglais qui dépouilla les déportés de tout ce qui leur restait. Il ne laissa à M. de Beauvois qu'une petite malle, à l'ouverture de laquelle il aperçut heureusement un diplôme de franc-maçon : c'est avec cette petite malle et dix francs en monnaie que M. de Beauvois revint à Philadelphie.

Les ministres français de cette époque se gardèrent bien d'accueillir un déporté de Saint-Domingue. Il ne put recevoir aucun secours de France où on l'avait inscrit sur la liste des émigrés et séquestré ses biens. Son unique ressource dans ce pays où quelques semaines auparavant il avait été revêtu d'une sorte de caractère diplomatique, fut de se louer comme musicien à un homme qui donnait à Philadelphie un spectacle d'équitation et de danseurs de corde. Encore, dit-il dans ses notes, si les spectateurs se fussent connus en musique ! mais lorsqu'on leur donnait de belles symphonies d'Haydn, la populace du paradis accablait les musiciens de pommes cuites et d'ordures pour avoir Malbroug ou d'autres airs pareils. Mais dans toutes les situations les sciences consolent; partout où il y a des hommes éclairés, elles soutiennent. Un médecin quaker, instruit en histoire naturelle, le docteur Wistar, accueillit le malheureux naturaliste français avec la charité si vive dans sa religion en même temps qu'avec l'intérêt qu'inspiraient tant de souffrances endurées pour les sciences. M. Peale, peintre, qui avait établi à Philadelphie un cabinet de curiosités, fut bien aise de le faire mettre en ordre par un naturaliste européen; et à peine M. de Beauvois eut-il trouvé ainsi à réunir quelques chétives économies, qu'il recommença à faire des courses et à recueillir les productions de ce troisième climat avec autant de courage que si déja deux fois il n'avait vu détruire les résultats de ses travaux.

Qui n'aurait été touché d'une telle résignation et d'une ardeur si inaltérable? Et pouvait-on, avec un tel homme, songer au parti qu'il avait suivi?

Le nouveau ministre de France, M. Adet, ne le pensa point. Savant distingué lui-même, dans un savant courageux, dans un ancien correspondant de l'Académie des Sciences, il ne vit qu'un Français; et, en attendant que sa patrie lui rendit justice, il lui prodigua les secours, et favorisa tous ses plans.

Ses premières excursions se portèrent dans les provinces du sud-ouest, parmi les Criks et les Cherokis, principalement dans la vue d'y faire des recherches sur le commerce des pelleteries. Il retrouvait là des sauvages plus pauvres, plus grossiers peut-être que les nègres, mais dont les superstitions ne sont pas aussi féroces. Ils ne sacrifient point leurs semblables, mais ils exercent encore la justice du talion; un meurtre ne peut s'expier que par un meurtre; et, à défaut du premier auteur du crime, il faut qu'un de ses parents subisse la mort. Avec les blancs, ils ne regardent pas même à la généalogie, et tous sont à leurs yeux de la même famille.

M. de Beauvois arriva dans une de leurs bourgades au moment où l'un des leurs venait d'être tué par un colon; et il allait payer pour tous les hommes de sa couleur, si son interprète n'eût réussi à leur faire entendre que, venu de France, il n'appartenait pas à la famille des Etats-Unis. Ils le traitèrent alors avec amitié; mais leur amitié pensa lui faire autant de mal que leur vengeance. Ils voulurent lui faire prendre, dans un accès de fièvre, les remèdes dont ils se servent en pareil cas; et l'effet en fut si violent, qu'il devint presque victime de sa docilité.

Quelques familles françaises, venues originairement de la Louisiane, sont comme perdues dans ces contrées éloignées des côtes. M. de Beauvois y découvrit des protestants, qui avaient quitté la France à l'époque de la révocation de l'édit de Nantes, et qui ont presque adopté les mœurs des sauvages. Il croyait qu'on aurait aisément renoué avec eux des liaisons qui auraient pu nous rendre le commerce des pelleteries.

Devenu en Amérique vraiment zoologiste, il ne se contenta pas d'observer les animaux à fourrure. Les serpents à sonnette, ces reptiles auxquels on avait attribué des propriétés plus extraordinaires encore que leur poison n'est terrible, furent pour lui un objet particulier d'observations. Il fut témoin de ce fait, que les serpents femelles, au moment du danger, donnent une retraite à leurs petits dans leur bouche.

Ses collections dans tous les genres furent très-riches; il ne négligea pas même de rassembler des os fossiles, et c'est à lui qu'on doit la connaissance des dents du mégalonix de M. Jefferson, connaissance qui a complété celle de cet animal perdu.

Mais, comme si une fatalité inexorable l'avait poursuivi, tous ses trésors embarqués sur un parlementaire qui reportait à Halifax des prisonniers anglais, et qui échoua près du port, furent pillés ou engloutis dans les flots.

C'est au milieu du chagrin que lui causait cette dernière perte, qu'il apprit enfin que le gouvernement de sa patrie s'était adouci pour lui, et que la France lui était rouverte. L'Institut, qui venait de se former, avait réclamé pour un homme qui lui appartenait en quelque sorte, et sa demande avait été écoutée. Empressé de profiter de cet acte de justice, M. de Beauvois renonça à un voyage qu'il était au moment d'entreprendre chez les Akansas. Se hâtant d'emporter le peu qui lui restait de ses collections, il débarqua à Bordeaux au mois d'août 1798. Ainsi se terminèrent douze années de voyages, et, on peut le dire, de malheurs; car aucune de ces douze années ne s'était écoulée sans qu'il courût de grands dangers, sans qu'il fît de grandes pertes, sans qu'il éprouvât des chagrins plus cuisants peut-être que les dangers et les pertes.

On doit bien croire que d'après ses aventures de Saint-Domingue, depuis long-temps il n'était plus tenté de prendre part aux affaires publiques. Recueillant les débris de sa fortune et ceux de ses collections, consacrant à ses ouvrages ce qui lui restait de vie, il a vu encore se passer sous ses yeux des révolutions plus grandes et aussi sanglantes, quoique moins souillées de crimes, et il a eu sans doute plus d'une occasion de bénir les infortunes qui l'avaient rendu tout entier aux sciences. Elles ont été, en effet, en France, depuis son rétour, sa seule occupation.

L'herbier et les insectes qu'il avait adressés d'Oware à M. de Jussieu en 1788 ont suppléé en partie aux collections qu'il avait perdues, et servi de base à sa Flore d'Oware et de Benin (1), et à la meilleure partie de ses insectes recueillis en Afrique et en Amérique (2).

Grace à la protection d'un gouvernement éclairé, ces deux ouvrages sont exécutés avec magnificence; ils font connaître aux naturalistes des espèces remarquables par leur beauté, par leur singularité ou par leur utilité. S'il ne s'y en trouve pas un plus grand nombre, on doit se souvenir qu'il ne restait à l'auteur que les débris échappés à ses malheureuses aventures.

---

(1) Flore d'Oware et de Benin en Afrique. Paris, 1804—1820. Dix-neuf livraisons *in-fol.*

(2) Insectes recueillis en Afrique et en Amérique, dans les royaumes d'Oware

Deux autres ouvrages, le Prodrome d'Æthéogamie (1) et l'Essai d'Agrostographie (2), ont montré que M. de Beauvois pouvait s'élever aussi à des considérations plus générales, et qu'aucune des questions les plus difficiles de la science des végétaux ne lui était étrangère.

Dans le premier, où il classa les mousses et les lycopodes, il a eu le mérite de ne point faire entrer dans les bases de sa méthode ses idées particulières sur la fructification de ces cryptogames, bien qu'il crût ces idées assez démontrées pour l'autoriser à changer le nom de Cryptogamie ou noces cachées, en celui d'Æthéogamie ou noces extraordinaires

Dans le second, il a décrit et représenté avec plus de précision qu'aucun de ses prédécesseurs les organes déliés qui composent la fleur des gramens, et il en a tiré un parti utile pour établir de nouveaux genres dans cette famille compliquée.

Mais il s'en faut de beaucoup que ses écrits imprimés soient les seuls qu'il destinât au public. Nous avons vu dans ses papiers des traités fort étendus sur diverses branches de l'histoire des animaux et des plantes, en grande partie terminés. Il a rédigé à peu près en entier son voyage en Afrique, et commencé à écrire celui des États-Unis. Il s'occupait de la

---

et de Benin, à Saint-Domingue et dans les Etats-Unis, pendant les années 1785 — 1797. Paris, 1805 — 1820. Douze livraisons *in-fol.*

(1) Prodrome des cinquième et sixième familles de l'Æthéogamie, les Mousses, les Lycopodes. Paris, 1805, *in*-8°.

(2) Essai d'une nouvelle Agrostographie, ou nouveaux genres de Graminée, avec figures représentant les caractères de tous les genres. Paris, Fain, 1812, *in*-8° et *in*-4°.

physiologie végétale, et plusieurs fois il a communiqué à l'Académie des observations en ce genre, dont nous avons rendu compte dans les analyses annuelles. Ce qui lui restait de ses collections, après toutes ses pertes, avait encore de l'importance. En un mot, rien ne lui manquait pour s'occuper utilement pour lui et pour le public pendant une longue vie, si la nature la lui avait accordée, et rien ne semblait faire craindre le contraire : sa santé était égale, sa vie réglée, ses habitudes simples et modestes ; il mettait de la tempérance même dans ses études. Toutes ces apparences ont été trompeuses ; le changement subit de température arrivé au commencement de cette année, lui occasionna une inflammation de poitrine qui l'a emporté en cinq jours, malgré tous les secours de l'art. Il est décédé le 21 janvier 1820, ne laissant de ses deux mariages aucune postérité.

Sa place à l'Institut a été donnée à M. Dupetit-Thouars, qui y était en quelque sorte appelé par la similitude de ses travaux et par ses grands voyages.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE

Sur les atmosphères liquides, et leur influence sur l'action mutuelle des molécules solides qu'elles enveloppent;

Par M. GIRARD.

Lu à l'Académie, les 5, 12 et 19 avril 1819.

SECTION PREMIÈRE.

DU MOUVEMENT DES MOLÉCULES SOLIDES DANS LES FLUIDES QUI MOUILLENT LEUR SURFACE.

Les expériences dont j'ai eu l'honneur de rendre compte à l'Académie, sur l'écoulement de divers liquides par des tubes capillaires de cuivre et de verre, démontrent qu'un liquide quelconque, qui a la faculté de mouiller la surface d'une substance solide, y reste adhérent sur une épaisseur variable, tout-à-la-fois, suivant la nature des deux substances en contact, et suivant le degré de température auquel elles sont élevées.

Si donc on suppose un corps solide plongé dans un liquide susceptible de le mouiller, la couche liquide qui adhérera à la surface du solide, formera autour de cette surface une espèce d'atmosphère qui, dans le mouvement du corps à travers le fluide, sera entraînée avec ce corps, et modifiera l'expression des forces en vertu desquelles le mouvement est produit.

Si, par exemple, une sphère solide d'un rayon r et d'une densité p est plongée dans un fluide d'une densité moindre p', et que l'on désigne par R le rayon de la sphère augmenté de l'épaisseur de la couche fluide qui adhère à sa surface, le rapport de la circonférence au diamètre étant d'ailleurs représenté par π, et la gravité terrestre par g; le moment ou l'effort de la gravité sur la sphère solide et la couche fluide qui l'enveloppe, pour les faire descendre à travers la masse liquide, aura pour expression, comme il est aisé de s'en assurer,

$$\frac{4\pi g}{3}\left(r^3 p + (R^3 - r^3)\, p' - R^3 p'\right) = \frac{4\pi g}{3}\left(r^3\,(p - p')\right);$$

d'où l'on voit que cet effort, précisément égal au poids de la sphère solide dans le liquide qui la submerge, est absolument indépendant de l'atmosphère liquide dont elle est enveloppée, et qui lui est adhérente; de sorte que le plus ou moins d'épaisseur de cette atmosphère n'exerce aucune influence sur les résultats accusés par la balance hydrostatique.

Mais si, au lieu d'être tenu en équilibre par un contrepoids suffisant, ce corps est abandonné dans le liquide, le moment de la force accélératrice dont nous venons de donner l'expression, se trouvera, à chaque instant du mouvement, diminué par l'effet d'une force retardatrice, laquelle est fonction d'une ou de plusieurs puissances successives de la vitesse et de la surface de la sphère formée du noyau solide et de la couche fluide qui lui est adhérente. Pour poser l'équation du mouvement de ce corps dans le fluide qu'il traverse, il faut donc déterminer préalablement le moment de la force retardatrice dont il s'agit.

Or, il résulte de ce que nous avons dit dans nos précédents Mémoires, qu'en nommant u la vitesse du corps en un instant quelconque, et A, B, C, D, etc., des coëfficients à déterminer par l'expérience, le moment ou l'effort de cette force retardatrice sera généralement exprimé par

$$4\pi R^2 (Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{etc.});$$

et l'on aura, pour l'équation différentielle du mouvement du corps et de son atmosphère,

$$\frac{4\pi g}{3}\left(r^3(p-p')\right) - 4\pi R^2 (Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{etc.})$$
$$= \frac{4\pi}{3}\left(r^3 p + (R^3 - r^3)p'\right)\frac{du}{dt}.$$

Lorsque la vitesse du mobile est parvenue à son *maximum*, on a $du = 0$; et il reste, après avoir divisé par $4\pi dt$:

$$\frac{gr^3}{3}(p-p') - R^2 (Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{etc.}) = 0;$$

équation qui exprime la condition de l'uniformité du mouvement, puisqu'elle se réduit à indiquer que les moments des forces accélératrice et retardatrice de la sphère sont égaux entre eux.

Il nous suffira, dans ce Mémoire, de considérer le cas le plus simple de ce mouvement uniforme; celui où, la vitesse u étant très-petite, les puissances de cette vitesse supérieures à la première peuvent être négligées sans erreur sensible, l'équation précédente devient alors :

$$\frac{g r^3}{3}(p - p') - R^2 A u = 0.$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{g r^3 (p - p')}{3 R^2 A},$$

et l'on voit que la vitesse u est, 1° en raison directe, composée du volume de la sphère solide qui en est animée, et de la différence de sa densité spécifique à celle du fluide où elle se meut;

2° En raison inverse, composée de la surface atmosphérique dont la sphère solide est recouverte, et du coëfficient A qui représente l'adhérence des molécules fluides entre elles.

Ainsi un même corps descendra avec la même vitesse à travers des liquides de densités inégales, pourvu que le produit $R^2 A$ de la surface atmosphérique de ce corps par l'adhérence des molécules liquides, demeure exactement proportionnel au volume de la sphère solide, multiplié par la différence des densités de ce corps et du milieu qu'il traverse; et il descendra plus rapidement dans des milieux plus denses que dans des milieux d'une densité moindre, si le dénominateur $R^2 A$ de la fraction qui représente sa vitesse s'accroît dans un plus grand rapport que ne diminue la différence des densités $p - p'$, l'un des facteurs du numérateur de cette fraction.

Si l'on appelle e l'épaisseur de la couche liquide qui forme l'atmosphère du corps solide submergé, on aura, en substituant à R sa valeur $(r + e)$,

$$u = \frac{g r^3 (p - p')}{3.(r^2 + 2 e r + e^2) A}.$$

Si de plus l'on suppose l'épaisseur de l'atmosphère liquide tellement petite, par rapport au rayon de la sphère solide, que tous les termes dans lesquels cette épaisseur entre comme facteur puissent être négligés, l'expression précédente de la vîtesse se rédaira à celle-ci :

$$u = \frac{g r . (p - p')}{3 A},$$

qui ne dépend plus, comme on voit, que du rayon de la sphère solide et du rapport entre la différence des densités spécifiques p et p' et l'adhérence A des molecules fluides. Les atmosphères liquides adhérentes à la surface d'un solide quelconque qui se meut dans un liquide susceptible de le mouiller, ne peuvent donc exercer d'influence sur les lois de ce mouvement qu'autant que l'épaisseur de ces atmosphères est une quantité du même ordre que les dimensions linéaires de ce corps; et, comme l'epaisseur de ces atmosphères est en général très-petite, et que même elle diminue à mesure que s'atténuent les dimensions lineaires des corps qu'elles environnent, il s'ensuit que leur influence ne peut se manifester à nos sens, qu'autant que les masses solides qui leur servent de noyau diminuent dans un plus grand rapport, et sont, en quelque sorte, amenées à l'etat moleculaire.

Tel est l'énoncé succinct de la théorie que j'ai entrepris de vérifier par les expériences dont je vais présenter les résultats.

Comme il s'agissait sur-tout de constater l'existence des atmosphères liquides qui restent adhérentes aux molécules solides qu'elles mouillent, et que les couches d'eau et d'alcohol qui adhèrent aux surfaces que ces deux liquides sont susceptibles de mouiller, ont des épaisseurs très-différentes, j'ai pensé qu'ils étaient plus propres que tous autres à rendre sensibles les phénomènes que je me proposais d'observer. Ainsi ce n'est que dans l'eau et l'alcohol que nos expériences ont été faites jusqu'à-présent.

Quant aux molécules solides qui y ont été submergées, elles provenaient de la trituration sous l'eau d'un morceau de pâte préparée à Sèvres pour la fabrication de la porcelaine.

La pesanteur spécifique de ce mélange de terres a été trouvée de 2,47457, celle de l'eau étant 1 à zéro de température.

§ I.er

Expériences et observations sur différents mélanges d'argile et d'eau.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

J'ai mêlé $\frac{2}{5}$ de centimètre cube de cette terre réduite en poudre impalpable, avec 3 décilitres d'eau, dans une éprouvette ou vase cylindrique de verre de 3 centimètres de diamètre. Le volume des molécules solides disséminées dans ce liquide était, par conséquent, au volume total qu'il occupait, dans le rapport de 1 à 750.

Après avoir agité le mélange, il a présenté l'aspect d'une liqueur laiteuse uniformément opaque sur toute la hauteur du vase cylindrique, qui était de 32 centimètres environ. En laissant reposer ce mélange, les molécules terreuses qui y étaient suspendues se sont précipitées successivement, selon leurs différents degrés de ténuité. Pendant cette précipitation des molécules les plus pesantes, l'opacité de la liqueur qui diminuait de plus en plus, paraissait être au même instant également intense depuis sa surface jusqu'au fond du vase. On a remarqué ensuite que la partie supérieure du liquide s'éclaircissait plus promptement que sa partie inférieure; cependant, après sept heures de repos, il était encore sensiblement trouble dans toute sa hauteur. Le fond du vase était alors occupé par un dépôt de molécules argilleuses de 3 millimètres d'épaisseur, qui représentaient, à-très-peu-près, les $\frac{4}{15}$ de centimètre cube que nous avions suspendus dans les 3 décilitres d'eau.

SECONDE EXPÉRIENCE.

Après cette première épreuve, dont le résultat pouvait être annoncé d'avance, j'ai voulu voir comment se précipitaient les molécules argilleuses suspendues dans l'eau quand elles s'y trouvaient en plus grande proportion, c'est-à-dire plus rapprochées les unes des autres : en conséquence, j'ai mélangé 12^{cent},50 cubes d'argile à porcelaine réduite à l'état pulvérulent, comme dans l'expérience précédente, avec 187^{cent},50 cubes d'eau, de manière que le mélange formait un volume total de 2 décilitres, dont les molécules argilleuses occupaient la 16^e partie.

La température de ce mélange était à 18 degrés du thermomètre centigrade : l'ayant versé dans une éprouvette cylindrique de 41 millimètres de diamètre, où il occupait une hauteur de $0^m,1525$, il y fut agité pendant à-peu-près une minute, afin de le rendre homogène dans toutes ses parties; laissant ensuite reposer ce mélange qui se présentait sous l'apparence d'une liqueur laiteuse, on s'aperçut, presque aussitôt après, qu'il se divisait en deux parties séparées l'une de l'autre par un plan horizontal, comme deux liqueurs de pesanteurs spécifiques différentes.

La partie supérieure était de l'eau pure parfaitement claire, tandis que la partie inférieure, qui devenait de plus en plus opaque et d'une blancheur plus intense, s'affaissait sur elle-même, suivant une certaine loi, laissant toujours au-dessus d'elle un liquide transparent.

Pour mesurer avec précision les quantités successives d'abaissement du dépôt argilleux, et en déterminer la loi par l'observation, l'éprouvette cylindrique fut recouverte d'un disque de verre, au-dessous duquel on mastiqua, perpendiculairement à sa surface, un double-décimètre gradué, lequel, s'appliquant contre la paroi extérieure du vase, faisait connaître de combien s'affaissait la surface du dépôt dans des intervalles de temps donnés.

Nous avons construit la courbe qui représente la loi de cet affaissement, en prenant pour abscisses les temps écoulés depuis l'origine des observations, et pour ordonnées les hauteurs du dépôt dans le vase, correspondantes à chacune d'elles. Cette courbe est parfaitement régulière; ce qui prouve tout-à-la-fois la continuité de la loi qu'elle représente, et l'exactitude avec laquelle les observations ont été faites. Elles ont été répétées de quinze minutes en quinze minutes, et sont consignées dans le tableau nº I.

Il est divisé en cinq colonnes : la première indique le numéro de l'observation ; la seconde indique le temps écoulé depuis le commencement de l'expérience ; la troisième, le nombre de millimètres comptés sur la règle graduée, depuis le disque de verre qui recouvre le vase jusqu'à la surface mobile du dépôt ; la quatrième montre les différences de son abaissement d'une observation à l'autre ; enfin la cinquième indique les hauteurs qu'il occupe dans l'éprouvette à chaque observation.

TABLEAU nº I.

Temperature du mélange, 18 degrés centigr
Diamètre de l'éprouvette, $0^{m},04$
Surface transversale de l'eprouvette, $13^{centim.},115$
Volume d'eau, $187^{cent},50$, cubes.
Volume d'argile, $12^{cent},50$, cubes.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'eau	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la precedente	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase
	minutes	mm	mm	mm
1	0	0,036	"	0,1525
2	15	0,065	0,029	0,1235
3	30	0,099	0,034	0,0895
4	45	0,115	0,016	0,0755
5	60	0,119	0,004	0,0695
6	75	0,122	0,003	0,0665
7	90	0,124	0,002	0,0645
8	105	0,1255	0,0015	0,063
9	120	0,127	0,0015	0,0615
10	315	0,138	0,011	0,0505
11	1095	0,146	0,008	0,04[illegible]

On voit, en jetant les yeux sur le tableau n° I, que, depuis la première observation jusqu'à la troisième, l'affaissement du dépôt argilleux s'accélère; il est, pendant cette première demi-heure, de 63 millimètres.

Il se retarde ensuite de telle sorte, que, pendant la seconde demi-heure, il n'est plus que de 20 millimètres, et pendant la troisième, de 5 seulement.

L'intervalle de la dixième à la onzième et dernière est de onze heures; et, pendant ce temps, l'affaissement du dépôt n'a été que de 8 millimètres. Au moment de cette dernière observation, le dépôt n'occupait plus dans l'éprouvette que 42 millim. $\frac{5}{10}$ de hauteur, au lieu de $152^{m},5$ qu'il occupait au commencement de l'expérience. Ainsi les $12^{cent.},50$ cub. d'argile tenaient la place de $55^{cent.},738$, et le volume total de fluide retenu par son adhérence aux molécules solides dans l'intervalle qu'elles laissaient entre elles était, au volume total de ces molécules, comme

$$55^{cent},738 - 12^{cent},500 = 43^{cent},238 : 12^{cent.},500,$$

ou comme 3,459 : 1, à-très-peu-près.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai divisé en deux parties égales le mélange d'eau et d'argile sur lequel ont été faites les observations précédentes; chacune de ces portions du mélange était, par conséquent, d'un décilitre, et contenait 6 cent. cubes $\frac{25}{100}$ de molécules solides, c'est-à-dire qu'elles occupaient un seizième du volume total.

Ce décilitre de mélange a été versé dans un tube de verre bien cylindrique, de 1 centim. $\frac{48}{100}$ de diamètre. Il en a rempli une hauteur de 58,0 centimètres.

La liqueur ayant été agitée dans le tube, afin d'y répandre le plus uniformément possible les molécules solides, on a fixé ce tube sur une planche verticale qui portait une échelle graduée en millimètres, au moyen de laquelle on pouvait, à l'aide d'une loupe, observer avec la plus grande précision les abaissements successifs de la surface du dépôt.

La température du mélange était à 10 degrés du thermomètre centigrade.

La séparation de l'eau claire et de la liqueur opaque s'est opérée sur-le-champ d'une manière tranchée; les observations de l'abaissement du dépôt, répétées de quinze minutes en quinze minutes, sont consignées dans le tableau n° II, dont les cinq colonnes portent les mêmes titres que celles du tableau précédent.

TABLEAU n° II.

Température du mélange, 10 degrés centigr.
Diamètre du tube, 0,0148.
Surface de la section transversale du tube, $1^{cent},7258$.
Volume d'eau, $93^{cent},75$.
Volume d'argile, $6^{cent},25$.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'eau.	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente.	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase.
	minutes.	m	m	m
1	0	0,080	0	0,580
2	15	0,103	0,023	0,557
3	30	0,127	0,024	0,533

Suite du Tableau n° II.

Numéros des observations	Temps écoulé depuis la première observation.	Abaissement de la surface du dépôt dans l'eau	Différence d'une observation à l'autre	Hauteur du dépôt
4	45	0,151	0,024	0,509
5	60	0,174	0,023	0,486
6	75	0,197	0,023	0,463
7	90	0,221	0,024	0,439
8	105	0,246	0,025	0,414
9	120	0,269	0,023	0,391
10	135	0,292	0,023	0,368
11	150	0,310	0,018	0,350
12	165	0,330	0,020	0,330
13	180	0,356	0,026	0,304
14	195	0,374	0,018	0,286
15	210	0,395	0,021	0,265
16	225	0,422	0,027	0,238
17	240	0,435	0,013	0,225
18	255	0,441	0,006	0,219
19	270	0,445	0,004	0,215
20	285	0,448	0,003	0,212
21	300	0,451	0,003	0,209
22	315	0,453	0,002	0,207
23	330	0,455	0,002	0,205
24	345	0,460	0,005	0,200
25	[illegible]	0,474	0,014	0,186
26	1385	0,5015	0,0275	0,1585
27	1445	0,520	0,0185	0,140

Ce tableau fait voir que la vîtesse avec laquelle s'affaisse la surface du dépôt, est parvenue à l'uniformité dans l'intervalle de la première à la seconde observation; et cette vîtesse de 23 millimètres, à-très-peu-près, dans un intervalle de quinze minutes, est restée uniforme pendant trois heures quarante-cinq minutes.

A dater de la seizième observation, on voit que l'affaissement s'est ralenti de plus en plus; enfin il est devenu insensible après quarante-huit heures.

Le dépôt occupait alors au fond du vase une hauteur de 140 millim., ou un volume de 24$^{\text{cent}}$,150 cubes.

Le volume des molécules argilleuses est de 6,25. Donc le volume total du fluide interposé est au volume des molécules solides, comme 24$^{\text{cent}}$,150 — 6$^{\text{cent}}$,250 = 17$^{\text{cent}}$,90, est à 6$^{\text{cent}}$,25, ou : : 2,86 : 1.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai repris le mélange contenu dans le tube; et, après l'avoir versé dans l'éprouvette cylindrique de la seconde expérience, j'y ai ajouté un décilitre d'eau pure, de manière que le volume total de ce nouveau mélange fût de 2 décilitres.

La proportion de l'argile à ce volume total s'est trouvée de 6,25 à 200; c'est-à-dire de 1 à 32, précisément sous-double de celle du mélange de la seconde expérience.

Cette préparation faite, le liquide, dont la température était à 17 degrés, a été agité pendant quelques minutes, jusqu'à ce que les molécules argilleuses fussent uniformément disséminées dans toute son étendue; le vase a été posé sur son appui, et recouvert de son disque garni du double-décimètre gradué, au moyen duquel on a observé, de cinq en cinq minutes, les quantités d'affaissement de la surface du précipité, telles que les présente le tableau n° III.

TABLEAU n° III.

Température du mélange, 17 degrés centigr.
Diamètre de l'éprouvette, $0^{m},04$.
Surface de la section transversale de l'éprouvette, $13^{cent},115^{c}$
Volume d'eau, $193^{cent},75$.
Volume d'argile, $6^{cent},25$.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'eau.	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase
	minutes.	m	m.	m
1	»	0,036	»	0,1525
2	5	0,070	0,034	0,1185
3	10	0,092	0,022	0,0965
4	15	0,118	0,026	0,0705
5	20	0,130	0,012	0,0585
6	25	0,1385	0,0085	0,050
7	35	0,144	0,0055	0,0445
8	50	0,147	0,003	0,0415
9	65	0,1495	0,0015	0,040
10	95	0,1525	0,003	0,037
11	335	0,161	0,0085	0,0285
12	555	0,1635	0,0025	0,026
13	1336	0,165	0,0015	0,0245

La séparation du mélange en deux portions, l'une transparente et l'autre opaque, s'est opérée d'une manière moins tranchée qu'on ne l'avait remarqué dans le même vase dès le commencement de la seconde expérience; c'est-à-dire, que jusqu'à la neuvième observation du tableau n° III, ou pendant une heure cinq minutes, l'eau qui surnageait le dépôt, et qui était légèrement trouble au moment des premières observations, s'est éclaircie par degrés : on a remarqué distinctement dans cette eau, pendant cet intervalle de temps, des molécules argilleuses qui tombaient isolément avec une extrême lenteur.

On s'aperçoit aisément, à l'inspection du tableau, ou de sa représentation graphique, que l'affaissement du dépôt s'accélère pendant les cinq minutes qui forment l'intervalle de la première à la seconde observation. Il continue uniformément, à-très-peu-près, de la seconde à la quatrième; puis il se ralentit de plus en plus, jusqu'à ce qu'il devienne insensible; marche analogue à celle observée dans notre seconde expérience, dont les circonstances ne diffèrent des circonstances de celles-ci que parce que les molécules argilleuses entrent dans le mélange en double proportion. On voit seulement que l'affaissement du dépôt est d'autant plus rapide, que les molécules solides sont à de plus grandes distances les unes des autres.

Par exemple, pour descendre de 82 millimètres dans un même volume de 2 décilitres de mélange, la surface supérieure du dépôt formé de $12^{\text{cent}},50$, emploie soixante minutes (tableau n° I); tandis que la partie supérieure d'un dépôt formé de $6^{\text{cent}},25$, parcourt le même espace en quinze minutes seulement (tableau n° III).

Pendant les treize heures qui s'écoulèrent entre la douzième et la treizième observation, l'affaissement du dépôt ne fut que de $15^{\text{mill}},5$; ainsi il était devenu en quelque sorte insensible. Alors le dépôt occupait au fond de l'éprouvette une hauteur de 24^cent^,5, et remplissait un espace de 32^cent^.122 cubes.

Le volume occupé dans cet espace par les molécules argileuses était donc, au volume de liquide disséminé dans les petits intervalles qui les séparaient, dans le rapport de 6,25 à 25,872, ou de 1 à 4,139.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Un décilitre de ce mélange a été versé dans le même tube qui a servi à la troisième expérience; et, après l'avoir agité pour le rendre homogène, on a suspendu verticalement la planche graduée à laquelle ce tube était fixé. La température de la liqueur était à 12 degrés.

Les observations, qui furent recueillies de six minutes en six minutes, sont rapportées dans le tableau nº IV.

TABLEAU nº IV.

Température du mélange, 12 degrés centig.
Diamètre du tube, $0^{m},0148$.
Surface de la section transversale, $1^{cent},7255$
Volume d'eau, $96^{cent},875$
Volume d'argile, $3^{cent},125$.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'eau.	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente.	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase.
	minutes	m	m	m
1	»	0,080	»	0,580
2	5	0,125	0,045	0,525
3	11	0,175	0,050	0,475

Suite du Tableau n° IV.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la dernière OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'eau	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase.
	minutes.	m	m	m
4	17	0,215	0,040	0,435
5	23	0,253	0,038	0,397
6	29	0,285	0,032	0,365
7	35	0,311	0,026	0,339
8	41	0,333	0,022	0,317
9	47	0,360	0,027	0,290
10	53	0,380	0,020	0,270
11	59	0,398	0,018	0,252
12	65	0,416	0,018	0,234
13	71	0,432	0,016	0,218
14	77	0,448	0,016	0,202
15	83	0,4625	0,0145	0,187
16	89	0,477	0,0145	0,1725
17	96	0,492	0,015	0,1575
18	106	0,512	0,020	0,1375
19	116	0,523	0,011	0,1265
20	131	0,530	0,007	0,1195
21	146	0,538	0,008	0,1115
22	201	0,543	0,005	0,1065
23	261	0,550	0,007	0,0995
24	451	0,563	0,013	0,0865
25	1301	0,584	0,021	0,076

Il y eut, comme dans les expériences que nous avons déja rapportées, séparation du mélange en deux parties distinctes; mais le liquide qui surnageait le dépôt resta légèrement trouble jusqu'à la cinquième observation, c'est-à-dire pendant vingt-trois minutes. Il commença alors à s'éclaircir; la surface du dépôt s'était déja affaissée de 175 millimètres.

Pendant les premières quinze minutes de l'expérience, cet affaissement fut uniformément de 121 millimètres. (Tableau n° IV; observations 1, 2, 3 à 4.) Lorsque le cube des molécules argilleuses était double, cet affaissement uniforme avait été de 24 millimètres, ou environ cinq fois moindre. (Tableau n° II; observations 1 et 2.)

Au moment où l'eau qui surmontait le dépôt eut acquis toute sa transparence, le dépôt n'occupait plus dans le tube que 397 millimètres de hauteur; il descendit de 74 millimètres en quinze minutes.

Dans le tableau n° II, le dépôt occupant le même espace descendit, dans le même temps, de 23 millimètres, c'est-à-dire d'une hauteur trois fois moindre.

Nous trouvons confirmée ici la remarque que nous avions déja faite, que l'affaissement de la surface du dépôt est d'autant plus rapide, que les molécules solides dont il est formé sont plus éloignées les unes des autres.

Au surplus, cet affaissement se montre sensiblement retardé vers la cinquième observation. Il était devenu insensible après vingt-une heures quarante-six minutes d'observations. Le dépôt avait alors 76 millimètres de hauteur dans le tube, et y occupait un espace de 13$^{\text{cent}}$,11 cubes. Le volume total des molécules argilleuses était de 3 cent. cubes $\frac{125}{1000}$. Ainsi ce volume des molécules solides était, à celui des atmosphères liquides qui les enveloppaient, comme 3$^{\text{cent.}}$,125

:9,985, ou :: 1:3,19. On voit que ce rapport est plus grand que celui de 1 à 2,86, que nous avons trouvé entre les molécules argilleuses et leurs atmosphères, dans le tabl. nº II.

Nous venons d'exposer les résultats de nos cinq premières expériences avec assez de détail pour rendre manifestes les principaux phénomènes qu'elles présentent. Nous allons maintenant les rappeler, et en donner successivement l'explication.

PREMIER PHÉNOMÈNE.

Lorsque des molécules solides très-ténues, submergées dans un liquide plus léger, qui n'a point la propriété de les dissoudre, mais qui a la propriété de mouiller leur surface, sont disséminées dans ce liquide en assez grande quantité pour en troubler la transparence, et que néanmoins leur volume total est très-petit, par rapport à celui du liquide, la précipitation de ces molécules se manifeste par degrés insensibles ; de telle sorte que le liquide s'éclaircit en un temps plus ou moins long, en passant par toutes les nuances d'opacité et de transparence imparfaite, depuis le moment où le mélange est abandonné à la seule action de sa pesanteur, jusqu'à celui où le liquide a repris sa transparence naturelle.

EXPLICATION.

Notre première expérience nous a conduits immédiatement à l'observation de ce phénomène.

Le volume total des molécules solides n'étant que la sept cent cinquantième partie de l'espace occupé par le mélange qu'elles forment avec l'eau, chacune de ces molécules, enveloppée de son atmosphère liquide, se trouve tellement éloignée de celles qui en sont les plus voisines, que leurs atmosphères respectives ne s'atteignent point, et que chacune d'elles se meut dans le liquide comme si elle y était seule. Et, attendu que leur vîtesse est extrêmement petite, puisque après sept heures de repos elles ne s'étaient pas encore toutes précipitées, quoique la plus grande hauteur qu'elles eussent à parcourir ne fût que de 30 centimètres environ, il s'ensuit que les puissances de cette vîtesse, supérieures à la première, peuvent être négligées dans l'expression de la force retardatrice qui contrebalance la gravité relative de ces molécules, et que les conditions de l'uniformité de leur mouvement sont données par l'équation

$$u = \frac{gr^3 (p - p')}{3.R^2 A},$$

ou bien :

$$u = \frac{gr^3 (p - p')}{3.(r+e)^2 A},$$

dans laquelle e représente l'épaisseur de l'atmosphère liquide dont chaque molécule est enveloppée.

Or, il est évident qu'en supposant cette épaisseur susceptible de s'accroître à partir de zéro, la fraction $\frac{r^3}{(r+e)^2}$ sera d'autant moindre, que cette épaisseur sera plus grande : on en déduit, de plus, que le *maximum* de valeur que cette fraction puisse atteindre, est proportionnel au rayon de la molécule; ce qui arrive lorsque l'épaisseur de son atmosphère est nulle.

Donc, quelle que soit cette épaisseur, la vîtesse uniforme de cette molécule dans le fluide est d'autant moindre, que la molécule elle-même est plus petite.

Cela posé, si toutes les molécules solides et indissolubles qui sont répandues dans un liquide dont elles troublent la transparence, étaient égales entre elles, et assez distantes les unes des autres pour que leurs atmosphères mutuelles ne se pénètrent pas, on conçoit qu'elles se précipiteraient nécessairement avec la même vîtesse. Ainsi toutes les molécules comprises dans une tranche horizontale du liquide, conservant leurs positions respectives dans cette tranche, descendraient parallèlement à ce plan; de telle sorte que celles de la tranche supérieure laisseraient parfaitement limpide au-dessus d'elles, au moment même qu'elles commenceraient à se mouvoir, le liquide qu'elles auraient traversé. Ainsi le mélange, qui d'abord était opaque dans toute sa hauteur, se trouverait, par l'effet de la précipitation des molécules solides, divisé en deux portions d'un aspect tout-à-fait différent: l'une supérieure et transparente; l'autre inférieure, et qui conserverait jusqu'à son affaissement total le même degré d'opacité.

Mais quelques soins que l'on apporte à triturer, par un moyen mécanique quelconque, une substance solide, il est impossible de donner à chacune des molécules de l'amas pulvérulent qu'on en forme, précisément le même volume. Ainsi, quoique nos sens ne puissent l'apprécier, la différence de ténuité entre les diverses molécules de pâte de porcelaine, dont nous avons suivi le mouvement dans l'eau pendant notre première expérience, était probablement plus ou moins considérable.

Il suit de là, et de ce que nous venons de dire sur l'expression de leur vîtesse uniforme, que les molécules argileuses ont dû se précipiter dans l'ordre de leurs masses, et que l'éclaircissement du mélange a dû s'effectuer suivant une certaine loi de continuité, jusqu'à ce que les molécules les plus ténues, qui étaient restées les dernières suspendues dans le liquide, dont elles troublaient légèrement la transparence, soient enfin descendues en le laissant au-dessus d'elles parfaitement limpide : c'est en effet ce qui a été observé.

SECOND PHÉNOMÈNE.

Lorsque des molécules solides sont disséminées dans un liquide qui n'exerce sur elles aucune action dissolvante, et que leur volume total est une partie considérable, telle, par exemple, que la quinzième ou la vingtième partie, du volume de ce liquide ; ces molécules solides se précipitent vers le fond du vase qui contient le mélange, en laissant au-dessus d'elles parfaitement limpide, dès les premiers instants de l'observation, le liquide dont elles se séparent ; de manière que, pendant l'affaissement du dépôt, ce mélange présente l'aspect de deux liqueurs de pesanteurs spécifiques différentes.

EXPLICATION.

Dans ce cas particulier, qui est celui de notre seconde et de notre troisième expérience, les molécules solides se trouvent suffisamment rapprochées les unes des autres, pour que leurs atmosphères liquides se pénètrent mutuellement. Ainsi toutes ces molécules, prises dans une section horizontale quelconque du mélange, deviennent dépendantes les unes des autres par l'intermède des portions d'atmosphère qui leur sont communes ; et, en vertu de cette dépendance, elles se mettent en équilibre dans le plan de cette section, en prenant entre elles des positions convenables ; ce qui a lieu dans un intervalle de temps très-court. Alors toutes les tranches horizontales du dépôt s'affaissent comme autant de réseaux séparés, jusqu'à ce qu'elles soient parvenues, au fond du vase qui les contient, à un degré de rapprochement au-delà duquel elles ne peuvent se rapprocher davantage.

Ainsi, dans toutes les expériences que nous examinons, on voit que le dépôt a cessé de s'affaisser lorsque chaque molécule solide était encore enveloppée d'une atmosphère liquide, qui, dans certains cas, s'est trouvée plus que quadruple du volume de cette molécule. Cette observation, qui suffirait seule pour prouver l'existence de ces atmosphères, démontre, en outre, qu'elles adhèrent sur une certaine épaisseur aux molécules solides qu'elles enveloppent, avec une force plus considérable que n'est la gravité relative de ces molécules dans le liquide où elles sont submergées.

Autrement, elles se rapprocheraient, en vertu de cette gravité relative, jusqu'à leur contact absolu.

Quant aux lois de l'affaissement vertical du dépôt sur lui-même, elles dépendent non-seulement de la forme du vase qui contient le mélange, mais encore de la proportion dans laquelle les molécules solides et le liquide sont mélangés.

TROISIÈME PHÉNOMÈNE.

La durée de l'affaissement des molécules solides au fond du liquide avec lequel elles ont été mélangées dans un vase cylindrique, se partage en trois périodes : dans la première, cet affaissement s'accélère; il est uniforme pendant la seconde, et retardé pendant la troisième ; de plus, la durée de la seconde période est d'autant plus grande, toutes choses *égales d'ailleurs, que la hauteur du vase prismatique ou cylindrique qui contient le mélange est plus considérable.*

EXPLICATION.

Aussitôt que le mélange est abandonné à la seule action de la pesanteur, et que toutes les molécules comprises dans une même tranche horizontale se sont mises en équilibre entre elles, chacune de ces tranches se précipite, en vertu de sa gravité relative, comme si elle était réduite à une seule molécule. Ainsi les conditions de son mouvement sont exprimées par l'équation :

$$\left(\frac{gr^3}{3}(p-p') - AR^2 u\right)dt = \left(\frac{r^3p + (R^3-r^3)p'}{3}\right)du.$$

Divisons tous ses termes par

$$\frac{r^3p + (R^3-r^3)p'}{3},$$

et faisons pour abréger,

$$\frac{3AR^2}{r^3p+(R^3-r^3)p'} = M,$$

$$\frac{gr^3(p-p')}{(r^3p+(R^3-r^3)p')} = N,$$

elle deviendra

$$du + Mu\,dt = N\,dt,$$

laquelle est, comme on voit, linéaire par rapport à u, et facilement intégrable par les méthodes connues. On en tire

$$u = e^{-Mt}\left(C + \frac{N}{M}e^{Mt}\right);$$

en réduisant :

$$u = Ce^{-Mt} + \frac{N}{M}.$$

dans laquelle C est une quantité constante, et e le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Cette constante C se détermine par la condition que u et t soient nuls en même temps; ce qui donne

$$C = -\frac{N}{M},$$

et par conséquent,

$$u = \frac{N}{M}\left(1 - \frac{1}{e^{Mt}}\right).$$

Or, cette équation fait voir évidemment que la vîtesse u croît avec le temps, et ne peut devenir uniforme qu'au moment où la fraction $\frac{1}{e^{Mt}}$ est devenue infiniment petite, c'est-à-dire après un temps infini. La vîtesse est alors parvenue à son *maximum*, et l'on a:

$$u = \frac{N}{M} = \frac{gr^3}{3}\left(\frac{(p-p')}{AR^2}\right).$$

C'est aussi ce qu'on tire immédiatement de l'équation primitive

$$\left(\frac{gr^3}{3}(p-p') - AR^2 u\right) dt = \left(\frac{r^3 p + (R^3 - r^3) p'}{3}\right) du,$$

en supposant $du = 0$, ce qui est le cas du *maximum* de vîtesse.

La théorie indique donc ici que, si la longueur du vase cylindrique ou du tube qui contient le mélange était indéfinie, la vîtesse des tranches s'accélérerait indéfiniment; mais l'expression de cette vîtesse montre aussi que le terme exponentiel, dont elle diffère à chaque instant de la valeur constante vers laquelle elle tend, décroît avec une rapidité telle, qu'en effet ce terme devient bientôt insensible, et que les observations n'indiquent plus qu'un mouvement uniforme. L'expression

$$u = \frac{g\,r^2}{3}\left(\frac{p-p'}{AR^2}\right)$$

est par conséquent celle de la vîtesse des tranches pendant la seconde période du mouvement dont nous avons fait mention en exposant le phénomène.

Il est évident que toutes ces tranches, animées de cette vîtesse, continueraient indéfiniment de descendre dans le liquide parallèlement entre elles, en se tenant à des distances égales les unes des autres, si le vase cylindrique qui contient le mélange avait une hauteur verticale indéfinie.

Mais il n'en est point ainsi : les tranches inférieures du mélange, arrêtées dans leur chûte par le fond du vase, y forment un dépôt sur lequel les couches supérieures sont arrêtées à leur tour jusqu'à la dernière de toutes, au-dessus de laquelle surnage le liquide transparent : c'est alors que commence le mouvement retardé de cette tranche superficielle, la seule que l'on puisse observer.

Pour analyser ce mouvement, il faut considérer que les molécules solides, enveloppées chacune de leurs atmosphères, exercent les unes sur les autres, dans une même verticale, une certaine pression en vertu de laquelle le liquide dont ces atmosphères sont formées, se trouve en quelque sorte poussé au-dehors du dépôt. Mais, comme les couches de chaque atmosphère les plus voisines de la molécule solide qu'elles enveloppent, y sont les plus adhérentes, il s'ensuit que l'affaissement des tranches sur elles-mêmes doit se ralentir de plus en plus à mesure que les atmosphères liquides perdent de leur épaisseur, précisément de la même manière qu'un corps compressible se comprime d'autant moins sous un poids déterminé, qu'il est déja comprimé davantage.

Si donc on considère toutes les molécules du dépôt, qui sont disposées les unes au-dessus des autres dans une même verticale, comme formant un seul et unique système composé d'un nombre de molécules exprimé par n, la pesanteur relative de ce système sera exprimée par

$$n\frac{gr^3}{3}(p-p').$$

De même, si l'on appelle u la vîtesse moyenne de ce système, c'est-à-dire la vîtesse de son centre de gravité, et s l'espace qu'il parcourt, on aura, pour sa force retardatrice,

$$n(\varphi s).\,R^2 u;$$

attendu que le coëfficient A devient ici nécessairement une fonction de l'espace parcouru, exprimée généralement par (φs).

L'équation différentielle du mouvement retardé du centre de gravité d'un système de molécules comprises dans la même verticale, est donc celle-ci :

$$n\left(\frac{gr^3}{3}(p-p')-(\varphi s).\,R^2 u\right)dt=-n\left(\frac{r^3p+(R^3-r^3)p'}{3}\right)du=0:$$

ou bien, en divisant par

$$n\left(\frac{r^3p+(R^3-r^3)p'}{3}\right),$$

et faisant, comme ci-dessus,

$$\frac{gr^3(p-p')}{r^3p+(R^3-r^3)p'}=N',$$

$$\frac{3R^2}{r^3p+(R^3-r^3)p'}=M',$$

$$N'dt-M'(\varphi s)u\,dt=-du;$$

ou bien enfin, en substituant à dt sa valeur $\frac{ds}{u}$,

$$N' ds - M' (\varphi s) ds = - u du,$$

dont l'intégrale ne peut s'obtenir qu'après la détermination de la fonction (φs).

Les tableaux nº I et nº II présentent d'une manière très-sensible les trois périodes de mouvement accéléré, uniforme et retardé que nous venons de distinguer; on voit aussi que, dans le tube étroit où le mélange occupait 580 millimètres de hauteur, l'uniformité du mouvement s'est manifestée pendant près de quatre heures; tandis que, dans l'éprouvette cylindrique, où le même mélange ne s'élevait que de 150 millimètres, le mouvement est à peine resté uniforme pendant une demi-heure.

QUATRIÈME PHÉNOMÈNE.

L'affaissement du dépôt dans un même vase cylindrique s'opère avec d'autant plus de lenteur, que le volume des molécules solides est en plus grande proportion dans le mélange.

EXPLICATION.

On se rend facilement raison de ce phénomène, si l'on se rappelle qu'après avoir agité convenablement un mélange de molécules solides avec un liquide susceptible de mouiller leur surface, ces molécules se disposent entre elles dans le plan de chaque tranche horizontale du mélange en un certain état d'équilibre tel, que les petits intervalles qui les séparent et que le fluide occupe, ne changent ni de dimension ni de forme pendant l'affaissement du dépôt : l'on peut ainsi considérer toutes ces tranches comme des espèces de réseaux superposés, et dont les mailles ont plus ou moins d'ouverture, suivant la proportion des parties solides et liquides mélangées. Or, si l'on considère isolément dans toutes les tranches horizontales les mailles ou petits interstices que traverserait une même verticale, on se formera l'idée d'une espèce de prisme capillaire dont l'enveloppe, composée d'éléments solides discontinus, ou plutôt séparés par des pores plus ou moins ouverts, est susceptible de descendre verticalement en s'affaissant sur elle-même. Mais il est évident que cet affaissement d'enveloppes capillaires ne peut avoir lieu, à moins qu'une portion des atmosphères liquides de leurs éléments, celle qui leur est immédiatement contiguë, ne se détache de celle qui en est le plus éloignée. Ainsi l'assemblage de toutes ces portions d'atmosphères qu'abandonnent successivement toutes les molécules solides en se précipitant, constitue réellement un filet fluide immobile le long duquel glisse l'espèce d'étui qui le renferme.

Cela posé, comme la même chose doit arriver, soit qu'un fluide se meuve dans un tube capillaire, soit que le même tube se meuve suivant sa longueur dans le même fluide, et que, dans l'une ou l'autre supposition, le fluide qui sort du tube éprouve d'autant plus de résistance à se détacher de la couche fluide qui y reste adhérente, que ce tube lui-même est plus étroit, puisqu'alors la séparation du fluide ou le déchirement des atmosphères doit avoir lieu à une moindre distance de leur centre, il s'ensuit évidemment que l'affaissement des parois du tube sur elles-mêmes, ce qui est le cas du phénomène que nous examinons ici, doit être d'autant plus lent, que le diamètre de ce tube est moindre, c'est-à-dire, en d'autres termes, que les molécules solides entrent en plus grande proportion dans le mélange : c'est aussi ce qu'indique la comparaison des deux tableaux n° I et n° III, n° II et n° IV, qui présentent des observations faites sur des volumes égaux de mélanges dans lesquels les molécules solides entraient en proportion double et simple.

On voit en effet par le tableau n° I, que le volume des molécules solides étant à celui du mélange dans le rapport de 1 à 16, la surface du dépôt s'est abaissée de 63 millimètres pendant les trente premières minutes, tandis que, par le tableau n° III, où le volume des molécules solides est au volume total du mélange dans le rapport de 1 à 32, on voit que, pendant les trente premières minutes, la surface du dépôt s'est abaissée de 104 millimètres.

On remarque de même dans le tableau n° II, que la vîtesse uniforme des tranches du dépôt est de 23 millimètres par chaque intervalle de quinze minutes; tandis que, dans le tableau n° IV, cette vîtesse est de 96 millimètres, c'est-à-dire précisément quadruple pendant le même espace de temps.

CINQUIÈME PHÉNOMÈNE.

Lorsque le dépôt de molécules solides est parvenu à son maximum *d'affaissement, ou plutôt lorsque cet affaissement est devenu insensible, l'espace occupé par les atmosphères liquides qui enveloppent les molécules solides est d'autant plus grand par rapport à ces molécules, qu'elles se trouvent dans le mélange en moindre proportion. Si, par exemple, on compare entre elles la seconde et la quatrième expérience, dans lesquelles les volumes des molécules solides sont respec-*

tivement comme les nombres 2 et 1, par rapport au volume total du mélange, on remarque que, dans la seconde, l'espace occupé par les atmosphères liquides est à l'espace occupé par les atmosphères dans la quatrième, comme les nombres 350 et 417.

De même, en comparant les troisième et cinquième expériences faites sur des mélanges analogues dans des tubes beaucoup plus petits, on voit que les espaces atmosphériques sont comme les nombres 390 et 432.

EXPLICATION.

Il faut se rappeler ici ce que nous avons dit plus haut sur l'état permanent des tranches horizontales du mélange pendant son affaissement : il est en effet facile à concevoir qu'après s'être mises en équilibre dans chacune de ces tranches horizontales, les molécules solides s'y trouvent placées à des distances d'autant plus grandes les unes des autres, qu'elles y sont en moindre proportion. Mais ces distances se maintiennent les mêmes dans ces tranches; tandis qu'en s'affaissant, les molécules se rapprochent de plus en plus dans les verticales qu'elles décrivent; d'où il arrive qu'au moment où on les observe lorsqu'elles occupent le fond du vase sans mouvement sensible, leurs atmosphères liquides se trouvent en effet comprimées verticalement, de telle sorte qu'il existe une certaine différence entre les axes horizontaux et verticaux de ces atmosphères. Si donc on suppose constant leur axe vertical, quelle que soit la proportion du mélange, il est clair que le volume de ces atmosphères doit augmenter à mesure que leur axe horizontal augmente; c'est-à-dire suivant les plus grandes distances où les molécules se sont placées dans les tranches horizontales, en s'y constituant en état d'équilibre, ou bien enfin, ce qui revient au même, suivant que les molécules solides mélangées dans le liquide s'y trouvent en moindre proportion.

Il resterait à savoir pourquoi dans les tableaux I et III les volumes des atmosphères, toutes choses égales d'ailleurs, sont moindres que dans les tableaux II et IV. Mais ceci s'explique aisément, si l'on fait attention que les deux premiers tableaux présentent des séries d'observations faites à 17 et 18 degrés de température, tandis que les observations contenues dans les deux derniers tableaux ont été faites à 10 et 12 degrés. Car on sait que le rayon des sphères d'activité d'une surface solide sur un liquide qui le mouille, est d'autant plus grand, que la température est plus basse. Ce fait est d'ailleurs constaté par l'expérience suivante.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai pris 6,177 centimètres cubes d'argile à porcelaine, et je les ai mêlés avec 88,423 centimètres cubes d'eau, de manière que le mélange formait un volume de $92^{\text{cent.}},60$, et que l'argile y était contenue dans la proportion de 1 à 15 environ.

Ce mélange étant versé dans une éprouvette cylindrique de $2^{\text{cent.}},88$ de diamètre, y occupait 142 millimètres de hauteur. Le tout a été chauffé au bain-marie, et maintenu à 60 degrés du thermomètre centigrade. On a agité le mélange; l'éprouvette a été recouverte de son disque de verre garni du double-décimètre gradué, au moyen duquel on a mesuré les affaissements successifs de la surface du dépôt. Le tableau n° V présente les résultats de ces observations.

TABLEAU n° V.

Température du mélange, 60 degrés centigr.
Diamètre de l'éprouvette, $0^{m},0288$.
Volume d'eau, $88^{cent},423$
Volume d'argile, $6^{cent},177$.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'eau	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente.	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase.
	minutes.	m.	m	m
1	0	0,060	» »	0,142
2	1	0,066	0,006	0,136
3	2	0,070	0,004	0,132
4	3	0,075	0,005	0,127
5	4	0,079	0,004	0,123
6	6	0,087	0,008	0,115
7	8	0,095	0,008	0,107
8	10	0,107	0,012	0,095
9	12	0,115	0,008	0,087
10	14	0,126	0,011	0,076
11	16	0,132	0,006	0,070
12	18	0,134	0,002	0,068
13	20	0,136	0,002	0,066
14	26	0,139	0,003	0,063
15	36	0,143	0,004	0,059
16	46	0,146	0,003	0,056
17	71	0,151	0,006	0,050

L'appareil restant dans le même état, on a laissé refroidir le mélange jusqu'à 17 degrés de température. Alors il a été agité de nouveau pour être rendu homogène, et l'on a recueilli les observations que présente le tableau n° VI

TABLEAU n° VI.

Température du mélange, 17 degres centigr
Diametre de l'éprouvette, $0^{m},0285$
Volume d'eau, $88^{cent.},423$.
Volume d'argile, $6^{cent.},177$.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'eau.	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase
	minutes	m	m	m
1	0	0,060	» »	0,142
2	1	0,063	0,003	0,139
3	2	0,065	0,002	0,137
4	3	0,066	0,001	0,136
5	4	0,0675	0,0015	0,1345
6	5	0,0685	0,001	0,1335
7	7	0,0735	0,005	0,1285
8	10	0,079	0,0055	0,123
9	15	0,088	0,011	0,112
10	20	0,096	0,008	0,104
11	25	0,104	0,008	0,096
12	30	0,111	0,007	0,089
13	35	0,118	0,007	0,082
14	40	0,125	0,007	0,075
15	45	0,131	0,006	0,069
16	50	0,137	0,006	0,063
17	55	0,141	0,004	0,059
18	60	0,142	0,001	0,058
19	70	0,144	0,002	0,056
20	80	0,146	0,002	0,054

Si l'on compare entre eux les deux tableaux précédents, on remarque que, pendant la première minute de son affaissement, le dépôt descend de 6 millimètres, la température étant à 60 degrés; tandis que cet affaissement n'est que de 3 millimètres, lorsque la température est abaissée à 17 degrés.

Le rapport entre les vîtesses d'abaissement de la surface du dépôt devient encore plus considérable pendant la durée des observations.

Ainsi, pour s'abaisser de 74 millimètres, lorsque la température est à 60 degrés, la surface du dépôt emploie dix-huit minutes; et, lorsque la température est à 17 degrés, elle emploie quarante-cinq minutes pour descendre de 73 millimètres.

Ces observations rendent manifeste le phénomène suivant.

SIXIÈME PHÉNOMÈNE.

Un volume donné de molécules solides mélangées avec un liquide plus léger, qui jouit de la propriété de mouiller leur surface, descend à travers ce liquide avec d'autant plus de rapidité, que la température est plus élevée.

EXPLICATION.

Ce phénomène s'explique aisément par tout ce qui a été dit jusques ici, et par ce que nos expériences sur le mouvement des liquides dans les tubes capillaires nous ont appris précédemment. Il en résulte, en effet, que l'épaisseur de la couche fluide qui reste adhérente à la surface des corps solides susceptibles d'en être mouillés, est d'autant moindre que la température est plus élevée. On sait d'ailleurs que l'élévation de la température rend également moindres la densité des fluides et la cohésion de leurs molécules. Donc les quantités p', A, et R de la formule $u=g\frac{r^2}{3}\frac{(p-p')}{AR^2}$, diminuant ensemble à mesure que la température s'élève, la vîtesse u avec laquelle les molécules s'affaissent, doit devenir plus considérable; et c'est en effet ce que l'observation indique.

Il s'agit maintenant d'assigner l'influence due à la variation de chacune des quantités p', A et R, sur la vîtesse d'affaissement des molécules dans le liquide où elles sont suspendues, en comparant les valeurs numériques de ces diverses quantités correspondantes à 60 et à 17 degrés de température.

Or, dans le premier cas on a:

1°, suivant les tables, la densité de l'eau à 60 degrés $p'=$ 0,9825

2° D'après ce que nous avons publié précédemment (*Mémoires de l'Institut*, années 1813, 1814 et 1815, p. 374, et *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut*, tom. Ier, p. 236), on a $A=0{,}00078971\times(0{,}9825)^3=$ 0,00074897

3° D'après le tableau n° V, qui indique que 74 millimètres ont été parcourus en 18 minutes, on trouve, pour la vîtesse moyenne par seconde, $u=$ 0,000068

On sait d'ailleurs que la pesanteur spécifique des molécules d'argile $p=$ 2,47457

Substituant ces valeurs dans la formule $u=g\frac{r^2}{3}\frac{(p-p')}{AR^2}$, on en déduit $R^2=g\frac{r^2}{3}(28902000)$.

Dans le second cas on a :

1° Suivant les tables, la densité de l'eau à 17 degrés $p' =$ 0,9909

2° D'après nos Mémoires précédents, $A = 0,00078971\ (0,9909)^3 =$ 0,00076834

3° D'après le tableau n° VI, qui indique que 73 millimètres ont été parcourus en quarante-cinq minutes, on trouve, pour la vîtesse moyenne par seconde, $u =$ 0,000027;

valeurs qui, substituées dans la formule, donnent $R^2 = g\frac{r^3}{3}\ (71520000)$.

La comparaison des deux expressions de R^2 correspondantes à 17 et à 60 degrés de température, indique que les surfaces des atmosphères aqueuses qui enveloppent les molécules d'argile, sont entre elles comme les nombres 28902 et 71520, ou à-peu-près, dans le rapport de 2 à 5; tandis que les densités p' et les cohésions A du liquide n'éprouvent que des variations presque insensibles dans l'intervalle de 60 à 17 degrés du thermomètre. Il reste ainsi démontré que l'augmentation de vîtesse avec laquelle un dépôt de molécules solides s'affaisse dans un fluide dont on élève la température, est presque exclusivement due à ce que la couche fluide adhérente à chacune de ces molécules diminue d'épaisseur, précisément comme nous avons démontré ailleurs que l'augmentation du produit de l'écoulement d'un liquide par un tube capillaire dont il mouille la surface, était due presque exclusivement à la diminution d'épaisseur de la couche de ce liquide adhérente à la surface intérieure de ce tube, lorsqu'on élève la température de l'appareil.

§ II.

Expériences et observations sur différents mélanges d'argile et d'alcohol.

L'alcohol dont nous nous sommes servis pour répéter sur ce liquide des expériences analogues à celles dont nous venons de présenter les résultats, marquait 25 degrés à l'aréomètre. Ainsi, en supposant que cette liqueur à 40 degrés de cet instrument, c'est-à-dire à son *maximum* de rectification, ait une pesanteur spécifique exprimée par 80, tandis que celle de l'eau, à la même température et à 10 degrés du même aréomètre, est exprimée par 100, on trouve le nombre 87,50 pour l'expression de la pesanteur spécifique de l'alcohol employé dans les expériences suivantes, lesquelles ne forment qu'une seule et même série avec les précédentes.

SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai mêlé 12^{cent},50 cubes de notre argile à porcelaine, réduite en poudre impalpable, avec une quantité d'alcohol telle que le mélange de ces deux substances occupait un volume de 2 décilitres ou de 200 centimètres cubes; sa température était à 18 degrés du thermomètre centigrade; et, après avoir été agité dans une éprouvette de 3,95 centimètres de diamètre, il s'y élevait à la hauteur de 163 millimètres.

Quelques instants après, notre mélange, comme dans l'expérience analogue sur l'eau et l'argile, se divisa d'une manière encore plus tranchée en deux portions dont la supérieure était de l'alcohol pur de la plus belle transparence, et dont l'inférieure, formée de ce liquide et d'argile, devenait de plus en plus opaque en s'affaissant sur elle-même.

Les observations du tableau suivant faites de quinze minutes en quinze minutes, à l'aide du décimètre gradué, indiquent la loi d'affaissement de la surface de ce dépôt

TABLEAU n° VII.

Température du mélange, 18 degrés centigr.
Diamètre de l'éprouvette, 3cent.,95.
Section transversale de l'éprouvette, 12cent,27 quarrés
Volume de l'alcohol, 187cent,50.
Volume d'argile, 12cent,50.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'alcohol	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase
	minutes.	m.	m.	m.
1	0	0,036	« «	0,163
2	15	0,050	0,014	0,149
3	30	0,075	0,025	0,124
4	45	0,089	0,024	0,100
5	60	0,107	0,008	0,092
6	75	0,111	0,004	0,088
7	90	0,113	0,002	0,086
8	105	0,1155	0,0025	0,0835
9	120	0,117	0,0015	0,082
10	315	0,130	0,013	0,069
11	1095	0,141	0,011	0,058

L'inspection de ce tableau, et mieux encore la construction graphique que nous en avons faite, apprend que le dépôt de molécules d'argile suit la même loi en descendant dans l'eau et dans l'alcohol; c'est-à-dire, que son mouvement, d'abord accéléré, devient bientôt retardé, et enfin presque insensible; pendant la demi-heure comprise entre la première et la troisième observation, la surface du dépôt descendit de 39 millimètres.

Passé ce terme, le mouvement devint retardé de telle sorte, que, pendant la seconde demi-heure de la troisième à la cinquième observation, l'affaissement ne fut plus que de 32 millimètres, et de 6 seulement pendant la troisième demi-heure.

Si l'on compare entre eux les tableaux n° I et n° VII, dressés l'un et l'autre pour des expériences dans lesquelles le même volume d'argile est mélangé avec deux quantités égales d'eau et d'alcohol, c'est-à-dire dans lesquelles les molécules solides étant disséminées uniformément par une agitation convenable, se trouvent placées à des distances égales les unes des autres, la pesanteur spécifique de l'eau étant d'ailleurs à celle de l'alcohol comme 1000 : 875, on remarque que l'affaissement du dépôt dans le liquide plus pesant s'accélère plus rapidement que dans le liquide plus léger, puisque, pendant les premières quinze minutes, le dépôt descend à travers l'eau de 29 millimètres; tandis qu'à travers l'alcohol il ne descend que de 14, c'est-à-dire d'une hauteur moitié moindre.

On voit aussi que ce dépôt emploie quarante-cinq minutes pour descendre de 80 millimètres dans l'eau, et 105 minutes pour descendre de la même hauteur dans l'alcohol.

Enfin il s'affaissa, dans cette dernière liqueur, de 11 millimètres entre la dixième et la onzième observation, lors de laquelle il occupait, au fond de l'éprouvette, une hauteur de 58 millimètres, et remplissait un espace de 71$^{\text{cent}}$ cubes; tandis qu'après le même temps, c'est-à-dire après un repos de dix-huit heures, la même quantité d'argile occupait dans l'eau 55$^{\text{cent}}$,738 cubes seulement. Le volume des molécules solides était donc à celui de l'alcohol adhérent autour d'elles. :: 12,50 à 58,50, ou :: 1 : 4,68.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai versé dans un tube de 1$^{\text{cent}}$,$\frac{25}{100}$ de diamètre, un décilitre du mélange précédent; il y occupait 580 millimètres de hauteur. L'ayant convenablement agité, on a fixé ce tube sur la planche graduée dont on s'est servi pour la troisième expérience. Au moyen de cette graduation, les abaissements successifs de la surface du dépôt qui s'est formé dans le tube, ont été observés avec soin de quinze minutes en quinze minutes. Les résultats de ces observations sont consignés dans le tableau suivant:

TABLEAU n° VIII.

Température du mélange, 10 degrés centigr.
Diamètre du tube, $0^{m},0148$.
Surface transversale du tube, $1^{cent.},725$.
Volume de l'alcohol, $93^{cent.},75$.
Volume d'argile, $6^{cent.},25$.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'alcohol.	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase
	minutes	m	m	m
1	0	0,080	» »	0,580
2	15	0,095	0,015	0,565
3	30	0,112	0,017	0,548
4	45	0,130	0,018	0,530
5	60	0,147	0,017	0,513
6	75	0,164	0,017	0,496
7	90	0,182	0,018	0,478
8	105	0,201	0,019	0,459
9	120	0,219	0,018	0,441
10	135	0,237	0,018	0,423
11	150	0,253	0,016	0,407
12	165	0,272	0,019	0,388
13	180	0,291	0,019	0,369
14	195	0,310	0,019	0,350
15	210	0,327	0,017	0,333
16	225	0,348	0,021	0,312
17	240	0,363	0,015	0,297
18	255	0,385	0,022	0,275
19	270	0,403	0,018	0,257
20	285	0,422	0,019	0,238

SUITE DU TABLEAU n° VIII.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'alcohol	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente.	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase
	minutes	m.	m	m
21	300	0,434	0,012	0,226
22	315	0,439	0,005	0,221
23	330	0,442	0,003	0,218
24	345	0,447	0,005	0,213
25	525	0,464	0,017	0,196
26	1385	0,493	0,029	0,167
27	1425	0,512	0,019	0,148

On remarque dans cette série d'observations, comme dans celle d'observations analogues sur l'argile et l'eau, que l'uniformité du mouvement du précipité se manifeste dès la seconde observation. Ce mouvement uniforme se prolonge pendant quatre heures quarante-cinq minutes; la vîtesse des tranches horizontales est de 19 millimètres par intervalle de quinze minutes.

On voit, en la comparant à la vîtesse uniforme indiquée dans le tableau n° II, que l'affaissement du dépôt sur lui-même est plus lent dans l'alcohol que dans l'eau; ce qui s'accorde avec ce que l'expérience précédente nous a déja appris. Mais il faut remarquer que les plus grandes vîtesses de cet affaissement dans les deux liqueurs sont respectivement comme les nombres 24 et 18; tandis que dans les séries des tableaux n° I et n° VII, où les mélanges d'argile et d'eau, d'argile et d'alcohol, sont faits dans les mêmes proportions, les plus grandes vitesses d'affaissement des dépôts sont entre elles comme les nombres 34 et 25, c'est-à-dire dans un plus grand rapport.

Après un repos de quarante-huit heures, le dépôt n'occupait plus au fond de notre tube qu'une hauteur de 148 millimètres, c'est-à-dire un espace de 25$^{\text{cent}}$,53. Ainsi le volume des molécules d'argile est à celui du liquide qui remplit les intervalles qu'elles laissent entre elles, comme

$$6{,}25 : 19{,}28 :: 1 : 3{,}08.$$

NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai versé le mélange de l'expérience précédente du tube qui le contenait, dans l'éprouvette employée pour faire la septième, et j'y ai ajouté un décilitre d'alcohol ; j'ai formé ainsi un volume de deux décilitres d'un nouveau mélange de cette liqueur avec 6$^{\text{cent.}}$,25 de molécules argileuses.

Après les y avoir disséminées uniformément en agitant le mélange, l'éprouvette a été recouverte de son disque, et au moyen du double décimètre qui s'appliquait extérieurement contre sa paroi, on a recueilli les observations consignées dans le tableau n° IX.

TABLEAU n° IX.

Température du mélange, 17 degrés centigr.
Diamètre de l'éprouvette, 3cent.,95.
Section transversale de l'éprouvette, 18cent.,27.
Volume de l'alcohol, 193cent.,75.
Volume d'argile, 6cent.,25.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'alcohol	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase
	minutes.	m.	m.	m
1	»	0,036	»	0,163
2	5	0,054	0,018	0,145
3	10	0,071	0,017	0,128
4	15	0,088	0,017	0,111
5	20	0,102	0,014	0,097
6	25	0,114	0,012	0,085
7	35	0,134	0,020	0,065
8	50	0,143	0,009	0,056
9	65	0,146	0,003	0,053
10	95	0,150	0,004	0,049
11	335	0,161	0,011	0,038
12	555	0,164	0,003	0,035
13	1336	0,166	0,002	0,033

L'alcohol dans lequel les molécules d'argile étaient répandues marquait toujours 25 degrés à l'aréomètre; il était à la température de 17 degrés du thermomètre centigrade. Les observations ont été répétées de cinq minutes en cinq minutes.

La liqueur, immédiatement après avoir été laissée en repos, s'est partagée, comme dans les expériences dont nous avons déja rendu compte, en deux couches parfaitement distinctes. La couche supérieure, d'abord un peu louche, est devenue d'une transparence parfaite dans l'intervalle de vingt-cinq minutes qui s'est écoulé entre la première et la sixième observation. Pendant les cinq premières minutes de cet intervalle, l'affaissement du dépôt s'est accéléré; il est resté uniforme pendant les quinze minutes suivantes, puis il s'est sensiblement retardé.

Comparant cet affaissement du dépôt d'argile dans l'alcohol à celui de ce même dépôt dans un égal volume d'eau (tableau n° III), on voit que la vîtesse des molécules d'argile dans l'eau est la plus grande, quoique la pesanteur spécifique de ce liquide soit plus considérable que celle de l'alcohol.

Ainsi, pendant les cinq premières minutes, la surface du dépôt dans l'alcohol descend de 18 millimètres; tandis que, dans l'eau, elle descend de 34 millimètres, quantité presque double.

On voit aussi, en comparant la marche du dépôt composé de 6^{cent},25 cubes d'argile (tableau n° IX) à celle du dépôt composé de 12^{cent},50 dans le même volume de mélange (tableau n° VII), que cette marche est plus rapide quand les molécules solides sont placées à de plus grands intervalles les unes des autres.

Par exemple, pour descendre de 78 millimètres, le dépôt de 6^{cent},25 emploie vingt-cinq minutes (tableau n° IX); tandis que le précipité de 12,50 emploie quatre-vingt-dix minutes pour descendre de 77 millimètres, et 105 minutes pour descendre de 79^{mill},50 (tableau n° VII).

De la douzième à la treizième observation, qui sont à treize heures d'intervalle l'une de l'autre (tableau n° IX), l'affaissement n'a été que de 2 millimètres. Le dépôt d'argile occupait alors au fond de l'éprouvette 33 millimètres de hauteur, ou, ce qui revient au même, un volume de $40^{\text{cent}},49$. Le volume des molécules solides est donc à celui de l'alcohol qui les enveloppe, et qui leur est adhérent,

::6,25:34,24; ou bien ::1:5,48.

DIXIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai versé la moitié, c'est-à-dire un décilitre du mélange précédent, dans un tube des mêmes dimensions que celui de la huitième expérience; et, après l'avoir agité suffisamment pour le rendre homogène, j'ai érigé le tube verticalement, et recueilli, sur l'affaissement graduel du dépôt, les observations rapportées dans le tableau suivant.

TABLEAU n° X.

Température du mélange, 12 degrés centigr.
Diamètre du tube, $0^{\text{m}},0148$.
Section transversale du tube, $1^{\text{cent}},72$
Volume d'alcohol, $96^{\text{cent}},875$.
Volume d'argile, $3^{\text{cent}},125$.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'alcohol.	DIFFERENCE d'une OBSERVATION à la précédente.	HAUTEUR DU DÉPÔT [illegible]
	minutes	m	m	m
1	0	0,080	0	0,580
2	5	0,105	0,020	0,560
3	11	0,120	0,024	0,536
4	17	0,144	0,021	0,515

SUITE DU TABLEAU n° X.

NUMÉRO des OBSERVATIONS.	TEMPS ÉCOULÉ depuis la première OBSERVATION.	ABAISSEMENT de la SURFACE DU DÉPÔT dans l'alcohol.	DIFFÉRENCE d'une OBSERVATION à la précédente	HAUTEUR DU DÉPÔT dans le vase
	minutes	m	m	m
5	23	0,164	0,019	0,496
6	29	0,183	0,019	0,477
7	35	0,200	0,017	0,459
8	41	0,218	0,018	0,441
9	47	0,235	0,017	0,424
10	53	0,250	0,015	0,409
11	59	0,265	0,015	0,394
12	65	0,281	0,016	0,378
13	71	0, 97	0,016	0,362
14	77	0,312	0,015	0,347
15	83	0,325	0,013	0,334
16	89	0,337	0,012	0,322
17	96	0,352	0,015	0,307
18	106	0,373	0,021	0,286
19	116	0,393	0,020	0,266
20	131	0,420	0,027	0,239
21	146	0,445	0,025	0,214
22	201	0,480	0,035	0,179
23	261	0,513	0,033	0,146
24	451	0,524	0,011	0,135
25	1301	0,565	0,041	0,094

Ces observations répétées de six minutes en six minutes font voir que l'abaissement de la surface du dépôt dans la liqueur a été à-très-peu-près uniforme, et d'environ $3^{mil.}$,60 par minute, depuis la première jusqu'à la septième observation, pendant l'intervalle de trente-cinq minutes.

La liqueur qui surnageait le dépôt était louche au commencement de l'expérience; elle n'a commencé à s'éclaircir que vers la quatrième observation.

C'est à commencer de la septième que l'affaissement du dépôt s'est retardé sensiblement.

La comparaison de cette expérience avec celle du tableau n° IV, montre que le dépôt d'argile descend dans l'alcohol beaucoup plus lentement que dans l'eau. La vitesse uniforme des tranches horizontales était en effet, dans ce dernier liquide, à-très-peu-près double de ce qu'elle était dans l'alcohol; et ceci s'accorde avec tout ce qui a été observé jusqu'ici.

Le précipité qui occupait d'abord 580 millimètres de hauteur dans le tube, n'en occupait plus que 256 après deux heures de repos.

Enfin, après vingt-une heures six minutes, il était réduit à 94 millimètres de hauteur. Ainsi il remplissait un espace de $16^{cent.}$,25 cubes; et le volume total des molécules argileuses était au volume total des atmosphères liquides, comme 3,125 : 13,125, ou comme 1 : 4,19.

Les expériences sur les mélanges d'argile et d'alcohol, dont je viens d'exposer les résultats, présentent, quant à la proportion des matières de ces mélanges et les dimensions des vases cylindriques qui les contiennent, les mêmes phénomènes que nos expériences sur les mélanges d'argile et d'eau; mais la comparaison des unes et des autres offre ce phénomène particulier :

SEPTIÈME PHÉNOMÈNE.

Toutes circonstances étant égales d'ailleurs, l'affaissement sur lui-même d'un dépôt de molécules argileuses dans l'eau, à 10 degrés de l'aréomètre, s'effectue plus rapidement que l'affaissement du même dépôt dans de l'alcohol à 25 degrés du même instrument.

EXPLICATION.

La vîtesse avec laquelle une molécule solide qui descend uniformément dans un liquide susceptible de mouiller sa surface, ou, ce qui est la même chose, la vîtesse uniforme de la tranche horizontale du dépôt qui comprend cette molécule, est exprimée, comme on l'a vu (pag. 4 de ce Mémoire), par l'équation

$$u = \frac{g r^3 (p-p')}{3 R^2 A}.$$

Cette vîtesse u est, 1°, en raison directe de la différence $p-p'$ des pesanteurs spécifiques de la molécule solide et du liquide dans lequel elle est submergée; 2° en raison inverse du produit $R^2 A$ de la surface atmosphérique extérieure R^2 dont la molécule est enveloppée, et de la viscosité A du liquide qui forme cette atmosphère.

Or, lorsque la molécule d'argile descend dans l'eau, la différence $p-p'$ est moindre que lorsque cette même molécule descend dans l'alcohol: donc, tout égal d'ailleurs, l'affaissement du dépôt devrait être plus lent dans la première de ces liqueurs que dans la seconde; et, comme c'est précisément le contraire qui arrive, il s'ensuit que le produit R^2A est nécessairement moindre lorsque la molécule descend dans l'eau, que lorsqu'elle descend dans l'alcohol.

Mais, d'après nos expériences, ce n'est pas seulement ce produit R^2A, ce sont ses deux facteurs, pris isolément, qui sont moindres dans le premier cas que dans le second.

En effet, nous avons trouvé précédemment (*nouveaux Mémoires de l'Académie pour l'année* 1816, *pag.* 273), que l'expression A de la viscosité était moindre pour l'eau que pour l'alcohol.

Quant à l'autre facteur R^2, si l'on prend les expériences où les molécules d'argile sont mélangées en mêmes proportions dans ces deux liquides, et que l'on compare deux à deux les tableaux I et VII, II et VIII, III et IX, IV et X, on voit qu'après la cessation de tout affaissement sensible du dépôt argileux, les atmosphères liquides dont restent enveloppées les molécules solides de ce dépôt, sont moins épaisses dans l'eau que dans l'alcohol.

Ainsi, tableaux I et VII, le volume des atmosphères d'eau est au volume des atmosphères d'alcohol comme les nombres 3459 et 4680;

Tableaux I et VIII, comme les nombres 2860 et 3080;

Tableaux III et IX, comme les nombres 4139 et 5480;

Enfin, tableaux IV et X, comme les nombres 3190 et 4190.

D'où l'on conclut, en prenant une moyenne entre ces nombres, que les volumes des atmosphères d'eau sont, aux volumes des atmosphères d'alcohol, dans le rapport de 3412 et 4357, ou de 4 à 5, à-très-peu-près : donc les surfaces R^2 de ces atmosphères sont moindres dans l'eau que dans l'alcohol; donc enfin l'affaissement sur lui-même d'un dépôt de molécules argileuses peut s'effectuer plus rapidement dans le premier de ces liquides que dans le second.

Nous disons *peut s'effectuer*, car ce phénomène n'est point général. Il faut, pour qu'il se manifeste, un concours de circonstances qui n'existent pas toujours simultanément.

La formule

$$u = \frac{g r^3 (p - p')}{3 R^2 A}$$

montre en effet que, toutes choses égales, la vîtesse u de l'affaissement du dépôt est d'autant plus grande, que le rayon r des molécules solides est plus grand lui-même. Si donc, au lieu de triturer l'argile sous l'eau, on la pulvérise à sec, soit dans un mortier, soit sur une table de marbre, à l'aide d'une molette, et qu'on répète avec l'eau et l'alcohol les mêmes expériences dont nous venons d'exposer les résultats, comme ce moyen mécanique de trituration à sec ne divise pas autant les molécules que la trituration sous l'eau, ou dans un liquide quelconque, il pourra arriver, ainsi que nous l'avons observé, que le dépôt s'affaissera plus lentement dans l'eau que dans l'alcohol à 25 degrés de l'aréomètre. Mais ceci n'a lieu que pendant la première et la seconde période de l'affaissement, passé lesquelles cet affaissement se retarde davantage dans l'alcohol ; de sorte que lorsqu'il cesse d'être sensible, et que, par conséquent, le volume des atmosphères liquides est parvenu à son *minimum*, celui des atmosphères alcoholiques reste toujours plus considérable que celui des atmosphères aqueuses.

De même, si l'on diminue la pesanteur spécifique de l'alcohol par une rectification plus complète, le terme $(p - p')$ de la formule deviendra plus grand, et la vîtesse de l'affaissement du dépôt dans cette liqueur pourra surpasser celle avec laquelle le même volume de molécules d'argile s'affaisse dans un même volume d'eau pure et un vase semblable.

C'est aussi ce que nous avons observé, en soumettant à l'épreuve deux mélanges de 1500 centimètres cubes, ou d'un litre $\frac{1}{2}$, formés l'un d'eau pure, et l'autre d'alcohol à 34 degrés, lesquels contenaient chacun 50 centimètres cubes de molécules d'argile.

Nous avons fait sur des mélanges d'oxides métalliques réduits en poussière impalpable dans l'eau et l'alcohol, quelques expériences analogues à celles dont nous venons de rendre compte. Ces substances, d'une pesanteur spécifique beaucoup plus grande que celle de l'argile, et sur lesquelles l'eau ni l'alcohol n'exercent d'autre action que celle de mouiller leur surface, se précipitent dans ces deux liquides en suivant les mêmes lois, et en présentant diversement modifiés les mêmes phénomènes que nous avons exposés jusqu'ici; mais ces expériences sont encore en trop petit nombre pour que nous nous arrêtions à les rapporter.

Application des expériences précédentes à la détermination du rapport des viscosités de l'eau et de l'alcohol.

Rappelons ici que la viscosité d'un liquide est la force avec laquelle les molécules de ce liquide adhèrent entre elles.

De quelque cause que provienne cette force, elle peut toujours être mesurée par l'effort qu'il faut employer pour faire glisser les unes sur les autres, avec une certaine vitesse, les surfaces de ces molécules.

Cette viscosité ou adhérence étant représentée par A dans l'équation

$$u = \frac{g r^3 (p - p')}{3 R^2 A},$$

on en tire :

$$A = \frac{g r^3 (p - p')}{3 R^2 u},$$

dans laquelle les quantités finies g, p, p' et u sont connues et déterminées par l'observation.

Il n'en est pas de même des quantités r^3 et R^2 ; l'extrême ténuité des molécules d'argile que nous avons soumises à nos expériences, ne permet pas d'en saisir les dimensions ni celles de leurs atmosphères. Il est donc impossible d'assigner, au moyen de l'équation précédente, la valeur absolue de A. Mais si l'on suppose que pendant le mouvement uniforme de ces molécules dans l'eau et l'alcohol, les atmosphères qui les enveloppent ont entre elles les mêmes relations que lorsqu'elles cessent de se mouvoir, quand le dépôt qu'elles forment s'est totalement affaissé, on pourra facilement déterminer, sinon les valeurs absolues des viscosités de ces deux liquides, du moins les rapports de ces viscosités.

En effet, faisant généralement la pesanteur spécifique de l'argile $= Q$,

La pesanteur spécifique de l'eau $= P_{,}$,

La viscosité de ce liquide $= A_{,}$,

Le rayon des molécules solides enveloppées de leurs atmosphères d'eau $= R_{,}$,

La vîtesse uniforme d'affaissement de ces molécules dans le liquide $= V_{,}$;

Nommant, de plus, $P_{,,}$ $A_{,,}$ et $V_{,,}$ les quantités analogues dans les mélanges d'argile et d'alcohol, l'équation générale

$$u=\frac{gr^2(p-p')}{3R^2A}$$

se transformera en ces deux équations particulières

$$V_{,}=\frac{gr^2(Q-P_{,})}{3R_{,}^2A_{,}},$$

et

$$V_{,,}=\frac{gr^2(Q-P_{,,})}{3R_{,,}^2A_{,,}},$$

d'où l'on tire

$$A_{,}:A_{,,}::\frac{Q-P_{,}}{R_{,}^2V_{,}}:\frac{Q-P_{,,}}{R_{,,}^2V_{,,}}$$

Maintenant, si l'on considère deux dépôts parvenus au *maximum* de leur affaissemeet dans l'eau et l'alcohol, et que chacun de ces dépôts soit composé d'un certain nombre de molécules solides homogènes, de même figure et de mêmes dimensions; nommant

$K_{,}$ le volume total du dépôt composé des molécules solides et de leurs atmosphères d'eau;

$H_{,}$ le volume des molécules solides comprises dans ce dépôt;

$N_{,}$ leur nombre;

$K_{,,}$ le volume du dépôt dans l'alcohol;

$H_{,,}$ le volume des molécules comprises dans ce dépôt;

$N_{,,}$ leur nombre,

Il est évident que l'on aura

$$K_{,}=N_{,}R_{,}^3,$$

$$K_{,,}=N_{,,}R_{,,}^3.$$

Mais, à cause de l'égalité des molécules solides entre elles, et de la similitude de leurs figures, on a

$$N_{\prime}:N_{\prime\prime}::H_{\prime}:H_{\prime\prime};$$

donc

$$K_{\prime} = a\ H_{\prime}\ R_{\prime}^{3},$$

$$K_{\prime\prime} = a\ H_{\prime\prime}\ R_{\prime\prime}^{3};$$

et, par conséquent,

$$R^{2}_{\prime} = \left(\frac{K_{\prime}}{a\,H_{\prime}}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$R^{2}_{\prime\prime} = \left(\frac{K_{\prime\prime}}{a\,H_{\prime\prime}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Les valeurs de $R^{2}_{\prime}$ et de $R^{2}_{\prime\prime}$, substituées dans la proportion précédente, la changent en celle-ci :

$$A_{\prime}:A_{\prime\prime}::\frac{Q-P_{\prime}}{V_{\prime}\left(\frac{K_{\prime}}{H_{\prime}}\right)^{\frac{2}{3}}}:\frac{Q-P_{\prime\prime}}{V_{\prime\prime}\left(\frac{K_{\prime\prime}}{H_{\prime\prime}}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

dans laquelle il ne s'agit plus que de substituer aux quantités

$$Q,\ P_{\prime},\ V_{\prime},\ K_{\prime},\ H_{\prime},\ \text{ et } P_{\prime\prime},\ V_{\prime\prime},\ K_{\prime\prime},\ H_{\prime\prime},$$

leurs valeurs numériques, pour déterminer le rapport cherché $\frac{A_{\prime}}{A_{\prime\prime}}$.

Ces valeurs numériques sont présentées par ordre dans les deux tables suivantes :

TABLE I^re.

Mélange d'argile et d'eau.

TEMPÉRATURE.	VALEUR de $Q-P_{,}$.	NUMÉROS des TABLEAUX.	INTERVALLE des OBSERVATIONS.	VITESSE uniforme $V_{,}$ ou ESPACE parcouru en 15 minutes	VALEUR de $K_{,}$.	VALEUR de $H_{,}$.	$\left(\frac{K_{,}}{H_{,}}\right)$	$\frac{Q-P}{V_{,}\left(\frac{K_{,}}{H_{,}}\right)}$
degr.				mill.				
18	......	I.	2^e à 3^e.	34	55,738	12,50	2,689	0,01560
10	......	II.	2^e à 8^e.	24	24,150	6,25	2,462	0,02487
17	1,47	III.	3^e à 4^e.	72	32,122	6,25	2,978	0,006962
12	......	IV.	5^e à 6^e.	87	13,110	3,125	2,601	0,006494

TABLE II^e.

Mélange d'argile et d'alcohol.

TEMPÉRATURE.	VALEUR de $Q-P_{\prime\prime}$.	NUMÉROS des TABLEAUX.	INTERVALLE des OBSERVATIONS.	VITESSE uniforme $V_{\prime\prime}$ ou ESPACE parcouru en 15 minutes	VALEUR de $K_{\prime\prime}$.	VALEUR de $H_{\prime\prime}$.	$\left(\frac{K_{\prime\prime}}{H_{\prime\prime}}\right)$	$\frac{Q-P}{V_{\prime\prime}\left(\frac{K_{\prime\prime}}{H_{\prime\prime}}\right)}$
degr.				mill.				
18	......	VII.	2^e à 3^e.	25	71,000	12,50	3,183	0,02010
10	......	VIII.	3^e à 10^e.	18	25,530	6,25	2,555	0,03479
17	1,60	IX.	3^e à 4^e.	51	40,490	6,25	3,475	0,009027
12	......	X.	2^e à 3^e.	60	16,250	3,125	3,002	0,008881

Il importe maintenant de faire remarquer que deux conditions sont indispensables pour rendre comparables entre elles les observations d'où l'on doit tirer les valeurs numériques du rapport $\frac{A_{,}}{A_{,,}}$.

La première de ces conditions est que les molécules solides soient mélangées en même proportion dans l'eau et l'alcohol, afin que, pendant la durée de leur affaissement, les molécules qui constituent les tranches horizontales du dépôt, se trouvent placées à des distances égales les unes des autres dans les deux mélanges.

La seconde condition est que les vases cylindriques qui contiennent chacun de ces mélanges, et dans lesquels s'opère l'affaissement du dépôt, aient les mêmes dimensions.

D'après cette remarque, les expériences comparables sont celles des tableaux I et VII, II et VIII, III et IX, IV et X.

Les valeurs du rapport $\frac{A_{,}}{A_{,,}}$ qu'on en déduit, sont indiquées dans la dernière colonne de la table suivante :

TABLE III^{e}.

TABLEAUX comparables entre eux.	VOLUME du LIQUIDE.	VOLUME D'ARGILE.	TEMPÉRATURE.	DIAMÈTRE de L'ÉPROUVETTE.	RAPPORT des VISCOSITÉS $\frac{A_{,}}{A_{,,}}$.	RAPPORT moyen.
I et VII.	cent. 187,50	12,50	degrés 18	cent. 4	0,7763	
II et VIII.	93,75	6,25	10	1,33	0,7150	
III et IX.	193,75	6,25	17	4	0,7701	0,7524
IV et X.	96,875	3,125	12	1,33	0,7482	

Les différentes valeurs du rapport $\frac{A_{,}}{A_{,,}}$ des viscosités spécifiques de l'eau et de l'alcohol, déduites de nos observations, présentent, comme on voit, une coïncidence remarquable, et aussi parfaite qu'on peut espérer de l'obtenir par des expériences de ce genre.

On en conclut qu'entre 10 et 18 degrés de température, la viscosité de l'eau pure, dont la pesanteur spécifique est 100, est à-très-peu-près les $\frac{77}{100}$ de la viscosité de l'alcohol non rectifié, dont la pesanteur spécifique est 87.

Il paraît, au surplus, que ce rapport devient moindre à mesure que la température s'abaisse, puisqu'à 17 degrés du thermomètre, il serait exprimé par 0,7701; tandis qu'à 12 degrés cette expression se réduirait à 0,7482. Quoique ceci s'accorde avec quelques-unes de nos observations sur le mouvement des mêmes liquides dans des tubes capillaires, cependant l'influence de la température sur le rapport des viscosités de l'eau et de l'alcohol, n'a point été constatée par un assez grand nombre d'expériences pour que nous tirions une conclusion générale du simple fait qui vient d'être cité.

L'application que nous avons faite de nos formules et de nos expériences, à la recherche du rapport entre les viscosités de l'eau et de l'alcohol, indique comment les mêmes formules peuvent s'appliquer à des expériences analogues pour déterminer la viscosité spécifique de différents liquides.

SECTION SECONDE.

DE L'ACTION MUTUELLE DES MOLÉCULES SOLIDES PAR L'INTERMÈDE DE LEURS ATMOSPHÈRES.

Le phénomène le plus général de tous ceux qui font l'objet des observations précédentes consiste en ce que les molécules d'argile mélangées en certaines proportions avec de l'eau et de l'alcohol, laissent surnager au-dessus d'elles parfaitement limpide la portion de ces liqueurs qu'elles ont traversée en s'affaissant; ces mélanges présentent ainsi, pendant l'affaissement des molécules solides qu'ils contiennent, l'aspect de deux liquides de pesanteurs spécifiques différentes séparés l'un de l'autre par un plan de niveau.

Nous avons vu d'ailleurs que chacune de ces molécules restait constamment enveloppée d'une atmosphère liquide dont l'épaisseur diminuait de plus en plus jusqu'à ce qu'elle eût atteint son *minimum;* ce qui avait lieu lorsque le dépôt parvenu au fond du vase ne laissait remarquer aucun affaissement sensible. Il faut alors que la force avec laquelle chaque molécule enveloppée de son atmosphère tend à descendre au fond du vase, soit précisément équivalente à l'adhérence mutuelle des atmosphères contiguës mesurée dans le plan vertical qui coupe perpendiculairement en deux parties égales la distance comprise entre les molécules solides qui servent de noyau à ces atmosphères.

Mais, avant d'arriver à cet état d'équilibre, les atmosphères liquides entraînées par les molécules solides avec lesquelles elles adhèrent, descendent verticalement à travers le liquide qu'elles traversent, précisément de la même manière que si, en devenant tout-à-coup inadhérentes à ces molécules solides, elles acquéraient une certaine pesanteur spécifique plus grande que celle du fluide ambiant. Il est évident, en effet, que, dans ce dernier cas, elles tomberaient au fond du vase comme dans le premier; il est évident, de plus, que la pesanteur spécifique de l'espèce de liquide homogène qu'elles formeraient par leur accumulation dans la partie inférieure du vase, pourrait être facilement mesurée à l'aide de l'aréomètre. Or, puisque le même effet a lieu dans les deux hypothèses, le même instrument ne peut-il pas servir à le manifester et à l'apprécier?

Cette question était facile à résoudre : il suffisait, pour cela, de plonger un aréomètre dans un mélange d'eau et de molécules d'argile, et d'en comparer le degré au degré du même instrument qui serait plongé dans l'eau pure. Je mélangeai en conséquence une partie en volume de molécules de terre à porcelaine avec quinze parties d'eau; et je trouvai que l'aréomètre, qui marquait $\frac{75}{100}$ de degré au-dessus de zéro, étant plongé dans l'eau pure, marquait 9 degrés au-dessous du même point, lorsqu'il était plongé dans le mélange; de sorte que, d'une observation à l'autre, il se trouvait sur la tige de l'instrument un intervalle de 9 degrés $\frac{3}{4}$, la température étant à 14 degrés du thermomètre centigrade.

L'expérience que nous venons de rapporter est si simple, et les physiciens et les chimistes ont eu tant d'occasions d'examiner de semblables mélanges de molécules pulvérulentes avec des liquides doués seulement de la propriété de mouiller leur surface, qu'on ne peut raisonnablement douter que cette expérience n'ait été faite quelquefois; mais, soit qu'elle ait été jugée de peu d'importance, soit qu'on ait été arrêté par la difficulté d'en rendre raison, nous ne l'avons trouvée expliquée ni même décrite dans aucun ouvrage de physique ou de chimie : le phénomène qu'elle fait connaître est cependant du petit nombre de ceux qui servent de limites communes à ces deux sciences, ou plutôt dans lesquels elles se confondent.

Il suffit en effet, pour s'en convaincre, de considérer que l'eau mélangée de molécules d'argile n'a point changé de nature, puisqu'elle n'exerce aucune action dissolvante sur ces molécules, et qu'elle en mouille seulement la surface. Si donc en y plongeant l'aréomètre, il s'y soutient plus élevé que dans ce liquide à l'état de pureté, il faut nécessairement que cet effet provienne de l'action que les molécules solides exercent mutuellement sur leurs atmosphères qui, par leur contiguité, constituent le liquide dans lequel l'aréomètre est plongé.

Il s'agissait de déterminer rigoureusement cette action par une suite d'expériences comparatives, faites sur des masses assez considérables pour que leurs résultats ne présentassent aucune incertitude.

Je pris d'abord 50 centimètres cubes de pâte d'argile à porcelaine, et je les réduisis en poudre impalpable en les triturant sous l'eau.

Je mêlai ces molécules d'argile avec 3 décilitres $\frac{1}{2}$ d'eau pure, de manière que le mélange occupait, dans une éprouvette de 35 millim. de diamètre, un volume total de 4 décilitres. Ainsi l'espace que remplissaient ces molécules solides était à celui que remplissait le mélange, dans le rapport de 1 à 8.

Après onze jours de repos, le dépôt argileux rassemblé au fond de l'éprouvette était réduit à 150 centimètres cubes; par conséquent, le volume des molécules solides était alors à celui de leurs atmosphères comme 1 à 2.

Ce rapport du volume des atmosphères à celui des molécules solides qui leur servent de noyau, est moindre qu'aucun de ceux que nous eussions encore remarqué après la cessation de tout affaissement sensible de différents dépôts. Cela tient à ce que les molécules d'argile sont ici en bien plus grande proportion que celles où elles se trouvaient dans tous les mélanges que nous avions déja soumis à l'épreuve; ce qui rentre dans l'explication que nous avons déja donnée du cinquième phénomène auquel se rapporte le fait particulier dont il vient d'être question.

Je fis ensuite étalonner un flacon de verre cylindrique de la contenance d'un litre et demi, à-très-peu-près, en traçant à sa surface extérieure une droite verticale qui fut divisée en quinze parties par des traits horizontaux, dont l'intervalle marquait exactement la hauteur d'un décilitre mesuré dans ce vase.

J'y versai le mélange d'argile et d'eau qui avait été préparé, et j'y ajoutai assez de ce liquide pour compléter du nouveau mélange un volume de 10 décilitres dont les molécules solides se trouvaient ainsi occuper la vingtième partie.

J'avais fait construire un aréomètre dont la tige, à partir du point zéro qui marquait la pesanteur spécifique de l'eau distillée à 6 degrés de température, portait au-dessous quarante-cinq divisions pour les liqueurs plus pesantes, et trente divisions au-dessus pour les liqueurs plus légères.

La température étant à 14 degrés du thermomètre centigrade, l'aréomètre se soutenait dans l'eau de Seine filtrée, la seule dont nous ayons fait usage, à $\frac{25}{100}$ de degré au-dessus du zéro de cet instrument.

Ces préparations achevées, je fis sortir du vase dans lequel le mélange était contenu, 5 décilitres de l'eau claire qui surmontait le dépôt. Ainsi le volume de ce mélange se trouva réduit à 5 décilitres. Il fut agité suffisamment pour le rendre homogène. Dans cet état j'en remplis une éprouvette qui avait 2 décimètres de hauteur environ; j'observai la température de ce mélange, et je la trouvai aussi de 14 degrés. Enfin l'aréomètre y ayant été plongé jusqu'à ce que le degré zéro de la division effleurât la surface de la liqueur, il remonta jusqu'à marquer $14^{degr.},50$, où il se tint en équilibre. Ayant été ensuite soulevé jusqu'au 20e degré, il redescendit jusqu'au 15e, où il se soutint; observations que nous répétâmes successivement à diverses reprises, et qui donnèrent toujours le même résultat dont la moyenne est exprimée par $14^{degr.},75$.

Cette première observation terminée, je remis dans le flacon de verre le mélange que je venais d'éprouver; et les molécules d'argile s'y retrouvèrent comme auparavant, dans la proportion d'un dixième.

J'y ajoutai alors 2 décilitres d'eau; ce qui abaissa cette proportion à celle de $\frac{1}{14}$. Après l'avoir agité convenablement, j'éprouvai ce nouveau mélange comme j'avais éprouvé le premier. L'aréomètre s'y soutint à $10^{degr.},75$ au-dessous de zéro.

Je remis dans le flacon la portion du mélange qui venait d'être essayée, et j'y ajoutai un décilitre de liquide. Ainsi les molécules d'argile s'y trouvèrent mélangées dans la proportion de $\frac{1}{16}$. L'aréomètre marqua 9 degrés.

En procédant de la même manière, et diminuant successivement la proportion d'argile dans le mélange, j'obtins les neuf observations coordonnées que présente le tableau suivant :

TABLEAU n° XI.

NUMÉROS DES EXPÉRIENCES.	DEGRÉS de TEMPÉRATURE.	DEGRÉS de L'ARÉOMÈTRE dans l'eau.	VOLUME D'ARGILE.	VOLUME TOTAL DU MÉLANGE.	DEGRÉS de L'ARÉOMÈTRE dans le mélange.
1				10	degr + 14,75
2				14	+ 10,75
3				16	+ 9
4		(*)		20	+ 7,50
5	14^{degr}	$-0^{d},75$	1	22	+ 6,75
6				24	+ 5,625
7				26	+ 5
8				28	+ 4,50
9				30	+ 4

On voit qu'à mesure qu'on diminue la proportion du volume des molécules d'argile dans le mélange, l'aréomètre qu'on y plonge s'y tient de plus en plus élevé, suivant une certaine loi; de sorte que cette proportion étant, par exemple, celle de 1 à 10, l'aréomètre se soutient à $14^{degr.},\frac{75}{100}$ au-dessous de zéro; tandis que cette proportion devenant

(*) Les degrés de l'aréomètre affectés du signe — sont les degrés situés au-dessus du zéro de l'instrument quand il est plongé dans le liquide; ceux affectés du signe + sont les degrés situés au-dessous de la même origine.

celle de 1 à 30, l'aréomètre ne se soutient plus qu'à 4 degrés au-dessous du même point.

Il nous restait à faire des expériences analogues sur des mélanges d'argile et d'alcohol.

J'avais trituré sous l'eau 50 centimètres cubes de pâte de porcelaine que je destinais à ces expériences. Après les avoir laissés reposer pendant onze jours, je décantai le liquide qui les surmontait, et j'en desséchai autant que possible le dépôt à l'aide de bandes de papier brouillard que je faisais descendre jusqu'à sa surface.

On versa ensuite, en remplacement de l'eau qui venait d'être enlevée, environ 4 décilitres d'alcohol rectifié qui marquait 38 degrés à l'aréomètre ordinaire, c'est-à-dire 28 degrés sur la tige du nôtre; le zéro de celui-ci qui marquait le poids de l'eau distillée correspondant à 10 degrés de celui dont on fait ordinairement usage.

Je mis ce mélange dans un flacon de verre de la contenance d'un litre $\frac{1}{2}$ sur la surface duquel était tracée, comme sur la surface du premier qui nous avait servi, une ligne verticale divisée en quinze parties, dont l'intervalle marquait la hauteur d'un décilitre mesuré dans ce flacon. On y a ajouté assez d'alcohol pour que le volume total fût de 5 décilitres. La proportion de l'argile au volume total du mélange s'est ainsi trouvée de 1 à 10. La température du mélange était à 14 degrés du thermomètre centigrade.

Notre éprouvette ayant été remplie de ce mélange, l'aréomètre y a été plongé. Mais ce mélange a été trouvé beaucoup plus visqueux que celui d'argile et d'eau fait dans les mêmes proportions; cette viscosité s'est montrée telle, que l'aréomètre qui y flottait semblait avoir perdu sa sensibilité sur un intervalle de 5 degrés. Ainsi, après avoir été enfoncé dans la liqueur au-dessous de 5 degrés, il remontait à cette division; et si on l'élevait au-dessus de zéro, étant abandonné à lui-même, il redescendait à ce point.

Il restait stationnaire entre zéro et 5 degrés, dans quelque position qu'on le plaçât, précisément de la même manière qu'au-dessous de l'angle du frottement un corps solide reste immobile sur un plan incliné, quelle que soit l'inclinaison de ce plan.

Nous supposerons que, abstraction faite de la cause qui diminue la sensibilité de l'aréomètre dans cette première observation, la pesanteur spécifique du mélange peut être indiquée par une division moyenne entre zéro et 5 degrés, ou par $2^{\text{degr.}},50$.

Ce mélange ayant été remis dans le flacon, j'y ai ajouté 2 décilitres d'alcohol. Ainsi les molécules solides s'y sont trouvées mélangées dans la proportion de 1 à 14; l'aréomètre a marqué 9 degrés au-dessus de zéro.

J'ai fait trois autres expériences par l'addition successive d'un décilitre d'alcohol au mélange qui avait été déja mis à l'épreuve; et, comme l'alcohol me manqua pour les continuer, je les repris dix jours après, en recommençant même celles que je viens de rapporter.

La température était descendue à 12 degrés; et l'alcohol qui surnageait le mélange marquait $33^{\text{degr.}},25$, suivant la division de l'aréomètre ordinaire, ou, ce qui revient au même, $23^{\text{degr.}},25$ sur la tige de celui que j'employais.

Les molécules d'argile étant mélangées avec l'alcohol dans la proportion de $\frac{1}{6}$, on remarqua qu'à cause de la viscosité de ce mélange, l'aréomètre plongé au-dessous de 5,50 remontait à ce point; et qu'élevé au-dessus d'un degré, il descendait de nouveau à ce terme, et s'y fixait. Ainsi la sensibilité de cet instrument ne se manifestait pas dans un intervalle de 4 degrés $\frac{1}{2}$; observation d'accord avec celle que nous avions faite, dans les mêmes circonstances, quelques jours auparavant.

Le degré moyen de l'aréomètre peut être supposé ici

$$\frac{1 + 5,50}{2} = 3^{d},25.$$

Ayant ajouté au mélange qui venait d'être essayé un décilitre d'alcohol, on a trouvé l'aréomètre insensible entre 5 et 8 degrés; ce qui donne, pour le degré moyen de cet instrument,

$$\frac{5 + 8}{2} = 6,50.$$

Aux 6 décilitres qui formaient le volume total de ce mélange, on a ajouté un nouveau décilitre d'alcohol; ce qui a établi la proportion de 1 à 14 entre le volume des molécules d'argile et celui du nouveau mélange. En y faisant osciller l'aréomètre, il s'y est arrêté en montant à 10 degrés, et en descendant à 8; ce qui donne, pour terme moyen d'équilibre,

$$\frac{10 + 8}{2} = 9.$$

Dans les observations suivantes faites sur des mélanges dont on a diminué la densité par l'addition successive d'un décilitre d'alcohol, l'aréomètre s'est fixé sans aucune incertitude aux degrés indiqués dans le tableau suivant, à partir de la onzième observation.

TABLEAU n° XII.

NUMÉROS des expériences.	DEGRÉS de température.	DEGRÉS de l'aréomètre dans l'alcohol.	VOLUME d'argile.	VOLUME total du mélange.	DEGRÉS de l'aréomètre dans le mé[illegible]
1				10	— 3 degs.
2				14	— 9
3	14 degs.	— 23 degs.	1	16	— 10,5
4				18	— 12
5				20	— 13
6				10	— 3,25
7				12	— 6,50
8				14	— 9
9				16	— 10,75
10				18	— 12,25
11	12	— 23,25	1	20	— 13,25
12				22	— 14,25
13				24	— 15
14				26	— 15,50
15				28	16
16				30	— 16,50

On voit, en jetant les yeux sur ce tableau, que l'aréomètre s'est tenu plus élevé dans l'alcohol mélangé d'argile, à mesure que l'on a diminué la proportion de cette dernière substance. Ainsi cette proportion étant celle de 1 à 10, par exemple, cet instrument s'est soutenu à $3^{\text{kgr.}},25$ au-dessus de zéro ; tandis que, cette proportion étant celle de 1 à 30, il est descendu à $16^{\text{kgr.}},50$. En comparant entre eux les deux tableaux n° XI et n° XII, l'un et l'autre font connaître ce phénomène général, dont nous allons essayer de donner l'explication.

HUITIÈME PHÉNOMÈNE.

Lorsque des molécules solides sont suspendues dans un liquide qui n'exerce sur elles aucune action dissolvante, mais qui jouit de la propriété de mouiller leur surface, et que ces molécules entrent dans le mélange qu'elles forment avec ce liquide en assez grande proportion pour que leurs atmosphères mutuelles se pénètrent, l'aréomètre plongé dans ce mélange s'y soutient d'autant plus élevé, que la proportion de ces molécules solides y est plus considérable.

EXPLICATION.

Il est évident d'abord que l'eau ni l'alcohol n'exercent aucune action dissolvante sur les molécules d'argile à porcelaine que nous avons mélangées avec ces deux liqueurs, puisqu'en essayant à l'aréomètre, ou par tout autre moyen, les portions de ces liquides qui surmontent le dépôt des molécules, et dont la hauteur s'accroît à mesure que celle du dépôt diminue, on ne remarque aucune différence entre le liquide dégagé du mélange et celui de même nature qui aurait été conservé dans son état de pureté.

Celui qui se trouve interposé entre les molécules solides n'a, par conséquent, subi aucune altération dans sa constitution naturelle. L'augmentation de densité qu'il accuse à l'aréomètre est donc une propriété accidentelle, due uniquement à la situation dans laquelle il se trouve placé par rapport aux molécules solides qu'il enveloppe, ou, ce qui est la même chose en d'autres termes, à l'action que ces molécules exercent sur lui.

Or, puisque cette action est mesurée par une augmentation de densité, il est clair qu'on en aura l'expression exacte en retranchant la densité du liquide pris à l'état de pureté de la densité de ce même liquide quand il remplit les interstices que laissent entre elles les molécules solides.

Par exemple, la densité de l'eau pure étant exprimée par —0,75 dans le tableau n° XI, il suffira de retrancher ce nombre de celui qui indique la densité du liquide mélangé à chaque observation. Ainsi, l'aréomètre ayant marqué pour la première $+14^{\text{degr.}},75$, on aura, pour l'action des molécules solides sur le fluide qui s'y trouve interposé,

$$+14,75+0,75=+15^{\text{degr.}},50.$$

De même, pour la dernière observation, où l'aréomètre indique +4 degrés, l'action des molécules d'argile sur le liquide n'est plus que

$$+4^{\text{degr.}}+0,75=+4,75.$$

Ainsi, dans les observations prises aux deux extrémites du tableau, les actions exercées par les molécules solides sur le fluide qui en remplit les intervalles, sont entre elles comme les nombres 15,50 et 4,75, ou dans le rapport de 62 à 19.

En appliquant le même raisonnement aux observations du tableau n° XII, faites avec des mélanges d'argile et d'alcohol, on voit que l'action des molécules sur le liquide interposé dans la première observation est exprimée par

$$-3^{\text{degr.}} + 23 = +20\,;$$

tandis qu'elle est exprimée dans la dernière par

$$-16{,}50 + 23{,}25 = +6{,}75\,;$$

de sorte que ces actions sont entre elles, à-très-peu-près, comme 3 est à 1.

Nous avons présenté dans la troisième colonne des deux tableaux suivants, n° XIII et n° XIV, l'augmentation de densité de l'eau et de l'alcohol due à l'action moléculaire de l'argile qui est suspendue dans ces liqueurs en différentes proportions.

TABLEAU n° XIII.

NUMÉROS DES EXPÉRIENCES.	RAPPORT du VOLUME D'ARGILE au VOLUME TOTAL DU MÉLANGE.	ACTION DES MOLÉCULES sur leurs ATMOSPHÈRES d'eau.	DEGRÉS du THERMOMÈTRE.	DEGRÉS DE L'ARÉOMÈTRE dans LE FLUIDE PUR.
1	$\frac{1}{10}$	+ 15,50		
2	$\frac{1}{1\text{[illegible]}}$	11,50		
3	$\frac{1}{16}$	9,75		
4	$\frac{1}{\text{[illegible]}}$	8,25		
5	$\frac{1}{22}$	7,50	14 degr.	— 0,75
6	$\frac{1}{26}$	6,375		
7	$\frac{1}{\text{[illegible]}6}$	5,75		
8	$\frac{1}{\text{[illegible]}}$	5,25		
9	$\frac{1}{3\text{[illegible]}}$	4,75		

TABLEAU n° XIV.

NUMÉROS des expériences.	RAPPORT du volume d'argile au volume total du mélange.	ACTION des molécules sur leurs atmosphères d'alcohol.	DEGRÉS du thermomètre.	DEGRÉS de l'aréomètre dans le fluide pur.
1	$\frac{1}{12}$	20		
2	$\frac{1}{14}$	14		
3	$\frac{1}{16}$	12,50	14 degr.	— 23
4	$\frac{1}{18}$	11		
5	$\frac{1}{20}$	10		
6	$\frac{1}{12}$	20		
7	$\frac{1}{13}$	16,75		
8	$\frac{1}{14}$	14,25		
9	$\frac{1}{16}$	12,50		
10	$\frac{1}{18}$	11		
11	$\frac{1}{20}$	10	12	— 23,25
12	$\frac{1}{22}$	9		
13	$\frac{1}{24}$	8,25		
14	$\frac{1}{26}$	7,75		
15	$\frac{1}{28}$	7,25		
16	$\frac{1}{30}$	6,75		

On voit, en comparant ces deux tableaux, que l'action exercée sur l'alcohol par les molécules d'argile est toujours plus grande que l'action exercée sur l'eau par la même substance, et cela dans le rapport à-très-peu-pres constant de 3 à 4, quelles que soient les proportions du mélange.

Nous avions trouvé déja en comparant les tableaux I et VII de la première section de ce Mémoire, que le volume des atmosphères d'alcohol était à celui des atmosphères aqueuses qui enveloppent des molécules solides, dont le dépôt au fond de ces liqueurs est parvenu au moindre espace qu'il puisse occuper, comme les nombres 34 et 46, qui sont aussi à-très-peu-près dans le même rapport de 3:4.

Enfin la viscosité d'un mélange d'argile et d'alcohol dans la proportion de $\frac{1}{4}$ est telle, comme nous l'avons remarqué plus haut, que l'aréomètre qu'on y plonge perd en quelque sorte sa sensibilité dans l'intervalle de 5 degrés de son échelle; tandis que, plongé dans un mélange d'argile et d'eau fait dans la même proportion, à peine s'aperçoit-on que la sensibilité de cet instrument soit altérée dans l'intervalle d'un demi-degré. Or, cette plus grande viscosité de l'alcohol interposé entre des molécules d'argile situées entre elles à des distances déterminées, est une preuve évidente que l'argile en contact avec l'alcohol exerce sur cette liqueur une action plus forte, et qui s'étend à une plus grande distance que l'action exercée sur l'eau par cette même substance solide réduite au même degré de ténuité et dans des circonstances tout-à-fait semblables.

Conduits, à l'aide de l'expérience et de quelques considérations très-simples, à constater l'action que des molécules solides exercent sur différents liquides doués de la propriété de mouiller leur surface, et parvenus à soumettre en quelque sorte cette action au poids et à la mesure, il nous reste à l'analyser, et à déterminer la loi suivant laquelle elle se manifeste.

Il ne faut pas perdre de vue que cette action est représentée ici par une certaine augmentation de densité du liquide interposé entre les molécules solides dont il mouille la surface. Or la densité n'est autre chose que le rapport de la masse au volume, et la masse elle-même n'est que le produit d'une certaine quantité de molécules matérielles, par la pesanteur ou la force accélératrice dont elles sont animées; de sorte qu'en nommant M la masse d'un corps, Q la quantité de molécules matérielles dont il est formé, et F leur pesanteur; D la densité de ce corps, et V son volume, on a toujours

$$D = \frac{M}{V} = \frac{QF}{V},$$

d'où l'on voit que la densité D qu'exprime cette fraction peut également augmenter, soit que son numérateur ou la masse QF augmente, soit que son dénominateur ou le volume V devienne moindre.

A tous les points de la surface de la terre où la pesanteur est constante, la masse d'un corps composé d'une quantité déterminée de molécules matérielles est invariable; par conséquent, les variations que l'on observe dans sa densité ne peuvent en aucune manière dépendre de sa masse : elles ne sont dues qu'aux altérations qu'éprouve son volume par l'influence de la température. A mesure qu'elle s'abaisse, le volume du corps diminue, et sa densité s'accroît. Ainsi l'introduction du calorique en plus ou moins grande quantité dans les diverses substances dont nous pouvons disposer à la surface de notre globe, est la seule cause qui puisse faire varier la densité de ces substances.

Mais si, en supposant la masse entière de la terre réunie à son centre, un corps quelconque en était rapproché, l'action de la gravité terrestre augmenterait sur ce corps en raison inverse du quarré de la distance à ce centre où il serait placé; sa pesanteur, et par conséquent sa densité, augmenteraient exactement dans le même rapport, sans que son volume reçût la moindre altération, si d'ailleurs la température ne variait pas.

Conservant la même hypothèse, on conçoit que si des couches liquides formaient une atmosphère au noyau solide de notre globe, les couches les plus rapprochées de ce noyau y graviteraient avec plus de force; de telle sorte que si l'on pouvait plonger dans une de ces couches inférieures un aréomètre dont la pesanteur fût invariable et indépendante de sa distance au centre d'attraction de ces couches liquides, cet instrument, en s'enfonçant plus ou moins dans la couche atmosphérique où il serait submergé, en indiquerait exactement la densité.

Or il n'existe autour d'une molécule solide, d'atmosphère liquide qui lui soit adhérente, que parce que le fluide contigu à cette molécule gravite sur elle précisément de la même manière qu'une atmosphère liquide graviterait sur notre globe en vertu de la pesanteur terrestre; de sorte que si l'on avait un instrument assez parfait, tel, par exemple, qu'un aréomètre assez petit et assez sensible pour que, étant plongé dans une couche quelconque de l'atmosphère liquide d'une molécule, il pût indiquer la densité de cette couche, ou plutôt sa gravitation vers la molécule, on trouverait cette force d'autant plus grande, que la couche dont il s'agit en serait placée à une moindre distance; et comme, indépendamment de cette action, le système formé de la molécule et de son atmosphère n'en est pas moins soumis à l'action de la gravité terrestre, si le phénomène a lieu à la surface de notre globe, on conçoit que *la gravitation moléculaire* de la couche atmosphérique qui soutiendra l'aréomètre, sera évidemment exprimée par la différence entre le nombre de degrés que marquera cet instrument, et celui qu'il marquerait s'il était plongé dans le liquide pur, en supposant ce liquide soumis seulement à l'action de la gravité ordinaire. Telle serait l'explication du phénomène qui nous occupe, si l'on se bornait à considérer isolément une seule molécule solide environnée de son atmosphère en équilibre. On conçoit de plus, que dans ce cas simple, chacune des couches concentriques de cette atmosphère est nécessairement pressée du dedans au dehors par le noyau solide qu'elle enveloppe, précisément avec la même force que celle avec laquelle cette couche gravite elle-même sur ce noyau du dehors au dedans; autrement, l'équilibre serait détruit, et l'atmosphère n'existerait point telle qu'on la suppose.

Que l'on considère maintenant deux molécules semblables, suspendues dans un liquide, enveloppées l'une et l'autre de leurs atmosphères, et tellement rapprochées, que ces atmosphères se pénètrent : il est évident qu'au moment même de cette pénétration, la portion lenticulaire de liquide qui leur devient commune, se trouve pressée en même temps par les deux molécules solides; tandis que le reste de chacune des deux atmosphères n'est soumis qu'à l'action d'une seule molécule. Il n'est pas moins évident, qu'en vertu de cet excès de pression, la portion du fluide qui l'éprouve doit se porter latéralement vers les régions de ces atmosphères où la pression est moindre, jusqu'à ce que les deux molécules solides qui leur servaient de noyau continuant d'être entraînées par cette espèce d'écoulement, en vertu d'une force qui s'accroît de plus en plus, tombent enfin l'une sur l'autre pour ne former qu'un centre unique d'attraction autour duquel les deux atmosphères finissent par se confondre en une seule dont toutes les couches concentriques se mettent en équilibre après quelques oscillations.

Si nous avons bien décrit cet effet, on conçoit sans peine comment deux molécules libres viennent se réunir en leur centre commun de gravité, lorsqu'elles se trouvent assez rapprochées pour que leurs atmosphères se pénètrent. Elles obéissent alors aux pressions qu'elles exercent sur les portions de ces atmosphères qui leur sont communes; et c'est par cet intermède seul qu'elles s'attirent mutuellement.

Quoiqu'il ne soit point de notre objet actuel de rechercher quelle position doivent occuper dans un liquide où elles sont disséminées, les molécules solides que nous considérons, pour s'y constituer en état d'équilibre, nous remarquerons qu'en les supposant égales et semblables, elles doivent se trouver toutes placées à la même distance les unes des autres. Or, en conséquence de cette condition, il est évident que si l'on prend quatre de ces molécules à leur moindre distance, on pourra les réunir trois à trois dans un même plan, et qu'elles occuperont nécessairement les quatre angles solides d'un tétraèdre symétrique, le plus simple de tous les corps réguliers. Si maintenant on isole ce tétraèdre dans le liquide, les quatre molécules qui en occupent les angles, n'étant soumises qu'à leur attraction mutuelle, se précipiteront les unes sur les autres en leur centre commun de gravité.

Imaginons maintenant un nombre indéfini de molécules semblables enveloppées de leurs atmosphères et disposées symétriquement entre elles, comme nous venons de le dire; il est clair qu'en vertu de cette disposition symétrique, aucune d'elles ne pourrait se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. Mais cet état d'équilibre laisse subsister sans altération les pressions que chacune d'elles exerce dans l'étendue de sa sphère d'activité, précisément de la même manière que la gravité continue d'agir sur un système de corps en équilibre, quoique cet état d'équilibre suspende l'effet visible de cette force, qui serait de mouvoir ces corps vers le centre de la terre.

Ainsi des molécules solides disséminées à des distances moindres que le diamètre de leurs atmosphères dans un liquide susceptible de mouiller leur surface, pressent ou attirent en tout sens le liquide interposé, comme le feraient autant de pistons qui leur seraient substitués; donc, en vertu de la propriété caractéristique des liquides, ces pressions partielles se transmettant dans toute l'étendue du liquide interposé entre les molécules solides, augmentent réellement la densité de ce liquide, suivant les indications de l'aréomètre.

Dans un pareil état de choses, cet instrument se trouve en effet plongé dans les couches liquides atmosphériques d'une certaine quantité de molécules solides; et la densité qu'il accuse est due tout-à-la-fois à la gravitation du liquide sur notre globe, et à sa gravitation sur le système de molécules solides qu'il enveloppe.

Recherchons maintenant suivant quelle loi s'exerce cette seconde gravitation, en raison de la quantité de molécules solides disséminées symétriquement dans un espace déterminé.

Application des expériences précédentes à la détermination de la loi suivant laquelle les molécules solides agissent les unes sur les autres par l'intermède de leurs atmosphères.

Puisqu'une certaine quantité de molécules solides disséminées dans un liquide, comme nous venons de le dire, à des distances moindres que le diamètre de leurs atmosphères, pressent le fluide interposé qui les mouille, comme le presseraient autant de pistons semblablement placés et doués chacun d'une force égale, il est évident que la somme de ces pressions se transmettant à tous les points du liquide circonscrit dans l'espace donné, la pression totale qu'il éprouve et qui représente la gravitation des molécules les unes sur les autres, est exactement proportionnelle au nombre des molécules comprises dans le même espace.

Ainsi, en appelant P cette pression totale à laquelle sont soumis tous les points du liquide, ou, ce qui est la même chose, la gravitation mutuelle des molécules solides; N leur nombre dans l'unité de volume d'un mélange quelconque, et F la force constante avec laquelle chacune de ces molécules, si elle était isolée, presserait le fluide ambiant, on doit avoir :

$$P = NF,$$

équation qu'il s'agit de vérifier par l'expérience.

Dans nos observations, P représente la différence aréométrique des liquides purs et des liquides mélangés d'argile;

et comme cette différence indique l'augmentation de densité due à la gravitation du liquide sur les molécules, nous la désignerons sous le nom de *densité moléculaire*. Quant au nombre N des molécules comprises dans l'unité de volume d'un mélange quelconque, il est évident qu'en nommant Q le volume constant d'argile employé dans nos mélanges, et x le volume variable de chacun d'eux, on a :

$$1 : N :: x : Q;$$

donc

$$N = \frac{Q}{x},$$

et, par conséquent,

$$Px = QF;$$

ce qui signifie que *la densité moléculaire*, c'est-à-dire *la différence aréométrique des liquides purs et des liquides mélangés d'argile, multipliée par le volume de ces mélanges, doit être une quantité constante.*

En faisant à la recherche de cette quantité constante, que nous appellerons, pour abréger, *masse moléculaire*, puisqu'elle est le produit du volume de chaque mélange par la *densité moléculaire*, l'application des valeurs numériques données par nos observations sur des mélanges d'argile et d'eau, nous aurons, pour l'expression de cette masse, les nombres portés dans la cinquième colonne du tableau suivant :

TABLEAU n° XV.

NUMÉROS DES EXPÉRIENCES.	QUANTITÉ de MATIÈRE SOLIDE = Q.	VOLUME TOTAL DU MÉLANGE = x.	DENSITÉ MOLÉCULAIRE = P.	MASSE MOLÉCULAIRE P.x = FQ.
1		10	15,50	155
2		14	11,50	161
3		16	9,75	156
4		20	8,25	165
5	1	22	7,50	165
6		24	6,375	153
7		26	5,75	149
8		28	5,25	147
9		30	4,75	143

On voit que les cinq premières valeurs de la *masse moléculaire* FQ oscillent entre les nombres 155 et 165; tandis que les quatre dernières vont en décroissant de 153 à 143, à mesure que l'on augmente le volume du mélange.

Or, les oscillations qui se montrent entre les cinq premières valeurs de FQ ne peuvent provenir que de quelques légères inexactitudes dans les observations aréométriques; inexactitudes d'autant plus probables, que nous nous sommes servis d'un instrument plus grossier, et sur la tige duquel il était très-difficile d'apprécier avec précision les fractions de degré, l'intervalle entier d'un degré à l'autre n'étant au plus que de 1 millimètre $\frac{1}{7}$. Ces légères différences ne se seraient pas manifestées si nous eussions fait usage d'un aréomètre du même genre dont la tige eût été plus mince ou mieux calibrée, ou si nous eussions employé un aréomètre à plateau.

Quant au décroissement progressif des valeurs de FQ, depuis la sixième jusqu'à la neuvième observation inclusivement, c'est-à-dire à commencer d'un mélange où l'argile entre dans la proportion d'un 24ᵉ, il s'explique aisément, parce que, dans cette proportion d'argile, et au-dessous, la distance des molécules devient assez grande pour qu'une partie d'entre elles, se trouvant placées hors de la sphère d'activité des molécules voisines, dans le plan horizontal qu'elles occupent, puissent obéir librement, avec les atmosphères qui les enveloppent, à la seule action de la gravité terrestre telle qu'elle s'exerce dans le liquide pur.

Alors la quantité de matière solide sur laquelle ce liquide agit en vertu de la force ou affinité F, devient moindre d'autant; ce qui diminue nécessairement la valeur de *la masse moléculaire* FQ, conformément aux observations.

Le tableau suivant, de la même forme que le précédent, exprime des quantités analogues pour des mélanges d'argile et d'alcohol.

TABLEAU n° XVI.

NUMÉROS DES EXPÉRIENCES.	QUANTITÉ de MATIÈRE SOLIDE $= Q$	VOLUME TOTAL DU MÉLANGE $= x$.	DENSITÉ MOLÉCULAIRE $= P$.	MASSE MOLÉCULAIRE $Px = FQ$.
1		10	degr 20	200
2		14	14	196
3		16	12,50	204
4		18	11	196
5		20	10	200
6		10	20	200
7		12	16,75	204
8		14	14,25	199,5
9	1	16	12,50	204
10		18	11	198
11		20	10	200
12		22	9	198
13		24	8,25	198
14		26	7,75	201,5
15		28	7,25	203
16		30	6,75	202,5

On voit que dans les seize observations qui composent ce tableau, la plus grande variation des valeurs de la quantité FQ n'est que de 196 à 204, et que la moyenne entre toutes est à-très-peu-près exprimée par le nombre 200.

On voit encore qu'en toutes proportions comprises entre le 10^e et le 30^e, les molécules solides mélangées avec l'alcohol agissent les unes sur les autres par l'intermède de leurs atmosphères; de manière qu'aucune d'elles ne peut se dégager de celles qui l'avoisinent dans le plan horizontal où elle se trouve actuellement, pour se mouvoir avec une vîtesse plus grande ou plus petite que celle de cette espèce de réseau.

Les expressions de F Q déduites des tableaux n° XV et n° XVI, sont entre elles exactement comme les nombres 160 et 200, c'est-à-dire comme 4 et 5; mais les quantités Q de matière solide étant les mêmes dans nos deux espèces de mélanges, il s'ensuit que ce rapport de 4 à 5 est celui des deux forces différentes avec lesquelles l'eau et l'alcohol mouillent la surface des molécules d'argile. Ainsi l'adhérence de ces molécules à l'alcohol est plus forte que leur adhérence à l'eau.

La comparaison de nos deux tableaux prouve aussi que les atmosphères d'alcohol dont les molécules d'argile sont enveloppées sont plus épaisses que les atmosphères d'eau qui enveloppent les mêmes molécules, puisque, dans la première de ces liqueurs, leur action se manifeste encore à des distances auxquelles elles cessent de se manifester dans la seconde. Ainsi les faits à la connaissance desquels toutes nos expériences précédentes nous ont conduits se trouvent de nouveau confirmés.

Nous avons appelé dans ce qui précède, *densité moléculaire* ou *différence aréométrique*, la différence observée entre le volume d'un aréomètre submergé dans un liquide pur, et le volume du même instrument submergé dans un mélange formé de quantités variables de ce même liquide et d'un volume constant de certaines molécules solides dont il a la propriété de mouiller les surfaces.

La théorie que nous avons donnée de l'action qu'exercent sur le liquide du mélange ces molécules solides lorsqu'elles sont suffisamment rapprochées pour que leurs atmosphères se pénètrent, nous a indiqué que la *différence aréométrique*, multipliée par le volume variable du mélange, était une quantité constante.

Nos observations ont vérifié exactement cette théorie.

Mais cette différence aréométrique ne représente-t-elle pas la différence de pesanteur spécifique du liquide pur, et du liquide mélangé de molécules solides, au lieu de représenter l'action mutuelle que ces molécules exercent à distance sur le liquide interposé?

Il convient, avant d'aller plus loin, de lever cette espèce de doute.

Il nous suffira, pour cela, de faire voir que la différence de pesanteur spécifique du liquide pur, et du liquide mélangé, est exprimée par une quantité aérométrique tout-à-fait différente de celle qui exprime l'action moléculaire dont nous avons donné la théorie :

Soient donc :

Le volume constant des molécules solides $= a$;

Le volume variable du mélange $= x$;

La pesanteur spécifique du liquide pur $= p'$;

La pesanteur spécifique des molécules solides $= p$;

Le volume de l'aréomètre submergé dans le liquide pur $= h$;

Le volume du même instrument submergé dans un mélange quelconque $= z$.

Nous aurons d'abord, pour la pesanteur spécifique du mélange,

$$\frac{pa + p'(x-a)}{x};$$

Mais, en vertu des lois de l'hydrostatique, les volumes de l'aréomètre submergés dans des liquides de pesanteurs spécifiques différentes, sont entre eux en raison inverse de ces pesanteurs. On a donc :

$$hp' = \frac{z\left(pa + p'(x-a)\right)}{x}$$

d'où l'on tire

$$\left(h-z\right)x = z\frac{a(p-p')}{p};$$

c'est-à-dire que la différence aréométrique $h-z$, multipliée par le volume x des liquides mélangés, est proportionnelle au volume variable z de la partie de l'aréomètre submergée dans ces mélanges. D'où il suit que le produit $(h-z)x$ est aussi nécessairement variable. Mais nous avons trouvé ce produit constant quand il exprime l'action à distance des molécules solides sur le liquide interposé : donc cette action moléculaire à distance est essentiellement indépendante de la différence des pesanteurs spécifiques du liquide pur, et des divers mélanges.

Reprenons maintenant l'équation

$$P = \frac{Q}{x}F,$$

que nous avons vérifiée plus haut (tableaux XV et XVI); et imaginons, pour un instant, que le fluide interposé entre les molécules solides supposées fixes dans tout l'espace où elles sont disséminées, s'évanouisse tout-à-coup; il restera une espèce de corps poreux dont la densité sera toujours proportionnelle au rapport $\frac{Q}{x}$ de la quantité de ces molécules à l'espace qu'elles occupent, quelle que soit d'ailleurs la force accélératrice F dont elles pourront être animées. Donc la gravitation P qu'elles exerceront les unes sur les autres, par l'intermède du liquide que l'on restituera dans les intervalles qui les séparent, sera toujours proportionnelle à la densité du système qu'elles forment, abstraction faite de ce liquide.

Il ne reste plus qu'à assigner le rapport de cette densité aux distances des molécules.

Pour y parvenir, concevons d'abord une suite de molécules matérielles très-rapprochées entre elles, et disposées à distance égale les unes des autres sur une ligne mathématique de longueur donnée. Concevons ensuite que les mêmes molécules soient placées, toujours à égale distance les unes des autres, sur une seconde ligne d'une longueur sous-double.

Il est évident qu'en comparant entre eux ces deux systêmes, et en les considérant l'un et l'autre comme deux composés matériels, la densité du premier sera à la densité du second dans le rapport de 1 à 2; puisque le même nombre de molécules s'étend, dans le premier cas, sur un espace double de celui qu'il occupe dans le second.

Il est évident aussi que les distances qui séparent les molécules sur la première ligne, sont aux distances qui les séparent sur la seconde, comme 2 est à 1.

Les densités des deux systêmes linéaires de molécules que nous considérons, sont donc entre elles en raison inverse des distances de ces molécules sur les lignes où elles sont rangées.

Supposons maintenant qu'à chaque point occupé par les molécules placées à des distances égales sur une même ligne, on élève, perpendiculairement à cette droite, d'autres lignes de même longueur qui reçoivent chacune un même nombre de molécules égales aux premières et semblablement disposées. On aura ainsi un quarré divisé en quarrés plus petits, dont les angles seront occupés par une de ces molécules matérielles.

Supposons ensuite que les molécules rangées sur l'un des côtés du grand quarré se rapprochent à une distance sous-double, en entraînant avec elles les perpendiculaires à ce côté qui leur correspondent, on conçoit que le même nombre de molécules qui étaient répandues sur la surface d'un quarré, se trouveront renfermées dans une surface rectangulaire qui ne sera que la moitié de ce quarré. Ainsi la densité du dernier système sera double de celle du premier.

Mais si, en même temps que les molécules se sont rapprochées sur l'un des côtés du quarré primitif, elles se rapprochent encore de la même quantité dans le sens orthogonal, l'espace occupé par la somme de toutes les molécules matérielles deviendra un quarré sous-quadruple du premier, et par conséquent la densité du système moléculaire que comprend celui-ci, sera, à la densité du système que comprend celui-là, comme 4 est à 1, les distances des molécules étant, dans les deux systèmes, comme 1 : 2, c'est-à-dire en raison inverse de la racine quarrée des nombres qui expriment les rapports des densités.

D'où il suit que lorsque des molécules matérielles sont disposées entre elles à des distances égales et très-petites sur le même plan, les densités des systèmes qu'elles forment suivant les distances respectives auxquelles elles se trouvent placées, sont en raison inverse du quarré de ces distances.

Enfin, reprenant le système superficiel que nous venons de considérer, et plaçant le long d'une ligne perpendiculaire à son plan, et à des intervalles égaux à ceux qui séparent les molécules sur ce plan, autant de quarrés parallèles au premier, et dont chacun soit couvert d'un même nombre de molécules semblablement disposées, on aura un volume cubique dans toute l'étendue duquel seront disséminées, à des intervalles égaux, des molécules matérielles égales.

Si l'on conçoit maintenant que toutes ces molécules se rapprochent parallèlement aux trois axes orthogonaux de ce cube, à des distances sous-doubles de celles où elles étaient placées, ce corps sera transformé en un autre qui contiendra la même quantité de matière dans un espace sous-octuple.

La densité du premier cube sera donc à celle du cube contracté :: 1:8.

Et comme les distances des molécules du premier système sont, aux distances des molécules du second, dans le rapport de 2 à 1, ou dans le rapport inverse de la racine cubique de leurs densités respectives, il s'ensuit que ces densités sont en raison inverse du cube des distances comprises entre les molécules matérielles de chaque système. Donc, lorsque des molécules matérielles égales sont placées à des intervalles égaux et très-petits dans un espace quelconque à trois dimensions, la densité du système qu'elles forment est en raison inverse du cube de leurs distances.

Nous aurions pu parvenir immédiatement à cette conclusion, en considérant que les molécules solides disséminées dans un liquide, comme nous l'avons supposé, se disposent toujours symétriquement entre elles, en occupant, prises quatre à quatre à leurs moindres distances, les angles d'un tétraèdre régulier. Si donc l'on désigne par T le volume de l'un quelconque de ces tétraèdres; par y la longueur de l'une de ses arêtes, qui n'est autre chose que la distance d'une molécule à l'autre; par N le nombre de ces tétraèdres dans le volume total qu'ils occupent, il est clair que ce volume pourra toujours être représenté par NT.

On aura donc pour l'expression générale de la densité D de ce système de molécules, en appelant M leur masse totale.

$$D = \frac{M}{NT}.$$

Or, la masse M de ce système est nécessairement proportionnelle au nombre N de petits tétraèdres dont il est composé. On a donc

$$D = \frac{A}{T},$$

A étant une quantité constante. La densité D est donc en raison inverse du volume T de chacun des petits tétraèdres qui constituent le volume total; mais les solides semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues. L'expression précédente de la densité D revient, par conséquent, à celle-ci :

$$D = \frac{A'}{y^3},$$

laquelle exprime que la densité d'un système quelconque de molécules matérielles, placées à de très-petits intervalles égaux entre eux, est en raison inverse du cube de ces intervalles. Or nous avons démontré plus haut (pag. 88), que la densité d'un tel système est exactement proportionnelle à la force avec laquelle s'attirent les molécules solides qui le composent. Donc cette force d'attraction de molécule à molécule est précisément en raison inverse du cube de leurs distances; proposition de la plus haute importance, dont la vérité a été soupçonnée par Newton (*), Keil, et la plupart des physiciens et des géomètres venus après eux, mais qu'aucune expérience directe qui leur soit due n'avait démontrée jusqu'à-présent.

Ici paraît s'ouvrir un champ immense de recherches, dans lequel la loi que nous venons d'énoncer servira comme de flambeau à ceux qui entreprendront de l'explorer; c'est dans ce champ, comme nous l'avons dit ailleurs, qu'est tracée la limite qui sépare la chimie de la physique, ou plutôt que cette ligne de démarcation s'efface tout-à-fait: car, plus on apportera d'attention à réfléchir sur cet objet important, plus on se convaincra, suivant l'opinion de notre illustre confrère M. Berthollet, que l'adhérence physique et l'affinité chimique ne sont qu'un seul et même phénomène engendré par une seule et même cause.

Qu'on ne pense pas, au surplus, que la loi d'attraction moléculaire, en raison directe des masses, et en raison inverse du cube des distances, par l'intermède d'un fluide interposé, contrarie en quelque point les lois de la gravitation universelle. On peut démontrer que cette loi d'at-

(*) *Principia mathematica*, lib. I, prop. 85 et seq. (*Voyez* l'article *Attraction*, par d'Alembert, dans l'Encyclopédie méthodique.)

traction des molécules de la matière à de très-petites distances est, dans l'hypothèse d'un fluide interposé, une conséquence immédiate et nécessaire de la loi générale d'attraction, en vertu de laquelle les grands corps de la nature gravitent les uns sur les autres en raison directe de leurs masses, et en raison inverse du quarré de leurs distances. Je vais terminer ce Mémoire en rappelant succinctement les propositions fondamentales qu'il contient.

RÉSUMÉ.

Nous nous sommes proposé d'abord de démontrer, par une suite d'expériences comparatives, qu'il existe toujours autour de molécules solides submergées dans un liquide qui jouit de la propriété de mouiller leur surface, une atmosphère de ce liquide dont l'épaisseur varie suivant la nature des deux substances en contact.

Lorsque l'épaisseur de cette atmosphère est une quantité de même ordre que les dimensions linéaires de la molécule solide qu'elle enveloppe, la vîtesse uniforme avec laquelle cette molécule descend dans un liquide plus léger qu'elle, augmente en raison composée de son volume et de son excès de pesanteur, tandis qu'elle diminue en raison composée de la cohésion du liquide et de la surface extérieure de la couche atmosphérique qui lui est adhérente; d'où l'on voit que cette vîtesse s'évanouit lorsque les molécules sont amenées au dernier degré de division, comme dans les dissolutions : elles restent alors suspendues dans le liquide, quel que soit leur excès de pesanteur spécifique.

Si de telles molécules solides sont mélangées avec un liquide susceptible de mouiller leur surface en assez faible proportion, pour qu'étant disséminées dans le mélange le plus uniformément possible, leurs atmosphères mutuelles ne se pénètrent pas, le système composé de chaque molécule et de son atmosphère se meut dans le liquide, indépendamment des systèmes semblables qui en sont le plus rapprochés. Mais si la proportion des molécules solides dans le mélange devient assez forte pour que leurs atmosphères s'entrelacent, en quelque sorte, les unes dans les autres, toutes les molécules comprises dans un même réseau horizontal se meuvent à-la-fois, comme si elles étaient liées entre elles; d'où il arrive que le liquide qu'elles abandonnent au-dessus d'elles à mesure qu'elles descendent, demeure parfaitement limpide, tandis que l'opacité de la partie inférieure du mélange qu'elles forment, devient de plus en plus intense; de sorte que le vase semble contenir deux liqueurs de pesanteurs spécifiques différentes, séparées l'une de l'autre par un plan de niveau.

Quel que soit, au surplus, l'excès de la pesanteur des molécules solides sur celle du liquide où elles sont plongées, jamais, en vertu de cet excès de pesanteur, ces molécules ne se rapprochent assez au fond du vase où elles se déposent pour que leurs atmosphères s'anéantissent par la compression, et que ces molécules arrivent à l'espèce de contact immédiat qui paraît exister entre elles quand elles sont agglomérées à l'état sec et pulvérulent.

Ces observations nous ont conduits à expliquer comment les proportions d'un mélange de molécules solides dans un liquide donné, et les dimensions du vase qui contient ce mélange, influent sur la loi de l'affaissement de ces molécules à travers le liquide; affaissement qui, s'opérant en effet dans des espaces capillaires remplis de liquide, suit exactement les mêmes lois que l'écoulement de ces mêmes liquides par des tubes capillaires solides et continus. Dans l'un comme dans l'autre cas, l'épaisseur de la couche liquide qui reste adhérente à la surface extérieure des molécules, ou bien à la surface intérieure du tube, diminue à mesure que la température s'élève; ce qui rend l'affaissement plus prompt, ou l'écoulement plus productif.

Après avoir ainsi démontré dans la première section du Mémoire l'existence des atmosphères liquides qui adhèrent sur plus ou moins d'épaisseur à la surface des molécules solides qu'elles mouillent, je consacre la seconde section à rechercher l'action mutuelle que ces molécules exercent les unes sur les autres par l'intermède de leurs atmosphères. Cette recherche s'appuie sur une expérience fondamentale qui, par sa simplicité même, s'est dérobée, pour ainsi dire, à l'attention des physiciens et des chimistes. On savait bien qu'une substance en dissolution dans un liquide, en augmentait la pesanteur spécifique par un changement de constitution. Mais si quelquefois l'on avait remarqué accidentellement que des molécules solides, assez grossières pour troubler la transparence d'un liquide, exerçaient sur lui, par le simple contact et sans modifier aucune de ses propriétés physiques, une action que les aréomètres les plus grossiers pouvaient rendre sensible, on n'avait tiré aucune conséquence de ce fait, et il était resté jusques ici sans explication.

Je fais voir que cette action n'est autre chose que la gravitation du liquide sur les molécules solides qu'il mouille;

qu'elle est exactement mesurée par la différence entre le nombre de degrés que marque sur la tige de l'aréomètre le liquide interposé entre ces molécules, et le nombre de degrés indiqué sur cet instrument quand le même liquide est pur. Je fais voir enfin que cette gravitation varie suivant la nature des substances en contact; c'est-à-dire que, en vertu de cette différence d'intensité, elle est sensible à des distances plus ou moins grandes. Ainsi elle est exprimée par le même intervalle de 10 degrés sur l'échelle aréométrique, lorsque les molécules d'argile sont mélangées avec l'eau dans la proportion d'un seizième, et lorsqu'elles sont mélangées avec l'alcohol dans la proportion d'un vingtième seulement.

Par le principe d'égalité entre l'action et la réaction, les molécules solides exercent sur le liquide qui gravite sur elles, la même pression qu'elles en reçoivent; tandis que, par la nature même de la fluidité, les pressions exercées par chaque molécule se transmettent dans toute l'étendue du liquide interposé. C'est de la résultante de toutes ces pressions que l'aréomètre accuse la valeur. Le raisonnement et l'expérience démontrent qu'elle est exactement proportionnelle au nombre de molécules solides comprises dans un espace déterminé.

Mais ces molécules ne peuvent graviter sur le liquide interposé, sans graviter réciproquement sur elles-mêmes quand leurs atmosphères se pénètrent.

Ainsi, concevant d'abord un amas de molécules solides dénuées de toute pesanteur, disséminées dans un certain espace à des distances égales et très-petites, on a l'idée d'une matière poreuse dont les éléments solides absolument inertes n'ont aucune tendance au mouvement dans quelque direction que ce soit; concevant ensuite qu'un liquide également dénué de pesanteur, mais doué de la propriété de mouiller la surface de ces éléments, et d'y adhérer sur une épaisseur plus grande que la demi-distance qui les sépare, remplisse tout-à-coup les vides qu'ils laissent entre eux, ce liquide deviendra aussitôt la cause et l'instrument d'une attraction mutuelle de molécule à molécule, à laquelle les plus rapprochées obéiraient en se réunissant en leur centre commun de gravité, si, prises deux à deux sur une même ligne, trois à trois sur un même plan, ou quatre à quatre dans des plans différents, on les isolait de toutes les autres, et qu'elles cessassent, par l'effet de cet isolement, d'être également sollicitées dans toutes les directions.

Or, la supposition de cet état fictif n'est véritablement que l'exposé fidèle des phénomènes que nous avons décrits: car, tandis que les molécules solides perdent leur pesanteur terrestre dans le liquide où elles sont suspendues, nous faisons également disparaître la pesanteur terrestre de ce liquide lui-même, puisque nous retranchons du nombre de degrés de l'aréomètre, quand il est plongé dans le mélange, le nombre de degrés de cet instrument quand il est plongé dans le liquide pur; d'où l'on voit que cette *différence aréométrique* demeure l'expression exacte de l'action dont il s'agit, action essentiellement capillaire, mais qui, se manifestant à toute profondeur dans les mélanges où elle se développe, lors même que ces mélanges sont recouverts d'une couche plus ou moins épaisse de liquide pur, ne dépend en aucune manière de la configuration de la surface extérieure de la portion de liquide qui lui est soumise.

Quant à la loi suivant laquelle elle s'exerce, l'expérience nous la fait connaître, et la simplicité de son expression semble lui donner immédiatement le caractère d'une loi de la nature.

Voici en effet ce que l'expérience apprend : *Si l'on dissémine un volume constant de molécules solides dans des volumes variables d'un liquide susceptible de mouiller leur surface, en telles proportions néanmoins que leurs atmosphères se pénètrent, le volume total de l'un quelconque de ces mélanges, multiplié par la différence aréométrique correspondante, est toujours une quantité constante à la même température.*

Ce qui signifie, en d'autres termes, *Que l'action des molécules matérielles les unes sur les autres, par l'intermède d'un fluide interposé, est en raison inverse du cube de leurs distances supposées très-petites;* loi que Newton avait soupçonnée, je dirais presque prévue, mais dont l'existence n'avait été constatée jusqu'à présent par aucune observation directe.

MÉMOIRE

Sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres;

Par M. POINSOT.

Lu à l'Académie des Sciences, le 27 avril 1818.

I.

Dans le Mémoire rapide que j'ai lu dernièrement à l'Académie, et où j'ai donné une idée générale de mes recherches nouvelles sur l'algèbre et sur la théorie des nombres, j'ai considéré particulièrement les racines imaginaires de l'unité, c'est-à-dire ces différentes expressions radicales qui produisent toutes également l'unité pour résultat, quand on les élève à la puissance marquée par le degré ou l'exposant de ces racines. D'un autre côté, j'ai considéré ces différents nombres entiers qui donnent tous également l'unité pour reste, quand on les élève à la même puissance, et qu'on les divise par un nombre premier quelconque, auquel on veut les rapporter, comme à une espèce de base ou de *module*. J'ai observé les propriétés analogues de ces nombres entiers et de ces racines imaginaires; et, suivant jusqu'au bout cette analogie, j'ai avancé que l'expression générale qui résout l'équation binome $x^n - 1 = 0$, est, dans le sens que je vais dire, la représentation analytique de chacun des nombres entiers qui résolvent l'équation indéterminée, $x^n - 1 = \mathrm{M}p$, équation toute semblable, mais où le second membre, au lieu d'être nul, désigne un multiple du nombre premier p ou du module que l'on considère.

Ce théorème remarquable est la base de toute cette partie de l'analyse, qu'on pourrait nommer *la théorie des résidus des puissances,* et je me propose d'en donner ici une démonstration générale : mais auparavant il convient d'en éclaircir encore l'énoncé, et d'en pénétrer le véritable sens.

Et d'abord, il est clair qu'entre ces nombres entièrs et ces racines imaginaires, il ne s'agit point d'une égalité absolue, ce qui serait absurde, mais bien d'une égalité relative à ce module premier p, que l'on sous-entend toujours dans les expressions. Cette égalité consiste proprement dans celle des restes que laisseraient les deux membres relativement à ce module ; de sorte qu'en l'ajoutant, une ou plusieurs fois, aux divers nombres qui entrent dans la proposée, on rendrait les deux membres parfaitement égaux entre eux, et que cette égalité relative, dont nous parlions, deviendrait une égalité absolue.

Ainsi, relativement au module premier 5, par exemple, vous pouvez égaler le radical imaginaire $\sqrt{-1}$ aux deux nombres entiers 2 ou -2, et poser l'équation $\sqrt{-1} = \pm 2$: car, en ajoutant à -1, qui est sous le radical, le module 5, il vient un quarré parfait 4, dont la racine est ± 2; et l'on a ainsi $\sqrt{-1} = \pm 2$, ou, si l'on veut, 2 et 3, le module 5 étant sous-entendu. On trouverait encore une infinité d'autres multiples de 5, qui, ajoutés à -1, donneraient des quarrés parfaits ; mais leurs racines quarrées, étant rabaissées au-dessous du module 5 par la division, ramèneraient toujours les mêmes nombres 2 et 3 déja trouvés.

Relativement au module 13, la même expression imaginaire $\sqrt{-1}$ vous donnerait les deux nombres ± 5, parce qu'en ajoutant à -1 deux fois le module 13, il viendrait, sous le radical, le quarré parfait 25, dont la racine est ± 5, ou, si l'on veut, 5 et 8.

De même, vous pouvez égaler la racine cubique imaginaire de l'unité $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ aux nombres entiers 4 ou 2, relativement au module 7: car $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ reviendrait à $\frac{-1+7+\sqrt{(-3+7)}}{2}$, qui donne 4 ou 2 par l'ambiguïté du radical. Si le module était 19, la même expression vous donnerait 11 et 7; et ainsi des autres.

C'est dans ce sens qu'il faut entendre cette espèce d'égalité que je considère, et qui devient une égalité absolue, en restituant certains multiples du module aux divers nombres qui entrent dans la proposée, et qui s'y trouvent engagés *sous des signes quelconques d'opérations.* Sous ce point de vue donc, je dis que l'expression algébrique imaginaire qui rend nul le binome $x^n - 1$, représente les divers nombres entiers qui rendent ce même binome multiple d'un nombre premier p; et même, qu'elle représente ces entiers dans tous les cas possibles, c'est-à-dire, quel que soit le module premier p, auquel on voudrait rapporter l'équation $x^n - 1 = Mp$. C'est en cela sur-tout que consistent la nouveauté et l'étendue de notre théorême : car on n'aperçoit aucune relation, ni entre les divers nombres qui résolvent la proposée pour un module particulier, ni entre les différentes classes des nombres qui la peuvent résoudre pour des modules différents ; et pourtant je trouve ici que tous ces nombres sont réductibles à une même expression algébrique, composée de nombres actuellement déterminés et connus, qui ne dépendent point des modules, mais uniquement du degré de la proposée. Cette réduction si frappante, cette même représentation analytique de tant de nombres différents, et qui ne paraissent soumis à aucune loi, nous indique de nouvelles routes dans l'analyse indéterminée, et nous offre, comme on l'a dit, le premier et singulier exemple de l'algèbre, proprement dite, appliquée à la théorie des nombres.

Au reste, ce théorème sur les équations binomes n'est qu'un cas particulier d'un théorème général, qui s'étend à une équation quelconque, rapportée de même à un nombre premier dont elle renfermerait des multiples indéterminés. On peut dire également que les nombres entiers qui résolvent la proposée, sont analytiquement représentés par l'expression algébrique qui résoudrait cette même équation, mais déterminée, en y faisant nuls par-tout ces multiples du nombre premier ou module que l'on considère. Nous pourrions donc nous appliquer d'abord à démontrer cette proposition générale, pour en déduire, comme un cas particulier, le théorême qui nous occupe : mais la matière est neuve et délicate ; les équations binomes, les seules d'ailleurs qu'on sache résoudre, ont des difficultés qui leur sont propres, et la théorie en est assez importante pour que j'en fasse le principal objet de ce Mémoire. J'ai voulu même n'offrir ici qu'une démonstration directe tirée de l'analyse la plus familière. Je cherche la résolution générale de l'équation indéterminée $x^n - 1 = Mp$, à l'imitation parfaite de la résolution générale de l'équation binome $x^n - 1 = 0$. Je mets les racines de l'une et l'autre équation sous une forme toute semblable; et notre théorème, si nouveau et si paradoxal en apparence, ne se présente plus alors que comme une sorte d'identité.

J'ai montré aussi, dans mon premier Mémoire, l'application qu'on peut faire de la formule des racines de l'unité, à la recherche de ces nombres remarquables qu'Euler a considérés pour chaque nombre premier, et qu'il en a nommés les *racines primitives*. Cette application s'offrait, pour ainsi dire, d'elle-même : car, dans notre théorie, les racines primitives d'un nombre premier p doivent être représentées par les racines imaginaires *primitives* de l'équation binome $x^{p-1} - 1 = 0$, c'est-à-dire, par celles dont les puissances successives fournissent la suite complète de toutes les racines différentes de la proposée. Il y a, comme on sait, autant de ces racines imaginaires *primitives*, qu'il y a de nombres inférieurs et premiers à $p - 1$: or, chacune d'elles doit répondre à une racine primitive du nombre p, et peut servir à la faire connaître. Mais il est bon de prévenir une difficulté qu'on pourrait élever sur le principe même de cette application.

Et en effet, on pourrait dire que la méthode suivie pour résoudre l'équation binome $x^n - 1 = 0$, suppose la connaissance d'une racine primitive du nombre n; que, par conséquent, on fait une espèce de cercle vicieux quand on emploie les racines des équations binomes à la recherche des racines primitives, puisque ces équations, pour être résolues, supposent elles-mêmes l'emploi des racines primitives. Mais cette difficulté s'évanouit à la première réflexion. Car, supposons qu'il s'agisse de trouver une racine primitive du nombre premier p. Suivant notre méthode, il s'agirait donc d'avoir une racine imaginaire primitive de l'équation binome $x^{p-1}-1=0$. Or, cette équation d'un degré composé $p-1$ ne demande, pour être résolue, que la résolution d'équations binomes inférieures, telles que $x^{\alpha}-1=0$, α étant un diviseur premier du nombre $p-1$. Et si la résolution de celle-ci demande l'emploi d'une racine primitive de α, cette racine primitive se trouverait de même, par les racines de l'équation inférieure, $x^{\alpha-1}-1=0$; et ainsi de suite. D'où l'on voit que, pour trouver une racine primitive du nombre premier p, il suffit d'avoir celles des diviseurs premiers de $p-1$, qui sont déja censées connues, ou, si l'on veut, qu'on trouverait également par les racines primitives des nombres inférieurs; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on redescendît aux plus petits nombres premiers possibles, c'est-à-dire à l'unité, qui est elle-même sa racine primitive. Ainsi l'application de la formule des racines imaginaires de l'unité à la détermination des racines primitives d'un nombre premier, n'est point du tout illusoire, quoiqu'on n'obtienne facilement cette formule qu'à l'aide d'autres racines primitives. Ce n'est pas que je donne cette application comme très-avantageuse dans la pratique : car on pourrait souvent obtenir les racines primitives d'une manière bien plus prompte, par le simple tâtonnement ; et c'est, à-peu-près, ce qui arrive dans toutes les applications de nos formules d'algèbre. Mais il ne s'agit point ici de calculs et de résultats particuliers; nous n'étudions que la théorie et les méthodes générales, dans la seule vue des progrès et de la dignité de la science.

Mais il y a une remarque plus importante à faire sur la résolution générale de l'équation binome, $x^n - 1 = 0$, ou plutôt de l'équation réciproque, $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \text{etc.} + x + 1 = 0$, qu'on en tire en dégageant le facteur linéaire $x - 1$.

Il est bien vrai que cette résolution ne peut être exposée d'une manière claire et rapide, sans ranger d'abord les racines dans cet ordre lumineux où M. Gauss les a considérées pour la première fois, et dans lequel les exposants successifs de la lettre commune qui les représente, au lieu de former la suite naturelle des nombres, forment la suite naturelle des puissances d'une racine primitive du nombre premier n. Cette idée est très-heureuse; et, quoiqu'elle paraisse indirecte, il faut convenir qu'elle met la solution du problème dans tout son jour. Mais il ne s'ensuit pas pourtant que l'équation binome n'aurait pu être résolue sans l'emploi des racines primitives, dont la considération peut même nous sembler étrangère. J'observe que la méthode de Lagrange, ou celle de Vandermonde, pouvait être appliquée à cette équation, et même à toutes les *réduites* qui en proviennent, et que, dans son analyse, M. Gauss nomme les *équations auxiliaires;* et il serait facile de prouver que ces méthodes générales devaient nécessairement réussir, par les propriétés mêmes des racines qu'il s'agit de déterminer. Et en effet, ces racines, au lieu d'être indépendantes l'une de l'autre, comme dans les équations générales, se trouvent liées par une relation mutuelle nécessaire, qui permet de les représenter toutes à l'aide d'une même lettre et de divers exposants. Et de là il résulte que, dans une fonction quelconque de ces racines, il n'est pas possible de changer une racine en une autre, sans opérer entre toutes les racines une permutation simultanée. Le nombre de toutes les permutations possibles, et partant le nombre de toutes les valeurs de la fonction, se réduit donc simplement au nombre des racines; et le degré de la résolvante, qui s'élève si haut pour les équations où les racines sont indépendantes, ne peut passer ici le degré de la proposée même. Mais, de plus, cette résolvante peut devenir simplement une équation à deux termes, par la nature de la fonction des racines qu'on aura choisie; et de cette manière la proposée sera résolue.

Je me contente d'indiquer ici cette méthode, que je tâcherai d'éclaircir et d'expliquer ailleurs plus en détail. Mais ce développement n'est pas même nécessaire pour la remarque générale que j'ai ici en vue : car, indépendamment de cette théorie et de ces propriétés des racines, qu'il semble que Vandermonde ne connaissait pas encore, nous voyons que cet habile géomètre est venu à bout de faire l'application de sa méthode générale, et d'en donner le résultat pour l'équation binome du 11^{me} degré, qu'on n'avait jamais pu résoudre avant lui; et, dans son Mémoire, il avance expressément que sa méthode s'applique aux équations semblables de tous les degrés : de sorte que, malgré l'obscurité de sa méthode et la longueur de ses calculs, Vandermonde doit être regardé à juste titre comme le premier auteur de cette belle découverte en algèbre.

Cette remarque ne diminue en rien le mérite de la théorie neuve et profonde que l'on doit à M. Gauss, et sans laquelle la découverte de Vandermonde serait peut-être encore ignorée ; mais elle prouve que la résolution générale des équations binomes a pu être obtenue sans la considération actuelle des racines primitives, et que, par conséquent, nous aurions pu nous-mêmes en affranchir notre analyse. Cependant, comme cette considération ingénieuse, bien loin d'être étrangère à la résolution des équations, est puisée, au contraire, dans la nature du problème, lequel dépend essentiellement de la théorie des permutations simultanées, j'ai cru devoir l'employer sans difficulté dans la démonstration suivante, et je présente d'abord le théorème par cette analyse, afin qu'il paraisse dans toute son évidence.

Quant à notre démonstration considérée en elle-même, on verra qu'elle réside, au fond, bien plutôt dans la supposition d'une formule générale qui résoudrait la proposée, que dans la manière de parvenir à cette formule; et même les géomètres sentiront d'abord comment le théorème que je propose s'étendrait à une équation complète, dont la résolution algébrique serait supposée connue. Il suffirait de considérer que les coëfficients de cette équation sont les mêmes, aux multiples près du module, que ceux de l'équation semblable déterminée qui aurait les mêmes racines; que, par conséquent, la formule générale qui résoudrait la première équation, conviendrait à la seconde, en restituant aux coëfficients les multiples du module, et qu'elle nous donnerait ainsi les racines entières de la proposée. Mais il était nécessaire de commencer par la résolution des équations binomes, parce qu'elle est comme la clef de toutes les autres; parce qu'elle seule peut nous faire connaître la nature intime des radicaux, signes remarquables, qui font l'essence de l'algèbre, par cette équivoque même qui en est inséparable, et dont l'emploi dans nos démonstrations mathématiques marque la différence la plus précise entre l'Analyse et la Synthèse.

II.

THÉORÈME.

1. Considérons donc l'équation binome indéterminée, $x^n - 1 = Mp$, où Mp désigne un multiple quelconque du nombre premier p, et n un exposant quelconque premier, que je supposerai d'abord diviseur de $p - 1$, afin que l'équation $x^n - 1 = Mp$ ait n racines ou solutions en nombres entiers inférieurs à p. Je dis que si l'on prend, à la place de cette équation indéterminée, l'équation binome déterminée $x^n - 1 = 0$, et qu'on la résolve, l'expression algébrique de ses n racines, qui, excepté l'unité, sont toutes imaginaires, sera la représentation analytique des n nombres entiers qui résolvent l'équation $x^n - 1 = Mp$: c'est-à-dire, qu'en ajoutant aux nombres qui sont sous les divers radicaux de cette formule imaginaire, des multiples convenables de p, on fera disparaître les imaginaires et les irrationnelles, on rendra toutes les opérations indiquées parfaitement exécutables, et que la formule donnera précisément les n nombres entiers qui satisfont à la proposée, et ne donnera jamais d'autres nombres.

2. Pour démontrer ce théorème, observons d'abord que l'équation $x^n - 1 = Mp$, a toujours la racine $x = 1$, comme

l'équation binome $x^n - 1 = 0$: dégageons donc cette racine ou le facteur $x - 1$ du premier membre, et nous aurons l'équation indéterminée

$$X = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \text{etc.} + x + 1 = Mp,$$

dont toutes les racines sont des nombres entiers supérieurs à l'unité.

Or, soit r un quelconque de ces nombres; il est facile de voir que tous les autres pourront être représentés par les puissances successives de celui-là, r^2, r^3, r^4, etc. r^{n-1}. Et en effet, toutes ces puissances seront des nombres différents relativement à p, parce que n est un nombre premier; et il est clair qu'elles satisferont toutes à la proposée $x^n - 1 = Mp$, puisque r y satisfait par hypothèse.

Ces puissances r, r^2, r^3, r^4, etc. r^{n-1} pourront s'élever au-dessus du nombre premier p; mais cela est indifférent pour notre objet, puisque, rabaissées au-dessous de p par la division, elles ramèneraient pour restes les racines mêmes de la proposée. Ainsi, au lieu de ces racines inférieures à p, il nous est permis de considérer les puissances successives d'une seule d'entre elles; ce qui simplifie d'abord notre analyse. Mais, en second lieu, on peut encore ranger ces puissances dans l'ordre où les exposants forment les $n-1$ termes différents d'une progression géométrique a, a^2, a^3, a^4, etc. a^{n-1}, dans laquelle a est une racine primitive du nombre n. A la vérité, quelques-uns de ces nouveaux exposants de r s'élèvent au-dessus de n; mais, à cause de $r^n = 1$, aux multiples près de p, on peut n'y voir que les restes de leur division par n; et alors ils donnent, dans un certain ordre, les premiers exposants 1, 2, 3, 4, 5, etc. $n-1$, inférieurs à n; et ils les donnent tous, parce que a est supposé une racine primitive de n, c'est-à-dire un nombre capable de ramener par ses puissances successives tous les résidus différents inférieurs à n.

De cette manière, les racines de la proposée, non-seulement sont représentées par les différentes puissances d'une *même* racine, mais encore elles sont rangées dans un ordre où chacune d'elles est une *même* puissance de celle qui la précède; ordre lumineux, où l'on voit les racines se produire l'une l'autre par une même opération, et s'exprimer ainsi toutes à l'aide d'une seule lettre et d'un seul nombre; ce qui en détermine l'ordre naturel.

3. Remarquez, en effet, que cet ordre ingénieux, dont rien ne paraît avoir indiqué le choix entre tous les autres, est, au fond, un ordre analytique déterminé par la nature même des choses. Car, comme il s'agit de racines qui jouissent toutes également de la même propriété, et qu'il n'y a aucune raison de préférer l'une à l'autre, il est clair que l'ordre le plus naturel est celui qui conviendrait également à toutes les racines, et, par conséquent, celui qui ne changerait point, quelle que fût la racine r d'où l'on voulût partir. Ainsi, par la nature même de la question, on est porté à chercher, s'il est possible, un ordre où les racines naîtraient successivement l'une de l'autre par la même puissance, et où il serait alors indifférent d'y changer une racine en une autre quelconque à volonté. On doit donc chercher d'abord s'il n'y aurait point quelque exposant a qui, multiplié successive-

ment par lui-même, et divisé par le nombre premier n, donnerait pour restes successifs tous les nombres différents inférieurs à n : or, ce nombre a existe toujours, et c'est précisément ce qu'on appelle une *racine primitive* de n. Ainsi l'on est conduit naturellement à ranger les racines dans cette suite ordonnée

$$r,\ r^a,\ r^{aa},\ r^{aaa},\ \text{etc., ou } r,\ r^a,\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ \text{etc.},$$

qui nous présente chacune d'elles comme une même puissance de celle qui la précède, et qui nous donne ainsi leur véritable ordre naturel.

Remarquez, au contraire, que l'ordre r, r^2, r^3, r^4, etc., qui se présente d'abord, et qui nous semble naturel, a ici quelque chose d'irrégulier et d'arbitraire. Car si, après la racine que vous nommez r, vous mettez r^2, c'est-à-dire le quarré de cette première racine, il est clair qu'après r^2 vous devriez mettre aussi son quarré r^4, et non pas la puissance r^3; et de même pour les suivantes. Ainsi, dans la suite r, r^2, r^3, r^4, etc., la loi se rompt à chaque instant; et l'ordre même n'y est pas déterminé, car il dépend de la racine que vous choisirez pour r, et sera tout différent en employant une autre racine. Mais, dans la première suite, aucun échange de racines ne pourra troubler l'ordre; les racines ne feront que s'avancer toutes à-la-fois d'un même nombre de places, et elles garderont toujours entre elles la même disposition, exactement comme si elles étaient rangées autour d'un cercle.

4. Ainsi donc les $n-1$ nombres supérieurs à l'unité, qui satisfont à l'équation $x^n - 1 = Mp$, *doivent* être naturellement représentés par la suite et dans l'ordre r, r^a, r^{a^2},

r^{a^2}, etc., $r^{a^{n-1}}$, comme M. Gauss en a eu l'heureuse idée pour les racines imaginaires de l'équation binome $x^n - 1 = 0$; mais nous voyons ici que cet ordre remarquable, qui semblait dû au hasard, aurait pu être tiré directement de l'analyse du problème.

5. Cela posé, considérez, suivant la méthode de M. Lagrange, les $n-1$ fonctions linéaires,

$$r + r^a + r^{a^2} + r^{a^3} + \text{etc.} = t,$$

$$r + \alpha r^a + \alpha^2 r^{a^2} + \alpha^3 r^{a^3} + \text{etc.} = t',$$

$$r + \beta r^a + \beta^2 r^{a^2} + \beta^3 r^{a^3} + \text{etc.} = t'',$$

$$r + \gamma r^a + \gamma^2 r^{a^2} + \gamma^3 r^{a^3} + \text{etc.} = t''',$$

etc. etc.

où 1, α, β, γ, etc. sont les racines de l'équation binome $x^{n-1} - 1 = 0$; il est clair que vous aurez, en ajoutant ces fonctions,

$$(n-1)\, r = t + t' + t'' + t''' + \text{etc.},$$

et que, par conséquent, le nombre entier r pourra être mis sous la forme :

$$r = \frac{t + t' + t'' + t''' + \text{etc.}}{n-1};$$

ou bien encore, si vous faites les puissances $n-1^{\text{mes}}$ des fonctions t, t', t'', t''', etc., ce qui donnera

$$(t)^{n-1} = \theta,\ (t')^{n-1} = \theta',\ (t'')^{n-1} = \theta'',\ (t''')^{n-1} = \theta''',\ \text{etc.};$$

et puis, d'un autre côté, que vous remettiez sur ces puissances le radical $n-1^{me}$, afin de ne rien changer; il est encore évident que le nombre r pourra être mis sous la forme :

$$r = \frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \text{etc.}}{n-1},$$

qui est toute semblable à la formule générale des racines n^{es} de l'unité. (*Voyez* la note XIV de la Résolution des équat. numér. de Lagrange.)

Il est clair que vous auriez de même les identités

$$r^{a} = \frac{t + \alpha^{n-2} t' + \beta^{n-2} t'' + \gamma^{n-2} t''' + \text{etc.}}{n-1},$$

$$r^{a^2} = \frac{t + \alpha^{n-3} t' + \beta^{n-3} t'' + \gamma^{n-3} t''' + \text{etc.}}{n-1},$$

$$r^{a^3} = \frac{t + \alpha^{n-4} t' + \beta^{n-4} t'' + \gamma^{n-4} t''' + \text{etc.}}{n-1},$$

etc. etc.

c'est-à-dire, en général :

$$r = \frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \text{etc.}}{n-1},$$

en donnant aux radicaux $\sqrt[n-1]{\theta'}$, $\sqrt[n-1]{\theta''}$, etc., les valeurs simultanées

$$\alpha^{e}\sqrt[n-1]{\theta'},\ \beta^{e}\sqrt[n-1]{\theta''},\ \gamma^{e}\sqrt[n-1]{\theta'''},\ \text{etc.},$$

e désignant un quelconque des nombres entiers, depuis 1 jusqu'à $n-1$.

6. Actuellement, dans ces fonctions θ, θ', θ'', θ''', etc., qui

contiennent différentes puissances de r, supposez qu'on rabaisse toutes ces puissances au-dessous de r^n, en ne comptant r^n que pour l'unité, quoique cette puissance soit effectivement $1 + Mp$. Supposez aussi que, dans ces résultats, à la place de la somme

$$r + r^a + r^{a^2} + \text{etc.}, \quad \text{ou } r + r^2 + r^3 + \text{etc.},$$

vous mettiez simplement -1, quoique cette somme soit réellement $-1 + Mp$, comme on le voit par la proposée même. Alors votre formule

$$\frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \text{etc.}}{n-1},$$

au lieu de répondre au nombre entier r, répondra exactement à une racine imaginaire de l'équation binome $x^n - 1 = 0$. Et en effet, ce qu'on suppose à présent revient au même que si l'on eût entendu d'abord par la lettre r une des racines imaginaires n^{es} de l'unité; et, de plus, par l'ordre même r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, etc., suivant lequel on a rangé ces racines, il est facile de voir que les développements θ, θ', θ'', etc., en sont devenus des fonctions invariables, d'où la lettre r aura tout-à-fait disparu : ainsi la formule précédente coïncidera parfaitement avec celle des racines n^{mes} imaginaires de l'unité (*).

(*) *Voyez* l'ouvrage cité plus haut, et l'analyse que j'en ai donnée dans le *Magasin encyclopédique*, année 1808.

Mais il est évident que cette supposition de $r^n = 1$, au lieu de

$$r^n = 1 + Mp,$$

et de $$r + r^2 + r^3 + \text{etc.} = -1,$$

au lieu de $$r + r^2 + r^3 + \text{etc.} = -1 + Mp,$$

revient à supprimer dans les expressions θ, θ' θ'', etc., qui sont sous les radicaux, certains multiples du nombre premier p que l'on considère. Donc, puisque, par cette suppression de multiples de p, on passe de l'expression du nombre entier r, à l'expression de la racine imaginaire n^{me} de l'unité, il s'ensuit que, par la restitution dans celle-ci de ces mêmes multiples de p, on reviendrait à l'expression exacte du nombre entier r. *Ce qu'il fallait démontrer.*

7. On peut remarquer que le premier radical $\sqrt[n-1]{\theta}$, qui est égal à t ou $r + r^a + r^{a^2} +$ etc., se réduit tout de suite, de lui-même, à $-1 + Mp$, ou simplement à -1, et ne présente aucune ambiguïté; de sorte qu'il est inutile de faire cette puissance $n - 1$ de t, qui est d'elle-même une fonction invariable des racines, et qu'ainsi l'équation peut se mettre sous la forme plus simple :

$$r = \frac{-1 + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \text{etc.}}{n - 1}.$$

De plus, parmi les racines α, β, γ, etc., de $x^{n-1} - 1 = 0$, il y en a toujours une α qui est égale à -1; de sorte que la fonction t', où cette racine α est employée, n'a besoin que d'être élevée au quarré pour devenir une fonction invariable des racines r, r^2, r^3, etc... Ainsi, il y a encore un radical $\sqrt[n-1]{\theta'}$ qui peut se remplacer par un simple radical quarré.

En général, parmi les racines de $x^{n-1}-1=0$, quelques-unes appartiennent à des équations binomes inférieures $x^h-1=0$, h étant un diviseur de $n-1$; et pour les fonctions t', t'', etc., où ces racines seraient employées, on en fera des fonctions invariables de r, r^2, r^3, etc., en les élevant simplement à la puissance h. Il ne sera donc nécessaire d'élever aux puissances $n-1^{\text{mes}}$ que les fonctions où l'on considère des racines uniquement propres à l'équation

$$x^{n-1}-1=0,$$

c'est-à-dire, qui ne résolvent pas en même temps d'autres équations binomes $x^h-1=0$ de degrés inférieurs. Ainsi, il n'y aura dans la formule d'autres radicaux du degré $n-1$, que ceux qui seront dus à ces racines propres à l'équation $x^{n-1}-1=0$. Et même, comme le nombre $n-1$ est toujours composé, ces derniers radicaux se réduisent, au fond, à des radicaux d'exposants marqués par les diviseurs simples de $n-1$.

8. Au reste, dans tous les cas particuliers, l'expression la plus simple des racines de l'unité pourra toujours s'obtenir d'une manière directe, en suivant une méthode toute semblable à la précédente. Mais, au lieu de considérer à-la-fois toutes les racines r, r^2, r^3, r^4, r^5, etc., r^{n-1}, il faudra les partager d'abord en plusieurs groupes de racines liées entre elles de la même manière

On formera immédiatement chacun de ces groupes au moyen de la suite ordonnée,

$$r,\ r^{a},\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ r^{a^4},\ \text{etc.},\ r^{a^{n-2}},$$

en y prenant les racines de h en h, si h est un diviseur de $n-1$. On aura ainsi h groupes composés de $\frac{n-1}{h}$ racines; et ces divers groupes seront aussi tout naturellement ordonnés entre eux, de manière que chacun d'eux produira le suivant, en y changeant la racine r en r^{a}.

On décomposera de même chaque groupe, en y prenant les racines de k en k, si k est un diviseur de leur nombre $\frac{n-1}{h}$; et ainsi de suite. Et si l'on applique enfin à la représentation des racines de ces groupes partiels, et des sommes de racines contenues dans ces groupes eux-mêmes, une analyse toute semblable à celle qu'on a suivie plus haut pour l'ensemble de toutes les racines, on parviendra facilement à une formule qui ne présentera point de radicaux d'exposants supérieurs aux facteurs 2, h, k, etc., du nombre composé $n-1$; et qui, par les mêmes hypothèses de

$$r^{n}=1,\quad \text{et } r+r^2+r^3+\text{etc.}=-1,$$

se réduira de même à l'expression générale des racines n de l'unité. Et de plus, au lieu des racines 1, α, β, γ, etc., de l'équation $x^{n-1}-1=0$, on n'aura eu besoin d'employer que les racines des équations inférieures

$$x^2-1=0,\ x^h-1=0,\ x^k-1=0,\ \text{etc.},$$

2, h, k, etc., étant les diviseurs simples de $n-1$.

Mais, sous quelque forme algébrique qu'on veuille présenter la racine n^{me} de l'unité, elle exprimera toujours, comme valeur résidue, chacun des nombres entiers qui résolvent l'équation binome indéterminée $x^n - 1 = Mp$, n étant un nombre *premier* quelconque diviseur de $p - 1$.

9. Si le nombre n, au lieu d'être premier, est un nombre composé, il est bien facile de voir que le même théorème a lieu encore, c'est-à-dire que les n racines de l'équation indéterminée

$$x^n - 1 = Mp$$

sont également représentées par les n racines de l'équation binome

$$x^n - 1 = 0.$$

Je ne m'arrête point à la démonstration de ce théorème, parce qu'on peut facilement le conclure de ce qu'on vient de démontrer dans le cas où n est un nombre premier, en observant que les racines d'un degré composé reviennent à une combinaison des racines simples marquées par les facteurs de ce degré, ou à des racines de ces racines.

Ainsi l'on a généralement, pour la représentation analytique des nombres entiers qui résolvent l'équation binome indéterminée

$$x^n - 1 = Mp,$$

la formule générale qui exprime les différentes racines n^{me} de l'unité, l'exposant n étant un diviseur *quelconque* du nombre $p - 1$.

10. Lorsque n ne divise pas $p-1$, l'équation indéterminée

$$x^n - 1 = Mp$$

n'a qu'une seule racine ou solution entière, qui est l'unité; et toutes les autres sont impossibles ou irrationnelles. Mais la formule des racines n^{mes} de l'unité n'en est pas moins encore l'expression analytique de ces racines même impossibles. Car, quelles que soient ces racines, leur nature serait de satisfaire à l'équation $x^n - 1 = Mp$: or, il résulte de cette hypothèse même, qu'elles jouissent également de la propriété de pouvoir être représentées par les puissances successives d'une seule r, et de donner, aux multiples près du nombre p, leurs puissances n^{mes} égales à l'unité, et leur somme totale égale à -1. Si donc vous imaginez qu'on les cherche comme dans le premier cas, en les représentant par les puissanees successives d'une seule,

$$r,\ r^2,\ r^3,\ r^4,\ \text{etc.},$$

vous pourrez les mettre exactement sous la même forme, et, y supprimant par-tout les multiples de p, les réduire à l'expression des racines n^{mes} de l'unité. Ainsi la formule sera toujours l'expression analytique des racines entières ou irrationnelles de l'équation $x^n - 1 = Mp$, quel que soit le nombre premier p auquel on voudrait actuellement rapporter cette équation.

Et, par exemple, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, qui exprime une des racines cubiques imaginaires de l'unité, est toujours l'expression de l'un des deux nombres entiers ou irrationnels, autres que l'unité, qui peuvent résoudre l'équation $x^3-1=Mp$, quel que soit le nombre premier p que l'on veuille considérer.

Si $p-1$ est divisible par 3, comme dans le cas de $p=43$, par exemple, alors les trois racines entières existent réellement, et sont ici les trois nombres 1, 7 et -6, comme il est facile de s'en assurer.

Dans ce cas, le nombre -3, qu'on voit sous le radical quarré de la formule $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, est un résidu de quarré exact relativement à 43; de sorte qu'en y ajoutant un multiple convenable de 43, l'irrationnabilité disparaît, et la double formule $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ amène les deux nombres entiers 7 et -6, qui, avec l'unité, résolvent l'équation

$$x^3-1=M\,43.$$

Si $p-1$ n'est pas divisible par 3, comme dans le cas de $p=29$, alors il n'y a que le seul nombre entier 1 à chercher, et les deux autres racines sont impossibles; mais on peut toujours supposer ces racines également représentées par la formule $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, que l'on changera, si l'on veut, en $\frac{-1+ip\pm\sqrt{(-3+op)}}{2}$, en ajoutant aux nombres les multiples ip et op du module p. A la vérité, on ne pourra jamais, par cette addition, rendre le nombre -3 un quarré parfait; et la quantité $\frac{-1+ip\pm\sqrt{(-3+op)}}{2}$ restera toujours incommensurable, quel que soit le multiple de p que l'on y veuille introduire. Mais cette expression irrationnelle, pouvant toujours satisfaire à l'équation $x^3-1=Mp$

(comme on le voit en supposant i et o tous deux nuls, ou même seulement, $3i^2p - 6i + o = o$), sera l'expression analytique de ses racines même impossibles. Cette expression sera donc aussi parfaite que celle des imaginaires dans l'analyse ; je veux dire qu'on pourra, sans crainte, l'employer dans le calcul, et que si, par une combinaison quelconque de semblables valeurs, les irrationnelles viennent à se détruire, le résultat final sera aussi exact, et la démonstration aussi bien établie, que si l'on n'eût point passé par ces valeurs irrationnelles.

11. Ainsi donc les racines de l'équation binome indéterminée $x^n - 1 = Mp$, seront toujours parfaitement bien représentées par celles de l'équation binome déterminée $x^n - 1 = o$, c'est-à-dire par les racines n^{mes} de l'unité, *quel que soit l'exposant* n *et le nombre premier* p *que l'on voudra considérer.*

12. Mais il faut encore pénétrer plus avant dans la composition et les propriétés de la formule générale :

$$r = \frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \text{etc.}}{n-1}.$$

Les fonctions θ, θ', θ'', θ''', etc., sont, comme on l'a supposé, les puissances exactes $n-1^{mes}$ des fonctions linéaires t, t', t'', t''', etc., lesquelles sont de la forme :

$$t = r + r^a + r^{a^2} + r^{a^3} + \text{etc.},$$

$$t' = r + \alpha r^a + \alpha^2 r^{a^2} + \alpha^3 r^{a^3} + \text{etc.},$$

$$t' = r + \beta r^a + \beta^2 r^{a^2} + \beta^3 r^{a^3} + \text{etc.},$$

$$t''' = r + \gamma r^a + \gamma^2 r^{a^2} + \gamma^3 r^{a^3} + \text{etc.},$$

etc.,

$1, \alpha, \beta, \gamma$, etc., étant les racines de l'équation binome

$$x^{n-1} - 1 = 0.$$

De plus, dans les fonctions θ, θ', θ'', θ''', etc., les puissances de r ont été rabaissées par-tout au-dessous de r^n, par la supposition de $r^n = 1$; ce qui, en supposant encore $r + r^a + r^{a^2} + \text{etc.} = -1$, en a fait entièrement disparaître la lettre r, et réduit la formule

$$r = \frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \text{etc.}}{n-1},$$

à l'expression exacte de la racine n^{me} de l'unité, comme on l'a démontré plus haut.

Mais les fonctions θ, θ', θ'', etc., contiennent encore les racines α, β, γ, etc., de l'équation binome $x^{n-1} - 1 = 0$; de sorte que la formule des racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ peut être regardée comme une fonction des racines α, β, γ, etc., de l'équation inférieure $x^{n-1} - 1 = 0$.

Or, dans le retour de cette formule aux nombres entiers, par la restitution convenable des multiples de p, nous avons toujours conservé ces imaginaires α, β, γ, etc., sans y rien changer, c'est-à-dire, sans avoir besoin de les ramener de même à des entiers relativement au nombre premier p que l'on considère. Ce changement ou cette réduction était en effet inutile : car, dans l'addition des fonctions t, t', t'', t''', etc., qui sont les racines exactes $n-1^{\text{mes}}$ des fonctions θ, θ', θ'', θ''', etc., il est évident que les imaginaires α, β, γ, etc., se détruisent d'elles-mêmes, et que le résultat $\frac{t+t'+t''+t'''+\text{etc.}}{n-1}$ donne toujours le nombre entier r qu'on a dessein de découvrir. Cependant si $n-1$ était un diviseur exact de $p-1$, les racines $n-1^{\text{mes}}$ de l'unité répondraient aussi à des entiers relativement à p, et l'on pourrait mettre dans la formule, à la place des imaginaires α, β, γ, etc., les entiers e, e', e'', etc., qui résolvent l'équation indéterminée

$$x^{n-1}-1=Mp.$$

Il est clair qu'aux multiples près du nombre p, on serait toujours conduit à la même valeur r, pour la racine cherchée de la proposée

$$x^{n}-1=Mp.$$

Et en effet, au lieu des imaginaires α, β, γ, etc., qui sont telles, qu'on a :

$$\alpha^{n-1}=1,\quad \beta^{n-1}=1,\quad \gamma^{n-1}=1,\quad \text{etc.}$$

et

$$1+\alpha+\beta+\gamma+\text{etc.}=0,$$

vous emploieriez les nombres e, e', e'', etc., qui seraient tels, qu'on aurait

$$e^{n-1}=1+Mp,\quad e'^{n-1}=1+Mp,\quad e''^{n-1}=1+Mp,\quad \text{etc.},$$

et $$1 + e + e' + e'' + \text{etc.} = 0 + Mp;$$

et par conséquent, dans l'évaluation finale de la formule

$$r = \frac{\sqrt[n-1]{\theta} + \sqrt[n-1]{\theta'} + \sqrt[n-1]{\theta''} + \sqrt[n-1]{\theta'''} + \text{etc.}}{n-1},$$

vous arriveriez toujours au même résultat qu'auparavant, en omettant les multiples de p.

13. De même, si, dans l'expression des racines imaginaires α, β, γ, etc., il entrait aussi d'autres racines inférieures de l'unité, dont le degré fût diviseur de $p-1$, on pourrait aussi mettre à leur place les entiers qui leur répondent relativement au même nombre premier p. On trouverait toujours les mêmes nombres e, e', e'', etc., qui répondent aux imaginaires α, β, γ, etc., et par conséquent on arriverait toujours à la même valeur pour la racine r; et ainsi de suite, s'il se trouvait encore dans la formule des radicaux inférieurs d'exposants diviseurs de $p-1$.

14. Et de-là l'on peut conclure que, si la formule générale des racines n^{mes} de l'unité, ou de l'équation binome $x^n - 1 = 0$, ne contient que des radicaux dont les exposants soient diviseurs de $p-1$, il n'y aura pas, dans toute la formule, un seul radical qui ne porte sur une puissance exacte de même degré, c'est-à-dire sur un résidu de cette puissance relativement au nombre premier p; de sorte que, par l'addition de certains multiples de p à ces résidus, l'expression deviendra, dans toutes ses parties, commensurable et entière, et n'offrira nulle part aucun signe d'opération inexécutable.

15. Mais, s'il se trouve des radicaux de degrés non diviseurs de $p-1$, il y aura sous ces radicaux des nombres qui ne seront point résidus de puissances de même degré, et, par conséquent, la formule contiendra des irrationnelles, qui ne pourront jamais être ramenées à des nombres entiers relativement à p. Cependant ces irrationnelles pourront être des puissances exactes d'incommensurables ou irrationnelles de même forme; de manière que, si, dans la formule, ces puissances exactes se trouvent sous des radicaux du même degré, l'opération radicale pourra s'exécuter; et alors, par l'addition des radicaux semblables, les incommensurables se détruiront d'elles-mêmes, et la formule donnera, toujours avec la même précision, les racines entières de la proposée $x^n-1=\mathrm{M}p$, lorsque cette équation admettra de telles racines.

III.

Application du théorème à des exemples.

16. Essayons d'approfondir encore cette théorie, et d'y répandre un plus grand jour par des exemples.

Considérons, entre autres, la formule générale des racines septièmes de l'unité, ou de l'équation binome $x^7-1=0$, afin de l'appliquer à la recherche des nombres qui peuvent résoudre l'équation indéterminée $x^7-1=\mathrm{M}p$, dont le second membre désigne un multiple quelconque du nombre premier p.

Et d'abord on peut résoudre, sur-le-champ, l'équation

$x^7 - 1 = 0$ par la méthode ordinaire; car, en dégageant la racine réelle, ou le facteur $x - 1$, on a :

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

équation réciproque du sixième degré, qui se partage en trois du second, ou, si l'on veut, en ces deux du troisième degré,

$$x^3 - X x^2 + X' x - 1 = 0,$$

$$x^3 + X' x^2 + X x - 1 = 0,$$

dans lesquelles X et X' sont les racines de l'équation

$$X^2 + X + 2 = 0;$$

ce qui donne :

$$X = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2} \quad \text{et} \quad X' = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{3}.$$

Considérons la première,

$$x^3 - X x^2 + X' x - 1 = 0;$$

et, pour la résoudre à la manière ordinaire, faisons $x = \frac{u + X}{3}$, et nous aurons la transformée :

$$u^3 - 3.\sqrt{-7}.u - 14 + \sqrt{-7} = 0,$$

qui donnera, toutes réductions faites,

$$u = \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \sqrt[3]{\left(7 - \frac{\sqrt{-7}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)};$$

d'où l'on tire, pour la formule des racines 7$^{\text{mes}}$ imaginaires de l'unité :

$$x = \frac{-1+\sqrt{-7}}{6} + \frac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}+\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}\right\}.$$

Cette formule, en y combinant les radicaux cubes des trois manières convenables, donne trois racines de l'équation

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0;$$

et, en y faisant ensuite le radical quarré $\sqrt{-7}$ par-tout de signe contraire, elle donnera les trois autres; ce qui est évident par les valeurs précédentes de X et X′, qui ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{-7}$.

17. Actuellement, évaluons cette formule imaginaire relativement au nombre premier $p=43=2.3.7+1$, afin d'obtenir les six nombres entiers, autres que l'unité, qui résolvent l'équation

$$x^7-1=M.43.$$

Nous trouverons d'abord que, relativement à 43, le radical $\sqrt{-7}$ équivaut à ± 6 et le radical $\sqrt{21}$ à ± 8. Adoptons la première valeur de $\sqrt{-7}$, savoir, $+6$; l'une ou l'autre de $\sqrt{21}$, car cela est indifférent, puisque $\sqrt{21}$ entre en même temps avec des signes contraires, sous les deux radicaux cubes. La formule nous donnera d'abord :

$$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(7-3+12)}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(7-3-12)},$$

ou

$$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{-8}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{16}.$$

Maintenant, on trouve que les trois valeurs de

$$\sqrt[3]{-8} \quad \text{sont} \quad -2,\ -12,\ +14:$$

et que les trois valeurs de

$$\sqrt[3]{16} \quad \text{sont} \quad -3,\ +21,\ -18:$$

de sorte que la formule ne présente plus que des quantités rationnelles, qu'on peut aussitôt réduire à des entiers par rapport à 43.

Mais il faut ici une attention particulière relativement aux valeurs numériques de ces deux radicaux : c'est de choisir avec soin celles qui doivent aller ensemble pour donner les véritables solutions de la proposée. Or, par la nature même de l'équation du troisième degré d'où l'on tire la formule proposée, il est clair qu'on doit combiner les valeurs de ces radicaux cubes de manière que leur produit soit égal à $\sqrt{-7}$, qui est, en signe contraire, le tiers du coëfficient du second terme dans la transformée

$$u^3 - 3.\sqrt{-7}.u - 14 + \sqrt{-7} = 0,$$

d'où proviennent ces radicaux cubiques.

Il faut donc prendre deux à deux leurs valeurs, de telle sorte que leur produit fasse la même valeur que celle qu'on a prise pour $\sqrt{-7}$, c'est-à-dire, fasse $+6$. Ainsi, dans la formule, pour avoir les valeurs simultanées des radicaux cubes, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{16}$, il faudra prendre deux à deux ces valeurs, de la manière suivante, savoir:

$$-\ 2 \text{ avec } -\ 3, \text{ dont le produit fait } +6,$$
$$-12 \text{ avec } +21, \text{ dont le produit fait } +6,$$
$$+14 \text{ avec } -18, \text{ dont le produit fait } +6;$$

et l'on aura :

$$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}(-\ 2)+\frac{1}{3}(-\ 3),\quad \text{d'où } x=-\ 8,$$

$$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}(-12)+\frac{1}{3}(+21),\quad \text{d'où } x=+11,$$

$$x=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}(+14)+\frac{1}{3}(-18),\quad \text{d'où } x=+21.$$

De cette manière, on aura effectivement trois des racines septièmes de l'unité, relativement au nombre premier 43; et toute autre combinaison nous donnerait de fausses valeurs pour ces racines.

Actuellement, employons dans la formule la seconde valeur du radical quarré $\sqrt{-7}$, c'est-à-dire -6, et nous aurons :

$$x=\frac{-7}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(7+3+12)}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(7+3-12},$$

ou bien :

$$x=\frac{-7}{6}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{22}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{-2}.$$

Or, on trouve, pour les trois valeurs du premier radical cube $\sqrt[3]{22}$, les nombres -4, -15, $+19$; et, pour celles du second, $\sqrt[3]{-2}$, les nombres -20, $+9$, $+11$; mais ici l'on doit combiner deux à deux ces valeurs, de manière que leur produit soit égal à -6; ainsi il faudra prendre :

-4 avec -20, dont le produit fait -6,
-15 avec $+9$, dont le produit fait -6,
$+19$ avec $+11$, dont le produit fait -6;

et l'on aura :

$$x = \frac{-7}{6} + \frac{1}{3}(-4) + \frac{1}{3}(-20), \quad \text{d'où } x = -2,$$

$$x = \frac{-7}{6} + \frac{1}{3}(-15) + \frac{1}{3}(+9), \quad \text{d'où } x = +4,$$

$$x = \frac{-7}{6} + \frac{1}{3}(+19) + \frac{1}{3}(-11), \quad \text{d'où } x = +16;$$

ce qui nous donne les trois autres racines de la proposée.

Ainsi -8, $+11$, $+21$, -2, $+4$, $+16$, sont, avec l'unité, les sept nombres entiers inférieurs à 43 qui résolvent l'équation indéterminée $x^7 - 1 = M.43$, ou, si l'on veut, les sept puissances sixièmes différentes des 42 résidus différents 1, 2, 3, 4, 5, etc., jusques à 42; c'est ce qu'on pourra vérifier *à posteriori*, en formant les sixièmes puissances de ces 42 résidus, ou en substituant dans l'équation même $x^7 - 1 = M.43$.

18. J'ai supposé plus haut, qu'on avait obtenu tout d'un coup les trois valeurs de chaque radical cubique; mais il suffit d'avoir l'une quelconque d'entre elles pour obtenir les deux autres. Ainsi $\sqrt[3]{-8}$ nous donne immédiatement la valeur -2; les deux autres seront donc $-2.\alpha$, $-2.\beta$, α et β étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité : or, ces racines sont exprimées par $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, et cette formule ambiguë, évaluée en nombres relativement à 43, nous

donne les deux racines 6 et -7. On aurait donc, par cette voie,

$$\sqrt[3]{-8}=-2,\quad \text{ou } -2\times 6,\quad \text{ou } -2\times -7,$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt[3]{-8}=-2,\quad \text{ou } -12,\quad \text{ou } +14,$$

comme ci-dessus.

De même, $\sqrt[3]{16}$ donne -3; car -3, élevé au cube, donne -27, qui revient à 16. Les deux autres racines seront donc -3α, -3β, ou -18, $+21$, comme on l'a trouvé plus haut.

19. La formule

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{6}+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7\mp\frac{\sqrt{-7}}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7\mp\frac{\sqrt{-7}}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

que nous venons de considérer, et où l'on doit prendre en même temps les signes supérieurs ou les signes inférieurs de $\sqrt{-7}$, ne contient que des radicaux cubes et des radicaux quarrés : or, le nombre premier $p=43$, auquel nous l'avons rapportée, étant tel, que $p-1$ est divisible, non-seulement par 7, mais encore par 3, il s'ensuit qu'on n'a dû trouver nulle part aucun signe d'opération inexécutable, c'est-à-dire, aucun radical qui ne portât sur un résidu de puissance de même degré. Ainsi -7, qu'on voit sous le premier radical quarré, libre de tout autre signe, devait être un résidu de quarré relativement à 43; et il le sera même dans tous les cas de $p-1$ divisible par 7, parce que $p-1$ est toujours divisible par 2. Ensuite, l'expression $7\mp\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}$, qui est sous le radical cubique, devait revenir à un résidu de cube exact relativement à 43. Mais la partie $7 \mp \frac{\sqrt{-7}}{2}$ étant déja rationnelle, il s'ensuit que l'autre partie $\frac{3}{2}\sqrt{21}$ devait l'être aussi ; et, par conséquent, le nombre 21, qui est sous le second radical quarré, devait être aussi un résidu de quarré. C'est en effet ce qu'on vient de vérifier dans l'exemple dont il s'agit, et c'est ce qui aura lieu dans tous les cas de $p-1$ divisible par 7 et par 3.

20. Si le nombre premier p est tel, que $p-1$, toujours divisible par 7, ne le soit point par 3, le nombre -7 sera toujours un quarré, à cause de $p-1$ divisible par 2 ; mais $7 \mp \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{21}$ ne pourra être un cube, et par conséquent 21 ne pourra être un quarré relativement à p. Il y aura donc des irrationnelles dans la formule ; et c'est ce qu'il faut actuellement développer.

21. Considérons, par exemple, le nombre premier $p=29$, qui donne $p-1=28$ divisible par 7, mais non par 3 ; et rapportons-y la formule précédente, afin d'obtenir les six nombres entiers, autres que l'unité, qui résolvent l'équation $x^7-1=M.29$.

Nous trouvons d'abord $\sqrt{-7}=\pm 14$; et si nous employons la première valeur $+14$, la formule nous donnera :

$$x=\frac{-1+14}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{-3}{2}\sqrt{21}\right)}.$$

Cette expression doit représenter actuellement une des valeurs de x ; car les deux radicaux cubes sont tels, que leur produit fait $+14$, valeur adoptée pour $\sqrt{-7}$.

Or, 21 n'est point un quarré par rapport à 29, et par conséquent les radicaux cubes affectent des irrationnelles relativement au même nombre. Mais ces irrationnelles sont égales et de signes contraires; elles se détruisent, et la formule se réduit simplement à $x = \frac{-1+14}{6}$, et nous donne $x = 7$, qui est effectivement une des racines entières de la proposée.

Pour avoir les deux autres, il faut prendre les deux autres valeurs des radicaux cubes, et les combiner de manière que le produit fasse toujours $\sqrt{-7} = 14$; les valeurs de x seront donc :

$$x = \frac{-1+14}{6} + \frac{1}{3}\alpha\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \frac{1}{3}\quad\sqrt[3]{\left(\frac{-3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

$$x = \frac{-1+14}{6} + \frac{1}{3}\beta\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \frac{1}{3}\alpha\sqrt[3]{\left(\frac{-3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

α et β étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, c'est-à-dire,

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Les deux valeurs de x se réduisent donc à

$$x = 7 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{-3}.\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}.$$

A la vérité, les radicaux $\sqrt{-3}$ et $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}$ sont encore irrationnels par rapport à 29; mais leur produit est rationnel, car il est aisé de voir qu'on a (en remplaçant $\frac{3}{2}$ par 16, et 21 par -8),

$$\sqrt{-3}.\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} = \sqrt{-3}.\sqrt{-2}.\sqrt[3]{16},$$

ou $$-\sqrt{6}.\sqrt[3]{16} = \mp 8 \times -6 = \pm 48;$$

ainsi l'on aura :

$$x = 7 \pm \frac{1}{3} 48 = 7 \pm 16 = -6, \quad \text{ou} \ -9;$$

d'où l'on voit que les incommensurables ont disparu de la formule, et qu'on a trouvé les deux nombres -6, -9, qui, avec le nombre 7 déja trouvé, sont effectivement trois des racines septièmes de l'unité relativement à 29.

Pour avoir les trois dernières racines, il faut prendre actuellement la seconde valeur de $\sqrt{-7}$, qui est -14, et la formule deviendra, en réduisant :

$$x = 12 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(14 + \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(14 - \frac{3}{2}\sqrt{21}\right)};$$

ou, si l'on veut remplacer $\frac{3}{2}\sqrt{21}$ par $7\sqrt{2}$, ce qui est la même chose par rapport à 29, on aura plus simplement :

$$x = 12 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{(14 + 7\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(14 - 7\sqrt{2})}\right).$$

Mais cette formule ne se délivre pas des irrationnelles aussi facilement que la première. Cependant, comme elle doit répondre exactement à des entiers x, nous sommes sûrs que les irrationnelles $14 \pm 7\sqrt{2}$, qui sont sous les radicaux cubiques, doivent être des cubes exacts d'irrationnelles de même forme, afin que, dans l'addition des radicaux, les incommensurables puissent se détruire. Et en effet, avec un peu d'attention, il est facile de reconnaître que $14 + 7\sqrt{2}$ est, aux multiples près de 29 (ce qui est toujours sous-entendu), le cube exact de l'irrationnelle de même forme, $5 + 11\sqrt{2}$; et que $14 - 7\sqrt{2}$ est le cube exact de l'irrationnelle conjuguée $5 - 11\sqrt{2}$: de sorte qu'on aura, pour racines cubiques, les deux valeurs : $5 + 11\sqrt{2}$ et $5 - 11\sqrt{2}$, valeurs qui doivent d'ailleurs aller ensemble dans la formule, puisqu'elles donnent leur produit égal à

$$5^2-2.11^2=-14=\sqrt{-7},$$

comme cela doit être par l'hypothèse.

On aura donc d'abord :

$$x=12+\frac{1}{3}(5+11\sqrt{2})+\frac{1}{3}(5-11\sqrt{2})=12+\frac{10}{3}=-4.$$

Ensuite, prenant les deux autres signes des radicaux cubes, on aura :

$$x=12+\frac{1}{3}\alpha\left(5+11\sqrt{2}\right)+\frac{1}{3}\beta\left(5-11\sqrt{2}\right),$$

$$x=12+\frac{1}{3}\beta\left(5+11\sqrt{2}\right)+\frac{1}{3}\alpha\left(5-11\sqrt{2}\right);$$

et si l'on met à la place de α et β, leurs valeurs, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, il viendra, en effaçant les irrationnelles qui se detruisent,

$$x=12+\frac{1}{3}\left(-5+11.\sqrt{2}\sqrt{-3}\right),$$

$$x=12+\frac{1}{3}\left(-5-11.\sqrt{2}\sqrt{-3}\right);$$

formules qui ne contiennent plus d'incommensurables, car le produit des radicaux quarrés $\sqrt{2}$ et $\sqrt{-3}$, revient à $\sqrt{-6}$, qui répond à 9. Ainsi l'on aura :

$$x=12+\frac{1}{3}\left(-5+11.9\right)=-5,$$

$$x=12+\frac{1}{3}\left(-5-11.9\right)=-13;$$

d'où il résulte enfin qu'on aura les six nombres $7, -6, -9,$

-4, -5, -13, qui seront, avec l'unité, les sept racines de l'équation indéterminée $x^7-1=\text{M}.29$; et c'est ce qu'on peut vérifier *à posteriori*, en les substituant dans cette équation même.

22. Nous avons dit plus haut que la racine cube de $14\pm7\sqrt{2}$, relativement à 29, était $5\pm11\sqrt{2}$, c'est-à-dire, qu'on a :

$$\sqrt[3]{(14\pm7\sqrt{2})}=5\pm11\sqrt{2}:$$

on trouverait également :

$$\sqrt[3]{(14\pm7\sqrt{2})}=+6\pm5\sqrt{2},$$

ou bien encore :

$$\sqrt[3]{(14\pm7\sqrt{2})}=-11\pm13\sqrt{2};$$

de sorte qu'on peut indifféremment employer ces trois valeurs dans la recherche des racines de la proposée. On peut même dire qu'elles sont toujours effectivement employées toutes les trois : car elles reviennent à l'une quelconque d'entre elles multipliée par les trois racines cubiques de l'unité. Ainsi l'on trouvera que $6\pm5\sqrt{2}$ n'est autre chose que la première $5\pm11\sqrt{2}$ multipliée par $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; et la troisième, $-11\pm13\sqrt{2}$, est encore la première multipliée par $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Nous avons aussi remplacé l'irrationnelle

$$14\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{21},\quad \text{ou}\quad 14\pm16\sqrt{21},$$

par

$$14\pm7\sqrt{2};$$

nous aurions pu de même la remplacer par toute autre équivalente de la forme $a \pm b\sqrt{k}$, k étant un non-résidu de quarré relativement à 29; car il est assez facile de voir que toutes ces expressions peuvent se changer les unes dans les autres. Si l'on conservait la première $14 \pm 16\sqrt{21}$, on trouverait:

$$\sqrt[3]{(14 \pm 16\sqrt{21})} = 5 \pm 8\sqrt{21}, \quad \text{ou} \quad -11 \pm 9\sqrt{21},$$

ou

$$6 \pm \sqrt{21};$$

et en employant ces valeurs, on parviendrait de même aux racines de l'équation proposée.

23. J'ai développé ces exemples avec quelque détail, non-seulement pour éclaircir et confirmer la théorie par le calcul, mais encore pour faire quelques remarques importantes dans l'application de la formule radicale à la recherche des nombres entiers qu'elle représente. Ainsi, l'on a vu qu'il ne suffit pas de donner aux radicaux de cette formule les signes convenables qui doivent aller ensemble, pour qu'elle exprime les diverses racines de l'unité; mais qu'il faut encore, lorsqu'on passe à l'évaluation en nombres, conjuguer aussi les valeurs qu'on adopte pour les radicaux, de manière à ne pas se contredire : comme si, par exemple, dans le premier cas de $p=43$, après avoir pris pour $\sqrt{-7}$ la valeur $+6$, on allait, pour les deux radicaux cubes $\sqrt[3]{-8}$, et $\sqrt[3]{16}$, mettre ensemble les valeurs -2 et 21, dont le produit -42 revient à 1, tandis qu'il doit revenir à $+6$, valeur adoptée pour $\sqrt{-7}$ dans la formule proposée.

On a vu aussi dans le second exemple comment les racines, étant réelles et entières, se présentent néanmoins sous la forme d'irrationnelles ; de sorte qu'il y a ici une espèce de cas irréductible tout-à-fait analogue à celui qu'on rencontre dans la résolution des équations algébriques. Ce cas irréductible est inévitable par la nature des choses ; car si, par exemple, dans le cas de $p=29$ (ou de p égal à tout autre nombre premier, tel que $p-1$ ne soit point divisible par 3), il était possible que la double expression $7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}$, qui est sous le radical cube, fût réellement réductible à deux cubes entiers e^3 et e'^3 ; alors on aurait pour une des racines de $x^7-1=\mathrm{M}p$, une expression de la forme :

$$x=\mathrm{A}+\frac{1}{3}e+\frac{1}{3}e',$$

A désignant un certain nombre entier. Mais on aurait aussi, pour une autre racine,

$$x'=\mathrm{A}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)e+\frac{1}{3}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)e';$$

d'où il faudrait conclure que $(e-e')\sqrt{-3}$ serait rationnelle, et qu'ainsi le radical $\sqrt{-3}$, et partant la formule $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, qui marque une des racines cubiques imaginaires de l'unité, serait aussi rationnelle relativement à p. Mais cette racine cubique ne peut répondre à un entier ; car il faudrait alors que $p-1$ fût divisible par 3, ce qui est contre l'hypothèse. (*Voyez* l'art. 39.)

Et réciproquement, on voit que si p est tel, que $p-1$, toujours divisible par 7, soit divisible par 3, alors la quantité $7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}$ sera exactement réductible à un cube.

Car si la racine cube de cette expression ne pouvait revenir qu'à l'irrationnelle $a \pm b\sqrt{k}$, k étant un non-résidu de quarré, alors la formule

$$x = \mathrm{A} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(a + b\sqrt{k}\right)^3} + \tfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{a - b\sqrt{k}}\right)^3$$

ne pourrait donner qu'une seule racine entière pour l'équation

$$x^7 - 1 = \mathrm{M}p,$$

tandis qu'elle doit en donner trois par l'hypothèse de $p - 1$ divisible par 7. En effet, les deux autres racines seraient :

$$x' = \mathrm{A} + \tfrac{1}{3}\alpha\sqrt[3]{\left(a + b\sqrt{k}\right)^3} + \epsilon\sqrt[3]{\left(a - b\sqrt{k}\right)^3},$$

$$x'' = \mathrm{A} + \tfrac{1}{3}\epsilon\sqrt[3]{\left(a + b\sqrt{k}\right)^3} + \alpha\sqrt[3]{\left(a - b\sqrt{k}\right)^3},$$

α et ϵ étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité ; et ces deux racines α et ϵ répondraient nécessairement à des entiers, puisqu'on suppose $p - 1$ divisible par 3. Mais ces entiers étant différents, les irrationnelles $b\sqrt{k}$ ne se détruiraient point dans ces formules ; de sorte que x' et x'' seraient nécessairement irrationnelles, ce qui est contre l'hypothèse.

24. Au reste, tout ce que je viens de dire dans les deux exemples précédents, est une suite naturelle de la démonstration générale par laquelle j'ai fait voir la composition semblable de la formule qui exprime les racines de l'équation binome $x^n - 1 = 0$, et de celle qui représenterait actuellement les solutions entières de l'équation indéterminée $x^n - 1 = \mathrm{M}p$. J'ai voulu suivre et vérifier tous ces détails sur la formule des racines septièmes de l'unité ; mais si l'on

voulait s'en rendre compte *à priori*, et de la manière la plus lumineuse, il n'y aurait rien de mieux à faire que d'appliquer à cet exemple même de

$$x^7 - 1 = Mp,$$

la méthode générale que nous avons exposée au commencement, et où l'on voit la formule composée avec les racines mêmes qu'elle doit identiquement représenter l'une après l'autre.

25. Ainsi, r étant une quelconque des racines, autres que l'unité, qui résolvent l'équation $x^7 - 1 = Mp$, toutes les autres seront marquées par r^2, r^3, r^4, r^5, r^6; ou bien, si on les range dans l'ordre où chacune d'elles est le *cube* de celle qui la précède, elles seront représentées par

$$r,\ r^3,\ r^2,\ r^6,\ r^4,\ r^5.$$

Considérez les trois racines prises dans cette suite, en allant de deux en deux, savoir, r, r^2, r^4, et les trois autres racines assemblées de même, r^3, r^6, r^5, et soient

$$r + r^2 + r^4 = X \quad \text{et} \quad r^3 + r^6 + r^5 = X';$$

en prenant les deux fonctions linéaires,

$$X + X' \quad \text{et} \quad X - X',$$

vous pourrez mettre les deux nombres X et X' sous la forme :

$$X = \frac{X + X' + \sqrt{(X - X')^2}}{2},$$

$$X' = \frac{X + X' - \sqrt{(X - X')^2}}{2}.$$

Actuellement, considérez les trois fonctions linéaires :

$$r + r^2 + r^4 = X,$$

$$r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 = t,$$

$$r + \beta r^2 + \beta^2 r^4 = t';$$

et vous aurez identiquement :

$$r = \frac{X + t + t'}{3} = \frac{X + \sqrt[3]{t^3} + \sqrt[3]{t'^3}}{3};$$

c'est-à-dire, que le nombre r sera mis sous la forme identique :

$$r = \frac{r + r^2 + r^4}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4)^3}}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r + \beta r^2 + \beta^2 r^4)^3}}{3}.$$

Cette formule, en donnant aux radicaux cubiques les signes convenables, présentera indifféremment les trois racines r, r^2, r^4; car il est évident qu'on aura :

$$r^2 = \frac{r + r^2 + r^4}{3} + \frac{\alpha^2 \sqrt[3]{(r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4)^3}}{3} + \frac{\beta^2 \sqrt[3]{(r + \beta r^2 + \beta^2 r^4)^3}}{3},$$

$$r^4 = \frac{r + r^2 + r^4}{3} + \frac{\alpha \sqrt[3]{(r + \alpha r^2 + \alpha r^4)^3}}{3} + \frac{\beta \sqrt[3]{(r + \beta r^2 + \beta^2 r^4)^3}}{3}.$$

On trouverait de même, pour les trois autres racines r^3, r^6, r^5 :

$$r^3 = \frac{r^3 + r^6 + r^5}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r^3 + \alpha r^6 + \alpha^2 r^5)^3}}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r^3 + \beta r^6 + \beta^2 r^5)^3}}{3}.$$

$$r^6 = \frac{r^3 + r^6 + r^5}{3} + \frac{\alpha^2 \sqrt[3]{(r^3 + \alpha r^6 + \alpha^2 r^5)^3}}{3} + \frac{\beta^2 \sqrt[3]{(r^3 + \beta r^6 + \beta^2 r^5)^3}}{3}.$$

$$r^5 = \frac{r^3 + r^6 + r^5}{3} + \frac{\alpha \sqrt[3]{(r^3 + \alpha r^6 + \alpha^2 r^5)^3}}{3} + \frac{\beta \sqrt[3]{(r^3 + \beta r^6 + \beta^2 r^5)^3}}{3}$$

Et ces six équations ne sont autre chose que des identités.

Imaginez maintenant qu'on développe les cubes

$$\left(r+\alpha r^2+\alpha^2 r^4\right)^3, \text{ etc. ;}$$

et que, dans les développements, on fasse par-tout $r^7=1$, au lieu de $1+\mathrm{M}p$; et

$$r+r^2+r^4=\mathrm{X} \quad \text{et} \quad r^3+r^6+r^5=\mathrm{X}';$$

et puis, qu'on fasse $\mathrm{X}+\mathrm{X}'=-1$, au lieu de $-1+\mathrm{M}p$, et par conséquent $(\mathrm{X}-\mathrm{X}')^2=-7$, au lieu de $-1+\mathrm{M}p$; et la formule générale qui exprimait un quelconque des nombres r, deviendra :

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7\mp\frac{\sqrt{-7}}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7\mp\frac{\sqrt{-7}}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

c'est-à-dire, l'expression exacte de l'une quelconque des racines septièmes imaginaires de l'unité. Ainsi cette formule, en y rétablissant sous les divers radicaux les multiples de p qu'on y a supprimés, doit revenir à l'expression des nombres entiers r qui résolvent l'équation indéterminée $x^7-1=\mathrm{M}p$, comme nous l'avons démontré d'une manière générale au commencement de ce Mémoire.

26. Si donc l'équation a toutes ses racines entières, ce qui a lieu lorsque $p-1$ est divisible par 7, la première partie $\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{6}$ doit revenir à la somme des trois nombres entiers

$$r+r^2+r^4, \quad \text{ou} \quad r^3+r^6+r^5;$$

et par conséquent le nombre -7, qui est sous le radical quarré, doit toujours être un résidu de quarré relativement à p.

Ensuite, la partie $7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}$ doit revenir au cube de l'expression

$$r+\alpha r^2+\alpha^2 r^4, \quad \text{ou} \quad r+\alpha^2 r^2+\alpha r^4,$$

c'est-à-dire, au cube de

$$r-\frac{r^2+r^4}{2}\pm\frac{r^2-r^4}{2}.\sqrt{-3},$$

expression rationnelle et réductible à un entier, si $p-1$ est divisible par 3; car le radical $\sqrt{-3}$ pourra se réduire alors à un entier relativement à p.

Dans le cas contraire, elle sera irrationnelle; car -3 ne sera point un résidu de quarré exact par rapport au nombre p.

La racine cube de $7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}$ pourra donc toujours être ramenée à la forme $a\pm b\sqrt{-3}$, en faisant :

$$a=\frac{2r-r^2-r^4}{2} \quad \text{et} \quad b=\frac{r^2-r^4}{2}.$$

Le nombre a aura toujours trois valeurs différentes, qu'on trouvera en changeant les racines r, r^2, r^4, les unes dans les autres; de sorte qu'on aura :

$$a=\frac{2r-r^2-r^4}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{2r^2-r^4-r}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{2r^4-r-r^2}{2};$$

et le nombre b aura les trois valeurs correspondantes :

$$b=\frac{r^2-r^4}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{r^4-r}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{r-r^2}{2}.$$

Pareillement, la racine cube de $7+\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}$ aura trois valeurs différentes de la forme $a'\pm b'\sqrt{-3}$, en faisant :

$$a'=\frac{2r^3-r^6-r^5}{2},\quad \text{ou}\quad \frac{2r^6-r^5-r^3}{2},\quad \text{ou}\quad \frac{2r^5-r^3-r^6}{2},$$

$$b'=\frac{r^6-r}{2},\qquad \text{ou}\qquad \frac{r^5-r^3}{2},\qquad \text{ou}\qquad \frac{r^3-r^6}{2};$$

ce qui revient, comme on voit, à changer, dans les expressions précédentes, les trois racines r, r^2, r^4 dans les trois autres racines conjuguées r^3, r^6, r^5.

27. Ainsi, nous avons trouvé que, relativement à $p=43$, les six racines de $\frac{x^7-1}{x-1}=M.43$, sont :

$$r,\quad r^2,\quad r^4;\qquad r^3,\quad r^6,\quad r^5,$$

$$-2,\quad 4,\quad 16;\qquad -8,\quad 21,\quad 11:$$

on aurait donc dans ce cas, pour le premier radical cube, la valeur

$$a\pm b\sqrt{-3}=\frac{2r-r^2-r^4}{2}\pm\frac{r^2-r^4}{2}\cdot\sqrt{-3};$$

ce qui donnerait :

$$\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}=-21\pm6\sqrt{-3},$$

$$\alpha\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}=-6\pm9\sqrt{-3},$$

$$\alpha^2\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}=\quad 15\pm3\sqrt{-3}.$$

On trouverait de même les trois valeurs du radical cube

$$\sqrt[3]{\left(7+\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

en employant de la même manière les trois nombres r^3, r^6, r^7.

Ici le nombre -3 est un quarré dont la racine est ± 13; les valeurs des radicaux cubes précédents sont donc : -4 et -20, -5 et 9, 19 et 11, comme nous l'avons trouvé précédemment; et les valeurs qui doivent aller ensemble dans la formule se trouvent ici tout accouplées, comme cela résulte nécessairement de notre analyse.

28. Pour le nombre premier $p=29$, on a les racines

$$r, \quad r^2, \quad r^4; \quad r^3, \quad r^6, \quad r^5,$$

respectivement égales à

$$-4, \quad -13, \quad -5; \quad -6, \quad 7, \quad -9;$$

on aura donc :

$$\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}= \quad 5\pm\ 4\sqrt{-3},$$

$$\alpha\ \sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}= \quad 6\pm 14\sqrt{-3},$$

$$\alpha^2\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}=-11\pm 10\sqrt{-3}.$$

On trouverait de même les trois valeurs de

$$\sqrt[3]{\left(7+\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

en employant les racines r^3, r^6, r^5, au lieu des racines r, r^2, r^4. Mais ici -3 n'est point un quarré relativement à $p=29$, et ces radicaux cubes demeurent irrationnels; ce qui s'accorde entièrement avec ce que nous avons trouvé d'une autre manière, et nous ramène exactement aux mêmes valeurs déja obtenues pour ces radicaux. Et en effet, $5\pm 4\sqrt{-3}$ équivaut à $5\mp 11\sqrt{2}$; de même, $6\pm 14\sqrt{-3}$ équivaut à $6\pm 5\sqrt{2}$, etc., etc., et ainsi des autres.

29. Ainsi l'on revoit, par l'analyse la plus claire, les différents théorèmes que nous avions déja reconnus sur cet exemple des racines septièmes de l'unité. Les irrationnelles ne viennent dans la formule que par les racines cubiques $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; de sorte que, si ces racines répondent à des entiers relativement à p, la formule n'offre par-tout que des puissances exactes sous les radicaux qu'elle renferme. On peut donc dire que la quadruple expression

$$7 \pm \frac{\sqrt{-7}}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{21}$$

répond toujours à un résidu cubique entier relativement à tout nombre premier p de la forme $7m+1$, lorsque m est divisible par 3; et que, si m n'est pas divisible par 3, cette expression ne peut jamais être un résidu cubique. Et l'on peut trouver une foule de théorèmes semblables sur les résidus de degrés supérieurs, par la considération des racines supérieures de l'unité.

Les résidus quarrés sont les seuls dont la théorie soit connue des géomètres, et l'on n'a encore aucun théorême sur les résidus d'un ordre plus élevé. Il me semble que notre analyse ouvre un nouveau champ à ces découvertes.

30. Mais il n'est pas inutile de faire encore quelques remarques sur la formule identique

$$r = \frac{r + r^2 + r^4}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4)^3}}{3} + \frac{\sqrt[3]{(r + 6 r^2 + 6^2 r^4)^3}}{3},$$

que je représenterai, pour abréger, par

$$r = \frac{L}{3} + \frac{\sqrt[3]{A}}{3} + \frac{\sqrt[3]{A'}}{3}.$$

Vous voyez que les trois nombres r, r^2, r^4 sont donnés l'un après l'autre, par l'emploi des trois signes radicaux cubiques, en les combinant de cette manière :

$$\sqrt[3]{A} \quad \text{avec} \quad \sqrt[3]{A'},$$

$$\alpha\sqrt[3]{A} \quad \text{avec} \quad \beta\sqrt[3]{A'},$$

$$\beta\sqrt[3]{A} \quad \text{avec} \quad \alpha\sqrt[3]{A'}.$$

Or, il est clair que ces trois racines r, r^2, r^4, seraient également données en ne faisant usage que d'un seul signe pour chaque radical, mais en changeant sous ces radicaux la place des racines, sans troubler l'ordre qui règne entre elles. La somme L ne varie point par ces changements : les cubes A et A' ne varient pas non plus ; mais leurs racines cubiques prennent leurs trois valeurs différentes. Ainsi la permutation des racines sous le radical équivaut au changement du signe de ce radical.

Si, au lieu de faire entre les racines ces permutations simultanées, on changeait la racine r qu'on emploie, en une autre, comme r^2 par exemple, alors la somme L deviendrait $L_1 = r^2 + r^4 + r^8$; A et A' deviendraient

$$A_1 = \left(r^2 + \alpha r^4 + \beta r^8\right)^3, \quad A'_1 = \left(r^2 + \beta r^4 + \alpha r^8\right)^3;$$

et la formule $\frac{L_1 + \sqrt[3]{A_1} + \sqrt[3]{A'_1}}{3}$, au lieu de donner identiquement la racine r, nous donnerait identiquement la racine r^2, en conservant les mêmes signes radicaux qu'auparavant.

Et de même si, au lieu de r, vous employiez r^4, vous auriez de nouvelles expressions L_2, A_2, A'_2; et la formule

$$\frac{L_2 + \sqrt[3]{A_2} + \sqrt[3]{A'_2}}{3},$$

vous donnerait identiquement la racine r^4, en conservant toujours les mêmes signes aux radicaux.

Mais il est clair que les fonctions L_1, A_1, A'_1, et les fonctions L_2, A_2, A'_2, reviendraient respectivement aux premières L, A, A', en y rabaissant les puissances de r au-dessous de r^7, par la supposition $r^7 = 1$, c'est-à-dire, par la suppression de certains multiples de p. Donc, par l'addition de certains multiples de p aux quantités L, A et A', vous les ferez devenir respectivement L_1, A_1 et A'_1 ou L_2, A_2, A'_2.

Donc, si vous voulez toujours employer dans la formule des racines de l'unité, un même signe unique pour chaque radical, et parvenir pourtant aux différents nombres que cette formule peut également représenter, il suffira d'ajouter à la quantité qui est sous ce radical les différents multiples de p qui sont également propres à la rendre une puissance exacte. Pour les nombres affectés du radical *quarré*, il y aura deux différents multiples de p qui les rendront des quarrés exacts; et il n'y en aura que deux qui puissent donner des quarrés différents relativement à p. Pour les quantités soumises au radical *cubique*, il y aura trois différents multiples; et il n'y en aura que trois qui répondent à des cubes différents. Et ce qu'on vient de dire doit s'étendre à toutes les expressions radicales que l'on pourrait considérer.

31. La formule générale qui résout une équation, se présente d'une manière tout-à-fait déterminée, et non pas comme une expression identique composée des différentes racines x, x', x'', etc., lesquelles sont supposées inconnues. Ainsi nous ne pouvons point y permuter actuellement les racines, afin d'amener cette formule à donner successivement chaque racine par les mêmes signes d'opération. Donc, pour que la formule représente actuellement telle racine qu'on voudra, il est nécessaire que les signes radicaux y aient un sens équivoque; c'est-à-dire, qu'ils répondent indifféremment à plusieurs résultats qu'on puisse adopter à volonté. D'où l'on voit que la théorie des signes, en algèbre, a ses principes fondamentaux dans la théorie de l'ordre et des permutations; et c'est ce que nous développerons ailleurs avec plus d'étendue.

32. J'ajouterai encore, pour ne rien laisser à désirer sur la théorie précédente, qu'au lieu de l'expression identique

$$r=\frac{r+r^2+r^4}{3}+\frac{\sqrt[3]{(r+\alpha r^2+\alpha^2 r^4)^3}}{3}+\frac{\sqrt[3]{(r+\beta r^2+\beta^2 r^4)^3}}{3},$$

qui répond à la racine de $x^7-1:x-1=0$, et qui conduit à la formule la plus simple qu'on puisse obtenir, on pourrait en considérer une autre qui répond encore aux mêmes racines, mais qui contient des radicaux sixièmes. On trouverait également, mais par des opérations plus longues, les mêmes résultats que nous avons obtenus. Et en effet, je trouve que cette autre expression générale de la racine r, étant ramenée à une identité entre toutes les racines r, r^2, r^3, r^4, etc., reviendrait à

$$r = \frac{r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5}{6} + \frac{\sqrt{(r - r^3 + r^2 - r^6 + r^4 - r^5)^2}}{6},$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{(r + \alpha r^3 + \alpha^2 r^2 + r^6 + \alpha r^4 + \alpha^2 r^5)^3}}{6} + \frac{\sqrt[3]{(r + \beta r^3 + \beta^2 r^2 + r^6 + \beta r^4 + \beta^2 r^5)^3}}{6},$$

$$+ \frac{\sqrt{(r - \alpha r^3 + \alpha_2 r^2 - r^6 + \alpha r^4 - \alpha^2 r_5)^3}}{6} + \frac{\sqrt[6]{(r - \beta r^3 + \beta^2 r^2 - r^6 + \beta r^4 - \beta^2 r^5)^6}}{6}.$$

Or il est facile de voir qu'elle coïncide entièrement avec la première : car, si l'on désigne, pour abréger, les trois termes de la première par

$$\frac{L}{3} + \frac{\sqrt[3]{A}}{3} + \frac{\sqrt[3]{A'}}{3},$$

et les six termes de la seconde, par

$$\frac{M}{6} + \frac{\sqrt{N}}{6} + \frac{\sqrt[3]{P}}{6} + \frac{\sqrt[3]{P'}}{6} + \frac{\sqrt[6]{Q}}{6} + \frac{\sqrt[6]{Q'}}{6};$$

il est clair que $\frac{L}{3}$ coïncide avec $\frac{M + \sqrt{N}}{6}$;

le radical cube $\frac{\sqrt[3]{A}}{3}$, avec $\frac{\sqrt[3]{P} + \sqrt[6]{Q}}{6}$;

et enfin le radical cube $\frac{\sqrt[3]{A'}}{3}$, avec $\frac{\sqrt[3]{P'} + \sqrt[6]{Q'}}{6}$.

Ainsi ces formules différentes de la racine 7^{me} de l'unité, reviennent, dans le fond, à la même formule, comme cela doit être, et dans ce cas, et en général, pour les équations de tous les degrés.

IV.

Application à la recherche des racines primitives.

33. Reprenons maintenant l'équation générale $x^n - 1 = Mp$, et considérons le cas où l'exposant n, diviseur de $p-1$, est le nombre $p-1$ lui-même. Nous aurons donc l'équation $x^{p-1} - 1 = Mp$, qui est celle du fameux théorème de *Fermat*, et qui a pour racines les $p-1$ nombres différents inférieurs à p,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \text{etc.},\ p-1.$$

On a vu que tous ces nombres sont analytiquement représentés par les $p-1$ racines de l'équation binome $x^{p-1} - 1 = 0$; c'est-à-dire, par les racines $p-1^{\text{mes}}$ de l'unité. Or, parmi ces racines, il y en a quelques-unes α qui appartiennent uniquement à la proposée $x^{p-1} - 1 = 0$, c'est-à-dire, qui ne résolvent pas en même temps d'autres équations binomes de degrés inférieurs, ou, si l'on veut, dont aucune puissance ne peut donner l'unité avant la puissance $p-1^{\text{me}}$. Chacune de ces racines imaginaires est donc propre à fournir, par ses puissances successives, la suite complète de toutes les racines; et il est clair qu'il y a autant de ces racines α, qu'il y a de nombres inférieurs et premiers à $p-1$. Ainsi, cette imaginaire α doit répondre à un nombre entier e dont aucune puissance, divisée par p, ne puisse ramener l'unité pour reste, avant la puissance $p-1^{\text{me}}$; et qui, par conséquent, fournisse, par ses puissances successives, e, e^2, e^3, e^4, etc., e^{p-1}, la suite complète des

$p-1$ résidus différents, $1, 2, 3, 4, 5$, etc., $p-1$. C'est ce nombre e qu'on appelle une *racine primitive du nombre premier p* : il conviendrait mieux de l'appeler *racine primitive de l'équation binome* $x^{p-1}-1=\mathrm{M}p$; car toute équation $x^n-1=\mathrm{M}p$, où n est un diviseur de $p-1$, a aussi ses *racines primitives*, qui jouissent de propriétés semblables, et qui sont de même représentées, suivant notre théorie, par les racines primitives imaginaires de l'équation $x^n-1=0$. Ainsi la dénomination ordinaire n'est relative qu'au cas particulier de $n=p-1$, tandis qu'elle devrait s'étendre à tous les cas de n diviseur de $p-1$. Au reste, comme l'équation $x^{p-1}-1=\mathrm{M}p$ renferme toutes les équations semblables, $x^n-1=\mathrm{M}p$, où n serait une aliquote de $p-1$, l'expression des racines primitives de cette équation conduit naturellement à celle de toutes les autres relatives aux diviseurs binomes de la première.

Car, soit e la racine primitive d'un nombre premier p, ou, pour mieux dire, la racine primitive de l'équation $x^{p-1}-1=\mathrm{M}p$; il est facile de voir que toutes les puissances e^k d'exposants k inférieurs et premiers à $p-1$, seront aussi des racines primitives.

Ensuite, toutes les puissances e^n d'exposants n diviseurs de $p-1$, seront les racines primitives de l'équation

$$x^{\frac{p-1}{n}}-1=\mathrm{M}p,$$

ou, si l'on veut, elles seront des *puissances* n^{mes} *primitives* entre toutes les puissances de même degré, lesquelles sont au nombre de $\frac{p-1}{n}$, comme cela est évident par la proposée

$$\left(x^n\right)^{\frac{p-1}{n}}-1=\mathrm{M}p,$$

qui, par rapport à x^n, est du degré $\frac{p-1}{n}$.

Ainsi 2 est une racine primitive du nombre 13; et par conséquent, 2^5, 2^7, 2^{11}, sont les trois autres, parce que 5, 7 et 11 sont, après l'unité, les trois nombres inférieurs et premiers à 12. Mais 2^3 est racine primitive de $x^{\frac{12}{3}}-1$ ou $x^4-1=\mathrm{M}.13$; ou, si l'on veut, 2^3 est un *cube primitif* entre les quatre cubes différents des douze nombres 1, 2, 3, 4, etc., 12. De même, 2^2 serait un quarré *primitif* entre les six quarrés différents de ces nombres; et 2^4, une quatrième puissance *primitive* entre les trois puissances 4^{mes} de ces mêmes nombres.

34. Mais venons à la recherche des racines primitives par le moyen de nos formules générales, et donnons des exemples.

I. Soit d'abord le nombre premier $p=3$. La racine primitive de 3 ou de $x^2-1=\mathrm{M}.3$, est exprimée par la racine primitive de l'équation binome

$$x^2-1=0,$$

laquelle est $x=-1$. Or -1, relativement à 3, équivaut à $-1+3$, ou à 2, qui est effectivement la racine primitive de 3.

II. Soit $p=5$. La racine primitive de 5 est exprimée par la racine primitive de $x^4-1=0$: ainsi, en rejetant le facteur x^2-1, il vient $x^2+1=0$, qui donne $x=\pm\sqrt{-1}$ pour l'expression ambiguë de la racine primitive de $x^4-1=0$. Or, $\sqrt{-1}$ équivaut, comme résidu, à $\sqrt{(-1+5)}$, à $\sqrt{4}$, à ± 2, ou, si l'on veut, en changeant -2 en $-2+5=3$, $\sqrt{-1}$ équivaut à 2 et à 3, qui sont effectivement les deux racines primitives de 5.

III. Soit $p=7$. Les racines primitives seront exprimées par les racines imaginaires primitives de $x^6-1=0$. Rejetant donc le facteur binome x^3-1, il vient $x^3+1=0$, d'où, en écartant le facteur $x+1$, on tire $x^2-x+1=0$, qui renferme les deux racines cherchées. Cette équation résolue, donne $x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$: or -3 équivaut à $+7-3$, à 4, et $\pm\sqrt{-3}$, à ± 2 ; on a donc :

$$x=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x=\frac{-1}{2},$$

et les fractions $\frac{3}{2}$ et $\frac{-1}{2}$ reviennent sur-le-champ à 5 et 3 relativement à 7. Ainsi 3 et 5 sont les deux racines primitives de 7.

35. On peut encore s'y prendre d'une manière plus simple dans cet exemple et dans tous les autres. Si l'on considère une racine primitive de $x^2-1=0$, et une racine primitive de $x^3-1=0$, leur produit sera une racine primitive de

$x^6 - 1 = 0$: or l'équation $x^2 - 1 = 0$ donne -1 pour sa racine primitive; $x^3 - 1 = 0$ donne $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ pour ses deux racines primitives; on a donc, pour l'expression de la racine primitive de 7, le produit de -1 par $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, ce qui donne $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, comme ci-dessus.

IV. Soit $p = 11$. Il est clair que la racine primitive de $x^{10} - 1 = 0$ est exprimée généralement par

$$x = \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}.$$

Or, $\sqrt{5} = \sqrt{(5 + 11)} = \sqrt{16} = 4$, d'où $2\sqrt{5} = 8$. Actuellement,

$$\sqrt{\left(-10 + 2\sqrt{5}\right)} = \sqrt{-2} = \sqrt{\left(-2 + 11\right)} = \sqrt{9} = 3;$$

d'où $x = \frac{1 + 4 + 3}{4} = 2$. Ainsi 2 est une racine primitive de 11.

On trouverait les trois autres par l'ambiguïté de $\sqrt{5}$ combinée avec celle du radical $\sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}$.

Prenons ce dernier radical en *moins*, et nous aurons :

$$x = \frac{1 + 4 - 3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1 + 11}{2} = 6.$$

Prenons le radical $\sqrt{5}$ en *moins* dans les deux formules, et l'on aura :

$$x = \frac{1 - 4 \pm \sqrt{-18}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{-3 \pm 2}{4} = \frac{-1}{4} \text{ et } \frac{-5}{4};$$

et ces deux fractions $\frac{-5}{4}$ et $\frac{-1}{4}$, relativement à 11, reviennent aux entiers 7 et 8.

Ainsi, 2, 6, 7, 8, sont les quatre racines primitives de 11, comme on peut le vérifier.

V. Soit $p=13$: je prends les deux racines primitives $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ de $x^3-1=0$, et les deux racines primitives $\pm\sqrt{-1}$, de $x^4-1=0$; et j'ai, pour la racine primitive de $x^{3.4}-1=0$, ou de $x^{12}-1=0$, le produit $\pm\sqrt{-1}\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$. Il ne s'agit plus que d'évaluer cette expression relativement à 13.

Or $\sqrt{-1}=\sqrt{(-1+2.13)}=\pm 5$; ensuite le radical

$$\sqrt{-3}=\sqrt{(-3+3.13)}=\pm 6;$$

donc le facteur $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ revient à $\frac{5}{2}$ et à $\frac{-7}{2}$, ou à 9 et 3; donc on a :

$$x=\pm 5\times 9 \quad \text{et} \quad x=\pm 5\times 3.$$

Ce qui donne, en réduisant, $x=\pm 6$ et $x=\pm 2$; ou, si l'on veut, $x=6, 7, 2, 11$, qui sont effectivement les quatre racines primitives de 13.

VI. Soit $p=17$; il faut d'abord chercher une racine primitive de $x^{16}-1=0$, où l'exposant 16 est une puissance du nombre premier 2. Considérez donc le diviseur binome de ce degré, c'est-à-dire, l'équation $x^2-1=0$; vous avez d'abord -1 pour sa racine primitive : donc $\pm\sqrt{-1}$ sont les deux racines primitives de $x^4-1=0$; donc $\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$ est l'expression des quatre racines primitives de $x^8-1=0$;

et enfin $\sqrt{\pm\sqrt{(\pm\sqrt{-1})}}$ est l'expression des huit racines primitives de $x^{16}-1=0$, et par conséquent correspond aux huit racines primitives de 17.

Or, $-1=-1+17=16$; donc $\pm\sqrt{-1}=\pm 4$;
donc $\sqrt{(\pm\sqrt{-1})}=\pm 2$ et $\pm 2\sqrt{-1}$;

enfin $\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}=\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{-2},\ \pm\sqrt{(2\sqrt{-1})},$
$\pm\sqrt{(-2\sqrt{-1})}$:

or,

$$\sqrt{2}=\pm 6,\ \sqrt{-2}=\pm 7,\ \sqrt{(2\sqrt{-1}=\pm 12)},$$
$$\sqrt{(-2\sqrt{-1})}=\pm 14.$$

et l'on a pour les huit racines primitives de 17:

$$\pm 6,\ \pm 7,\ \pm 12,\ \pm 14,$$

ou plus simplement :

$$\pm 6,\ \pm 7,\ \pm 5,\ \pm 3.$$

VII. Soit $p=19$, on aurait $x^{18}-1=0$; d'où, en écartant les racines qui appartiennent aux équations $x^9-1=0$ et $x^3+1=0$, il vient l'équation $x^6-x^3+1=0$, qui renferme les racines primitives de $x^{18}-1=0$, et qui nous donne ainsi :

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

pour l'expression générale des racines primitives de 19.

Autrement : comme on a $18=2.3.3$, considérez l'équation

$$x^2-1=0,$$

dont la racine primitive est -1; considérez ensuite l'équation

$$x^3-1=0,$$

dont les deux racines primitives sont $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; et vous aurez $\sqrt[3]{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)}$ pour les racines primitives de $x^{3 \cdot 3} - 1 = 0$. Donc, en multipliant par -1, vous aurez l'expression

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)}$$

pour les racines primitives de $x^{2.3.3} - 1 = 0$, comme on l'a trouvé ci-dessus.

En développant ces valeurs, on a

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)}, \quad x' = \alpha \sqrt[3]{\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)},$$
$$x'' = \alpha^2 \sqrt[3]{\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)},$$

α et α^2 étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, c'est-à-dire, $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Or, $\sqrt{-3}$, relativement à 19, équivaut à $\sqrt{16} = \pm 4$; on trouvera donc :

$$x = \sqrt[3]{-\ 7}, \quad x' = 7\sqrt[3]{-\ 7}, \quad x'' = 11\sqrt[3]{-\ 7},$$
$$x = \sqrt[3]{-11}, \quad x' = 7\sqrt[3]{-11}, \quad x' = 11\sqrt[3]{-11}:$$

or, $\sqrt[3]{-7} = -4$ et $\sqrt[3]{-11} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Ainsi, en réduisant, on aura, pour les six racines primitives de 19,

$$x = -4 \text{ et } 2, \quad x' = -9 \text{ et } -5, \quad x'' = -6 \text{ et } 3.$$

VIII. Considérons encore le nombre premier $p = 41$, et l'équation

$$x^{40} - 1 = 0.$$

Pour avoir les racines primitives imaginaires de cette équation, on peut d'abord écarter les racines qui appartiennent à l'équation $x^{20} - 1 = 0$, et l'on a l'équation $x^{20} + 1 = 0$; d'où, en rejetant les racines de $x^4 + 1 = 0$, qui appartiennent au diviseur binome $x^8 - 1 = 0$, il vient l'équation

$$x^{16} - x^{12} + x^8 - x^4 + 1 = 0,$$

qui renferme les seize racines primitives de $x^{40} - 1 = 0$.

En faisant $x^4 = y$, on a :

$$y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0,$$

équation périodique qui donne :

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}}{4};$$

d'où l'on tire, à cause de $x^4 = y$,

$$x = \sqrt[4]{\left[\frac{1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}}{4}\right]}.$$

Le radical 4^{me} se réduisant à deux radicaux quarrés, on voit que cette formule ne contient que des radicaux quarrés. Ainsi, en formant une table des quarrés des nombres ± 1, ± 2, ± 3, jusqu'à ± 20, et de leurs moindres résidus à 41, on aura sous les yeux tous les éléments nécessaires pour effectuer sur-le-champ les opérations indiquées, et mettre en évidence les seize nombres entiers x, qui sont les racines primitives de 41.

Ainsi, l'on trouve d'abord que $\sqrt{5}$ vaut ± 13, et l'on a :

$$y = \frac{1 \pm 13 \pm \sqrt{(-10 \pm 26)}}{4},$$

d'où l'on tire :

$$y = 23 \text{ et } 25,\ 31 \text{ et } 4;$$

et il ne s'agit plus que d'avoir les racines 4^{mes}, des quatre nombres 23, 25, 31, 4.

Or, au moyen de la table, on trouve sur-le-champ :

$1^o \sqrt{23} = \pm\ 8$; et de là : $\sqrt{8} = \pm\ 7$, $\sqrt{-8} = \pm 19$;

$2^o \sqrt{25} = \pm\ 5$; et de là : $\sqrt{5} = \pm 13$, $\sqrt{-5} = \pm\ 6$;

$3^o \sqrt{31} = \pm 20$; et de là : $\sqrt{20} = \pm 15$, $\sqrt{-20} = \pm 12$;

$4^o \sqrt{4} = \pm\ 2$; et de là : $\sqrt{2} = \pm 17$, $\sqrt{-2} = \pm 11$.

Les 16 racines primitives de 41 sont donc :

$$\pm 7, \pm 19, \pm 6, \pm 13, \pm 12, \pm 15, \pm 11, \pm 17.$$

Les quatre racines 4^{mes} de l'unité étant $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, donnent, relativement à 41, les nombres 1, -1, 9, -9 : si donc on multipliait une seule des racines 4^{mes}, de 23, comme 7, par exemple, par les quatre nombres successifs 1, -1, 9, -9, on devrait retrouver aussi les quatre racines 4^{mes} de 23. Or, en faisant ces produits, on a :

$7, -7, 9\cdot7, -9\cdot7$, ou réduisant $7, -7, -19, +19$,

comme ci-dessus. Et l'on aurait les autres de la même manière.

Si l'on prenait encore les quatre racines primitives de $x^4 - 1 = 0$, qui sont marquées par $\sqrt[4]{-1}$ ou $\sqrt{\sqrt{-1}}$, et puis les quatre racines primitives de $x^5 - 1 = 0$, qui sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 \mp 2\sqrt{5})}}{4}$, les seize produits deux à deux des premières par les secondes seraient les seize racines primitives de $x^{40}-1=0$. Or, pour $\sqrt{\sqrt{-1}}$, on trouve les quatre nombres 3, — 3, 14, — 14; et pour les racines de $\frac{x^5-1}{x-1}=0$, les quatre nombres 18, 16, 10, 37. Multipliant et réduisant, il vient les seize racines primitives trouvées plus haut.

36. Nous n'étendrons pas davantage ces applications particulières, que le lecteur peut varier à son gré. En général, si l'on veut avoir les racines primitives imaginaires de l'équation binome $x^N-1=0$, on décomposera N en ses facteurs les plus simples, de manière qu'on ait : $N=a^\lambda, b^\mu, c^\nu \ldots$, $a, b, c\ldots$ étant des facteurs premiers absolument; on prendra les racines primitives des équations

$$x^{a^\lambda}-1=0,\quad x^{b^\mu}-1=0, \text{ etc.};$$

et si on les désigne par x' pour la première équation, par x'' pour la seconde, par x''' pour la troisième, etc., tous les produits $x'.x''.x'''\ldots$ qu'on pourra faire, seront des racines primitives de la proposée.

Pour avoir les racines primitives de chaque équation particulière, telle que $x^{a^\lambda}-1=0$, on prendra les $a-1$ racines primitives de l'équation $x^a-1=0$, on en tirera la racine $a^{\lambda-1^{\text{me}}}$, ou, ce qui revient au même, on en prendra $\lambda-1$ fois de suite la racine du degré a, et l'on aura les racines primitives de $x^{a^\lambda}-1=0$. Ces racines seront donc au nombre de $a^{\lambda-1}(a-1)$, puisque le radical du degré $a^{\lambda-1}$ a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans ce degré.

Au reste, on peut voir facilement, d'une autre manière, que les racines primitives de $x^{a^\lambda} - 1 = 0$ sont au nombre de $a^{\lambda-1}(a-1)$ ou $a^\lambda - a^{\lambda-1}$; car, le nombre a étant premier, a^λ n'a pas au-dessous de lui de plus grand diviseur que $a^{\lambda-1}$, et par conséquent le binome $x^{a^\lambda} - 1$ n'a pas, après lui, de diviseur binome plus élevé que $x^{a^{\lambda-1}} - 1$, et ce diviseur contient tous les facteurs binomes de degrés inférieurs qui peuvent diviser la proposée $x^{a^\lambda} - 1 = 0$: si donc on rejette, des a^λ racines de cette équation, les $a^{\lambda-1}$ racines qui lui sont communes avec l'équation $x^{a^{\lambda-1}} - 1 = 0$, il restera $a^\lambda - a^{\lambda-1}$, racines uniquement propres à l'équation $x^{a^\lambda} - 1 = 0$, et qui en seront ainsi les racines primitives.

Maintenant, par la théorie des combinaisons, il est clair que tous les produits $x' . x'' . x''' \ldots$ qu'on peut former, sont au nombre de

$$a^{\lambda-1}(a-1)\; b^{\mu-1}(b-1)\; c^{\nu-1}(c-1)\ldots,$$

ce qui revient à

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots,$$

et l'on sait d'ailleurs que cette expression marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à N; ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit plus haut.

37. Que, si l'on demandait le diviseur rationnel de $x^N - 1 = 0$, qui contient uniquement les racines primitives de cette équation, il serait bien aisé de l'obtenir, en dégageant du binome $x^N - 1$ les facteurs qui lui sont communs avec chacun des binomes $x^{\frac{N}{a}} - 1$, $x^{\frac{N}{b}} - 1$, $x^{\frac{N}{c}} - 1 \ldots$, où $a, b, c \ldots$ sont les diviseurs simples du nombre N.

Ainsi en faisant, pour abréger, $\frac{N}{a} = A$, $\frac{N}{b} = B$, $\frac{N}{c} = C$, etc., on divisera le binome $x^N - 1$ par $x^A - 1$, et l'on aura pour quotient le polynome:

$$x^{N-A} + x^{N-2A} + x^{N-3A} + \text{etc.} + 1.$$

On divisera ensuite le même binome $x^N - 1$ par $x^B - 1$, et l'on aura pour quotient le polynome:

$$x^{N-B} + x^{N-2B} + x^{N-3B} + \text{etc.} + 1.$$

Et de même, en divisant $x^N - 1$ par $x^C - 1$, on aura:

$$x^{N-C} + x^{N-2C} + x^{N-3C} + \text{etc.} + 1,$$

et ainsi de suite.

Et maintenant, si l'on cherche le plus grand commun diviseur de ces polynomes, et qu'on l'égale à zéro, on aura l'équation qui renferme uniquement les racines primitives de la proposée $x^N - 1 = 0$.

38. Soit, par exemple, $N = 40$, dont les facteurs premiers sont 2 et 5. Je divise $x^{40} - 1$ par $x^{20} - 1$, et j'ai le quotient $x^{20} + 1$. Je divise ensuite $x^{40} - 1$ par $x^8 - 1$, et j'ai le quo-

tient $x^{32}+x^{24}+x^{16}+x^{8}+1$. Cherchant le commun diviseur de ces deux quotients, je trouve le polynome

$$x^{16}-x^{12}+x^{6}-x^{4}+1,$$

qui, égalé à zéro, contient effectivement les 16 racines primitives de $x^{40}-1=0$, comme nous l'avons déja vu d'une autre manière.

V.

Théorèmes nouveaux qui résultent de l'analyse précédente.

39. L'équation de *Fermat*, $x^{p-1}-1=Mp$, a, comme on sait, pour racines tous les nombres 1, 2, 3, 4 ... jusqu'à $p-1$; et par conséquent elle épuise tous les nombres entiers inférieurs à p. Il est donc impossible qu'une équation $x^{n}-1=Mp$ ait d'autres racines entières que celles qui lui seraient communes avec l'équation

$$x^{p-1}-1=Mp.$$

Or, il est aisé de prouver, par la nature de ces équations, qu'elles ne peuvent avoir d'autres racines communes que celles de l'équation

$$x^{d}-1=Mp,$$

d étant le plus grand commun diviseur de n et $p-1$. L'équation

$$x^{n}-1=Mp$$

ne peut donc avoir que d racines entières: toutes les autres sont irrationnelles; et voilà pourquoi on ne considère ordinairement que les équations $x^{n}-1=Mp$, où n est un diviseur de $p-1$.

Si n est premier à $p-1$, et par conséquent si l'on a $d=1$, l'équation $x^n-1=\mathrm{M}p$ n'a donc qu'une seule racine entière, qui est $x=1$; et toutes les autres sont incommensurables. Mais il y a un cas singulier très-remarquable, où cette dernière conséquence n'a pas lieu; c'est celui où le degré n de la proposée est égal au nombre premier p lui-même. L'équation devient alors $x^p-1=\mathrm{M}p$; et je dis que cette équation a toutes ses racines rationnelles et égales à l'unité.

En effet, il est facile de voir que, si p est un nombre premier supérieur à 2, on a, aux multiples près de p, l'équation $x^p-1=(x-1)^p$; car le binome de *Newton* nous donne:

$$(x-1)^p=x^p-px^{p-1}+\frac{p.p-1}{2}x^{p-2}-\frac{p.p-1.p-2}{2.3}x^{p-3}+\text{etc.}-1.$$

Or, le premier terme du second membre est x^p; le dernier est égal à -1, puisque p est impair. Maintenant tous les coëfficients des termes intermédiaires sont entiers, et de plus divisibles par p, à cause que p est premier, et par conséquent ne se peut diviser par aucun des facteurs plus petits 2, 3, 4, etc., qui forment les dénominateurs des coëfficients dont il s'agit. Donc, aux multiples près du nombre p, on a l'équation remarquable:

$$(x-1)^p=x^p-1;$$

et les racines de $x^p-1=\mathrm{M}p$ sont tout-à-fait les mêmes que les racines de l'équation $(x-1)^p=\mathrm{M}p$. Mais il est évident que celles-ci sont toutes égales entre elles et à l'unité: donc l'équation $x^p-1=\mathrm{M}p$ a toutes ses racines égales à l'unité.

Mais d'un autre côté, suivant notre théorème général, les racines de cette équation sont représentées par les racines de $x^p - 1 = 0$, c'est-à-dire, par les racines p.ièmes de l'unité. Donc la formule générale des racines p.ièmes de l'unité, étant rapportée au module particulier p, doit devenir entièrement rationnelle, et même délivrée de toute équivoque de signes radicaux, afin de donner toutes ses valeurs égales entre elles et à l'unité.

Cette expression est, comme on sait, de la forme

$$x = \frac{-1}{p-1} + \rho,$$

en désignant par ρ toute la partie qui est affectée de radicaux. Or, la première partie rationnelle $\frac{-1}{p-1}$, étant rapportée à p, équivaut à l'unité; on a donc $x = 1 + \rho$; et par conséquent, toute la partie radicale ρ, rapportée à p, doit disparaître d'elle-même, afin qu'il ne reste plus aucun radical, et que toutes les valeurs de la formule se réduisent à la même valeur $x = 1$. Mais les radicaux de ρ, que nous avons désignés précédemment par $\sqrt[p-1]{\theta}$, $\sqrt[p-1]{\theta'}$, etc., ne peuvent tous disparaître, à moins que les expressions θ, θ', etc., ne contiennent le nombre p par-tout facteur dans leurs différents termes.

40. On a donc ce théorème nouveau et très-remarquable, que j'ai avancé dans mon dernier Mémoire. Si l'on considère la formule générale des racines imaginaires de l'unité, d'un degré quelconque premier p, supérieur à 2, on trouvera nécessairement l'exposant p de ces racines par-tout facteur

des divers nombres qui entrent sous les radicaux de cette formule : de manière que, si l'on négligeait par-tout ce nombre p, en le comptant comme nul, tous ces radicaux disparaîtraient d'eux-mêmes, et que la formule se réduirait uniquement à la partie rationnelle $\frac{-1}{p-1}$, qui, relativement à p, équivaut à l'unité.

41. C'est ce que vous pouvez reconnaître dans les expressions précédentes des racines 3^{mes}, 5^{mes} et 7^{mes} de l'unité.

Par exemple, la formule des racines *cubiques* imaginaires de l'unité, est $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, où vous voyez que l'exposant 3 entre comme facteur sous le radical; de sorte que, relativement au module 3, cette formule se réduit à $\frac{-1}{2}$ ou à l'unité.

La formule de la racine 5^{me} imaginaire de l'unité, est

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4},$$

où vous voyez que l'exposant 5 est facteur des divers nombres soumis aux radicaux. Si donc vous rapportez cette formule au nombre premier 5, tous les radicaux disparaissent, et il ne reste que $\frac{-1}{4}$, qui, relativement à 5, équivaut à 1, comme cela doit être.

Pour les racines 7^{mes} imaginaires de l'unité, nous avons trouvé:

$$\frac{-1+\sqrt{-7}}{6}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{21}\right)},$$

où l'on voit le nombre 7 facteur de tous les nombres qui sont sous les divers radicaux. Ainsi, en rapportant cette formule à 7, on a :

$$\sqrt{-7}=0,\ \sqrt[3]{\left(7-\frac{\sqrt{-7}}{2}\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{21}\right)}=0,$$

à cause de $21 = 3 \cdot 7$; et toute la formule est délivrée d'ambiguïté, et donne simplement $\frac{-1}{6}$, qui, relativement à 7, vaut l'unité.

Et l'on peut vérifier le même théorème dans l'expression de la racine 11^{me}, 13^{me}, 17^{me}, etc. de l'unité, si l'on se donne la peine de développer ces racines. On y trouvera par-tout comme facteurs sous les radicaux, les exposants respectifs 11, 13, 17, etc. de ces racines imaginaires.

42. De ces mêmes principes, vous pouvez encore tirer une conséquence remarquable sur l'équation qui a pour racines les différentes sommes des racines imaginaires de l'équation $X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, lorsqu'on les distribue en plusieurs groupes semblables.

Soit $p - 1 = \lambda m$, et les $p - 1$ racines imaginaires de la proposée $X = 0$, pourront se distribuer en λ groupes composés de m racines

$$r,\ r^{a},\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ \ldots\ldots\ r^{a^{m-1}},$$

a étant une racine primitive de $x^m - 1 = Mp$. Si, dans ce groupe de racines ainsi conjuguées, vous changez une racine en une autre quelconque du même groupe, toutes les racines restent les mêmes et gardent entre elles le même ordre; ce qui est évident. Mais si vous changez la racine désignée par r en une autre r^e qui ne fait point partie du groupe, toutes les racines changent à-la-fois, et le groupe tout entier se change dans le groupe semblable :

$$r^e,\ r^{ea},\ r^{ea^2},\ r^{ea^3},\ \ldots\ldots\ r^{ea^{m-1}};$$

et ainsi des autres. Soit donc u la somme des m racines de l'une de ces λ groupes; l'on aura u par une équation du degré λ, et qui sera de la forme :

$$U = u^\lambda + Au^{\lambda-1} + Bu^{\lambda-2} + Cu^{\lambda-3} + \text{etc.} + T = 0;$$

et il est facile de voir que les fonctions invariables A, B, C, etc. des racines u, seront des fonctions invariables des racines r de la proposée, et même se réduiront à des nombres entiers. Or, sans connaître les coëfficients A, B, C, etc. T, je dis qu'ils équivalent aux résidus des coëfficients du binome développé $(u-m)^\lambda$; c'est-à-dire, du polynome :

$$u^\lambda - \lambda m u^{\lambda-1} + \frac{\lambda.\lambda-1}{2} m^2 . u^{\lambda-2} - \text{etc.} \pm m^\lambda;$$

et qu'ainsi on a, aux multiples près de p, les équations remarquables :

$$A = -\lambda m,$$

$$B = \frac{\lambda m(\lambda m - m)}{2},$$

$$C = \frac{-\lambda m(\lambda m - m)(\lambda m - 2m)}{2.3},$$

etc.,

$$T = \frac{\pm\lambda m(\lambda m - m)(\lambda m - 2m)(\lambda m - 3m)\ldots}{2.3.4\ldots}, \text{ou} = \pm m^\lambda.$$

Et en effet, si l'on rapporte l'équation $x^p - 1 = MQ$

en particulier, au nombre premier $Q = p$, de manière que l'on ait $x^p - 1 = Mp$, cette équation aura, comme on l'a vu, toutes ses racines égales à l'unité. L'équation

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = X = Mp$$

aura donc aussi ses $p - 1$ racines égales à l'unité, et l'équation indéterminée

$$u^\lambda + Au^{\lambda-1} + Bu^{\lambda-2} + \text{etc.} + T = Mp$$

aura ses λ racines toutes égales à m. Cette équation doit donc coïncider avec $(u - m)^\lambda = Mp$, c'est-à-dire, avec l'équation

$$u^\lambda - \lambda.m.u^{\lambda-1} + \frac{\lambda m(\lambda m - m)}{2} u^{\lambda-2} + \text{etc.} \pm m^\lambda = Mp;$$

et par conséquent, les coëfficients de l'équation $U = 0$ ne sont autre chose, relativement à p, que les coëfficients du binome $(u - m)^\lambda$; ce qu'il fallait démontrer. Ces coëfficients se réduisent, si l'on veut, à cause de $\lambda m + 1 = p$, et par conséquent de $\lambda m = -1$, à ceux-ci :

$$A = 1,\ B = \frac{m+1}{2},\ C = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{2m+1}{3},$$
$$D = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{2m+1}{3} \cdot \frac{3m+1}{4},\ \text{etc.};$$

de sorte que l'on a une expression générale très-simple des coëfficients A, B, C, etc. de l'équation $U = 0$, en ne considérant que leurs valeurs résidues relativement à $p = \lambda m + 1$.

43. Soit, par exemple, $\lambda = 2$, et par conséquent $p = 2m + 1$; on aura, pour les deux sommes u et u' des m racines con-

juguées de l'équation $x^p - 1 : x - 1 = X = 0$, l'équation du second degré

$$u^2 + Au + B = 0.$$

Or, $u - m$ élevé au quarré donne $u^2 - 2m.u + m^2$. Ainsi l'on doit avoir $A = -2m$, ou, en ajoutant p, $A = 1$. Ensuite on aura $B = m^2$, ou, en prenant le résidu de m^2 par rapport à p, $B = \frac{-m}{2}$, si m est pair; $B = \frac{m+1}{2}$, si m est impair. En effet, en divisant m^2 par $p = 2m + 1$, on a le quotient $\frac{m}{2}$ et le reste $\frac{-m}{2}$, tous deux entiers, si m est pair.

Si m est impair, $\frac{-m}{2}$ équivaut à l'entier $\frac{m+1}{2}$, comme il est très-facile de le voir : ou autrement, si m est impair, m^2 peut être changé en $m^2 + 2m + 1$, et, divisant par $2m + 1$, il vient le quotient $\frac{m+1}{2}$ et le reste $\frac{m+1}{2}$, tous deux entiers.

Ainsi, dans le cas de $p = 2m + 1$, on a pour l'équation du second degré $u^2 + Au + B = 0$, les équations suivantes :

$$u^2 + u - \frac{m}{2} = 0, \text{ ou } u^2 + u + \frac{m+1}{2} = 0,$$

selon que m est pair ou impair.

On a donc : $u = \frac{-1 \pm \sqrt{p}}{2}$ ou $u = \frac{-1 \pm \sqrt{-p}}{2}$, selon que p est de la forme $4i + 1$ ou de la forme $4i - 1$; ce qui s'accorde parfaitement avec le théorème donné par M. *Gauss*.

44. Si $\lambda = 3$, et, par conséquent, si $p = 3m + 1$, on a pour l'équation $U = u^3 + Au^2 + Bu + C = 0$, les valeurs suivantes :

$$A = 1, \; B = \frac{m+1}{2}, \; C = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{2m+1}{3}.$$

$\frac{m+1}{2}$ peut se changer généralement dans l'entier négatif $-m$; car en doublant, on a $m+1$, qui équivaut à $-2m$ relativement à $p=3m+1$. Ainsi l'on a : $B=-m$.

Ensuite, comme $2m+1$ équivaut à $-m$, le coëfficient $\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2m+1}{3}$ pourra se changer en $\frac{m^2}{3}$, ou plutôt en $\frac{-ip+m^2}{3}$, en ôtant au numérateur un certain multiple de p qui rende possible la division par 3. Ainsi le coëfficient C sera égal à un entier de la forme $\frac{m^2-ip}{3}$, où l'indéterminée i dépend de la nature du nombre m.

Si $p=19=3.6+1$, on a $m=6$, et
$$C=\frac{m^2-ip}{3}=\frac{6^2-3.19}{3}=-7.$$
Si $p=31=3.10+1$, on a $m=10$, et
$$C=\frac{m^2-ip}{3}=\frac{10^2-4.31}{3}=-8.$$
Si $p=37=3.12+1$, on a $m=12$, et
$$C=\frac{m^2-ip}{3}=\frac{12^2-3.37}{3}=11.$$
Si $p=43=3.14+1$, on a $m=14$, et
$$C=\frac{m^2-ip}{3}=\frac{14^2-4.43}{3}=8;$$
etc. etc.

45. Mais ces dernières applications méritent d'être approfondies et développées avec plus d'étendue dans un autre mémoire. Je me contente ici d'avoir démontré notre théorème général sur les équations binomes, de l'avoir éclairci par de nombreux exemples, et d'en avoir tiré, pour l'algèbre et pour l'analyse indéterminée, quelques vérités nou-

velles qu'il serait comme impossible d'obtenir par une autre voie.

Je reviendrai ailleurs sur ce rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres; et je ferai voir que les principes généraux de l'analyse mathématique ont leur source naturelle dans la simple considération de l'*ordre*, ou de la disposition mutuelle qu'on peut observer actuellement entre plusieurs objets : ce qui me paraît le plus haut point d'abstraction et de généralité où il soit permis de porter la science.

ADDITION
AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Au commencement de ce Mémoire (nº 3), j'ai fait, en passant, quelques réflexions sur la liaison nécessaire qui existe entre l'algèbre et la théorie de l'ordre, et j'ai montré comment l'esprit aurait dû être conduit naturellement à regarder les racines de l'unité dans cet ordre remarquable où elles naissent l'une de l'autre par une même loi de formation. On a vu que cette disposition des racines n'a rien d'indirect ni d'arbitraire, comme on l'avait cru d'abord, mais qu'elle vient, au contraire, de la nature même de ces racines, qui est de pouvoir être toutes représentées à l'aide d'une seule, et d'un seul nombre ; ce qui en détermine le véritable ordre naturel.

Mais on pourrait dire que ce nombre ou exposant, que j'ai désigné par a, n'est point unique : car il y a toujours, pour un même nombre premier n, plusieurs racines primitives a, b, c, d, etc.; et l'on sait qu'il y en a autant que de nombres inférieurs et premiers à $n-1$, comme Euler l'a fait voir. On pourrait donc considérer également plusieurs ordres dus à ces racines primitives différentes a, b, c, d, etc., et prendre indifféremment :

$$\text{ou l'ordre}\quad r,\ r^{a},\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ \text{etc.}\ r^{a^{n-2}},$$
$$\text{ou l'ordre}\quad r,\ r^{b},\ r^{b^2},\ r^{b^3},\ \text{etc.}\ r^{b^{n-2}},$$
$$\text{ou l'ordre}\quad r,\ r^{c},\ r^{c^2},\ r^{c^3},\ \text{etc.}\ r^{c^{n-2}},$$

etc., etc.

d'où il paraît que, dans la représentation et la disposition mutuelle des racines de l'unité, il reste encore quelque chose d'indéterminé et d'arbitraire; ce qui, au fond, ne doit pas être, et laisse ainsi dans notre esprit une sorte de difficulté paradoxale qu'il faut résoudre.

Or, je vais faire voir que ces différents ordres sont le même au fond; c'est-à-dire qu'un seul quelconque d'entre eux renferme actuellement tous les autres, sans qu'on puisse les distinguer par aucune analyse.

Et en effet, considérez l'un d'eux, comme le premier, par exemple, qui est représenté par

$$r,\ r^{a},\ r^{a^2},\ r^{a^3},\ \text{etc.}\ \ r^{a^{n-2}},$$

et prenez-y les racines, non pas de suite ou de 1 en 1, mais en sautant de l'une à l'autre par un intervalle constant h inférieur et premier à leur nombre $n-1$. Comme le nombre h est premier à $n-1$, il est clair que vous passerez nécessairement par toutes les racines avant de revenir à celle d'où vous êtes parti, et que vous aurez ainsi vos $n-1$ racines rangées dans le nouvel ordre :

$$r,\ r^{a^h},\ r^{a^{2h}},\ r^{a^{3h}},\ \text{etc.}\ \ r^{a^{(n-2)h}}.$$

Mais cette suite peut être vue comme si elle était formée directement au moyen d'un nouvel exposant marqué par a^h; d'où l'on voit d'abord que si a est une racine primitive de n, la puissance a^h en doit être une autre b, et qu'ainsi le nouvel ordre tiré du premier, en y prenant les racines de h en h, n'est autre chose que l'un de ceux que je considérais tout-à-l'heure, tel que l'ordre

$$r,\ r^{b},\ r^{b^2},\ r^{b^3},\ \text{etc.}\ r^{b^{n-2}},$$

qui serait dû à la racine primitive b égale à a^h.

Ainsi les différents ordres qu'on peut former en employant les différentes racines primitives de n, sont comme un seul et même ordre, mais où l'on regarderait les $n-1$ racines $r,\ r^a,\ r^{a^2},\ r^{a^3}$, etc., soit de suite ou de 1 en 1, soit de h en h, soit de h' en h', etc.; 1, h, h', etc., étant les différents nombres inférieurs et premiers à $n-1$. Et comme l'idée de cet intervalle plus ou moins grand, par lequel on va de l'une à l'autre, ne peut entrer dans l'idée de l'*ordre*, qui, par sa nature, ne dépend point de la *grandeur*, il s'ensuit que ces différents ordres coexistent tous dans un seul quelconque d'entre eux, comme les racines d'une même équation, sans qu'on puisse les distinguer ou les isoler par aucune analyse. C'est une multiplicité toute semblable à celle qui existe entre les différentes espèces de polygones réguliers d'un même nombre de côtés. L'analyse ne peut jamais séparer ces figures; et si l'on cherche, par exemple, dans quel cercle on peut inscrire un décagone régulier d'un côté donné, on trouve à-la-fois deux cercles différents qui répondent aux deux espèces de décagones réguliers qu'on peut également construire sur un même côté donné. Ou réciproquement, si l'on cherche le côté d'un décagone régulier inscriptible dans un cercle donné, on trouve à-la-fois deux côtés différents qui donnent également les deux décagones qu'on pourrait inscrire dans le même cercle; et il en est ainsi des autres polygones réguliers, dont les espèces sont liées entre elles d'une manière aussi inséparable que les racines d'une même équation.

2. Mais, pour saisir encore mieux cette démonstration délicate que j'ai ici en vue, je vais la suivre dans un exemple particulier : le raisonnement y sera plus clair et plus sensible, et ne perdra rien de sa généralité.

Considérons, entre autres, les douze racines imaginaires de l'équation binome $x^{13}-1=0$; on aura donc ici $n=13$: et comme 2 est une des racines primitives du nombre premier 13, les douze racines imaginaires de $x^{13}-1=0$ pourront se mettre dans l'ordre où elles naissent l'une de l'autre par la puissance 2^{me}, c'est-à-dire en faisant continuellement le *quarré* de celle qui est produite; et l'on aura ainsi l'ordre :

$$r,\ r^2,\ r^4,\ r^8,\ r^3,\ r^6,\ r^{12},\ r^{11},\ r^9,\ r^5,\ r^{10},\ r^7.$$

Mais les nombres 6, 11, 7, étant aussi des racines primitives de 13, on pourrait également considérer les trois ordres nouveaux dus aux puissances 6^{me}, 11^{me}, 7^{me}; savoir :

$$r,\ r^6,\ r^{10},\ r^8,\ r^9,\ r^2,\ r^{12},\ r^7,\ r^3,\ r^5,\ r^4,\ r^{11};$$
$$r,\ r^{11},\ r^4,\ r^5,\ r^3,\ r^7,\ r^{12},\ r^2,\ r^9,\ r^8,\ r^{10},\ r^6;$$
$$r,\ r^7,\ r^{10},\ r^5,\ r^9,\ r^{11},\ r^{12},\ r^6,\ r^3,\ r^8,\ r^4,\ r^2:$$

ce qui fait en tout quatre manières différentes de ranger par une même loi les douze racines imaginaires de $x^{13}-1=0$. Mais 1, 5, 7 et 11 étant les quatre nombres inférieurs et premiers à 12, ces quatre ordres différents peuvent se voir en même temps dans l'un quelconque d'entre eux, en y regardant les racines prises successivement, ou de 1 en 1, ou de 5 en 5, ou de 7 en 7, ou de 11 en 11. Ainsi, en partant du premier ordre, par exemple, qui est dû à la racine primitive 2, on trouve de cette manière le deuxième, le troisième et le quatrième ordres, comme si on les formait directement par les exposants respectifs 2^5, 2^7, 2^{11}, lesquels reviennent aux trois autres racines primitives de 13, savoir: 6, 11 et 7.

3. Mais, pour plus de clarté encore, rangez vos douze racines en cercle dans l'un quelconque de ces quatre ordres, comme le premier, par exemple :

$$r,\ r^2,\ r^4,\ r^8,\ r^3,\ r^6,\ r^{12},\ r^{11}\ \ r^9,\ r^5,\ r^{10},\ r^7,$$

et je dis que les trois autres sont actuellement compris dans celui-là, ou plutôt sont le même, vu de différentes manières. Et par exemple, le second ordre n'est autre chose que le premier dont les termes consécutifs seraient encore rangés de même, non pas en faisant une seule fois le tour de la circonférence du cercle, mais en faisant cinq fois le tour de cette même circonférence. Le troisième ordre n'est encore que le premier dont les termes seraient placés de même, l'un après l'autre, mais sur la septuple circonférence; et le quatrième est encore la même suite de racines, mais distribuées en faisant onze fois le tour du cercle. Et comme ces multiples du cercle se confondent toujours et se réduisent au simple cercle, il en résulte que la figure doit présenter aux yeux quatre ordres différents, tandis que l'esprit peut les voir tous comme un seul et même ordre.

Ou bien, réciproquement, si vous essayez de distinguer les quatre suites différentes de vos douze racines, alors imaginez qu'on range les racines de la première sur le simple cercle; celles de la seconde, sur le quintuple cercle; celles de la troisième, sur le septuple cercle; et enfin, celles de la quatrième, sur onze fois le cercle; et vous aurez une même figure, qui n'offrira plus aux yeux qu'*un seul et même ordre :* et comme cet ordre unique provient *également* de vos quatre suites différentes, il est clair qu'on ne peut demander à quelle suite particulière il est dû de préférence. D'où vous voyez enfin que ces différents ordres ne peuvent se distinguer par aucune analyse, et qu'on les a tous à-la-fois dans un seul quelconque d'entre eux, comme les signes équivoques d'une même formule radicale.

4. C'est d'ailleurs ce qui résulte assez directement de notre théorie générale. Car, la racine primitive d'un nombre premier n étant exprimée par la racine imaginaire primitive de l'équation $x^{n-1}-1=0$, si l'on emploie cette expression algébrique, que je désigne par α, au lieu de l'exposant entier a, on aura, pour les $n-1$ racines imaginaires de l'équation $x^n-1=0$, cette représentation générale :

$$r,\ r^{\alpha},\ r^{\alpha^2},\ r^{\alpha^3},\ \text{etc.}\ r^{\alpha^{n-2}},$$

qui renferme indifféremment tous les ordres semblables qu'on pourrait considérer, parce que l'exposant algébrique α y répond actuellement, par l'équivoque de ses signes radicaux, à telle racine primitive de n qu'on voudra choisir. Mais on était loin de songer à mettre des imaginaires à la place d'exposants entiers, quoiqu'il eût été facile de reconnaître ici l'équivalence de ces exponentielles, par la condition continuelle de $r^n=1$, ce qui permet d'ajouter ou d'omettre à volonté le nombre n dans toutes ces expressions

5. Quoi qu'il en soit, le grand avantage de cet ordre donné par la génération successive des racines de l'unité,

consiste d'abord en ce qu'on y voit, au premier coup d'œil, non-seulement que ces racines sont liées deux à deux, ou sont réciproques, comme on le savait depuis long-temps; mais encore, qu'elles sont liées trois à trois, quatre à quatre, et en général, d à d, si 3, 4, etc. d, sont aussi des diviseurs de leur nombre $n-1$.

Ainsi, dans l'exemple précédent de $n=13$, considérez la suite

$$r,\ r^2,\ r^4,\ r^8,\ r^3,\ r^6,\ r^{12},\ r^{11},\ r^9,\ r^5,\ r^{10},\ r^7,$$

et, comme 3 est un diviseur de 12, prenez les racines en allant de $\frac{12}{3}$ en $\frac{12}{3}$, c'est-à-dire de 4 en 4, et vous aurez ces quatre groupes :

$$(r,\ r^3,\ r^9),\ (r^2,\ r^6,\ r^5),\ (r^4,\ r^{12},\ r^{10}),\ (r^8,\ r^{11},\ r^7),$$

dont les racines sont inséparables : je veux dire que, si vous changez une racine en une autre du même groupe, chaque groupe conservera encore les mêmes racines, et restera à sa place; et que, si vous échangez deux racines, d'un groupe à l'autre, les groupes tout entiers s'échangeront entre eux, entraînant toujours leurs mêmes racines.

Si donc vous cherchez une fonction symétrique quelconque des trois racines r, r^3, r^9, vous trouverez cette fonction par une simple équation du quatrième degré : car, en dénotant, pour abréger, cette fonction par $\varphi(r)$, il est clair qu'elle n'aura que ces quatre valeurs différentes :

$$\varphi(r),\ \varphi(r^2),\ \varphi(r^4),\ \varphi(r^8);$$

de sorte que la somme de ces fonctions semblables, la somme de leurs produits deux à deux, celle des produits trois à trois, quatre à quatre, seront des fonctions invariables des racines r, r^2, r^3, r^4, etc., de la proposée, et pourront se déterminer rationnellement par les coëfficients de cette équation.

Mais, de plus, le nombre de nos groupes étant encore divisible par 2, vous pouvez les conjuguer eux-mêmes en les prenant, dans la suite précédente, de $\frac{4}{2}$ en $\frac{4}{2}$, c'est-à-dire de 2 en 2; et vous aurez ainsi ces deux groupes composés :

$$\left\{ \varphi(r), \varphi(r^4) \right\}, \quad \left\{ \varphi(r^2), \varphi(r^8) \right\};$$

dont les parties ne se sépareront pas, malgré l'échange des racines r, r^2, r^3, etc. D'où l'on voit que l'équation précédente du quatrième degré peut se résoudre par deux autres du second; et qu'ainsi, l'équation

$$x^{12} + x^{11} + x^{10} + \text{etc.} + x + 1 = 0$$

peut se réduire à des équations inférieures de degrés marqués par les diviseurs simples du nombre 12.

6. En second lieu, vous voyez par ce même ordre des racines, que chacune de ces équations réduites n'a que la difficulté d'une équation binome du même degré. Considérez, par exemple, les quatre fonctions précédentes,

$$\varphi(r), \varphi(r^2), \varphi(r^4), \varphi(r^8).$$

Si vous y faites un échange quelconque de racines, il est clair que ces quatre fonctions gardent toujours entr'elles le même ordre, et ne font que s'avancer à-la-fois d'un même nombre de places; de sorte que les vingt-quatre permutations dont quatre choses sont généralement susceptibles, se réduisent ici à quatre, par le lien mutuel des racines que l'on considère. Mais, d'un autre côté, si l'on prend la fonction linéaire

$$t = \varphi(r) + \alpha\,\varphi(r^2) + \alpha^2\,\varphi(r^4) + \alpha^3\,\varphi(r^8),$$

où α est une des racines de $x^4 - 1 = 0$, on voit aussi qu'en multipliant cette fonction t par α^3, puis par α^2, puis par α, on aura le même résultat que si l'on faisait avancer à-la-fois toutes les racines d'une, ou de deux, ou de trois places; qu'ainsi donc, si l'on élève tout d'un coup la fonction t à la quatrième puissance, on épuisera les quatre seules permutations dont les racines $\varphi(r)$, $\varphi(r^2)$, etc. y sont susceptibles, et qu'on n'aura pour t^4 qu'une seule valeur, quelque échange qu'on veuille faire actuellement entre les racines. Donc, en remettant le radical 4^{me} sur cette puissance de t, qui nous sera connue, on aura immédiatement la valeur de cette fonction proposée. Donc, si l'on emploie de même, au lieu de α, les trois racines de $x^4 - 1 = 0$, on pourra connaître ainsi trois nouvelles fonctions linéaires t', t'', t''' des quatre racines $\varphi(r)$; et de ces quatre fonctions on tirera sur-le-champ, sans ambiguité, les quatre racines inconnues:

$$\varphi(r), \quad \varphi(r^2), \quad \varphi(r^4), \quad \varphi(r^8).$$

Et il est manifeste que cette analyse s'étend, sans aucune difficulté, à toutes les équations qui proviendraient de l'équation binome $x^n - 1 = 0$.

Ainsi, la résolution immédiate de l'équation

$$x^n - 1 : x - 1 = 0,$$

ou sa résolution par d'autres, de degrés inférieurs diviseurs de $n - 1$, ou la résolution de ces réduites, ou celle de toute équation qui dépendrait des mêmes racines, devient claire et facile par cette seule considération de l'ordre qu'on établit d'abord entre les racines de la proposée.

THÉORIE

DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR

DANS LES CORPS SOLIDES (1),

PAR M. FOURIER.

Et ignem regunt numeri. (PLATO.)

I.

Exposition.

1. LES effets de la chaleur sont assujettis à des lois constantes que l'on ne peut découvrir sans le secours de l'analyse mathématique. L'objet de cet ouvrage est d'exposer les lois de l'équilibre et du mouvement de la chaleur, et d'en

(1) Ce Mémoire est la copie littérale de la pièce déposée aux archives de l'Institut le 28 septembre 1811, et qui a été couronnée dans la séance publique du 6 janvier 1812. *Il n'a été fait aucun changement au texte de cette pièce.* Elle contient tous les principes fondamentaux d'une nouvelle branche de la physique-mathématique : il était nécessaire d'exposer ces principes avant de publier les recherches entreprises depuis par l'auteur sur le même sujet.

déduire la connaissance des changements de température qui s'accomplissent dans l'intérieur des corps solides.

Lorsque la chaleur est inégalement distribuée entre les différents points d'une masse solide, elle tend à se mettre en équilibre, et passe successivement des parties qui sont plus échauffées dans celles qui le sont moins ; en même temps elle se dissipe par la surface, et se perd dans le milieu ou dans le vide. Cette tendance à une distribution uniforme, et ce refroidissement spontané qui a lieu à la surface des corps, changent continuellement la température des différents points. La question de la propagation de la chaleur consiste à déterminer quelle est la température de chaque point d'un corps à un instant donné, en supposant que les températures initiales sont connues. Les exemples suivants feront connaître plus clairement la nature de ces questions.

Si l'on expose à l'action durable et uniforme d'un foyer de chaleur une même partie d'un prisme solide de peu d'épaisseur et d'une longueur infinie, ses parties situées à la droite et à la gauche du foyer s'échaufferont successivement, et après un certain temps, chaque point du prisme aura acquis presque entièrement la plus haute température à laquelle il puisse parvenir. Cette limite ou maximum de température n'est pas la même pour les différents points ; elle est d'autant moindre qu'ils sont plus éloignés de celui où le foyer est immédiatement appliqué.

Lorsque les températures sont devenues permanentes, le foyer transmet à chaque instant une quantité de chaleur qui compense exactement celle qui se dissipe sur tous les points de la surface extérieure du prisme.

Si maintenant on supprime le foyer, la chaleur continuera de se propager dans l'intérieur du solide. Mais la quantité de cette chaleur qui se perd dans le milieu ou dans le vide ne sera plus compensée, comme auparavant, par le produit du foyer; en sorte que toutes les températures varieront et diminueront sans cesse, jusqu'à ce qu'elles soient devenues égales à celles du milieu.

Pendant que les températures sont permanentes et que le foyer subsiste, si l'on élève en chaque point de l'axe du prisme une ordonnée perpendiculaire à cet axe, et dont la longueur soit proportionnelle à la température fixe de ce point, la ligne courbe qui passerait par les extrémités de ces ordonnées représentera l'état permanent des températures, et il est très-facile de déterminer par le calcul la nature de cette ligne. Il faut remarquer que le prisme ayant une petite épaisseur, tous les points d'une même section perpendiculaire à l'axe, auront des températures sensiblement égales. Lorsqu'on aura enlevé le foyer, la ligne qui termine les ordonnées proportionnelles aux températures des différents points changera continuellement de forme. La question consiste alors à exprimer par une équation les états successifs de cette courbe, et à comprendre ainsi dans une seule formule toutes les circonstances du refroidissement.

Si l'on place une masse solide homogène de forme sphérique ou cubique dans un milieu entretenu à une température constante, et qu'elle y demeure très-long-temps plongée, elle acquerra dans tous ses points une température très-peu différente de celle du fluide. Supposons qu'on l'en retire pour la transporter dans un milieu plus froid, la chaleur commencera à se disséminer par la surface. Les températures des différents points de la masse ne seront plus sensiblement les mêmes, et si on la suppose divisée en une infinité de couches par des surfaces parallèles à la surface extérieure, chacune de ces couches transmettra dans un instant une certaine quantité de chaleur à celle qui l'enveloppe. Si l'on conçoit que chaque molécule porte un thermomètre séparé qui indique sa température, l'état du solide sera continuellement représenté par le système de toutes les hauteurs thermométriques. Il s'agit d'exprimer ces états successifs du solide par des formules analytiques, en sorte que l'on puisse connaître pour un instant donné la température indiquée par chaque thermomètre, et les quantités de chaleur qui s'écoulent dans le même instant entre deux couches contiguës, ou dans le milieu environnant.

Examinons aussi le cas où un prisme rectangulaire, d'une épaisseur considérable et d'une longueur infinie, étant assujetti par son extrémité à une température constante, est enfin parvenu à un état fixe qu'il s'agit de connaître. Tous les points de la section extrême qui sert de base au prisme ont, par hypothèse, une température commune et permanente. Il n'en est pas de même d'une section éloignée du foyer : chacun des points de cette surface rectangulaire parallèle à la base a acquis aussi une température fixe, mais qui n'est pas la même pour les différents points d'une même section. On voit aussi qu'il s'écoule à chaque instant, à travers une section donnée, une certaine quantité de chaleur qui demeure toujours la même, puisque l'état du solide est devenu constant. La question consiste à déterminer la température permanente d'un point donné du solide, et la quantité totale de chaleur qui, pendant un temps déterminé, s'écoule à travers une section dont la position est donnée.

Les exemples précédents suffisent pour donner une idée exacte des diverses questions que nous avons traitées.

L'application des formules générales exige que l'on ait observé et déterminé d'avance certaines qualités spécifiques des corps, telles que la capacité de chaleur et la conductibilité. On sait que la chaleur ne pénètre pas également toutes les substances solides, et il faut remarquer qu'elles offrent à cet égard deux propriétés distinctes : l'une dépend de la facilité avec laquelle la chaleur se communique d'une molécule à une autre dans l'intérieur des solides; l'autre est relative à la facilité de transmettre la chaleur au-dehors par l'irradiation, ou par la voie du contact avec le milieu. Il était d'abord nécessaire de donner une définition exacte de ces deux sortes de conductibilité. On trouvera aussi dans la théorie que nous proposons, les moyens de mesurer ces qualités élémentaires, qui règlent dans chaque substance solide les effets de la chaleur. Elles se réduisent à la conductibilité propre, à la conductibilité extérieure, et à la capacité spécifique de chaleur. Elles sont exprimées dans le calcul par des coëfficients constants.

Nous avons appliqué les équations du mouvement varié de la chaleur à la question des températures terrestres, qui se trouve maintenant réduite à un problème de calcul. En effet les différentes parties de la surface du globe sont inégalement exposées à l'impression de la chaleur solaire. L'intensité de cette action dépend de la latitude du lieu : elle change pendant la durée du jour et pendant celle de l'année, et est assujettie à plusieurs autres inégalités. Il est évident qu'il existe entre cet état variable de la surface et celui des températures intérieures, une relation nécessaire que l'on peut déduire de la théorie. On sait qu'à une certaine profondeur au-dessous de la surface de la terre, la température n'éprouve aucune variation annuelle dans un lieu donné. Cette température permanente dépend de la latitude, elle est d'autant moindre que le lieu est plus éloigné de l'équateur. On peut donc faire abstraction de l'enveloppe extérieure, dont l'épaisseur est incomparablement plus petite que le rayon terrestre, et regarder cette planète comme une masse presque sphérique, dont la surface est assujettie à une température qui demeure constante pour un point donné, mais qui n'est pas la même dans les différents points. Il en résulte que chaque molécule intérieure a aussi une température fixe déterminée par sa position, et que la chaleur communiquée à la terre s'y propage d'un mouvement uniforme. La question mathématique consiste à connaître la température fixe d'un point donné, et la loi que suit la chaleur solaire en pénétrant dans l'intérieur du globe.

Cette diversité des températures nous intéresse davantage, si l'on considère les changements qui se succèdent dans l'enveloppe même dont nous habitons la superficie. Ces alternatives de chaleur et de froid qui se reproduisent chaque jour et dans le cours de chaque année, ont été jusqu'ici l'objet d'observations multipliées. On peut aujourd'hui les soumettre au calcul, et déduire d'une théorie commune tous les faits particuliers que l'expérience nous avait appris. Cette question se réduit à supposer que tous les points de la surface d'une sphère immense sont affectés de températures périodiques. L'analyse fait ensuite connaître suivant quelle loi l'intensité des variations décroît à mesure que la profondeur augmente, quelle est, pour une profondeur donnée, la quantité des changements annuels ou diurnes, l'époque de ces changements, et comment la valeur fixe de la température souterraine se déduit des températures variables observées à la surface.

Les équations de la propagation de la chaleur sont aux différences partielles, et les méthodes déjà connues ne fournissent aucun moyen général de les intégrer et de les employer utilement; difficulté capitale qui se présente fréquemment dans les applications de l'analyse aux sciences naturelles, et qu'il est très-important de surmonter. En effet tant que l'on n'est point parvenu à l'interprétation numérique des résultats du calcul, il semble que la vérité qu'on se proposait de découvrir n'est pas moins cachée dans la formule analytique, qu'elle ne l'était dans la question physique elle-même. La théorie que nous proposons est exempte de cet inconvénient. On a regardé comme entièrement incomplète toute solution qui consistait dans des équations non intégrées. On est parvenu à résoudre ces diverses équations, à les combiner avec celles qui se rapportent à l'état de la surface, et à s'en servir pour déterminer numériquement toutes les circonstances de la propagation de la chaleur dans les solides.

Pour que ces solutions fussent générales, et qu'elles eussent une étendue équivalente à celle de la question, il était nécessaire qu'elles représentassent l'état initial des températures, qui est arbitraire. L'examen de cette condition fait connaître que l'on peut développer en séries convergentes, ou exprimer par des intégrales définies, les fonctions qui ne sont point assujetties à une loi constante, et qui représentent les ordonnées des lignes irrégulières ou discontinues. Cette propriété jette un nouveau jour sur la théorie des équations aux différences partielles, et étend l'usage des fonctions arbitraires, en les soumettant aux procédés ordinaires de l'analyse.

Il restait encore à comparer les faits avec la théorie. On a entrepris dans cette vue des expériences variées et précises, dont les résultats, conformes à ceux du calcul, lui donnent une autorité qu'on eût été porté à lui refuser dans une matière encore obscure, et qui paraît sujette à tant d'incertitudes. Ces expériences confirment le principe fondamental dont on est parti, et qui est adopté de tous les physiciens, malgré la diversité de leurs hypothèses sur la nature de la chaleur.

L'équilibre de température ne s'opère pas seulement par la voie du contact: il s'établit aussi entre les corps séparés les uns des autres, et qui demeurent long-temps placés dans un même espace; et cet effet peut avoir lieu indépendamment du contact de l'air. Il fallait donc, pour compléter la théorie de la propagation de la chaleur dans les solides, examiner les lois que suit la chaleur rayonnante en traversant la surface de ces corps. Il résulte des observations de plusieurs physiciens, et de nos propres recherches, que l'intensité des rayons dépend de l'angle que fait leur direction avec la surface dont ils s'éloignent. Nous avons démontré que la loi suivant laquelle l'intensité des rayons décroît en même temps que l'angle d'émission, est une conséquence nécessaire de l'équilibre des températures. Enfin, nous avons reconnu que la cause physique de cette diminution d'intensité, est la même que celle qui détermine les lois du mouvement de la chaleur dans les corps solides.

Telles sont les questions principales dont on trouvera la solution dans cet ouvrage. Toutes les recherches sont dirigées vers un seul but, qui est d'établir clairement les principes mathématiques de la théorie de la chaleur, et de concourir ainsi aux progrès des arts utiles, et à ceux de l'étude de la nature.

La Table qui est placée à la suite de ce Mémoire fera connaître l'ordre qui a été suivi, les questions d'analyse ou de physique que nous avons traitées, et les résultats nouveaux auxquels nous sommes parvenus. Il sera facile de les distinguer de ceux que nous n'avons fait qu'employer, et qui étaient déja connus. On a indiqué ces derniers dans la Table et dans le corps de l'ouvrage, en citant les personnes à qui on les doit.

II.

Notions générales et définitions préliminaires.

2. On ne peut former aujourd'hui que des hypothèses incertaines sur la nature de la chaleur; mais la connaissance des lois mathématiques auxquelles ses effets sont assujettis, est indépendante de toutes les hypothèses. Elle exige seulement l'examen attentif des faits principaux que les observations communes ont indiqués, et qui ont été confirmés par des expériences précises.

Il est donc nécessaire d'exposer en premier lieu les résultats généraux des observations, de donner des définitions exactes de tous les éléments du calcul, et d'établir les principes sur lesquels ce calcul doit être fondé.

Les parties d'une même substance solide qui sont également échauffées ont une même densité: elles conservent cette densité lorsqu'elles conservent toute la chaleur qu'elles contenaient; et réciproquement les corps ou les parties des corps qui acquièrent une chaleur nouvelle, ou qui perdent une partie de celle qui y était contenue, changent en même temps de volume.

Lorsque toutes les parties d'une masse homogène sont également échauffées, et que chacune d'elles conserve toute la chaleur qu'elle avait, on exprime cet état en disant que le solide a acquis une température fixe.

Si le corps M est parvenu à une température fixe, et si l'on place en contact avec lui un second corps N, en sorte que chaque point de la surface extérieure du second touche un point du premier, le corps N acquerra aussi une température fixe, ou plutôt il s'approchera de ce dernier état, et la différence deviendra de plus en plus insensible.

Supposons que l'on donne ainsi à divers corps N, P, Q, R une température fixe, en plaçant chacun d'eux en contact avec le corps M; et qu'ensuite, choisissant un nouveau corps T, on le mette successivement en contact avec chacun des corps M, N, P, Q, R. Il recevra aussi une température fixe, et son état sera le même dans tous les cas, quelle que soit d'ailleurs la nature de chaque corps. C'est ce dernier fait qui constitue l'équilibre des températures.

Le thermomètre est un corps dont on peut apprécier facilement les moindres changements de volume.

Pour exprimer les diverses températures que le thermomètre peut acquérir, on observe les divers accroissements du volume, et chaque température est indiquée par l'augmentation de volume qui lui répond.

La température actuelle d'un corps est représentée par celle du corps qui est mis en contact avec lui.

On détermine deux températures fixes, savoir la température de la glace fondante qui est désignée par 0, et la température de l'eau bouillante que nous désignons par 1. On suppose que l'ébullition de l'eau a lieu sous une pression de l'atmosphère représentée par une certaine hauteur du baromètre ($0^m,76$), le mercure du baromètre étant à la température 0.

On mesure les différentes quantités de chaleur, en déterminant combien de fois elles contiennent une quantité que l'on a fixée et prise pour unité. On suppose qu'une masse de glace d'un poids déterminé (un kilogramme) soit à la température 0, et que, par l'addition d'une certaine quantité de chaleur, on la convertisse en eau à la même température 0. Cette quantité de chaleur ajoutée est la mesure prise pour unité. Ainsi la quantité de chaleur exprimée par le nombre C, contient un nombre C de fois la quantité nécessaire pour résoudre en eau un kilogramme en glace.

Pour élever une masse métallique d'un certain poids, par exemple un kilogramme de fer, depuis la température 0 jusqu'à la température 1, il est nécessaire d'ajouter une nouvelle quantité de chaleur à celle qui était déjà contenue dans cette masse. Le nombre C qui désigne cette quantité de chaleur ajoutée, est la chaleur spécifique du fer. Le nombre C a des valeurs différentes pour les différentes substances.

Cette même masse de fer (un kilogramme) étant à la température 0, si on ajoute seulement une quantite de chaleur $\frac{1}{2}$ C.

elle acquerra la température que nous désignons par $\frac{1}{2}$. En général la température z est celle que l'on obtient lorsqu'on ajoute une quantité de chaleur égale à zC.

Supposons qu'une pareille masse d'une autre substance (un kilogramme de mercure), étant à la température o, il soit nécessaire d'ajouter une quantité de chaleur C′ pour la porter à la température 1 : C′ exprimera la chaleur spécifique de cette seconde substance. Si au lieu d'ajouter cette quantité C′, on ajoute seulement $\frac{1}{2}$ C′, le corps parviendra à une température qui ne diffère pas sensiblement de celle que nous avons désignée plus haut par $\frac{1}{2}$. Les accroissements respectifs zC et zC′ correspondent dans les deux substances dont il s'agit à la même température z. En général, dans les substances solides, des accroissements égaux de chaleur correspondent sensiblement à des températures égales, et à des accroissements égaux de volume.

Si un corps d'une nature déterminée (le mercure) occupe le volume 1 étant à la température o, il occupera un volume plus grand $1 + \Delta$ lorsqu'il aura la température 1. Si l'on porte ce même corps à la température désignée plus haut par $\frac{1}{2}$, la valeur de son nouveau volume sera exprimée, sans erreur sensible, par $1 + \frac{1}{2}\Delta$. Et en général le volume $1 + z\Delta$ est celui qui correspond pour cette substance à la température exprimée par z.

Il faut remarquer que les accroissements de volume, les accroissements de la quantité de chaleur, et les accroissements de température, ne doivent être regardés comme proportionnels entre eux, que dans les cas où les corps dont il s'agit sont assujettis à des températures éloignées de celles qui déterminent leurs changements d'état. On ne serait point fondé à appliquer aux liquides les résultats précédents. A l'égard de l'eau en particulier, les dilatations ne suivent point toujours les progrès de la température.

Supposons qu'un corps terminé par une surface plane d'une certaine étendue (un décimètre quarré) soit entretenu d'une manière quelconque à une température constante 1 commune à tous ses points, et que la surface dont il s'agit soit en contact avec l'air maintenu à la température o. La chaleur qui s'écoulera continuellement par la surface, et passera dans le milieu environnant, sera toujours remplacée par celle qui provient de la cause constante à l'action de laquelle le corps est exposé. Il passera ainsi par la surface dans un temps déterminé (une minute), une certaine quantité de chaleur désignée par h. Ce produit h d'un flux continuel et toujours semblable à lui-même, qui a lieu pour une unité de surface à une température fixe, nous servira à mesurer exactement la conductibilité extérieure du corps; c'est-à-dire la facilité avec laquelle il transmet la chaleur à l'air atmosphérique. Différentes circonstances influent sur la valeur de cette quantité désignée par h. On suppose que l'air est continuellement déplacé avec une vîtesse uniforme et donnée: mais si la vîtesse du courant augmentait, la quantité de chaleur qui se communique au milieu varierait aussi. Il en serait de même si l'on augmentait la densité de ce milieu. Si l'excès de la température constante du corps sur la température des corps environnants, lequel est ici exprimé par 1, recevait une valeur moindre, la valeur de h diminuerait. Il résulte des observations que cette quantité de chaleur dissipée est, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnelle à l'excès de la température du corps sur celle de l'air et des corps environnants. Ainsi la quantité h ayant été déterminee par une expérience dans laquelle la surface échauffée est à la température 1 et le milieu à la température 0, on peut en conclure qu'elle aurait la valeur hz si la température de la surface était z, toutes les autres circonstances demeurant les mêmes.

La valeur h de la quantité de chaleur qui se dissipe par la surface échauffée est différente pour les différents corps, et elle varie pour une même surface suivant différentes circonstances. L'effet de l'irradiation est d'autant moindre que la surface échauffée est plus polie; de sorte qu'en faisant disparaître le poli de la surface, on augmente considérablement la valeur de h. Un corps métallique échauffé se refroidira beaucoup plus vite, si l'on couvre sa surface extérieure d'un enduit noir, propre à ternir entièrement l'éclat métallique. On obtient un effet pareil en appliquant à la surface diverses enveloppes. La quantité h paraît avoir des valeurs assez peu différentes pour les différents métaux dont la surface est polie.

Les rayons de chaleur qui s'échappent de la surface d'un corps se transmettent dans un espace vide d'air, terminé par des corps plus froids. Les rayons pénètrent aussi dans l'air atmosphérique : leur direction n'est point troublée par les agitations de l'air intermédiaire. Ils peuvent être réfléchis, et se réunissent aux foyers des miroirs métalliques.

Lorsque le corps échauffé est placé dans un air qui conserve sensiblement une température constante 0, la chaleur qui se communique à l'air rend plus légère la couche de ce fluide voisine de la surface. Cette couche s'élève d'autant plus vite qu'elle est plus échauffée, et est remplacée par une égale masse d'air à la température o. Il s'établit ainsi un courant dont la direction est verticale, et dont la vîtesse est d'autant plus grande que la température du corps est plus élevée. C'est pourquoi, si le corps se refroidissait successivement, la vîtesse du courant diminuerait avec la température, et la loi du refroidissement ne serait pas la même que si le corps était exposé à un courant d'air d'une vîtesse constante, comme nous le supposons toujours dans ce Mémoire.

Les corps dont la température est élevée n'échauffent pas seulement les portions d'air qui sont en contact avec leur surface, mais aussi toutes celles qui sont exposées aux rayons de chaleur. Ces rayons ne pénètrent point au-delà des solides transparents lorsqu'ils émanent de corps obscurs, ou du moins l'effet m'en a toujours paru presqu'insensible. Il n'en est pas de même des rayons de chaleur qui sont envoyés par des corps lumineux.

La quantité de chaleur perdue par une surface échauffée est proportionnelle à l'étendue de cette surface. Elle varie beaucoup, suivant la densité et la nature du fluide ou du liquide environnant.

Nous avons pris pour mesure de la conductibilité extérieure d'un corps solide un coëfficient h, exprimant la quantité de chaleur qui passerait pendant un temps déterminé (une minute) de la surface de ce corps dans l'air atmosphérique, en supposant que la surface ait une étendue déterminée (un décimètre quarré), que la température constante du corps soit 1, que celle de l'air soit o, et que la surface échauffée soit exposée à un courant d'air d'une vîtesse déterminée et invariable.

Les substances solides diffèrent encore par la propriété qu'elles ont d'être plus ou moins perméables à la chaleur. Cette qualité est leur conductibilité proprement dite. On en donnera la définition et la mesure exacte, après avoir traité du mouvement uniforme de la chaleur dans un solide prismatique.

3. Nous allons présentement exposer le principe de la communication de la chaleur. Supposons que l'on place dans l'air un corps solide homogène dont les différentes parties ont actuellement des températures inégales. Chacun des points matériels dont le corps est composé recevra la chaleur de ceux qui en sont infiniment peu distants, ou leur en communiquera. Cette action mutuelle s'exerçant pendant un instant entre tous les points de la masse, il en résultera un changement infiniment petit pour toutes les températures. Le solide éprouvera à chaque instant des effets analogues; en sorte que les variations de température deviendront de plus en plus sensibles. Si l'on considère seulement l'action momentanée de deux points matériels infiniment voisins m et n, on voit que le point le moins échauffé doit acquérir une certaine quantité de chaleur en vertu de leur action mutuelle. Cette quantité dépend de la nature de la substance solide, de la durée infiniment petite de l'instant, de la distance infiniment petite des points m et n, et de la température actuelle de chacun. Or le principe de la communication de la chaleur consiste en ce que, toutes les autres circonstances étant les mêmes, la quantité de chaleur acquise est proportionnelle à la différence des températures des deux points. Ainsi cette quantité serait double, triple, quadruple, si, tout restant d'ailleurs le même, la différence de la température du point

m à celle du point *n* était double, ou triple, ou quadruple. La même loi serait encore observée si l'un des points *m* et *n* appartenait au solide, et l'autre au milieu qui l'environne.

En admettant ce principe, on voit 1° que si l'on augmentait d'une quantité commune toutes les températures initiales de la masse solide et du milieu où elle est placée, les changements successifs des températures seraient exactement les mêmes que si l'on ne faisait point cette addition. Or ce résultat est pleinement confirmé par des expériences précises et multipliées, et il est regardé comme un fait constant par tous les physiciens qui ont observé les effets de la chaleur.

2° Si le milieu est entretenu à une température constante, et si le corps échauffé qui est placé dans ce milieu a des dimensions assez petites pour que la température, en s'abaissant de plus en plus, demeure sensiblement la même dans ses divers points, on voit que, selon le principe énoncé plus haut, il s'échappera à chaque instant par la surface du corps une quantité de chaleur proportionnelle à l'excès de la température actuelle sur celle du milieu. On en conclut facilement (*voyez* article 47) que la ligne dont les abcisses représenteraient les temps écoulés, et dont les ordonnées représenteraient les températures qui correspondent à ces temps, est une courbe logarithmique. Or les observations fournissent aussi ce même résultat (art. 103).

3° Supposons que le milieu soit à la température constante 0, et que les températures initiales des différents points *a*, *b*, *c*, *d*, etc. de la masse soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

qu'à la fin du premier instant elles soient devenues........................ $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$

à la fin du 2e instant elles soient....... $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', \ldots$
à la fin du 3e.................... $\alpha''', \beta''', \gamma''', \delta''', \ldots$

On peut conclure du principe énoncé que, si les températures des mêmes points avaient été $m\alpha, m\beta, m\gamma, m\delta\ldots$ etc., elles seraient devenues à la fin du premier instant, en vertu de l'action réciproque des divers points, et quel que soit le nombre m, égales à.......... $m\alpha', m\beta', m\gamma', m\delta', \ldots$
qu'à la fin du second instant
elles seraient................ $m\alpha'', m\beta'', m\gamma'', m\delta'', \ldots$ etc.

Ainsi lorsqu'on augmente dans une raison donnée toutes les températures initiales, on augmente dans la même raison toutes les températures successives. Ce résultat est, comme les deux précédents, entièrement confirmé par les observations. Il ne pourrait point avoir lieu si la quantité de chaleur qui passe d'une molécule à une autre n'était point en effet proportionnelle à la différence des températures.

4° On a observé avec soin, et avec des instruments précis, les températures permanentes des différents points d'une barre ou d'une armille métallique, et les mouvements de la chaleur dans ces mêmes corps, et dans plusieurs masses de forme sphérique ou cubique (*voyez* art. 101 et 103). Les résultats de ces expériences s'accordent très-exactement avec ceux que l'on déduit du principe que nous avons exposé. Or ils seraient entièrement différents, si la quantité de chaleur transmise par une molécule solide à une autre, ou à une molécule de l'air, n'était pas directement proportionnelle à l'excès de température. Au reste ce principe, proposé par Newton, disertement expliqué par M. Lambert de Berlin, et que tous les physiciens ont admis, pourrait être susceptible de quelques corrections, que des expériences ultérieures nous feraient connaître. Il sera facile alors de modifier les résultats de la théorie, auxquels il sert de fondement. Mais aucune observation précise n'a indiqué jusqu'ici que l'on dût recourir à ces corrections.

4. Il faut présentement considérer le mouvement uniforme de la chaleur dans le cas le plus simple, qui est celui d'un solide compris entre deux plans parallèles.

On suppose qu'un prisme solide (fig. 1) formé d'une substance homogène a une longueur indéfinie, et que la section perpendiculaire à l'arête a une étendue déterminée (un décimètre quarré). Une extrémité A du prisme terminée à droite par la section *a* est entretenue par une cause quelconque à une température constante 1, en sorte que tous les points de la section *a*, et tous ceux du solide qui sont à la gauche de cette section conservent la température fixe 1. L'extrémité B terminée à gauche par la section *b*, est entretenue à une température moindre 0, en sorte que tous les points du solide qui appartiennent à la section *b*, ou qui sont à la droite, ont acquis et conservent la température 0. On fait abstraction de la chaleur qui se dissiperait par la surface extérieure de la partie du solide comprise entre les deux sections *a* et *b*, c'est-à-dire qu'on suppose qu'il ne se fait aucune déperdition de chaleur par cette surface. Sans recourir à cette supposition, on peut concevoir que le prisme fait partie d'un mur solide qui a deux dimensions infinies, et qui est compris entre deux plans parallèles, assujettis aux températures constantes 1 et 0.

Il s'établira un courant de A en B qui traversera toute la masse du prisme. Ce mouvement de la chaleur, qui sera d'abord varié, tendra continuellement à un état uniforme et permanent. Ce dernier état est celui qui subsisterait de lui-même s'il était formé. Il est évident que dans l'état fixe dont il s'agit, la température permanente d'un point du prisme est la même pour tous les points d'une même section parallèle à la base, mais qu'elle est d'autant moindre que la section est plus éloignée de l'extrémité A. Supposons que la droite ab (fig. 2) soit la partie de l'arête du prisme qui est comprise entre les deux sections extrêmes, que l'on élève en a une perpendiculaire égale à l'unité, et que par les points 1 et b on trace la ligne droite $1b$. Il sera facile de démontrer que la température permanente d'une section intermédiaire quelconque passant par α, est représentée par l'ordonnée correspondante αz. En effet si les températures étaient établies conformément à cette loi, il ne pourrait y avoir par la suite aucun changement dans l'état du solide. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer toute la quantité de chaleur qui traverse une section intermédiaire α, à celle qui pendant le même temps traverse une autre section α'.

Imaginons que deux points du solide m et n, infiniment voisins l'un de l'autre, et placés d'une manière quelconque l'un à la gauche et l'autre à la droite de la section α, exercent pendant un instant infiniment petit leur action mutuelle. Considérons aussi deux points m' et n' qui soient situés par rapport à la section α' de même que m et n le sont par rapport à α. Les distances infiniment petites mn et $m'n'$ seront égales par hypothèse, et de plus l'excès de température de m sur n sera le même que la différence entre la température de m' et celle de n' : donc les quantités de chaleur transmises pendant le même instant seront égales de part et d'autre. Il est manifeste que l'on peut appliquer le même raisonnement à tous les systèmes de deux molécules qui se communiquent de la chaleur à travers la section α ou la section α'. Donc si l'on pouvait recueillir toute la quantité de chaleur qui s'écoule pendant un même instant à travers la section α ou la section α', on trouverait que cette quantité est la même pour les deux sections.

Il en résulte que la partie du prisme comprise entre α et α' reçoit toujours autant de chaleur qu'elle en perd ; et comme cette conséquence s'applique à une portion quelconque du prisme comprise entre deux sections parallèles, il est évident qu'aucune partie du solide ne peut acquérir une température plus élevée que celle qu'elle a présentement. Ainsi l'état du prisme subsistera continuellement tel qu'il était d'abord.

Donc les températures permanentes sont en effet représentées par les ordonnées de la droite $1zb$.

Comparons maintenant l'état du premier prisme avec celui d'un autre prisme solide de même base, mais de longueur différente, dont les deux sections extrêmes sont aussi entretenues à des températures fixes. Soient S l'aire de la section dans l'un et l'autre prisme (fig. 3) ;

x et X les abscisses comptées sur l'axe, à partir de l'origine en A, et correspondantes aux deux bases dans le premier prisme ;

x' et X' les abscisses qui correspondent aux deux bases dans le second prisme ;

a et b les températures constantes des bases dans le premier prisme :

a' et b' les températures des bases dans le second. Les températures permanentes des sections intermédiaires du premier prisme seront, comme on vient de le démontrer, proportionnelles aux ordonnées de la droite oo, les lignes ao et bo représentant les températures extrêmes extrêmes a et b; et chaque section intermédiaire sera continuellement traversée par un courant uniforme de chaleur, qui est le même dans toute l'étendue du prisme. Il faut remarquer maintenant que ce flux constant n'est pas le même dans les deux prismes, et il est facile de reconnaître quels sont les éléments qui en déterminent la quantité : il suffit pour cela de comparer l'état d'une section α dans le premier prisme, à celui d'une section α' du second. Soient m et n deux molécules infiniment voisines séparées par la section α, et ayant des températures fixes dont la différence est Δ; soient m' et n' deux molécules du second prisme, situées par rapport à la section α' de la même manière que m et n sont situées par rapport à la section α, et ayant des températures fixes dont la différence est Δ'. La quantité de chaleur transmise de m à n ne sera point la même que celle qui passe dans le même instant de m' à n'. Ces deux quantités seront entre elles dans le rapport de Δ à Δ', et l'on voit par la comparaison des deux figures que ce rapport est celui de $\frac{b-a}{X-x}$ à $\frac{b'-a'}{X'-x'}$. Le même raisonnement s'applique à un système quelconque de deux molécules M et N, qui exercent leur action mutuelle à travers la section α. Car il se trouve nécessairement dans le second prisme un système pareil de deux molécules M' et N', et le résultat de l'action du premier système est au résultat de l'action du second dans le rapport constant de $\frac{b-a}{X-x}$ à $\frac{b'-a}{X'-x'}$. Donc la quantité totale de chaleur qui traverse la section du premier prisme, est à la quantité qui s'écoule à travers la section du second, dans ce même rapport de $\frac{b-a}{X-x}$ à $\frac{b'-a'}{X'-x'}$. On en conclut la proposition suivante :

Lemme Ier. La quantité de chaleur qui passe pendant un temps déterminé T dans une section S d'un prisme solide, dont les bases correspondantes aux abscisses x et X sont assujetties à des températures fixes a et b, et qui se meut dans le sens suivant lequel les x augmentent, est proportionnelle à l'étendue de la section, à la durée du temps, à la différence des températures extrêmes, et elle est en raison inverse de la distance perpendiculaire des bases. Cette quantité est exprimée par

$$-\text{KST} \cdot \frac{b-a}{X-x}.$$

K est un coëfficient constant qui dépend de la nature du solide.

5. Si dans l'expression précédente on suppose $a=1$, $b=0$, $X-x=1$, $T=1$, $S=1$, elle se réduit à la constante K. Nous prendrons ce coëfficient K pour la mesure de la conductibilité spécifique de chaque substance. On verra plus bas comment on en peut déterminer la valeur par l'expérience. Il représente la quantité de chaleur qui s'écoule uniformément dans un temps donné (une minute) à travers un prisme de cette substance, lorsque les deux sections extrêmes, d'un décimètre quarré de superficie, et distantes d'un

décimètre, sont entretenues aux températures fixes 1 et 0, en supposant la surface extérieure du prisme imperméable à la chaleur.

Cette valeur de K est très-différente pour les différentes substances métalliques. On observe plus difficilement l'effet de la conductibilité dans les liquides, parce que leurs molécules changent de situation en changeant de température. C'est de ce déplacement continuel que résulte principalement la propagation de la chaleur dans les liquides, toutes les fois que les parties inférieures de la masse sont plus exposées à l'action du foyer. Si, au contraire, on applique la chaleur à la portion de la masse qui est plus élevée que les autres, comme cela avait lieu dans plusieurs de nos expériences, la transmission de la chaleur, qui est alors très-lente, n'occasionne aucun déplacement, à moins que l'accroissement de la température ne diminue le volume, ce qui a lieu pour l'eau très-froide. Les liquides jouissent aussi de la propriété de transmettre la chaleur de molécule à molécule; mais l'effet de cette propriété est beaucoup moins sensible que celui qui résulte du déplacement des parties. La valeur numérique de la conductibilité varie suivant la nature des liquides.

6. Pour faciliter l'application du calcul aux questions suivantes, nous donnerons plus d'extension au lemme I^er de l'article 4 (page 207), en considérant le mouvement uniforme de la chaleur dans un prisme compris entre six plans rectangulaires.

Supposons 1° que la température actuelle v de chaque point du prisme soit exprimée par l'équation linéaire

$$v = A + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires de chaque point; 2° que les températures des points des six plans rectangulaires qui terminent le solide soient continuellement maintenues, par une cause extérieure quelconque, dans leur premier état, tel qu'il résulte de l'équation précédente. Nous disons qu'il ne pourra survenir aucun changement dans la température des divers points de la masse. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les quantités de chaleur qui, pendant la durée d'un même instant, traversent deux plans horizontaux, tels que la distance perpendiculaire de l'un à l'autre est c. Soient m et m' deux molécules infiniment voisines, dont l'une est au-dessus du premier plan horizontal, et l'autre au-dessous; soient x, y, z les coordonnées de la première, et x', y', z' les coordonnées de la seconde. On désignera pareillement deux molécules M et M' infiniment voisines, séparées par le second plan horizontal, et situées par rapport à ce second plan de la même manière que m et m' le sont par rapport au premier; c'est-à-dire que les coordonnées de M et M' sont x, y, $z+c$ et x', y', $z'+c$. Il est manifeste que les distances de m à m' et de M à M' seront égales. Il résulte de l'équation linéaire qui exprime l'état du solide, que la différence entre la température de m et celle de m' est égale à la différence entre la température de M et celle de M', ce qui se déduit de la substitution des coordonnées des molécules dans l'équation générale

$$v = A + \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Donc l'action mutuelle des deux molécules m et m' ne diffère point de l'action des deux molécules M et M'; et comme le même raisonnement s'applique à un système quelconque des deux points de la masse qui peuvent se communiquer de la chaleur à travers le premier plan et à travers le second, il s'ensuit que la quantité totale de chaleur qui traverse le premier plan, est égale à celle qui traverse le second pendant le même temps. On tirera la même conséquence de la comparaison de deux plans parallèles au plan de x et z, ou de deux autres plans parallèles au plan de y et z. Donc une partie quelconque du solide comprise entre six plans rectangulaires, reçoit par chacune des faces autant de chaleur qu'elle en perd par la face opposée. Donc il n'y a aucune portion du solide qui puisse changer de température.

Il est également facile de déterminer la quantité de chaleur qui s'écoule uniformément à travers une section horizontale hh dans le prisme dont les températures sont représentées par l'équation

$$v = A + \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

En effet désignons deux molécules m, m' infiniment voisines, situées d'une manière quelconque dans un même plan horizontal, et infiniment peu au-dessous de la section horizontale hh; et considérons l'action de ces deux molécules sur une troisième μ, placée infiniment peu au-dessus de la section, dans la verticale qui passe par le milieu de la droite mm' joignant m et m'. Soient v, v', w les températures des trois molécules m, m', μ. L'action de m sur μ, ou la quantité de chaleur que la moins échauffée de ces molécules acquiert en vertu de leur action mutuelle, dépend de la différence $v - w$ de leurs températures. L'action de m' sur μ dépend de la même manière de la différence $v' - w$ des températures des molécules, puisque la distance de m à μ est la même que celle de m' à μ. Ainsi, en désignant par $q(v - w)$ l'action de m sur μ, on aura $q(v' - w)$ pour exprimer l'action de m' sur μ, q étant un facteur inconnu, mais commun. Donc l'action totale de m et m' sur μ sera

$$q(v - w + v' - w).$$

Or si les températures du prisme ne variaient que dans le sens vertical, c'est-à-dire si elles étaient représentées par l'équation $v = A + \gamma z$, la somme $(v - w + v' - w)$ serait la même que dans le cas où l'état du prisme est exprimé par l'équation complète

$$v = A + \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

En effet, en désignant par x, y, z les coordonnées de μ, et par $x + r,\ y + s,\ z + t$ les coordonnées de m', celles de m seront par hypothèse $x - r,\ y - s,\ z + t$. Si maintenant on substitue ces diverses coordonnées dans l'équation

$$v = A + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

afin d'en conclure les valeurs de v, v', w, on reconnaîtra que l'expression $q(v - w + v' - w)$ ne contient point les coëfficients α et β, mais seulement γ; en sorte qu'elle serait la même, si β et α étaient nuls. Donc les termes αx et βy n'influent point sur l'action combinée de m et m' sur μ. On appliquerait le même raisonnement à un système quelconque de deux autres molécules, prises sur une horizontale quelconque. Donc l'effet total, c'est-à-dire la quantité de chaleur qui, en vertu de l'action mutuelle des molécules inégalement échauffées, passe au-dessus de la section horizontale hh, est la même que si les termes αx et βy ne se trouvaient point dans l'équation qui détermine les températures. Or dans ce dernier cas, où les températures ne varient que selon la verticale, la quantité de chaleur qui traverse une section horizontale égale à S, est exprimée d'après le lemme I^er, art. 4 (p. 207), par $-KS\frac{dv}{dz}$, K étant la mesure de la conductibilité intérieure :

Lemme II^e. donc cette quantité conserve dans le cas actuel cette même valeur $-KS\frac{dv}{dz}$, ou $-KS\gamma$.

On prouve de même que la quantité de chaleur qui, pendant l'unité de temps, s'écoule uniformément dans le sens des x à travers la surface plane S située dans le prisme parallèlement au plan de y et z, est exprimée par $-KS\frac{dv}{dz}$, ou $-KS\alpha$; et que la chaleur totale qui traverse, pendant l'unité de temps, la surface S parallèle au plan de x et z, est $-KS\frac{dv}{dy}$, ou $-KS\beta$.

On doit examiner attentivement les deux propositions élémentaires qui viennent d'être démontrées art. 4 et art. 6, parce qu'on en fera une application continuelle dans la suite de ce Mémoire. La connaissance de ces lemmes suffit pour former, dans toutes les questions, les équations de la propagation de la chaleur. Ils se réduisent, comme on le voit, à considérer le mouvement de la chaleur dans deux cas très-simples, savoir : 1° lorsque le solide échauffé est compris entre deux plans parallèles infinis; 2° lorsque ce solide est compris entre six plans rectangulaires. Dans le premier cas on suppose que la température actuelle de chaque point dont les coordonnées sont x, y, z, est exprimée par l'équation $v = A + \alpha x$, α étant un coëfficient constant, et les deux plans qui comprennent le solide étant parallèles à celui de z et y. Dans le deuxième cas la température actuelle de chaque point est exprimée par l'équation

$$v = A + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

α, β, γ étant des coëfficients constants.

1° Si l'on suppose que dans le premier solide tous les points des deux plans opposés soient maintenus par des causes extérieures quelconques dans leur état actuel, qui satisfait à l'équation $v = A + \alpha x$, il arrivera nécessairement que tous les points intérieurs conserveront aussi leurs températures actuelles, conformes à cette même équation. Une section quelconque parallèle aux deux plans sera traversée à chaque instant dans le sens opposé à celui des x, par un flux constant de chaleur, qui serait encore le même pour une autre section. Si un autre solide, compris comme le précédent entre deux plans infinis, a des températures constantes exprimées par l'équation $v = A' + \alpha' x$, le flux contant de chaleur dans ce nouveau solide ne sera point le même que dans le précédent, et leur rapport sera celui des coëfficients α et α'. Le coëfficient K, qui mesure la conductibilité spécifique, représente ce flux constant de la chaleur dans un solide compris entre deux plans dont la distance est un décimètre. La température du premier plan est 0, celle du second est 1, et l'on n'a égard qu'à la quantité de chaleur qui, dans une section, traverse une surface d'un décimètre quarré. Si, en général, dans un solide compris entre deux plans infinis, l'on désigne par x_1 et x_2 les deux abscisses extrêmes qui répondent aux deux bases, et par v_1 et v_2 les températures extrêmes correspondantes, le coëfficient α, qui est proportionnel au flux constant de chaleur, équivaut à $\frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1}$; en sorte qu'en désignant par S une partie déterminée d'une section quelconque parallèle aux bases, le terme $-KS\frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1}$, exprime la quantité totale de chaleur qui, pendant l'unité de temps, traverse la surface S d'un mouvement uniforme dans le sens suivant lequel les x augmentent. C'est dans ce résultat que consiste le premier lemme.

2° Si le solide est compris entre six plans rectangulaires, et que la température actuelle v de chaque point étant exprimée par l'équation

$$v = A + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

on maintienne, par des causes extérieures quelconques, tous les points des six plans aux températures qui satisfont à l'équation donnée

$$v = A + \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

il arrivera nécessairement que les températures des points intérieurs seront aussi invariables, et exprimées par la même équation. Une section quelconque parallèle au plan des x et y, est traversée à chaque instant par une onde constante qui serait la même pour toute autre section parallèle. Ce flux de chaleur est égal à celui qui aurait lieu dans le même solide, si les températures actuelles étaient exprimées par l'équation $v = A + \alpha x$. Désignant donc sur l'axe des x deux molécules placées à la surface du solide, l'une ayant pour abscisse x_1 et pour température v_1, l'autre sur la base opposée ayant pour abscisse x_2 et pour température v_2, on aura $-KS\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1}$ pour l'expression de la quantité totale de chaleur qui, pendant l'unité de temps, traverse une surface S située dans le solide, et parallèle au plan de y et z. Le second lemme consiste dans ce résultat. Ces deux propositions sont des conséquences évidentes du principe de la communication de la chaleur, qui est lui-même fondé sur des expériences multipliées. Nous regardons comme un élément essentiel de la théorie mathématique de la chaleur, la considération de son mouvement uniforme dans l'intérieur d'un prisme rectangulaire.

On vient d'exposer les notions générales et les faits qui servent de fondement à la théorie de la chaleur. De nouvelles observations pourront donner par la suite une connaissance plus complète de ces faits. On découvrira alors les corrections qu'il pourrait être nécessaire d'introduire dans les valeurs C, h et K, qui représentent la chaleur spécifique, la facilité avec laquelle la chaleur se dissipe par la surface, et la conductibilité propre des diverses substances. Toutes les expériences que l'on a faites jusqu'ici autorisent à regarder ces valeurs C, h, K comme constantes pour des températures assez distantes de celles qui occasionnent les changements d'état. Il faut d'abord établir de cette manière la théorie de la chaleur, et soumettre la question à l'analyse mathématique. C'est en comparant les résultats du calcul avec les résultats observés, que l'on découvrira si les quantités regardées comme constantes et indépendantes des températures absolues, éprouvent des variations sensibles. Il est vraisemblable que les effets de la chaleur sont modifiés par quelques causes encore ignorées ; mais on en a fait abstraction aujourd'hui, comme on a déterminé autrefois les lois du mouvement indépendamment des résistances que le frottement oppose. Nous allons maintenant traiter les questions principales que présente cette théorie, et former les équations générales de la propagation de la chaleur.

III.

Equations du mouvement de la chaleur.

7. Une barre métallique, dont la forme est celle d'un parallélipipède rectangle d'une longueur infinie, est exposée à l'action d'un foyer de chaleur qui donne à tous les points de son extrémité A une température constante. Il s'agit de déterminer les températures fixes des différentes sections de la barre.

On suppose que la section perpendiculaire à l'axe est un quarré dont le côté $2l$ est assez petit pour que l'on puisse, sans erreur sensible, regarder comme égales les températures des différents points d'une même section. L'air dans lequel la barre est placée est entretenu à une température constante 0, et emporté par un courant d'une vîtesse uniforme.

La chaleur passera successivement dans l'intérieur du solide, et toutes ses parties situées à la droite qui n'étaient point exposées immédiatement à l'action du foyer, s'échaufferont de plus en plus. Mais la température de chaque point ne pourra point augmenter au-delà d'un certain terme. Ce maximum de température n'est pas la même pour chaque section; il est en général d'autant moindre que cette section est plus éloignée de l'origine. On désignera par y la température fixe d'une section perpendiculaire à l'axe, et placée à la distance x de l'origine A.

Avant que chaque point du solide ait atteint son plus haut degré de chaleur, le système des températures varie continuellement, et s'approche de plus en plus d'un état fixe qui est celui que l'on considère. Cet état final se conserverait de lui-même s'il était formé. Pour que le système des températures soit permanent, il est nécessaire que la quantité de chaleur qui traverse pendant l'unité de temps une section placée à la distance x de l'origine, compense exactement toute la chaleur qui s'échappe dans le même temps par la partie de la surface extérieure du prisme, qui est située à la droite de la même section. Pour mesurer cette dernière quantité, il faut prendre l'intégrale

$$\int 8hly \, . \, dx,$$

depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$, et retrancher le résultat de la valeur totale de la même intégrale, prise depuis x nulle jusqu'à x infinie. D'un autre côté, la tranche du solide comprise entre deux sections infiniment voisines, placées aux distances x et $x+dx$, doit être assimilée à un solide infini, terminé par deux plans parallèles assujettis à des températures fixes y et $y+dy$. L'épaisseur du prisme est dx, et l'étendue de la section est $4l^2$: donc la quantité de chaleur qui s'écoule uniformément pendant l'unité de temps à travers une section de ce solide, est, d'après le lemme I[er] de l'art. 4 (page 207), $-4l^2 K \frac{dy}{dx}$. On doit donc avoir l'équation

$$-4l^2 K \frac{dy}{dx} = const. - \int 8hly\,dx,$$

ou

$$Kl\frac{d^2y}{dx^2} = 2hy.$$

On obtiendrait le même résultat en considérant l'équilibre de la chaleur dans la seule tranche infiniment petite comprise entre les deux sections dont les distances sont x et $x + dx$. Mais de quelque manière que l'on forme cette équation, il est nécessaire de remarquer que la quantité de chaleur qui s'écoule entre deux tranches contiguës a une valeur finie, dont l'expression exacte est $-K4l^2\frac{dy}{dx}$, comme on l'a démontré plus haut (pages 207 et 212). On commettrait une erreur en regardant cette quantité comme seulement proportionnelle à dy, et il en résulterait 1° que l'on n'obtiendrait point une équation homogène, 2° que l'on n'introduirait point dans le calcul les dimensions du prisme, 3° que l'on ne pourrait point découvrir les équations dans les questions plus composées.

L'intégrale de l'équation précédente est

$$y = Me^{-x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}} + Ne^{x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}},$$

M et N étant deux constantes arbitraires. Or si l'on suppose la distance x infinie, la valeur de la température y doit être infiniment petite; donc le terme $Ne^{x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}}$ ne subsiste point dans l'intégrale. Ainsi l'équation

$$y = Ae^{-x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}}$$

représente l'état permanent du solide, la température à l'origine étant désignée par A.

Cette même loi, suivant laquelle les températures décroissent, est donnée aussi par l'expérience. Plusieurs physiciens ont observé les températures fixes des différents points d'une barre métallique, exposée par son extrémité à l'action constante d'un foyer de chaleur, et ils ont reconnu que les distances à l'origine représentent des logarithmes, et les températures des nombres correspondants. Ainsi lorsque des thermomètres sont placés à distances égales, le quotient des températures de deux points consécutifs est constant dans toute l'étendue de la barre. La première expérience de ce genre a été faite par M. Amontons, de l'académie des sciences de Paris. Ensuite M. Lambert de Berlin rectifia les conséquences erronées que ce physicien en avait déduites, et remarqua que cette loi du décroissement des températures est une conséquence évidente du principe de la communication de la chaleur.

8. La valeur numérique du quotient constant de deux températures consécutives étant déterminée par l'observation, on en déduit facilement celle du rapport $\frac{h}{K}$: car en désignant par y_1, y_2 les températures qui correspondent aux distances

x_1, x_2, on aura

$$\frac{y_2}{y_1}=e^{-(x_2-x_1)\sqrt{\frac{2h}{Kl}}},$$

ou

$$\sqrt{\frac{2h}{K}}=\frac{\sqrt{l}}{x_2-x_1}\log.\left(\frac{y_1}{y_2}\right).$$

Quant aux valeurs séparées de h et de K, on ne peut les déterminer par des expériences de ce genre, il faut observer aussi le mouvement varié de la chaleur.

Supposons que deux barres de même matière et de dimensions inégales, soient assujetties vers leur extrémité à une même température A. Soit l le côté de la section dans la première, et l' l'épaisseur de la seconde. On aura les équations

$$y=A\,e^{-x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}},\qquad y'=A\,e^{-x'\sqrt{\frac{2h}{Kl'}}}.$$

Si l'on veut comparer les distances comprises entre l'origine et les points qui parviennent dans les deux barres à la même température, on fera $y=y'$, et l'on en conclura

$$\frac{x'^2}{x^2}=\frac{l'}{l}.$$

Ainsi les distances dont il s'agit sont entre elles comme les racines quarrées des épaisseurs.

Si deux barres métalliques de dimensions égales, mais formées de substances différentes, sont couvertes d'un même enduit, et assujetties vers leur extrémité à une même température, la chaleur se propagera plus facilement et à une plus grande distance de l'origine dans celui des deux corps qui jouit d'une plus grande conductibilité. Pour comparer les distances comprises entre l'origine commune et les points qui acquièrent une même température fixe, il faut écrire l'équation

$$e^{-x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}} = e^{-x'\sqrt{\frac{2h}{K'l}}},$$

ou $$\frac{x'^2}{x^2} = \frac{K'}{K}.$$

Ainsi le rapport des deux conductibilités est celui des quarrés des distances comprises entre l'origine commune et les points qui atteignent une même température fixe.

Il est facile de connaître combien il s'écoule de chaleur pendant l'unité de temps par une section de la barre parvenue à son état fixe. Cette quantité a pour expression

$$-K4l\,\frac{dy}{dx}, \quad \text{ou} \quad 4A\sqrt{2Khl^3}\,.\,e^{-x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}}.$$

Et si on la prend à l'origine, on aura le coëfficient

$$4A\sqrt{2Khl^3},$$

qui mesure la quantité de chaleur nécessaire pour maintenir l'état du solide. Ainsi la dépense de la source de chaleur est, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnelle à la racine quarrée du cube de l'épaisseur. On trouverait le même résultat en prenant l'intégrale $\int 8lhy\,.\,dx$, depuis x nulle jusqu'à x infinie.

La question que l'on vient de traiter ne présentait aucune difficulté, parce qu'elle conduit à une équation très-simple et intégrable. Il n'en est pas de même des questions suivantes, pour lesquelles les équations sont plus composées, et ne peuvent être traitées par les méthodes générales. On se bornera ici à former les équations, et l'on traitera de leur intégration dans les chapitres suivants.

9. La seconde question que nous considèrerons a pour objet de déterminer la loi de la propagation de la chaleur dans une armille, dont les différents points auraient reçu des températures initiales quelconques.

S est la surface rectangulaire de la section faite par un plan perpendiculaire au plan de l'anneau, et passant par son centre, le solide étant supposé engendré par la révolution de cette section, l est le périmètre de la section ; h, le coëfficient qui mesure la conductibilité extérieure ; K, la conductibilité intérieure ; C, la capacité spécifique de chaleur de la substance dont l'armille est formée ; D, sa densité.

La ligne o$x\,x'\,x''$.... représente la circonférence moyenne de l'armille, ou celle qui passe par les centres de figure de toutes les sections. La distance d'une section à l'origine o est mesurée par l'arc dont la longueur est x.

R est le rayon de la circonférence moyenne.

On suppose qu'à raison des petites dimensions et de la forme de la section, on puisse regarder comme égales les températures des différents points d'une même section.

Concevons que l'on donne actuellement aux différentes tranches de l'armille des températures initiales arbitraires, et que ce solide soit immédiatement après exposé à l'air dont la température permanente est o, et qui est déplacé avec une vîtesse constante. Le système des températures variera continuellement, et la chaleur éprouvera à-la-fois deux mouvements, celui qui tend à la propager dans l'anneau, et celui qui tend à la dissiper par la surface. Il s'agit de connaître quels seront, après un temps écoulé, les nouvelles températures de chaque tranche.

Soit z la température que doit acquérir après le temps t la section placée à la distance x. z est une certaine fonction de x et de t, dans laquelle doivent entrer aussi toutes les températures initiales. C'est cette fonction qu'il s'agit de découvrir.

On considérera le mouvement de la chaleur dans une tranche infiniment petite, comprise entre une section placée à la distance x, et une section placée à la distance x' ou $x+dx$. La quantité de chaleur qui s'écoule pendant un instant δt à travers la première section, et passe ainsi de la partie du solide qui précède la tranche dans cette tranche elle-même, est égale au produit de la conductibilité K, de la surface S, du rapport $\frac{dz}{dx}$, et de la durée de l'instant. Elle a pour expression $-KS\frac{dz}{dx}\delta t$ (*voyez* le lemme Ier, art. 4, page 207). Pour connaître la quantité analogue de chaleur qui s'écoule entre la seconde section et la partie contiguë du solide, il faut seulement changer z en z', ou, ce qui est la même chose, ajouter à l'expression précédente sa différentielle, qui est $-KS\frac{d^2z}{dx}\delta t$. Donc si l'on diminue la quantité de chaleur qui passe dans la tranche de la quantité que cette tranche communique à la partie du solide qui est à sa droite, on aura pour l'expression de ce qui reste la différentielle précédente prise avec un signe contraire, ou $\mathrm{KS}\frac{d^2z}{dx}\delta t$.

D'un autre côté, la tranche dont la surface extérieure est $l\,dx$, et dont la température diffère infiniment peu de z, laisse échapper dans l'air, pendant l'instant δt, une quantité de chaleur exprimée par $hlz\,dx\,\delta t$. Il suit de là que cette partie infiniment petite du solide, conserve en effet une quantité de chaleur représentée par $\mathrm{KS}\frac{d^2z}{dx}\delta t - hlz\,dx\,\delta t$, et qui est destinée à faire varier sa température. Il faut examiner quelle est la quantité de ce changement.

Le coëfficient C exprime ce qu'il faut de chaleur pour élever l'unité de poids de la matière dont il s'agit, depuis la température o jusqu'à la température l. Par conséquent en multipliant le volume $\mathrm{S}\,dx$ de la tranche infiniment petite par la densité D pour connaître son poids, et par la capacité spécifique de chaleur C, on aura $\mathrm{CDS}\,dx$ pour l'expression de la quantité de chaleur qui élèverait le volume de la tranche depuis la température o jusqu'à la température 1. Donc l'accroissement de température dû à la chaleur ajoutée $\mathrm{KS}\frac{d^2z}{dx}\delta t - hlz\,dx\,\delta t$, se trouvera en divisant cette dernière quantité par $\mathrm{CDS}\,dx$. Or cet accroissement de température qui a lieu pendant l'instant δt, se trouverait en faisant varier z par rapport à t seulement, et nous désignerons cette variation par δz. On aura donc

$$\delta z = \frac{\mathrm{KS}\frac{d^2z}{dx}\delta t - hlz\,dx\,\delta t}{\mathrm{CDS}\,dx}, \qquad (b)$$

ou, suivant les notations ordinaires,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{CD} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{hl}{CDS} \cdot z.$$

Nous traiterons ultérieurement de l'intégrale de cette équation, et nous nous bornerons ici à la remarque suivante.

On peut appliquer l'équation (b) au cas où l'anneau serait exposé en un ou plusieurs de ses points à l'action constante de divers foyers de chaleur. Supposons que le plan de l'anneau soit horizontal, que l'on place au-dessous de divers points m, n, p.... des foyers de chaleur, dont chacun exerce une action constante. La chaleur se propagera dans l'anneau; et celle qui se dissipe par la surface étant nécessairement remplacée par celle qui émane des foyers, la température de chaque section du solide s'approchera de plus en plus d'une valeur stationnaire qui varie d'une section à l'autre. Pour exprimer au moyen de l'équation (b) la loi de ces dernières températures, qui subsisteraient d'elles-mêmes si elles étaient établies, il faut supposer que la quantité z ne varie point par rapport à t, ce qui rend nul le terme $\frac{dz}{dt}$. On aura ainsi l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{hl}{KS} z,$$

ou

$$z = Me^{-x\sqrt{\frac{hl}{K}}} + Ne^{x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}.$$

10. Supposons qu'une partie de la circonférence de l'anneau, placée entre deux foyers consécutifs, soit divisée en parties égales. Désignons par z_1, z_2, z_3, z_4, z_5..... les températures des points de division, dont les distances à l'origine

sont $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots\ldots$ La relation entre z et x sera donnée par l'équation précédente, après que l'on aura déterminé les deux constantes arbitraires au moyen des deux valeurs de z qui correspondent aux foyers. Désignant par α et λ les quantités

$$e^{-\sqrt{\frac{hl}{KS}}} \qquad \text{et} \qquad x_2 - x_1,$$

on aura les équations

$$z_1 = M\alpha^{x_1} + N\alpha^{-x_1},$$

$$z_2 = M\alpha^{\lambda}\alpha^{x_1} + N\alpha^{-\lambda}\alpha^{-x_1},$$

$$z_3 = M\alpha^{2\lambda}\alpha^{2x_1} + N\alpha^{-2\lambda}\alpha^{-2x_1};$$

d'où l'on tire la relation suivante :

$$\frac{z_1 + z_3}{z_2} = \alpha^{\lambda} + \alpha^{-\lambda}.$$

On trouverait un résultat semblable pour les trois points z_2, z_3, z_4, et en général pour trois points consécutifs. Il suit de là que si l'on observait les températures z_1, z_2, z_3, z_4, $z_5 \ldots$ de plusieurs points successifs, tous placés entre les deux mêmes foyers m et n, et séparés par un même intervalle λ, on reconnaîtrait que trois températures consécutives quelconques sont toujours telles, que la somme des deux extrêmes divisée par la moyenne donne un quotient constant $\alpha^{\lambda} + \alpha^{-\lambda}$.

Si l'on passait ensuite à l'espace compris entre deux autres foyers n et p, et que l'on observât les températures de divers autres points séparés par le même intervalle λ, on trouverait encore que pour trois points consécutifs quelconques, la somme des deux températures extrêmes divisée par la moyenne donne le même quotient constant $\alpha^{\lambda} + \alpha^{-\lambda}$. La valeur de ce quotient ne dépend ni de la position, ni de l'intensité des foyers.

Soit q cette valeur constante, on aura l'équation

$$z_3 = q z_2 - z_1.$$

On voit par là que lorsque la circonférence est divisée en parties égales, les températures des points de division compris entre deux foyers consécutifs, sont représentées par les termes d'une série récurrente dont l'échelle de relation est composée des deux termes q et -1.

Les expériences ont pleinement confirmé ce résultat. Nous avons exposé un anneau métallique à l'action constante et simultanée de divers foyers de chaleur, et nous avons observé les températures stationnaires de plusieurs points séparés par un intervalle constant. Nous avons toujours reconnu que les températures de trois points consécutifs quelconques avaient entre elles la relation dont il s'agit. Soit que l'on multiplie les foyers, et de quelque manière qu'on les dispose, on ne peut apporter aucun changement à la valeur numérique du quotient $\frac{z_1 + z_3}{z_2}$; il ne dépend que des conditions propres à l'anneau, et non de la manière dont le solide est échauffé (*voyez* art. 101).

11. Une masse solide de forme sphérique ayant été plongée pendant un temps infini dans un milieu dont la température est permanente, est ensuite exposée à l'air qui

conserve la température o, et qui est déplacé avec une vitesse constante: il s'agit de déterminer les états successifs du corps pendant la durée du refroidissement.

On désigne par x la distance d'un point quelconque au centre de la sphère; par z la température du même point, après un temps écoulé t. On suppose, pour rendre la question plus générale, que la température initiale commune à tous les points qui sont placés à la distance x du centre, est différente pour les différentes valeurs de x. C'est ce qui aurait lieu, si l'immersion ne durait pas un temps infini.

Les points du solide également distants du centre ne cesseront point d'avoir une température commune: ainsi z est une fonction de x et de t. Lorsqu'on suppose $t=0$, il est nécessaire que la valeur de cette fonction convienne à l'état initial qui est donné, et qui est entièrement arbitraire.

On considèrera le mouvement instantané de la chaleur dans une couche infiniment peu épaisse, terminée par les deux surfaces sphériques dont les rayons sont x et x' ou $x+dx$. La quantité de chaleur qui, pendant un instant infiniment petit δt, traverse la moindre surface dont le rayon est x, et passe ainsi de la partie du solide qui est plus voisine du centre dans la couche sphérique, est égale (*voyez* lemme I^{er}, art. 4, page 207) au produit de la conductibilité K, de la durée δt, de l'étendue $4\pi x^2$ de la surface, et du rapport $-\frac{dz}{dx}$. Elle est exprimée par $-4K\pi x^2\frac{dz}{dx}\delta t$. Pour connaître la quantité de chaleur qui s'écoule pendant le même instant par la seconde surface de la même couche, et passe ainsi de cette couche dans la partie du solide qui l'enveloppe, il faut changer dans l'expression précédente x en x' et z en z', c'est-à-dire ajouter au terme $-4\pi K x^2 \frac{dz}{dx}\,\delta t$ la différentielle de ce terme prise par rapport à x. Si l'on retranche maintenant de la quantité de chaleur qui pénètre dans la couche intermédiaire à travers la première surface, celle qui en sort par la seconde surface, on aura cette différentielle même du terme $-4\pi K x^2 \frac{dz}{dx}\,\delta t$, prise avec un signe contraire, ou $4\pi K d\left(x^2 \frac{dz}{dx}\right)\delta t$. Cette différence est évidemment la quantité de chaleur qui s'accumule dans la couche intermédiaire, et dont l'effet est de faire varier sa température.

Le coëfficient C désigne ce qu'il faut de chaleur pour élever de la température o à la température 1, un poids déterminé qui sert d'unité. D est le poids de l'unité de volume. $4\pi x^2 dx$ est le volume de la couche intermédiaire, ou n'en diffère que d'une quantité qui doit être omise. Donc $4\pi CDx^2 dx$ est la quantité de chaleur nécessaire pour porter la tranche intermédiaire de la température o à la température 1. Il faudra par conséquent diviser la quantité de chaleur qui s'accumule dans cette couche par $4\pi CDx^2 dx$, et l'on trouvera l'accroissement de sa température z dû à l'instant δt. On obtiendra ainsi l'équation

$$\delta z = \frac{K\,\delta t\, d\left(x^2 \frac{dz}{dx}\right)}{CD x^2 dx} = \frac{K}{CD}\,\delta t\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz}{dx}\right),$$

ou, suivant les notations établies,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz}{dx}\right).$$

L'équation précédente représente la loi du mouvement de la chaleur dans l'intérieur du solide; mais les températures des points de la surface sont encore assujetties à une condition particulière qu'il est nécessaire d'exprimer. En effet, la quantité de chaleur qui, pendant la durée d'un instant infiniment petit dt, s'écoule dans l'intérieur du solide à travers la surface sphérique placée à la distance x, est égale à $-4K\pi x^2 \frac{dz}{dx} dt$ (*voyez* lemme I^er^, art. 4, p. 207), et cette expression générale est applicable à toutes les valeurs de x. Ainsi en supposant $x=X$, rayon de la sphère, on connaîtra la quantité de chaleur qui passe de la superficie du solide dans le milieu qui l'environne. D'un autre côté cette même quantité est, suivant le principe de la communication de la chaleur, proportionnelle à la température de la surface échauffée, et à l'étendue de cette surface. Elle est égale à $4h\pi X^2 Z dt$, Z étant la valeur que prend la variable z lorsqu'on fait $x=X$. On doit donc avoir l'équation déterminée

$$-4K\pi X^2 \frac{dZ}{dX} dt = 4h\pi X^2 Z dt, \quad \text{ou} \quad K\frac{dZ}{dX} + hZ = 0.$$

De plus si, dans la valeur de z qui est une fonction de x et t, on suppose $t=0$, on doit trouver une fonction Fx qui est connue, et qui exprime les valeurs des températures dans l'état initial. Cet état doit être regardé comme entièrement arbitraire. On conclut de ce qui précède que la fonction z, qui contient les variables x et t, et représente le mouvement de la chaleur dans une sphère solide, doit satisfaire 1° à l'équation générale

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz}{dx}\right),$$

2° à l'équation déterminée

$$\frac{dZ}{dX} + \frac{h}{K} Z = 0,$$

3° à l'équation déterminée

$$z = Fx.$$

La première a lieu pour toutes les valeurs de z, quelles que soient celles de x et de t; la seconde a lieu lorsque $x = X$, quelle que soit la variable t; la troisième doit avoir lieu lorsque $t = 0$, quelle que soit x. Il ne nous reste plus qu'une question purement analytique, dont on donnera la solution dans les chapitres suivants : elle consiste à trouver la valeur de z au moyen de la condition générale, et des deux conditions particulières auxquelles elle est assujettie.

12. Un cylindre solide d'une longueur infinie et à base circulaire, ayant été entièrement plongé dans un liquide dont la température est uniforme, s'est échauffé successivement, et en sorte que tous les points également éloignés de l'axe ont acquis la même température. On l'expose ensuite à un courant d'air plus froid. Il s'agit de déterminer par le calcul les températures des différentes couches après un temps donné.

x désigne le rayon d'une surface cylindrique dont tous les points sont également distants de l'axe; X est le rayon du cylindre; z est la température que les points du solide situés à la distance x de l'axe doivent avoir, après qu'il s'est écoulé un temps désigné par t, depuis le commencement du refroidissement. Ainsi z est une fonction de x et de t; et si l'on y fait $t=0$, il est nécessaire que la fonction de x qui en proviendra satisfasse à l'état initial, qui est arbitraire. On considérera le mouvement de la chaleur dans une portion infiniment peu épaisse du cylindre, comprise entre la surface dont le rayon est x, et celle dont le rayon est x' ou $x+dx$. La quantité de chaleur que cette portion reçoit pendant l'instant δt de la partie du solide qu'elle enveloppe, c'est-à-dire la quantité qui traverse pendant ce même temps la surface circulaire cylindrique dont le rayon est x, et à laquelle nous supposerons une longueur égale à l'unité, a pour expression $-2K\pi x\frac{dz}{dx}\delta t$. Pour trouver la quantité de chaleur qui, traversant la seconde surface dont le rayon est x', passe de la couche infiniment peu épaisse dans la partie du solide qui l'enveloppe, il faut dans l'expression précédente changer x et z en x' et z', ou, ce qui est la même chose, ajouter au terme $-2K\pi x\frac{dz}{dx}\delta t$ la différentielle de ce terme prise par rapport à x. Donc la différence de la chaleur reçue à la chaleur perdue, ou la quantité de chaleur qui, s'accumulant dans la couche infiniment petite, détermine le changement de température, est cette même différentielle prise avec un signe contraire, ou

$$2K\pi l\delta t\, d\left(x\frac{dz}{dx}\right).$$

D'un autre côté le volume de cette couche intermédiaire est $2\pi x dx$, et $2CD\pi x dx$ exprime ce qu'il faut de chaleur pour élever cette couche de la température 0 à la température 1, C étant la chaleur spécifique et D la densité. Donc le quotient

$$\frac{2K\pi l\,\delta t\,d\left(x\frac{dz}{dx}\right)}{2CD\pi l\,x\,dx}$$

est l'accroissement δz qu'éprouve la température pendant l'instant δt. On obtient ainsi l'équation

$$\delta z = \frac{K\,\delta t\,d\left(x\frac{dz}{dx}\right)}{CD\,x\,dx},$$

ou, suivant les notations ordinaires,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right).$$

La quantité de chaleur qui traverse pendant l'instant δt la surface cylindrique dont le rayon est x, étant généralement exprimée par $-2K\pi x\frac{dz}{dx}\delta t$, il s'ensuit que l'on trouvera celle qui s'échappe, pendant le même temps, de la superficie du solide, en faisant dans la valeur précédente $x = X$, rayon total. D'un autre côté, cette même quantité qui se dissipe dans l'air est, selon le principe de la communication de la chaleur, égale à $2\pi X h z \delta t$. On doit donc avoir l'équation déterminée $-K\frac{dz}{dx} = hz$. Donc la fonction z, de x et t, qui représente le mouvement de la chaleur dans un cylindre infini, satisfait 1° à l'équation générale

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right),$$

qui doit avoir lieu quelles que soient x et t; 2° à l'équation déterminée

$$\frac{h}{K}z + \frac{dz}{dx} = 0,$$

qui a lieu, quelle que soit la variable t, lorsque $x = X$;
3° à l'équation déterminée

$$z = Fx.$$

Cette dernière condition doit être remplie pour toutes les valeurs de z où l'on fait $t = 0$, quelle que soit la variable x. La fonction arbitraire Fx est supposée connue, et elle correspond à l'état initial.

13. Une barre prismatique conserve à une de ses extrémités la température constante A; le reste de cette barre, dont la longueur est infinie, demeure exposé à un courant uniforme d'air atmosphérique entretenu à la température 0. Il s'agit de déterminer la plus haute température qu'un point donné de la barre puisse acquérir.

Cette question diffère de la première en ce qu'on a égard ici à toutes les dimensions du solide, ce qui est nécessaire pour que l'on puisse obtenir une solution exacte. En effet, on est porté à supposer que dans une barre d'une épaisseur très-médiocre, tous les points d'une même tranche acquièrent des températures sensiblement égales. Cependant il peut rester quelque incertitude sur les résultats de cette supposition. Il est donc préférable de résoudre la question rigoureusement, et d'examiner ensuite, par le calcul même, jusqu'à quel point et dans quel cas on est autorisé à regarder comme égales les températures des divers points d'une même section.

La section faite perpendiculairement à la longueur de la barre est un quarré dont le côté est $2l$, l'axe de la barre est l'axe des x, et l'origine est à l'extrémité A. Les trois coordonnées rectangulaires d'un point de la barre sont x, y, z. La température fixe du même point est désignée par v.

La question consiste à déterminer les températures que l'on doit donner aux divers points de la barre, pour qu'elles continuent de subsister sans aucun changement, tandis que la surface extrême A, qui communique avec la source de chaleur, demeure assujettie dans tous ses points à la température permanente A. Ainsi v est une fonction de x, de y et de z.

On considérera le mouvement de la chaleur dans une molécule prismatique comprise entre six plans rectangulaires infiniment voisins. x, y, z sont les trois coordonnées du point de la molécule qui est le plus voisin des trois plans fixes passant par l'origine. L'on désignera par les lettres D, d et d les différentiations par rapport à x, à y ou à z.

La molécule infiniment petite dont le premier point a pour coordonnées x, y, z, n'est autre chose qu'un prisme rectangulaire qui conserve un état pareil à celui que nous avons considéré dans le lemme II de l'article 6, page 212. Représentons par $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, les coordonnées des différents points de cette molécule rapportés au premier d'entre eux ; par v la température d'un de ces points, et par V celle du premier point, pour lequel Δx, Δy, Δz ont des valeurs nulles. On aura

$$v = V + \Delta x \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}x} + \Delta y \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} + \Delta z \frac{dV}{dz}.$$

Maintenant, si l'on veut connaître la quantité de chaleur qui, pendant l'unité de temps, pénètre dans la molécule selon le sens des x, il faut, d'après le lemme cité, multiplier l'étendue $dy\,dz$ de la surface par la conductibilité K et par le coëfficient $\frac{DV}{Dx}$, pris avec un signe contraire. Cette quantité de chaleur que la molécule reçoit de la partie du solide qui est à la gauche, est donc exprimée par $-K\,dy\,dz\,\frac{DV}{Dx}$. On trouvera la quantité de chaleur qui traverse la face opposée dans le sens des x, et s'écoule dans la partie du solide qui est à la droite, en substituant dans l'expression précédente x' ou $x+Dx$ à x; ou, ce qui est la même chose, en ajoutant à cette expression sa différentielle prise par rapport à x seulement. Donc en retranchant de la quantité de chaleur qui entre dans la molécule, celle qui en sort par la face opposée, on aura pour l'expression du reste

$$K\,dy\,dz\,D\left(\frac{DV}{Dx}\right).$$

Ce terme est la mesure exacte de la chaleur qui, à raison de la propagation dans le sens des x, s'accumule dans la molécule et ferait varier sa température, si cette augmentation de chaleur n'était point compensée par d'autres causes.

Cette molécule est aussi placée dans le sens des y, entre deux parties du solide qui exercent sur elle une action semblable à celle que l'on vient de définir. La surface de contact est dans ce second cas $Dx\,dz$, et le coëfficient est $\frac{dV}{dy}$: on trouvera donc que le terme $K\,Dx\,dz\,d\left(\frac{dV}{dy}\right)$ exprime la différence entre la chaleur qui passe de la partie antérieure du solide dans la molécule, et celle qui sort de cette molécule par la face opposée. Donc ce terme représente la quantité de chaleur accumulée dans la molécule, en vertu de la propagation qui a lieu dans le sens des y.

Pareillement la même molécule reçoit par la base inférieure $\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y$ une quantité de chaleur exprimée par

$$\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\frac{d\mathrm{V}}{dz}.$$

Elle perd par la face supérieure une quantité de chaleur égale à

$$-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\frac{d\mathrm{V}}{dz}-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,d\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right):$$

donc le terme $\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,d\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right)$ exprime la quantité de chaleur que cette même molécule acquiert en effet, en vertu de la propagation dans le sens des z. Pour que la molécule ne change point de température, il est nécessaire qu'elle ne conserve réellement aucune nouvelle quantité de chaleur, et que ce qu'elle acquiert dans un sens, serve à compenser ce qu'elle perd dans les autres. On doit donc avoir l'équation

$$\mathrm{K}\,\mathrm{d}y\,dz\,\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}x}\right)+\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,dz\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)+\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,d\left(\frac{dv}{dz}\right)=0.$$

ou, selon les notations usitées,

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0.$$

Il faut maintenant exprimer les conditions relatives à la surface. La quantité de chaleur qui traverse selon le sens des y une surface s (*voy.* lemme I, art. 4, p. 207) infiniment petite, parallèle au plan des x et z, est égale à $-\mathrm{K}s\frac{dv}{dy}$. Cette expression générale doit donc convenir aussi au point où $y=l$, demi-largeur du prisme. Or, à la superficie, la quantité de chaleur qui s'échappe est égale à hsv. Donc l'équation

$$\frac{h}{K}v+\frac{dv}{dy}=0$$

doit être satisfaite lorsque $y=l$. Elle doit l'être aussi lorsque $y=-l$.

De plus la quantité de chaleur qui traverse selon le sens des z une surface s parallèle au plan des x et y, est égale à $-Ks\frac{dv}{dz}$, et la quantité de chaleur qui s'échappe dans le même sens à la superficie, est hsv. Donc on doit avoir $-Ks\frac{dv}{dz}=hsv$. Cette équation

$$\frac{h}{K}v+\frac{dv}{dz}=0$$

doit être satisfaite lorsque $z=l$ et lorsque $z=-l$. Enfin la valeur de la fonction v doit être, par hypothèse, égale à A, lorsqu'on suppose $x=0$, quelles que soient les valeurs de y et z. Ainsi la fonction cherchée v doit être déterminée par les conditions suivantes :

1° Elle satisfait pour toutes les valeurs de x, y, z, à l'équation générale

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{d^2y}+\frac{d^2z}{dz^2}=0\ ;$$

2° Elle satisfait à l'équation $\frac{h}{K}v+\frac{dv}{dy}=0$ lorsque $y=l$ ou $y=-l$, quelles que soient x et z, ou à l'équation $\frac{h}{K}v+\frac{dv}{dz}=0$ lorsque $z=l$ ou $-l$, quelles que soient x et y;

3° Elle satisfait à l'équation $v=A$ lorsque $x=0$, quelles que soient y et z.

14. Un solide de forme cubique, dont tous les points ont acquis une même température, est placé dans un courant uniforme d'air atmosphérique entretenu à la température o. Il s'agit de déterminer les états successifs du corps pendant la durée du refroidissement.

Le centre du cube est pris pour origine des coordonnées rectangulaires. Les trois perpendiculaires abaissées de ce point sur les faces, sont les axes des x, des y et des z; $2l$ est le côté du cube; v est la température à laquelle un point, dont les coordonnées sont x, y, z, se trouve abaissé après le temps t qui s'est écoulé depuis le commencement du refroidissement. La question consiste à déterminer la fonction v, qui contient x, y, z et t. Pour former l'équation générale à laquelle v doit satisfaire, on cherchera quel est le changement de température qu'une portion infiniment petite du solide doit éprouver pendant l'instant δt, en vertu de l'action des molécules semblables qui sont en contact avec elle. On concevra donc une molécule prismatique dont le point le plus voisin des trois plans rectangulaires a pour coordonnées x, y, z, et dont les dimensions sont $\mathrm{D}x$, $\mathrm{d}y$, dz, D, d, d indiquant trois différenciations distinctes. On supposera que le solide est parvenu, après le temps t, à un certain état qui, pendant la durée de l'instant δt, subit une variation infiniment petite. Il s'agit de connaître quelle est cette variation de la température pour une molécule donnée. Or l'état que cette molécule conserve pendant un instant infiniment petit, est celui du prisme rectangulaire, que l'on a considéré dans le Lemme II de l'article 6, page 212; x, y, z sont les coordonnées du point de la molécule qui est le plus voisin des trois axes, et dont la température est désignée par V; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ désignent les coordonnées d'un autre point quelconque dont la température est v. Cette quantité est une fonction de x, y, z et t, désignée par $\varphi(x, y, z, t)$. On a donc

$$v=\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t)$$

pour exprimer la température d'un point quelconque de la molécule après le temps t, ou

$$v=\varphi(x, y, z, t)+\Delta x\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}x}+\Delta y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+\Delta z\frac{dv}{dz}.$$

Cela posé, pour connaître la quantité de chaleur qui, pendant l'instant infiniment petit δt, pénètre dans le prisme infiniment petit en traversant dans le sens des x la première surface de ce prisme, il faut, conformément au Lemme II, multiplier l'étendue $\mathrm{d}y\,dz$ de cette surface par la conductibilite K, par la durée infiniment petite δt, et par le coëfficient $\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}x}$ de Δx dans l'équation linéaire qui représente l'état du prisme, en prenant ce coëfficient avec un signe contraire. Ainsi la molécule infiniment petite placée entre deux autres dans le sens des x, reçoit de celle qui la précède dans ce même sens une quantité de chaleur exprimée par

$$-\mathrm{K}\,\mathrm{d}y\,dz\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}x}\delta t.$$

On trouvera donc celle que la molécule intermédiaire transmet à la suivante, en ajoutant au terme précédent sa différentielle prise par rapport à x. Donc cette différentielle affectée d'un signe contraire, ou $\mathrm{K}\,\mathrm{d}y\,dz\,\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}x}\right)\delta t$, est la quantité de chaleur que la molécule intermédiaire acquiert en vertu de la propagation considérée dans le sens des x.

Pareillement la même molécule qui est placée dans le sens des y entre deux autres, reçoit de celle qui la précède une quantité de chaleur exprimée par

$$-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,dz\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\,\delta t,$$

et transmet à celle qui la suit la quantité exprimée par

$$-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,dz\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\,\delta t-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,dz\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)\delta t.$$

Elle acquiert par conséquent, à raison de sa place dans le sens des y, la quantité

$$\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,dz\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)\delta t.$$

Enfin cette même molécule reçoit de celle qui la précède dans le sens des x, la quantité de chaleur exprimée par

$$-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,\frac{dv}{dz}\,\delta t,$$

et transmet à celle qui la suit la quantité

$$-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,\frac{dv}{dz}\,\delta t-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,d\left(\frac{dv}{dz}\right)\delta t.$$

Elle acquiert donc, en vertu de la propagation dans le sens des z, la quantité

$$\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,d\left(\frac{dv}{dz}\right)\delta t.$$

Ces trois quantités de chaleur réunies déterminent le changement de température de la molécule; et pour connaître la valeur de ce changement qui est désigné par δz, il faut diviser la somme des trois quantités par celle qui est nécessaire pour élever la molécule de la température o à la température 1. Cette dernière quantité est $\mathrm{CD}.\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,dz$. Car C désigne la capacité de chaleur de la substance, D sa densité, et $\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,dz$ le volume de la molécule. On a donc pour exprimer le mouvement de la chaleur dans l'intérieur du solide, l'équation

$$\frac{\mathrm{K}\,\mathrm{d}y\,dz\,\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}x}\right)\delta t+\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,dz\,\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)\delta t+\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,d\left(\frac{dv}{dz}\right)\delta t}{\mathrm{CD}.\mathrm{D}x\,\mathrm{d}y\,dz}=\delta z,$$

ou, suivant les notations ordinaires,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}}\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right]. \qquad \text{(E)}$$

On formera, d'après les mêmes principes, l'équation qui représente le mouvement de la chaleur à la surface du solide. En effet, on a remarqué que la quantité de chaleur qui traverse dans le sens des x pendant l'instant δt la première surface de la molécule prismatique, a pour expression

$$-\mathrm{K}\,\mathrm{d}y\,dz\,\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}x}\,\delta t.$$

Ce résultat, qui s'applique à tous les points du solide, doit avoir lieu aussi lorsque la valeur de x est égale à l, demi-épaisseur du prisme. Dans ce dernier cas, le rectangle $\mathrm{d}y\,dz$ étant placé à la superficie, il est certain que la quantité de chaleur qui le pénètre et se dissipe dans l'air, est exprimée par $h\,\mathrm{d}y\,dz\,.\,v\,\delta t$; on doit donc avoir, lorsque $x=l$, l'équation

$$hv+\mathrm{K}\frac{dv}{dx}=0.$$

Cette condition doit aussi être satisfaite lorsque $x=-l$. On trouvera de même que la quantité de chaleur qui traverse le rectangle $\mathrm{D}xdz$, en suivant le sens des y, étant en général $-\mathrm{K}\,\mathrm{D}x\,dz\,\frac{dv}{dy}$, et celle qui, à la superficie, s'échappe dans l'air à travers ce même rectangle étant $h\mathrm{D}xdz.v\delta t$, il est nécessaire que l'on ait l'équation

$$hv+\mathrm{K}\frac{dv}{dy}=0, \text{ lorsque } y=l \text{ ou } -l.$$

Enfin on obtient pareillement l'équation déterminée

$$hv+\mathrm{K}\,\frac{dv}{dz}=0, \text{ qui est satisfaite lorsque } z=l \text{ ou } -l.$$

Donc la fonction cherchée qui exprime le mouvement varié de la chaleur dans l'intérieur d'un solide de forme cubique, doit être déterminée par les conditions suivantes:

1° Elle satisfait à l'équation générale

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{C\,D}}\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right];$$

2° Elle satisfait aux trois équations déterminées

$$hv+\mathrm{K}\frac{dv}{dx}=0,\ hv+\mathrm{K}\frac{dv}{dy}=0,\ hv+\mathrm{K}\frac{dv}{dz}=0,$$

qui ont lieu lorsque $x=\pm l$, $y=\pm l$, $z=\pm l$.

3° Si dans la fonction v, qui contient x, y, z, t, on fait $t=0$, on doit avoir, selon l'hypothèse, $v=\mathrm{A}$, qui est la valeur initiale et commune de la température.

15. L'équation (E), à laquelle on est parvenu dans la question précédente, représente le mouvement de la chaleur

dans l'intérieur d'un solide quelconque. Quelle que soit en effet la forme du solide, il est manifeste que l'on obtiendrait les mêmes résultats. Ainsi l'équation générale de la propagation de la chaleur dans les corps solides, est celle-ci :

$$\text{(E)} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right].$$

v est une fonction des trois coordonnées x, y, z et du temps t; K est la mesure de la conductibilité spécifique, C est la capacité de chaleur, D la densité. La fonction v doit toujours satisfaire à l'équation générale; mais indépendamment de cette condition commune à tous les cas, il y a plusieurs autres conditions particulières qui dépendent de la forme du corps, des températures initiales, de l'état de la surface, de la nature du milieu, de l'action d'un ou de plusieurs foyers, et de diverses autres circonstances propres à chaque question.

On pourrait déduire de l'équation (E) celles que nous avons déjà trouvées pour représenter le mouvement de la chaleur dans le cylindre et dans la sphère.

Dans le premier cas, désignons par r le rayon variable d'une enveloppe cylindrique quelconque; pour appliquer l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2z}{dz^2}\right],$$

on considérera v comme une fonction de r et t, et r comme une fonction de y et z donnée par l'équation

$$r^2 = z^2 + y^2.$$

Il est évident, en premier lieu, que la variation de v par rapport à x est nulle; ainsi le terme $\frac{d^2 v}{dx^2}$ doit être omis. On aura maintenant, suivant les principes du calcul différentiel, les équations:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dz} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 v}{dr^2}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \frac{dv}{dr}\frac{d^2 r}{dz^2}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dr}\frac{dv}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{d^2 v}{dr^2}\left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + \frac{dv}{dr}\frac{d^2 r}{dy^2};$$

donc

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{d^2 v}{dr^2}\left[\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2\right] + \frac{dv}{dr}\left[\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{d^2 r}{dy^2}\right] \quad (a).$$

Il faut remplacer dans le second membre les quantités $\frac{dr}{dz}$, $\frac{dr}{dy}$, $\frac{d^2 r}{dz^2}$, $\frac{d^2 r}{dy^2}$ par leurs valeurs respectives. Pour cela, on tirera de l'équation $z^2 + y^2 = r^2$,

$$z = r\frac{dr}{dz} \quad \text{et} \quad 1 = \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + r\frac{d^2 r}{dz^2}$$

$$y = r\frac{dr}{dy} \quad \text{et} \quad 1 = \left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + r\frac{d^2 r}{dy^2},$$

et par conséquent

$$z^2 + y^2 = r^2\left[\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2\right]$$

$$2 = \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + r\left(\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{d^2 r}{dy^2}\right).$$

La première, dont le premier membre est égal à r^2, donne

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2 = 1. \quad (b)$$

La seconde donne, lorsqu'on met pour $\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2$ la valeur 1,

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{d^2 r}{dy^2} = \frac{1}{r}. \qquad (c)$$

Si maintenant on subtitue dans l'équation (a) les valeurs données par les équations (b) et (c), on aura

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr};$$

donc l'équation qui exprime le mouvement de la chaleur dans le cylindre est

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right),$$

comme on l'a trouvé précédemment (art. 12).

Pour déterminer au moyen de l'équation générale (E) le mouvement de la chaleur dans une sphère qui a été plongée dans un liquide, on regardera v comme une fonction de r et t, et r comme une fonction de x, y, z donnée par l'équation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; r étant le rayon d'une enveloppe. On écrira ensuite

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dr^2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + \frac{dv}{dr}\cdot\frac{d^2 r}{dx^2}$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{d^2 v}{dr^2}\left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + \frac{dv}{dr}\cdot\frac{d^2 r}{dy^2}$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dz} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 v}{dr^2}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + \frac{dv}{dr}\cdot\frac{d^2 r}{dy^2}.$$

En faisant les substitutions dans l'équation générale

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}\right],$$

on aura

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\left\{\frac{d^2v}{dr^2}\left[\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+\left(\frac{dr}{dy}\right)^2+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]+\frac{dv}{dr}\left(\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{d^2r}{dy^2}+\frac{d^2r}{dz^2}\right)\right\}.\ (a)$$

L'équation $x^2+y^2+z^2=r^2$ donnera

$$x=r\frac{dr}{dx} \quad \text{et} \quad 1=\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+r\frac{d^2r}{dx^2}$$

$$y=r\frac{dr}{dy} \quad \text{et} \quad 1=\left(\frac{dr}{dy}\right)^2+r\frac{d^2r}{dy^2}$$

$$z=r\frac{dr}{dz} \quad \text{et} \quad 1=\left(\frac{dr}{dz}\right)^2+r\frac{d^2r}{dz^2}.$$

Les trois équations du premier ordre donnent

$$x^2+y^2+z^2=r^2\left[\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+\left(\frac{dr}{dy}\right)^2+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right],$$

ou

$$1=\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+\left(\frac{dr}{dy}\right)^2+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2.$$

Les trois équations du second ordre donnent

$$3=\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+\left(\frac{dr}{dy}\right)^2+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2+r\left(\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{d^2r}{dy^2}+\frac{d^2r}{dz^2}\right);$$

et mettant pour $\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+\left(\frac{dr}{dy}\right)^2+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2$ la valeur 1,

$$\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{d^2r}{dy^2}+\frac{d^2r}{dz^2}=\frac{2}{r}.$$

Faisant les substitutions convenables dans l'équation (a), on aura l'équation

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dv}{dr}\right),$$

que l'on avait trouvée précédemment.

Les équations déterminées qui représentent le mouvement de la chaleur à la surface, peuvent aussi être données sous une forme générale applicable à un solide quelconque. Cette équation est la suivante :

$$o = \frac{h}{K} v + \frac{\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dz} - \frac{dv}{dy}\frac{dz}{dy} - \frac{dv}{dx}\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}. \qquad (\varepsilon)$$

$\frac{dv}{dz}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$ sont les coëfficients des différences partielles de v, prises par rapport à z, à y, à x. La surface qui termine le solide est supposée connue et donnée au moyen d'une équation qui fournit z en fonction de y et x. Les coëfficients des différences partielles de z prises dans cette équation de la surface par rapport à y ou à x sont $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$, les termes $\frac{dz}{dz}$ peuvent être remplacés par 1. Le coëfficient h est la mesure de la conducibilité extérieure. Enfin l'équation déterminée (ε) doit avoir lieu lorsqu'on substitue au lieu de x, y, z les valeurs qui conviennent aux points de la surface extérieure. Je ne rapporterai point ici le calcul de cette démonstration, il suffit d'en exposer les principes. Ils ne diffèrent point de ceux que nous avons déja employés, et on peut l'en déduire de plusieurs manières différentes.

Si la fonction v, qui contient x, y, z, t, satisfait aux équations (E), (ε), les variations de la température sont telles qu'elles doivent avoir lieu dans l'intérieur du solide en vertu de l'action mutuelle des molécules, et à la surface extérieure en vertu de l'action du milieu. Ainsi le mouvement régulier qui s'est établi de lui-même immédiatement après l'immersion dans le milieu, est continuellement représenté par les variations successives de la fonction v. Mais si la condition exprimée par l'équation (ε) n'était point satisfaite, les variations de température des points de la surface seraient infiniment plus grandes que celles des points situés dans l'intérieur du solide.

Si l'on applique l'équation (ε) à la question de la sphère, du cylindre, du prisme, etc., on trouvera les mêmes équations déterminées que celles qui ont déja été rapportées, et qui expriment l'état de la surface.

Ainsi la théorie générale de la propagation de la chaleur dans les corps solides terminés par des surfaces données, est fondée sur les deux équations suivantes :

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right).$$

$$\frac{h}{K}v=\frac{\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dz}{dy}-\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dz}}{\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

La première a lieu pour toutes les valeurs de x, y, z; et la seconde, pour les valeurs de x, y, z qui conviennent aux points de la surface.

Telles sont les équations générales du mouvement de la chaleur dans les corps solides. Nous les avons déduites du seul principe de la communication de la chaleur. L'emploi de ce principe n'est pas rigoureusement nécessaire, et l'on peut y suppléer par d'autres considérations; mais il nous a paru préférable de fonder notre théorie sur une vérité de fait qui est admise de tous les physiciens. Il est certain, comme l'a remarqué le premier M. Lambert, de l'académie de Berlin, que si les molécules solides se transmettaient la chaleur, ou la communiquaient à celles de l'air, suivant une autre loi, les températures permanentes d'une barre prismatique échauffée constamment à son extrémité ne seraient point représentées par les ordonnées d'une courbe logarithmique. Or ce dernier résultat a été souvent vérifié : il était indiqué par les observations de Newton et d'Amontons; et des expériences plus précises, faites il y a quelques années par M. Biot, de l'Institut de France, et par M. le comte de Rumford, en ont confirmé l'exactitude.

IV.

De la propagation de la chaleur dans une lame rectangulaire dont les températures sont constantes.

16. On a rapporté dans le chapitre précédent les équations générales de la propagation de la chaleur, et celles qui conviennent aux diverses questions que l'on a traitées; il reste à faire usage de ces équations pour parvenir à la solution complète des différents problèmes auxquels elles se rapportent, et l'on ne peut regarder comme telle que celle dont on peut déduire facilement les valeurs numériques des quantités inconnues. Pour intégrer convenablement ces diverses équations, nous avons eu recours à une analyse particulière, dont la question suivante offre un exemple fort simple. Cette question nous a paru plus propre qu'aucune autre à faire connaître les vrais fondements de la méthode que nous avons suivie.

On suppose qu'une lame rectangulaire, d'une longueur infinie, soit échauffée par son extrémité, et conserve dans tous les points de cette arête une température constante, tandis que chacune des deux arêtes longitudinales perpendiculaires à la première, est aussi assujettie dans tous ses points à une température constante o. Il s'agit de déterminer quelles doivent être les températures stationnaires de chaque point de la lame.

On suppose qu'il ne se fait à la superficie aucune déperdition de chaleur, ou, ce qui est la même chose, on suppose qu'un solide est formé par la superposition d'une infinité de lames pareilles à la précédente, en sorte qu'il est compris entre deux plans parallèles infinis, et une troisième surface terminée par deux lignes droites parallèles. On prend pour l'axe des x la droite qui partage la lame en deux parties égales, et les coordonnées de ses différents points sont x et y.

Concevons qu'un point de la lame qui a pour coordonnées x et y soit actuellement affecté d'une température v, et que les variables v qui correspondent aux différents points soient telles qu'il ne puisse en résulter aucun changement de température, les points de l'arête Y perpendiculaire à l'axe des x retenant une température égale à l'unité, et ceux des deux arêtes X et X', parallèles à cet axe, retenant une température égale à o.

Si l'on élevait pour chaque point dont les coordonnées sont x et y une ordonnée verticale v, égale à la température du point, on formerait une surface qui s'étendrait au-dessus de la lame, et se prolongerait à l'infini vers la droite. C'est la nature de cette surface qu'il s'agit de déterminer. Il est visible que la surface passera par une ligne parallèle élevée au-dessus de l'axe des y, à une distance égale à l'unité, et qu'elle coupera le plan horizontal suivant les deux arètes infinies parallèles aux x.

Pour appliquer l'équation générale

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{C.D}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right),$$

on considérera que, dans le cas dont il s'agit, on fait abstraction d'une coordonnée z, en sorte que le terme $\frac{d^2v}{dz^2}$ est nul. Le premier membre $\frac{dv}{dt}$ s'évanouit aussi, puisqu'on veut déterminer les températures stationnaires. Ainsi l'équation qui convient à la question actuelle, et détermine les propriétés de la surface, est celle-ci :

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0.$$

On recherchera en premier lieu quelles sont les fonctions de x et de y les plus simples qui, étant prises pour v, satisfont à la condition $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0$. Or, il est facile de voir que l'on peut choisir pour v la fonction $ae^{mx}.\cos.ny$, pourvu que l'on ait $m^2=n^2$.

Cette condition sera toujours remplie, si v est égale à $ae^{nx}\cos.ny$ ou à $ae^{-nx}\cos.ny$. Mais on considérera que la première fonction $ae^{nx}\cos.ny$ ne peut point être employée d'après la nature de la question. En effet, si la fonction v avait cette forme, et que n fût un nombre positif, la valeur de v pourrait devenir infiniment grande, lorsque la distance x serait infinie. Or, cela ne doit point avoir lieu, puisque toute la chaleur partant de l'arête Y, et se dissipant par les deux parallèles X, X', il ne s'en transmet qu'une portion infiniment petite dans les points de la lame éloignés du foyer.

On réduira donc la solution précédente à $v = ae^{-nx} \cos. ny$, n étant un nombre positif quelconque, et a une constante indéterminée. On formera maintenant la solution générale en écrivant

$$v = a_1 e^{-n_1 x} \cos. n_1 y + a_2 e^{-n_2 x} \cos. n_2 y + a_3 e^{-n_3 x} \cos. n_3 y + \text{etc.}$$

Cette valeur de v contient deux séries infinies de constantes arbitraires, savoir : a_1, a_2, a_3, etc.; et n_1, n_2, n_3, etc Nous assignerons bientôt les valeurs que doivent avoir ces constantes, pour que la question soit entièrement résolue.

Premièrement on déterminera les valeurs des quantités n_1, n_2, n_3, n_4, etc., en exprimant la condition de l'intersection de la surface cherchée avec les arêtes parallèles. On supposera que la lame est partagée en deux parties égales par l'axe des x, et que sa demi-largeur est égale à 1. Il est nécessaire que, quelle que soit la valeur de x, celle de y s'évanouisse lorsque l'on fait $y = +1$, ou $y = -1$. Cela aura lieu si les quantités $\cos. n_1 y$, $\cos. n_2 y$, $\cos. n_3 y$, etc., se réduisent toutes à zéro, lorsqu'on fait $y = +1$ ou $y = -1$. On ne peut donc prendre pour n_1, n_2, n_3, etc., que des multiples impairs du quart de la circonférence

C'est pourquoi on écrira, au lieu des quantités n_1, n_2, n_3, etc., celles-ci :

$$\frac{1}{2}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi, \text{ etc.}$$

On aura maintenant pour la valeur de v

$$v = a_1 e^{-\frac{\pi}{2}x} \cos.\tfrac{1}{2}\pi y + a_2 e^{-3\frac{\pi}{2}x} \cos.\tfrac{3}{2}\pi y + a_3 e^{-5\frac{\pi}{2}x} \cos.\tfrac{5}{2}\pi y + \text{ etc.}$$

Il reste à déterminer la série infinie des constantes a_1, a_2, a_3, etc., en exprimant que toutes les premières ordonnées doivent être égales à 1. Il faut donc que x étant égal à zéro, v devienne égale à 1, quelque valeur que l'on donne à y. On aura ainsi l'équation

$$1 = a_1 \cos.\frac{1}{2}\pi y + a_2 \cos.\frac{3}{2}\pi y + a_3 \cos.\frac{5}{2}\pi y + a_4 \cos.\frac{7}{2}\pi y + \text{ etc.}$$

qui doit subsister, quelle que puisse être la valeur de y comprise entre 1 et -1. En supposant $\frac{1}{2}\pi y = u$, on aura

$$1 = a_1 \cos. u + a_2 \cos. 3u + a_3 \cos. 5u + a_4 \cos. 7u + \text{ etc.}$$

C'est pourquoi il s'agit de trouver pour a_1, a_2, a_3, a_4, etc., des valeurs telles que le second membre soit toujours équivalent à l'unité, quelle que soit la valeur de u comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{1}{2}\pi$. On pourrait douter qu'il existe de pareilles valeurs de a_1, a_2, a_3, etc., mais cette difficulté sera pleinement éclaircie par la suite.

On a supposé que tous les points de l'arête transversale Y ont une même température. On rendrait la question plus générale en attribuant à chacun des points de cette arète une température fixe, mais différente pour les différents points, les deux arètes longitudinales X et X′ étant toujours retenues à une température nulle. La surface qui aurait dans ce cas pour coordonnées x et y et la température v, passera par les deux arètes parallèles X et X′, et à l'origine par une courbe plane dont les ordonnées représentent les températures des différents points de l'arète Y. Nous supposerons que cette courbe est composée de deux arcs semblables, afin que la surface qui représente l'état de la lame soit divisée en deux parties symétriques ; et nous regarderons d'ailleurs la forme de la courbe comme entièrement arbitraire. L'équation de cette surface sera toujours

$$v=a_1 e^{-\frac{\pi}{2}x}\cos.\frac{\pi}{2}y+a_2 e^{-3\frac{\pi}{2}x}\cos.3\frac{\pi}{2}y+a_3 e^{-5\frac{\pi}{2}x}\cos.5\frac{\pi}{2}y$$

$$+a_4 e^{-7\frac{\pi}{2}x}\cos.7\frac{\pi}{2}y+\text{ etc.};$$

et pour déterminer les coëfficients a_1, a_2, a_3, etc., il faudra assujettir l'équation précédente à représenter les valeurs données de v lorsque $x=0$. On aura donc, en désignant ces valeurs à l'origine par ψy, l'équation

$$\psi y=a_1\cos.\frac{\pi}{2}y+a_2\cos.3\frac{\pi}{2}y+a_3\cos.5\frac{\pi}{2}y+a_4\cos.7\frac{\pi}{2}y+\text{ etc.}$$

Il restera à trouver quelles sont les valeurs que l'on doit donner aux coëfficients a_1, a_2, a_3, etc., pour que l'équation soit satisfaite, quelle que soit la valeur de y comprise entre 1 et -1. Avant de donner la solution de cette question, nous examinerons comment s'opère la transmission de la chaleur dans le cas le plus simple.

Supposons que la température fixe de l'arête Y, au lieu d'être égale à l'unité pour tous ses points, soit d'autant moindre que le point de l'arête est plus éloigné du milieu, et soit proportionnelle au cosinus de cette distance, en sorte que l'équation de la section faite à l'origine dans la surface perpendiculairement à l'axe des x, soit $v=\cos.\frac{1}{2}\pi y$. On déterminerait alors les constantes a_1, a_2, a_3, etc., en prenant $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, etc., et on aurait pour équation de la surface

$$v=e^{-\frac{1}{2}\pi x}\cos.\frac{1}{2}\pi y.$$

Si l'on coupe cette surface perpendiculairement à l'axe des y, on aura un logarithmique dont la convexité est tournée vers l'axe. Si on la coupe perpendiculairement à l'axe des x, on aura une courbe différente qui tourne sa concavité vers l'axe. Il suit de là que le $\frac{d^2v}{dx^2}$ est toujours positif, et que le $\frac{d^2v}{dy^2}$ est toujours négatif. La quantité de chaleur qu'une molécule acquiert à raison de sa place entre deux autres dans le sens de x, étant proportionnelle au $\frac{d^2v}{dx^2}$, il s'ensuit que la molécule intermédiaire reçoit de celle qui la précède plus de chaleur qu'elle n'en communique à celle qui la suit. Mais, si l'on considère cette même molécule comme placée entre deux autres dans le sens des y, le $\frac{d^2v}{dy^2}$ étant négatif, la molécule intermédiaire communique à celle qui la suit plus de chaleur qu'elle n'en reçoit de celle qui la précède. Il arrive alors que l'excédant de chaleur qu'elle tendrait à conserver dans le sens des x, compense ce qu'elle perd dans le sens des y; et cette compensation est exacte, puisque la molécule conserve sa température, comme l'exprime l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2}+\frac{d^2 v}{dy^2}=0.$$

Cette remarque fait connaître la route que suit la chaleur qui passe du foyer dans l'arête Y. Elle se dissipe continuellement en se détournant vers les arêtes X et X'; et la partie qui se transmet d'abord dans le sens des x se décompose elle-même en deux autres, dont l'une descend vers une des arêtes latérales X, X', et l'autre continue de s'éloigner dans le sens des x, pour être décomposée comme la précédente, et ainsi de suite à l'infini.

La surface que nous considérons est engendrée par la courbe trigonométrique qui répond à l'arête Y, et se meut perpendiculairement à l'axe des x en suivant cet axe, tandis que chacune de ces ordonnées décroît à l'infini proportionnellement aux puissances successives d'une même fraction, ou à l'ordonnée d'une logarithmique.

On tire de ce qui précède une conséquence remarquable: elle consiste en ce que dans tous les cas possibles, et quel que soit l'état initial et donné de l'arête Y, la surface dont v est l'ordonnée verticale, se confond toujours dans son cours infini avec la surface particulière dont nous venons de parler, qui a pour équation

$$v=ae^{-\frac{\pi}{2}x}\cos.\frac{\pi}{2}y.$$

En effet, la valeur générale de v étant

$$v=a_1 e^{-\frac{\pi}{2}x}\cos.\frac{\pi}{2}y+a_2 e^{-3\frac{\pi}{2}x}\cos.3\frac{\pi}{2}y+a_3 e^{-5\frac{\pi}{2}x}\cos.5\frac{\pi}{2}y+\text{ etc.}$$

lorsque x devient une quantité de plus en plus grande, chacun des termes de cette valeur devient extrêmement petit par rapport à celui qui le précède; car les quantités a_1, a_2, a_3, etc., étant une fois déterminées, ne varient point avec x. Il s'ensuit que si x est infini, la valeur de v se réduit à $v=a_1 e^{-\frac{\pi}{2}x}\cos.\frac{\pi}{2}y$. Par conséquent la surface qui correspond à la question est terminée dans tous les cas par une nappe infinie, qui est la surface particulière que nous venons de considérer. La figure de la section à l'origine n'influe point sur la nature de cette nappe infinie, elle détermine seulement la forme de la surface vers l'origine. Ainsi, quelles que soient les températures permanentes des différents points de l'arête Y, la chaleur se propage à l'infini dans la partie extrême de la lame suivant la loi que l'on a décrite plus haut, et qui convient au cas particulier où la surface a pour équation

$$v=a_1 e^{-\frac{\pi}{2}x}\cos.\frac{\pi}{2}y.$$

Si l'on conçoit que cette dernière surface est construite, et qu'on la compare à la surface plus générale, qui a lieu lorsque les températures des points de la première arête sont représentées par une fonction quelconque de y, on reconnaîtra que ces deux surfaces tendront de plus en plus à se confondre, et ont une nappe asymptotique commune.

Si l'on considère maintenant la différence

$$v - a_1 e^{-\frac{\pi}{2}x} \cos. \frac{\pi y}{2}$$

des ordonnées verticales de ces deux surfaces, comme l'ordonnée verticale v' d'une nouvelle surface, on aura pour l'équation de cette dernière,

$$v' = a_2 e^{-3\frac{\pi}{2}x} \cos. 3\frac{\pi}{2} + a_3 e^{-5\frac{\pi}{2}x} \cos. 5\frac{\pi}{2}y + \text{ etc.};$$

et il est visible que cette troisième surface a aussi une nappe asymptotique, représentée par l'équation

$$v' = a_2 e^{-3\frac{\pi}{2}x} \cos. 3\frac{\pi}{2}y.$$

On en tirera la même conséquence pour la surface dont l'équation serait

$$v'' = a_3 e^{-5\frac{\pi}{2}x} \cos. 5\frac{\pi}{2}y + a_4 e^{-7\frac{\pi}{2}x} \cos. 7\frac{\pi}{2}y + \text{ etc}$$

v'' désignant la différence $v' - a_2 e^{-3\frac{\pi}{2}x} \cos. 3\frac{\pi}{2}y$, et le même raisonnement s'applique à tous les cas suivants. On voit par là que les surfaces représentées par les équations

$$v = a_1 e^{-\frac{\pi}{2}x} \cos. \frac{\pi}{2}y, \quad v' = a_2 e^{-3\frac{\pi}{2}x} \cos. 3\frac{\pi}{2}y, \quad v'' = a_3 e^{-5\frac{\pi}{2}} \cos. 5\frac{\pi}{2}y, \quad \text{etc.}$$

sont indiquées par la nature même de la question. Elles se retrouvent dans tous les cas individuels, qui diffèrent par l'état de la première arête.

Si cet état à l'origine est tel que l'on ait, x étant nul, $v = a_1 \cos. \frac{\pi}{2} y$, l'état de la lame sera représenté par l'équation

$$v = a_1 e^{-\frac{\pi}{2} x} \cos. \frac{\pi}{2} y.$$

Si les températures de la première arète sont telles que l'on ait $v = a_3 \cos. 3\frac{\pi}{2} y$, les températures des autres points seront données par l'équation

$$v = a_3 e^{3\frac{\pi}{2} x} \cos. \frac{3\pi}{2}, \text{ etc.}$$

Ainsi chacune de ces équations constitue un mode propre et élémentaire, suivant lequel la chaleur peut se propager dans l'intérieur d'une lame solide. Si l'un quelconque de ces modes est établi à l'origine, il subsiste de lui-même, et se conserve à l'infini jusqu'aux extrémités de la lame. Mais cela n'arrive que lorsque les températures à l'origine v satisfont à l'équation $v = a \cos. n \frac{\pi}{2} y$, n étant un nombre entier impair. Dans tous les autres cas, la surface dont les ordonnées v représentent les températures, se déforme successivement à mesure qu'elle s'éloigne de l'origine, et finit toujours par se confondre avec l'une des surfaces dont nous avons rapporté les équations. La loi suivant laquelle la chaleur se propage, qui est d'abord très-composée vers l'origine, devient de plus en plus simple, et se confond avec une des lois élémentaires exprimées par les équations

$$v = a_1 e^{-\frac{\pi}{2} x} \cos. \frac{\pi}{2} y,\; v = a_1 e^{-3\frac{\pi}{2} x} \cos. 3\frac{\pi}{2} y,\; v = a_3 e^{-5\frac{\pi}{2} x} \cos. 5\frac{\pi}{2} y, \text{ etc.}$$

Nous venons de remarquer que les termes dont la valeur générale de la fonction v se compose, ne peuvent pas être choisis arbitrairement, et que la forme que l'on doit donner à l'intégrale dérive en quelque sorte de la nature physique de la question. Quant au nombre des termes qui entrent dans la valeur de v, il dépend de l'espèce de la courbe qui représente les températures à l'origine. Il y a des cas particuliers où quelques-uns de ces termes suffisent. En général ce nombre est indéterminé, et on doit le regarder comme infini, parce que la fonction φy est arbitraire.

17. Il nous reste à déterminer les constantes a_1, a_2, a_3, a_4, etc., qui entrent dans l'équation générale

$$v = a_1 e^{-\frac{\pi}{2}x} \cos.\frac{\pi}{2}y + a_2 e^{-3\frac{\pi}{2}x} \cos.3\frac{\pi}{2}y + a_3 e^{-5\frac{\pi}{2}x} \cos.5\frac{\pi}{2}y + \text{etc.}$$

On traitera en premier lieu le cas qui se rapporte à la question présenté, où tous les points de la première arête ont une température commune 1.

La condition qui sert à déterminer ces coëfficients, que l'on désignera par a, b, c, d, etc., consiste en ce que l'abscisse x étant supposée nulle, la valeur du second membre doit être égale à l'unité, quelle que soit la valeur de y comprise entre 1 et -1. On doit donc avoir

$$1 = a\cos.\frac{\pi}{2}y + b\cos.3\frac{\pi}{2}y + c\cos.5\frac{\pi}{2}y + d\cos.7\frac{\pi}{2}y + \text{etc.};$$

ou supposant $\frac{1}{2}\pi y = u$, u devant être comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{1}{2}\pi$,

$$1 = a\cos.u + b\cos.3u + c\cos.5u + d\cos.7u + \text{etc.}$$

Pour que l'équation dont il s'agit subsiste, il est nécessaire que les constantes satisfassent aux équations que l'on obtient par des différentiations successives, ce qui donne les résultats suivants :

$$
\begin{aligned}
1 &= a\cos.u + b\cos.3u + c\cos.5u + d\cos.7u + \text{etc.}\\
0 &= a\sin.u + 3\,b\sin.3u + 5\,c\sin.5u + 7\,d\sin.7u + \text{etc.}\\
0 &= a\cos.u + 3^2 b\cos.3u + 5^2 c\cos.5u + 7^2 d\sin.7u + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

ainsi de suite à l'infini.

Ces équations devant aussi avoir lieu lorsque $u=0$, on aura

$$
\begin{aligned}
a + b + c + d + e + f + g + \ldots &= 1\\
a + 3^2 b + 5^2 c + 7\ d + 9\ e + 11 f + \ldots\ldots &= 0\\
a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0\\
a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0\\
a + 3^8 b + 5^8 c + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0\\
a + 3^{10} b + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0\\
a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0
\end{aligned}
$$

Le nombre de ces équations est infini, comme celui des indéterminées a, b, c, d, e, etc.

Pour se former une idée distincte du résultat de ces éliminations, on supposera que le nombre des inconnues a, b, c, d, etc. est d'abord déterminé et égal à m; on emploiera les m premières équations seulement, en effaçant tous les termes où se trouvent les inconnues qui suivent les m premières. Si l'on fait successivement $m=2$, $m=3$, $m=4$, $m=5$, etc., à l'infini, on trouvera dans chacune de ces suppositions les valeurs des indéterminées. La quantité a, par exemple, recevra une valeur pour le cas de deux inconnues, une autre pour le cas de trois inconnues, une troisième pour le cas de quatre inconnues, ainsi de suite. Il en sera de même de l'indéterminée b, qui recevra autant de valeurs différentes que l'on aura effectué de fois l'élimination. Chacune des autres indéterminées est pareillement susceptible d'une infinité de valeurs différentes. Or la valeur d'une de ces inconnues, pour le cas où leur nombre est infini, est la limite vers laquelle tendent continuellement les valeurs qu'elle reçoit au moyen des éliminations successives. Il s'agit donc d'examiner si, à mesure que le nombre des inconnues augmente, chacune des valeurs de a, b, c, d, e, etc., ne converge point vers une limite finie dont elle approche continuellement.

Supposons que l'on emploie les sept équations suivantes:

$$\begin{array}{l}
a + b + c + d + e + f + \qquad = 1 \\
a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + 13^2 g = 0 \\
a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + 11^4 f + 13^4 g = 0 \\
a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + 9^6 e + 11^6 f + 13^6 g = 0 \\
a + 3^8 b + 5^8 c + 7^8 d + 9^8 e + 11^8 f + 13^8 g = 0 \\
a + 3^{10} b + 5^{10} c + 7^{10} d + 9^{10} e + 11^{10} f + 13^{10} g = 0 \\
a + 3^{12} b + 5^{12} c + 7^{12} d + 9^{12} e + 11^{12} f + 13^{12} g = 0.
\end{array}$$

Les six équations qui ne contiennent plus g sont:

$$\begin{array}{l}
a(13^2-1^2) + b(13^2-3^2) + c(13^2-5^2) + d(13^2-7^2) + e(13^2-9^2) + f(13^2-11^2) = 13^2 \\
a(13^2-1^2) + 3^2 b(13^2-3^2) + 5^2 c(13^2-5^2) + 7^2 d(13^2-7^2) + 9^2 e(13^2-9^2) + 11^2 f(13^2-11^2) = 0 \\
a(13^2-1^2) + 3^4 b(13^2-3^2) + 5^4 c(13^2-5^2) + 7^4 d(13^2-7^2) + 9^4 e(13^2-9^2) + 11^4 f(13^2-11^2) = 0 \\
a(13^2-1^2) + 3^6 b(13^2-3^2) + 5^6 c(13^2-5^2) + 7^6 d(13^2-7^2) + 9^6 e(13^2-9^2) + 11^6 f(13^2-11^2) = 0 \\
a(13^2-1^2) + 3^8 b(13^2-3^2) + 5^8 c(13^2-5^2) + 7^8 d(13^2-7^2) + 9^8 e(13^2-9^2) + 11^8 f(13^2-11^2) = 0 \\
a(13^2-1^2) + 3^{10} b(13^2-3^2) + 5^{10} c(13^2-5^2) + 7^{10} d(13^2-7^2) + 9^{10} e(13^2-9^2) + 11^{10} f(13^2-11^2) = 0.
\end{array}$$

En continuant l'élimination, on obtiendra l'équation finale en a, qui est :

$$a\,(13^2-1^2)(11^2-1^2)(9^2-1^2)(7^2-1^2)(5^2-1^2)(3^2-1^2)=13^2.11^2.9^2.7^2.5^2.3^2.1^2.$$

Si l'on avait employé un nombre d'équations plus grand d'une unité, on aurait trouvé pour déterminer a une équation analogue à la précédente, ayant au premier membre un facteur de plus, savoir (15^2-1^2), et au second membre 15^2 pour nouveau facteur. La loi à laquelle ces différentes valeurs de a sont assujetties est évidente; et il s'ensuit que la valeur de a, qui correspond à un nombre infini d'équations, est exprimée ainsi :

$$a=\frac{3^2\;.\;5^2\;.\;7^2\;.\;9^2\;.\;11^2\;.\;13^2\;\ldots}{(3^2-1)(5^2-1)(7^2-1)(9^2-1)(11^2-1)(13^2-1)\ldots},$$

ou

$$a=\frac{3.3\;.\;5.5\;.\;7.7\;.\;9.9\;.\;11.11\;.\;13.13\ldots}{2.4\;.\;4.6\;.\;6.8\;.\;8.10\;.\;10.12\;.\;12.14\ldots}.$$

Or cette dernière est connue, et, suivant le théorème de Wallis, on trouve $a=\frac{4}{\pi}$. Il s'agit maintenant de connaître les valeurs des autres indéterminées b, c, d, etc.

Les six équations qui restent après l'élimination de g, peuvent être comparées aux six équations plus simples que l'on aurait employées, s'il n'y avait eu que six inconnues. Ces dernières équations diffèrent des précédentes, en ce que dans ces dernières les lettres f, e, d, c, b, a se trouvent multipliées respectivement par les facteurs

$$\frac{13^2-11^2}{13^2},\;\frac{13^2-9^2}{13^2},\;\frac{13^2-7^2}{13^2},\;\frac{13^2-5^2}{13^2},\;\frac{13^2-3^2}{13^2},\;\frac{13^2-1^2}{13^2}.$$

Il suit de là que si l'on avait résolu les six équations linéaires que l'on doit employer dans le cas de six indéterminées, et que l'on eût calculé la valeur de chaque inconnue, il serait facile d'en conclure la valeur des mêmes indéterminées correspondantes au cas où l'on aurait employé sept équations. Il suffirait de multiplier les valeurs de f, e, d, c, b, a, trouvées dans le premier cas, par les facteurs respectifs

$$\frac{13^2}{13^2-11^2},\ \frac{13^2}{13^2-9^2},\ \frac{13^2}{13^2-7^2},\ \frac{13^2}{13^2-5^2},\ \frac{13^2}{13^2-3^2},\ \frac{13^2}{13^2-1^2}.$$

Il sera aisé en général de passer de la valeur de l'une des quantités, prise dans la supposition d'un certain nombre d'équations et d'inconnues, à la valeur de la même quantité prise dans le cas où il y aurait une inconnue et une équation de plus. Par exemple, si la valeur de f, trouvée dans l'hypothèse de six équations et six inconnues, est représentée par F, celle de la même lettre prise dans le cas d'une inconnue de plus sera $F\cdot\frac{13^2}{13^2-11^2}$. Cette même valeur, prise dans le cas de huit inconnues, sera par la même raison

$$F\frac{13^2}{13^2-11^2}\cdot\frac{15^2}{15^2-11^2};$$

et dans le cas de neuf inconnues, elle sera

$$F\frac{13^2}{13^2-11^2}\cdot\frac{15^2}{15^2-11^2}\cdot\frac{17^2}{17^2-11^2};$$

ainsi de suite. Il suffira de même de connaître la valeur de b correspondante au cas de deux inconnues, pour en conclure celle de la même lettre qui correspond au cas de trois, quatre, cinq inconnues. On aura seulement à multiplier cette première valeur de b par

$$\frac{5^2}{5^2-3^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-3^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-3^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-3^2};$$

ainsi de suite. Pareillement, si l'on connaît la valeur de c pour le cas de trois inconnues, on multipliera cette valeur par les facteurs successifs

$$\frac{7^2}{9^2-5^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-5^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-5^2}.$$

On calculera de même la valeur de d pour le cas de quatre inconnues seulement, et on multipliera cette valeur par

$$\frac{9^2}{9^2-7^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-7^2}\cdot\frac{13^2}{13^2-7^2}\cdot\frac{15^2}{15^2-7^2};$$

ainsi de suite. Le calcul de la valeur de a est assujetti à la même règle; car si on prend cette valeur pour le cas d'une seule inconnue, et qu'on la multiplie successivement par

$$\frac{3^2}{3^2-1^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-1^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-1^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-1^2}.$$

on trouve la valeur finale de cette quantité.

La question est donc réduite à déterminer la valeur de a dans le cas d'une inconnue, la valeur de b dans le cas de deux inconnues, celle de c dans le cas de trois inconnues, et ainsi de suite pour les autres inconnues. Il est facile de juger, à l'inspection seule des équations, que les résultats de ces éliminations successives doivent être :

$$a = 1$$

$$b = \frac{1^2}{1^2 - 3^2}$$

$$c = \frac{1^2 \quad . \quad 3^2}{(1^2 - 5^2)(3^2 - 5^2)}$$

$$d = \frac{1^2 \quad . \quad 3^2 \quad . \quad 5^2}{(1^2 - 7^2)(3^2 - 7^2)(5^2 - 7^2)}$$

$$e = \frac{1^2 \quad . \quad 3^2 \quad . \quad 5^2 \quad . \quad 7^2}{(1^2 - 9^2)(3^2 - 9^2)(5^2 - 9^2)(7^2 - 9^2)}$$

Il ne reste qu'à multiplier les quantités précédentes par les séries des produits qui doivent les compléter, et que nous avons données plus haut. On aura en conséquence pour les valeurs finales des inconnues *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, etc., les expressions suivantes

$$a = 1 \cdot \frac{3^2}{(3^2-1^2)} \cdot \frac{5^2}{(5^2-1^2)} \cdot \frac{7^2}{(7^2-1^2)} \cdot \frac{9^2}{(9^2-1^2)} \cdot \frac{11^2}{(11^2-1^2)} \cdots\cdots\cdots$$

$$b = \frac{1^2}{(1^2-3^2)} \cdot \frac{5^2}{(5^2-1^2)} \cdot \frac{7^2}{(7^2-3^2)} \cdot \frac{9^2}{(9^2-3^2)} \cdot \frac{11^2}{(11^2-3^2)} \cdots\cdots\cdots$$

$$c = \frac{1^2 \quad . \quad 3^2}{(1^2-5^2)(3^2-5^2)} \cdot \frac{7^2}{(7^2-5^2)} \cdot \frac{9^2}{(9^2-5^2)} \cdot \frac{11^2}{(11^2-5^2)} \cdots\cdots\cdots$$

$$d = \frac{1^2 \quad . \quad 3^2 \quad . \quad 5^2}{(1^2-7^2)(3^2-7^2)(5^2-7^2)} \cdot \frac{9^2}{(9^2-7^2)} \cdot \frac{11^2}{(11^2-7^2)} \cdot \frac{13^2}{(13^2-7^2)} \cdots\cdots\cdots$$

$$e = \frac{1^2 \quad . \quad 3^2 \quad . \quad 5^2 \quad . \quad 7^2}{(1^2-9^2)(3^2-9^2)(5^2-9^2)(7^2-9^2)} \cdot \frac{11^2}{(11^2-9^2)} \cdot \frac{13^2}{(13^2-9^2)} \cdot \frac{15^2}{(15^2-9^2)} \cdots\cdots\cdots$$

$$f = \frac{1^2 \quad . \quad 3^2 \quad . \quad 5^2 \quad . \quad 7^2 \quad . \quad 9^2}{(1^2-11^2)(3^2-11^2)(5^2-11^2)(7^2-11^2)(9^2-11^2)} \cdot \frac{13^2}{(13^2-11^2)} \cdot \frac{15^2}{(15^2-11^2)} \cdot \frac{17^2}{(17^2-11^2)};$$

ou

$$a = 1 \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{5.5}{4.6} \cdot \frac{7.7}{6.8} \cdot \frac{9.9}{8.10} \cdot \frac{11.11}{10.12} \cdots\cdots$$

$$b = -\frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{5.5}{2.8} \cdot \frac{7.7}{4.10} \cdot \frac{9.9}{6.12} \cdot \frac{11.11}{8-14} \cdots\cdots$$

$$c = \frac{1.1.3.3}{4.6.2.8} \cdot \frac{7.7}{2.12} \cdot \frac{9.9}{4.14} \cdot \frac{11.11}{6.16} \cdots\cdots$$

$$d = -\frac{1.1.3.3.5.5}{6.8.4.10.2.12} \cdot \frac{9.9}{2.16} \cdot \frac{11.11}{4.18} \cdot \frac{13.13}{16.20} \cdots\cdots$$

$$e = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{8.10.6.12.4.14.2.16} \cdot \frac{11.11}{2.20} \cdot \frac{13.13}{4.22} \cdot \frac{15.15}{6.24} \cdots\cdots$$

$$f = -\frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9}{10.12.8.14.6.16.4.18.2.20} \cdot \frac{13.13}{2.24} \cdot \frac{15.15}{4.26} \cdot \frac{17.17}{6.28} \cdots$$

La quantité $\frac{1}{2}\pi$, ou le quart de la circonférence, équivaut, suivant le théorème de Wallis, à

$$\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.14.14\ldots\ldots}{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13.13\ldots\ldots}.$$

Si l'on remarque maintenant quels sont, dans les valeurs de a, b, c, d, etc., les facteurs que l'on doit écrire aux numérateurs et aux dénominateurs, pour y compléter la double série des nombres impairs et des nombres pairs, on trouvera que les facteurs à suppléer sont :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pour } b, & \frac{3.3}{6} \\ \text{Pour } c, & \frac{5.5}{10} \\ \text{Pour } d, & \frac{7.7}{14} \\ \text{Pour } e, & \frac{9.9}{18} \\ \text{Pour } f, & \frac{11.11}{22} \\ \text{etc.} & \end{array}\right\}; \quad \text{et l'on en conclut} \quad \left\{\begin{array}{l} a = 2.\frac{2}{\pi} \\ b = -2.\frac{2}{3\pi} \\ c = 2.\frac{2}{5\pi} \\ d = -2.\frac{2}{7\pi} \\ e = 2.\frac{2}{9\pi} \\ f = -2.\frac{2}{11\pi} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

C'est ainsi qu'on est parvenu à effectuer entièrement les éliminations, et à déterminer les coëfficients a_1, a_2, a_3, a_4, etc. de l'équation

$$1 = a_1 \cos. u + a_2 \cos. 3u + a_3 \cos. 5u + a_4 \cos. 7u + \text{ etc.}$$

La substitution de ces coëfficients donne l'équation suivante :

$$\frac{\pi}{4} = \cos. u - \frac{1}{3}\cos. 3u + \frac{1}{5}\cos. 5u - \frac{1}{7}\cos. 7u + \text{ etc.}$$

Le second membre de cette équation est une fonction de u qui ne change point de valeur quand on donne à la variable u une valeur comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{1}{2}\pi$, et il serait aisé de prouver que cette série est toujours convergente. On reconnaît facilement aussi que cette même série convergente

$$\cos. u - \frac{1}{3}\cos. 3u + \frac{1}{5}\cos. 5u - \frac{1}{7}\cos. 7u + \text{ etc.},$$

qui est égale à $\frac{\pi}{4}$, quel que soit l'arc u, pourvu qu'il soit compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, a pour valeur $-\frac{\pi}{4}$ toutes les fois que l'arc u est comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$.

L'équation

$$y = \cos. u - \frac{1}{3}\cos. 3u + \frac{1}{5}\cos. 5u - \frac{1}{7}\cos. 7u + \text{ etc.}$$

appartient à une ligne qui, ayant u pour abscisse et y pour ordonnée, est composée de droites séparées, dont chacune est parallèle à l'axe, et égale à la demi-circonférence : ces parallèles sont placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe à la distance 1, et jointes par des perpendiculaires qui font elles-mêmes partie de la ligne. Pour se former une idée exacte de la nature de cette ligne, il faut supposer que le nombre des termes de la fonction

$$\cos. u - \frac{1}{3}\cos. 3u + \frac{1}{5}\cos. 5u - \frac{1}{7}\cos. 7u + \text{etc.}$$

reçoit d'abord une valeur déterminée. Dans ce dernier cas, l'équation

$$y = \cos. u - \frac{1}{3}\cos. 3u + \frac{1}{5}\cos. 5u - \frac{1}{7}\cos. 7u + \text{etc.}$$

appartient à une ligne courbe qui passe alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe, en le coupant toutes les fois que l'abscisse u devient égale à l'une des quantités

$$0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5\frac{\pi}{2}, \text{etc.}$$

A mesure que le nombre des termes de l'équation augmente, la courbe dont il s'agit tend de plus en plus à se confondre avec la ligne précédente, composées de droites parallèles et de droites perpendiculaires; en sorte que cette ligne est la véritable limite des différentes courbes que l'on obtiendrait en augmentant successivement le nombre des termes.

18. On peut envisager ces mêmes équations sous un autre point de vue, et vérifier immédiatement l'équation

$$\frac{\pi}{4} = \cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x + \text{etc.}$$

La quantité $\cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x + \text{etc.}$ est une fonction de x dont la valeur dépend du nombre des termes qui entrent dans son expression. On peut donc la considérer comme une fonction de x et de m, m étant le nombre des termes.

Soit y la fonction cherchée qui est donnée par l'équation

$$y = \cos. x - \tfrac{1}{3}\cos. 3x + \tfrac{1}{5}\cos. 5x - \tfrac{1}{7}\cos. 7x + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2m-1}\cos.(2m-1)x,$$

le nombre m des termes étant supposé pair. En différentiant cette équation par rapport à x on aura,

$$-\frac{dy}{dx} = \sin. x - \sin. 3x + \sin. 5x - \sin. 7x + \ldots$$
$$+ \sin.(2m-3)x - \sin.(2m-1)x.$$

On multipliera chaque terme par $2\sin. 2x$, afin qu'il devienne un produit de sinus, qu'on pourra remplacer par la différence de deux cosinus; et l'on aura ainsi, après les réductions,

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{\sin. 2mx}{\cos. x}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{2}\int dx \frac{\sin. 2mx}{\cos. x}.$$

On intégrera le second membre par parties, en distinguant dans l'intégrale $\int \frac{1}{\cos. x}\sin. 2mx.dx$ la quantité $\sin. 2mx.dx$, qui doit être intégrée successivement, et la quantité $\frac{1}{\cos. x}$, ou $\sec. x$, que l'on doit différentier successivement. Désignant les résultats de ces différentiations successives par $\sec.' x$, $\sec.'' x$, $\sec.''' x$, etc., on aura

$$y = C - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2m}\cos. 2mx \sec. x + \frac{1}{2^2m^2}\sin. 2mx \sec.' x - \frac{1}{2^3m^3}\cos. 2mx \sec.'' x + \ldots\right.$$

Ainsi la fonction y, ou $\cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \text{etc.}$

est résolue en une série infinie qui renferme dans ses coëfficients les puissances négatives du nombre des termes. Il est visible maintenant que plus le nombre m augmente, plus la valeur de y approche de celle de la constante C. C'est pourquoi, lorsque le nombre m est infini, la quantité

$$\cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x + \text{ etc.}$$

a une valeur constante et indépendante de x. Or, si on suppose l'arc x nul, la fonction se réduit à $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{ etc.}$, qui est la série donnée par Leibnitz pour la valeur de $\frac{1}{4}\pi$. Donc on aura généralement

$$(n) \qquad \frac{1}{4}\pi = \cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x + \text{ etc.}$$

Si dans l'équation (n) on suppose $x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{15}{95} + \text{ etc.}$$

En donnant à l'arc x d'autres valeurs particulières, on trouvera d'autres séries qu'il est inutile de rapporter, et dont plusieurs ont déjà été publiées dans les ouvrages d'Euler. Si on multiplie l'équation (n) par dx, et que l'on intègre, on aura

$$\frac{\pi x}{4} = \sin. x - \frac{1}{3^2}\sin. 3x + \frac{1}{5^2}\sin. 5x - \frac{1}{7^2}\sin. 7x + \text{ etc.}$$

En faisant dans cette équation $x=\frac{1}{2}\pi$, on trouve

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\text{ etc.},$$

série déjà connue. On pourrait énumérer à l'infini ces cas particuliers, mais il convient mieux à l'objet de ce Mémoire de déterminer, en suivant le même procédé, les valeurs de diverses séries formées de sinus ou de cosinus d'arcs multiples.

19. Soit, par exemple,

$$y=\sin.x-\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x-\frac{1}{4}\sin.4x+\ldots.$$
$$+\frac{1}{m-1}\sin.(m-1)x-\frac{1}{m}\sin.mx,$$

m étant un nombre pair quelconque. On tire de cette équation

$$\frac{dy}{dx}=\cos.x-\cos.2x+\cos.3x\ldots+\cos.(m-1)x-\cos.mx.$$

Si on multiplie les deux membres par $2\sin.x$, et qu'on fasse les réductions, on aura

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}-\frac{\cos.(m+\frac{1}{2})x}{2\cos.\frac{1}{2}x}.$$

Donc

$$y=\frac{1}{2}x-\int\frac{\cos.(m+\frac{1}{2})x.dx}{\cos.\frac{1}{2}x}=C+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\frac{\sin.(m+\frac{1}{2})x}{\cos.(\frac{1}{2}+x)}+\text{ etc}$$

et si m est infini, on aura $y=C+\frac{1}{2}x$. La valeur de y étant nulle en même temps que x, la constante est nulle ; et l'on trouve

$$\tfrac{1}{2}x = \sin.x - \tfrac{1}{2}\sin.2x + \tfrac{1}{3}\sin.3x - \tfrac{1}{4}\sin.4x + \text{etc.},$$

équation connue. On pourrait aussi déduire facilement de cette dernière série, celle que nous avons donnée plus haut la valeur de $\frac{\pi}{4}$.

Soit maintenant

$$y = \tfrac{1}{2}\cos.2x - \tfrac{1}{4}\cos.4x + \tfrac{1}{6}\cos.6x - \tfrac{1}{8}\cos.8x + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{2n-2}\cos.(2n-2)x - \frac{1}{2n}\cos.2nx.$$

Différentiant, multipliant par $2\sin.2x$, substituant les différences de cosinus et réduisant, on aura

$$2\frac{dy}{dx} = -\text{tang}.x + \frac{\sin.(2n+1)x}{\cos.x}.$$

Donc

$$2y = C - \int \text{tang}\,x.dx - \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\cos.(2n+1)x}{\cos.x} + \frac{1}{2n+1}\int\cos.(2n+1)x\left(d\frac{1}{\cos.x}\right).$$

Si n est infini, on aura

$$y = C - \tfrac{1}{2}\int \text{tang}.x.dx = C + \tfrac{1}{2}\log.\cos.x.$$

Si, dans l'équation

$$y = \tfrac{1}{2}\cos.x - \tfrac{1}{4}\cos.4x + \tfrac{1}{6}\cos.6x - \tfrac{1}{8}\cos.8x + \text{etc.}$$

on suppose x nulle, on aura

$$y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \text{etc}$$

Donc $$y = \tfrac{1}{2}\log.2 + \tfrac{1}{2}\log.\cos.x.$$

On parvient ainsi à la série donnée par Euler:

$$\log. 2\cos.\left(\frac{z}{2}\right) = \cos. z - \frac{1}{2}\cos. 2z + \frac{1}{3}\cos. 3z - \frac{1}{4}\cos. 4z + \text{etc}$$

En appliquant le même procédé à l'équation

$$y = \sin. x + \frac{1}{3}\sin. 3x + \frac{1}{5}\sin. 5x + \frac{1}{7}\cos. 7x + \text{etc.},$$

on trouvera la série suivante, qui n'avait pas été remarquée,

$$\frac{1}{4}\pi = \sin. x + \frac{1}{3}\sin. 3x + \frac{1}{5}\sin. 5x + \frac{1}{7}\sin. 7x + \text{etc.}$$

20. Il faut observer, à l'égard de toutes ces séries, que les équations qui les contiennent n'ont point lieu de la même manière pour toutes les valeurs de la variable; et que les valeurs de ces séries convergentes, exprimées en sinus ou cosinus d'arcs multiples, changent de signe comme la fonction $\cos. x - \frac{1}{2}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \ldots$, qui est alternativement équivalente à $\frac{\pi}{4}$ et à $-\frac{\pi}{4}$. Par exemple, la fonction

$$\sin. x - \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x - \frac{1}{4}\sin. 4x + \text{etc.}$$

donne la valeur de $\frac{1}{2}x$, tant que l'arc x est plus grand que o et moindre que π. Elle devient nulle à la fin de cet intervalle; et au-delà, elle reprend les valeurs précédentes avec le signe contraire.

Ces résultats étant fondés sur le développement des quantités en séries infinies, on pourrait les regarder comme n'étant point rigoureusement prouvés. Mais il est facile de prévenir cette objection en déterminant les limites de la somme des derniers termes dont le nombre est infini. On a vu plus haut que l'équation

$$y = \cos. x - \tfrac{1}{3}\cos. 3x + \tfrac{1}{5}\cos. 5x - \tfrac{1}{7}\cos 7x + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2m-3}\cos.(2m-3)x - \frac{1}{2m-1}\cos.(2m-1)x,$$

dans laquelle m représente le nombre de termes, fournit celle-ci :

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{\sin. 2mx}{\cos. x};$$

d'où l'on peut tirer la valeur de y, en intégrant par parties. Or l'intégrale $\int uv\,dx$ peut être résolue en une série composée d'autant de termes qu'on voudra, u et v étant des fonctions de x. On peut écrire, par exemple,

$$\int uv\,dx = C + u\int v\,dx - \frac{du}{dx}\int dx\int v\,dx + \frac{d^2u}{dx^2}\int dx\int dx\int v\,dx$$
$$- \int\left[d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\int dx\int dx\int v\,dx\right],$$

équation qui se vérifie d'elle-même par la différentiation. En désignant $\sin. 2mx$ par v, et $\sec. x$ par u, on trouvera

$$2y = C - \sec. x\cos. 2mx + \sec.' x\frac{1}{2^2m^2}\sin. 2mx + \sec'' x\cos. 2mx$$
$$- \int\left[d(\sec.'' x)\frac{1}{2^3m^3}\cos. 2mx\right].$$

Il s'agit maintenant de connaître les limites entre lesquelles est toujours comprise l'intégrale $\frac{1}{2^3m^3}\int\left[d(\sec.'' x)\cos. 2mx\right]$, qui complète la série. Pour former cette intégrale, il faudrait donner à l'arc x une infinité de valeurs depuis o, terme où l'intégrale commence, jusqu'à x, qui est la valeur finale de l'arc, déterminer pour chacune des valeurs de x celles de la différentielle $d\,(\text{sec.}''x)$, et celle du facteur $\cos. 2mx$, et ajouter tous les produits partiels. Or le facteur variable $\cos. 2mx$ est nécessairement une fraction positive ou négative; par conséquent l'intégrale se compose de la somme des valeurs variables de la différentielle $d\,(\text{sec.}''x)$, multipliées respectivement par des fractions. La valeur totale de cette intégrale est donc moindre que la somme des différentielles $d(\text{sec.}''x)$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$, et elle est plus grande que cette même somme prise négativement; car, dans le premier cas, on remplace le facteur variable $\cos. 2mx$ par la quantité constante 1; et dans le second cas, on remplace ce facteur par -1. Or cette somme des différentielles $d(\text{sec.}''x)$, ou, ce qui est la même chose, l'intégrale $\int d(\text{sec.}''x)$, prise depuis $x=0$, est

$$\text{sec.}''x - \text{sec.}''0.$$

L'intégrale cherchée est donc comprise entre

$$\text{sec.}''x - \text{sec.}''0 \qquad \text{et} \qquad -(\text{sec}''x - \text{sec.}''0),$$

c'est-à-dire qu'en représentant par K une fraction inconnue positive ou négative, on aura toujours

$$\int\left[d(\text{sec.}''x)\cos 2mx\right] = \text{K}\left[\text{sec.}''x - \text{sec.}''0\right].$$

On parvient ainsi à l'équation

$$2y = \text{C} - \frac{1}{2m}\,\text{sec.}\,x\cos. 2mx + \frac{1}{2^2m^2}\,\text{sec.}'x\sin. 2mx$$
$$+ \frac{1}{2^3m^3}\,\text{sec.}''x\cos. 2mx + \frac{\text{K}}{2^3m^3}\,(\text{sec.}''x - \text{sec.}''0);$$

équation dans laquelle la quantité $\frac{K}{2^3 m^3}(\sec.'' x - \sec.'' o)$ exprime exactement la somme de tous les derniers termes de la série infinie. Si l'on eût cherché deux termes seulement, on aurait eu l'équation

$$2y = C - \frac{1}{2m}\sec. x \cos. 2mx + \frac{1}{2^2 m^2}\sec.' x \sin. 2mx + \frac{K}{2^2 m^2}(\sec.'' x - \sec.'' o).$$

Il résulte de là que l'on peut développer la valeur de y en autant de termes que l'on voudra, et exprimer exactement le reste de la série. On trouve ainsi cette suite d'équations:

$$2y = C - \frac{1}{2m}\sec. x \cos. 2mx + \frac{K}{2m}(\sec. x - \sec. o)$$

$$2y = C - \frac{1}{2m}\sec. x \cos. 2mx + \frac{1}{2^2 m^2}\sec.' x \sin. 2mx + \frac{K}{2^2 m^2}(\sec.' x - \sec.' o)$$

$$2y = C - \frac{1}{2m}\sec. x \cos. 2mx + \frac{1}{2^2 m^2}\sec.' x \sin. 2mx + \frac{1}{2^3 m^3}\sec.'' x \cos. 2mx + \frac{K}{2^3 m^3}(\sec.'' x - \sec.'' o).$$

Le nombre K, qui entre dans ces équations, n'est pas le même pour toutes, et il représente dans chacune une certaine quantité qui est toujours comprise entre 1 et -1; m est égal au nombre des termes qui entrent dans la valeur de y, ou

$$\cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7 + \ldots \frac{1}{2m}\cos.(2m-1)x.$$

On ferait usage de ces équations, si le nombre m était donné, et quelque grand que fût ce nombre, on pourrait déterminer aussi exactement qu'on le voudrait la partie variable de la valeur de y. Si le nombre m est infini, comme on le suppose, on considérera la première équation seulement, et il est manifeste que les deux termes qui suivent la constante C deviennent de plus en plus petits, en sorte que $2y$ a pour limite la constante C. Pour déterminer cette constante, on suppose $x=0$ dans l'équation $2y=C$, et l'on en conclut l'équation

$$\frac{\pi}{4}=\cos.x-\frac{1}{3}\cos.3x+\frac{1}{5}\cos.5x-\frac{1}{7}\cos.7x+\text{ etc.}$$

Il est facile de voir que cette équation aura lieu toutes les fois que l'arc x sera moindre que $\frac{1}{2}\pi$. Car si cet arc a une valeur déterminée X, aussi voisine de $\frac{1}{2}\pi$ qu'on voudra le supposer, on pourra toujours donner à m une valeur si grande, que le terme $\frac{K}{2m}(\sec.x-\sec.0)$, qui complète la série, devienne moindre qu'une quantité quelconque.

On peut appliquer la même analyse aux diverses séries qui expriment (art. 19, page 274), les valeurs de

$$\frac{1}{2}x,\ \log.\ (\cos.\ x),\ \text{etc.}$$

en sinus ou cosinus d'arcs multiples, et ce procédé a l'avantage de faire connaître les limites entre lesquelles la variable doit être comprise pour que l'équation ait lieu. En général, ces sortes de séries se présentent d'elles-mêmes, et il est facile de les former par divers moyens; mais il est nécessaire de distinguer les limites entre lesquelles on doit prendre la valeur de la variable. Par exemple, l'équation donnée par Euler, $\frac{1}{2}x=\sin.x-\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x-\text{ etc.}$, n'a lieu qu'autant que la valeur de x est comprise entre o et π, ou entre o et $-\pi$. Pour toutes les autres valeurs de x, le second membre a une valeur déterminée très-différente de $\frac{1}{2}x$. On doit employer avec beaucoup de réserve les procédés de calcul qui fournissent ces séries, sans faire connaître les limites au-delà desquelles l'équation cesse de subsister. Ces limites n'étant pas les mêmes pour diverses équations, on obtiendrait par la combinaison de différentes séries des résultats erronés.

21. On a vu précédemment (art. 16, page 250) que la détermination du mouvement uniforme de la chaleur dans l'intérieur d'une lame rectangulaire dont une extrémité est retenue à la température 1, exigeait que l'on pût satisfaire à la condition suivante:

$$1 = a_1 \cos.\left(\frac{\pi}{2}y\right) + a_2 \cos.\left(\frac{3\pi}{2}y\right) + a_3 \cos.\left(\frac{5\pi}{2}y\right) + \text{ etc.},$$

pour toutes les valeurs de y comprises entre 1 et -1. Cette question est pleinement résolue au moyen de l'équation

$$\frac{1}{4}\pi = \cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x + \text{ etc.},$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Si l'on y suppose $x = \pi y$, on aura

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\cos. \pi y - \frac{1}{3}\cos. 3\pi y + \frac{1}{5}\cos. 5\pi y - \frac{1}{7}\cos. 7\pi y + \text{ etc.}\right).$$

Donc les coëfficients cherchés sont

$$a_1 = \frac{4}{\pi},\quad a_2 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{\pi},\quad a_3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{\pi},\quad a_4 = -\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{\pi},\quad \text{etc}$$

Donc la propagation de la chaleur dans l'intérieur du solide est exprimée par l'équation

$$\frac{1}{4}\pi z = e^{-\frac{\pi}{2}x}\cos.\frac{\pi}{2}y + \frac{1}{3}e^{-3\frac{\pi}{2}x}\cos.3\frac{\pi}{2}y + \frac{1}{5}e^{-5\frac{\pi}{2}x}\cos.5\frac{\pi}{2}y + \text{etc.};$$

Telle est la forme particulière que l'on doit donner à l'intégrale générale de l'équation $\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}=0$, pour que la fonction z représente les températures permanentes des différents points du solide.

22. La question de la propagation de la chaleur dans une lame rectangulaire, a conduit (art. 16, page 250) à l'équation $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=0$, et si l'on suppose que tous les points de l'extrémité de la lame ont une température commune, il faut déterminer les coëfficients $a_1, a_2, a_3, \ldots$, qui entrent dans la fonction $a_1\cos.u + a_2\cos.2u + a_3\cos.3u +$ etc., en sorte que la valeur de cette fonction soit égale à une constante toutes les fois que l'arc u est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. On vient d'assigner la valeur de ces coëfficients, mais on n'a traité qu'un seul cas d'un problème plus général, qui consiste à développer une fonction quelconque en une suite infinie de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Cette question est liée à la théorie des équations aux différences partielles, et a été long-temps agitée dès l'origine de cette analyse. Il était nécessaire de la résoudre, pour intégrer convenablement les équations de la propagation de la chaleur. Nous allons en exposer la solution.

On examinera en premier lieu le cas où il s'agit de développer en série de sinus d'arcs multiples, une fonction qui ne contient que des puissances impaires de la variable x. Désignant une telle fonction par φx, on posera l'équation

$$\varphi x = a\sin.x + b\sin.2x + c\sin.3x + d\sin.4x + \text{ etc.};$$

et il s'agit de déterminer la valeur des coëfficients a, b, c, d,.... On écrira d'abord l'équation

$$\varphi x = x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{2.3}\varphi'''(0) + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{iv}}(0) + \ldots,$$

dans laquelle $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)$, ... désignent les valeurs que prennent les coëfficients $\frac{d\varphi x}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, $\frac{d^3\varphi x}{dx^3}$...., lorsqu'on y suppose $x=0$. Ainsi, en représentant le développement selon les puissances de x par l'équation

$$\varphi x = Ax - \frac{B}{2.3}x^3 + \frac{C}{2.3.4.5}x^5 - \frac{D}{2.3.4.5.6.7}x^7 + \frac{E}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^9 - \text{etc.}.$$

on aura

$$\begin{array}{lcr}
\varphi\ (0) = 0 & \text{et} & \varphi'\ (0) = A \\
\varphi''\ (0) = 0 & & -\varphi'''\ (0) = B \\
\varphi^{\text{iv}}\ (0) = 0 & & \varphi^{\text{v}}\ (0) = C \\
\varphi^{\text{vi}}\ (0) = 0 & & -\varphi^{\text{vii}}(0) = D \\
\varphi^{\text{viii}}(0) = 0 & & \varphi^{\text{ix}}\ (0) = E \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

Si maintenant on compare l'équation précédente à celle-ci:

$$\varphi x = a\sin.x + b\sin.2x + c\sin.3x + d\sin.4x + e\sin.5x + \ldots$$

en développant le second membre par rapport aux puissances de x, on aura les équations

$$(n)\qquad \begin{aligned} a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \text{etc.} &= \mathrm{A} \\ a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \text{etc.} &= \mathrm{B} \\ a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \text{etc.} &= \mathrm{C} \\ a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \text{etc.} &= \mathrm{D} \\ a + 2^9 b + 3^9 c + 4^9 d + 5^9 e + \text{etc.} &= \mathrm{E} \\ \text{etc.} & \end{aligned}$$

Ces équations doivent servir à trouver les coëfficients a, b, c, d...., dont le nombre est infini. Pour y parvenir, on regardera d'abord comme déterminé et égal à m le nombre des inconnues, et l'on conservera un pareil nombre m d'équations. Ainsi l'on supprime toutes les équations qui suivent les m premières, et l'on omet dans chacune de ces m équations tous les termes du premier membre qui suivent les m premiers que l'on conserve. m étant un nombre entier donné, les coëfficients a, b, c, d, ... ont des valeurs fixes, que l'on peut trouver par l'élimination. Or on obtiendrait pour ces mêmes quantités des valeurs différentes, si le nombre des équations et celui des inconnues augmentait d'une unité. Ainsi la valeur des coëfficients varie à mesure que l'on augmente le nombre de ces coëfficients, et celui des équations qui les doivent déterminer. Il s'agit de chercher quelles sont les limites vers lesquelles les valeurs des inconnues convergent continuellement, à mesure que le nombre des équations devient plus grand. Ces limites sont les véritables valeurs des inconnues qui satisfont aux équations précédentes lorsque leur nombre est infini. On considérera donc successivement les cas où l'on aurait à déterminer une inconnue par une équation, deux inconnues par deux équations, trois inconnues par trois équations, ainsi de suite à l'infini. Supposons que l'on désigne comme il suit différents systèmes d'équations, analogues à celles dont on doit tirer les valeurs des coëfficients :

$$(m)\quad a_1 = A_1\quad a_2 + 2\, b_2 = A_2$$
$$a_2 + 2^3 b_2 = B_2$$

$$a_3 + 2\, b_3 + 3\, c_3 = A_3$$
$$a_3 + 2^3 b_3 + 3^3 c_3 = B_3$$
$$a_3 + 2^5 b_3 + 3^5 c_3 = C_3$$

$$a_4 + 2\, b_4 + 3\, c_4 + 4\, d_4 = A_4$$
$$a_4 + 2^3 b_4 + 3^3 c_4 + 4^3 d_4 = B_4$$
$$a_4 + 2^5 b_4 + 3^5 c_4 + 4^5 d_4 = C_4$$
$$a_4 + 2^7 b_4 + 3^7 c_4 + 4^7 d_4 = D_4$$

$$a_5 + 2\, b_5 + 3\, c_5 + 4\, d_5 + 5\, e_5 = A_5$$
$$a_5 + 2^3 b_5 + 3^3 c_5 + 4^3 d_5 + 5^3 e_5 = B_5$$
$$a_5 + 2^5 b_5 + 3^5 c_5 + 4^5 d_5 + 5^5 e_5 = C_5$$
$$a_5 + 2^7 b_5 + 3^7 c_5 + 4^7 d_5 + 5^7 e_5 = D_5$$
$$a_5 + 2^9 b_5 + 3^9 c_5 + 4^9 d_5 + 5^9 e_5 = E_5.$$

Si maintenant on élimine la dernière inconnue e_5, on trouvera

$$a_5(5^2-1) + 2\, b_5(5^2-2^2) + 3\, c_5(5^2-3^2) + 4\, d_5(5^2-4^2) = 5^2 A_5 - B_5$$
$$a_5(5^2-1) + 2^3 b_5(5^2-2^2) + 3^3 c_5(5^2-3^2) + 4^3 d_5(5^2-4^2) = 5^2 B_5 - C_5$$
$$a_5(5^2-1) + 2^5 b_5(5^2-2^2) + 3^5 c_5(5^2-3^2) + 4^5 d_5(5^2-4^2) = 5^2 C_5 - D_5$$
$$a_5(5^2-1) + 2^7 b_5(5^2-2^2) + 3^7 c_5(5^2-3^2) + 4^7 d_5(5^2-4^2) = 5^2 D_5 - E_5.$$

On aurait pu déduire ces quatre équations des quatre qui forment le système précédent, en mettant dans ces dernières au lieu de

$$a_4 \ldots\ldots a_5(5^2-1)$$
$$b_4 \ldots\ldots b_5(5^2-1)$$
$$c_4 \ldots\ldots c_5(5^2-1)$$
$$d_4 \ldots\ldots d_5(5^2-1);$$

et au lieu de

$$A_4 \ldots\ldots 5^2 A_5 - B_5$$
$$B_4 \ldots\ldots 5^2 B_5 - C_5$$
$$C_4 \ldots\ldots 5^2 C_5 - D_5$$
$$D_4 \ldots\ldots 5^2 D_5 - E_5.$$

On pourra toujours, par des substitutions semblables, passer du cas qui répond à un nombre m d'inconnues, à celui qui répond à un nombre $m+1$; et en écrivant par ordre toutes ces relations entre les quantités qui répondent à l'un des cas et celles qui répondent au suivant, on aura

$$(a)\quad a_1=a_2(2^2-1)$$
$$a_2=a_3(3^2-1),\ b_2=b_3(3^2-2^2)$$
$$a_3=a_4(4^2-1),\ b_3=b_4(4^2-2^2),\ c_3=c_4(4^2-3^2)$$
$$a_4=a_5(5^2-1),\ b_4=b_5(5^2-2^2),\ c_4=c_5(5^2-3^2),\ d_4=d_5(5^2-4^2)$$
$$a_5=a_6(6^2-1),\ b_5=b_6(6^2-2^2),\ c_5=c_6(6^2-3^2),\ d_5=d_6(6^2-4^2),\ e_5=e_6(6^2-5^2)$$

etc. etc. etc. etc. etc.

On aura aussi

$$(b)\quad A_1=2A_2-B_2$$
$$A_2=3A_3-B_3,\ B_2=3B_3-C_3$$
$$A_3=4A_4-B_4,\ B_3=4B_4-C_4,\ C_3=4C_4-D_4$$
$$A_4=5A_5-B_5,\ B_4=5B_5-C_5,\ C_4=5C_5-D_5,\ D_4=5D_5-E_5$$

etc. etc. etc. etc.

On conclut des équations (a) qu'en représentant par a, b, c, d, etc. les inconnues dont le nombre est infini, on doit avoir :

$$(c)\qquad \begin{aligned} a &= \frac{a_1}{(2^2-1^2)(3^2-1^2)(4^2-1^2)(5^2-1^2)\ldots} \\ b &= \frac{b_2}{(3^2-2^2)(4^2-2^2)(5^2-2^2)(6^2-2^2)\ldots} \\ c &= \frac{c_3}{(4^2-3^2)(5^2-8^2)(6^2-3^2)(7^2-3^2)\ldots} \\ d &= \frac{d_4}{(5^2-4^2)(6^2-4^2)(7^2-4^2)(8^2-4^2)\ldots} \end{aligned}$$
etc.

Il reste donc à déterminer les valeurs de a_1, b_2, c_3, d_4, etc. La première est donnée par une équation dans laquelle entre A_1 ; la seconde est donnée par deux équations dans lesquelles entrent A_2 et B_2 ; la troisième est donnée par trois équations dans lesquelles entrent A_3, B_3 et C_3, ainsi de suite. Il suit de là que si on connaissait les valeurs de A_1 A_2 B_2, A_3 B_3 C_3, A_4 B_4 C_4 D_4, etc., on trouverait facilement a_1 en résolvant une équation ; b_2 en résolvant deux équations ; c_3 en résolvant trois équations ; ainsi de suite : après quoi on déterminerait $a, b, c, d \ldots$ Il s'agit maintenant de calculer les valeurs de A_1 A_2 B_2, A_3 B_3 C_3, A_4 B_4 C_4 D_4, etc. Au moyen des équations (b) on trouvera les valeurs de A_1, 1° en A_2 et B_2 ; 2° par deux substitutions, on trouvera cette valeur de A_1 en A_3 B_3 C_3 ; par trois substitutions, on trouve la même valeur de A_1 en A_4 B_4 C_4 D_4, etc. ; ainsi de suite. Ces valeurs successives de A_1 sont :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 . 2^2 - B_2 \\ A_1 &= A_3 . 2^2 . 3^2 - B_3(2^2+3^2) + C_3 \\ A_1 &= A_4 . 2^2 . 3^2 . 4^2 - B_4(2^2 . 3^2 + 2^2 . 4^2 + 3^2 . 4^2) + C_4(2^2+3^2+4^2) - D_4 \\ A_1 &= A_5 . 2^2 . 3^2 . 4^2 . 5^2 - B_5(2^2 . 3^2 . 4^2 + 2^2 . 3^2 . 5^2 + 2^2 . 4^2 . 5^2 + 3^2 . 4^2 . 5^2) \\ &\quad + C_5(2^2 . 3^2 + 2^2 . 4^2 + 3^2 . 4^2 + 2^2 . 5^2 + 3^2 . 5^2 + 4^2 . 5^2) - D_5(2^2+3^2+4^2+5^2) + E_5 \end{aligned}$$
etc.

dont il est aisé de remarquer la loi. On voit d'abord que la dernière valeur de A_1 contiendra des produits d'un nombre infini de facteurs: mais cette valeur, qui est celle de a_1, doit être divisée par le produit infini $(2^2-1)(3^2-1)\ldots$ En cherchant la dernière valeur de A_1, et la divisant par le produit infini $2^2.3^2.4^2.5^2.6^2\ldots$, on aura

$$A-B\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)+C\left(\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{2^2.5^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\ldots\right)$$
$$-D\left(\frac{1}{2^2.3^2.4^2}+\frac{1}{2^2.3^2.5^2}+\frac{1}{3^2.4^2.5^2}+\ldots\right)+E\left(\frac{1}{2^2.3^2.4^2.5^2}+\ldots\right)+\text{etc.} \quad (g)$$

Les quantités A, B, C, ... sont les mêmes que celles qui entrent dans les équations (n). Les coëfficients sont la somme des produits formés par les diverses combinaisons des fractions $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}\ldots$ dont on aurait séparé la première $\frac{1}{1^2}$. Si l'on représente ces différentes sommes de produits par P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1, etc., on aura pour déterminer le premier coëfficient a l'équation

$$a\frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)\ldots}{2^2\,.\,3^2\,.\,4^2\,.\,5^2\ldots}=A-BP_1+CQ_1-DR_1+ES_1-ET_1+\text{etc.}$$

Or les quantités $P_1\,Q_1\,R_1\,S_1$, etc. peuvent être facilement déterminées, comme on le verra plus bas; ainsi le premier coëfficient a sera entièrement connu.

Il faut passer maintenant à la recherche des coëfficients suivants, $b, c, d, e, \ldots$, qui dépendent des quantités b_2, c_3, d_4, e_5, etc. On reprendra pour cela les équations (m).

La première, qui a déjà été employée, donne la valeur de a_1, les deux autres donnent la valeur de b_2, ainsi de suite.

En effectuant le calcul, on trouvera, à la seule inspection de ces équations, pour les valeurs de b_2, c_3, d_4, etc. les résultats suivants :

$$
\begin{aligned}
(d)\quad & 2b_2(1^2-2^2)=A_2\,.\,1^2-B_2\,,\\
& 3c_3(1^2-3^2)(2^2-3^2)=A_3\;1^2.2^2-B_3\;(1^2+2^2)+C_3\,,\\
& 4d_4(1^2-4^2)(2^2-4^2)(3^2-4^2)=A_4\;1^2.2^2.3^2-B_4\;(1^2.2^2+1^2.3^2+2^2.3^2)\\
& \qquad +C_4\;(1^2+2^2+3^2)-D_4\,,\\
& 5e_5(1^2-5^2)(2^2-5^2)(3^2-5^2)(4^2-5^2)=A_5\;1^2.2^2.3^2.4^2-B_5(1^2.2^2.3^2\\
& \qquad +1^2.2^2.4^2+1^2.3^2.4^2+2^2.3^2.4^2)+C_5(1^2.2^2+1^2.3^2+1^2.4^2+2^2.3^2\\
& \qquad +2^2.4^2+3^2.4^2)-D_5(1^2+2^2+3^2+4^2)+E_5\,,\\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

La loi que suivent ces équations est facile à saisir. Il ne reste plus qu'à déterminer les quantités A_2 B_2..., A_3 B_3 C_3..., A_4 B_4 C_4 D_4..., etc. Or les quantités A_2 B_2... peuvent être exprimées en A_3 B_3 C_3... ; ces dernières en A_4 B_4 C_4 D_4... ; et il suffit pour cela d'opérer les substitutions indiquées par les équations (b). Ces changements successifs réduiront les seconds membres des équations précédentes (d) à ne contenir que A, B, C,... Les coëfficients de ces quantités seront les différents produits que l'on peut faire en combinant les quarrés des nombres $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$,... à l'infini. Il faut seulement remarquer que le premier de ces quarrés 1^2 n'entrera point dans les coëfficients de la valeur de a, que le second quarré 2^2 n'entrera point dans les coëfficients de la valeur de b, que le troisième quarré 3^2 sera seul omis parmi ceux qui servent à former les coëfficients de la valeur de c, ainsi du reste à l'infini. On aura donc pour les valeurs de b, c, d, e..., des résultats entièrement analogues à celui que l'on a trouvé plus haut pour la valeur du premier coëfficient a. Si maintenant on représente par P_2, Q_2, R_2, S_2, etc. les quantités

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.},\quad \frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{1^2.4^2}+\frac{1}{1^2.5^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\text{etc.},$$

$$\frac{1}{1^2.3^2.4^2}+\frac{1}{1^2.3^2.5^2}+\text{etc.},\quad \frac{1}{1^2.3^2.4^2.5^2}+\text{etc.},\text{etc.}$$

que l'on forme par les combinaisons des fractions $\frac{1}{1^2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{5^2}$, ... à l'infini, en omettant la seconde de ces fractions $\frac{1}{2^2}$, on aura pour déterminer la valeur de b_2 l'équation

$$2b_2\frac{(1^2-2^2)\ldots\ldots}{1^2.3^2.4^2.5^2\ldots\ldots}=A-BP_2+CQ_2-DR_2+ES_2-FT_2+\text{etc.}$$

En représentant en général par P_n, Q_n, R_n, S_n, T_n, etc. les sommes de produits que l'on peut faire en combinant diversement toutes les fractions $\frac{1}{1^2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$, ... à l'infini, après avoir seulement omis la fraction $\frac{1}{n^2}$, on aura en général pour déterminer les quantités a_1, b_2, c_3, d_4, e_5, etc., les équations suivantes :

$$A_1-BP_1+CQ_1-DR_1+ES_1-\text{etc.}=a_1\frac{1}{2^2.3^2.4^2.5^2\ldots\ldots}$$

$$A_2-BP_2+CQ_2-DR_2+ES_2-\text{etc.}=2b_2\frac{(1^2-2^2)}{1^2.3^2.4^2.5^2\ldots\ldots}$$

$$A_3-BP_3+CQ_3-DR_3+ES_3-\text{etc.}=3c_3\frac{(1^2-3^2)(2^2-3^2)}{1^2.2^2.4^2.5^2.6^2\ldots\ldots}$$

$$A_4-BP_4+CQ_4-DR_4+ES_4-\text{etc.}=4d_4\frac{(1^2-4^2)(2^2-4^2)(3^2-4^2)}{1^2.2^2.3^2.5^2.6^2\ldots\ldots}$$

etc. etc.

Si l'on considère maintenant les équations (c), qui donnent les valeurs des coëfficients a, b, c, d, on aura les résultats suivants :

$$a\,\frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)\ldots}{2^2\,.\,3^2\,.\,4^2\,.\,5^2\ldots}=A-BP_1+CQ_1-DR_1+ES_1-\text{etc.}$$

$$2b\,\frac{(1^2-2^2)(3^2-2^2)(4^2-2^2)(5^2-2^2)\ldots}{1^2\,.\,3^2\,.\,4^2\,.\,5^2\ldots}=A-BP_2+CQ_2-DR_2+ES_2-\text{etc.}$$

$$3c\,\frac{(1^2-3^2)(2^2-3^2)(4^2-3^2)(5^2-3^2)\ldots}{1^2\,.\,2^2\,.\,4^2\,.\,5^2\ldots}=A-BP_3+CQ_3-DR_3+ES_3-\text{etc.}$$

$$4d\,\frac{(1^2-4^2)(2^2-4^2)(3^2-4^2)(5^2-4^2)\ldots}{1^2\,.\,2^2\,.\,3^2\,.\,5^2\ldots}=A-BP_4+CQ_4-DR_4+ES_4-\text{etc.}$$

etc.

En observant quels sont les facteurs qui manquent au numérateur et au dénominateur pour y compléter la double série des nombres naturels, on voit que ces facteurs se réduisent dans le premier cas à $\frac{1}{1}.\frac{1}{2}$, dans le second à $-\frac{2}{2}.\frac{2}{4}$, dans le troisième à $\frac{3}{3}.\frac{3}{6}$, dans le quatrième à $-\frac{4}{4}.\frac{4}{8}$. En sorte que les produits qui multiplient a, $2b$, $3c$, $4d$,... sont alternativement $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Il ne s'agit donc plus que de trouver les quantités P_1 Q_1 R_1..., P_2 Q_2 R_2..., P_3 Q_3 R_3..., etc. Pour y parvenir, on remarquera que l'on peut faire dépendre ces valeurs des quantités P, Q, R, S, T..., qui représentent les différents produits que l'on peut former avec les fractions $\frac{1}{1^2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$,... sans en omettre aucune. Quant à ces derniers produits, leurs valeurs sont données par les séries des développements de sinus. Nous représenterons donc par

$$P \ldots\ldots \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}$$

$$Q \ldots\ldots \frac{1}{1^2.2^2} + \frac{1}{1^2.3^2} + \frac{1}{2^2.3^2} + \text{etc.}$$

$$R \ldots\ldots \frac{1}{1^2.2^2.3^2} + \frac{1}{2^2.3^2.4^2} + \text{etc.}$$

$$S \ldots\ldots \frac{1}{1^2.2^2.3^2.4^2} + \text{etc.}$$

etc.

La série $\sin. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ etc.}$ nous fournira les quantités P, Q, R, S, T, etc. En effet, la valeur du sinus étant exprimée par l'équation

$$\sin. x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\ldots\ldots,$$

on aura

$$1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots.,$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$P = \frac{\pi^2}{2.3}$$

$$Q = \frac{\pi^4}{2.3.4.5}$$

$$R = \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}$$

$$S = \frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

etc.

Supposons maintenant que P_n, Q_n, R_n, $S_n \ldots$ représentent les produits différents que l'on peut faire avec les fractions $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots$ dont on aura séparé la fraction $\frac{1}{n^2}$. Il s'agit de déterminer $P_n, Q_n, R_n, S_n, \ldots$ au moyen de $P, Q, R, S, \ldots$ Si on représente par

$$1 - uP_n + u^2Q_n - u^3R_n + u^4S_n - \text{etc.}$$

les produits des facteurs

$$\left(1 - u\frac{1}{1^2}\right)\left(1 - u\frac{1}{2^2}\right)\left(1 - u\frac{1}{3^2}\right)\ldots,$$

parmi lesquels on aurait omis le seul produit $\left(1 - u\frac{1}{n^2}\right)$, il faudra qu'en multipliant par $\left(1 - u\frac{1}{n^2}\right)$ la quantité

$$1 - uP_n + u^2Q_n - u^3R_n + u^4S_n - \text{etc.},$$

on trouve

$$1 - uP + u^2Q + u^3R - u^4S - \text{etc.}$$

Cette comparaison donne les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
P_n + \frac{1}{n^2} = P & \text{ou} & P_n = P - \frac{1}{n^2} \\
Q_n + P_n \cdot \frac{1}{n^2} = Q & & Q_n = Q - \frac{1}{n^2}P + \frac{1}{n^4} \\
R_n + Q_n \cdot \frac{1}{n^2} = R & & R_n = R - \frac{1}{n^2}Q + \frac{1}{n^4}P - \frac{1}{n^6} \\
S_n + R_n \cdot \frac{1}{n^2} = S & & S_n = \frac{1}{n^2}R + \frac{1}{n^4}Q - \frac{1}{n^6}P + \frac{1}{n^8}, \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

En employant les valeurs connues de P, Q, R, S, T, etc., et faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, on aura les valeurs de $P, Q, R, S, T, \ldots$; celles de $P, Q, R, S, T, \ldots$; celles de

P_3 Q_3 R_3 S_3 $T_3 \ldots$; ainsi de suite. Il résulte de tout ce qui précède, que les valeurs de a, b, c, d, $e \ldots$, déduites des équations

$$
\begin{aligned}
a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \text{etc.} &= A \\
a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \text{etc.} &= B \\
a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \text{etc.} &= C \\
a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \text{etc.} &= D \\
a + 2^9 b + 3^9 c + 4^9 d + 5^9 e + \text{etc.} &= E \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

sont exprimées ainsi :

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\, a = A &- B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^2}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^4}\right) \\
&- D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{1^2}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{1^4}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^6}\right) \\
&+ E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{1^2}\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{1^4}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^6}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^8}\right) - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\, 2b = A &- B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^2}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{2^4}\right) \\
&- D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{2^2}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{2^4}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^6}\right) \\
&+ E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{2^2}\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2^4}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^6}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{2^8}\right) - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\, 3c = A &- B\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^2}\right) + C\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{3^2}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{3^4}\right) \\
&- D\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{3^2}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{3^4}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^6}\right) \\
&+ E\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{3^2}\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3^4}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{3^6}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{3^8}\right) \\
&- \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}4d = \text{A} - \text{B}\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^2}\right) + \text{C}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{4^2}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{4^4}\right)$$

$$-\text{D}\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{4^2}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{4^4}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^6}\right)$$

$$+\text{E}\left(\frac{\pi^8}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{1}{4^2}\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{4^4}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{4^6}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{4^8}\right)$$

etc.

Ayant les valeurs de a, b, c, d, ..., on les substituera dans l'équation proposée

$$\varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{ etc.}$$

Mettant aussi au lieu des quantités A, B, C, D, ... leurs valeurs $\varphi'\text{o}$, $\varphi'''\text{o}$, $\varphi^{\text{v}}\text{o}$, $\varphi^{\text{vii}}\text{o}$, ..., on aura l'équation générale

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varphi x = {} & \sin. x\Big[\varphi'\text{o} + \varphi'''\text{o}\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^2}\right) + \varphi^{\text{v}}\text{o}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{1^2}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{1^4}\right) \\
& \quad + \varphi^{\text{vii}}\text{o}\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{1^2}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{1^4}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^6}\right) + \text{etc.}\Big] \\
& - \frac{1}{2}\sin. 2x\Big[\varphi'\text{o} + \varphi'''\text{o}\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{1^2}\right) + \varphi^{\text{v}}\text{o}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{2^2}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{2^4}\right) \\
& \quad + \varphi^{\text{vii}}\text{o}\ \frac{\pi^5}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{2^2}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{2^4}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{2^6}\Big) + \text{etc.}\Big] \\
\text{(A)} \qquad & + \frac{1}{3}\sin. 3x\Big[\varphi'\text{o} + \varphi'''\text{o}\left(\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^2}\right) + \varphi\ \text{o}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{3^2}\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{3^4}\right) \\
& \quad + \varphi^{\text{vii}}\text{o}\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{3^2}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{3^4}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^6}\right) + \text{etc.}\Big] \\
& - \frac{1}{4}\sin. 4x\Big[\varphi'\text{o} + \varphi'''\text{o}\left(\frac{\pi^2}{2.3} + \frac{1}{4^2}\right) + \varphi^{\text{v}}\text{o}\left(\frac{\pi^4}{2.3.4.5} - \frac{1}{4^2}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{3^4}\right) \\
& \quad + \varphi^{\text{vii}}\text{o}\left(\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7} - \frac{1}{4^2}\frac{\pi^4}{2.3.4.5} + \frac{1}{4^4}\frac{\pi^2}{2.3} - \frac{1}{4^6}\right) + \text{etc.}\Big] \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

On peut se servir de la série précédente pour développer en séries de sinus d'arcs multiples une fonction proposée, dans laquelle il n'entre que des puissances impaires de la variable

Le cas qui se présente le premier est celui où l'on aurait $\varphi x = x$. On trouve alors $\varphi' o = 1$ et $\varphi'''(o) = o$, $\varphi^{v}(o) = o$, ainsi du reste : on aura donc la série

$$\frac{1}{2}x = \sin.x - \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{3}\sin.3x - \frac{1}{4}\sin.4x + \text{etc.},$$

qui a été donnée par Euler.

Si on suppose que la fonction de x proposée soit x^3, on aura $\varphi' o = o$ et $\varphi''' o = 2.3$, $\varphi^{v} o = o$, etc. ; ce qui donnera l'équation

$$\frac{1}{2}x^3 = \left(\pi^2 - \frac{2.3}{2^2}\right)\frac{\sin.2x}{2} + \left(\pi^2 - \frac{2.3}{3^2}\right)\frac{\sin.3x}{3} + \text{etc.}$$

On parviendrait à ce même résultat en partant de l'équation précédente $\frac{1}{2}x = \sin.x - \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{3}\sin.3x - \text{etc.}$ En effet, en multipliant chacun des membres par dx et intégrant, on aura $-\frac{x^2}{4} = \cos.x - \frac{1}{2^2}\cos.2x + \frac{1}{3^2}\cos.3x - \text{etc.}$ La valeur de la constante est

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \text{etc.},$$

série dont on sait que la somme est $-\frac{1}{2}\pi^2$. Multipliant par dx les deux membres de l'équation

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{2.3} - \cos.x + \frac{1}{2^2}\cos.2x - \frac{1}{3^2}\cos.3x + \frac{1}{4^2}\cos.4x - \text{etc.}$$

et intégrant, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{x^3}{2.3} = \frac{\pi^2}{2.3}x - \sin.x + \frac{1}{2^3}\sin.2x - \frac{1}{3^3}\sin.3x + \text{etc.}$$

Si maintenant on met au lieu de x sa valeur tirée de l'équation

$$\frac{1}{2}x = \sin.x - \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{3}\sin.3x - \frac{1}{4}\sin.4x + \text{etc.}$$

on obtiendra la même équation que ci-dessus,

$$\frac{1}{2}x^3 = \left(\pi^2 - \frac{2.3}{1^2}\right)\sin.x - \left(\pi^2 - \frac{2.3}{2^2}\right)\frac{\sin.2x}{2} + \text{etc.}$$

On parviendrait de la même manière à développer en séries de sinus multiples les puissances $x^5, x^7, x^9 \ldots$; et en général toute fonction dont le développement ne contiendrait que des puissances impaires de la variable.

L'équation (A) peut être mise sous une forme plus simple que nous allons faire connaître. On remarque d'abord qu'une partie du coëfficient de $\sin.x$ est la série

$$\varphi'0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi'''0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{v}}0 + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{vii}}0 + \text{etc.},$$

qui représente la quantité $\frac{1}{\pi}\varphi\pi$. Car on a en général

$$\varphi x = \varphi 0 + x\varphi'0 + \frac{x^2}{2}\varphi''0 + \frac{x^3}{2.3}\varphi'''0 + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{iv}}0 + \text{etc.}$$

Or la fonction φx ne contenant par hypothèse que des puissances impaires, on doit avoir $\varphi 0 = 0$, $\varphi''0 = 0$, $\varphi^{\text{iv}}0 = 0, \ldots,$ ainsi de suite. Donc $\varphi x = \varphi'0 + \frac{x^3}{2.3}\varphi'''0 + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{\text{v}}0 + \text{etc.}$ Une seconde partie du coëfficient de $\sin.x$ se trouve en multipliant par $-\frac{1}{2}$ la série $\varphi'''0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{v}}0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{vii}}0 + \ldots,$ dont la valeur est $\frac{1}{\pi}\varphi''\pi$. On détermine de cette manière les différentes parties du coëfficient de $\sin.x$, et celles qui composent les coëfficients de $\sin.2x$, $\sin.3x$, $\sin.4x, \ldots$ On emploiera pour cela les équations

$$\varphi' 0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi''' 0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{v}} 0 + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{vii}} 0 + \ldots = \frac{1}{\pi}\varphi\,\pi,$$

$$\varphi''' 0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{v}} 0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{vii}} 0 + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{ix}} 0 + \ldots = \frac{1}{\pi}\varphi''\pi,$$

$$\varphi^{\text{v}} 0 + \frac{\pi^2}{2.3}\varphi^{\text{vii}} 0 + \frac{\pi^4}{2.3.4.5}\varphi^{\text{ix}} 0 + \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\varphi^{\text{xi}} 0 + \ldots = \frac{1}{\pi}\varphi^{\text{iv}}\pi.$$

etc.

Et au moyen de ces réductions, on donnera facilement à l'équation (A) la forme suivante :

$$\text{(B)}\quad \tfrac{1}{2}\pi\varphi x = \left(\varphi\pi - \frac{1}{1^2}\varphi''\pi + \frac{1}{1^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \frac{1}{1^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \ldots\right)\sin.1x$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varphi\pi - \frac{1}{2^2}\varphi''\pi + \frac{1}{2^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \frac{1}{2^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \ldots\right)\sin.2x$$

$$+\frac{1}{3}\left(\varphi\pi - \frac{1}{3^2}\varphi''\pi + \frac{1}{3^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \frac{1}{3^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \ldots\right)\sin.3x$$

$$-\frac{1}{4}\left(\varphi\pi - \frac{1}{4^2}\varphi''\pi + \frac{1}{4^4}\varphi^{\text{iv}}\pi - \frac{1}{4^6}\varphi^{\text{vi}}\pi + \ldots\right)\sin.4x.$$

$+$ etc.

ou celle-ci :

$$\text{(C)}\quad \tfrac{1}{2}\pi\varphi x = \varphi\pi\left(\sin.1x - \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{3}\sin.3x - \frac{1}{4}\sin.4x + \ldots\right)$$

$$-\varphi''\pi\left(\frac{1}{1^3}\sin.1x - \frac{1}{2^3}\sin.2x + \frac{1}{3^3}\sin.3x - \frac{1}{4^3}\sin.4x + \ldots\right)$$

$$+\varphi^{\text{iv}}\pi\left(\frac{1}{1^5}\sin.1x - \frac{1}{2^5}\sin.2x + \frac{1}{3^5}\sin.3x - \frac{1}{4^5}\sin.4x + \ldots\right)$$

$$-\varphi^{\text{vi}}\pi\left(\frac{1}{1^7}\sin.1x - \frac{1}{2^7}\sin.2x + \frac{1}{3^7}\sin.3x - \frac{1}{4^7}\sin.4x + \ldots\right)$$

$+$ etc.

On peut appliquer l'une ou l'autre de ces formules toutes les fois que l'on aura à développer une fonction proposée en une série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples. Si, par exemple, la fonction proposée est $e^x - e^{-x}$, dont le développement ne contient que des puissances impaires de x, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\left(e^x - e^{-x}\right) = &\left(e^\pi - e^{-\pi}\right)\left(\sin. x - \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x - \frac{1}{4}\sin. 4x + \ldots\right)\\ &-\left(e^\pi - e^{-\pi}\right)\left(\sin. x - \frac{1}{2^3}\sin. 2x + \frac{1}{3^3}\sin. 3x - \frac{1}{4^3}\sin. 4x + \ldots\right)\\ &+\left(e^\pi - e^{-\pi}\right)\left(\sin. x - \frac{1}{2^5}\sin. 2x + \frac{1}{3^5}\sin. 3x - \frac{1}{4^5}\sin. 4x + \ldots\right)\\ &-\left(e^\pi - e^{-\pi}\right)\left(\sin. x - \frac{1}{2^7}\sin. 2x + \frac{1}{3^7}\sin. 3x - \frac{1}{4^7}\sin. 4x + \ldots\right)\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}\right) = &\sin.\ x\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^5} - \frac{1}{1^7} + \ldots\right)\\ &-\sin. 2x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7} + \ldots\right)\\ &+\sin. 3x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{5^7} + \ldots\right)\\ &-\text{etc.}\end{aligned}$$

et mettant au lieu de $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^7} + \ldots\ldots$ sa valeur $\frac{n}{n^2+1}$, on aura

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}\right) = \frac{\sin. x}{1+\frac{1}{1}} - \frac{\sin. 2x}{2+\frac{1}{2}} + \frac{\sin. 3x}{3+\frac{1}{3}} - \frac{\sin. 4x}{4+\frac{1}{4}} + \ldots$$

On pourrait multiplier ces applications à l'infini, et en déduire plusieurs séries remarquables. J'ai choisi l'exemple précédent, parce qu'il se présente dans diverses questions relatives à la propagation de la chaleur.

23. Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction dont on demande le développement en séries de sinus d'arcs multiples, peut être développée suivant les puissances de la variable x, et qu'il n'entre dans cette dernière série que des puissances impaires. Mais on peut étendre les mêmes conséquences à des fonctions quelconques, même à celles qui seraient discontinues et entièrement arbitraires. Pour établir clairement la vérité de cette proposition, il est nécessaire de poursuivre l'analyse qui fournit l'équation précédente (B), et d'examiner quelle est la nature des coëfficients qui multiplient sin. x, sin. $2x$, sin. $3x$, sin. $4x$,... En désignant par $\frac{s}{n}$ la quantité qui multiplie dans cette équation sin. x, si n est impair, et $-$sin. x, si n est pair, on aura

$$s = \varphi\pi - \frac{1}{n^2}\,\varphi''\pi + \frac{1}{n^4}\,\varphi^{\text{iv}}\pi + \ldots .$$

Considérant s comme une fonction de π, différentiant deux fois, et comparant les résultats, on trouve

$$s + \frac{1}{n^2}\,\frac{d^2 s}{d\pi^2} = \varphi\pi,$$

équation à laquelle la valeur précédente de s doit satisfaire. Cette équation, dans laquelle s est considérée comme une fonction de la variable π, a pour intégrale

$$s = a\cos. n\pi + b\sin. n\pi + n\sin. n\pi \int \cos. n\pi\, \varphi\pi\, d\pi$$
$$- n\cos. n\pi \int \sin. n\pi\, \varphi\pi\, d\pi.$$

n étant un nombre entier, on a $s = C \pm n \int \varphi\pi \sin. n\pi\, d\pi$, et la constante pouvant faire partie du terme intégral, $\frac{s}{n} = \pm \int \varphi\pi \sin. n\pi . d\pi$. Le signe $+$ doit être choisi lorsque n est impair, et le signe $-$ lorsque ce nombre est pair. On doit supposer π égal à la demi-circonférence, après l'intégration indiquée. Ce résultat se vérifie de lui-même, lorsqu'on développe, au moyen de l'intégration par parties, le terme $\int \varphi x \sin. nx . dx$: en remarquant que la fonction φx ne contient que des puissances impaires de la variable, et en prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on en conclut immédiatement que ce terme équivaut à

$$\pm \left(\varphi\pi - \frac{\varphi''\pi}{n^2} + \frac{\varphi^{\text{iv}}\pi}{n^4} - \frac{\varphi^{\text{vi}}\pi}{n^6} + \ldots . \right).$$

Si on substitue cette valeur de $\frac{s}{n}$ dans l'équation (B), en prenant le signe $+$ lorsque le terme de cette équation est impair, et le signe $-$ lorsque n est pair, on aura en général $S(\varphi x \sin. nx dx)$ pour le coëfficient de $\sin. nx$. On parvient de cette manière à un résultat très-remarquable, exprimé par l'équation suivante :

$$(M) \quad \tfrac{1}{2}\pi\varphi(x) = \sin. x S(dx\varphi x \sin. x) + \sin. 2x . S(dx\varphi x \sin. 2x)$$
$$+ \sin. 3x . S(dx\varphi x \sin. 3x) + \sin. 4x . S(dx\varphi x \sin. 4x) + \ldots$$

Le second membre donnera toujours le développement cherché de la fonction φx, si l'on effectue les intégrations depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$.

24. On voit par là que les coëfficients $a, b, c, d \ldots$ qui entrent dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = a\sin.x + b\sin.2x + c\sin.3x + d\sin.4x + \ldots$$

et que nous avons trouvé précédemment par la voie des éliminations successives, sont des valeurs intégrales définies, exprimées par le terme général $S\varphi x\sin.ixdx$, i étant le numéro du terme dont on cherche le coëfficient. Cette remarque est importante, en ce qu'elle conduit à connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction φx est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque, dont l'abscisse s'étend depuis o jusqu'à π, et que l'on construise sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y=\sin.x$, il sera facile de se représenter la valeur du terme intégral $S\varphi x\sin.xdx$. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x, à laquelle répond une valeur de φx et une valeur de $\sin.x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x\sin.x$. On formera, par cette opération continuelle, une troisième courbe dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente φx. Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant prise depuis o jusqu'à π, donnera la valeur exacte du coëfficient de $\sin.x$. Or, quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à φx, et soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas, une valeur déterminée qui donne celle du coëfficient de $\sin. x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coëfficient suivant b, ou $S(\varphi x \sin. 2x dx)$. Pour en construire la valeur, on supposera que la courbe dont l'équation est $y = \sin. 2x$, et la courbe arbitraire qui a pour équation $y = \varphi x$, sont déjà tracées, et que l'on forme une troisième courbe, en multipliant chaque ordonnée de la courbe trigonométrique par l'ordonnée correspondante de la courbe arbitraire; l'équation qui appartient à cette troisième courbe est $y = \varphi x \sin. 2x$; le coëfficient cherché b, est l'aire de cette courbe réduite. Il faut en général, pour construire les valeurs des coëfficients $a, b, c, d \ldots$, imaginer que les courbes dont les équations sont

$$y = \sin. x,\ y = \sin. 2x,\ y = \sin. 3x,\ y = \sin. 4x, \ldots$$

ont été tracés pour un même intervalle pris sur l'axe des x depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, et qu'ensuite on a changé toutes ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y = \varphi x$. Les équations des courbes réduites sont

$$y = \sin. x \varphi x,\ y = \sin. 2x \varphi x,\ y = \sin. 3x \varphi x,\ y = \sin. 4x \varphi x \ldots$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, seront les valeurs des coëfficients $a, b, c, d, \ldots$ dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = a\sin.x + b\sin.2x + c\sin.3x + d\sin.4x + \ldots$$

On peut aussi vérifier l'équation précédente (M), en déterminant immédiatement les quantités $a_1, a_2, a_3 \ldots a_i, \ldots$ dans l'équation

$$\varphi x = a_1\sin.x + a_2\sin.2x + a_3\sin.3x + \ldots + a_i\sin.ix + \ldots$$

Pour cela, on multipliera chacun des membres de la dernière équation par $\sin.ixdx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$; on aura, en représentant ces intégrations par le signe S,

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\varphi x\sin.ixdx = {} & a_1\mathrm{S}(\sin.x\sin.ixdx) + a_2\mathrm{S}(\sin.2x\sin.ixdx) + \ldots \\ & + a_i\mathrm{S}(\sin.ix\sin.ixdx) + \ldots\end{aligned}$$

Or on peut facilement prouver, 1° que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre ont une valeur nulle, excepté le seul terme $\mathrm{S}(\sin.ix\sin.ixdx)$; 2° que la valeur de $\mathrm{S}(\sin.ix\sin.ixdx)$ est $\frac{1}{2}\pi$: d'où on conclura la valeur de a_i, qui est $\dfrac{\mathrm{S}\varphi x\sin.ixdx}{\frac{1}{2}\pi}$. Ainsi tout se réduit à considérer la valeur des intégrales qui entrent dans le second membre. Or l'intégrale $2\mathrm{S}(\sin.ix\sin.hxdx)$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et dans laquelle i et h sont des nombres entiers, est $C + \frac{1}{i-h}\sin.\overline{(i-h)}x - \frac{1}{i+h}.\sin.\overline{(i+h)}x$. L'intégrale devant commencer lorsque $x=0$, la constante est nulle, et les nombres i et h étant entiers, la valeur de l'intégrale deviendra nulle lorsqu'on fera $x=\pi$. Il s'ensuit que chacun des termes, tels que

$$a_1 S(\sin.x \sin.ix\,dx),\ \ a_2 S(\sin.2x \sin.ix\,dx),\ldots$$

s'évanouit, et que cela aura lieu toutes les fois que les nombres i et h seront différents. Il n'en est pas de même lorsque les nombres i et h sont égaux, car le terme $\frac{1}{i-h}\sin.(i-h)x$, auquel se réduit l'intégrale, devient $\frac{0}{0}$, et sa véritable valeur est π. On a par conséquent $2S(\sin.ix\sin.ix\,dx)=\pi$. On obtient ainsi de la manière la plus briève les valeurs de a_1, a_2, a_3, a_4, qui sont

$$a_1=\frac{S(\varphi x\sin.1x\,dx)}{\frac{1}{2}\pi},\ a_2=\frac{S(\varphi x\sin.2x\,dx)}{\frac{1}{2}\pi},\ a_3=\frac{S(\varphi x\sin.3x\,dx)}{\frac{1}{2}\pi}\ldots$$

$$a_i=\frac{S(\varphi x\sin.ix\,dx)}{\frac{1}{2}\pi}\ldots.$$

et en les substituant, on a

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=\sin.x S(\varphi x\sin.x\,dx)+\sin.2x\,S(\varphi x\sin.2x\,dx)$$
$$+\sin.3x\,S(\varphi x\sin.3x\,dx)+\ldots+\sin.ix\,S(\varphi x\sin.ix\,dx)+\ldots$$

Le cas le plus simple est celui où la fonction de x donnée a une valeur constante pour toutes les valeurs de la variable x, comprise entre o et π; dans ce cas, l'intégrale $\int(\sin.ix\,dx)$ est égale à $\frac{2}{i}$ si le nombre i est impair, et égale à o si le nombre i est pair. On en déduit l'équation

$$\frac{1}{4}\pi=\sin x+\frac{1}{3}\sin.3x+\frac{1}{5}\sin.5x+\frac{1}{7}\sin.7x+\ldots.$$

que l'on a trouvée précédemment. Dans ce cas les courbes dont nous avons parlé plus haut, et qui ont pour équations

$$y=\sin x,\ y=\sin.2x,\ y=\sin.3x,\ y=\sin.4x,\ldots$$

n'éprouvent aucun changement lorsqu'on multiplie leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes de la courbe arbitraire, parce qu'on suppose ici que cette dernière courbe a toutes ses ordonnées égales à l'unité. Les coëfficients a_1, a_2, a_3, a_4, ... sont les aires comprises entre ces courbes et l'axe, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. Ces aires sont en effet proportionnelles à $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \ldots$ Il faut toujours remarquer que lorsqu'on est parvenu à développer une fonction φx en série de sinus d'arcs multiples, la valeur du développement $a\sin.x+b\sin.2x+c\sin.3x+\ldots$ est la même que celle de la fonction φx, tant que la valeur de la variable x est comprise entre 0 et π : mais lorsque la valeur de x sort de ces limites, celle du développement et celle de la fonction ne sont point nécessairement égales, et peuvent devenir entièrement différentes. Cette conséquence est manifeste dans l'exemple suivant.

Supposons que la fonction dont on demande le développement soit x : on aura, d'après le théorème précédent,

$$\frac{1}{2}\pi x=\sin.x\,S(x\sin.x\,dx)+\sin.2x\,S(x\sin.2x\,dx)+\ldots.$$

L'intégrale $S\,x\sin.ix\,dx$, prise entre les limites convenables, équivaut à $\pm\frac{\pi}{i}$. Le signe $+$ doit être choisi lorsque i est impair, et le signe $-$ lorsque i est pair. On aura donc pour les valeurs des divers coëfficients,

$$\frac{1}{2}x=\sin.x-\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x-\frac{1}{4}\sin.4x+\ldots.$$

25. On développera pareillement en séries de sinus d'arcs multiples, les fonctions différentes de celles où il n'entre que des puissances impaires de la variable. Pour apporter un exemple qui ne laisse aucun doute sur la possibilité de ce développement, je choisirai la fonction $\cos. x$, qui ne contient que des puissances paires, et qu'on développera sous la forme suivante : $a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + \ldots$, quoiqu'il n'entre dans cette dernière série que des puissances impaires. On aura en effet, d'après le théorème précédent,

$$\frac{1}{2}\pi \cos. x = \sin. x\, S(\cos. x \sin. x\, dx) + \sin. 2x\, S(\cos. x \sin. 2x\, dx) + \text{etc.}$$

L'intégrale $S(\cos. x \sin. ix\, dx)$ équivaut à zéro lorsque i est un nombre impair, et à $\frac{2i}{i^2-1}$ lorsque i est un nombre pair; si l'on fait successivement $i=2, =4, =6$, etc. on aura la série toujours convergente

$$\frac{1}{4}\pi \cos. x = \frac{2}{1.3}\sin. 2x + \frac{4}{3.5}\sin. 4x + \frac{6}{5.7}\sin. 6x + \text{etc.}$$

Ce résultat a cela de remarquable, qu'il offre le développement du cosinus en une suite de fonctions dont chacune ne contient que des puissances impaires. Si on fait dans l'équation précédente $x=\frac{1}{4}\pi$, on trouvera

$$\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{2}{1.3} - \frac{6}{5.7} + \frac{10}{9.11} - \frac{14}{13.15}\ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{1.3} - \frac{12}{5.7} + \frac{20}{9.11} - \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots\right)$$

Cette dernière série est connue (*Introd. ad analysin infin. Cap. X*).

On peut employer une analyse semblable pour développer une fonction quelconque en séries de cosinus d'arcs multiples. Soit φx la fonction dont on demande le développement, on aura

$$\varphi x = a_0 \cos. 0x + a_1 \cos. 1x + a_2 \cos. 2x + \ldots + a_i \cos. ix + \ldots \quad (e)$$

Si on multiplie chacun des deux membres de cette équation par $\cos. ix dx$, et que l'on intègre chacun des termes du second membre depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, il est facile de s'assurer que la valeur de cette intégrale sera nulle, excepté pour le seul terme qui contient déja $\cos. ix$. Cette remarque donne immédiatement la valeur du coëfficient a_i. Il suffira en général de considérer la valeur de l'intégrale

$$\int (\cos. mx \cos. nx dx),$$

prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. En supposant que m et n sont des nombres entiers différents, on a

$$\int \cos. mx \cos. nx dx = \frac{1}{2(m+n)} \sin. (m+n)x + \frac{1}{2(m-n)} \sin. (m-n)x + C.$$

Cette intégrale, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, est évidemment nulle toutes les fois que m et n sont deux nombres différents. Il n'en est pas de même lorsque ces deux nombres sont égaux; le dernier terme $\frac{1}{2(m-n)} \sin. (m-n)x$ devient $\frac{0}{0}$, et sa véritable valeur est $\frac{\pi}{2}$ lorsque l'arc x est est égal à π. Si donc on multiplie les deux termes de l'équation précédente (e) par $\cos. ix$, et que l'on intègre depuis 0 jusqu'à π, on aura $S(\varphi x \cos. ix dx) = a_i . \frac{1}{2} \pi$, équation qui fera connaître la valeur du coëfficient a_i. Pour trouver le premier coëfficient a_0, on remarquera que dans l'intégrale

$$\int (\cos. mx . \cos. nx dx),$$

ou $$\frac{1}{2(m+n)} \sin.(m+n)x + \frac{2}{(m-n)} \sin.(m-n)x,$$

si $m=0$ et $n=0$, chacun des termes devient $\frac{0}{0}$, et la valeur de chaque terme est $\frac{1}{2}\pi$. Ainsi l'intégrale

$$S(\cos. mx \cos. nx dx),$$

prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, est nulle lorsque les deux nombres entiers m et n sont différents; elle est $\frac{1}{2}\pi$ lorsque les deux nombres m et n sont égaux, mais différents de zéro; elle est égale à π lorsque m et n sont l'un et l'autre égaux à zéro. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \frac{1}{2}S(\varphi x dx) + \cos. x S(\varphi x \cos. x dx) + \cos. 2x S(\varphi x \cos. 2x dx) + \ldots$$
$$+ \cos. ix S(\varphi x \cos. ix dx) + \ldots \qquad (N)$$

Le signe S indique que les intégrations doivent être faites depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. Ce théorème et le précédent conviennent à toutes les fonctions possibles, soit que l'on puisse exprimer, par les moyens connus de l'analyse, la nature de la fonction, soit qu'elle corresponde à une courbe tracée d'une manière quelconque entièrement arbitraire. Nous voyons en effet que les coëfficients $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ qui entrent dans le développement cherché

$$a_0 + a_1 \cos. x + a_2 \cos. 2x + a_3 \cos. 3x + \ldots + a_i \cos. ix + \ldots$$

sont proportionnels aux intégrales définies, dont on peut toujours concevoir les valeurs, quelle que puisse être la fonction proposée. En effet, ces valeurs des coëfficients a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, etc. peuvent être facilement représentées par des constructions. Si la fonction proposée, dont on demande le développement en cosinus d'arcs multiples, est la variable x elle-même, on écrira l'équation

$$\frac{1}{2}\pi x = a_0 + a_1 \cos. x + a_2 \cos. 2x + a_3 \cos. 3x + \ldots,$$

et l'on aura, pour déterminer un coëfficient quelconque a_i, l'équation $a_i = \mathrm{S}(x \cos. ix dx)$. Cette intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, a une valeur nulle lorsque i est un nombre pair, et est égale à $-\frac{2}{i^2}$ lorsque i est impair

On a en même temps $a_0 = \frac{1}{2}\mathrm{S}x dx$, ou $\frac{\pi^2}{4}$. On formera donc la série suivante :

$$x = \frac{1}{2}\pi - \frac{4 \cos. x}{\pi} - \frac{4 \cos. 3x}{3^2 \pi} - \frac{4 \cos. 5x}{5^2 \pi} - \ldots$$

On peut remarquer ici que nous sommes parvenus à trois développements différents de $\frac{1}{2}x$, savoir :

$$\frac{1}{2}x = \sin. x - \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x - \frac{1}{4}\sin. 4x + \ldots$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{\pi}\sin. x - \frac{2}{3^2\pi}\sin. 3x + \frac{2}{5^2\pi}\sin. 5x - \frac{2}{7^2\pi}\sin. 7x - \ldots$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\cos. x - \frac{2}{3^2\pi}\cos. 3x - \frac{2}{5^2\pi}\cos. 5x - \ldots$$

Il faut remarquer que ces trois valeurs de $\frac{1}{2}x$ ne doivent point être considérées comme égales, abstraction faite de toutes les valeurs de x. Les trois développements précédents n'ont une valeur commune que lorsque la variable x est comprise entre o et $\frac{1}{2}\pi$. La construction des valeurs de ces trois séries, et la comparaison des lignes dont elles expriment les ordonnées, rendraient sensibles la coïncidence et la distinction alternative des valeurs de ces fonctions.

27. Pour donner un second exemple du développement d'une fonction en séries de cosinus d'arcs multiples, nous choisirons la fonction sin. x, qui ne contient que des puissances impaires de la variable, et nous nous proposerons de la développer sous la forme

$$a + b\cos.x + c\cos.2x + d\cos.3x + \ldots\ldots,$$

en faisant à ce cas particulier l'application de l'équation générale (N). On trouvera pour l'équation cherchée:

$$\frac{1}{4}\pi\sin.x = \frac{1}{2} - \frac{\cos.2x}{1.3} - \frac{\cos.4x}{3.5} - \frac{\cos.6x}{5.7} - \frac{\cos.8x}{7.9} - \ldots.$$

On parvient ainsi à développer une fonction qui ne contient que des puissances impaires en une série de cosinus dans laquelle il n'entre que des puissances paires de la variable. Si on donne à x la valeur particulière $\frac{1}{2}\pi$, on trouvera

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \ldots\ldots$$

Or de l'équation connue

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\ldots.$$

on tire $\quad \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots$

et aussi $\quad \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{7.9} - \frac{1}{9.11} - \ldots$

En ajoutant ces deux résultats, on a, comme précédemment, $\quad \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \ldots$

28. L'analyse précédente donnant le moyen de développer une fonction arbitraire quelconque en série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, nous l'appliquerons facilement au cas où la fonction à développer a des valeurs déterminées, lorsque la variable est comprise entre de certaines limites, et a des valeurs nulles lorsque la variable est comprise entre d'autres limites. Je m'arrêterai à l'examen de ce cas particulier, parce qu'il se présente dans les questions physiques qui dépendent des équations aux différences partielles, et qu'il avait été proposé comme un exemple de fonctions qui ne peuvent être développées en sinus ou cosinus d'arcs multiples. Supposons donc que l'on ait à développer sous la forme $a\sin.x + b\sin.2x + c\sin.3x + \ldots$ une fonction dont la valeur est constante lorsque x est comprise entre o et α, et dont toutes les autres valeurs sont nulles lorsque x est comprise entre α et π. On posera l'équation générale

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \sin.x\,S(\varphi x \sin.x\,dx) + \sin.2x\,S(\varphi x \sin.2x\,dx) + \sin.3x\,S(\varphi x \sin.3x\,dx) + \ldots$$

dans laquelle les intégrales doivent être prises depuis $x = 0$

jusqu'à $x=\pi$. Les valeurs de φx qui entrent sous le signe S étant nulles depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=\pi$, il suffira d'intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=\alpha$. Cela posé, on trouvera pour la série demandée, en supposant que la valeur constante de la fonction est h,

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = h\left[\frac{(1-\cos.1\alpha)}{1}\sin.x + \frac{(1-\cos.2\alpha)}{2}\sin.2x + \frac{(1-\cos.3\alpha)}{3}\sin.3x \right.$$
$$\left. + \frac{(\cos.-4\alpha)}{4}\sin.4x + \ldots\right].$$

Si l'on fait $h=\frac{1}{2}\pi$, et que l'on représente le sinus verse de l'arc u par sin. v. u, on aura

$$\varphi x = \sin.\text{v}.\alpha\sin.x + \frac{\sin.\text{v}.2\alpha}{2}\sin.2x + \frac{\sin.\text{v}.3\alpha}{3}\sin.3x + \frac{\sin.\text{v}.4\alpha}{4}\sin.4x + \ldots$$

Cette série, toujours convergente, est de telle nature que si l'on donne à x une valeur quelconque comprise entre 0 et α, la somme de ses termes est $\frac{1}{2}\pi$; mais si l'on donne à x une valeur quelconque plus grande que α et moindre que π, la somme des termes est 0.

29. Dans l'exemple suivant, qui n'est pas moins remarquable, les valeurs de φx sont égales à $\sin.x$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et α, et sont nulles pour toutes les valeurs de x comprises entre α et π. Pour trouver ce développement, on emploiera l'équation (M). Les intégrales doivent être prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$; mais il suffira, dans le cas dont il s'agit, de prendre ces intégrales depuis $x=0$ jusqu'à $x=\alpha$, puisque les valeurs de φx sont supposées nulles dans le reste de l'intervalle. On en conclura

$$\varphi x = 2\alpha\left(\frac{\sin.\alpha\sin.x}{\pi^2-\alpha^2} + \frac{\sin.2\alpha\sin.2x}{\pi^2-2^2\alpha^2} + \frac{\sin.3\alpha\sin.3x}{\pi^2-3^2\alpha^2} + \ldots\right).$$

Si on supposait $\alpha=\pi$, tous les termes de la série s'évanouiraient, excepté le premier, qui deviendrait $\frac{0}{0}$, et équivaudrait à sin. x. On aurait alors $\varphi x = \sin. x$.

On peut étendre la même analyse au cas où l'ordonnée représentée par φx serait celle d'une ligne composée de différentes parties, dont les unes seraient des courbes et les autres des lignes droites. Par exemple, si la fonction dont on demande le développement en séries de cosinus d'arcs multiples, a pour valeur $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{\pi}{2}$, et est nulle depuis $x=\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $x=\pi$, on emploiera l'équation générale (N); et en effectuant les intégrations dans les limites données, on trouvera que le terme général $S\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2\right]\cos. ixdx$ est égal à $\frac{2}{i^3}$ lorsque i est impair, à $\frac{\pi}{i^2}$ lorsque i est double d'un nombre impair, et à $-\frac{\pi}{i^2}$ lorsque i est quadruple d'un nombre impair. D'un autre côté, on trouvera $\frac{1}{3}\frac{\pi^3}{2^3}$ pour valeur du premier terme $\frac{1}{2}S(\varphi x dx)$. On aura donc le développement suivant:

$$\frac{1}{2}\varphi x = \frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos. x}{1^3} + \frac{\cos. 3x}{3^3} + \frac{\cos. 5x}{5^3} + \frac{\cos. 7x}{7^3} + \ldots\right)$$
$$+\left(\frac{\cos. 2x}{2^2} - \frac{\cos. 4x}{4^2} + \frac{\cos. 6x}{6^2} - \frac{\cos. 8x}{8^2} + \ldots\right).$$

On pourra trouver de la même manière le développement d'une fonction de x qui exprime l'ordonnée du contour d'un trapèze. Supposons que φx soit égale à x depuis $x=0$ jusqu'à $x=\alpha$, que cette fonction soit égale à α depuis $x=\alpha$

jusqu'à $x=\pi-\alpha$, et enfin égale à $\pi-x$ depuis $x=\pi-\alpha$ jusqu'à $x=\pi$. Pour la développer en une série de sinus d'arcs multiples, on se servira de l'équation générale (M). Le terme général $S(\varphi x \sin. ix dx)$ sera composé de trois parties différentes, et l'on aura, après les réductions, $\frac{2}{i^2}\sin.(i\alpha)$ pour le coëfficient de $\sin. ix$ lorsque i est un nombre impair, et zéro pour ce coëfficient lorsque i est un nombre pair. On parvient ainsi à l'équation

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=2\left(\sin.\alpha\sin.x+\frac{1}{3^2}\sin.3\alpha\sin.3x+\frac{1}{5^2}\sin.5\alpha\sin.5x+\ldots\right).$$

Si l'on supposait $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, le trapèze se confondrait avec le triangle isocèle, et l'on aurait, comme précédemment, pour l'équation du contour de ce triangle

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=2\left(\sin.x-\frac{1}{3^2}\sin.3x+\frac{1}{5^2}\sin.5x-\frac{1}{7^2}\sin.7x+\ldots\right),$$

série qui est toujours convergente, quelle que soit la valeur de x. En général, les suites trigonométriques auxquelles nous sommes parvenus, en développant les diverses fonctions, sont convergentes; mais il ne nous a point paru nécessaire de le démontrer ici. En effet, les termes qui composent ces suites ne sont que les coëfficients des termes de séries qui donnent les valeurs des températures, et ces coëfficients affectent des exponentielles qui décroissent très-rapidement; en sorte qu'il ne peut rester aucun doute sur la convergence de ces dernières séries, et la facilité des applications numériques. A l'égard des séries formées, comme la précédente, de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, il est certain qu'elles sont convergentes, quoiqu'elles représentent les ordonnées de lignes discontinues. Cela ne résulte pas seulement de ce que les valeurs des termes diminuent continuellement, car cette condition ne suffit pas pour établir la convergence d'une série; il est nécessaire que les valeurs auxquelles on parvient, en augmentant continuellement le nombre des termes, s'approchent de plus en plus d'une limite fixe, et ne s'en écartent que d'une quantité qui peut devenir moindre que toute grandeur donnée. Cette limite est la valeur de la série. Or, on démontre facilement que les suites dont il s'agit satisfont à cette dernière condition.

Puisque l'on peut donner à α une valeur quelconque, on considérera cette quantité comme une nouvelle ordonnée; ce qui donnera lieu à la construction suivante :

Ayant tracé le rectangle dont la base $o\pi$ est égale à la demi-circonférence, et dont la hauteur est $\frac{1}{2}\pi$, sur le milieu du côté parallèle à la base, on élevera, perpendiculairement au plan du rectangle, une ligne de longueur egale à $\frac{1}{2}\pi$, et par l'extrémité supérieure de cette ligne, on tirera des droites aux quatre angles du rectangle. On formera ainsi une pyramide quadrangulaire. Si l'on porte maintenant sur le petit côté du rectangle, à partir du point o, une ligne quelconque égale à α, et que par l'extrémité de cette ligne on mène, suivant la ligne $\alpha\alpha$, parallèle à la base, un plan perpendiculaire à celui du rectangle, la section commune à ce plan et au solide sera le trapèze dont la hauteur est égale à α, et l'ordonnée variable du contour de ce trapèze est égale, comme nous venons de le voir, à

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin.\alpha\sin.x + \frac{1}{3^2}\sin.3\alpha\sin.3x + \frac{1}{5^2}\sin.5\alpha\sin.5x + \ldots\right).$$

Il suit de-là qu'en appelant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la surface supérieure de la pyramide quadrangulaire que nous avons formée, on aura pour l'équation de la surface du polyèdre, entre les limites $x=0$, $x=\pi$, $y=0$, $y=\frac{1}{2}\pi$,

$$z=\frac{\sin.y\sin.x}{1^2}+\frac{\sin.3y\sin.3x}{3^2}+\frac{\sin.5y\sin.5x}{5^2}+\frac{\sin.7y\sin.7x}{7^2}+\ldots$$

Il suit évidemment des remarques précédentes, que l'on peut développer une fonction quelconque en séries trigonométriques. Ces suites, formées de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, sont propres à représenter toutes les fonctions arbitraires et les ordonnées des lignes ou des surfaces dont la loi est discontinue. Non-seulement la possibilité de ce développement est démontrée, mais on en détermine effectivement toutes les parties. La valeur d'un coëfficient quelconque dans l'équation

$$\varphi x=a_1\sin.x+a_2\sin.2x+a_3\sin.3x+\ldots+a_i\sin.ix+\ldots$$

est celle d'une intégrale définie $S(\varphi x\sin.ix\,dx)$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. Quelle que puisse être la fonction φx, l'intégrale a une valeur déterminée qui peut être introduite dans le calcul. Les valeurs de ces intégrales définies sont analogues à celle de l'aire totale $S[\varphi(x)dx]$ comprise entre la courbe et l'axe dans un intervalle déterminé, ou à celle des quantités mécaniques, telles que les coordonnées du centre de gravité de cette aire. Il est évident que toutes ces quantités ont des valeurs assignables, soit que la figure des corps soit régulière, soit qu'on leur donne une forme entièrement arbitraire.

Si l'on applique ces principes à la question du mouvement des cordes vibrantes, on résoudra les difficultés que présentait l'analyse employée par Daniel Bernouilli. En effet, la solution proposée par ce géomètre ne paraissait point applicable au cas où la figure initiale de la corde est celle d'un triangle ou d'un trapèze, ou est telle qu'une partie seulement de la corde est ébranlée, tandis que les autres parties se confondent avec l'axe. Les inventeurs de l'analyse des équations aux différences partielles regardaient cette application comme impossible. D'Alembert objectait « que l'équation

$$y = \alpha \sin. x + \beta \sin. 2x + \gamma \sin. 3x + \delta \sin. 4x + \ldots .$$

« appartient évidemment à une courbe dont la courbure est « continue, au lieu que dans le cas du triangle isocèle la « courbure de la corde varie brusquement au point du milieu « où les deux parties font un angle. » — « Je soutiens, dit « Euler, que cette solution, quelque générale qu'elle pa- « raisse, n'est que très-particulière, et qu'elle n'épuise point « l'étendue de notre question. Pour nous assurer entièrement « de cette insuffisance, on n'a qu'à considérer le cas où l'on « n'aurait ébranlé, au commencement, qu'une partie de la « corde, le reste ayant demeuré dans un repos parfait; car « ayant posé cette partie $= b$, il faudrait déterminer en « sorte l'expression trouvée pour y, que, prenant $x > b$, elle « devînt o, et cela pour toutes les longueurs possibles entre « b et la longueur de la corde, ce qui est manifestement im- « possible. Ainsi le mouvement que la corde recevra dans

« ce cas, ne saurait jamais être représenté par l'expression « donnée pour y. » Ces objections font assez connaître combien il était nécessaire de démontrer qu'une fonction quelconque peut toujours être développée en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples; et de toutes les preuves de cette proposition, la plus complète est celle qui consiste à résoudre effectivement une fonction donnée en une telle série, en assignant les valeurs des coëfficients. Dans les recherches auxquelles on peut appliquer les équations aux différences partielles, il est souvent facile de trouver des solutions particulières dont la somme compose une intégrale plus générale. Mais l'emploi de ces solutions exigeait que l'on déterminât les constantes qu'elles renferment. C'est même dans cette détermination des coëfficients que consiste la difficulté de l'application. Il est remarquable que l'on puisse exprimer par des séries convergentes et, comme on le verra dans la suite, par des intégrales définies, les ordonnées des lignes et des surfaces qui ne sont point assujetties à une loi continue. On est conduit par-là à admettre dans le calcul des fonctions qui ont des valeurs égales toutes les fois que la variable reçoit des valeurs quelconques comprises entre deux limites données; tandis que si l'on substitue dans ces deux fonctions, au lieu de la variable, un nombre compris dans un autre intervalle, les résultats des deux substitutions sont différents l'un de l'autre. Les fonctions qui jouissent de cette propriété sont représentées par des lignes différentes, qui ne coïncident que dans une portion déterminée de leur cours, et offrent une espèce singulière d'osculation finie. Ces considérations prennent leur origine dans le calcul des équations aux différences partielles, auquel elles sont propres; elles jettent un nouveau jour sur ce calcul, et serviront à en faciliter l'usage dans les théories physiques. En général, pour appliquer utilement ces équations, il faut donner à leurs intégrales une forme appropriée à la nature même de la question que l'on traite, et restreindre l'étendue des intégrales, en sorte qu'elle corresponde parfaitement à celle de la question. Dans la théorie dont nous nous occupons, la forme des intégrales est déterminée par la nature même des conditions physiques; ce que l'on reconnaîtra plus distinctement encore dans la suite de ce Mémoire.

30. Il nous sera facile présentement de donner une solution générale de la question de la propagation uniforme de la chaleur dans une lame rectangulaire. Supposons que chacun des points de l'arête finie Y, qui passe par l'origine, soit maintenu à une température fixe et connue, et que les deux arêtes infinies X et X' soient retenues dans tous leurs points à la température o; soit 1 la demi-largeur de la lame, et φy la température du point de l'arête Y, qui est distant de y du milieu de la lame, cette fonction étant d'ailleurs telle que $\varphi(y)$ ne diffère point de $\varphi(-y)$: on trouvera, en appliquant les principes que nous venons d'exposer, le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}v = {} & e^{-\frac{\pi}{2}x}\cos.\left(\frac{\pi y}{2}\right)\mathrm{S}\left[dy\cos.\left(\frac{\pi}{2}y\right)\varphi y\right] \\
& + e^{-3\frac{\pi}{2}x}\cos.\left(3\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{S}\left[dy\cos.\left(3\frac{\pi}{2}y\right)\varphi y\right] \\
& + e^{-5\frac{\pi}{2}x}\cos.\left(5\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{S}\left[dy\cos.\left(5\frac{\pi}{2}y\right)\varphi y\right] \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Les intégrales doivent être prises depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$. On ne doit employer plusieurs termes de cette série que lorsque la valeur de x n'est pas très-grande; car, à une distance considérable de l'origine, les températures des différents points de la lame sont sensiblement égales au premier terme

$$2e^{-\frac{\pi}{2}x}\cos.\left(\frac{\pi}{2}y\right)\mathrm{S}\left[dy\cos.\left(\frac{\pi}{2}y\right)\varphi y\right].$$

En général, toutes les circonstances du mouvement uniforme de la chaleur sont clairement exprimées dans la solution précédente; elle fait connaître comment s'opère la propagation de la chaleur par ondes transversales perpendiculaires à la longueur, et en même temps par ondes longitudinales qui partent du milieu du solide, et se dissipent à la surface. Mais nous nous réservons d'exposer ces mêmes conséquences dans des cas plus propres que celui-ci à les rendre sensibles.

V.

Du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans une armille.

31. L'équation qui exprime le mouvement de la chaleur dans une armille est (art. 9)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{hl}{\mathrm{CDS}}z.$$

Il s'agit maintenant d'intégrer cette équation. On écrira seulement $\frac{dz}{dt}=\mathrm{K}\frac{d^2z}{dx^2}-hz$. La valeur de K représente $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}}$, celle de h, $\frac{hl}{\text{CDS}}$; x désigne la longueur de l'arc compris entre un point de l'anneau et l'origine, z la température que l'on observerait en ce point après un temps donné t. On supposera d'abord $z=e^{-ht}u$, u étant une nouvelle indéterminée : on en tirera $\frac{du}{dt}=\text{K}\frac{d^2u}{dx^2}$. Or cette équation convient au cas où la dissipation à la surface serait nulle, puisqu'on la déduirait de la précédente en faisant $h=0$. On conclut de-là que les différents points de l'anneau se refroidissent successivement par l'action du milieu, sans que cette circonstance trouble en aucune manière la loi de la distribution de la chaleur. En effet, si, au moyen de l'équation $\frac{du}{dt}=\text{K}\frac{d^2u}{dx^2}$, on calcule les valeurs de u qui répondent aux différents points de l'anneau dans un même instant, on connaîtra quel serait l'état du solide, si la chaleur s'y propageait sans qu'il y eût aucune déperdition à la surface; et pour déterminer ensuite quel serait l'état du solide au même instant, si cette déperdition eût eu lieu, il suffirait de multiplier toutes les valeurs contemporaines de u par une même fraction qui est e^{-ht}. Ainsi le refroidissement qui s'opère à la surface ne change point la loi de la distribution de la chaleur. Il en résulte seulement que la température de chaque point est moindre qu'elle n'eût été sans cette circonstance, et elle diminue pour cette cause proportionnellement aux puissances successives de la fraction e^{-ht}

La question étant réduite à intégrer l'équation

$$\frac{du}{dt}=\text{K}\frac{d^2u}{dx^2},$$

on remarquera que cette équation est satisfaite, si l'on donne à u la valeur particulière $ae^{mt}\sin. nx$, m et n étant assujetties à la condition $m = -Kn^2$. On prendra donc pour une valeur particulière de u la fonction $ae^{-Kn^2t}\sin. nx$. Pour que cette valeur de u convienne à la question, il faut qu'elle ne change point lorsque la distance x est augmentée de la quantité $2\pi r$, r désignant le rayon moyen de l'anneau. Donc $2n\pi r$ doit être un multiple i de la circonférence 2π, ce qui donne $n = \frac{i}{r}$. On peut prendre pour i un nombre entier quelconque; on le supposera toujours positif, parce que s'il était négatif, il suffirait de changer dans la valeur $ae^{-Kn^2t}\sin. nx$ le signe du coëfficient a, qui est indéterminé. Cette valeur particulière

$$a e^{-\frac{Ki^2t}{r^2}} \sin.\left(\frac{ix}{r}\right)$$

ne pourrait satisfaire à la question proposée qu'autant qu'elle représenterait l'état initial du solide. Or en faisant $t = 0$, on trouve $u = a\sin.\frac{ix}{r}$. Supposons donc que les valeurs initiales de u soient exprimées en effet par $a\sin.\frac{ix}{r}$, i ayant la valeur 1, c'est-à-dire que les températures primitives des différents points soient proportionnelles aux sinus des arcs x compris entre ces points et l'origine; le mouvement de la chaleur dans l'intérieur de l'anneau sera exactement représenté par l'équation

$$u = a e^{-\frac{K}{r^2}t} \sin.\left(\frac{x}{r}\right):$$

et si l'on a égard à la déperdition de la chaleur par la surface, on trouvera

$$z = a e^{-\left(h + \frac{K}{r^2}\right) t} \sin. \frac{x}{r}.$$

Dans le cas dont il s'agit, qui est le plus simple de tous ceux que l'on puisse concevoir, les températures conservent leurs rapports primitifs, et celle d'un point diminue comme les puissances successives d'une fraction qui est la même pour tous les points.

On remarquera les mêmes propriétés, si l'on suppose que les températures initiales sont proportionnelles au sinus du double de la distance $\frac{x}{r}$; et cela a lieu en général lorsque les températures données sont représentées par $a \sin. \left(\frac{ix}{r}\right)$, i étant un nombre entier positif quelconque.

On arrivera aux mêmes conséquences en prenant pour valeur particulière de u la quantité $a e^{-Kn^2 t} \cos. nx$. On a aussi $2n\pi r = 2i\pi$, et $n = \frac{i}{r}$, donc l'équation

$$u = a e^{-\frac{Ki}{r^2} t} . \cos. \frac{ix}{r}$$

exprimera le mouvement de la chaleur dans l'intérieur de l'anneau, si les températures initiales sont représentées par $a \cos. \frac{ix}{r}$.

Dans tous les cas où les températures données sont proportionnelles aux sinus ou aux cosinus d'un multiple de la distance $\frac{x}{r}$, les rapports établis entre ces températures subsistent continuellement pendant la durée infinie du refroidissement ; il en serait de même si les températures initiales étaient représentées par la fonction

$$a \sin. \frac{ix}{r} + b \cos. \frac{ix}{r},$$

i étant un nombre entier, a et b des coëfficients quelconques.

Venons maintenant au cas général, dans lequel les températures initiales n'ont point les rapports dont on vient de parler, mais sont représentées par une fonction quelconque Fx. Donnons à cette fonction la forme $\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$, en sorte qu'on ait toujours $Fx = \varphi\left(\frac{x}{r}\right)$; et concevons que la fonction $\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$ est décomposée en une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples, affectés de coëfficients convenables, en sorte qu'on ait l'équation

$$\varphi\left(\frac{x}{r}\right) = \left\{\begin{matrix} a_0 \sin. 0\frac{x}{r} + a_1 \sin. 1\frac{x}{r} + a_2 \sin. 2\frac{x}{r} + a_3 \sin. 3\frac{x}{r} + \ldots \\ b_0 \cos. 0\frac{x}{r} + b_1 \cos. 1\frac{x}{r} + b_2 \cos. 2\frac{x}{r} + b_3 \cos. 3\frac{x}{r} + \ldots \end{matrix}\right\} (\varepsilon).$$

Les coëfficients $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$; $b_0, b_1, b_2, b_3 \ldots$ sont regardés comme connus et calculés d'avance, leur nombre étant déterminé ou infini, selon la nature de la courbe qui répond à φx. Il est visible que la valeur de u sera alors représentée par l'équation

$$u = b_0 + \left.\begin{matrix} a_1 \sin.\frac{x}{r} \\ + b_1 \cos.\frac{x}{r} \end{matrix}\right\} e^{-\frac{Kt}{r^2}} + \left.\begin{matrix} a_2 \sin.2\frac{x}{r} \\ + b_2 \cos.2\frac{x}{r} \end{matrix}\right\} e^{-\frac{2^2 Kt}{r^2}} + \left.\begin{matrix} a_3 \sin.3\frac{x}{r} \\ + b_3 \cos.3\frac{x}{r} \end{matrix}\right\} e^{-\frac{3^2 Kt}{r^2}} + \text{etc.}$$

En effet, 1° cette valeur de u satisfera à l'équation

$$\frac{du}{dt} = K\frac{d^2 u}{dx^2},$$

parce qu'elle est la somme de plusieurs valeurs particulières; 2° elle ne changera point lorsque l'on augmentera la distance x d'un multiple quelconque de la circonférence de l'anneau; 3° elle satisfera à l'état initial, parce qu'en faisant $t=0$, on trouvera par hypothèse l'équation (ε). Donc toutes les conditions de la question sont remplies, et il ne reste plus qu'à multiplier par e^{-ht} cette valeur de u.

A mesure que le temps t augmente, chacun des termes qui composent la valeur de u devient de plus en plus petit. Le système des températures tend donc continuellement à se confondre avec l'état régulier et constant dans lequel la différence de la température u à la constante b_0, qui est, comme on le verra, la température initiale moyenne, est représentée par

$$\left(a_1 \sin.\frac{x}{r} + b_1 \cos.\frac{x}{r}\right) e^{-\frac{Kt}{r^2}}.$$

Ainsi les valeurs particulières que nous avons considérées précédemment, et dont nous composons la valeur générale, tirent leur origine de la question elle-même: chacune d'elles représente un état élémentaire qui peut subsister dès qu'il est une fois établi. Cette propriété ne convient qu'aux valeurs particulières dont il s'agit. Toutes les fois que l'état initial n'est point conforme à celui que représente une de ces valeurs, les rapports qui existaient entre les températures contemporaines changent continuellement, et le système converge avec un état extrême correspondant à une des valeurs particulières.

La question est donc réduite à déterminer des coëfficients $a_0, a_1, a_2 \ldots b_0, b_1, b_2 \ldots$ Pour y parvenir, on écrira l'équation

$$\varphi u = b_0 + \begin{cases} a_1 \sin. u + a_2 \sin. 2u + a_3 \sin. 3u + a_4 \sin. 4u + \ldots \\ b_1 \cos. u + b_2 \cos. 2u + b_3 \cos. 3u + b_4 \cos. 4u + \ldots \end{cases}$$

En multipliant chaque membre par du, et intégrant depuis $u=0$ jusqu'à $u=2\pi$, on aura $\int \varphi u du = b_0 2\pi$, et tous les autres termes deviendront nuls. Ainsi la valeur du coëfficient b_0 est $S \frac{\varphi u du}{2\pi}$, l'intégrale étant prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=2\pi$.

Pour déterminer le coëfficient a_1, on multipliera les deux membres de l'équation par $\sin. u du$; et si l'on voulait déterminer b_1, on multiplierait par $\cos. u du$. En général on déterminera un coëfficient quelconque en multipliant tous les termes de l'équation par la fonction de u qui est affectée de ce coëfficient. Écrivant ensuite de part et d'autre la différentielle du, on intégrera depuis $u=0$ jusqu'à $u=2\pi$, et on obtiendra toujours, par ce moyen, la valeur du coëfficient cherché. En effet, l'intégration fera disparaître tous les termes du second membre, excepté celui dans lequel se trouve le coëfficient que l'on a choisi. La valeur de ce terme unique sera le produit de π par le coëfficient dont il s'agit, si ce n'est pour le premier terme b_o, qui donne un résultat double $b_o 2\pi$. On aura donc les résultats suivants:

$$2\pi b_o = \text{S} du\varphi u,\ \pi a_i = \text{S}(du \sin . iu\varphi u),\ \pi b_i = \text{S}(du \cos . iu\varphi u$$

Il est manifeste que ces valeurs des coëfficients sont des quantités existantes dans tous les cas possibles, quelle que puisse être la fonction φu. En effet, cette fonction peut être représentée par l'ordonnée variable d'une courbe dont les abscisses seraient comprises dans l'intervalle de $u = 0$ à $u = 2\pi$. Supposons donc que l'on trace une ligne courbe correspondante à cet intervalle, la figure de cette ligne sera arbitraire, en sorte qu'elle pourrait être composée de portions de lignes courbes entièrement différentes. On peut même concevoir que les ordonnées deviennent subitement nulles pour une portion déterminée de l'axe, c'est-à-dire que la ligne tracée se confond avec l'axe dans cette partie de son cours. Or, dans tous ces cas, l'aire désignée par l'intégrale totale $\text{S}(\varphi u du)$ est une quantité subsistante et déterminée. Il en serait de même de la quantité $\text{S}(\varphi u \sin . iudu)$, ou $\text{S}(\varphi u \cos . iudu)$; elle représente l'aire terminée par une certaine courbe que l'on formerait en multipliant chaque ordonnée φu de la ligne arbitraire par la fonction correspondante $\sin . (iu)$ ou $\cos . (iu)$. Ainsi tous les coëfficients $b_o, a_1, a_2, a_3 \ldots . b_1, b_2, b_3 \ldots .$ sont autant d'intégrales définies qui contiennent une fonction arbitraire, et les aires correspondantes à ces intégrales ont toujours des valeurs fixes et déterminées.

En substituant dans l'équation (ε) les valeurs trouvées pour les coëfficients, on aura l'équation suivante, qui offre une propriété remarquable des lignes trigonométriques, et donne le développement d'une fonction arbitraire en séries convergentes de sinus et de cosinus d'arcs multiples.

$$(\mathrm{P})\quad \pi\varphi u = \frac{1}{2}\mathrm{S}\varphi u\,du + \left\{\begin{array}{l} \sin.u\mathrm{S}(\varphi u\sin.u\,du) + \sin.2u\mathrm{S}(\varphi u\sin.2u\,du) \\ \qquad + \sin.3u\mathrm{S}(\varphi u\sin.3u\,du) + \ldots \\ \cos.u\mathrm{S}(\varphi u\cos.u\,du) + \cos.2u\mathrm{S}(\varphi u\cos.2u\,du) \\ \qquad + \cos.3u\mathrm{S}(\varphi u\cos.3u\,du) + \ldots \end{array}\right.$$

ou mettant x au lieu de u, et laissant u sous le signe S,

$$(\mathrm{II})\quad \pi\varphi x = \mathrm{S}du\varphi u\left[\frac{1}{2} + \cos.(u-x) + \cos.2(u-x) + \cos.3(u-x) + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{S}du\varphi u\Sigma\cos.i(u-x).$$

Le signe Σ indique que l'on doit donner au nombre entier i toutes les valeurs positives ou négatives; toutes les intégrales désignées par le signe S doivent être prises depuis $u=0$ jusqu'à $u=2\pi$.

32. Si maintenant on met à la place de u, $\frac{x}{r}$, et que les intégrations désignées par S aient lieu depuis $\frac{x}{r}=0$ jusqu'à $\frac{x}{r}=2\pi$, on aura déterminé tous les coëfficients qui entrent dans l'équation (ε). En remplaçant la fonction $\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$ par

celle-ci, Fx, on aura pour exprimer le mouvement de la chaleur dans un anneau qui se refroidit librement à l'air, l'équation suivante, qui contient la solution complète de la question proposée.

$$(E)\quad \pi r z = e^{-ht}\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{SF}x\,dx + \left\{\begin{array}{l}\mathrm{S}(\mathrm{F}x\sin.\frac{x}{r}dx)\sin.\frac{x}{r}\\ +\,\mathrm{S}(\mathrm{F}x\cos.\frac{x}{r}dx)\cos.\frac{x}{r}\end{array}\right\} e^{-\frac{k}{r^2}t} + \left\{\begin{array}{l}\mathrm{S}(\mathrm{F}x\sin.\frac{2x}{r}dx)\\ +\,\mathrm{S}(\mathrm{F}x\cos.\frac{2x}{r}dx)\end{array}\right\} e^{-\frac{2k}{r^2}t} + \text{etc.}\right)$$

Le premier terme $\frac{\mathrm{SF}x\,dx}{2\pi r}$, qui sert à former la valeur de z, est évidemment la température moyenne initiale, c'est-à-dire celle qu'aurait chaque point, si toute la chaleur initiale était également répartie entre tous les points.

On a supposé que l'anneau, après avoir été échauffé d'une manière quelconque, se refroidissait successivement; mais si, au contraire, on l'échauffait jusqu'à l'élever à des températures constantes, et qu'on voulût déterminer les variations qui conduisent à cet état final, il faudrait employer une intégrale différente de celle que nous venons de donner.

33. On peut appliquer l'équation précédente (E), quelle que soit la forme de la fonction donnée Fx. Nous considérerons deux cas particuliers, savoir : 1° celui qui a lieu lorsque l'anneau, ayant été élevé par l'action d'un foyer à des températures permanentes, on supprime tout-à-coup le foyer; 2° le cas où la moitié de l'anneau, échauffée également dans tous ses points, serait réunie subitement à l'autre

moitié, qui aurait dans toutes ses parties la température initiale o.

1° On a vu précédemment (page 225) que les températures permanentes de l'anneau sont exprimées par l'équation

$$z = a\alpha^{x} + b\alpha^{-x},$$

et la quantité α a pour valeur

$$e^{\sqrt{\frac{hl}{KS}}}.$$

Si l'on suppose qu'il y ait un seul foyer, il sera nécessaire que l'on ait l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ au point opposé à celui qui est occupé par le foyer. La condition $a\alpha^{x} - b\alpha^{-x} = 0$ sera donc satisfaite en ce point. Regardons, pour plus de facilité dans le calcul, la fraction $\frac{hl}{KS}$ comme égale à l'unité, et prenons le rayon r de l'anneau pour le rayon des tables trigonométriques : on aura

$$z = ae^{x} + be^{-x} \quad \text{et} \quad ae^{\pi} - be^{-\pi} = 0.$$

Donc l'état de l'anneau est représenté par l'équation

$$z = b\left(\frac{e^{-\pi+x} + e^{\pi-x}}{e^{\pi}}\right);$$

et désignant par u l'abscisse $x - \pi$, on a

$$z = A\left(\frac{e^{u} + e^{-u}}{e^{\pi} + e^{-\pi}}\right).$$

la température fixe du point où le foyer est placé étant désignée par A, et les abscisses u étant comptées depuis le point opposé au foyer. On appliquera maintenant l'équation générale

$$\pi\varphi u = \frac{1}{2}S\varphi u\,du + \sin.u\,S(\varphi u\sin.u\,du) + \sin.2u\,S(\varphi u\sin.2u\,du) + \text{etc.}$$
$$+ \cos.u\,S(\varphi u\cos.u\,du) + \cos.2u\,S(\varphi u\cos.2u\,du) + \text{etc.}$$

Et faisant les intégrations indiquées, on trouvera

$$\pi\left(e^{u}+e^{-u}\right)=\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)-\frac{2\cos.u}{1^2+1}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)+\frac{2\cos.2u}{2^2+1}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)-\text{etc.}$$

ou

$$\pi\left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right)=1-\frac{2\cos.u}{1^2+1}+\frac{2\cos.2u}{2^2+1}-\frac{2\cos.3u}{3^2+1}+\text{etc.}$$

Cette équation donne le développement de la fonction $e^{u}+e^{-u}$ en série formée de cosinus d'arcs multiples. On a trouvé dans les articles précédents le développement de la fonction $e^{u}-e^{-u}$ en séries de sinus d'arcs multiples; les séries de ce genre, qui servent à développer les fonctions les plus élémentaires de l'analyse, doivent toujours être remarquées.

Si on substitue, dans l'équation qui donne le développement de φx, les coëfficients qui viennent d'être déterminés, on aura

$$\left(e^{-\pi+x}+e^{\pi-x}\right)\pi=\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)+\frac{2\cos.x}{1^2+1}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)+\frac{2\cos.2x}{2^2+1}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)+\text{etc.}$$

On connaît maintenant les coëfficients qui entrent dans l'équation générale (E), et en les substituant, on a

$$\pi v = \frac{e^{-ht}\,A}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\left[e^{\pi}-e^{-\pi}+\frac{2\cos.x}{1^2+1}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)e^{-Kt}+\frac{2\cos.2x}{2^2+1}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)e^{-2Kt}+\text{etc.}\right.$$

Désignant par M la chaleur moyenne initiale, ou

$$\frac{A\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi\left(e^{\pi}+e^{-\pi}\right)},$$

on a l'équation suivante, qui exprime le mouvement de la chaleur dans un anneau, lorsqu'on expose cet anneau à un courant d'air froid, après qu'il a été échauffé par un de ses points, et amené ainsi à des températures stationnaires :

$$\pi v = 2e^{-ht}M\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos.x}{1^2+1}e^{-Kt}+\frac{\cos.2x}{2^2+1}e^{-2^2Kt}+\frac{\cos.3x}{3^2+1}e^{-3^2Kt}+\text{etc.}\right)$$

34. 2° Pour faire une seconde application de l'équation générale (E), nous supposerons que la chaleur initiale est tellement distribuée, qu'une moitié de l'anneau comprise depuis o jusqu'à π, a dans tous ses points la température 1, et que l'autre partie est à la température o. Il s'agit de déterminer l'état de l'anneau après un temps écoulé t.

On fera d'abord usage de l'équation qui donne le développement de φx. La fonction arbitraire φx, qui représente l'état initial, est telle dans ce cas, que la chaleur est 1 toutes les fois que la variable est comprise entre o et π. Il en résulte que l'on doit supposer $\varphi x = 1$, et ne prendre les intégrales que depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. Les autres parties des intégrales sont nulles, d'après l'hypothèse. On obtiendra d'abord l'équation qui donne le développement de la fonction proposée, dont la valeur est 1, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et nulle depuis $x=\pi$ jusqu'à $x=2\pi$:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin.x+\frac{1}{3}\sin.3x+\frac{1}{5}\sin.5x+\frac{1}{7}\sin.7x+\text{etc.}\right)$$

Cette équation se réduit à celle-ci,

$$\frac{1}{4}\pi=\sin.x+\frac{1}{3}\sin.3x+\frac{1}{5}\sin.5x+\frac{1}{7}\sin.7x+\text{etc.},$$

à laquelle nous sommes parvenus précédemment, par un procédé très-différent.

Si maintenant on substitue dans l'équation générale les valeurs qu'on vient de trouver pour les coëfficients constants, on aura l'équation,

$$\frac{1}{2}\pi z=e^{-ht}\left(\frac{1}{4}\pi+\sin.x.e^{-Kt}+\frac{1}{3}\sin.3x.e^{-3.3Kt}+\frac{1}{5}\sin.5x.e^{-5.5Kt}+\text{etc.}\right),$$

qui exprime la loi suivant laquelle varie la température de chaque point de l'anneau, et fait connaître son état après un temps donné. Nous nous bornerons aux deux applications précédentes, et nous terminerons cet article par quelques observations sur la solution générale exprimée par l'équation (E).

35. 1° Si l'on suppose K infini, l'état de l'anneau sera exprimé par $\pi r z = e^{-ht} \frac{1}{2} \mathrm{SF}x\,dx$; ou désignant par M la température moyenne initiale, $z = e^{-ht}\mathrm{M}$; la température d'un point quelconque deviendra subitement égale à la température moyenne, et les différents points conserveront toujours des températures égales, ce qui est une conséquence nécessaire de l'hypothèse où l'on admet une conductibilité infinie.

2° On aura le même résultat si le rayon r de l'anneau est infiniment petit.

3° Pour trouver la température moyenne de l'anneau après un temps t, il faut prendre l'intégrale $\int z\,dx$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2\pi r$, et diviser par $2\pi r$. En intégrant entre ces limites les différentes parties de la valeur de z, et supposant ensuite $x = 2\pi r$, on trouvera que les valeurs totales des intégrales sont nulles, excepté pour le premier terme, en sorte que $\pi r \int z\,dx = e^{-ht} . 2a\pi r$. La température moyenne a donc pour valeur, après le temps t, la quantité $e^{-ht}\mathrm{M}$. Ainsi la température moyenne de l'anneau décroît de la même manière que si la conductibilité était infinie, ou de même que si tous les points de la masse étaient réunis en un seul : les variations occasionées par la propagation de la chaleur dans ce solide n'influent point sur la valeur de la température moyenne.

Dans les trois cas que nous venons de considérer, la température décroît proportionnellement aux puissances de la fraction e^{-h}, ou, ce qui est la même chose, à l'ordonnée d'une courbe logarithmique, l'abscisse étant prise pour le temps. Cette loi est connue depuis long-temps; mais il faut remarquer qu'elle n'a lieu, en général, que si les corps ont une petite dimension. L'analyse précédente nous apprend que si le diamètre d'un anneau n'est pas très-petit, le refroidissement d'un point déterminé ne serait point d'abord assujetti à cette loi. Il n'en est pas de même de la température moyenne, qui décroît toujours proportionnellement aux ordonnées d'une logarithmique. Au reste, il ne faut point perdre de vue que la section génératrice de l'armille est supposée avoir des dimensions assez petites pour que les points de la même section ne diffèrent point sensiblement de température. Si cette condition n'avait point lieu, les changements successifs de la température d'un point, ou ceux de la température moyenne, ne seraient point au commencement du refroidissement représentés par une logarithmique.

36. 4° Si l'on voulait connaître quelle est la quantité de chaleur qui s'échappe dans un temps donné par la superficie d'une portion donnée de l'anneau, il faudrait employer l'intégrale $hl\int dt \int z dx$, et prendre cette intégrale entre les limites qui se rapportent au temps. Par exemple, si l'on choisit o et 2π pour les limites de x, et o et $\frac{1}{0}$ pour les limites de t; c'est-à-dire, si l'on veut déterminer toute la quantité de chaleur qui s'échappe de la superficie entière pendant toute la durée du refroidissement, on obtient, après les intégrations, un résultat égal à toute la chaleur initiale, c'est-

à-dire, à $2\pi r$M, M étant la température moyenne initiale

5° Si l'on veut connaître combien il s'écoule de chaleur, dans un temps donné, à travers une section déterminée de l'anneau, il faudra employer l'intégrale $KS\int dt \frac{dz}{dx}$, en mettant pour $\frac{dz}{dx}$ la valeur de ce rapport prise au point dont il s'agit.

37. 6° La chaleur tend à se distribuer dans l'anneau, suivant une loi qui mérite d'être remarquée. Plus la valeur du temps écoulé t augmente, et plus les termes qui composent la valeur de z dans l'équation (E) deviennent petits par rapport à ceux qui les précèdent. Il y a donc une certaine valeur de t, pour laquelle le mouvement de la chaleur commence à être sensiblement représenté par l'équation

$$z = \left[a_0 + \left(a_1 \sin.\frac{x}{r} + b_1 \sin.\frac{x}{r}\right) e^{-\frac{K}{r^2}t}\right] e^{-ht}.$$

Cette même relation continue à subsister pendant la durée infinie du refroidissement. Dans cet état, si l'on choisit deux points de l'anneau situés aux deux extrémités d'un même diamètre, en représentant par x_1 et x_2 leurs distances respectives à l'origine, par z_1 et z_2 leurs températures correspondantes au temps t, on aura

$$z_1 = \left[a_0 + \left(a_1 \sin.\frac{x_1}{r} + b_1 \cos.\frac{x_1}{r}\right) e^{-\frac{K}{r^2}t}\right] e^{-ht}$$

$$z_2 = \left[a_0 + \left(a_1 \sin.\frac{x_2}{r} + b_1 \cos.\frac{x_2}{r}\right) e^{-\frac{K}{r^2}t}\right] e^{-ht}$$

Les sinus des arcs $\frac{x_1}{r}$ et $\frac{x_2}{r}$ ne diffèrent que par le signe, et il en est de même des quantités $\cos.\frac{x_1}{r}$ et $\cos.\frac{x_2}{r}$: donc $\frac{z_1+z_2}{2}=ae^{-ht}$. Ainsi la demi-somme des températures des points opposés donne une quantité ae^{-ht}, qui serait encore la même si on avait choisi deux points situés aux extrémités d'un autre diamètre. Cette quantité ae^{-ht} est, comme on l'a vu plus haut, la valeur exacte de la température moyenne après le temps t. Ainsi la demi-somme des températures de deux points opposés quelconques, décroît continuellement avec la température moyenne de l'anneau, et en représente la valeur sans erreur sensible, après que le refroidissement a duré un certain temps. Examinons plus particulièrement en quoi consiste ce dernier état, qui est exprimé par l'équation

$$z=\left(a+\left\{\begin{matrix}a_1\sin.\frac{x}{r}\\+b_1\cos.\frac{x}{r}\end{matrix}\right\}e^{-\frac{K}{r^2}t}\right)e^{-ht}.$$

Si l'on cherche d'abord le point de l'anneau pour lequel on a l'équation

$$a_1\sin.\frac{x}{r}+b_1\cos.\frac{x}{r}=0,\qquad \text{ou}\qquad \frac{x}{r}=\text{arc. tang}\left(-\frac{b_1}{a_1}\right),$$

on voit que la température de ce point est, à chaque instant, la température moyenne de l'anneau. Il en est de même du point diamétralement opposé, car l'abscisse x de ce dernier point satisferait encore à l'équation précédente

$$\frac{x}{r} = \text{arc. tang.} \left(-\frac{b_1}{a_1}\right).$$

Désignons par X la distance à laquelle le premier de ces points est placé, on aura

$$b_1 = -a_1 \frac{\sin. \frac{X}{r}}{\cos. \frac{X}{r}},$$

et substituant cette valeur de b_1, on a

$$z = e^{-ht}\left[a_0 + \frac{a_1}{\cos. \left(\frac{X}{r}\right)} \sin. \frac{(x-X)}{r}\, e^{-\frac{K}{r^2}t}\right].$$

Si l'on prend maintenant pour origine des abscisses le point qui répondait à l'abscisse X, et que l'on désigne par u la nouvelle abscisse $x - X$, on aura

$$z = e^{-ht}\left[a_0 + b \sin. \left(\frac{u}{r}\right) e^{-\frac{K}{r^2}t}\right].$$

A l'origine, où l'abscisse u est o, et au point opposé, la température z est toujours égale à la température moyenne. Ces deux points divisent la circonférence de l'anneau en deux parties dont l'état est pareil, mais de signe opposé; chaque point de l'une de ces parties a une température qui excède la température moyenne, et la quantité de cet excès est proportionnelle au sinus de la distance à l'origine; chaque point de l'autre partie a une température moindre que la température moyenne, et la différence est la même que l'excès dans le point opposé. Cette distribution symétrique de la chaleur subsiste pendant toute la durée du refroidissement. Il s'établit aux deux extrémités de la moitié échauffée, deux flux de chaleur dirigés vers la moitié froide, et dont l'effet est de rapprocher continuellement l'une et l'autre moitié de l'armille de la température moyenne.

On remarquera maintenant que dans l'équation générale qui donne la valeur de z, chacun des termes est de la forme

$$\left(a \sin. i\frac{x}{r} + b\cos. i\frac{x}{r}\right) e^{-i^2 \frac{K}{r^2} t}.$$

On pourra donc tirer, par rapport à chaque terme, des conséquences analogues aux précédentes. En effet, désignant par X la distance pour laquelle le coëfficient

$$a_i \sin. i\frac{x}{r} + b_i \cos. i\frac{x}{r}$$

est nul, on aura l'équation

$$b_i = -a_i \operatorname{tang.}\left(i\frac{X}{r}\right);$$

et en substituant dans le terme dont il s'agit, on a

$$\frac{a_i}{\cos. i\frac{X}{r}}\left(\sin. x\cos.\frac{X}{r} - \sin.\frac{X}{r}\cos. x\right), \quad \text{ou} \quad a\sin. i\left(\frac{x-X}{r}\right),$$

a étant un nouveau coëfficient. Il suit de là qu'en prenant pour l'origine des coordonnées le point dont l'abscisse était X, et désignant par u la nouvelle abscisse $x-X$, on aura pour exprimer les changements de cette partie de la valeur de z, la fonction

$$ae^{-ht} \cdot e^{-i^2\frac{K}{r^2}t} \sin.\left(i\frac{u}{r}\right).$$

Si cette même partie de la valeur de z subsistait seule, en sorte que les coëfficients de toutes les autres fussent nuls, l'etat de l'anneau serait représenté par la fonction

$$ae^{-ht} \cdot e^{-i^2\frac{K}{r^2}t} \sin.\left(i\frac{u}{r}\right),$$

et la température de chaque point serait proportionnelle au sinus du multiple i de la distance de ce point à l'origine. Cet état est analogue à celui que nous avons décrit précédemment : il en diffère en ce que le nombre des points qui ont une même température, toujours égale à la température moyenne de l'anneau, ne serait pas 2 seulement, mais en général égal à $2i$. Chacun de ces points ou nœuds sépare deux portions contiguës de l'anneau qui sont dans un état semblable, mais de signe opposé. La circonférence se trouve ainsi divisée en plusieurs parties égales, dont l'état est alternativement positif ou négatif. Le flux de chaleur est le plus grand possible dans les nœuds : il se dirige toujours vers la portion qui est dans l'état négatif, et il est nul dans le point qui est à égale distance de deux nœuds consécutifs. Les rapports qui existent alors entre les températures, se conservent pendant toute la durée du refroidissement, et ces températures varient ensemble très-rapidement, proportionnellement aux puissances successives de la fonction

$$e^{-h} \cdot e^{-i^2\frac{K}{r^2}}.$$

Si l'on donne successivement à i les valeurs 0, 1, 2, 3,

$4, 5, \ldots$, on connaîtra tous les états réguliers et élémentaires que la chaleur peut affecter pendant qu'elle se propage dans un anneau solide. Lorsqu'un de ces modes simples est une fois établi, il se conserve de lui-même, et les rapports qui existaient entre les températures ne changent point. Il n'en est pas de même lorsque les températures initiales des différents points ne sont pas proportionnelles aux sinus d'un même multiple de la distance de ces points à l'origine. Les rapports des températures varient alors continuellement. Mais quels que soient ces rapports primitifs, et de quelque manière que l'anneau ait été échauffé, le mouvement de la chaleur se décompose de lui-même en plusieurs mouvements simples, pareils à ceux que nous venons de décrire, et qui s'accomplissent tous à-la-fois sans se troubler. Dans chacun de ces états, la température est proportionnelle au sinus d'un certain multiple de la distance à un point fixe. La somme de toutes ces températures partielles, prises pour un seul point dans un même instant, est la température réelle de ce point. Or les parties qui composent cette somme décroissant beaucoup plus rapidement les unes que les autres, il en résulte que ces états élémentaires de l'anneau, qui correspondent aux différentes valeurs de i, et dont la superposition détermine le mouvement total de la chaleur, disparaissent en quelque sorte les uns après les autres. Ils cessent bientôt d'avoir une influence sensible sur la valeur de la température, et laissent subsister seul le premier d'entre eux, pour lequel la valeur de i est la moindre de toutes. On se formera de cette manière une idée exacte de la loi suivant laquelle la chaleur se distribue dans une armille, et se dissipe par sa surface. L'état de l'armille devient de plus en plus symétrique, il ne tarde point à se confondre avec celui vers lequel il a une tendance naturelle, et qui consiste en ce que les températures des différents points doivent être proportionnelles aux sinus d'un même multiple de l'arc qui mesure la distance à l'origine. La disposition initiale n'apporte aucun changement à ces résultats.

VI.

De la communication de la chaleur entre des masses disjointes.

38. Nous avons maintenant à faire remarquer la conformité de l'analyse précédente avec celle que l'on doit employer pour déterminer les lois de la propagation de la chaleur entre des masses disjointes. Nous arriverons ainsi à une seconde solution de la question du mouvement de la chaleur dans une armille. La comparaison des deux résultats fera connaître les véritables fondements de la méthode que nous avons suivie pour intégrer les équations de la propagation de la chaleur dans les corps continus. Nous examinerons en premier lieu un cas extrêmement simple, qui est celui de la communication de la chaleur entre deux masses égales.

Supposons que deux masses cubiques m et m, d'égales dimensions et de même matière, soient inégalement échauffées; que leurs températures respectives soient a et b; qu'elles soient d'une conductibilité infinie. Si l'on mettait ces deux corps en contact, la température deviendrait subitement égale dans l'une et l'autre à la température moyenne $\frac{1}{2}(a+b)$.

Supposons que les deux masses soient séparées par un très-petit intervalle; qu'une tranche infiniment petite du premier corps s'en détache pour se joindre au second, et qu'elle retourne au premier immédiatement après le contact : en continuant ainsi de se porter alternativement, et dans des temps égaux et infiniment petits, de l'une des masses à l'autre, la tranche interposée fait passer successivement la chaleur du corps le plus échauffé dans celui qui l'est moins. Il s'agit de déterminer quelle serait, après un temps donné, la température de chaque corps, s'ils ne perdaient par leur surface aucune partie de la chaleur qu'ils contiennent. Au reste, on ne suppose point que la transmission de la chaleur dans les corps solides continus s'opère d'une manière semblable à celle que l'on vient de décrire, on veut seulement déterminer par le calcul le résultat d'une telle hypothèse.

Chacune des deux masses jouissant d'une conductibilité parfaite, la quantité de chaleur contenue dans la tranche infiniment petite s'ajoute subitement à celle du corps avec lequel elle est en contact, et il en résulte une température commune égale au quotient de la somme des quantités de chaleur par la somme des masses. Soit dm la masse de la tranche infiniment petite qui se sépare du corps le plus échauffé, dont la température est a; soient α et β les températures variables qui correspondent au temps t, et qui ont pour valeurs initiales a et b. Lorsque la tranche dm se sépare de la masse m, qui devient $m-dm$, elle a, comme cette masse, la température α, et dès qu'elle touche le second corps affecté de la température β, elle prend en même temps que lui une température égale à $\frac{\beta m+\alpha dm}{m+dm}$. La tranche dm, retenant cette dernière température, retourne au premier corps dont la masse est $m-dm$, et la température α. On trouvera donc pour sa température, après le second contact,

$$\frac{\alpha(m-dm)+\frac{\beta m+\alpha dm}{m+dm}dm}{m}, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha m+\beta dm}{m+dm}.$$

Les températures variables α et β sont donc devenues, après l'instant dt, $\frac{\alpha m+\beta dm}{m+dm}$ et $\frac{\beta m+\alpha dm}{m+dm}$; ou développant les puissances de dm, en retenant la première seulement,

$$\alpha-(\alpha-\beta)\frac{dm}{m} \quad \text{et} \quad \beta+(\alpha-\beta)\frac{dm}{m}.$$

On a donc

$$d\alpha=-(\alpha-\beta)\frac{dm}{m} \quad \text{et} \quad d\beta=(\alpha-\beta)\frac{dm}{m}.$$

Ainsi la masse qui avait la température initiale β, a reçu dans un instant une quantité de chaleur égale à $m\,d\beta$ ou $(\alpha-\beta)dm$, laquelle a été perdue dans le même temps par la première masse. On voit par-là que la quantité de chaleur qui passe en un instant du corps plus échauffé dans celui qui l'est moins est, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnelle à la différence actuelle des températures de ces deux corps. Le temps étant divisé en intervalles égaux, la quantité infiniment petite dm pourra être remplacée par $K\,dt$, K étant le nombre des unités de masse dont la somme contient dm autant de fois que l'unité de temps contient dt; en sorte que l'on a $\frac{K}{dm}=\frac{1}{dt}$. On obtient ainsi les équations

$$d\alpha = -(\alpha-\beta)\frac{K}{m}dt, \quad \text{et} \quad d\beta = (\alpha-\beta)\frac{K}{m}dt.$$

Si l'on attribuait une plus grande valeur au volume dm, qui sert, pour ainsi dire, à puiser la chaleur de l'un des corps pour la porter à l'autre, la transmission serait plus prompte; il faudrait, pour exprimer cette condition, augmenter dans la même raison la valeur de K, qui entre dans les équations. On pourrait aussi conserver la valeur de dm, et supposer que cette tranche accomplit dans un temps donné un plus grand nombre d'oscillations, ce qui serait encore indiqué par une plus grande valeur de K. Ainsi ce coëfficient représente en quelque sorte la vîtesse de la transmission, ou la facilité avec laquelle la chaleur passe de l'un des corps dans l'autre, c'est-à-dire, la conductibilité réciproque.

En ajoutant les deux équations précédentes, on a

$$d\alpha + d\beta = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha+\beta = const. = a+b.$$

Si on retranche l'une des équations de l'autre, on a

$$d\alpha - d\beta + 2(\alpha-\beta)\frac{K}{m}dt = 0;$$

et faisant $\alpha-\beta=y$,

$$dy + 2\frac{K}{m}y\,dt = 0.$$

Intégrant et déterminant la constante par la condition que la valeur initiale soit $a-b$, on a

$$y = (a-b)e^{-2\frac{K}{m}t}.$$

La différence y des températures diminue donc comme l'ordonnée d'une logarithmique, ou comme les puissances successives de la fraction $e^{-2\frac{K}{m}}$. On a pour les expressions de α et β,

$$\alpha = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)e^{-2\frac{K}{m}t},$$

$$\beta = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)e^{-2\frac{K}{m}t}.$$

Supposons que les deux parties aa et bb (fig. 4) d'une droite représentent les deux températures initiales, et qu'on élève une perpendiculaire sur le milieu de cette droite, ainsi que deux autres aux extrémités : il faudra, par le point qui sépare les deux parties aa et bb, décrire une logarithmique qui aura pour asymptote la perpendiculaire sur le milieu, et dont la figure dépend de la valeur de $\frac{K}{m}$. Une interceptée $\alpha\beta$ entre les deux perpendiculaires extrêmes, est divisée par la courbe en parties inégales, qui déterminent, après un temps donné, les températures variables α et β. Cette figure rend sensible la loi suivant laquelle les températures des deux corps tendent à devenir égales.

On suppose, dans le cas qui précède, que la masse infiniment petite dm, au moyen de laquelle s'opère la transmission, est toujours la même partie de l'unité de masse; ou, ce qui est la même chose, que le coëfficient K, qui mesure la conductibilité réciproque, est une quantité constante. Pour rendre la recherche dont il s'agit plus générale, il faudrait considérer le coëfficient K comme une fonction des deux températures actuelles α et β : on aurait alors les deux équations

$$d\alpha = -(\alpha - \beta)\frac{K}{m}dt \quad \text{et} \quad d\beta = (\alpha - \beta)\frac{K}{m}dt,$$

Dans lesquelles K serait égal à $\varphi(\alpha, \beta)$. Dans ce cas, la courbe qui détermine à chaque instant la valeur des ordonnées α et β n'est point une logarithmique, mais elle a encore pour asymptote la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite ab. Il est facile de connaître la nature de la dernière partie de cette courbe, ou de son cours infini, qui s'approche continuellement de l'asymptote; cette branche infinie de la courbe représente la loi que suivent les températures finales α et β, dans l'état extrême pendant lequel elles tendent à devenir égales. Pour cela, on désignera par une nouvelle indéterminée y la différence entre α et la dernière température $\frac{1}{2}(a+b)$, ou c. Une autre indéterminée z désignera la différence $c-\beta$. On substituera, au lieu de α et de β, leurs valeurs $c-y$ et $c-z$; et comme il ne s'agit que de trouver les valeurs de y et de z, lorsqu'on les suppose très-petites, on ne doit retenir dans les résultats des substitutions, que la première puissance de y et de z. On trouve, en substituant les valeurs de α et β, les deux équations

$$-dy = -(z-y)\frac{1}{m}\varphi(c-y,\, c-z)\,dt,$$

et

$$-dz = (z-y)\frac{1}{m}\varphi(c-y,\, c-z)\,dt.$$

En développant les quantités qui sont sous le signe φ, et rejetant les puissances supérieures de y et de z, on trouvera les équations

$$dy = (z-y)\frac{1}{m}\varphi(c, c)\,dt \quad \text{et} \quad dz = -(z-y)\frac{1}{m}\varphi(c.c)\,dt,$$

qui, étant retranchées l'une de l'autre, donnent

$$d(z-y)+2(z-y)\frac{1}{m}\varphi(c,c)\,dt=0.$$

La quantité $\varphi(c,c)$ étant constante, il s'ensuit que l'équation précédente donnera pour la valeur de la différence $z-y$, un résultat semblable à celui que l'on a trouvé plus haut pour la valeur de $\alpha-\beta$. C'est pourquoi la courbe dont il s'agit de trouver la branche asymptotique, finit par se confondre dans cette partie de son cours avec une logarithmique. Elle ne dépend de l'espèce de la fonction φ que dans sa première partie. On en doit conclure que si le coëfficient K, que l'on avait d'abord supposé constant, était représenté par une fonction quelconque des températures variables, les derniers changements qu'éprouvent ces températures, pendant un temps infini, seraient encore assujettis à la même loi que si la conductibilité réciproque était constante. Il s'agit actuellement de déterminer les lois de la propagation de la chaleur dans un nombre indéfini de masses égales, qui ont actuellement des températures différentes.

39. Supposons qu'un nombre n de masses prismatiques, dont chacune est égale à m, sont rangées sur une même ligne droite, et affectées de températures différentes a, b, c, d, etc.; que des tranches infiniment petites, qui ont chacune la masse dm, se séparent de ces différents corps, excepté du dernier, et se portent en même temps du premier au second, du second au troisième, du troisième au quatrième, ainsi de suite; qu'aussitôt après le contact, ces mêmes tranches retournent aux masses dont elles s'étaient séparées.

Ce double mouvement ayant lieu autant de fois qu'il y a d'instants infiniment petits dt, on demande à quelle loi sont assujettis les changements de température.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ les valeurs variables qui correspondent au même temps t, et qui ont succédé aux valeurs initiales $a, b, c, d, \ldots$ Lorsque les tranches dm se seront séparées des $n-1$ premières masses, et mises en contact avec les masses voisines, il est aisé de voir que les températures seront devenues

$$\frac{\alpha(m-dm)}{m-dm},\ \frac{\beta(m-dm)+\alpha dm}{m-dm},\ \frac{\gamma(m-dm)+\beta dm}{m-dm},\ldots \frac{\omega m+\psi dm}{m-dm},$$

ou $\quad \alpha,\ \beta+(\alpha-\beta)\dfrac{dm}{m},\ \gamma+(\beta-\gamma)\dfrac{dm}{m},\ \ldots\ \omega+(\psi-\omega)\dfrac{dm}{m};$

en observant qu'on ne doit point écrire les termes qui contiendraient une puissance supérieure de dm. Lorsque les tranches dm seront revenues à leurs premières places, on trouvera les valeurs des nouvelles températures, en suivant la même règle, qui consiste à diviser la somme des quantités de chaleur par la somme des masses; et l'on aura pour valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \omega$, après l'instant dt,

$$\alpha-(\alpha-\beta)\frac{dm}{m},\ \beta+[\alpha-\beta-(\beta-\gamma)]\frac{dm}{m},\ \gamma+[\beta-\gamma-(\gamma-\delta)]\frac{dm}{m}\cdot$$

$$\ldots\omega+(\psi-\omega)\frac{dm}{m}.$$

Le coëfficient de $\dfrac{dm}{m}$ est la différence de deux différences consécutives prises dans la suite $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \psi, \omega$. Quant au premier et au dernier coëfficient de $\dfrac{dm}{m}$, ils peuvent être considérés aussi comme des différences de différences consécutives : il suffit de supposer que le terme α est précédé d'un terme égal à α, et que le terme ω est suivi d'un terme égal à ω. On aura par conséquent, en substituant Kdt à dm, les équations suivantes :

$$(e)\qquad \begin{aligned}
d\alpha &= \frac{K}{m}dt\,[(\beta-\alpha)-(\alpha-\alpha)],\\
d\beta &= \frac{K}{m}dt\,[(\gamma-\beta)-(\beta-\alpha)],\\
d\gamma &= \frac{K}{m}dt\,[(\delta-\gamma)-(\gamma-\beta)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d\omega &= \frac{K}{m}dt\,[(\omega-\omega)-(\omega-\psi)].
\end{aligned}$$

Pour intégrer ces équations, on fera, suivant la méthode connue,

$$\alpha=a_1e^{ht},\ \beta=a_2e^{ht},\ \gamma=a_3e^{ht}\ \ldots\ \omega=a_ne^{ht},$$

$h, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ étant des quantités constantes qu'il faudra déterminer. Les substitutions étant faites, on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_1h &= \frac{K}{m}(a_2-a_1),\\
a_2h &= \frac{K}{m}[(a_3-a_2)-(a_2-a_1)],\\
a_3h &= \frac{K}{m}[(a_4-a_3)-(a_3-a_2)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_nh &= \frac{K}{m}[(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})].
\end{aligned}$$

Si l'on regarde a_1 comme une quantité connue, on trouvera facilement l'expression de a_2 en a_1, puis celle de a_3 en

a_2 et h. Il en est de même de toutes les autres indéterminées a_4, a_5,... Il faut remarquer que la première de ces équations peut être écrite sous cette forme :

$$a_1 h = \frac{K}{m}\left[(a_2 - a_1) - (a_1 - a_0)\right],$$

et la dernière sous cette forme :

$$a_n h = \frac{K}{m}\left[(a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1})\right];$$

pourvu que l'on retienne ces deux conditions, $a_0 = a_1$ et $a_n = a_{n+1}$. La valeur de a_2 contiendra la première puissance de h, la valeur de a_3 contiendra la seconde puissance de h; ainsi de suite jusqu'à a_{n+1}, qui contiendra la n^e puissance de h. Cela posé, a_{n+1} devant être égal à a_n, on aura pour déterminer h, une équation du n^e degré, et a_1 demeurera indéterminée.

Il suit de-là que l'on pourra trouver pour h un nombre n de valeurs, et que, d'après la nature des équations linéaires, la valeur générale de α sera composée d'un nombre n de termes; en sorte que les quantités α, β, γ,... seront déterminées de la manière la plus générale possible, au moyen des équations

$$\alpha = a_1 e^{ht} + a'_1 e^{h't} + a''_1 e^{h''t} + \ldots = 0,$$
$$\beta = a_2 e^{ht} + a'_2 e^{h't} + a''_2 e^{h''t} + \ldots = 0,$$
$$\gamma = a_3 e^{ht} + a'_3 e^{h't} + a''_3 e^{h''t} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega = a_n e^{ht} + a'_n e^{h't} + a''_n e^{h''t} + \ldots = 0.$$

Les valeurs h, h', h''.... sont en nombre n, et égales aux n racines de l'équation algébrique du n^e degré en h, qui a, comme on le verra plus bas, toutes ses racines réelles. Les coëfficients de la première équation a_1, a_1', a_1''.... sont arbitraires. Quant aux coëfficients des lignes inférieures, ils sont déterminés par un nombre n de systèmes d'équations semblables aux équations précédentes. Il s'agit maintenant de former et de résoudre ces équations.

Ecrivant la lettre q au lieu de $\frac{hm}{K}$, on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0 = a_1, \\
a_1 &= a_1, \\
a_2 &= a_1(q+2) - a_0, \\
a_3 &= a_2(q+2) - a_1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n+1} &= a_n(q+2) - a_{n-1}.
\end{aligned}$$

On voit que ces quantités appartiennent à une série récurrente dont l'échelle de relation a les deux termes $q+2$ et -1; on pourra donc exprimer le terme général a_m par l'équation

$$a_m = A \sin. mu + B \sin. (m-1)u,$$

en déterminant convenablement les quantités A, B et u. On trouvera d'abord A et B, en supposant m égal à 0 et ensuite égal à 1, ce qui donne $a_0 = -B \sin. u$ et $a_1 = A \sin. u$; et par conséquent

$$a_m = \frac{a_1}{\sin. u} \sin. mu - \frac{a_1}{\sin. u} \sin. (m-1)u.$$

En substituant ensuite les valeurs de a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, etc. dans l'équation générale

$$a_m = a_{m-1}(q+2) - a_{m-2},$$

on trouvera

$$\sin. mu = (q+2)\sin.(m-1)u - \sin.(m-2)u.$$

En comparant cette équation à celle-ci,

$$\sin. mu = 2\cos. u \,.\, \sin.(m-1)u - \sin.(m-2)u,$$

qui exprime une propriété connue des sinus d'arcs en progression arithmétique, on en conclut $q+2=2\cos. u$, ou

$$q = -2\sin.\text{v}.u.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de l'arc u.

La valeur générale de a_m étant

$$\frac{a_1}{\sin. u}[(\sin. mu - \sin.(m-1)u],$$

on aura, pour satisfaire à la condition $a_{n+1}=a_n$, l'équation

$$\sin.(n+1)u - \sin. nu = \sin. nu - \sin.(n-1)u,$$

ou $$(\cos. u - 1)\sin. nu = 0;$$

d'où l'on tire $\sin. nu = 0$, ou $u = i\frac{\pi}{n}$, π étant la demi-circonférence, et i un nombre entier quelconque 0, 1, 2, 3, 4, ... $n-1$. On en peut déduire les n valeurs de q ou $\frac{hm}{K}$: ainsi toutes les racines de l'équation en h qui donnent les valeurs de h, h', h'', ..., sont réelles négatives, et fournies par les équations

$$h = -2\frac{K}{m}\,\text{sin. v.}\left(0\frac{\pi}{n}\right),$$

$$h' = -2\frac{K}{m}\,\text{sin. v.}\left(1\frac{\pi}{n}\right),$$

$$h'' = -2\frac{K}{m}\,\text{sin. v.}\left(2\frac{\pi}{n}\right),$$

....

$$h^{(n-1)} = -2\frac{K}{m}\,\text{sin. v.}\left(\overline{n-1}\,\frac{\pi}{n}\right).$$

Supposons donc qu'on ait divisé la demi-circonférence π en un nombre n de parties égales, et que l'on prenne pour former l'arc u un nombre entier i de ces parties, i étant moindre que n, on satisfera aux équations différentielles (e) en choisissant pour a_1 une quantité quelconque, et faisant

$$\alpha = a_1\,\frac{\text{sin. }u - \text{sin. }0u}{\text{sin. }u}\,e^{-2\frac{K}{m}t\,\text{sin. v. }u}$$

$$\beta = a_1\,\frac{\text{sin. }2u - \text{sin. }u}{\text{sin. }u}\,e^{-2\frac{K}{m}t\,\text{sin. v. }u}$$

$$\gamma = a_1\,\frac{\text{sin. }3u - \text{sin. }2u}{\text{sin. }u}\,e^{-2\frac{K}{m}t\,\text{sin. v. }u}$$

....

$$\omega = a_1\,\frac{\text{sin. }nu - \text{sin. }(n-1)u}{\text{sin. }u}\,e^{-2\frac{K}{m}t\,\text{sin. v. }u}.$$

Comme il y a un nombre n d'arcs différents que l'on peut prendre pour u, savoir, $0\frac{\pi}{n}$, $1\frac{\pi}{n}$, $2\frac{\pi}{n}$, ... $(n-1)\frac{\pi}{n}$, il y a aussi un nombre n de systèmes de valeurs particulières pour $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \omega$; et les valeurs les plus générales de ces variables sont les sommes de ces valeurs particulières.

On voit d'abord que si l'arc u est nul, les quantités qui multiplient a_1 dans les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \omega$, deviennent toutes égales à l'unité; car $\frac{\sin. 2u - \sin. u}{\sin. u}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$, a pour valeur exacte 1, lorsque l'arc est nul. Il en est de même des quantités qui se trouvent dans les équations suivantes. On conclut de là qu'il doit entrer dans les valeurs générales de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \omega$, des termes constants qui sont tous égaux.

De plus, en ajoutant toutes les valeurs particulières correspondantes de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \omega$, on aura

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots . \omega = a_1 \frac{\sin. nu}{\sin. u} e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. u},$$

équation dont le second membre se réduit à 0, toutes les fois que l'arc u n'est pas nul. Mais dans ce cas, on trouvera pour la valeur de $\frac{\sin. nu}{\sin. u}$ l'expression $\frac{0}{0}$, dont la valeur est n. On a donc en général $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \omega = n a_1$. Or les valeurs initiales des variables étant $a, b, c, d, \ldots$, il est nécessaire que l'on ait $n a_1 = a + b + c + d + \ldots .$ Il en résulte que le terme constant qui doit entrer dans chacune des valeurs générales de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$, est

$$\frac{1}{n}(a + b + c + d + \ldots .),$$

c'est-à-dire la température moyenne entre toutes les températures initiales.

Les valeurs générales de α, β, γ, ..., ω sont exprimées par les équations suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{n}(a+b+c+\ldots) + a_1 \frac{\sin.u - \sin.0u}{\sin.u} e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u}$$
$$+ b_1 \frac{\sin.u' - \sin.0u'}{\sin.u'} e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u'}$$
$$+ c_1 \frac{\sin.u'' - \sin.0u''}{\sin.u} e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u''}$$
$$+ \text{etc.}$$

$$\beta = \frac{1}{n}(a+b+c+\ldots) + a_1 \frac{\sin.2u - \sin.u}{\sin.u} e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u}$$
$$+ b_1 \frac{\sin.2u' - \sin.u'}{\sin.u'} e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u}$$
$$+ c_1 \frac{\sin.2u'' - \sin.u''}{\sin.u''} e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u''}$$
$$+ \text{etc.}$$

$$\gamma = \frac{1}{n}(a+b+c+\ldots) + a_1 \frac{\sin.3u - \sin.2u}{\sin.u} e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u}$$
$$+ b_1 \frac{\sin.3u' - \sin.2u'}{\sin.u'} e^{-2mt\sin.v.u'}$$
$$+ c_1 \frac{\sin.3u'' - \sin.2u''}{\sin.u''} e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u''}$$
$$+ \text{etc.}$$

. . . .

$$\omega = (a+b+c+\ldots) + a_{,}\frac{\sin.nu - \sin.(n-1)u}{\sin.u}\, e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u}$$

$$+ b_{,}\frac{\sin.nu' - \sin.(n-1)u'}{\sin.u'}\, e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u'}$$

$$+ c_{,}\frac{\sin.nu'' - \sin.(n-1)u''}{\sin.u''}\, e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u''}$$

$+$ etc.

A l'égard des constantes $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, ..., elles sont arbitraires, et, pour les déterminer, il faut considérer l'état initial du système. En effet, le temps t étant nul, les valeurs de α, β, γ, ... doivent être égales à a, b, c, ...: on aura n équations semblables pour déterminer les n constantes. Les quantités

$$\sin.u - \sin.0u,\quad \sin.2u - \sin.u,\quad \sin.3u - \sin.2u,\quad \ldots\ldots\ \sin.nu - \sin.(n-1)u$$

peuvent être indiquées de cette manière:

$$\Delta\sin.0u,\quad \Delta\sin.u,\quad \Delta\sin.2u,\ \ldots,\ \Delta\sin.(n-1)u.$$

Les équations propres à déterminer les constantes sont, en représentant par C la température initiale,

$$(c)\qquad \begin{aligned}
a &= C + a_{,} + b_{,} + c_{,} + \ldots\\
b &= C + a_{,}\frac{\Delta\sin.u}{\sin.u} + b_{,}\frac{\Delta\sin.u'}{\sin.u'} + c_{,}\frac{\Delta\sin.u''}{\sin.u''} + \ldots\\
c &= C + a_{,}\frac{\Delta\sin.2u}{\sin.u} + b_{,}\frac{\Delta\sin.2u'}{\sin.u'} + c_{,}\frac{\Delta\sin.2u''}{\sin.u''} + \ldots\\
d &= C + a_{,}\frac{\Delta\sin.3u}{\sin.u} + b_{,}\frac{\Delta\sin.3u}{\sin.u'} + c_{,}\frac{\Delta\sin.3u}{\sin.u''} + \ldots
\end{aligned}$$

etc.

Les quantités $a_1, b_1, c_1, \ldots$ et C étant déterminées par ces équations, on connaît entièrement les valeurs des variables $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \omega$.

Si l'on fait $n=2$, on trouvera, comme dans l'article précédent,

$$\alpha=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)e^{-2\frac{K}{m}t} \quad \text{et} \quad \beta=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)e^{-2\frac{K}{m}t}.$$

Si l'on fait $n=3$, on trouvera deux valeurs de u. Les valeurs de α, β, γ sont :

$$\alpha=\frac{1}{3}(a+b+c)+\left(\frac{a-c}{2}\right)e^{-\frac{K}{m}t}+\left(\frac{a-2b+c}{6}\right)e^{-3\frac{K}{m}t}$$

$$\beta=\frac{1}{3}(a+b+c)\qquad\qquad -\left(\frac{a-2b+c}{3}\right)e^{-3\frac{K}{m}t}$$

$$\gamma=\frac{1}{3}(a+b+c)-\left(\frac{a-c}{2}\right)e^{-\frac{K}{m}t}+\left(\frac{a-2b+c}{6}\right)e^{-3\frac{K}{m}t}.$$

On peut effectuer en général l'élimination des inconnues dans les équations (e), et déterminer les valeurs des quantités $a_1, b_1, c_1, \ldots$, même lorsque le nombre des équations est infini : on emploiera ce procédé d'élimination dans l'article suivant.

En examinant les équations qui donnent les valeurs générales des variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$, on voit que le temps t venant à augmenter, les termes qui se succèdent dans la valeur de chaque variable décroissent inégalement ; car les valeurs de $u, u', u'', u''', \ldots$ étant $1\frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, 3\frac{\pi}{n}, 4\frac{\pi}{n}, \ldots,$

les exposants $\sin.\mathrm{v}.u$, $\sin.\mathrm{v}.u'$, $\sin.\mathrm{v}.u''$, $\sin.\mathrm{v}.u'''$, ... deviennent de plus en plus grands. Si l'on suppose que le temps t est infini, le premier terme de chaque valeur subsiste seul, et la température de chacune des masses devient égale à la température moyenne $\frac{1}{n}(a+b+c+\ldots)$. Lorsque le temps t augmente continuellement, chacun des termes de la valeur d'une des variables diminue proportionnellement aux puissances successives d'une fraction, qui est pour le second terme $e^{-2\frac{K}{m}\sin.\mathrm{v}.u}$; pour le troisième terme, $e^{-2\frac{K}{m}\sin.\mathrm{v}.u'}$; ainsi de suite. La plus grande de ces fractions étant celle qui répond à la moindre des valeurs de u, il s'ensuit que pour connaître la loi que suivent les derniers changements de température, on ne doit considérer que les deux premiers termes; car tous les autres deviennent incomparablement plus petits à mesure que le temps t augmente. Les dernières variations des températures $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ sont donc exprimées par les équations suivantes:

$$\alpha=\frac{1}{n}(a+b+c+\ldots)+a_1\frac{\sin.u-\sin.0u}{\sin.u}e^{-2\frac{K}{m}t\sin.\mathrm{v}.u}$$

$$\beta=\frac{1}{n}(a+b+c+\ldots)+a_1\frac{\sin.2u-\sin.u}{\sin.u}e^{-2\frac{K}{m}t\sin.\mathrm{v}.u}$$

$$\gamma=\frac{1}{n}(a+b+c+\ldots)+a_1\frac{\sin.3u-\sin.2u}{\sin.u}e^{-2\frac{K}{m}t\sin.\mathrm{v}.u}$$

....

$$\omega=\frac{1}{n}(a+b+c+\ldots)+a_1\frac{\sin.nu-\sin.(n-1)u}{\sin.u}e^{-2\frac{K}{m}t\sin.\mathrm{v}.u}$$

Si l'on divise la demi-circonférence en un nombre n de parties égales, et que, ayant abaissé les sinus, on prenne les différences entre deux sinus consécutifs, ces n différences seront proportionnelles aux coëfficients de $e^{-2\frac{K}{m}t\sin.\text{v}.u}$, ou aux seconds termes des valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$. C'est pourquoi les dernières valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$ sont telles, que les différences entre ces températures extrêmes et la température moyenne initiale $\frac{1}{n}(a+b+c+\ldots)$ sont toujours proportionnelles aux différences des sinus consécutifs. De quelque manière que les masses soient d'abord échauffées, la distribution de la chaleur s'opère à la fin suivant une loi constante. Si l'on mesurait ces températures dans les derniers instants, où elles diffèrent peu de la température moyenne, on observerait que la différence entre la température d'une même masse quelconque et la température moyenne décroît continuellement comme les puissances successives de la même fraction; et en comparant les températures des différentes masses, prises pour un même instant, on verrait que les différences entre la température actuelle et la température moyenne sont proportionnelles aux différences des sinus consécutifs, la demi-circonférence étant divisée en un nombre n de parties égales.

Si l'on suppose que les masses qui se communiquent la chaleur sont en nombre infini, on trouve pour l'arc u une valeur infiniment petite. Alors les différences des sinus consécutifs, prises dans le cercle, sont proportionnelles aux cosinus des arcs correspondants : car

$$\frac{\sin. mu - \sin.(m-1)u}{\sin. u}, \quad \text{ou} \quad \frac{\sin. mu - \sin. mu \cos. u + \sin. u \cos. mu}{\sin. u},$$

équivaut à cos. mu lorsque l'arc u est infiniment petit. Dans ce cas, les quantités dont les températures, prises au même instant, diffèrent de la température moyenne à laquelle elles doivent toutes parvenir, sont proportionnelles aux cosinus qui correspondent aux différents points de la circonférence, divisée en une infinité de parties égales. Si les masses qui se transmettent la chaleur sont situées à distances égales les unes des autres sur le périmètre de la demi-circonférence π, le cosinus de l'arc à l'extrémité duquel une masse quelconque est placée, est la mesure de la quantité dont la température de cette masse diffère encore de la température moyenne. Ainsi le corps placé au milieu de tous les autres, est celui qui parvient le plus promptement à cette température moyenne. Ceux qui se trouvent situés d'un même côté du milieu ont tous une température excédante, et d'autant plus supérieure à la température moyenne, qu'ils sont plus éloignés du milieu. Les corps qui sont placés de l'autre côté ont tous une température moindre que la température moyenne, et s'en écartent autant que ceux du côté opposé, mais dans un sens contraire. Enfin ces différences, soit positives, soit négatives, décroissent toutes en même temps, et proportionnellement aux puissances successives de la même fraction, en sorte qu'elles ne cessent point d'être représentées au même instant par les valeurs des cosinus d'une même demi-circonférence. Telle est la loi à laquelle sont toujours assujetties les températures finales : l'état initial du système ne change point ces résultats. Nous allons présentement traiter une troisième question, du même genre que les précédentes, et dont la solution nous fournira plusieurs remarques utiles.

40. On suppose un nombre n de masses prismatiques égales, placées à des distances égales sur la circonférence d'un cercle; tous ces corps sont parfaitement conductibles, et ont actuellement des températures connues, différentes pour chacun d'eux : ils ne laissent échapper à leur surface aucune partie de la chaleur qu'ils contiennent. Une tranche infiniment mince se sépare de la première masse pour se réunir à la seconde, qui est placée vers la droite; dans le même temps une tranche pareille se détache de la seconde masse, et se joint à la troisième. Il en est de même de toutes les autres masses, de chacune desquelles une tranche infiniment mince se sépare au même instant, et se joint à la masse suivante. Les mêmes tranches reviennent immédiatement après, et se réunissent aux corps dont elles avaient été séparées. On suppose que la chaleur se propage entre les masses, au moyen de ces mouvements alternatifs qui s'accomplissent deux fois pendant chaque instant d'une égale durée; il s'agit de trouver suivant quelle loi les températures varient, c'est-à-dire, que les valeurs initiales des températures étant données, il faut connaître après un temps quelconque la nouvelle température de chacune des masses.

On désignera par $a_1, a_2, a_3, \ldots a_i \ldots a_n$ les températures initiales, dont les valeurs sont entièrement arbitraires, et par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n$ les valeurs de ces mêmes températures correspondantes au temps t. Il est visible que chacune des quantités α est une fonction du temps t, et de toutes les valeurs initiales $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$: ce sont ces fonctions qu'il s'agit de déterminer. On représentera par ω la masse infiniment petite de la tranche qui se porte d'un corps à l'autre. On remarquera en premier lieu que lorsque les tranches ont été séparées des masses dont elles faisaient partie, et mises respectivement en contact avec les masses placées vers la droite, les quantités de chaleur contenues dans les différents corps sont

$$(m-\omega)\alpha_1+\omega\alpha_n,\ (m-\omega)\alpha_2+\omega\alpha_1,\ (m-\omega)\alpha_3+\omega\alpha_2,$$
$$\ldots(m-\omega)\alpha_i+\omega\alpha_{i-1}\ldots(m-\omega)\alpha_n+\omega\alpha_{n-1}.$$

En divisant chacune de ces quantités de chaleur par la masse m, on aura pour les nouvelles valeurs des températures les termes compris dans la suite

$$\alpha_1+\frac{\omega}{m}(\alpha_n-\alpha_1),\ \alpha_2+\frac{\omega}{m}(\alpha_1-\alpha_2),\ \alpha_3+\frac{\omega}{m}(\alpha_2-\alpha_3),$$

$$\ldots\alpha_i+\frac{\omega}{m}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)\ldots \quad \text{et} \quad \alpha_n+\frac{\omega}{m}(\alpha_{n-1}-\alpha_n);$$

c'est-à-dire que, pour trouver le nouvel état de la température après le premier contact, il faut ajouter à la valeur qu'elle avait auparavant, le produit de $\frac{\omega}{m}$ par l'excès de la température du corps dont la tranche s'est séparée sur celle du corps qu'elle est venue toucher. Par la même raison, si le mouvement des tranches n'eût point eu lieu de gauche à droite, mais au contraire de droite à gauche, il aurait fallu, pour trouver la nouvelle température d'un corps donné, ajouter à sa valeur primitive le produit de $\frac{\omega}{m}$ par l'excès de la température du corps placé vers la droite sur la température du corps donné. Or on suppose maintenant que les tranches qui s'étaient séparées des masses dont elles faisaient partie, reviennent à ces mêmes masses en se portant de droite à gauche : c'est pourquoi il sera facile de trouver quelles sont les températures après le second contact. Il faut à la valeur de chaque température prise après le premier contact, c'est-à-dire à chaque terme de la suite précédente, ajouter le produit de ce terme par la différence du terme placé vers la droite au terme dont il s'agit ; mais il est nécessaire d'omettre tous les termes où la quantité infiniment petite ω serait élevée à une puissance supérieure à la première. On trouvera de cette manière, pour la suite qui comprend toutes les températures après le second contact,

$$
\begin{array}{l}
\alpha_1 + \frac{\omega}{m}(\alpha_n - \alpha_1) + \frac{\omega}{m}(\alpha_2 - \alpha_1) \\
\alpha_2 + \frac{\omega}{m}(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\omega}{m}(\alpha_3 - \alpha_2) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_i + \frac{\omega}{m}(\alpha_{i-1} - \alpha_i) + \frac{\omega}{m}(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_n + \frac{\omega}{m}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \frac{\omega}{m}(\alpha_1 - \alpha_n).
\end{array}
$$

Le temps étant divisé en instants égaux, on désignera par dt la durée de cet instant ; et si on suppose que ω soit contenue dans un nombre K d'unités de masse, autant de fois que dt est contenu dans l'unité de temps, on aura

$$\frac{K}{\omega} = \frac{1}{dt}, \qquad \text{ou} \qquad \omega = K\,dt.$$

En désignant aussi par $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, $d\alpha_3, \ldots d\alpha_i \ldots d\alpha_n$ les accroissements infiniment petits que reçoivent après le second contact, pendant l'instant dt, les températures α_1. $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n$, on aura les équations différentielles suivantes :

$$(\varepsilon) \qquad \begin{aligned}
d\alpha_1 &= \frac{K}{m}\,dt(\alpha_n - 2\alpha_1 + \alpha_2) \\
d\alpha_2 &= \frac{K}{m}\,dt(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d\alpha_i &= \frac{K}{m}\,dt(\alpha_{i-1} - 2\alpha_i + \alpha_{i+1}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d\alpha_{n-1} &= \frac{K}{m}\,dt(\alpha_{n-2} - 2\alpha_{n-1} + \alpha_n) \\
d\alpha_n &= \frac{K}{m}\,dt(\alpha_{n-1} - 2\alpha_n + \alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

Pour résoudre ces équations, on supposera en premier lieu, suivant la méthode connue,

$$(d) \quad \alpha_1 = b_1 e^{ht},\ \alpha_2 = b_2 e^{ht},\ \alpha_3 = b_3 e^{ht}, \ldots \alpha_i = b_i e^{ht}, \ldots \alpha_n = b_n e^{ht}.$$

Les quantités b_1, b_2, $b_3, \ldots b_n$ sont des constantes indéterminées, ainsi que l'exposant h. Il est facile de reconnaître si ces valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n$ peuvent satisfaire aux équations différentielles. En effet, en faisant les substitutions de ces valeurs, on trouve

$$b_1 h = \frac{K}{m}(b_n - 2b_1 + b_2)$$

$$b_2 h = \frac{K}{m}(b_1 - 2b_2 + b_3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_i h = \frac{K}{m}(b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{n-1} h = \frac{K}{m}(b_{n-2} - 2b_{n-1} + b_n)$$

$$b_n h = \frac{K}{m}(b_{n-1} - 2b_n + b_{n+1}).$$

Si l'on prend pour $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ et h des quantités qui satisfassent aux équations précédentes, on aura, au moyen de ces équations, des valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_i \ldots \alpha_n$, qui satisferont aux équations différentielles. Soit $q = \frac{hm}{K}$: on aura, après avoir substitué, et en réglant l'ordre des équations,

$$b_1 = b_n(q+2) - b_{n-1},\ b_2 = b_1(q+2) - b_n,\ b_3 = b_2(q+2) - b_1,$$

$$\ldots b_i = b_{i-1}(q+2) - b_{i-2} \ldots\ldots \quad b_n = b_{n-1}(q+2) - b_{n-2}.$$

Il en résulte que l'on peut prendre pour $b_1, b_2, b_3, \ldots b_i \ldots b_n$ les n sinus consécutifs que l'on obtient en divisant la circonférence entière 2π en un nombre n de parties égales. En effet, en appelant u l'arc $2\frac{\pi}{n}$, les quantités

$$\sin. 0u, \ \sin. 1u, \ \sin. 2u, \ \sin. 3u \ldots\ldots \sin. (n-1)u,$$

qui sont en nombre n, appartiennent, comme on le sait, à une série récurrente dont l'échelle de relation a deux termes, savoir $2\cos. u$ et -1; en sorte que l'on a toujours la condition

$$\sin. iu = 2\cos. u \sin. (i-1)u - \sin. (i-2)u.$$

On prendra donc pour $b_1, b_2, b_3, \ldots . b_i \ldots . b_n$ les quantités

$$\sin. 0u, \ \sin. 1u, \ \sin. 2u, \ldots . \sin. (i-1)u \ldots . \sin. (n-1)u;$$

et l'on aura ensuite

$$q+2 = 2\cos. u, \text{ ou } q = -2\sin.\text{v}. u, \text{ ou } q = -2\sin.\text{v}. \left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

On a mis précédemment la lettre q au lieu de $\frac{hm}{K}$, en sorte que la valeur de h est $\frac{2K}{m}\sin.\text{v}. \left(\frac{2\pi}{n}\right)$. En substituant dans les équations (d) ces valeurs de b et de h, on aura

$$\alpha_1 = \sin. (0u) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}. \left(2\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\alpha_2 = \sin. (1u) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}. \left(2\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\alpha_3 = \sin. (2u) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}. \left(2\frac{\pi}{n}\right)}$$

. . . .

$$\alpha_n = \sin. [(n-1)u] e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}. \left(2\frac{\pi}{n}\right)}$$

Ces dernières équations ne fournissent qu'une solution très-particulière de la question proposée; car si l'on suppose $t=0$, on aura pour les valeurs initiales de α_1, α_2, α_3, ... α_n, les quantités

$$\sin. 0u,\ \sin. 1u,\ \sin. 2u, \ldots \sin.(n-1)u,$$

qui ne s'accordent point avec les valeurs données a_1, a_2, a_3, ... a_n. Mais la solution précédente mérite d'être remarquée, parce qu'elle exprime, comme on le verra par la suite, une circonstance qui appartient à tous les cas possibles, et représente les dernières variations des températures. On voit par cette solution que si les températures initiales a_1, a_2, a_3, ... a_n étaient proportionnelles aux sinus

$$\sin.\left(0.2\frac{\pi}{n}\right), \sin.\left(1.2\frac{\pi}{n}\right), \sin.\left(2.2\frac{\pi}{n}\right), \ldots \sin.\left[(n-1)2\frac{\pi}{n}\right],$$

elles demeureraient continuellement proportionnelles à ces mêmes sinus, et l'on aurait les équations :

$$\alpha_1 = a_1 e^{-ht},$$

$$\alpha_2 = a_2 e^{-ht},$$

$$\alpha_3 = a_3 e^{-ht},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_n = a_n e^{-ht},$$

et

$$h = 2\frac{K}{m}\,\text{sin. v.}\left(2\frac{\pi}{n}\right).$$

C'est pourquoi si les masses m, m, m,... qui sont placées à distances égales sur la circonférence du cercle, avaient des températures initiales proportionnelles aux perpendiculaires abaissées sur le diamètre qui passe par le premier point, les températures varieraient avec le temps, en demeurant proportionnelles à ces perpendiculaires; et ces températures diminueraient toutes à-la-fois comme les termes d'une même progression géométrique, dont la raison est la fraction

$$e^{-2\frac{K}{m}\sin. v. 2\frac{\pi}{i}}.$$

Pour former la solution générale, on remarquera, en premier lieu, que l'on pourrait prendre pour b_1, b_2, b_3,... b_n les n cosinus correspondants aux points de division de la circonférence, partagée en un nombre n de parties égales. Ces quantités

$$\cos. 0u,\ \cos. 1u,\ \cos. 2u,\ \ldots \cos. (n-1)u,$$

où u désigne l'arc $2\frac{\pi}{n}$, forment aussi une série récurrente, dont l'échelle de relation a les deux termes $2\cos. u$ et -1. C'est pourquoi l'on pourrait prendre, pour satisfaire aux équations différentielles, les équations suivantes :

$$(f)\qquad \begin{aligned} a_1 &= \cos. 0. u\, e^{-2\frac{K}{m}t\sin. v. u}, \\ a_2 &= \cos. 1u.\, e^{-2\frac{K}{m}t\sin. v. u}, \\ a_3 &= \cos. 2u.\, e^{-2\frac{K}{m}t\sin. v. u}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\alpha_n = \cos.(n-1)u.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u}.$$

Indépendamment des deux solutions précédentes, on pourrait choisir, pour les valeurs de $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$, les n quantités

$$\sin.0.2u,\ \sin.1.2u,\ \sin.2.2u, \ldots \sin.(n-1)2u;$$

ou celles-ci :

$$\cos.0.2u,\ \cos.1.2u,\ \cos.2.2u, \ldots \cos.(n-1)2u.$$

En effet, chacune de ces séries est récurrente, et formée de n termes. L'échelle de relation a les deux termes $2\cos.2u$ et -1; et si l'on continuait la série au-delà de n termes, on en trouverait n autres, qui seraient respectivement égaux aux n précédents. En général, si on désigne par $u_1, u_2, u_3, \ldots u_i \ldots u_n$ les arcs

$$0.2\frac{\pi}{n},\ 1.2\frac{\pi}{n},\ 2.2\frac{\pi}{n},\ 3.2\frac{\pi}{n}, \ldots (i-1)2\frac{\pi}{n}, \ldots (n-1)2\frac{\pi}{n},$$

on pourra prendre pour les valeurs de $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ les n quantités

$$\sin.0u_i,\ \sin.1u_i,\ \sin.2u_i,\ \sin.3u_i, \ldots \sin.(n-1)u_i;$$

ou celles-ci :

$$\cos.0u_i,\ \cos.1u_i,\ \cos.2u_i,\ \cos.3u_i, \ldots \cos.(n-1)u_i;$$

et la valeur de h correspondante à chacune de ces séries est donnée par l'équation

$$h = -2\frac{K}{m}\sin.v.u_i.$$

On peut donner n valeurs différentes à i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$. En substituant ces valeurs de b_1, b_2, b_3, ... b_n dans les équations (f), on aura, pour satisfaire aux équations différentielles (ε), les résultats suivants :

$$\alpha_1 = \sin.0u_i.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_i}, \qquad \alpha_1 = \cos.0u_i.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_i},$$

$$\alpha_2 = \sin.1u_i.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_i}, \qquad \alpha_2 = \cos.1u_i.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_i},$$

$$\alpha_3 = \sin.2u_i.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_i}, \qquad \alpha_3 = \cos.2u_i.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_i},$$

....

$$\alpha_n = \sin.(n-1)u_i.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_i}, \; \alpha_n = \cos.(n-1)u_i.e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_i}.$$

On satisferait également aux équations linéaires (ε) en composant les valeurs de chacune des variables α_1, α_2, α_3, ... α_n de la somme de plusieurs valeurs particulières que l'on aurait trouvées pour cette même variable; et l'on peut aussi multiplier, par des coëfficients constants quelconques, chacun des termes particuliers qui entrent dans la valeur générale d'une des variables. Il suit de là qu'en désignant par A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ... A_n, B_n des coëfficients quelconques, on pourra prendre, pour exprimer la valeur générale d'une des variables, par exemple de α_{m+1}, l'équation

$$\alpha_{m+1} = (A_1 \sin.m u_1 + B_1 \cos.m u_1)\, e^{-2\frac{K}{m}t\sin.v.u_1}$$

$$+ (A_2 \sin. m u_2 + B_2 \cos. m u_2) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}.u_2}$$
$$+ \ldots\ldots$$
$$+ (A_n \sin. m u_n + B_n \cos. m u_n) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}.u_n}.$$

Les quantités $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$, qui entrent dans cette équation, sont arbitraires, et les arcs $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ sont donnés par les équations

$$u_1 = 0 . 2\frac{\pi}{n},\ u_2 = 1 . 2\frac{\pi}{n},\ u_3 = 2 . 2\frac{\pi}{n}, \ldots u_n = (n-1) . 2\frac{\pi}{n}.$$

Les valeurs générales des variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sont donc exprimées par les équations suivantes :

$$(E) \qquad \alpha_1 = (A_1 \sin. 0 u_1 + B_1 \cos. 0 u_1) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}.u_1}$$
$$+ (A_2 \sin. 0 u_2 + B_2 \cos. 0 u_2) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}.u_2}$$
$$+ (A_3 \sin. 0 u_3 + B_3 \cos. 0 u_3) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}.u_3}$$
$$+ \text{etc.}$$

$$\alpha_2 = (A_1 \sin. 1 u_1 + B_1 \cos. 1 u_1) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}.u_1}$$
$$+ (A_2 \sin. 1 u_2 + B_2 \cos. 1 u_2) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}.u_2}$$
$$+ (A_3 \sin. 1 u_3 + B_3 \cos. 1 u_3) e^{-2\frac{K}{m} t \sin.\text{v}.u_3}$$
$$+ \text{etc.}$$

$$\alpha_3 = (A_1 \sin. 2u_1 + B_1 \cos. 2u_1) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. u_1}$$
$$+ (A_2 \sin. 2u_2 + B_2 \cos. 2u_2) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. u_2}$$
$$+ (A_3 \sin. 2u_3 + B_3 \cos. 2u_3) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. u_3}$$
$$+ \text{etc.}$$

. . . .

$$\alpha_n = [A_1 \sin. (n-1) u_1 + B_1 \cos. (n-1) u_1] e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. u_1}$$
$$+ [A_2 \sin. (n-1) u_2 + B_2 \cos. (n-1) u_2] e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. u_2}$$
$$+ [A_3 \sin. (n-1) u_3 + B_3 \cos. (n-1) u_3] e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. u_3}$$
$$+ \text{etc.}$$

Si l'on suppose le temps nul, les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ doivent se confondre avec les valeurs initiales $a_1, a_2, a_3, \ldots$: on tire de là un nombre n d'équations, qui doivent servir à déterminer les coëfficients $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots$ On reconnaîtra facilement que le nombre des inconnues est toujours égal à celui des équations. En effet, le nombre des termes qui entrent dans la valeur de chacune des variables dépend du nombre des quantités différentes $\sin. v. u_1$, $\sin. v. u_2$, $\sin. v. u_3, \ldots$, qu'on trouve en divisant la circonférence 2π en un nombre n de parties égales. Or le nombre des quantités $\sin. v. 0. 2\frac{\pi}{n}$, $\sin. v. 1. 2\frac{\pi}{n}$, $\sin. v. 2. 2\frac{\pi}{n}, \ldots$ est beaucoup moindre que n, si l'on ne compte que celles qui sont réellement différentes. En désignant le nombre n par $2i+1$ s'il est impair, et par $2i$ s'il est pair, $i+1$ désignera toujours le nombre des sinus verses différents. D'un autre côté, lorsque dans la suite des quantités sin. v. $0 . 2\frac{\pi}{n}$, sin. v. $1 . 2\frac{\pi}{n}$, sin. v. $2 . 2\frac{\pi}{n}$, ..., on parviendra à un sinus verse sin. v. $\lambda . 2\frac{\pi}{n}$ égal à l'un des précédents sin. v. $\lambda' . 2\frac{\pi}{n}$, les deux termes des équations qui contiendront ce même sinus verse, n'en formeront qu'un seul : les deux arcs différents u_λ et $u_{\lambda'}$, qui auront le même sinus verse, auront aussi le même cosinus, et les sinus ne différeront que par le signe. Il est aisé de voir que ces arcs u_λ et $u_{\lambda'}$, qui ont le même sinus verse, sont tels, que le cosinus d'un multiple quelconque de u_λ est égal au cosinus du même multiple de $u_{\lambda'}$, et que le sinus d'un multiple quelconque de u_λ ne diffère que par le signe du même multiple de $u_{\lambda'}$. Il résulte de là que, lorsque l'on réunit en un seul les deux termes correspondants de chacune des équations (E), les deux indéterminées A_λ et $A_{\lambda'}$, qui entrent dans les équations, sont remplacées par une seule indéterminée, savoir $A_\lambda - A_{\lambda'}$. Quant aux deux indéterminées B_λ et $B_{\lambda'}$, elles sont aussi remplacées par une seule, qui est $B_\lambda + B_{\lambda'}$. Il s'ensuit que le nombre des indéterminées est égal dans tous les cas au nombre des équations ; car le nombre des termes est toujours $i+1$. Il faut ajouter que l'indéterminée [illegible] disparaît d'elle-même dans tous les premiers termes, parce qu'elle multiplie le sinus d'un arc nul ;

de plus, lorsque le nombre n est pair, il se trouve à la fin de chaque équation un terme dans lequel une des indéterminées disparaît d'elle-même, parce qu'elle y multiplie un sinus nul. Ainsi le nombre des inconnues qui entrent dans les équations est égal à $2(i+1)-1$, lorsque le nombre n est impair, et est égal à $2(i+1)-2$, lorsque le nombre n est pair : par conséquent le nombre des inconnues est le même dans tous les cas que le nombre n des équations.

L'analyse précédente nous fournit, pour exprimer les valeurs générales des températures $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, les équations :

$$\alpha_1 = \left(A_1 \sin. 0.0\frac{2\pi}{n} + B_1 \cos. 0.0\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. 0 \frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \left(A_2 \sin. 0.1\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos. 0.1\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. 1 \frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \left(A_3 \sin. 0.2\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos. 0.2\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. 2 \frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$\alpha_2 = \left(A_1 \sin. 1.0\frac{2\pi}{n} + B_1 \cos. 1.0\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. 0 \frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \left(A_2 \sin. 1.1\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos. 1.1\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. 1 \frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \left(A_3 \sin. 1.2\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos. 1.2\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m} t \sin. v. 2 \frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \text{etc.}$$

$$z_3 = \left(A_1 \sin.\, 2\,.\,0\,\frac{2\pi}{n} + B_1 \cos.\, 2\,.\,0\,\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m}t\,\sin.\,v.\,0\,\frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \left(A_2 \sin.\, 2\,.\,1\,\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos.\, 2\,.\,1\,\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m}t\,\sin.\,v.\,1\,\frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \left(A_3 \sin.\, 2\,.\,2\,\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos.\, 2\,.\,2\,\frac{2\pi}{n}\right) e^{-2\frac{K}{m}t\,\sin.\,v.\,2\,\frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_n = \left[A_1 \sin.(n-1)\,.\,0\,\frac{2\pi}{n} + B_1 \cos.(n-1)\,.\,0\,\frac{2\pi}{n}\right] e^{-2\frac{K}{m}t\,\sin.\,v.\,0\,\frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \left[A_2 \sin.(n-1)\,.\,1\,\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos.(n-1)\,.\,1\,\frac{2\pi}{n}\right] e^{-2\frac{K}{m}t\,\sin.\,v.\,1\,\frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \left[A_3 \sin.(n-1)\,.\,2\,\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos.(n-1)\,.\,2\,\frac{2\pi}{n}\right] e^{-2\frac{K}{m}t\,\sin.\,v.\,2\,\frac{2\pi}{n}}.$$

$$+ \text{etc.}$$

Pour former ces équations, il faut continuer dans chacune la suite des termes qui contiennent

$$\sin.\,v.\,0\,\frac{2\pi}{n},\ \sin.\,v.\,1\,\frac{2\pi}{n},\ \sin.\,v.\,2\,\frac{2\pi}{n},\ \sin.\,v.\,3\,\frac{2\pi}{n},\ldots;$$

jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les sinus verses différents, et omettre tous les termes subséquents, en commençant par celui où il entrerait un sinus verse égal à l'un des précédents : le nombre des équations est n. Si n est un nombre pair égal à $2i$, le nombre des termes de chaque équation est $i+1$. Si le nombre n des équations est un nombre impair représenté par $2i+1$, le nombre des termes est encore égal à $i+1$. Enfin, parmi les quantités A_1, B_1, A_2, B_2,.... qui entrent dans ces équations, il y en a qui doivent être omises et disparaissent d'elles-mêmes, comme mutipliant des sinus nuls.

Pour déterminer les quantités $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ qui entrent dans les équations précédentes, il faut considérer l'état initial qui est connu. On supposera $t=0$, et l'on écrira, au lieu de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, les quantités données $a_1, a_2, a_3, \ldots$, qui sont les valeurs initiales des températures. On aura donc, pour déterminer $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots$, les équations suivantes :

$$(\mathrm{P})\; a_1 = A_1 \sin. 0.0\frac{2\pi}{n} + A_2 \sin. 0.1\frac{2\pi}{n} + A_3 \sin. 0.2\frac{2\pi}{n} + \text{etc.}$$

$$+ B_1 \cos. 0.0\frac{2\pi}{n} = B_2 \cos. 0.1\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos. 0.2\frac{2\pi}{n} + \text{etc.}$$

$$a_2 = A_1 \sin. 1.0\frac{2\pi}{n} + A_2 \sin. 1.1\frac{2\pi}{n} + A_3 \sin. 1.2\frac{2\pi}{n} + \text{etc.}$$

$$+ B_1 \cos. 1.1\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos. 1.1\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos. 1.2\frac{2\pi}{n} + \text{etc.}$$

$$a_3 = A_1 \sin. 2.0\frac{2\pi}{n} + A_2 \sin. 2.1\frac{2\pi}{n} + A_3 \sin. 2.2\frac{2\pi}{n} + \text{etc.}$$

$$+ B_1 \cos. 2.0\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos. 2.1\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos. 2.2\frac{2\pi}{n} + \text{etc.}$$

. . . .

$$a_n = A_1 \sin (n-1).0\frac{2\pi}{n} + A_2 \sin.(n-1).1\frac{2\pi}{n} + A_3 \sin.(n-1).2\frac{2\pi}{n} + \text{etc.}$$

$$+ B_1 \cos.(n-1).0\frac{2\pi}{n} + B_2 \cos.(n-1).1\frac{2\pi}{n} + B_3 \cos.(n-1).2\frac{2\pi}{n} + \text{etc.}$$

Dans ces équations, dont le nombre est n, et qui sont du premier degré, les quantités inconnues sont A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, $B_3, \ldots$: il s'agit d'effectuer les éliminations, et de trouver les valeurs de ces indéterminées. On remarquera d'abord que la même indéterminée a un multiplicateur différent dans chaque équation, et que la suite de ces multiplicateurs compose une série récurrente. En effet, cette suite est celle des sinus d'arcs croissants en progression arithmétique, ou celle des cosinus des mêmes arcs : elle peut être représentée par

$$\sin.0u,\ \sin.1u,\ \sin.2u,\ \sin.3u,\ \ldots\ \sin.(n-1)u,$$

ou par

$$\cos.0u,\ \cos.1u,\ \cos.2u,\ \cos.3u,\ \ldots\ \cos.(n-1)u,$$

L'arc u est égal à $i\frac{2\pi}{n}$, si l'indéterminée dont il s'agit est A_{i+1}, ou B_{i+1}. Cela posé, pour déterminer l'inconnue A_{i+1} au moyen des équations précédentes, il faut comparer à la suite des équations la série des multiplicateurs

$$\sin.0u,\ \sin.1u,\ \sin.2u,\ \sin.3u,\ \ldots\ \sin.(n-1)u,$$

et multiplier chaque équation par le terme correspondant de la série. Si l'on prend la somme des équations ainsi multipliées, on éliminera toutes les inconnues, excepté celle qu'il s'agit de déterminer. Il en sera de même si l'on veut trouver la valeur de B_{i+1}; il faudra multiplier chaque équation par le multiplicateur de B_{i+1} dans cette même équation, et prendre ensuite la somme de toutes les équations. Il s'agit de démontrer qu'en opérant de cette manière, on fera disparaître en effet des équations toutes les inconnues, excepté une seule : pour cela, il suffit de faire voir 1° que si l'on multiplie terme à terme les deux suites

$$\sin. 0u,\ \sin. 1u,\ \sin. 2u,\ \sin. 3u,\ \sin. 4u,\ \ldots \sin.(n-1)u,$$

et

$$\sin. 0v,\ \sin. 1v,\ \sin. 2v,\ \sin. 3v,\ \sin. 4v,\ \ldots \sin.(n-1)v,$$

la somme des produits

$$\sin. 0u \sin. 0v + \sin. 1u \sin. 1v + \sin. 2u \sin. 2v + \ldots\ldots$$
$$\sin.(n-1)u \sin.(n-1)v$$

sera nulle, excepté lorsque les arcs u et v seront les mêmes, chacun de ces arcs étant d'ailleurs supposé un multiple d'une partie de la circonférence égale à $\frac{2\pi}{n}$;

2° Que si l'on multiplie terme à terme les deux séries

$$\cos. 0u, \cos. 1u, \cos. 2u, \cos. 3u, \cos. 4u, \ldots\ldots \cos.(n-1)u,$$

et

$$\cos. 0v,\ \cos. 1v,\ \cos. 2v,\ \cos. 3v,\ \cos. 4v, \ldots\ldots \cos.(n-1)v,$$

la somme des produits sera nulle, excepté le cas où u est égal à v;

3° Que si l'on multiplie terme à terme les deux suites,

$$\sin. 0u,\ \sin. 1u,\ \sin. 2u,\ \sin. 3u,\ \sin. 4u, \ldots\ldots \sin.(n-1)u,$$
$$\cos. 0v,\ \cos, 1v,\ \cos. 2v,\ \cos. 3v,\ \cos. 4v, \ldots\ldots \cos.(n-1)v,$$

la somme des produits sera toujours nulle. On désignera par q l'arc $\frac{2\pi}{n}$, par μq l'arc u, et par νq l'arc v, μ et ν étant des nombres entiers positifs, moindres que n. Le produit de deux termes correspondants des deux premières séries sera représenté par

$$\sin. j\mu q \sin. j\nu q,\ \text{ou}\ \tfrac{1}{2} \cos. j(\mu-\nu) q - \tfrac{1}{2} \cos. j(\mu+\nu) q,$$

la lettre j désignant un terme quelconque de la suite 0, 1, 2, 3, ... i, ... $n-1$. Or il est facile de prouver que si l'on donne à j ses n valeurs successives, depuis 0 juspu'à $n-1$, la somme

$$\frac{1}{2}\cos.0(\mu-\nu)q+\frac{1}{2}\cos.1(\mu-\nu)q+\frac{1}{2}\cos.2(\mu-\nu)q+\ldots.$$
$$+\frac{1}{2}\cos.(n-1)(\mu-\nu)q$$

aura une valeur nulle; et qu'il en sera de même de la suite

$$\frac{1}{2}\cos.0(\mu+\nu)q+\frac{1}{2}\cos.1(\mu+\nu)q+\frac{1}{2}\cos.2(\mu+\nu)q+\ldots.$$
$$+\frac{1}{2}\cos.(n-1)(\mu+\nu)q.$$

En effet, en représentant l'arc $(\mu-\nu)q$ par α, qui est par conséquent un multiple de $\frac{2\pi}{n}$, on aura la suite récurrente.

$$\cos.0\alpha,\ \cos.1\alpha,\ \cos.2\alpha,\ \cos.3\alpha,\ldots.\ \cos.(n-2)\alpha,\ \cos.(n-1)\alpha,$$

dont la somme est nulle. Pour le faire voir, on représentera cette somme par S, et les deux termes de l'échelle de relation étant $2\cos.\alpha$ et -1, on multipliera successivement les deux membres de l'équation

$$S=\cos.0\alpha+\cos.1\alpha+\cos.2\alpha+\cos.3\alpha+\ldots\ldots$$
$$+\cos.(n-3)\alpha+\cos.(n-2)\alpha+\cos.(n-1)\alpha$$

par $-2\cos.\alpha$ et par $+1$; puis, ajoutant les trois équations, on remarquera que les termes intermédiaires se détruisent d'eux-mêmes d'après la nature de la série récurrente, ainsi qu'on le voit dans l'équation suivante :

$$S = \cos.\,0\alpha + \cos.\,1\alpha + \cos.\,2\alpha + \cos.\,3\alpha + \ldots + \cos.\,(n-1).\alpha$$

$$-2S\cos.\,\alpha \quad -2\cos.\,\alpha\cos.\,0\alpha - 2\cos.\,\alpha\cos.\,1\alpha \ldots - 2\cos.\,\alpha\cos.\,(n-2).\alpha - 2\cos.\,\alpha\cos.\,(n-1).\alpha$$

$$+S \quad +\cos.\,0\alpha \ldots\ldots\ldots + \cos.\,(n-3).\alpha + \cos.\,(n-2).\alpha + \cos.\,(n-1).\alpha.$$

Si l'on remarque maintenant que $n\alpha$ étant un multiple de la circonférence entière, les quantités

$$\cos.\,(n-1).\alpha,\ \cos.\,(n-2).\alpha,\ \cos.\,(n-3).\alpha,\ \text{etc.}$$

sont respectivement les mêmes que celles que l'on désignerait par $\cos.(-\alpha)$, $\cos(-2\alpha)$, $\cos.(-3\alpha)$, . . . , on en conclura les résultats suivants :

$$\cos.0\alpha - 2\cos.\alpha\cos.(n-1).\alpha + \cos.(n-2)\alpha = 0$$

et

$$\cos.1\alpha - 2\cos.\alpha\cos.0\alpha + \cos.(n-1)\alpha = 0.$$

On aura donc en général $2S - 2S\cos.\alpha = 0$: ainsi la somme cherchée S doit être nulle. On a représenté $(\mu-\nu)\,q$ par α, et l'on trouve que la somme des n termes dus au développement de $\frac{1}{2}\cos.\,j(\mu-\nu)\,q$ est nulle ; il en sera de même de la somme des termes dus au développement de $\frac{1}{2}\cos.\,j(\mu+\nu)q$, donc la somme des produits terme à terme des deux premières séries est nulle. Il faut excepter le cas où l'arc représenté par α serait nul, car l'équation $2S - 2S\cos.\,\alpha = 0$ est satisfaite par celle-ci : $\cos.\,\alpha = 1$. Ce cas est précisément celui où l'on a $\mu = \nu$, c'est-à-dire où les arcs μ et ν sont les mêmes ; alors le terme $\frac{1}{2}\cos.\,j(\mu+\nu)\,q$ donne encore un développement dont la somme est nulle. Mais le terme $\frac{1}{2}\cos.j(\mu-\nu)q$

fournit des termes égaux, dont chacun a pour valeur $\frac{1}{2}$; donc la somme des produits terme à terme des deux premières séries est $\frac{1}{2}n$. On trouvera de la même manière la valeur de la somme des produits terme à terme des deux secondes séries, ou $S(\cos.j\mu q.\cos.j\nu q)$. En effet, en substituant à $\cos.j\mu q.\cos.j\nu q$, la quantité

$$\frac{1}{2}\cos.j(\mu-\nu)\,q + \frac{1}{2}\cos.\,j\,(\mu+\nu)\,q,$$

on en conclura, comme dans le cas précédent, que

$$S\left[\frac{1}{2}\cos.j\,(\mu+\nu)\,q\right]$$

est nulle, que

$$S\left[\frac{1}{2}\cos.\,j\,(\mu-\nu)\,q\right]$$

est nulle, excepté le cas où $\mu=\nu$. Il suit de là que la somme des produits terme à terme des deux secondes séries, ou

$$S(\cos.j\,\mu q\,.\,\cos.j\,\nu q)$$

est toujours nulle lorsque les arcs u et v sont différents et égale à $\frac{1}{2}n$ lorsque $u=v$. Il ne faut plus que distinguer les cas où les arcs μq et νq sont tous les deux nuls, alors on a o pour la valeur de

$$S\left[\frac{1}{2}\cos.j\,(\mu-\nu)\,q - \frac{1}{2}\cos.\,j\,(\mu+\nu)\,q\right],$$

ou $$S\,(\sin.\,j\,\mu\,q.\,\sin.\,j\,\nu\,q),$$

qui désigne la somme des deux produits terme à terme des deux premières séries. Il n'en est pas de même de la somme $S(\cos. j\mu q. \cos. j\nu q)$, prise dans le cas où μq et νq sont nuls. Cette somme des produits terme à terme des deux secondes séries est évidemment égale à n, ce qui résulte de l'expression

$$\left[S\tfrac{1}{2}\cos. j(\mu-\nu)q + \tfrac{1}{2}\cos. j(\mu+\nu)q\right].$$

Quant à la somme des produits terme à terme des deux séries

$$\sin. 0u,\ \sin. 1u,\ \sin. 2u,\ \sin. 3u,\ \ldots\ \sin. (n-1).u$$
$$\cos. 0v,\ \cos. 1v,\ \cos. 2v,\ \cos. 3v,\ \ldots\ \cos. (n-1).v,$$

leur somme $S(\sin. i\mu q. \cos. i\nu q)$ est nulle dans tous les cas. On a en effet

$$S(\sin. i\mu q. \cos. i\nu q) = S\left[\tfrac{1}{2}\sin. i(\mu+\nu)q + \tfrac{1}{2}\sin. i(\mu-\nu)q\right].$$

Si l'on représente l'arc $(\mu+\nu)q$ par α, on aura la suite récurrente,

$$\sin.0\alpha,\ \sin.1\alpha,\ \sin.2\alpha,\ \sin.3\alpha,\ \ldots\ \sin.(n-3)\alpha,\ \sin.(n-2)\alpha,$$
$$\sin.(n-1)\alpha,$$

dont la somme est nulle : car en représentant cette somme par S, on aura

$$S = \sin. 0\alpha + \sin. 1\alpha + \sin. 2\alpha + \ldots \sin. (n-1)\alpha$$
$$-2S\cos.\alpha \quad -2\cos.\alpha \sin. 0\alpha - 2\cos.\alpha \sin. 1\alpha \ldots -2\cos.\alpha \sin. (n-2)\alpha - 2\cos.\alpha \sin. (n-1)\alpha$$
$$+ S \quad + \sin. 0\alpha + \sin. 1\alpha + \ldots + \sin. (n-2)\alpha + \sin. (n-1)\alpha.$$

Les trois termes qui se correspondraient verticalement se détruisent d'eux-mêmes dans une partie du second nombre, parce que la série récurrente $\sin.0\alpha$, $\sin.1\alpha$, $\sin.2\alpha$, etc., a pour échelle de relation $2\cos.\alpha-1$; de plus, $n\alpha$ étant un multiple de la circonférence, $\sin.(n-1).\alpha$ équivaut à $\sin.(-1\alpha)$, et $\sin.(n-2).\alpha$ équivaut à $\sin.(-2\alpha)$: ainsi le second nombre se réduit entièrement à zéro. On en tire l'équation

$$2S-2S\cos.\alpha=0, \text{ ou } S=0.$$

Ainsi la somme des termes dus au développement de

$$\frac{1}{2}\sin.j(\mu+\nu)q$$

est nulle. On représentera pareillement l'arc $(\mu-\nu q$ par α, et l'on trouvera encore que la somme S des terme dus au développement de $\frac{1}{2}\sin.j(\mu-\nu)q$ satisfait à l'équation

$$S(1-\cos.\alpha)=0.$$

Quant au cas où l'on aurait $\cos,\alpha=1$, ou $\alpha=0$, et par conséquent $\mu=\nu$, la somme

$$S\left(\frac{1}{2}\sin.j(\mu+\nu)q+\frac{1}{2}\sin.j(\mu+\nu)q\right)$$

ne cessera point d'être nulle; d'où l'on conclut que la somme des produits terme à terme des deux séries

$$\sin.0u,\ \sin.1u,\ \sin.2u,\ \sin.3u,\ \ldots\ \sin.(n-1).u,$$
$$\cos.0v,\ \cos.1v,\ \cos.2v,\ \cos.3v,\ \ldots\ \cos.(n-1).v$$

est nulle dans tous les cas possibles.

La comparaison de ces séries fournit donc les conséquences suivantes. Si l'on partage la circonférence 2π en un nombre n de parties égales, que l'on prenne un arc u composé d'un nombre entier μ de ces parties, et que l'on marque les extrémités des arcs u, $2u$, $3u$, $4u$, ... $(n-1).u$, il résulte des propriétés connues des quantités trigonométriques que les quantités

$$\sin. 0u,\ \sin. 1u,\ \sin. 2u,\ \sin. 3u, \ldots \sin.(n-1).u,$$

ou celles-ci,

$$\cos. 0u,\ \cos. 1u,\ \cos. 2u,\ \cos. 3u, \ldots \cos.(n-1).u,$$

formeront une série récurrente périodique composée de n termes. Cela posé, si l'on compare une de ces deux séries correspondantes à un arc u, ou $\mu\frac{2\pi}{n}$, à une série correspondante à un arc v, ou $\nu\frac{2\pi}{n}$, et qu'on multiplie terme à terme les deux séries comparées, la somme des produits sera nulle, lorsque les arcs u et v sont différents. Si les arcs u et v sont égaux, la somme des produits est égale à $\frac{1}{2}n$, lorsque l'on compare deux séries de sinus, ou lorsque l'on compare deux séries de cosinus; mais cette somme est nulle, si l'on compare une série de sinus à une de cosinus. Si l'on suppose nuls les arcs u et v, il est manifeste que la somme des produits terme à terme est nulle, toutes les fois que l'une des deux séries est formée de sinus, et lorsqu'elles le sont toutes les deux; mais la somme des produits est n, si les deux séries comparées sont formées de cosinus. En général, la somme des produits terme à terme est égale à o, ou $\frac{1}{2}n$, ou n, ce que d'ailleurs l'on déduirait de la règle connue pour la sommation des suites trigonométriques. Il est aisé d'effectuer, au moyen de ces remarques, l'élimination des inconnues dans les équations précédentes (P). L'indéterminée A_1 disparaît d'elle-même, comme ayant des coëfficients nuls. Pour trouver B_1 on multipliera les deux nombres de chaque équation par le coëfficient de B_1 dans cette même équation, et l'on ajoutera toutes les équations ainsi multipliées. On trouvera $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots . a_n) = n B_1$.

Pour déterminer A_2, on multipliera les deux nombres de chaque équation par le coëfficient de A_2 dans cette équation, et en désignant l'arc $\frac{2\pi}{n}$ par q, on aura, après avoir ajouté les équations,

$$a_1 \sin. 0q + a_2 \sin. 1q + a_3 \sin. 2q + a_4 \sin 3q + \ldots a_n \sin. n-1)q = \frac{1}{2} n A_2.$$

On aura pareillement, pour déterminer B_2,

$$a_1 \cos. 0q + a_2 \cos. 1q + a_3 \cos. 2q + a_4 \cos. 3q + \ldots a_n \cos. (n-1)q = \frac{1}{2} n B_2.$$

En général on trouvera chaque indéterminée, en multipliant les deux membres de chaque équation par le coëfficient de l'indéterminée dans cette même équation, et en ajoutant les produits. On parvient ainsi aux résultats suivants :

$$(n) \quad \begin{cases} n B_1 = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = S\left(a_i\right) \\ \frac{1}{2} n A_2 = a_1 \sin. 0 \frac{2\pi}{n} + a_2 \sin. 1 \frac{2\pi}{n} + \ldots\ldots + a_n \sin. (n-1) \frac{2\pi}{n} = S\left(a_i \sin. (i-1) \frac{2\pi}{n}\right), \\ \frac{1}{2} n B_2 = a_1 \cos. 0 \frac{2\pi}{n} + a_2 \cos. 1 \frac{2\pi}{n} + \ldots\ldots + a_n \cos. (n-1) \frac{2\pi}{n} = S\left(a_i \cos. (i-1) \frac{2\pi}{n}\right), \\ \frac{1}{2} n A_3 = a_1 \sin. 0 \frac{2.2\pi}{n} + a_2 \sin. 1 \frac{2.2\pi}{n} + \ldots\ldots + a_n \sin. (n-1) \frac{2.2\pi}{n} = S\left(a_i \sin. (i-1) \frac{2.2\pi}{n}\right), \\ \frac{1}{2} n B_3 = a_1 \cos. 0 \frac{2.2\pi}{n} + a_2 \cos. 1 \frac{2.2\pi}{n} + \ldots\ldots + a_n \cos. (n-1) \frac{2.2\pi}{n} = S\left(a_i \cos. (i-1) \frac{2.2\pi}{n}\right), \\ \frac{1}{2} n A_4 = a_1 \sin. 0 \frac{3.2\pi}{n} + a_2 \sin. 1 \frac{3.2\pi}{n} + \ldots\ldots + a_n \sin. (n-1) \frac{3.2\pi}{n} = S\left(a_i \sin. (i-1) \frac{3.2\pi}{n}\right), \\ \frac{1}{2} n B_4 = a_1 \cos. 0 \frac{3.2\pi}{n} + a_2 \cos. 1 \frac{3.2\pi}{n} + \ldots\ldots + a_n \cos. (n-1) \frac{3.2\pi}{n} = S\left(a_i \cos. (i-1) \frac{3.2\pi}{n}\right), \end{cases}$$

etc.

Il faut, pour trouver le développement indiqué par le signe S, donner à i les n valeurs successives o, 1, 2, 3, 4, etc., et prendre la somme : on aura en général

$$\frac{1}{2}\, n A_j = S\left[a_i \sin.\, (i-1)\frac{(j-1)2\pi)}{n}\right]$$

et

$$\frac{1}{2}\, n B_j = S\left[a_i \cos.\, (i-1)\frac{(j-1)2\pi}{n}\right]$$

Si l'on donne à j toutes les valeurs successives o, 1, 2, 3, 4, etc., qu'il peut avoir, ces deux formules fourniront les équations (n); et si l'on développe le terme sous le signe S, en donnant à i les n valeurs o, 1, 2, 3, 4. . . . . n, on aura les valeurs inconnues A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4 . . . . ., et les équations (p) seront entièrement résolues.

Il faut maintenant substituer les valeurs connues des coëfficients A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ... dans les équations (m) et l'on trouvera les valeurs suivantes :

$$\alpha_1 = N_0 + N_1 \varepsilon^{t \sin.\, v.\, q_1} + N_2 \varepsilon^{t \sin.\, v.\, q_2} + \text{etc.}$$

$$\alpha_2 = N_0 + (M_1 \sin.\, q_1 + N_1 \cos.\, q_1)\,\varepsilon^{t \sin\, v.\, q_1}$$
$$+ (M_1 \sin.\, q_2 + N_2 \cos.\, q_2)\,\varepsilon^{t \sin.\, v.\, q_2} + \text{etc.}$$

$$\alpha_3 = N_0 + (M_1 \sin.\, 2q_1 + N_1 \cos.\, 2q_1)\,\varepsilon^{t \sin.\, v.\, q_1}$$
$$+ (M_2 \sin.\, 2\,q_2 + N_2 \cos.\, 2\,q_2)\,\varepsilon^{t \sin.\, v.\, q_2} + \text{etc.}$$

. . . .

$$\alpha_i = N_0 + (M^1 \sin.\, (j-1)\, q_1 + N_1 \cos.\, (j-1)\,\varepsilon^{t \sin.\, v.\, q_1}$$
$$+ (M_2 \sin.\, (j-1)\, q_2 + N_2 \cos.\, (j-1)\, q_2)\,\varepsilon^{t \sin.\, v.\, q_2} + \text{etc.}$$

. . . .

$$\alpha_n = \text{N}_0 + \left(\text{M}_1 \sin.(n-1)q_1 + \text{N}_1 \cos.(n-1)q_1\right) \varepsilon^{t \sin.\text{v}.q_1}$$
$$+ \left(\text{M}_2 \sin.(n-1)q_2 + \text{N}_2 \cos.(n-1)q_2\right) \varepsilon^{t \sin\text{v}.q_2} + \text{etc.}$$

Dans ces équations ou a

$$\varepsilon = e^{-2\frac{\text{K}}{m}}, q_1 = 1\frac{2\pi}{n}, q_2 = 2\frac{2\pi}{n}, q_3 = 3\frac{2\pi}{n}, \text{etc.}$$

$$\text{N}_0 = \frac{1}{n} \text{S}\left(a_i\right),$$

$$\text{N}_1 = \frac{2}{n} \text{S}\left[a_i \cos.(i-1)q_1\right], \qquad \text{M}_1 = \frac{2}{n} \text{S}\left[a_i \sin.(i-1)q_1\right],$$

$$\text{N}_2 = \frac{2}{n} \text{S}\left[a_i \cos.(i-1)q_2\right], \qquad \text{M}_2 = \frac{2}{n} \text{S}\left[a_i \sin.(i-1)q_2\right],$$

$$\text{N}_3 = \frac{2}{n} \text{S}\left[a_i \cos.(i-1)q_3\right], \qquad \text{M}_3 = \frac{2}{n} \text{S}\left[a_i \sin.(i-1)q_2\right],$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Les équations précédentes renferment la solution complète de la question proposée ; elles sont représentées par cette équation générale

$$\alpha_j = \frac{1}{n}\text{S}\,a_i + \left[\frac{2}{n}\sin.(j-1)1\frac{2\pi}{n}\text{S}\,a_i\sin.(i-1)1\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n}\cos.(j-1)1\frac{2\pi}{n}\text{S}\,a_i\cos.(i-1)1\frac{2\pi}{n}\right]e^{-2\frac{\text{K}}{m}t\sin.\text{v}.1\frac{2}{}}$$

$$(\text{A}) \qquad + \frac{2}{2}\sin.(j-1)2\frac{2\pi}{n}\text{S}\,a_i\sin.(j-1)2\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n}\cos.(j-1)2\frac{2\pi}{n}\text{S}\,a_i\cos.(i-1)2\frac{2\pi}{n}\Big]e^{-2\frac{\text{K}}{m}t\sin.\text{v}.2\frac{2}{n}}$$

$$+ \text{etc.}$$

dans laquelle il n'entre que des quantités entièrement connues, savoir : a_1, a_2, a_3, a_4. . . . a_n, qui sont les températures initiales, K mesure de la conductibilité, m valeur de la masse, n nombre des masses échauffées, et t le temps écoulé.

Il résulte de toute l'analyse précédente que, si plusieurs corps égaux, en nombre n, sont rangés circulairement, et qu'ayant reçu des températures initiales quelconques, ils viennent à se communiquer la chaleur, comme on l'a expliqué; la masse de chaque corps étant désignée par m, le temps par t, et par K un coëfficient constant; la température variable de chacune des masses, qui doit être une fonction des quantités t, m et K, et de toutes les températures initiales, est donnée par l'équation générale que nous venons de rapporter. Il faut d'abord mettre au lieu de j, le numéro qui indique la place du corps dont on veut connaître la température, savoir : 1 pour le premier corps, 2 pour le second, etc.; ensuite il restera la lettre i qui entre sous le signe S. On donnera à i les n valeurs successives $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ n$, et l'on prendra la somme de tous les termes. Quant au nombre des termes qui entrent dans cette équation, il doit y en avoir autant que l'on trouve de sinus verses différents, lorsque la suite des arcs est $0\,\frac{2\pi}{n},\ 1\,\frac{2\pi}{n},\ 2\,\frac{2\pi}{n}, \ldots\ldots$; c'est-à dire que le nombre n étant égal à $2\lambda + 1$, ou à 2λ, selon qu'il est impair ou pair, le nombre des termes qui entrent dans l'équation générale est toujours $\lambda + 1$.

41. Pour donner un exemple de l'application de cette formule, nous supposerons que la première masse est la seule que l'on ait d'abord échauffée, en sorte que les températures initiales $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, soient toutes nulles, excepté la première. Il est visible que la quantité de chaleur contenue dans la première masse, se distribuera successivement entre toutes les autres. Or la loi de cette communication de la chaleur sera exprimée par l'équation suivante :

$$\alpha_j = \frac{a_1}{n} + \frac{2\,a_1}{n}\cos.(j-1)\;\frac{2\pi}{n}\,e^{-2\frac{K}{m}-t\sin.\text{v}.1\frac{2\pi}{n}}$$

$$+\frac{2\,a_1}{n}\cos.(j-1)\,2\,\frac{2\pi}{n}\,e^{-2\frac{K}{m}-t\sin.\text{v}.2\frac{2\pi}{n}}$$

$$+\frac{2\,a_1}{n}\cos.(j-1)\,3\,\frac{2\pi}{n}\,e^{-2\frac{K}{m}-t\sin.\text{v}.3\frac{2\pi}{n}} + \text{etc.}$$

Si la seconde masse était seule échauffée, et que les températures a_1, a_3, a_4, ... a_n fussent nulles, on aurait :

$$\alpha_j = \frac{a_2}{n} \equiv \left[\frac{2}{n}a_2\cos.(j-1)\,1\,\frac{2\pi}{n}\cos.1\frac{2\pi}{n} \equiv \frac{2}{n}a_2\sin.(j-1)\,1\,\frac{2\pi}{n}\sin.1\frac{2\pi}{n}\right.\quad e^{-2\frac{K}{m}t\sin.\text{v}.1\frac{2\pi}{n}}$$

$$\equiv \left[\frac{2}{n}a_2\cos.(j-1)\,2\,\frac{2\pi}{n}\cos.2\frac{2\pi}{n} \equiv \frac{2}{n}a_2\sin.(j-1)\,2\,\frac{2\pi}{n}\sin.2\frac{2\pi}{n}\right.\quad e^{-2\frac{K}{m}t\sin.\text{v}.2\frac{2\pi}{n}}$$

$+$ etc.

et si l'on suppose que toutes les températures initiales sont nulles, excepté a_1 et a_2, on trouvera pour la valeur de α_j la somme des valeurs trouvées dans chacune des deux hypothèses précédentes. En général, il est facile de conclure de l'équation précédente que, pour trouver la loi suivant laquelle les différentes quantités initiales de chaleur se répartissent entre les masses, on peut considérer séparément les cas où les températures initiales seraient nulles, excepté une seule. On supposera que la quantité de chaleur contenue dans une des masses se communique à toutes les autres, en regardant ces dernières comme affectées de températures nulles ; et ayant fait cette hypothèse pour chacune des masses en particulier, à raison de la chaleur initiale qu'elles ont reçue, on connaîtra quelle est, après un temps donné, la température de chacun des corps, en ajoutant toutes les températures que ce même corps a dû recevoir dans chacune des hypothèses précédentes.

42. Si dans l'équation générale (A, page 388) qui donne la valeur de α_j, on suppose que le temps a une valeur infinie, on trouvera $\alpha_j = \frac{1}{n} \text{S}\, a_i$, en sorte que chacune des masses aura acquit la température moyenne; résultat qui est évident par lui-même. A mesure que la valeur du temps augmente, le premier terme $\frac{1}{n}\text{S}\,(a_i)$ devient de plus en plus grand par rapport au suivant, ou à la somme des suivants. Il en est de même du second par rapport aux termes qui le suivent; et lorsque le temps a acquis une valeur considérable, la valeur de α_j est représentée, sans erreur sensible, par l'équation suivante :

$$\alpha_j = \frac{1}{n}\text{S}\,a_i + \frac{2}{n}\sin.(j-1)\frac{2\pi}{n}\cdot\text{S}\,a_i\sin.(i-1)\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n}\cos.(j-1)\frac{2\pi}{n}\cdot\text{S}\,a_i\sin.(i-1)\frac{2\pi}{n}\quad e^{-2\frac{K}{m}t\,\text{sin. v.}\frac{2\pi}{n}}.$$

En désignant par a et b les coëfficients de $\sin.(j-1)\frac{2\pi}{n}$, et de $\cos.(j-1)\frac{2\pi}{n}$, et la fraction $e^{-2\frac{K}{m}\text{sin. v.}\frac{2\pi}{n}}$ par ω, on aura

$$\alpha_j = \frac{1}{n}\text{S}\,a_1 + \left[a\sin.(j-1)\frac{2\pi}{n} + b\cos.(j-1)\frac{2\pi}{n}\right]\omega^t,$$

les quantités a et b sont constantes, c'est-à-dire indépendantes du temps et de la lettre j, qui indique le rang de la masse dont la température est α_j: ces quantités sont les mêmes pour toutes les masses. La différence de la température variable α à la température finale $\frac{1}{n}\text{S}(a_i)$ décroît donc pour chacune des masses proportionnellement aux puissances successives de la fraction ω. Chacun des corps tend de plus en plus à acquérir la température finale $\frac{1}{n}S(a_i)$, et la différence entre cette dernière limite et la température variable du même corps finira toujours par décroître comme les puissances successives d'une fraction. Cette fraction est la même, quel que soit le corps dont on considère les changements de température. Le coëfficient de ω^t, ou $a \sin. u + b \cos. u$, en désignant par u l'arc $(j-1)\frac{2\pi}{n}$, peut être mis sous cette forme, $A \sin.(u+B)$, en prenant A et B tels que l'on ait $a=A\cos. A$ et $b=A\sin. B$. Si l'on voulait déterminer le coëfficient de ω^t, qui se rapporte aux corps suivants, dont la température est α_{j+1}, α_{j+2}, α_{j+3}, ... etc., il faudrait ajouter à u_j l'arc $\frac{2\pi}{n}$, ou $2\frac{2\pi}{n}$, ou $3\frac{2\pi}{n}$, ainsi de suite; c'est-à-dire que l'on a les équations.

$$\alpha_j \quad -\frac{1}{n}S\,a_i = A \sin.\left(B + u_j\right)\omega^t + \text{etc.}$$

$$\alpha_{j+1} - \frac{1}{n}S\,a_i = A \sin.\left(B + u_j + 1\frac{2\pi}{n}\right)\omega^t + \text{etc.}$$

$$\alpha_{j+2} - \frac{1}{n}S\,a_i = A \sin.\left(B + u_j + 2\frac{2\pi}{n}\right)\omega^t + \text{etc.}$$

$$\alpha_{j+3} - \frac{1}{n}S\,a_i = A \sin.\left(B + u_j + 3\frac{2\pi}{n}\right)\omega^t + \text{etc.}$$

etc. . . . .

On voit par là que les dernières différences entre les températures actuelles et les températures finales, sont représentées par les équations précédentes, en ne conservant que le premier terme du second membre de chaque équation. Ces dernières différences varient donc selon la loi suivante.

Si l'on ne considère qu'un seul corps, la différence variable dont il s'agit, c'est-à-dire l'excès de la température actuelle du corps sur la température finale et commune, diminue comme les puissances successives d'une fraction, le temps augmentant par parties égales; et si l'on compare dans un seul et même instant la température de tous les corps, la différence dont il s'agit varie proportionnellement aux sinus successifs de la circonférence divisée en parties égales. La température d'un même corps, prise à divers instants successifs égaux, est représentée par les ordonnées d'une logarithmique, dont l'axe est divisé en parties égales; et la température de chacun de ces corps, prise au même instant pour tous, est représentée par les ordonnées du cercle dont la circonférence est divisée en parties égales. Il est facile de voir, comme on l'a remarqué plus haut, que si les températures initiales sont telles, que les différences de ces températures à la température moyenne ou finale soient proportionnelles aux sinus successifs des arcs multiples, ces différences diminueront toutes à la fois sans cesser d'être proportionnelles à ces mêmes sinus. Cette loi, qui régnerait entre les températures initiales, ne serait point troublée par l'action réciproque des corps, jusqu'à ce qu'ils eussent tous acquis une température commune. La différence diminuerait pour chaque corps comme les puissances successives d'une même fraction. Telle est la loi la plus simple à laquelle puisse être assujettie la communication de la chaleur entre une suite de masses égales. Lorsque cette loi est établie entre les températures initiales, elle se conserve d'elle-même; et lorsque cette loi ne règne point entre les températures initiales, c'est-à-dire lorsque les différences de ces températures à la température moyenne ne sont pas proportionnelles aux sinus successifs des arcs multiples, la loi dont il s'agit tend toujours à s'établir, et le système des températures variables finit bientôt par se confondre sensiblement avec celui qui dépend des ordonnées du cercle et de la logarithmique.

Puisque les dernières différences entre l'excès de la température d'un corps sur la température moyenne sont proportionnelles au sinus de l'arc à l'extrémité duquel le corps est placé, il s'ensuit que, si l'on désigne deux corps placés aux extrémités d'un même diamètre, la température du premier surpassera la température moyenne et constante, autant que cette température constante surpassera celle du second corps; c'est pourquoi si l'on prend à chaque instant la somme des températures de deux masses dont la situation est opposée, on trouvera une somme constante, et cette somme aura la même valeur pour deux masses quelconques placées aux extrémités d'un même diamètre.

43. Les formules qui représentent les températures variables des masses disjointes s'appliquent facilement à la propagation de la chaleur dans les corps continus. Pour en donner un exemple remarquable, nous déterminerons le mouvement de la chaleur dans une armille, au moyen de l'équation générale qui a été rapportée précédemment, page 388, art. 40.

On supposera que le nombre n des masses croît successivement, et qu'en même temps la longueur de chaque masse décroît dans le même rapport, afin que la longueur du système ait une valeur constante égale à 2π; ainsi le nombre n des masses sera successivement 2, ou 4, ou 8, ou

16,... à l'infini, et chacune des masses sera π, ou $\frac{\pi}{2}$, ou $\frac{\pi}{4}$, ou $\frac{\pi}{8}$, ... Il est nécessaire de supposer aussi que la facilité avec laquelle la chaleur se transmet, augmente dans le même rapport que le nombre des masses m, c'est-à-dire en raison inverse de l'épaisseur de chacune. Ainsi la quantité que représente K lorsqu'il n'y a que deux masses, devient double lorsqu'il y en a quatre, quadruple s'il y en a huit, ainsi de suite : en désignant par g cette quantité, on voit que le nombre K devra être successivement remplacé par g, $2g$, $4g$, ... etc. Si l'on passe maintenant à la supposition du corps continu, on écrira au lieu de m, valeur de chaque masse infiniment petite, l'élément dx; au lieu du nombre n des masses, on mettra $\frac{2\pi}{dx}$, et au lieu de K on mettra $\frac{gn}{2}$ ou $\frac{\pi g}{dx}$.

Quant aux températures initiales $a_1, a_2, a_3, \ldots a_i \ldots a_n$, elles dépendent de la valeur de l'arc x; et en considérant ces températures comme les états successifs d'une même variable, la valeur générale a_i représente une fonction arbitraire de x: l'indice i sera alors remplacé par $\frac{x}{dx}$. A l'égard des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_j \ldots \alpha_n$, ces températures sont des variables qui dépendent des deux quantités x et t. En désignant par z cette variable, on aura $\varphi(x, t) = z$. L'indice j, qui marque la place que l'un des corps occupe, sera remplacé par $\frac{x}{dx}$. Ainsi, pour appliquer l'analyse précédente au cas où l'on aurait une infinité de tranches, formant un corps continu dont la forme serait celle d'une armille, il faudra substituer aux quantités n, m, K, a_i, i, α_j, j, celles qui leur correspondent : $\frac{2\pi}{dx}$, dx, $\frac{\pi g}{dx}$, φx, $\frac{x}{dx}$, $\psi(x,t)$, $\frac{x}{dx}$. On fera ces substitutions dans l'équation générale, et l'on écrira $\frac{1}{2}dx^2$ au lieu de $\sin.\text{v}.(dx)$, et i, j au lieu de $i-1$, $j-1$. Le premier terme $\frac{1}{n}\text{S}a_j$, devient la valeur de l'intégrale $\frac{1}{\pi}\text{S}\varphi x\,dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=2\pi$; la quantité $\sin.(j-1)\frac{2\pi}{n}$, devient $\sin.j\,dx$ ou $\sin.x$. La valeur de $\cos.(j-1)\frac{2\pi}{n}$ est $\cos.x$; celle de $\frac{2}{n}\text{S}\left(a_i\sin.(i-1)\frac{2\pi}{n}\right)$ est $\frac{2}{\pi}\text{S}(\varphi x\sin.x\,dx)$, l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=2\pi$; et celle de $\frac{2}{n}\text{S}\left(a_i\cos.(i-1)\frac{2\pi}{n}\right)$ est $\frac{2}{\pi}\text{S}(\varphi x\cos.x\,dx)$, l'intégrale étant prise entre les mêmes limites. On obtient par ces substitutions l'équation

$$\begin{aligned}\psi(x,t)=z=\frac{1}{2\pi}\text{S}\varphi x\,dx &+\frac{1}{\pi}(\sin.x\,\text{S}\varphi x\sin.x\,dx+\cos.x\,\text{S}\varphi x\cos.x\,dx)e^{-g\pi t}\\ &+\frac{1}{\pi}(\sin.2x\,\text{S}\varphi x\cos.2x\,dx+\cos.2x\,\text{S}\varphi x\cos.2x\,dx)e^{-2^2g\pi t}\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

et représentant par K la quantité $g\pi$, on aura

$$\begin{aligned}\pi z=\frac{1}{2}\text{S}\varphi x\,dx &+(\sin.x\,\text{S}\varphi x\sin.x\,dx+\cos.x\,\text{S}\varphi x\cos.x\,dx)e^{-\text{K}t}\\ &+(\sin.2x\,\text{S}\varphi x\sin.2x\,dx+\cos.2x\,\text{S}\varphi x\cos.2x\,dx)e^{-2^2\text{K}t}\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

Cette solution, qui est la même que la précédente, donne lieu à diverses remarques.

1° Il ne serait pas nécessaire de recourir à l'analyse des équations aux différences partielles, pour obtenir l'équation générale qui exprime le mouvement de la chaleur dans une armille, et l'on pourrait résoudre la question pour un nombre déterminé de corps, et supposer ce nombre indéfini. Cette méthode de calcul a une clarté qui lui est propre, et qui dirige les premières recherches. Il est facile ensuite de passer à une méthode plus concise et plus générale, dont la marche se trouve naturellement indiquée. On voit d'abord que la distinction des valeurs particulières qui, satisfaisant à l'équation aux différences partielles, composent la valeur générale, dérive de la règle connue pour l'intégration des équations différentielles linéaires. Cette distinction est d'ailleurs fondée, comme on l'a vu plus haut, sur les conditions physiques de la question.

2° Pour passer du cas des masses disjointes à celui d'un corps continu, nous avons supposé que le coëfficient K augmentait proportionnellement au nombre n, ou en raison inverse de l'épaiseur des masses. Ce changement continuel du nombre K est une suite de ce que nous avons démontré précédemment; savoir : que la quantité de chaleur qui s'écoule entre deux tranches d'un même prisme, est proportionnelle à la valeur de $\frac{dy}{dx}$, x désignant l'abcise qui répond à la section, et y la température. Au reste si l'on ne supposait point que le coëfficient K augmente à mesure que l'épaisseur des masses diminue, et que l'on retint une valeur constante pour ce coëfficient, on trouverait, en faisant n infini, un résultat différent de celui qu'on observe dans les corps continus. La diffusion de la chaleur serait infiniment lente, et, de quelque manière que la masse eût été échauffée, la température d'un point n'éprouverait aucun changement sensible pendant un temps déterminé, ce qui est contraire aux faits. Toutes les fois que l'on a recours à la considération d'un nombre infini de masses séparées qui se transmettent la chaleur, et que l'on veut passer au cas du corps continu, il faut attribuer au coëfficient K, qui mesure la vitesse de la transmission, une valeur proportionnelle au nombre de masses infiniment petites qui composent le corps donné.

3° Si dans la dernière équation que nous venons d'obtenir pour exprimer la valeur de z, ou $\psi(x, t)$, on suppose $t = 0$, il sera nécessaire que l'équation représente l'état initial. On aura donc, par cette voie, l'équation (P) que nous avons obtenue précédemment (page 328, art. 31).

$$(\mathrm{P})\quad \pi\varphi x = \tfrac{1}{2}\,S(\varphi x\,dx) + \sin.x\,S(\varphi x \sin.x\,dx) + \sin.2x\,S(\varphi x \sin.2x\,dx) + \text{etc.}$$
$$+ \cos.x\,S(\varphi x \cos.x\,dx) + \cos.2x\,S(\varphi x \cos.2x\,dx) + \text{etc.}$$

Ainsi ce théorème, qui donne le développement d'une fonction arbitraire en séries de sinus ou de cosinus d'arcs multiples, se déduit par là des règles élémentaires du calcul. Il convient aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, puisque l'on peut successivement développer le second membre par rapport aux différentes variables qui entrent dans φ.

4° On trouve ici l'origine du procédé que nous avons employé pour faire disparaître, par des intégrations successives, tous les coëfficients, excepté un seul, dans l'équation

$$\varphi x = a + a_1 \sin.x + a_2 \sin.2x + a_3 \sin.3x + \text{etc.}$$
$$+ b_1 \cos.x + b_2 \cos.2x + b_3 \cos.3x + \text{etc.}$$

Ces intégrations correspondent exactement aux éliminations des diverses inconnues dans les équations (P), pages 377, 378, etc., et l'on reconnaît clairement, par cette comparaison des deux méthodes, que l'équation (P), art. 31, page 328, a lieu pour toutes les valeurs de x, comprises entre o et 2π, sans que l'on soit fondé à l'appliquer aux valeurs de x qui excèdent ces limites.

Pour former l'intégrale de l'équation qui exprime le mouvement de la chaleur dans une armille, il a été nécessaire de résoudre une fonction arbitraire en une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples : les nombres qui affectent la variable sous les signes sinus et cosinus, sont les nombres de l'ordre naturel 1, 2, 3, 4, etc. La question suivante présente une difficulté de plus : l'intégration exige que l'on résolve la fonction arbitraire en une série de sinus; mais les coëfficients de la variable, sous le signe sinus, ne sont plus les nombres 1, 2, 3, 4, etc.; ces coëfficients satisfont à une équation déterminée, dont toutes les racines sont irrationnelles et en nombre infini.

En général, nous nous sommes attachés à donner de chaque question une solution spéciale, et dont on pût facilement conclure les valeurs numériques des quantités inconnues. Les intégrales des équations aux différences partielles sont susceptibles de diverses formes, parmi lesquelles il faut choisir celle qui convient à la question physique dont il s'agit, et qui est la plus propre à représenter les phénomènes; et il arrive souvent que l'interprétation des résultats du calcul est indépendante des méthodes générales d'intégration. Ces mêmes considérations s'appliquent à la question du mouvement des fluides, et surtout à celle du mouvement uniforme des eaux courantes. On emploiera dans la suite de ce mémoire, sous des formes très-différentes, l'intégrale de cette même équation qui exprime le mouvement varié de la chaleur dans une armille.

VII.

Du mouvement de la chaleur dans une sphère solide.

Nous considérons maintenant le mouvement de la chaleur dans un sphère solide, d'un rayon donné X. Il s'agit (art. 11) d'intégrer l'équation $\frac{dz}{dt}=\text{K}\left[\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dz}{dx}\right]$, en sorte que l'intégrale satisfasse, lorsque $x=\text{X}$, à la condition $\frac{dz}{dx}+hz=0$. K désigne le rapport $\frac{\text{K}}{\text{C.D}}$, et h désigne le rapport $\frac{h}{\text{K}}$.

Si l'on fait $zx=y$, y étant une nouvelle indéterminée, on aura, après les substitutions, $\frac{dy}{dt}=\text{K}\frac{d^2y}{dx^2}$. Ainsi il faut intégrer cette dernière équation, et l'on prendra ensuite $z=\frac{y}{x}$.

Soit $y=e^{mt}u$, u étant une fonction de x, on aura

$$mu=\text{K}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

On voit d'abord que la valeur de t devenant infinie, celle de z doit être nulle dans tous les points, puisque le corps est entièrement refroidi: on ne peut donc prendre pour m qu'une quantité négative. Or K est positif par hypothèse: on en conclut que la valeur de u dépend des arcs de cercle, ce qui résulte de la nature connue de l'équation $mu=\text{K}\frac{d^2u}{dx^2}$.

Soit $u = \text{A}\cos. nx + \text{B}\sin. nx$: on aura cette condition,

$$m = -\text{K}n^2;$$

ainsi la valeur particulière de y est

$$e^{-\text{K}n^2t}[\text{A}\cos. nx + \text{B}\sin. nx].$$

On peut donc prendre pour valeur particulière de z,

$$z = \frac{e^{-\text{K}n^2t}}{x}[\text{A}\cos. nx + \text{B}\sin. nx],$$

n étant un nombre positif quelconque, et A et B des constantes. On remarquera d'abord que la constante A doit être nulle; car la valeur de z qui exprime la température du centre lorsqu'on fait $x=0$, ne peut pas être infinie: donc le terme $\text{A}\cos. x$ doit être omis.

De plus le nombre n ne peut être pris arbitrairement: En effet, si dans l'équation déterminée $\frac{dz}{dx} + hz = 0$, on substitue la valeur de z, on trouvera

$$nx\cos. nx + (hx - 1)\sin. nx = 0;$$

ou
$$\frac{n\text{X}}{\text{tang.}\, n\text{X}} = 1 - h\text{X},$$

car l'équation doit avoir lieu a la surface. Soit λ le nombre $1 - h\text{X}$, et $n\text{X} = \varepsilon$, on aura $\frac{\varepsilon}{\text{tang.}\,\varepsilon} = \lambda$. Il faut donc trouver un arc ε qui, divisé par sa tangente, donne un quotient connu λ, et l'on aura ensuite $n = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Il est visible qu'il y a une infinité de tels arcs qui ont avec leur tangente un rapport donné, en sorte que l'équation de condition $\frac{nX}{\text{tang.}\,nX} = 1 - hX$ a une infinité de racines réelles.

Les constructions sont très-propres à faire connaître la nature de cette équation. Soit $u = \text{tang.}\,\varepsilon$ l'équation d'une ligne (Fig. 5) dont l'arc ε est l'abscise et u l'ordonnée, et soit $u = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ l'équation d'une droite dont ε et u désignent aussi les coordonnées; si on élimine u avec ces deux équations, on a la proposée $\frac{\varepsilon}{\lambda} = \text{tang.}\,\varepsilon$. L'inconnue ε est donc l'abcisse du point d'intersection de la courbe et de la droite. Cette ligne courbe est composée d'une infinité d'arcs; toutes les ordonnées correspondantes aux abcisses $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, etc., sont infinies; et toutes celles qui répondent aux points 0π, 2π, 3π, 4π, etc., sont nulles. Pour tracer la droite dont l'équation est

$$u = \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{1 - hX},$$

on forme le quarré 0101, et portant la quantité hX de 0 en hX, on joint le point hX avec l'origine. La courbe dont l'équation est $u = \text{tang.}\,\varepsilon$ a pour tangente à l'origine une ligne qui divise l'angle droit en deux parties égales, parce que la dernière raison de l'arc et de sa tangente est 1. On conclut de là que si λ ou $1 - hX$ est une quantité moindre que l'unité, la droite passe à l'origine au-dessus de la courbe, et qu'il y a par conséquent un point d'intersection de cette droite avec la première branche. Il est également évident que la même droite coupe toutes les branches ultérieures; donc l'équation $\frac{\varepsilon}{\text{tang.}\,\varepsilon} = \lambda$ a un nombre infini de racines réelles. La première est comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$, la seconde entre π et $3\frac{\pi}{2}$, la troisième entre 2π et $5\frac{\pi}{2}$, ainsi de suite. Ces racines approchent extrêmement de leurs limites supérieures lorsque leur rang est très-avancé.

Si l'on veut calculer la valeur d'une de ces racines, par exemple de la première, on peut employer la règle suivante : on écrira les deux équations $\varepsilon = \text{A. tang.}\,u$ et $u = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, A. tang. u désignant la longueur de l'arc dont la tangente est u ; ensuite on prendra un nombre quelconque pour u, on en conclura, au moyen de la première équation, la valeur de ε ; on substituera cette valeur dans la seconde équation, et l'on en déduira la valeur de u ; on substituera cette seconde valeur de u dans la première équation, et on en déduira la valeur de ε ; cette valeur étant substituée dans la seconde équation, on en conclura une troisième valeur de u, qui, étant substituée dans la première équation, donne une nouvelle valeur de ε. On continuera ainsi de déterminer u par la seconde équation, et ε par la première. Cette opération donnera des valeurs de plus en plus approchées de l'inconnue ε. La construction suivante rend cette convergence manifeste.

En effet si le point u (Fig. 6) correspond à la valeur arbitraire que l'on attribue à l'ordonnée u, et que l'on substitue cette valeur dans la première équation, le point ε correspond à l'abcisse que l'on aura calculée, au moyen de cette équation $\varepsilon = \text{tang.}\,u$. Si l'on substitue cette abcisse ε dans la seconde équation, on trouvera une ordonnée u' qui correspond au point u'. Substituant u' dans la première équation, on trouvera une abcisse ε', qui répond au point ε'. Ensuite cette abeisse étant substituée dans la seconde équation, fera connaître une ordonnée u'' qui, étant substituée dans la première, fera connaître une troisième abcisse ε''; ainsi de suite à l'infini. C'est-à-dire que, pour représenter l'emploi continuel et alternatif des deux équations précédentes, il faut, par le point u, mener l'horizontale jusqu'à la courbe; par le point d'intersection ε, mener la verticale jusqu'à la droite; ainsi de suite à l'infini, en s'abaissant de plus en plus vers le point cherché.

La figure précédente représente le cas où l'ordonnée, prise arbitrairement pour u, est plus grande que celle qui répond au point d'intersection. Si l'on choisit au contraire pour la valeur de u une quantité plus petite (Fig. 7), et que l'on emploie de la même manière les deux équations $\varepsilon = \text{A. tang.}\,\varepsilon$, $u = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, on parviendra encore à des valeurs approchées de l'inconnue ε. La seconde figure fait connaître que, dans ce cas, on s'élève continuellement vers le point d'intersection en passant par les points u, ε; u', ε'; u'', ε''; etc., qui terminent des droites horizontales et verticales. On obtient, en partant d'une valeur de u trop petite, des quantités ε, ε', ε'', ε''', ε^{iv}, etc., qui convergent vers l'inconnue, et sont plus petites qu'elle; et l'on obtient, en partant d'une valeur u trop grande, des quantités qui convergent aussi vers l'inconnue, et dont chacune est plus grande qu'elle: on connaît donc des limites de plus en plus resserrées, et entre lesquelles la grandeur cherchée sera toujours comprise. L'une et l'autre approximation est représentée par la formule

$$\varepsilon = \ldots \text{A. tang}\left(\frac{1}{\lambda}\,\text{A. tang}\left(\frac{1}{\lambda}\,\text{A tang}\left(\frac{1}{\lambda}\,\text{A tang.}\left(\ldots\right)\right)\right)\right).$$

Lorsqu'on aura effectué quelques-unes des opérations indiquées, les résultats successifs différeront moins, et l'on sera parvenu à une valeur approchée de ε.

On pourrait se proposer d'appliquer les deux équations $\varepsilon = \text{A.}\,\text{tang.}\,u$, et $u = \frac{\varepsilon}{\lambda}$, dans un ordre différent en leur donnant cette forme, $u = \text{tang.}\,\varepsilon$, et $\varepsilon = \lambda u$. On prendrait pour ε une valeur arbitraire, et en la substituant dans la première équation, on trouverait la valeur de u qui, étant substituée dans la seconde équation, donnerait une seconde valeur de ε. On emploierait ensuite cette nouvelle valeur de ε de la même manière qu'on a employé la première. Mais il est facile de reconnaître par les constructions, qu'en suivant le cours de ces opérations, on s'éloigne de plus en plus du point d'intersection, au lieu de s'en approcher, comme dans le cas précédent. Les valeurs successives de ε, que l'on obtiendrait, diminueraient continuellement jusqu'à zéro, ou augmenteraient sans limite. On passerait successivement de ε'' en u'', de u'' en ε', de ε' en u', de u' en ε, ainsi de suite à l'infini.

La règle que l'on vient d'exposer pouvant s'appliquer au calcul de chacune des racines de l'équation $\frac{\varepsilon}{\text{tang.}\,\varepsilon} = 1 - h\text{X}$, qui ont d'ailleurs des limites données, on peut regarder toutes ces racines comme des nombres connus. Au reste il était seulement nécessaire de se convaincre que l'équation a une infinité de racines, qui sont toutes réelles. On a rapporte ici ce procédé d'approximation parce qu'il est fondé sur une construction remarquable, qu'on peut employer utilement dans plusieurs cas; mais l'application qu'on en ferait à l'équation dont il s'agit serait beaucoup trop lente : il faudrait donc recourir dans la pratique à une autre méthode d'approximation.

On connaît maintenant une forme particulière que l'on peut donner à la fonction z, et qui satisfait à toutes les conditions de la question. Cette solution est représentée par l'équation

$$z = \frac{A e^{-Kn^2t} \sin.(nx)}{x},$$

ou

$$z = \frac{a e^{-Kn^2t} \sin.(nx)}{nx};$$

le coëfficient a est un nombre quelconque, et le nombre n est tel que l'on a $\frac{nX}{\text{tang.}\,nX} = 1 - hX$. Il en résulte que, si les températures initiales des différentes couches étaient proportionnelles au quotient $\frac{\sin.(nx)}{nx}$, elles diminueraient toutes à la fois en conservant entre elles, pendant toute la durée du refroidissement, les rapports qui avaient été établis, et la température de chaque point s'abaisserait comme l'ordonnée d'une logarithmique. Supposons donc que l'arc ε étant divisé en parties égales, et pris pour abcisse, on élève en chaque point une ordonnée égale au rapport du sinus à l'arc; le système de toutes ces ordonnées sera celui des températures initiales qu'il faut attribuer aux différentes couches, depuis le rayon zéro, jusqu'au rayon total X. L'arc ε dont la longueur représente le rayon X, ne doit pas être pris arbitrairement, il est nécessaire que cet arc ait avec sa tangente un rapport donné. Comme il y a une infinité d'arcs qui satisfont à cette condition, on formerait ainsi une infinité de systèmes de températures initiales, qui peuvent subsister d'eux-mêmes dans la sphère sans que les rapports des températures changent pendant la durée du refroidissement.

Il reste maintenant à prouver qu'un état initial quelconque peut toujours être décomposé en un certain nombre ou en une infinité d'états partiels, dont chacun représente un de ces systèmes de températures que nous avons considérés précédemment, et dans lesquels l'ordonnée varie avec la distance x proportionnellement au quotient du sinus par l'arc; car le mouvement général de la chaleur dans l'intérieur de la sphère sera alors décomposé en autant de mouvements particuliers, dont chacun s'accomplira librement comme s'il était seul.

Désignant par n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, etc., les quantités qui satisfont à l'équation $\frac{n\text{X}}{\text{tang.}\,n\text{X}} = 1 - h\text{X}$, et que l'on suppose rangées par ordre en commençant par la plus petite; on formera l'équation générale

$$xz = a_1 e^{-\text{K}n_1^2 t}\sin.(n_1 x) + a_2 e^{-\text{K}n_2^2 t}\sin.(n_2 x) \\ + a_3 e^{-\text{K}n_3^2 t}\sin.(n_3 x) + \text{etc.}$$

Si l'on fait $t=0$, on aura, pour exprimer l'état initial des températures,

$$xz = a_1\sin.n_1 x + a_2\sin.n_2 x + a_3\sin.n_3 x + \text{etc.}$$

La question consiste à déterminer, quel que soit l'état initial, les coëfficients a_1, a_2, a_3, a_4, etc. Supposons donc que l'on connaisse les valeurs de z depuis $x=0$, jusqu'à $x=\text{X}$, et représentons ce système de valeurs par $\text{F}x$, on aura,

$$(a)\quad \text{F}x = \frac{a_1\sin.(n_1 x) + a_2\sin.(n_2 x) + a_3\sin.(n_3 x) + a_4\sin.(n_4 x) + \ldots}{x}$$

Pour déterminer le coëfficient a_1, on multipliera les deux membres de l'équation par $x \sin.(n_1 x) dx$, et l'on intégrera depuis $x = o$, jusqu'à $x = X$. L'intégrale

$$\int \sin.(mx) \sin.(nx) dx,$$

prise entre ces limites, est

$$\frac{1}{m^2 - n^2}[- m \sin.(nX) \cos.(mX) + n \sin.(mX) \cos.(nX)].$$

Si m et n sont des nombres choisis parmi les racines n_1, n_2, n_3, n_4, etc., qui satisfont à l'équation

$$\frac{nX}{\text{tang.}(nX)} = 1 - hX,$$

on aura,

$$\frac{mX}{\text{tang.}(mX)} = \frac{nX}{\text{tang.}\, nX},$$

ou

$$m \cos.\, mX \sin.\, nX - n \cos.\, nX \sin.\, mX = o.$$

On voit par là que la valeur totale de l'intégrale est nulle. Mais il y a un seul cas où cette intégrale ne s'évanouit pas, c'est lorsque $m = n$; elle devient alors $\frac{o}{o}$, et par l'application des règles connues elle se réduit à

$$\frac{1}{2} X - \frac{1}{4n} \sin.\, 2nX.$$

Il résulte de là que, pour avoir la valeur du coëfficient a_1 dans l'équation (a), il faut écrire

$$2\, S\left[x \sin.(n_1 x) dx\, Fx\right] = a_1 \left[X - \frac{1}{2n_1} \sin.\, 2n_1 X\right].$$

Le signe S indiquant que l'on prend l'intégrale depuis $x = o$, jusqu'à $x=X$. On aura pareillement

$$2S\left[x\sin.(n_2 x)\,dx\,Fx\right]=a_2\left[X-\frac{1}{2n_2}\sin.2n_2X\right],$$

et l'on déterminera de même tous les coëfficients suivants. Or il est aisé de voir que l'intégrale définie $2S[x\sin.(nx)Fx\,dx]$ a toujours une valeur déterminée, quelle que puisse être la fonction arbitraire Fx; car si cette fonction Fx est représentée par l'ordonnée variable d'une ligne qu'on aurait tracée d'une manière quelconque, la fonction $x\sin.(nx)\,Fx$ correspondra aussi à l'ordonnée d'une seconde ligne, que l'on construirait facilement au moyen de la première. L'aire déterminée par cette dernière ligne, entre les abcisses $x=0$, $x=X$, est la valeur de la moitié du coëfficient. La fonction arbitraire Fx entre dans chaque coëfficient sous le signe de l'intégration, et donne à la valeur de z toute la généralité que la question comporte. On parvient ainsi à l'équation suivante :

$$\frac{xz}{2}=\frac{\sin.(n_1x)\,S[x\sin.(n_1x)\,Fx\,dx]}{X-\frac{1}{2n_1}\sin.2n_1X}\,e^{-Kn_1^2t}+\frac{\sin.(n_2x)\,S[x\sin.(n_2x)\,Fx\,dx]}{X-\frac{1}{2n_2}\sin.2n_2X}\,e^{-Kn_2^2t}$$
$$+\frac{\sin.(n_3x)\,S[x\sin.(n_3x)\,Fx\,dx]}{X-\frac{1}{2n_3}\sin.2n_3X}\,e^{-Kn_3^2t}+\text{etc.}$$

Telle est la forme que l'on doit donner à l'intégrale générale de l'équation $\frac{dz}{dt}=K\left[\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{dz}{dx}\right]$ pour qu'elle représente la solution cherchée. En effet, toutes les conditions de la question seront remplies : 1° l'équation aux différences partielles sera satisfaite ; 2° la quantité de chaleur qui s'écoule à la surface conviendra à la fois à l'action mutuelle des dernières couches, et à l'action de l'air sur la surface; c'est-à -dir que l'équation $\frac{dz}{dx}+hz=0$, à laquelle chacune des parties de la valeur de z satisfait, lorsque $x=X$, aura lieu pareillement lorsqu'on prendra pour z la somme de toutes ces parties. 3° La solution donnée conviendra à l'état initial lorsqu'on supposera $t=0$.

45. Les racines n_1, n_2, n_3, n_4, etc. de l'équation

$$\frac{nX}{\text{tang.}\,nX}=1-hX,$$

sont très-inégales; d'où l'on conclut que si la valeur du temps écoulé t est considérable, chaque terme de la valeur de z est extrêmement petit par rapport à celui qui le précède à gauche. A mesure que le temps du refroidissement augmente, les dernières parties de la valeur de z cessent d'avoir aucune influence sensible; et ces états partiels et élémentaires, qui composent d'abord le mouvement général, afin qu'il puisse comprendre l'état initial, disparaissent en quelque sorte et s'effacent rapidement, en laissant subsister seul le premier d'entre eux. Dans ce dernier état, les températures des différentes couches décroissent depuis le centre jusqu'à la surface, de même que dans le cercle les rapports du sinus à l'arc décroissent à mesure que cet arc augmente. Cette loi règle naturellement la distribution de la chaleur dans une sphère solide. Lorsqu'elle commence à subsister, elle se conserve pendant toute la durée du refroidissement; et quelque soit l'état du système, si tous les points d'une même couche sont également échauffés, elle tend de plus en plus à s'établir, et lorsque le refroidissement a duré quelque temps, on peut supposer qu'elle existe, sans erreur sensible.

46. Nous appliquerons maintenant la solution générale au cas où la sphère ayant été long-temps plongée dans un liquide, a acquis dans tous ses points une même température. Dans ce cas la fonction Fx est 1, et la détermination des coëfficients se réduit à intégrer

$$x \sin. nx . dx,$$

depuis $x=0$, jusqu'à $x=X$. Cette intégrale est

$$\frac{\sin. nX - nX \cos. nX}{n^2};$$

donc la valeur d'un coëfficient quelconque est exprimée ainsi:

$$a = 2\left\{\frac{1-\dfrac{nX\cos. nX}{\sin. nX}}{\left(\dfrac{nX}{\sin. nX}-\cos. nX\right)n}\right\}.$$

L'équation qui donne la valeur de n est

$$\frac{nX\cos. nX}{\sin. nX} = 1 - hX.$$

On trouvera donc

$$a = \frac{2hX}{n(nX \operatorname{cos\acute{e}c.} nX - \cos. nX)}.$$

Il est aisé maintenant de former la valeur générale de z, qui est

$$\frac{zx}{2hX} = \frac{\sin. n_1 x}{n_1(n_1 X \operatorname{cos\acute{e}c.} n_1 X - \cos. n_1 X)} e^{-Kn_1^2 t} + \frac{\sin. n_2 X}{n_2(n_2 X \operatorname{cos\acute{e}c.} n_2 X - \cos. n_2 X)} e^{-Kn_2^2 t} + \text{etc.}$$

En désignant par ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, etc. les racines de l'équation

$$\frac{\varepsilon}{\operatorname{tang.} \varepsilon} = 1 - hX,$$

et les supposant rangées par ordre en commençant par la plus petite ε_1; remplaçant $n_1 X, n_2 X, n_3 X$, etc., par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, etc.; et mettant au lieu de K et h leurs valeurs $\frac{K}{CD}$ et $\frac{h}{K}$; on aura, pour exprimer les variations des températures pendant le refroidissement d'une sphère solide qui avait été uniformément échauffée, l'équation

$$v = \frac{2hX}{K}\left\{ \frac{\sin.\frac{\varepsilon_1 x}{X}}{\frac{x}{X}(\varepsilon_1 \operatorname{cosec.}\varepsilon_1 - \cos.\varepsilon_1)} e^{-\frac{K}{CD}\frac{\varepsilon_1^2}{X^2}t} + \frac{\sin.\frac{\varepsilon_2 x}{X}}{\frac{\varepsilon_2 x}{X}(\varepsilon_2 \operatorname{cosec.}\varepsilon_2 - \cos.\varepsilon_2)} e^{-\frac{K}{CD}\frac{\varepsilon_2^2}{X^2}t} + \text{etc.} \right\}$$

47. La solution précédente peut donner lieu à diverses remarques : 1° si on suppose que le coëfficient h, qui mesure la facilité avec laquelle la chaleur passe dans l'air, a une très-petite valeur, ou que le rayon X de la sphère soit très-petit, la moindre valeur de ε sera extrêmement voisine de zéro; en sorte que l'équation $\frac{\varepsilon}{\operatorname{tang.}\varepsilon} = 1 - \frac{hX}{K}$ se réduit à

$$\frac{\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)}{\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{2\cdot 3}} = 1 - \frac{hX}{K};$$

ou, en omettant les puissances supérieures de ε, $\varepsilon^2 = 3\frac{hX}{K}$. D'un autre côté la quantité $\frac{\varepsilon}{\sin.\varepsilon} - \cos\varepsilon$ devient, dans la même hypothèse, $2\frac{hX}{K}$. Quant au facteur

$$\frac{\sin.\varepsilon\frac{x}{X}}{\frac{x}{X}},$$

il se réduit à l'unité. En faisant ces substitutions dans l'équation générale, on aura

$$z = e^{-3\frac{ht}{CD.X}} + \text{etc.}$$

On peut remarquer que les termes suivants décroissent très-rapidement en comparaison du premier, parce que la seconde racine ε_2 est beaucoup plus grande que zéro, ensorte que si h ou X ont une petite valeur, on doit prendre, pour exprimer les variations des températures, l'équation

$$z = e^{-3\frac{ht}{CD.X}}.$$

Ainsi les différentes enveloppes sphériques dont le solide est composé, conservent une température commune pendant toute la durée du refroidissement. Cette température diminue comme l'ordonnée d'une logarithmique, le temps étant pris pour abcisse. La température initiale qui est 1, se réduit après le temps t à

$$e^{-3\frac{ht}{CD.X}}.$$

Pour que la température initiale devienne la fraction $\frac{1}{m}$, il faut que $t = \frac{CD.X\log.m}{3h}$. Ainsi pour des sphères de même matière, qui ont des diamètres différents, les temps qu'elles mettent à perdre la moitié, ou une même partie déterminée de leur chaleur actuelle, lorsque la conducibilité extérieure est extrêmement petite, sont proportionnels à leurs diamètres. Il en est de même des sphères solides dont le rayon est très-petit; et l'on trouverait encore le même résultat, en tribuant à la conducibilité intérieure K une très-grande valeur. Il a lieu en général lorsque la quantité $\frac{hX}{K}$ est très-petite. On peut regarder le rapport $\frac{h}{K}$ comme très-petit, lorsque le corps qui se refroidit est formé d'un liquide continuellement agité, que renferme un vase sphérique d'une petite épaisseur. Donc la température décroit aussi dans ce cas suivant la loi exprimée par l'équation

$$z = e^{-3\frac{ht}{C.D.X}}.$$

On voit par ce qui précède que, dans une sphère solide qui se refroidit depuis long-temps, les températures décroissent depuis le centre jusqu'à la surface, comme le quotient du sinus par l'arc décroit depuis l'origine, où il est 1, jusqu'à l'extrémité de l'arc total. Lorsque la sphère a un petit diamètre, ou lorsque la conducibilité propre est beaucoup plus grande que la conducibilité extérieure, les températures des couches successives diffèrent très-peu entre elles, parce que l'arc total qui représente le rayon de la sphère a très-peu d'étendue. Alors la variation de la température z, commune à tous les points, est exprimée par l'équation

$$z = e^{-3\frac{ht}{C.D.X}}.$$

Ainsi, en comparant les temps respectifs que deux petites sphères emploient à perdre la moitié, ou une partie aliquote de leur chaleur actuelle, on doit trouver que ces temps sont proportionnels aux diamètres.

Ce dernier résultat, exprimé par l'équation

$$z = e^{-3\frac{Ht}{C.D.X}},$$

ne convient qu'à des masses d'une forme semblable et de petites dimensions. Il était connu depuis long-temps des physiciens, et il se présente pour ainsi dire de lui-même. En effet, si un corps quelconque est assez petit pour que l'on puisse regarder comme égales les températures des différents points, il est facile de connaître la loi du refroidissement. Soit 1 la température initiale commune à tous les points, et z la valeur de cette température après le terme écoulé t, il est visible que, pendant l'instant dt, la quantité de chaleur qui s'écoule dans le milieu, supposé entretenu à la température 0, est $hszdt$, s désignant la surface extérieure du corps. D'un autre côté, C désignant la chaleur nécessaire pour élever l'unité de poids de la température 0 à la température 1, on aura V.CD pour l'expression de la quantité de chaleur qui porterait le volume V du corps dont la densité est D, de la température 0 à la température 1. Donc $\frac{hszdt}{V.CD}$ est la quantité dont la température z est diminuée, lorsque le corps perd une quantité de chaleur égale à $hszdt$; on doit donc avoir l'équation

$$dz = -\frac{hzsdt}{V.CD},$$

ou

$$z = e^{-\frac{hst}{V.CD}}.$$

Si le corps a la forme sphérique, on aura, en appelant X le rayon total, l'équation

$$z = e^{-3\frac{Ht}{CD.X}}$$

Supposons que l'on puisse observer, pendant le refroidissement du corps dont il s'agit, deux températures z_1 et z_2 correspondantes aux temps t_1 et t_2, on aura

$$\frac{hs}{\text{V.CD}}=\frac{\log. z_1-\log. z_2}{t_2-t_1};$$

on connaîtra donc facilement par l'expérience l'exposant $\frac{hs}{\text{V.CD}}$. Si l'on fait cette même observation sur des corps différents, et que l'on sache quel est le rapport de leurs chaleurs spécifiques, on trouvera celui du coëfficient h, qui mesure la facilité avec laquelle la chaleur se dissipe par la surface. Réciproquement, si l'on est fondé à regarder cette dernière propriété de la surface comme étant la même dans deux corps différents, on connaîtra le rapport des chaleurs spécifiques. On voit par-là qu'en observant les temps du refroidissement pour divers liquides, ou autres substances enfermées successivement dans un même vase, on peut déterminer les chaleurs spécifiques de ces substances.

Nous remarquerons encore que le coëfficient K, qui mesure la conducibilité propre, n'entre point dans l'équation

$$z=e^{-3\frac{ht}{\text{C.DX}}};$$

ainsi les temps du refoidissement, dans les corps de petites dimensions, ne dépendent point de la conducibilité intérieure, et l'observation de ces temps ne peut rien apprendre sur cette dernière propriété. Mais on pourrait la déterminer, en mesurant les temps du refroidissement dans des vases de différentes épaisseurs.

Ce que nous avons dit plus haut, sur le refroidissement d'une sphère de petite dimension, s'applique au mouvement du thermomètre dans l'air ou dans les liquides. Nous ajouterons les remarques suivantes sur l'usage de ces instruments.

48. Supposons qu'un thermomètre à mercure soit plongé dans un vase rempli d'eau échauffée, et que ce vase se refroidisse librement dans l'air, dont la température est constante : il s'agit de trouver la loi des abaissements successifs du thermomètre.

Si la température du liquide était constante, et que le thermomètre y fut plongé, il changerait de température en s'approchant très-promptement de celle du liquide. Soit v la température variable indiquée par le thermomètre, c'est-à-dire l'élévation de cette température au-dessus de celle de l'air ; soit u l'élévation de la température du liquide au-dessus de celle de l'air ; et t le temps correspondant à ces deux valeurs v et u. Au commencement de l'instant dt, qui va s'écouler, la différence de la température du thermomètre à celle du liquide étant $v-u$, la variable v tend à diminuer, et perdra dans l'instant dt une quantité proportionnelle à $v-u$, en sorte que l'on aura l'équation

$$dv=-h(v-u)\,dt.$$

Pendant le même instant dt, la variable u tend à diminuer, et elle perd une quantité proportionnelle à u, en sorte que l'on a l'équation

$$du=-\mathrm{H}u\,dt.$$

Le coëfficient H exprime la vitesse du refroidissement du liquide dans l'air, quantité que l'on peut facilement reconnaître par l'expérience ; et le coëfficient h exprime la vitesse avec laquelle le thermomètre se refroidit dans le liquide. Cette dernière vitesse est beaucoup plus grande que H. On peut pareillement trouver par l'expérience le coëfficient h, en faisant refroidir le thermomètre dans le liquide entretenu à une température constante. Les deux équations

$$du = -\text{H}u\,dt \quad \text{et} \quad dv = -h(v-u)\,dt,$$

ou

$$u = \text{A}e^{-\text{H}t}, \quad \frac{dv}{dt} = -hv + \text{A}he^{-\text{H}t},$$

fournissent celle-ci :

$$v - u = be^{-ht} + a\text{H}e^{-\text{H}t},$$

a et b étant des constantes arbitraires. Supposons maintenant que la valeur initiale de $v-u$ soit Δ, c'est-à-dire que la température du thermomètre surpasse de Δ celle du liquide au commencement de l'immersion, et que la valeur initiale de u soit E : on déterminera a et b, et l'on aura

$$v - u = \Delta e^{-ht} + \frac{\text{HE}}{h-\text{H}}\left(e^{-\text{H}t} - e^{-ht}\right).$$

La quantité $v-u$ est l'erreur du thermomètre, c'est-à-dire la différence qui se trouve entre la température indiquée par le thermomètre, et la température réelle du liquide, au même instant. Cette différence est variable, et l'équation précédente nous fait connaître suivant quelle loi elle tend à décroître. On voit, par l'expression de cette différence $v-u$, que deux de ses termes, qui contiennent e^{-ht}, diminuent très-rapidement avec la vitesse qu'on remarquerait au thermomètre, si on le plongeait dans le liquide à température constante.

A l'égard du terme qui contient e^{-Ht}, son décroissement est beaucoup plus lent, et s'opère avec la vitesse du refroidissement du vase dans l'air. Il résulte de là qu'après un temps bien peu considérable, l'erreur du thermomètre est représentée par le seul terme

$$\frac{HE}{h-H}e^{-Ht}, \quad \text{ou} \quad \frac{H}{h-H}u.$$

Voici maintenant ce que l'expérience apprend sur les valeurs de H et h. On a plongé dans l'eau, à $8^d\frac{1}{2}$ de Réaumur, un thermomètre qui avait d'abord été échauffé, et il est descendu dans l'eau de 40^d à 20^d en six secondes. On a répété plusieurs fois, et avec soin, cette expérience. On trouve d'après cela que la valeur de e^{-h} est 0,000042, si le temps est compté en minutes ; c'est-à-dire que l'élévation du thermomètre étant E au commencement d'une minute, elle sera

$$E(0{,}000042)$$

à la fin de cette minute. On trouve aussi

$$h \log. e = -4{,}3761271.$$

On a laissé, d'un autre côté, se refroidir dans l'air à 12^d, un vase de porcelaine rempli d'eau échauffée à 60^d environ. La valeur de e^{-H}, dans ce cas, a été trouvée de 0,98514; celle de $H \log. e$ est $-0{,}006500$. On voit par-là combien est petite la fraction e^{-h}, et qu'après une seule minute, chaque terme multiplié par e^{-ht} n'est pas la moitié de la dix-millième partie de ce qu'il était au commencement de cette minute.

On doit donc n'avoir aucun égard à ces termes dans la valeur de $v-u$. Il reste l'équation

$$v-u=\frac{Hu}{h-H},$$

ou

$$v-u=\frac{Hu}{h}-\frac{H}{h-H}\cdot\frac{Hu}{h}.$$

D'après les valeurs trouvées pour H et h, on voit que cette dernière quantité est plus de 673 fois plus grande que H, c'est-à-dire que le thermomètre se refroidit dans l'eau plus de six cents fois plus vite que le vase ne se refroidit dans l'air. Ainsi le terme $\frac{Hu}{h}$ est certainement moindre que la 600me partie de l'élévation de la température de l'eau au-dessus de celle de l'air; et comme le terme $\frac{H}{h-H}\cdot\frac{Hu}{h}$ est moindre que la 600me partie du précédent, qui est déja très-petit, il s'en suitque l'équation qu'on doit employer pour représenter très-exactement l'erreur du thermomètre est

$$v-u=\frac{Hu}{h}.$$

En général, si h est une quantité très-grande par rapport à H, on aura toujours l'équation

$$v-u=\frac{Hu}{h}.$$

L'examen dans lequel on vient d'entrer, fournit des conséquences utiles pour la comparaison des thermomètres.

La température marquée par le thermomètre plongé dans un liquide qui se refroidit, est toujours un peu plus forte que celle du liquide.

Cet excès ou erreur du thermomètre diminue en même temps que l'élévation du thermomètre. On trouverait la quantité de la correction en multipliant l'élévation actuelle u du thermomètre, par le rapport de la vitesse H du refroidissement du vase dans l'air, à la vitesse h du refroidissement du thermomètre dans le liquide. On pourrait supposer que le thermomètre, lorsqu'il a été plongé dans le liquide, marquait une température inférieure ; c'est même ce qui arrive presque toujours : mais cet état ne peut durer. Le thermomètre commence à se rapprocher de la température du liquide ; en même temps le liquide se refroidit, de sorte que le thermomètre passe d'abord à la température même du liquide ; ensuite il indique toujours une température extrêmement peu différente et supérieure.

On voit par ces résultats que si l'on plonge dans un même vase, rempli d'un liquide qui se refroidit lentement, différents thermomètres, ils doivent tous indiquer à très-peu près la même température, dans les mêmes instants. Appelant $h, h', h'', \ldots$ les vitesses du refroidissement de chacun de ces thermomètres dans le liquide, on aura

$$\frac{\mathrm{H}u}{h}, \frac{\mathrm{H}u}{h'}, \frac{\mathrm{H}u}{h''}, \ldots$$

pour les erreurs respectives. Si deux thermomètres sont également sensibles, c'est-à-dire si les quantités h et h' sont les mêmes, leurs températures différeront également de celles du liquide. Les coëfficients $h, h', h'', \ldots\ldots$ ont de grandes valeurs, en sorte que les erreurs des thermomètres sont des quantités fort petites, et souvent inappréciables. On conclut de là que, si un thermomètre est construit avec soin et peut être regardé comme exact, il sera facile de construire plusieurs autres thermomètres d'une exactitude égale. Il suffira de placer tous les thermomètres que l'on voudra diviser, dans un vase rempli d'un liquide qui se refroidit lentement, et d'y placer en même temps le thermomètre qui doit servir de modèle : on n'aura plus qu'à les observer tous de degré en degré, ou à de plus grands intervalles, et l'on marquera les points où le mercure se trouve en même temps dans les différents thermomètres; ces points seront ceux des divisions cherchées. Nous avons appliqué ce procédé à la construction des thermomètres employés dans nos expériences, en sorte que ces instruments coïncident toujours, et très-exactement, dans des circonstances semblables.

Non-seulement cette comparaison des thermomètres pendant la durée du refroidissement du liquide établit entre eux une coïncidence parfaite, et les rend tous semblables à un seul modèle, mais on en déduit aussi le moyen de diviser exactement le tube de ce thermomètre principal, sur lequel tous les autres doivent être réglés. On satisfait ainsi à la condition fondamentale de cet instrument, qui est, que deux intervalles quelconques, comprenant sur l'échelle un même nombre de degrés, contiennent la même quantité de mercure. Au reste, nous omettons ici des détails qui n'appartiennent point directement à l'objet de notre mémoire.

49. On a déterminé, dans les articles précédents, la température z que reçoit, après le temps t, une couche sphérique intérieure placée à la distance x du centre. Il s'agit maintenant de calculer la valeur de la température moyenne

de la sphère, ou celle qu'aurait ce solide, si toute la quantité de chaleur qu'il contient était également distribuée entre tous les points de la masse. Le solide de la sphère dont le rayon est x, étant $4\frac{\pi x^3}{3}$, la quantité de chaleur contenue dans une enveloppe sphérique dont la température est z, et qui est placée à la distance x, sera

$$4 z d\left(\frac{\pi x^3}{3}\right).$$

Ainsi la chaleur moyenne est

$$4\int\left\{\frac{z d\left(\pi\frac{x^3}{3}\right)}{4\pi\frac{X^3}{3}}\right\},$$

ou

$$3\int\left(\frac{x^2 z dx}{X^3}\right),$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=X$. On mettra pour z sa valeur

$$\frac{a_1}{x}e^{-Kn_1^2t}\sin. n_1x+\frac{a_2}{x}e^{-Kn_2^2t}\sin. n_2x+\frac{a_3}{x}e^{-Kn_3^2t}\sin. n_3x+\text{etc.};$$

et l'on aura l'équation

$$\int(x^2 z dx)=\frac{3}{X^3}\left(a_1\frac{\sin. n_1X-n_1X\cos. n_1X}{n_1^2}e^{-Kn_1^2t}+a_2\frac{\sin. n_2X-n_2X\cos. n_2X}{n_2^2}e^{-Kn_2^2t}+\text{etc.}\right.$$

On a trouvé précédemment

$$a_i=2\frac{\sin. n_iX-n_iX\cos. n_iX}{(n_iX-\frac{1}{2}\sin. 2n_iX)n_i},$$

On aura donc

$$\frac{3}{X^3}\int(x^2 z dx) = 3.4\frac{(\sin.n_1X - n_1X\cos.n_1X)^2}{(2n_1X - \sin.2n_1X)n_1^3X^3}e^{-Kn_1^2t}$$
$$+ 3.4\frac{(\sin.n_2X - n_2X\cos.n_2X)^2}{(2n_2X - \sin.2n_2X)n_2^3X^3}e^{-Kn_2^2t} + \text{etc.};$$

et en désignant par Z la température moyenne,

$$\frac{Z}{3.4} = \frac{(\sin.\varepsilon_1 - \varepsilon_1\cos.\varepsilon_1)^2}{(2\varepsilon_1 - \sin.2\varepsilon_1)\varepsilon_1^3}e^{-K\frac{\varepsilon_1^2}{CD.X^2}t} + \frac{(\sin.\varepsilon_2 - \varepsilon_2\cos.\varepsilon_2)^2}{(2\varepsilon_2 - \sin.2\varepsilon_2)\varepsilon_2^3}e^{-K\frac{\varepsilon_2^2}{CD.X^2}t} + \text{etc.},$$

équation dans laquelle tous les coëfficients des exponentielles sont positifs.

Nous considérerons le cas où, toutes les autres conditions demeurant les mêmes, la valeur X du rayon de la sphère deviendra infiniment grande. En reprenant la construction rapportée en l'article (44), on voit que la quantité $\frac{hX}{K}$ devenant infinie, la droite menée par l'origine, et qui doit couper les différentes branches de la courbe, se confond avec l'axe des ε. On trouve donc, pour les différentes valeurs de ε, les quantités π, 2π, 3π, 4π, etc. Le terme de la valeur de Z qui contient

$$e^{-\frac{K\varepsilon_1^2}{CD.X^2}t}$$

devenant, à mesure que le temps augmente, beaucoup plus grand que les suivants, cette valeur de Z, après un temps considérable, est exprimée sans erreur sensible par le premier terme seulement. L'exposant $\frac{Kn_1^2}{CD}$ étant égal à $\frac{K\pi^2}{CD.X^2}$, on voit que le refroidissement final est très-lent dans les sphères d'un grand diamètre, et que l'exposant de e, qui mesure la vitesse du refroidissement, est en raison inverse du quarré des diamètres.

50. On peut, d'après les remarques précédentes, se former une idée des variations qu'éprouvent les températures pendant le refroidissement d'une sphère solide. Les valeurs initiales de ces températures changent successivement à mesure que la chaleur se dissipe par la surface. Si les températures des diverses couches sont d'abord égales, ou si elles diminuent depuis la surface jusqu'au centre, elles ne peuvent point conserver ces premiers rapports; et, dans tous les cas, le système tend de plus en plus vers un état durable qu'il ne tarde point à atteindre sensiblement. Dans ce dernier état, les températures décroissent depuis le centre jusqu'à la surface. Si on représente par un certain arc, moindre que le quart de la circonférence, le rayon total de la sphère, et que divisant cet arc en parties égales, on prenne en chaque point le quotient du sinus par l'arc, le système de ces quotients représentera celui qui s'établit de lui-même entre les températures des couches d'une égale épaisseur. Dès que ces derniers rapports ont lieu, ils continuent de subsister pendant toute la durée du refroidissement; alors chacune des températures diminue comme l'ordonnée d'une logarithmique, le temps étant pris pour abscisse. On peut reconnaître que cet ordre est établi, en observant plusieurs valeurs successives z, z', z'', z''', etc., qui désignent les températures moyennes pour les temps t, $t+\theta$, $t+2\theta$, $t+3\theta$, etc. La suite de ces valeurs converge toujours vers une progression géométrique; et lorsque les quotients successifs $\frac{z}{z'}, \frac{z'}{z''}, \frac{z''}{z'''}$, etc., ne changent

plus, on en conclut que les rapports dont nous avons parlé sont établis entre les températures. Lorsque la sphère est d'un petit diamètre, ces quotients sont sensiblement égaux, dès que le corps commence à se refroidir. La durée du refroidissement pour un intervalle donné, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que la température moyenne z soit réduite à une partie déterminée d'elle-même $\frac{z}{m}$, est d'autant plus grand que la sphère a un plus grand diamètre. Si deux sphères de même matière et de dimensions différentes sont parvenues à cet état final où les températures s'abaissent en conservant leurs rapports, et que l'on veuille comparer les durées d'un même refroidissement, c'est-à-dire le temps θ que la température moyenne z de la première emploie pour se réduire à $\frac{z}{m}$, et le temps θ', que la température z' de la seconde met à devenir $\frac{z'}{m}$, il faudra considérer trois cas différents. Si les sphères ont l'une et l'autre un petit diamètre, les durées θ et θ' sont dans le rapport même des diamètres. Si les sphères ont l'une et l'autre un diamètre très-grand, les durées θ et θ' sont dans le rapport des quarrés des diamètres; et si les sphères ont des diamètres compris entre ces deux limites, les rapports des temps seront plus grands que ceux des diamètres, et moindres que ceux de leurs quarrés. On a donné dans cet article les valeurs exactes de ces rapports. La question du mouvement de la chaleur dans une sphère comprend celle des températures terrestres. Pour traiter cette dernière question avec plus d'étendue, nous en avons fait l'objet d'un chapitre séparé.

L'usage que l'on a fait précédemment de l'équation $\frac{\varepsilon}{\text{tang.}\,\varepsilon} = \lambda$

est fondé sur une construction géométrique, qui paraît très-propre à expliquer la nature de ces équations. En effet cette construction fait voir clairement que toutes les racines sont réelles; en même temps elle en fait connaître les limites, et indique les moyens de déterminer la valeur numérique de chacune d'elles. L'examen analytique des équations de ce genre donnerait les mêmes résultats. Il est d'abord très-facile de reconnaître que l'équation $\varepsilon - \lambda \tang. \varepsilon = 0$, dans laquelle λ est un nombre connu moindre que l'unité, n'a aucune racine imaginaire de la forme $m + n\sqrt{-1}$. Il suffit de substituer au lieu de ε cette dernière quantité, et l'on voit, après les transformations, que le premier membre ne peut devenir nul, lorsqu'on attribue à m et n des valeurs réelles, à moins que n ne soit nulle. On démontrera ensuite qu'il ne peut y avoir dans cette même équation

$$\varepsilon - \lambda \tang. \varepsilon = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon \cos. \varepsilon - \lambda \sin. \varepsilon}{\cos. \varepsilon} = 0,$$

aucune racine imaginaire, de quelque forme que ce puisse être. En effet, 1° les racines imaginaires du facteur $\frac{1}{\cos. \varepsilon} = 0$ n'appartiennent point à l'équation $\varepsilon - \lambda \tang. \varepsilon = 0$, puisque ces racines sont toutes de la forme $m + n\sqrt{-1}$; 2° l'équation

$$\sin. \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda} \cos. \varepsilon = 0$$

a nécessairement toutes ses racines réelles, lorsque λ est moindre que l'unité. Pour prouver cette dernière proposition, il faut considérer sin. ε comme le produit d'une infinité de facteurs qui sont

$$\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4^2\pi^2}\right) \text{etc.}$$

et considérer $\cos.\varepsilon$ comme dérivant de $\sin.\varepsilon$ par la différentiation. On supposera qu'au lieu de composer $\sin.\varepsilon$ du produit d'un nombre infini de facteurs, on emploie seulement les m premiers, et l'on désignera le produit par $\varphi_m(\varepsilon)$. Pour trouver la valeur correspondante qui remplace $\cos.\varepsilon$, on prendra

$$\frac{d\left[\varphi_m(\varepsilon)\right]}{d\varepsilon} \text{ ou } \varphi'_m(\varepsilon).$$

Cela posé, on aura l'équation

$$\varphi_m(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\cdot\varphi'_m(\varepsilon) = 0$$

Or en donnant au nombre m les valeurs successives 1, 2, 3, 4, etc., depuis 1 jusqu'à l'infini, on connaîtra sans aucun doute, par les principes ordinaires de l'algèbre, la nature des équations déterminées qui correspondent à ces différentes valeurs de m, et les limites de leurs racines. On conclut rigoureusement de cet examen que l'équation $\frac{\varepsilon}{\tang.\varepsilon}=\lambda$, dans laquelle λ est moindre que l'unité, ne peut avoir aucune racine imaginaire, de quelque espèce que ce soit.

Au reste la solution que nous avons donnée dans l'article 44, pages 400 et suivantes, ne suppose point nécessairement que toutes les racines de l'équation déterminée sont réelles; il suffit, pour l'exactitude de cette solution, que l'on puisse employer un nombre infini de racines réelles différentes; car dans ce cas l'intégrale pourra toujours coïncider avec l'état initial du solide, et par conséquent elle représentera aussi tous les états subséquents.

VIII.

Du mouvement de la chaleur dans un cylindre solide.

51. L'équation $\frac{dz}{dt}=\frac{K}{CD}\left[\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right]$ représente le mouvement de la chaleur dans le cylindre. Pour intégrer cette équation, on donnera en premier lieu à z la valeur particulière exprimée par l'équation $z=e^{-mt}u$. m est un nombre arbitraire, et u une fonction de x. On désigne par K le rapport $\frac{K}{CD}$, et par h le rapport $\frac{h}{K}$. En substituant la valeur de z, on trouve la condition suivante, $\frac{m}{K}u+\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}=0$. On choisira donc pour u une valeur qui satisfasse à cette équation différentielle. Cette valeur de u est une fonction qui contient x et $\frac{m}{K}$: en désignant $\frac{m}{K}$ par g, nous prendrons pour exprimer la valeur de u la série

$$1-\frac{gx^2}{2^2}+\frac{g^2x^4}{2^2.4^2}-\frac{g^3x^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{g^4x^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\text{etc}$$

qui dérive en effet de l'équation différentielle, comme on le verra plus bas. On aura donc une valeur particulière de z en écrivant $z=e^{-gKt}u$. u doit satisfaire à l'équation du second ordre

$$gu+\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}=0,$$

et est exprimée par la série suivante :

$$1 - \frac{g x^2}{2^2} + \frac{g^2 x^4}{2^2 . 4^2} - \frac{g^3 x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \frac{g^4 x^8}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2} - \text{etc.}$$

L'état de la surface extérieure du cylindre est sujet à une condition, exprimée par l'équation déterminée

$$hz + \frac{dz}{dx} = 0,$$

qui doit être satisfaite lorsque le rayon x a sa valeur totale R : on en conclura l'équation déterminée

$$h\left[1 - \frac{g R^2}{2^2} + \frac{g^2 R^4}{2^2 . 4^2} - \frac{g^3 R^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \text{etc}\right] = \frac{2 g R}{2^2} - \frac{4 g^2 R^3}{2^2 . 4^2} + \frac{6 g^3 R^5}{2^2 . 4^2 . 6^2} - \text{etc}$$

On voit par-là que le nombre g, qui entre dans la valeur particulière de z ou $e^{-gKt} u$, n'est point arbitraire : il est nécessaire que cette valeur de g satisfasse à l'équation précédente qui contient g et R. Or nous prouverons par la suite que cette équation, dans laquelle h, K et R sont des quantités données, a une infinité de racines, et que toutes ces valeurs de g sont réelles ; d'où il suit que l'on peut donner à la variable z une infinité de valeurs particulières de la forme $e^{-gKt} u$, qui différeront seulement par les nombres g. On pourra donc composer une valeur plus générale de z, en ajoutant toutes ces valeurs particulières multipliées par des coëfficients arbitraires. Ainsi l'intégrale qui servira à résoudre dans toute son étendue la question proposée, est donnée par l'équation suivante :

$$z = a_1 e^{-g_1 K t} u_1 + a_2 e^{-g_2 K t} u_2 + a_3 e^{-g_3 K t} u_3 + \text{etc.}$$

g_1, g_2, g_3, etc. désignent toutes les valeurs de g qui satisfont a l'équation déterminée. u_1, u_2, u_3, etc. désignent les valeurs de u qui correspondent aux différentes racines de l'équation en g; et a_1, a_2, a_3, etc. sont des coëfficients arbitraires, qui ne peuvent être déterminés que par l'état initial du solide.

Il faut maintenant examiner la nature de l'équation déterminée qui donne les valeurs de g, et prouver que toutes les racines de cette équation sont réelles; recherche qui exige un examen attentif.

Dans la série $1-\frac{gR^2}{2^2}+\frac{g^2R^4}{2^2.4^2}-\frac{g^3R^6}{2^2.4^2.6^2}+$ etc., qui exprime la valeur que reçoit u lorsque $x=R$, on remplacera $\frac{gR^2}{2^2}$ par la quantité θ, et désignant par $f\theta$, ou y, cette fonction de θ, on aura

$$y=f\theta=1-\theta+\frac{\theta^2}{2^2}-\frac{\theta^3}{2^2.3^2}+\frac{\theta^4}{2^2.3^2.4^2}-\text{etc.}$$

Il est facile de voir que l'équation déterminée devient

$$\frac{hR}{2}=\frac{\theta-2\frac{\theta^2}{2^2}+3\frac{\theta^3}{2^2.3^2}-4\frac{\theta^4}{2^2.3^2.4^2}+5\frac{\theta^5}{2^2.3^2.4^2.5^2}-\ldots}{1-\theta+\frac{\theta^2}{2^2}-\frac{\theta^3}{2^2.3^2}+\frac{\theta^4}{2^2.3^2.4^2}-\frac{\theta^5}{2^2.3^2.4^2.5^2}+\ldots}=-\theta\frac{f'\theta}{f\theta},$$

$f'\theta$ désignant $\frac{d(f\theta)}{d\theta}$. Cette dernière équation est d'un degré infiniment élevé. Chacune des valeurs de θ fournira une valeur pour g, au moyen de l'équation $\frac{gR^2}{2^2}=\theta$, et l'on obtiendra les quantités g_1, g_2, g_3, g_4, etc., qui entrent en nombre infini dans la solution cherchée.

La question est donc de démontrer que l'équation

$$\frac{hR}{2}+\theta\frac{f'\theta}{f\theta}=0$$

doit avoir toutes ses racines réelles. Nous établirons en effet que l'équation $f\theta = 0$ a toutes ses racines réelles, qu'il en est de même par conséquent de l'équation $f'\theta = 0$, et qu'il s'ensuit que l'équation $A = \theta \frac{f'\theta}{f\theta}$ a aussi toutes ses racines réelles, A étant un nombre quelconque.

L'équation $y = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2^2} - \frac{\theta^3}{2^2.3^2} + \frac{\theta^4}{2^2.3^2.4^2} - \text{etc.}$ étant différenciée deux fois, donne

$$y + \frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d^2\theta} = 0;$$

ainsi la fonction de θ dont il s'agit, satisfait à cette équation différentielle. On écrira, comme il suit, l'équation précédente, et toutes celles qu'on en déduit par la différentiation :

$$y + \frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0,$$

$$\frac{dy}{d\theta} + 2\frac{d^2y}{d\theta} + \theta\frac{d^3y}{d\theta^3} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + 3\frac{d^3y}{d\theta^3} + \theta\frac{d^4y}{d\theta^4} = 0,$$

etc.

et en général

$$\frac{d^iy}{d\theta^i} + (i+1)\frac{d^{(i+1)}y}{d\theta^{(i+1)}} + \theta\frac{d^{(i+2)}y}{d\theta^{(i+2)}} = 0.$$

Or, si l'on écrit l'équation algébrique en x

$$X = 0,$$

ainsi que toutes celles qui en dérivent par la différentiation :

$$\frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4X}{dx^4} = 0, \text{ etc.}$$

et que toute racine d'une quelconque de ces équations, étant substituée dans celle qui la précède et dans celle qui la suit, donne deux résultats de signe opposé; il est certain que la proposée $X=0$ a toutes ses racines réelles, et que par conséquent il en est de même de toutes ces équations subordonnées

$$\frac{dX}{dx}=0,\ \frac{d^2X}{dx^2}=0,\ \frac{d^3X}{dx^3}=0,\ \text{etc.}$$

Ces propositions sont fondées sur la théorie des équations algébriques, et ont été démontrées depuis long-temps (1). Il suffit donc de prouver que les équations

$$y=0,\ \frac{dy}{d\theta}=0,\ \frac{d^2y}{d\theta^2}=0,\ \frac{d^3y}{d\theta^3},\ \text{etc.},$$

remplissent la condition précédente. Or, cela suit de l'équation générale

$$\frac{d^iy}{d\theta^i}+(i+1)\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}}+\theta\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}}=0:$$

car si on donne à θ une valeur positive, qui rende nul le différentiel

$$\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}},$$

les deux termes

$$\frac{d^iy}{d\theta^i}\ \text{et}\ \frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}},$$

recevront des valeurs de signes opposés. A l'égard des valeurs

(1) On en est redevable à M. de Gua, de l'Académie des sciences de Paris.

négatives de θ, il est visible, d'après la nature de la fonction $f\theta$, qu'aucune quantité négative, mise à la place de θ, ne pourrait rendre nulle ni cette fonction, ni aucune de celles qui en dérivent par la différentiation : car la substitution d'une quantité négative quelconque, depuis o jusqu'à $-\frac{1}{0}$, donne des résultats de même signe. Donc on est assuré que l'équation $y=0$ a toutes ses racines réelles et positives. Il suit de là que l'équation $f'\theta=0$, ou $y'=0$, a aussi toutes ses racines réelles, ce qui est une conséquence connue des principes de l'algèbre. Examinons maintenant quelles sont les valeurs successives que reçoit le terme $\theta\frac{y'}{y}$, lorsqu'on donne à θ des valeurs continuellement croissantes, depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\frac{1}{0}$. Si une valeur de θ rend y' nulle, la quantité $\theta\frac{y'}{y}$ devient nulle aussi ; elle devient infinie lorsque θ rend y nulle. Or il suit de la théorie des équations que, dans le cas dont il s'agit, toute racine de $y=0$ est placée entre deux racines consécutives de $y'=0$; et réciproquement, désignant par θ_1 et θ_3, deux racines consécutives de cette dernière équation, et par θ_2 la racine de l'équation $y=0$, qui est placée entre θ_1 et θ_3, toute valeur de θ, comprise entre θ_1 et θ_2, donne à y un signe différent de celui que recevrait cette fonction y si θ avait une valeur comprise en θ_2 et θ_3. Ainsi la quantité $\theta\frac{y'}{y}$ est nulle lorsque $\theta=\theta_1$, infinie lorsque $\theta=\theta_2$, et nulle lorsque $\theta=\theta_3$. Il est donc nécessaire que cette quantité $\theta\frac{y'}{y}$ prenne toutes les valeurs possibles depuis zéro jusqu'à l'infini, dans l'intervalle de θ_1 à θ_2 ; et prenne aussi toutes les valeurs possibles de signe opposé depuis l'infini jusqu'à zéro, dans l'intervalle de θ_2 à θ_3. Donc l'équation $A = \theta \frac{y'}{y}$ a nécessairement une racine réelle entre θ_1 et θ_3; et comme l'équation $y' = 0$ a toutes ses racines réelles en nombre infini, il s'ensuit que l'équation $A = \theta \frac{y'}{y}$ a aussi toutes ses racines réelles. On est parvenu à démontrer de cette manière que l'équation déterminée

$$\frac{hR}{2} = \frac{\theta - 2\frac{\theta^2}{2^2} + 3\frac{\theta^3}{2^2 \cdot 3^2} - \text{etc.}}{1 - \theta + \frac{\theta^2}{2^2} - \frac{\theta^3}{2^2 \cdot 3^2} + \text{etc.}},$$

ou

$$\frac{hR}{2} = \frac{\frac{gR^2}{2^2} - 2\frac{g^2R^4}{2^2 \cdot 4^2} + 3\frac{g^3R^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \text{etc.}}{1 - \frac{gR^2}{2^2} + \frac{g^2R^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{g^3R^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \text{etc.}},$$

dont l'inconnue est g, a toutes ses racines réelles et positives.

Nous allons poursuivre cet examen de la nature de la fonction u, et de l'équation différentielle à laquelle elle satisfait.

On peut d'abord remarquer que si la fonction $f\theta$ n'était point déja résolue en série, on en déduirait facilement le développement de l'équation générale

$$\frac{d^iy}{d\theta^i} + (i+1)\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}} + \theta\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}} = 0.$$

En effet, si l'on donne à θ la valeur 0, et que l'on désigne par $y^{(i)}$ la valeur que reçoit le rapport différentiel de l'ordre i, on aura en général

$$y^{(i+1)} = \frac{y^{(i)}}{i+1}.$$

Or les coëfficients des puissances de la variable, dans le développement de la fonction, dépendent des valeurs que reçoivent les rapports différentiels, lorsqu'on fait la variable nulle. Donc l'équation

$$y^{(i+1)} = -\frac{y^{(i)}}{i+1}$$

servira à déterminer tous les coëfficients, en supposant le premier connu. Si on prend 1 pour ce premier coëfficient, on aura la série

$$y = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2^2} - \frac{\theta^3}{2^2.3^2} + \frac{\theta^4}{2^2.3^2.4^2} - \frac{\theta^5}{2^2.3^2.4^2.5^2} + \text{etc.}$$

Si maintenant dans l'équation proposée

$$gu + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} = 0,$$

on fait

$$\frac{gx^2}{2^2} = \theta,$$

et que l'on cherche la nouvelle équation en u et θ, en regardant u comme une fonction de θ, on trouvera

$$u + \frac{du}{d\theta} + \theta\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0;$$

d'où l'on conclut

$$u = 1 - \theta + \frac{\theta^2}{2^2} - \frac{\theta^3}{2^2.3^2} + \frac{\theta^4}{2^2.3^2.4^2} - \text{etc.},$$

ou

$$u = 1 - \frac{gx^2}{2^2} + \frac{g^2x^4}{2^2.4^2} - \frac{g^3x^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}$$

52. Il est facile d'exprimer la somme de cette série. Pour obtenir ce résultat, on développera comme il suit la fonction $\cos(\alpha \sin. x)$ en cosinus d'arcs multiples. On aura d'abord,

par les transformations connues,

$$2\cos.(\alpha \sin. x) = e^{\frac{1}{2}\alpha e^{x\sqrt{-1}}} . e^{-\frac{1}{2}\alpha e^{-x\sqrt{-1}}} + e^{-\frac{1}{2}\alpha e^{x\sqrt{-1}}} . e^{\frac{1}{2}\alpha e^{-x\sqrt{-1}}}.$$

et désignant $e^{x\sqrt{-1}}$ par ω,

$$2\cos.(\alpha \sin. x) = e^{\frac{\alpha}{2}\omega} . e^{-\frac{\alpha}{2}\omega^{-1}} + e^{-\frac{\alpha}{2}\omega} . e^{\frac{\alpha}{2}\omega^{-1}}.$$

Si on développe le second membre selon les puissances de ω, on trouvera que le terme qui ne contient point ω dans le développement de $2\cos.(\alpha \sin. x)$ est

$$2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^4}{2^2.4^2} - \frac{\alpha^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{\alpha^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \text{etc.}\right].$$

Les coëfficients de ω^1, ω^3, ω^5, etc. sont nuls. Il en est de même des coëfficients des termes qui contiennent ω^{-1}, ω^{-3}, ω^{-5}, etc. Le coëfficient de ω^{-2} est le même que celui de ω^2. Le coëfficient de ω^4 est

$$2\left[\frac{\alpha^4}{2.4.6.8} - \frac{\alpha^6}{2^2.4.6.8.10} + \text{etc.}\right];$$

le coëfficient ω^{-4} est le même que celui ω^4. Il est aisé d'exprimer la loi suivant laquelle ces coëfficients se succèdent; mais, sans s'y arrêter, on remarquera que $\omega^2 + \omega^{-2}$, ou $e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}$, équivaut à $2\cos. 2x$; que $\omega^4 + \omega^{-4}$ équivaut à $2\cos. 4x$; ainsi de suite. Donc la quantité $2\cos(\alpha \sin. x)$ peut être facilement développée en une série de la forme $A + B\cos. 2x + C\cos. 4x + D\cos. 6x +$ etc.; et le premier coëfficient A est égal à

$$2\left[1-\frac{\alpha^2}{2^2}+\frac{\alpha^4}{2^2.4^2}-\frac{\alpha^6}{2^2.4^2.6^2}+\text{etc.}\right].$$

Si l'on compare maintenant l'équation que nous avons donnée précédemment,

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x=\frac{1}{2}\int\varphi x\,dx+\cos.x\int\varphi x\cos.x\,dx+\text{etc.},$$

à celle-ci,

$$2\cos.(\alpha\sin.x)=A+B\cos.2x+C\cos.4x+\text{etc.},$$

on trouvera les valeurs de A, B, C, etc., exprimées par des intégrales définies. Il suffit de trouver celle du premier coëfficient A. On aura donc

$$\frac{1}{2}A=\frac{1}{\pi}\int\cos(\alpha\sin.x)\,dx,$$

l'intégrale devant être prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$. Donc la valeur de la série

$$1-\frac{\alpha^2}{2^2}+\frac{\alpha^4}{2^2.4^2}-\frac{\alpha^6}{2^2.4^2.6^2}+\text{etc}.$$

est celle de l'intégrale définie

$$\frac{1}{\pi}\int\cos.(\alpha\sin.x)\,dx,$$

prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=\pi$. On trouverait de la même manière, par la comparaison des deux équations, les valeurs des coëfficients B, C, etc. J'ai indiqué ces résultats, parce qu'ils sont utiles dans d'autres recherches. Il suit de là que la valeur particulière de u, qui satisfait à l'équation

$$g u + \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} = 0, \text{ est } \frac{1}{\pi} \int \cos.(x \sqrt{g} \sin. r)\, dr,$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \pi$. En désignant par q cette valeur particulière de u, et faisant $u = q s$, on trouvera

$$s = A + B \int \frac{dx}{x q};$$

et l'on aura pour exprimer l'intégrale complète de l'équation $\frac{m}{K} u + \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} = 0$,

$$u = \left\{ A + B \int \frac{dx}{x \left[\int \cos.\left(x \sqrt{\frac{m}{K}} \sin. r \right) dr \right]^2} \right\} \int \cos.\left(x \sqrt{\frac{m}{K}} \sin. r \right) dr.$$

A et B désignent des constantes arbitraires. Si l'on suppose $B = 0$, on aura, comme précédemment,

$$u = A \int \cos.\left(x \sqrt{\frac{m}{K}} \sin. r \right) dr.$$

J'ajouterai la remarque suivante, relative à cette dernière expression.

L'équation

$$\frac{1}{\pi} \int \cos.\,(t \sin.\, u)\, du = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2.4^2} - \frac{t^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.},$$

se vérifie d'elle-même. En effet on a

$$\ldots s.(t \sin.\, u)\, du = \int du \left[1 - \frac{t^2 \sin. u^2}{2} + \frac{t^4 \sin. u^4}{2.3.4} - \frac{t^6 \sin. u^6}{2.3.4.5.6} + \frac{t^8 \sin. u^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.} \right].$$

et intégrant depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \pi$, en désignant par

$S_2\pi$, $S_4\pi$, $S_6\pi$, $S_8\pi$, etc. les intégrales définies $\int \sin u^2 du$, $\int \sin u^4 du$, $\int \sin. u^6 du$, $\int \sin.^8 du$, etc., on aura

$$\frac{1}{\pi}\int \cos.(t\sin.u)\,du = 1 - \frac{t^2}{1.2}S_2 + \frac{t^4}{1.2.3.4}S_4 - \frac{t^6}{1.2.3.4.5.6}S_6 + \text{etc.}$$

Il ne s'agit plus que de trouver S_2, S_4, S_6, etc. Or la puissance $\sin. u^n$, n étant un nombre pair, peut être développée ainsi :

$$\sin. u^n = A_n + B_n \cos. 2u + C_n \cos. 4u + \text{etc.}$$

En multipliant par du, et intégrant entre les limites $u=0$ et $u=\pi$, on aura seulement

$$\int du \sin. u^n = A_n \pi;$$

les autres termes s'évanouissent. Mais on a, d'après la formule connue pour le développement des puissances entières du sinus,

$$A_2 = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{2}{1},$$

$$A_4 = \frac{1}{2^4}\cdot\frac{3.4}{1.2},$$

$$A_6 = \frac{1}{2^6}\cdot\frac{4.5.6}{1.2.3},$$

$$A_8 = \frac{1}{2^8}\cdot\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4},$$

etc.

En substituant ces valeurs de S_2, S_4, S_6, S_8, etc., on a

$$\frac{1}{\pi}\int \cos.(t\sin.u)\,du = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2.4^2} - \frac{t^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}$$

53. On peut rendre ce résultat plus général en prenant,

au lieu de $\cos.(t\sin.u)$, une fonction quelconque φ de $(t\sin.u)$.

Supposons donc que l'on ait une fonction φz qui soit ainsi développée,

$$\varphi z = \varphi + \frac{z}{1}\varphi' + \frac{z^2}{1.2}\varphi'' + \frac{z^3}{1.2.3}\varphi''' + \frac{z^4}{1.2.3.4}\varphi^{\text{IV}} + \text{etc.}$$

on aura,

$$\varphi(t\sin.u) = \varphi + \frac{t}{1}\sin.u.\varphi' + \frac{t^2}{1.2}\sin.u^2.\varphi'' + \frac{t^3}{1.2.3}\sin.u^3.\varphi''' + \text{etc.}$$

et

$$(e)\quad \frac{1}{\pi}\int du\,\varphi(t\sin.u) = \varphi + \frac{t\varphi'}{1}S_1 + \frac{t^2\varphi''}{1.2}S_2 + \frac{t^3\varphi'''}{1.2.3}S_3 + \text{etc.}$$

Or il est facile de voir que S_1, S_3, S_5, S_7, etc. ont des valeurs nulles. A l'égard de S_2, S_4, S_6, S_8, etc., leurs valeurs sont les quantités que nous avons désignées précédemment par A_2, A_4, A_6, A_8, etc.: c'est pourquoi, en substituant ces valeurs dans l'équation (e), on aura généralement, et quelle que soit la fonction φ,

$$\frac{1}{\pi}\int du\,\varphi(t\sin.u) = \varphi + \frac{\varphi'' t^2}{2^2} + \frac{\varphi^{\text{IV}} t^4}{2^2.4^2} + \frac{\varphi^{\text{VI}} t^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}$$

Dans le cas dont il s'agit, la fonction φz représente $\cos.z$, et l'on a

$$\varphi = 1,\ \varphi'' = -1,\ \varphi^{\text{IV}} = 1,\ \varphi^{\text{VI}} = -1,$$

ainsi de suite.

54. Pour connaître plus clairement la nature de la fonction $f\theta$, et celle de l'équation qui donne les valeurs de g, il faudrait considérer la figure de la ligne qui a pour équation $y = 1 - \frac{\theta}{1^2} + \frac{\theta^2}{1^2.2^2} - \frac{\theta^3}{1^2.2^2.3^2} + \text{etc.}$, et qui forme avec l'axe

des aires alternativement positives ou négatives, qui se détruisent réciproquement. Mais nous ne pourrions donner ce développement sans nous écarter de l'objet principal. On omettra par le même motif des remarques trop étendues sur les moyens d'exprimer par des intégrales déterminées les valeurs des séries infinies. On se contentera de donner le développement de la quantité $\theta\frac{f'\theta}{f\theta}$ en fraction continue.

L'indéterminée y ou $f\theta$ satisfait à l'équation

$$y + \frac{dy}{d\theta} + \theta\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dy}{d\theta} + 2\frac{d^2y}{d\theta^2} + \theta\frac{d^3y}{d\theta^3} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + 3\frac{d^3y}{d\theta^3} + \theta\frac{d^4y}{d\theta^4} = 0,$$
etc.,

et généralement

$$\frac{d^iy}{d\theta^i} + (i+1)\frac{d^{i+1}y}{d\theta^{i+1}} + \theta\frac{d^{i+2}y}{d\theta^{i+2}} = 0.$$

Mettant par abréviation les quantités y', y'', y''', y^{IV}, etc., au lieu de celles-ci, $\frac{dy}{d\theta}$, $\frac{d^2y}{d\theta^2}$, $\frac{d^3y}{d\theta^3}$, $\frac{d^4y}{d\theta^4}$, etc., on a les équations suivantes :

$$-y = y' + \theta y'',$$
$$-y' = 2y'' + \theta y''',$$
$$-y'' = 3y''' + \theta y^{\text{IV}},$$
$$-y''' = 4y^{\text{IV}} + \theta y^{\text{V}},$$
etc.

ou

$$\frac{y}{y'} = \frac{-y'}{y'+\theta y''} = \frac{-1}{1+\theta\frac{y''}{y'}},$$

$$\frac{y'}{y''} = \frac{-y''}{2y''+\theta y'''} = \frac{-1}{2+\theta\frac{y'''}{y''}},$$

$$\frac{y''}{y'''} = \frac{-y'''}{3y'''+\theta y^{\text{IV}}} = \frac{-1}{3+\theta\frac{y^{\text{IV}}}{y'''}},$$

$$\frac{y'''}{y^{\text{IV}}} = \frac{-y^{\text{IV}}}{4y^{\text{IV}}+\theta y^{\text{V}}} = \frac{-1}{4+\theta\frac{y^{\text{V}}}{y^{\text{IV}}}},$$

etc.

d'où l'on conclut

$$\frac{y}{y'} = -\cfrac{1}{1-\cfrac{\theta}{2-\cfrac{\theta}{3-\cfrac{\theta}{4-\cfrac{\theta}{5-\text{etc.}}}}}}$$

Ainsi la fonction $-\theta\frac{f'\theta}{f\theta}$, qui entre dans l'équation déterminée $\frac{hR}{2}+\theta\frac{f'\theta}{f\theta}=0$, a pour valeur la fraction

$$\cfrac{\theta}{1-\cfrac{\theta}{2-\cfrac{\theta}{3-\cfrac{\theta}{4-\cfrac{\theta}{5-\text{etc.}}}}}}$$ continuée à l'infini.

Nous allons maintenant rappeler les résultats auxquels nous sommes parvenus jusqu'ici.

Le rayon variable de la couche cylindrique étant désigné par x, et la température de cette couche étant z, qui est fonction de x et du temps t, cette fonction cherchée z doit satisfaire à l'équation aux différences partielles

$$\frac{dz}{dt} = K\left[\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{dz}{dx}\right].$$

On peut prendre pour z la valeur suivante :

$$z = e^{-mt}.u.$$

u est une fonction de x qui satisfait à l'équation

$$\frac{m}{K}u + \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = 0.$$

Si l'on fait $\theta = \frac{m}{K}\frac{x^2}{2^2}$, on aura

$$u + \frac{du}{d\theta} + \theta\frac{d^2 u}{d\theta^2} = 0.$$

La valeur suivante

$$u = 1 - \frac{\theta}{1^2} + \frac{\theta^2}{1^2.2^2} - \frac{\theta^3}{1^2.2^2.3^2} + \frac{\theta^4}{1^2.2^2.3^2.4^2} - \text{etc.},$$

satisfait à l'équation en u et θ : on prendra donc pour la valeur de u en x celle-ci,

$$1 - \frac{m}{K}\cdot\frac{x^2}{2^2} + \frac{m^2}{K^2}\cdot\frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{K^3}\cdot\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}$$

La somme de cette série est

$$\frac{1}{\pi}\int \cos.\left(x\sqrt{\frac{m}{K}}\sin.q\right)dq,$$

l'intégrale étant prise depuis $q=0$ jusqu'à $q=\pi$. Cette valeur de u en x et m satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{m}{K}u + \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = 0,$$

et conserve une valeur finie lorsque x est nulle. De plus, l'équation

$$hu+\frac{du}{dx}=0$$

doit être satisfaite lorsque $x=\mathrm{R}$, rayon du cylindre. Cette condition n'aurait pas lieu si l'on donnait à la quantité m, qui entre dans la fonction u, une valeur quelconque. Il faut que l'on ait l'équation

$$\frac{h\mathrm{R}}{2}=\cfrac{\theta}{1-\cfrac{\theta}{2-\cfrac{\theta}{3-\cfrac{\theta}{4-\cfrac{\theta}{5-\text{etc.}}}}}},$$

dans laquelle θ désigne $\frac{m}{\mathrm{K}}\cdot\frac{\mathrm{R}^2}{2^2}$. Cette équation déterminée, qui équivaut à la suivante,

$$\frac{h\mathrm{R}}{2}\left(1-\theta+\frac{\theta^2}{2^2}-\frac{\theta^3}{2^2.3^2}+\text{etc.}\right)=\theta-\frac{2\theta^2}{2^2}+\frac{3\theta^3}{2^2.3^2}-\text{etc.},$$

donne pour θ une infinité de valeurs réelles, que l'on désigne par θ_1, θ_2, θ_3, etc. Les valeurs correspondantes de m sont

$$\frac{2^2\mathrm{K}\theta_1}{\mathrm{R}^2},\ \frac{2^2\mathrm{K}\theta_2}{\mathrm{R}^2},\ \frac{2^2\mathrm{K}\theta_3}{\mathrm{R}^2},\ \text{etc.}$$

Ainsi la valeur particulière de z est exprimée ainsi :

$$\pi z=e^{-2^2\frac{\mathrm{K}t}{\mathrm{R}^2}\theta_1}\int\cos.\left(\frac{2x}{\mathrm{R}}\sqrt{\theta_1}\,\sin.q\right)dq,$$

et l'on peut mettre au lieu de θ_1 une quelconque des racines θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, etc. La valeur générale de z sera donc exprimée par l'équation

$$\pi z = a_1 e^{-2^2\frac{Kt}{R^2}\theta_1}\int\left[\cos.\left(\frac{2x}{R}\sqrt{\theta_1}\,\sin.q\right)dq\right] + a_2 e^{-2^2\frac{Kt}{R^2}\theta_2}\int\left[\cos.\left(\frac{2x}{R}\sqrt{\theta_2}\,\sin.q\right)dq\right]$$

$$+ a_3 e^{-2^2\frac{Kt}{R^2}\theta_3}\int\left[\cos.\left(\frac{2x}{R}\sqrt{\theta_3}\,\sin.q\right)dq\right]$$

$$+ \text{etc.}$$

a_1, a_2, a_3, etc., sont des coëfficients arbitraires. q est une variable qui disparaît après les intégrations, parce qu'elles doivent toutes avoir lieu depuis $q=0$ jusqu'à $q=\pi$.

55. Il ne reste plus qu'à déterminer les coëfficients a_1, a_2, a_3, etc., d'après l'état initial. On reprendra l'équation

$$z = a_1 e^{-m_1 t}.u_1 + a_2 e^{-m_2 t}.u_2 + a_3 e^{-m_3 t}.u_3 + \text{etc.},$$

dans laquelle u_1, u_2, u_3, etc. sont les différentes valeurs que prend la fonction u, ou

$$1 - \frac{m}{K}\cdot\frac{x^2}{2^2} + \frac{m^2}{K^2}\cdot\frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{K^3}\cdot\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.},$$

lorsque l'on met successivement au lieu de $\frac{m}{K}$, les valeurs g_1, g_2, g_3, etc. Lorsque l'on fait $t=0$, on a l'équation

$$z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \text{etc.},$$

dans laquelle z est une fonction donnée de x. Soit φx cette fonction, et représentons la fonction u_i, dont l'indice est i, par $\psi(x\sqrt{g_i})$, on aura

$$\varphi x = a_1\psi(x\sqrt{g_1}) + a_2\psi(x\sqrt{g_2}) + \ldots\ldots + a_i\psi(x\sqrt{g_i}) + \text{etc.}$$

Pour déterminer le premier coëfficient a_1, on multipliera chacun des membres de l'équation par $\sigma_1 dx$, σ_1 étant une fonction de x, et l'on intégrera depuis $x=0$ jusqu'à $x=R$. On déterminera cette fonction σ_1, en sorte qu'après les intégrations le second membre se réduise au premier terme seulement, où se trouve le coëfficient a_1, toutes les autres intégrales ayant une valeur nulle. Pour déterminer le second coëfficient a_2, on multipliera pareillement les deux termes de l'équation

$$\varphi x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots + a_i u_i + \text{etc.},$$

par un autre facteur $\sigma_2 dx$, et l'on intégrera depuis $x=0$ jusqu'à $x=R$. Le facteur σ_2 devra être tel que toutes les intégrales du second membre s'évanouissent, excepté une seule, savoir celle qui est affectée du coëfficient a_2. En général on emploie une suite de fonctions de x, σ_1, σ_2, σ_3, etc., correspondantes aux fonctions u_1, u_2, u_3, etc. Chacun de ces facteurs σ_1, σ_2, σ_3, etc. a la propriété de faire disparaître par l'intégration tous les termes qui contiennent des intégrales définies, excepté un seul. On obtient de cette manière la valeur de chacun des coëfficients a_1, a_2, a_3, etc. Il faut donc rechercher quelles sont ces fonctions σ_1, σ_2, σ_3, etc., qui jouissent de la propriété dont il s'agit.

Chacun des termes du second membre de l'équation est une intégrale définie de cette forme,

$$a\int(\sigma u dx);$$

u est une fonction de x qui satisfait à l'équation

$$\frac{m}{K}u + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = 0:$$

on aura donc

$$a\int(\sigma u\,dx)=-a\frac{K}{m}\int\left(\frac{\sigma}{x}\cdot\frac{du}{dx}+\sigma\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx.$$

En développant les termes

$$\int\left(\frac{\sigma}{x}\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx\right)\ \text{et}\ \int\left(\sigma\frac{d^2u}{dx^2}\cdot dx\right),$$

on a

$$\int\left(\frac{\sigma}{x}\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx\right)=C+u\frac{\sigma}{x}-\int u\,d\left(\frac{\sigma}{x}\right),$$

et

$$\int\left(\sigma\frac{d^2u}{dx^2}dx\right)=D+\frac{du}{dx}\sigma-u\frac{d\sigma}{dx}+\int u\frac{d^2\sigma}{dx^2}dx.$$

Les intégrales

$$\int\left(\frac{\sigma}{x}\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx\right)\ \text{et}\ \int\left(\sigma\frac{d^2u}{dx^2}dx\right)$$

devant être prises entre les limites $x=0$ et $x=R$, on déterminera par cette condition les quantités qui entrent dans le développement et ne sont point sous le signe $\int$. Pour désigner la valeur que reçoit une expression quelconque lorsqu'on y suppose à x sa première valeur zéro, on affectera cette expression de l'indice α, et on lui donnera l'indice ω pour indiquer ce que devient une fonction de x lorsqu'on donne à cette variable x sa dernière valeur R.

On aura donc, en supposant dans les deux équations $x=0$,

$$0=C+\left(u\frac{\sigma}{x}\right)_\alpha\ \text{et}\ 0=D+\left(\frac{du}{dx}\sigma-u\frac{d\sigma}{dx}\right)_\alpha;$$

on en conclut les valeurs des constantes C et D. Faisant ensuite $x = R$ dans ces mêmes équations, et employant le signe $\int$ pour indiquer que l'intégrale est complète, on aura

$$\int\left(\frac{\sigma}{x}\cdot\frac{du}{dx}\,dx\right) = \left(u\frac{\sigma}{x}\right)_\omega - \left(u\frac{\sigma}{x}\right)_\alpha - \int\left\{u\,d\left(\frac{\sigma}{x}\right)\right\},$$

et

$$\int\left(\sigma\frac{d^2u}{dx^2}dx\right) = \left(\frac{du}{dx}\sigma - u\frac{d\sigma}{dx}\right)_\omega - \left(\frac{du}{dx}\sigma - u\frac{d\sigma}{dx}\right)_\alpha + \int\left(u\frac{d^2\sigma}{dx^2}\,dx\right).$$

On obtient ainsi l'équation

$$\frac{m}{K}\int(\sigma u dx) = \int\left\{u\frac{d^2\sigma}{dx^2} - u\frac{d\left(\frac{\sigma}{x}\right)}{dx}\right\}dx$$
$$+\left(\frac{du}{dx}\sigma - u\frac{d\sigma}{dx} + u\frac{\sigma}{x}\right)_\omega - \left(\frac{du}{dx}\sigma - u\frac{d\sigma}{dx} + u\frac{\sigma}{x}\right)_\alpha$$

On voit maintenant que si la quantité

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} - \frac{d\left(\frac{\sigma}{x}\right)}{dx}$$

qui multiplie u sous le signe d'intégration dans le second membre, était égale au produit de σ par un coëfficient constant, les termes

$$\int\left\{u\left(\frac{d^2\sigma}{dx^2} - \frac{d\left(\frac{\sigma}{x}\right)}{dx}\right)dx\right\} \quad \text{et} \quad \int\sigma u dx$$

pourraient être réunis en un seul, et que l'on obtiendrait, pour l'intégrale cherchée $\int(\sigma u dx)$, une valeur qui ne contiendrait que des quantités déterminées, et aucun signe d'intégration. Il ne resterait plus qu'à égaler cette valeur à zéro.

Supposons donc que le facteur σ satisfasse à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{n}{K}\sigma + \frac{d^2\sigma}{dx^2} - \frac{d\left(\frac{\sigma}{x}\right)}{dx} = 0,$$

de même que la fonction u satisfait à l'équation

$$\frac{m}{K}u + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = 0,$$

m et n étant des coëfficients constants. On aura

$$\frac{n-m}{K}\int(\sigma u\,dx) = \left(\frac{du}{dx}\sigma - u\frac{d\sigma}{dx} + u\frac{\sigma}{x}\right)_\omega - \left(\frac{du}{dx}\sigma - u\frac{d\sigma}{dx} + u\frac{\sigma}{x}\right)_\alpha.$$

Il existe entre u et σ une relation très-simple, qui se découvre lorsque, dans l'équation

$$\frac{n}{K}\sigma + \frac{d^2\sigma}{dx^2} - \frac{d\left(\frac{\sigma}{x}\right)}{dx} = 0,$$

on suppose $\sigma = xs$. On a, par le résultat de cette substitution, l'équation

$$\frac{n}{K}s + \frac{d^2s}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{ds}{dx} = 0;$$

ce qui fait voir que la fonction s dépend de la fonction u, donnée par l'équation

$$\frac{m}{K}u + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = 0:$$

il suffit pour trouver s de changer m en n dans la valeur de u. Or on a vu précédemment que u est une fonction de $x\sqrt{\frac{m}{K}}$, que nous avons désignée par $\varphi\left(x\sqrt{\frac{m}{K}}\right)$; c'est pourquoi on aura

$$u=\psi\left(x\sqrt{\frac{m}{K}}\right)\quad\text{et}\quad\sigma=x\psi\left(x\sqrt{\frac{n}{K}}\right).$$

On aura maintenant

$$\frac{du}{dx}\sigma-u\frac{d\sigma}{dx}+u\frac{\sigma}{x}=x\sqrt{\frac{m}{K}}\psi'\left(x\sqrt{\frac{m}{K}}\right)\psi\left(x\sqrt{\frac{n}{K}}\right)$$
$$-x\sqrt{\frac{n}{K}}\psi'\left(x\sqrt{\frac{n}{K}}\right)\psi\left(x\sqrt{\frac{m}{K}}\right)-\psi\left(x\sqrt{\frac{m}{K}}\right)\psi\left(x\sqrt{\frac{n}{K}}\right)$$
$$+\psi\left(x\sqrt{\frac{m}{K}}\right)\psi\left(x\sqrt{\frac{n}{K}}\right).$$

Les deux derniers termes se détruisant d'eux-mêmes, il s'ensuit qu'en faisant $x=0$, ce qui correspond à l'indice α, le second membre entier s'évanouit. On conclut de là l'équation suivante,

$$(f)\qquad \frac{n-m}{K}\int(\sigma u\,dx)=R\sqrt{\frac{m}{K}}\psi'\left(R\sqrt{\frac{m}{K}}\right)\psi\left(R\sqrt{\frac{n}{K}}\right)$$
$$-R\sqrt{\frac{n}{K}}\psi\left(R\sqrt{\frac{m}{K}}\right)\psi'\left(R\sqrt{\frac{n}{K}}\right).$$

Il est aisé de voir maintenant que le second membre de cette équation est toujours nul, lorsque les quantités m et n sont du nombre de celles que nous avons désignées précédemment par m_1, m_2, m_3, etc.

On a en effet

$$\frac{hR}{K}=-R\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\frac{\psi'\left(R\sqrt{\frac{m}{K}}\right)}{\psi\left(R\sqrt{\frac{m}{K}}\right)},$$

et

$$\frac{hR}{K}=-R\sqrt{\frac{n}{K}}\cdot\frac{\psi'\left(R\sqrt{\frac{n}{K}}\right)}{\psi\left(R\sqrt{\frac{n}{K}}\right)};$$

et comparant les deux valeurs de $\frac{hR}{2K}$, on voit que le second membre de l'équation précédente (f) s'évanouit.

Il suit de là qu'après que l'on a multiplié par σdx les deux termes de l'équation

$$\varphi x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots\ldots + a_i u_i + \text{etc.},$$

et intégré de part et d'autre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = R$, chacune des intégrales définies qui composent le second membre s'évanouit : il suffit de prendre pour σ la quantité xu, ou $x\psi\left(x\sqrt{\frac{n}{K}}\right)$. Il faut excepter le seul cas où n est égale à m. Alors la valeur de $\int(\sigma u\, dx)$, tirée de l'équation (f), se réduit à $\frac{0}{0}$, et on la détermine par les règles connues.

Soit $\sqrt{\frac{m}{K}} = \mu$ et $\sqrt{\frac{n}{K}} = \nu$: on aura

$$\int x\psi(x\mu)\,\psi(x\nu)\,dx = \frac{\mu R\psi'(\mu R)\,.\,\psi(\nu R) - \nu R\psi(\mu R)\,.\,\psi'(\nu R)}{\nu^2 - \mu^2}.$$

Le second membre étant différencié au numérateur et au dénominateur par rapport à ν, donnera, en faisant $\mu = \nu$,

$$\frac{\mu R^2\psi'^2 - R\psi\psi' - \mu R^2\psi\psi''}{2\mu}.$$

On a, d'un autre côté, l'équation

$$\mu^2 u + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \mu^2\psi + \frac{\mu}{x}\psi' + \mu^2\psi'' = 0;$$

et celle-ci,

$$\frac{h}{2K}\psi + \mu\psi' = 0.$$

ou, faisant $\lambda = \frac{h}{K}$,

$$\lambda\psi + \mu\psi' = 0;$$

ce qui donnera

$$\left(\mu^2 - \frac{\lambda}{x}\right)\psi + \mu^2\psi'' = 0.$$

On pourra donc éliminer, dans l'intégrale qu'il s'agit d'évaluer, les quantités ψ' et ψ'': on trouvera ainsi pour la valeur de l'intégrale cherchée,

$$\frac{R^2\psi^2}{2}\left(\frac{\mu^2+\lambda^2}{\mu^2}\right); \quad \text{et} \quad \frac{R^2 U_i^2}{2}\left(1 + \frac{h^2}{K m_i}\right),$$

en mettant pour μ et λ leurs valeurs, et désignant par U_i la valeur que prend la fonctiou u ou $\psi\left(x\sqrt{\frac{m}{K}}\right)$ lorsqu'on suppose $x=R$. i est l'indice qui désigne le rang de la racine m de l'équation déterminée qui donne une infinité de valeurs de m. Si l'on substitue la valeur de m_i, ou $\frac{2^2 K}{R^2}\theta_i$, dans

$$\frac{R^2 U_i^2}{2}\left(1 + \frac{h^2}{K m_i}\right),$$

on aura

$$\frac{R^2 U_i^2}{2}\left\{1 + \left(\frac{hR}{2K\sqrt{\theta_i}}\right)^2\right\}.$$

Il résulte de l'analyse précédente que l'on a les deux équations

$$\int(x u_j u_i dx) = 0,$$

et

$$\int(x u_i^2 dx) = \frac{R^2 U_i^2}{2}\left\{1 + \left(\frac{hR}{2K\sqrt{\theta_i}}\right)^2\right\}.$$

La première a lieu toutes les fois que les nombres i et j sont différents, et la seconde lorsque ces nombres sont égaux.

Nous reprendrons l'équation

$$\varphi x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots\ldots + a_i u_i + \text{etc.},$$

dans laquelle il faut déterminer les coëfficients a_1, a_2, a_3, etc. Pour trouver un de ces coëfficients désigné par a_i, on multipliera les deux membres de l'équation par $x u_i dx$, et l'on intégrera depuis $x = 0$ jusqu'à $x = R$. Le second membre sera réduit par cette intégration à un seul terme, et l'on aura l'équation

$$2\int\left(x u_i \varphi x dx\right) = a_i R^2 U_i^2 \left[1 + \left(\frac{hR}{2K\sqrt{\theta_i}}\right)^2\right],$$

qui donne la valeur de a_i. Les coëfficients $a_1, a_2, a_3, \ldots a_i$, etc. étant ainsi déterminés, la condition exprimée par l'équation

$$\varphi x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \text{etc.}$$

qui se raporte à l'état initial, sera remplie.

56. Nous pouvons maintenant donner la solution complète de la question proposée. Elle est exprimée par l'équation suivante :

$$R^2 \;=\; \frac{\int(x\varphi x . u_1 dx)}{U_1^2\left[1 + \left(\frac{hR}{2K\sqrt{\theta_1}}\right)^2\right]} u_1 e^{-2^2 \frac{Kt}{R^2}\theta_1} + \frac{\int(x\varphi x . u_2 dx)}{U_2^2\left[1 + \left(\frac{hR}{2K\sqrt{\theta_2}}\right)^2\right]} u_2 e^{-2^2 \frac{Kt}{R^2}\theta_2} + \text{etc.}$$

La fonction de x qui est représentée par u_i dans l'équation précédente, a pour expression

$$\frac{1}{\pi}\int\left[\cos.\left(\frac{2x}{R}\sqrt{\theta_i}\,\sin.q\right)dq\right].$$

Toutes les intégrales par rapport à x doivent être prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=R$; et pour trouver la fonction u, on doit intégrer depuis $q=0$ jusqu'à $q=\pi$. φx est la valeur initiale de la température, prise dans l'intérieur du cylindre à la distance x de l'axe, et cette fonction est entièrement arbitraire. Les quantités θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, etc., sont les racines réelles et positives de l'équation

$$\frac{hR}{2K}=\cfrac{\theta}{1-\cfrac{\theta}{2-\cfrac{\theta}{3-\cfrac{\theta}{4-\cfrac{\theta}{5-\text{etc.}}}}}}$$

Si l'on suppose que le cylindre ait été long-temps plongé dans un fluide entretenu à une température constante, toute la masse se trouvera également échauffée, et la fonction φx, qui représente l'état initial, sera remplacée par l'unité. Après cette substitution, l'équation générale représentera toutes les circonstances du refroidissement.

On a désigné dans les calculs, par les nombres h et K, les valeurs numériques h et K de la conductibilité extérieure et de la conductibilité spécifique; mais on s'est quelquefois servi de ces mêmes lettres h et K pour désigner les rapports $\frac{h}{K}$ et $\frac{K}{CD}$.

Ce double emploi a pu occasionner quelques erreurs de transcription ou de calcul : on les rectifiera aisément en ayant égard à l'homogénéité des termes. Pour cela il suffit de remarquer que l'on peut attribuer respectivement aux quantités

x, nombre d'unité de longueur, la dimension	1
h, conductibilité extérieure, la dimension...	-2
K, conductibilité propre, la dimension.....	-1
D, densité..................................	-3
C, capacité spécifique de chaleur...........	0
Z, température..............................	0
et t, temps écoulé, la dimension.............	0

Ce nombre de dimensions est celui qui résulte des définitions que l'on a données des quantités h, K, C, dans les articles 2, pages 195, 197, et 4, page 207. Lorsque l'on tiendra compte, d'après cette règle, du nombre des dimensions de chaque lettre, on trouvera que toutes les équations sont composées de termes homogènes, et il sera facile de reconnaître quelles sont les quantités désignées par h et K.

Si l'on suppose que le temps écoulé t soit infini, il est visible que le second membre de l'équation ne contiendra plus qu'un seul terme; savoir, celui où se trouve la moindre de toutes les racines $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, etc. C'est pourquoi, en supposant que ces racines sont rangées selon leur grandeur, et que θ_1 est la moindre de toutes, on aura l'équation

$$\frac{zR^2}{2} = \frac{\int (x\varphi x\, u_1\, dx)}{U_1^2\left[1+\left(\frac{hR}{2^2 K\sqrt{\theta_1}}\right)^2\right]}\, u_1 . e^{-\frac{2^2 K\theta_1}{R^2 . CD}t}$$

pour exprimer l'état dont le corps approche d'autant plus que le temps écoulé est plus grand.

On déduirait de cette solution des conséquences semblables à celles que présente le mouvement de la chaleur dans

dans une masse sphérique. On reconnaît d'abord qu'il y a une infinité d'états particuliers dans chacun desquels les rapports établis entre les températures initiales se conservent jusqu'à la fin du refroidissement. Lorsque l'état initial n'est point un de ceux dont il s'agit, il est composé de plusieurs d'entre eux, et les rapports des températures changent continuellement à mesure que le temps augmente. En général le solide arrive bientôt à cet état où les températures des différentes couches décroissent continuellement en conservant les mêmes rapports. Lorsque le rayon R est très-petit, on trouve que les températures décroissent proportionnellement à la fraction $e^{-2\frac{h}{R}t}$; si au contraire ce rayon R a une valeur extrêmement grande, l'exposant de e, dans le terme qui représente le refroidissement final, est proportionnel à $\frac{K}{R^2}t$. On voit par là comment la dimension du solide influe sur la vitesse du refroidissement final. Si la température du cylindre dont le rayon est R passe de la valeur A à la valeur moindre B dans un temps T, la température d'un second cylindre de rayon égal à R′ passera de A à B dans un temps différent T′. Si les deux solides ont peu d'épaisseur, le rapport des temps T et T′ sera celui des diamètres; si au contraire les diamètres des cylindres sont très-grands, le rapport des temps T et T′ sera celui des quarrés de ces diamètres.

IX.

De la propagation de la chaleur dans un prisme dont l'extrémité est assujettie à une température constante.

57. Le mouvement uniforme de la chaleur dans l'interieur d'un prisme d'une longueur infinie, assujetti par son extrémité à une température constante, est exprimé par l'equation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, on cherchera en premier lieu une valeur particulière de v, en remarquant que cette fonction v doit demeurer la même lorsque y change de signe, ou lorsque z change de signe, et qu'elle doit être infiniment petite lorsque la distance x est infiniment grande. D'après cela il est facile de voir que l'on peut prendre pour valeur particulière de v la fonction

$$a e^{-mx} \cos. ny \cos. pz;$$

et faisant la substitution on trouve

$$-m^2 + n^2 + p^2 = 0.$$

Mettant donc pour n et p des quantités quelconques, on aura

$$m = \sqrt{n^2 + p^2};$$

et de plus la valeur de v doit satisfaire à l'équation déterminée $\frac{h}{K} v + \frac{dv}{dy} = 0$ lorsque $y = l$ ou $-l$, et à l'équation

$\frac{h}{K}v + \frac{dv}{dz} = o$ lorsque $z = l$ ou $-l$. Si l'on prend pour v la valeur particulière précédente, on aura

$$n \sin. ny + \frac{h}{K} \cos. ny = o,$$

et

$$p \sin. pz + \frac{h}{K} \cos. pz = o:$$

ou

$$\frac{h}{K} = n \,\mathrm{tang}. ny,$$

et

$$\frac{h}{K} = p \,\mathrm{tang}\, pz:$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{K} l = nl \,\mathrm{tang}. nl, \quad \frac{h}{K} l = pl \,\mathrm{tang}. pl.$$

On voit par-là que si l'on avait un arc ε, tel que ε tang. ε équivalût à la quantité toute connue $\frac{h}{K}l$, on prendrait pour n ou pour p la quantité $\frac{\varepsilon}{l}$. Or il est facile de voir qu'il y a une infinité d'arcs qui, multipliés respectivement par leur tangente, donnent un même produit déterminé $\frac{hl}{K}$; d'où il suit que l'on peut trouver pour n et pour p une infinité de valeurs différentes.

Si l'on désigne par ε_1, ε_2, ε_3, etc. les arcs en nombre infini qui satisfont à l'équation déterminée ε tang. $\varepsilon = \frac{h}{K}l$, on pourra prendre pour n un quelconque de ces arcs divisé par l; il en sera de même de la quantité p. Il faudra ensuite prendre $m^2 = n^2 + p^2$. Si l'on donnait à n et p d'autres valeurs, on satisferait à l'équation différentielle, mais non pas à la condition relative à la surface. On peut donc trouver de cette manière une infinité de valeurs particulières de v; et comme la somme de plusieurs quelconques de ces valeurs satisfait encore à l'équation, on pourra former une valeur plus générale de v.

On prendra successivement pour n et pour p toutes les valeurs possibles, qui sont

$$\frac{\varepsilon_1}{l},\ \frac{\varepsilon_2}{l},\ \frac{\varepsilon_3}{l},\ \ldots\ldots\ \frac{\varepsilon_i}{l},\ \text{etc.};$$

et désignant par a_1, a_2, a_3, etc., b_1, b_2, b_3, etc. des coëfficients indéterminés, on exprimera la valeur de v par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} v = & \left[a_1 e^{-x\sqrt{n_1^2+n_1^2}} \cos. n_1 y + a_2 e^{-x\sqrt{n_2^2+n_1^2}} \cos. n_2 y + \text{etc.}\right] b_1 \cos. n_1 z \\ & + \left[a_1 e^{-x\sqrt{n_1^2+n_2^2}} \cos. n_1 y + a_2 e^{-x\sqrt{n_2^2+n_2^2}} \cos. n_2 y + \text{etc.}\right] b_2 \cos. n_2 z \\ & + \left[a_1 e^{-x\sqrt{n_1^2+n_3^2}} \cos. n_1 y + a_2 e^{-x\sqrt{n_2^2+n_3^2}} \cos. n_2 y + \text{etc.}\right] b_3 \cos. n_3 z \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si l'on suppose maintenant que x est o, il faudra que chaque point de la section A conserve une température constante. Il est donc nécessaire qu'en faisant $x=0$, la valeur de v soit toujours la même, quelque valeur que l'on puisse donner à y ou à z, pourvu que ces valeurs soient comprises entre o et l. Or en faisant $x=0$, on trouve

$$\begin{aligned} v = & (a_1 \cos. n_1 y + a_2 \cos. n_2 y + a_3 \cos. n_3 y + \text{etc.}) \times \\ & (b_1 \cos. n_1 z + b_2 \cos. n_2 z + b_3 \cos n_3 z + \text{etc.}). \end{aligned}$$

En désignant par 1 la température constante de l'extrémité A, on prendra les deux équations

$$1 = a_1 \cos. n_1 y + a_2 \cos. n_2 y + a_3 \cos. n_3 y + \text{etc.}$$

et

$$1 = b_1 \cos. n_1 z + b_2 \cos. n_2 z + b_3 \cos. n_3 z + \text{etc.}$$

Il suffit donc de déterminer les coëfficients a_1, a_2, a_3, a_4, etc., dont le nombre est infini, en sorte que le second membre de l'équation précédente soit toujours égal à l'unité. On a résolu précédemment cette question dans le cas où les nombres n_1, n_2, n_3, etc., forment la série des nombres impairs (voyez page 261). Ici les quantités n_1, n_2, n_3, etc. sont des irrationnelles données par une équation d'un degré infini.

Posant l'équation

$$1 = a_1 \cos. n_1 y + a_2 \cos. n_2 y + a_3 \cos. n_3 y + \ldots a_i \cos. n_i y + \text{etc.}$$

on multipliera les deux membres de l'équation par $\cos. n_1 y. dy$, et l'on prendra l'intégrale depuis $y = 0$ jusqu'à $y = l$. On déterminera ainsi le premier coëfficient a_1. On suivra un procédé semblable pour déterminer les coëfficients suivants. En général si on multiplie les deux membres de l'équation par $\cos. ry. dy$, et que l'on intègre, on aura pour le seul terme du second membre, qui serait représenté par $a \cos. ny$, l'intégrale

$$a \int \cos. ny \cos. ry. dy,$$

ou

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{(n+r) \sin. (n-r) l + (n-r) \sin. (n+r) l}{n^2 - r^2},$$

ou

$$\frac{a}{2(n^2-r^2)} \Big[(n+r)(\sin. nl \cos. rl - \cos. nl \sin. rl) + (n-r)(\sin. nl \cos. rl + \cos. nl \sin. rl) \Big].$$

Or une valeur quelconque de n satisfait à l'équation

$$n \text{ tang. } nl = \frac{h}{K};$$

il en est de même de r: on aura donc

$$n \text{ tang. } nl = r \text{ tang. } rl,$$

ou

$$n \sin. nl \cos. rl - r \sin. rl \cos nl = 0.$$

Ainsi l'intégrale suivante, qui se réduit à

$$\frac{a}{(n^2-r^2)}\left\{n \sin. nl \cos. rl - r \cos. nl \sin. rl\right\},$$

est nulle. Il faut excepter le seul cas où $n = r$. En reprenant dans ce cas l'intégrale

$$\frac{a}{2}\left[\frac{\sin. (n-r)l}{n-r} + \frac{\sin. (n+r)l}{n+r}\right],$$

on voit que si $n = r$, elle équivaut à la quantité

$$\frac{1}{2}a\left(l + \frac{\sin. 2nl}{2n}\right).$$

Il résulte de-là que si dans l'équation

$$1 = a_1 \cos. n_1 y + a_2 \cos. n_2 y + a_3 \cos. n_3 y + \text{etc.}$$

on veut déterminer le coëfficient d'un terme du second membre désigné par $a \cos. ny$, il faut multiplier les deux membres par $\cos. ny.\, dy$, et intégrer depuis $y = 0$ jusqu'à $y = l$: on aura pour résultat l'équation

$$\int \cos. ny.\, dy = \frac{1}{2}a\left(l + \frac{\sin. 2nl}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sin. nl.$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin. nl}{2nl+\sin. 2nl}=\frac{1}{4}a.$$

On déterminera de cette manière les coëfficients a_1, a_2, a_3, a_4, etc. Il en sera de même des coëfficients b_1, b_2, b_3, b_4, etc., qui seront respectivement les mêmes que les précédents.

Il est aisé maintenant de former la valeur générale de v. 1° Elle satisfait à l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0;$$

2° elle satisfera aux deux conditions

$$K\frac{dv}{dy}+hv=0, \text{ et } K\frac{dv}{dz}+hv=0;$$

3° elle donnera une valeur constante 1 pour v lorsqu'on fera $x=0$, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de y et de z comprises entre 0 et l. Ainsi elle résoudra dans toute son étendue la question proposée.

On peut maintenant former la série

$$\frac{1}{4}=\frac{\sin. n_1l\cos. n_1y}{2n_1l+\sin. 2n_1l}+\frac{\sin. n_2l\cos. n_2y}{2n_2l+\sin. 2n_2l}+\frac{\sin. n_3l\cos. n_3y}{2n_3l+\sin. 2n_3l}+\text{etc.};$$

ou, désignant les arcs n_1l, n_2l, n_3l, etc. par ε_1, ε_2, ε_3, etc.,

$$\frac{1}{4}=\frac{\sin. \varepsilon_1\cos. \left(\varepsilon_1\frac{y}{l}\right)}{2\varepsilon_1+\sin. 2\varepsilon_1}+\frac{\sin. \varepsilon_2\cos. \left(\varepsilon_2\frac{y}{l}\right)}{2\varepsilon_2+\sin. 2\varepsilon_2}+\frac{\sin. \varepsilon_3\cos. \left(\varepsilon_3\frac{y}{l}\right)}{2\varepsilon_3+\sin. 2\varepsilon_3}+\text{etc.},$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de y comprises entre 0 et l, et par conséquent pour toutes celles qui sont comprises entre 0 et $-l$.

En substituant les valeurs connues de $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, etc. dans la valeur générale de v, on aura l'équation suivante, qui contient la solution complète de la question proposée :

$$
(\mathrm{E})\quad
\begin{aligned}
\frac{v}{1 \cdot 4} = {} & \frac{\sin. n_1 l \cos. n_1 z}{2 n_1 l + \sin. 2 n_1 l}\left(\frac{\sin. n_1 l \cos. n_1 y}{2 n_1 l + \sin. 2 n_1 l} \cdot e^{-x\sqrt{n_1^2+n_1^2}} + \frac{\sin. n_2 l \cos. n_2 y}{2 n_2 l + \sin. 2 n_2 l} \cdot e^{-x\sqrt{n_1^2+n_2^2}} + \text{etc.}\right) \\
& + \frac{\sin. n_2 l \cos. n_2 z}{2 n_2 l + \sin. 2 n_2 l}\left(\frac{\sin. n_1 l \cos. n_1 y}{2 n_1 l + \sin. 2 n_1 l} \cdot e^{-x\sqrt{n_2^2+n_1^2}} + \frac{\sin. n_2 l \cos. n_2 y}{2 n_2 l + \sin. 2 n_2 l} \cdot e^{-x\sqrt{n_2^2+n_2^2}} + \text{etc.}\right) \\
& + \frac{\sin. n_3 l \cos. n_3 z}{2 n_3 l + \sin. 2 n_3 l}\left(\frac{\sin. n_1 l \cos. n_1 y}{2 n_1 l + \sin. 2 n_1 l} \cdot e^{-x\sqrt{n_3^2+n_1^2}} + \frac{\sin. n_2 l \cos. n_2 y}{2 n_2 l + \sin. 2 n_2 l} \cdot e^{-x\sqrt{n_3^2+n_2^2}} + \text{etc.}\right) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Les quantités désignées par n_1, n_2, n_3, etc. sont en nombre infini, et respectivement égales aux quantités $\frac{\varepsilon_1}{l}, \frac{\varepsilon_2}{l}, \frac{\varepsilon_3}{l}, \frac{\varepsilon_4}{l}$, etc. Les arcs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, etc. sont les racines de l'équation déterminée $\varepsilon \,\text{tang.}\, \varepsilon = \frac{hl}{K}$.

Nous ajouterons à cette solution les remarques suivantes :

1° Il est facile de connaître la nature de l'équation déterminée $\varepsilon \,\text{tang.}\, \varepsilon = \frac{hl}{K}$: il suffit de supposer que l'on ait construit la courbe $u = \text{tang.}\, \varepsilon$. (fig. 8.) L'arc ε étant pris pour abcisse et u pour ordonnée, cette ligne est composée de branches asymptotiques. Les abcisses qui correspondent aux asymptotes sont $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$, etc. ; et celles qui correspondent aux points d'intersection sont, $0, \pi, 2\pi, 3\pi$, etc. Si maintenant on élève à l'origine une ordonnée égale à la quantité connue $\frac{h}{K} l$, et que par l'extrémité on mène une parallèle à l'axe des abcisses, les points d'intersection donnent les racines de l'équation proposée ε tang. $\varepsilon = \frac{hl}{K}$. La construction indique les limites entre lesquelles chaque racine est placée, et nous ne nous arrêterons point aux procédés de calcul qu'il faut employer pour déterminer les valeurs des racines; les recherches de ce genre ne présentent aucune difficulté.

58. 2° On conclut facilement de l'équation générale (E) que plus la valeur de x devient considérable, plus le terme de la valeur de v dans lequel se trouve la fraction $e^{-x\sqrt{2n}}$ devient grand par rapport à chacun des suivants. En effet n_1, n_2, n_3, n_4, etc. étant des quantités positives croissantes, cette fraction est la plus grande de toutes les fractions analogues qui entrent dans les termes suivants.

Supposons maintenant que l'on puisse observer la température d'un point de l'axe du prisme situé à une distance x extrêmement grande, et la température d'un point de cet axe situé à la distance $x+1$, 1 étant l'unité de mesure: on aura alors $y=0$, $z=0$, et le rapport de la seconde température à la première sera sensiblement égal à la fraction $e^{-\sqrt{2n_1}}$. Cette valeur du rapport des températures des deux points de l'axe est d'autant plus exacte que la distance x est plus grande. Il suit de-là que si l'on marquait sur l'axe des points dont chacun fût distant du précédent de l'unité de mesure, le rapport de la température d'un point à celle du point qui précède convergerait continuellement vers la fraction $e^{-\sqrt{2n_1}}$. Ainsi les températures des points placés à distances égales finisssent par décroître en progression géométrique. Cette loi aura toujours lieu quelle que soit l'épaisseur de la barre, pourvu que l'on considère des points situés à une grande distance du foyer de chaleur. Il est facile de voir, au moyen de la construction, que si la quantité appelée l, qui est la demi épaisseur, est fort petite, n_1 a une valeur beaucoup plus petite que n_2 ou n_3. Il résulte de-là que la première fraction $e^{-\sqrt{2n_1^2}}$ est beaucoup plus grande qu'aucune des fractions analogues. Ainsi dans le cas où l'épaisseur de la barre est très-petite, il n'est pas nécessaire de s'éloigner de la source de la chaleur pour que les températures des points également distants décroissent en progression géométrique; cette loi règne alors dans toute l'étendue de la barre.

59. 3° Si la demi épaisseur l est une très-petite quantité, la valeur générale de v se réduit au premier terme qui contient $e^{-x\sqrt{2n_1^2}}$; ainsi la fonction v qui exprime la température d'un point dont les coordonnés sont x, y et z, est donnée dans ce cas par l'équation

$$v=\left[\frac{4\sin.nl}{2nl+\sin.2nl}\right]^2\cos.ny.\cos.nz.e^{-x\sqrt{2n^2}}.$$

L'arc ε ou nl devient extrêmement petit, comme on le voit par la construction. L'équation $\varepsilon\,\text{tang.}\,\varepsilon=\frac{h}{K}l$ se réduit alors à $\varepsilon^2=\frac{h}{K}l$; la première valeur de ε ou ε_1 est $\sqrt{\frac{h}{K}l}$. A l'inspection de la figure, on connait les valeurs des autres racines, en sorte que les quantités ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, etc. sont les suivantes :

$$\sqrt{\frac{h}{K}l},\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \text{etc.};$$

les valeurs de n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, etc. sont donc

$$\sqrt{\frac{h}{K}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}},\ \frac{\pi}{l},\ \frac{2\pi}{l},\ \frac{3\pi}{l},\ \frac{4\pi}{l},\ \text{etc.}$$

On en conclut, comme on l'a dit plus haut, que si l est une très-petite quantité, la première valeur de n est incomparablement plus grande que toutes les autres, et que l'on doit omettre dans la valeur générale de v tous les termes qui suivent le premier. Si maintenant on substitue dans ce premier terme la valeur trouvée pour n_1, en remarquant que l'arc nl, ou l'arc $2nl$, sont égaux à leurs sinus, on aura

$$v=\cos.\left(\sqrt{\frac{h}{K}l}\cdot\frac{y}{l}\right)\cos.\left(\sqrt{\frac{h}{K}l}\cdot\frac{z}{l}\right)e^{-\sqrt{\frac{2h}{K}\cdot\frac{1}{l}}}.$$

Le facteur $\sqrt{\frac{h}{K}l}$ qui entre sous le signe cosinus étant très-petit, il s'ensuit que la température varie très-peu pour les différents points d'une même section, lorsque la demi épaisseur l est très-petite. Ce résultat est pour ainsi dire évident de lui-même, mais il est utile de remarquer comment il est expliqué par le calcul. La solution génerale se réduit en effet à un terme seul, à raison de la ténuité de la barre, et l'on a en remplaçant par l'unité les cosinus d'arcs extrêmement petits, $v=e^{-x\sqrt{\frac{2h}{Kl}}}$, équation qui exprime dans le cas dont il s'agit les températures stationaires. On avait trouvé cette même équation précédemment (article 7): on l'obtient ici par une analyse entièrement différente.

60. La solution précédente fait connaître en quoi consiste le mouvement de la chaleur dans l'intérieur du solide.

Il est facile de voir que lorsque le prisme a acquis dans tous ses points les températures stationaires que nous considérons, il existe dans chaque section perpendiculaire à l'axe un flux uniforme de chaleur qui se porte vers l'extrémité non échauffée. Pour déterminer la quantité de ce flux qui répond à une abscisse x, il faut considérer que celle qui traverse pendant l'unité de temps un élément de la section est égale au produit du coefficient K, de l'aire $dy\,dz$ de l'élément, et du rapport $\frac{dv}{dx}$ pris avec un signe contraire. Il faudra donc prendre l'intégrale $-K\int dy \int dz \frac{dv}{dx}$ depuis $y=0$ jusqu'à $y=l$, demi épaisseur de la barre, et ensuite depuis $z=0$ jusqu'à $z=l$; on aura ainsi la quatrième partie du flux total.

La valeur générale de v est composée de termes dont chacun est de cette forme,

$$a \cos. my \cos. nz . e^{-x\sqrt{m^2+n^2}}.$$

m satisfait à l'équation

$$ml \operatorname{tang}. ml = \frac{hl}{K},$$

et n satisfait à la même équation

$$nl \operatorname{tang}. nl = \frac{hl}{K}.$$

Le différentiel $\frac{dv}{dx}$ sera formé de termes pareils à

$$-a\sqrt{m^2+n^2} . \cos. my \cos. nz . e^{-x\sqrt{m^2+n^2}};$$

l'intégrale cherchée donnera

$$a\frac{K}{m.n}\sqrt{m^2+n^2} . \sin. ml \sin. nl . e^{-x\sqrt{m^2+n^2}}.$$

En réunissant tous les termes analogues à celui-ci, on aura la valeur exacte du quart du flux total. On connait ainsi la loi suivant laquelle décroît la quantité qui traverse une section du prisme, et l'on voit que les parties éloignées reçoivent très peu de chaleur du foyer, parce que celle qui en émane immédiatement se détourne en partie vers la surface pour se diriger dans l'air. La chaleur qui traverse une section quelconque du prisme forme en quelque sorte une onde dont la densité varie d'un point de la section à l'autre. Elle est continuellement employée à remplacer la chaleur qui s'échappe par la surface dans toute l'extrémité du prisme situé à la droite de la section. Il est donc nécessaire que toute la chaleur qui sort pendant un certain temps de cette partie, soit exactement compensée par celle qui y pénètre en vertu de la conductibilité intérieure du solide.

Pour vérifier ce résultat, il faut calculer le produit du flux établi à la surface. $dx\,dy$ est un élément de la surface, et v étant la température, $hv\,dx\,dy$ est la quantité de chaleur qui sort de cet élément pendant l'unité de temps. Donc l'intégrale $h\int dx \int dy \,.\, v$ exprime la chaleur totale émanée d'une portion finie de la surface. Il faut maintenant employer la valeur connue de v en y supposant $z=l$, puis intégrer une fois depuis $y=0$ jusqu'à $y=l$, et une seconde fois depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{0}$. On trouvera ainsi la moitié de la chaleur qui sort de la surface supérieure du prisme, et prenant quatre fois le résultat, on aura la chaleur perdue par les surfaces supérieure et inférieure.

Si l'on prend maintenant l'intégrale $h\int dx \int dz \,.\, v$, que l'on donne à y dans v sa valeur l, et que l'on intègre une fois depuis $z=0$ jusqu'à $z=l$, et une seconde fois depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{0}$, on aura la quatrième partie de la chaleur qui s'échappe par les surfaces latérales.

L'intégrale $h\int dx\int dy.v$ étant prise entre les limites désignées, donne

$$\frac{ha}{m\sqrt{m^2+n^2}}\sin.ml\cos.nl.e^{-x\sqrt{m^2+n^2}},$$

et l'intégrale $h\int dx\int dz.v$ donne

$$\frac{ha}{n\sqrt{m^2+n^2}}\cos.ml\sin.nl.e^{-x\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Donc la quantité de chaleur que le prisme perd à la surface dans toute la partie située à droite de la section dont l'abscisse est x, se compose de tous les termes analogues à celui-ci

$$\frac{4ha}{\sqrt{m^2+n^2}}e^{-x\sqrt{m^2+n^2}}\left[\frac{1}{m}\sin.ml\cos.nl+\frac{1}{n}\cos.ml\sin.nl\right].$$

D'un autre côté, la quantité de chaleur qui pénètre pendant le même temps à travers la section dont l'abscisse est x, se compose de termes analogues à celui-ci

$$\frac{4\mathrm{K}a\sqrt{m^2+n^2}}{m.n}e^{-x\sqrt{m^2+n^2}}.\sin.ml\sin.nl.$$

Il ne reste donc qu'à examiner si l'on a l'équation

$$\frac{\mathrm{K}\sqrt{m^2+n^2}}{m.n}\sin.ml\sin.nl=\frac{h}{m\sqrt{m^2+n^2}}\sin.ml\cos.nl$$
$$+\frac{h}{n\sqrt{m^2+n^2}}\cos.ml\sin.nl,$$

ou

$$K(m^2+n^2)\,\text{sin.}\,m\,l\,\text{sin.}\,n\,l = h\,n\,\text{sin.}\,m\,l\,\text{cos.}\,n\,l + h\,m\,\text{cos.}\,m\,l\,\text{sin.}\,n\,l.$$

Ce résultat est évident, puisque l'on a séparément

$$K\,m^2\,\text{sin.}\,m\,l\,\text{sin.}\,n\,l = h\,m\,\text{cos.}\,m\,l\,\text{sin.}\,n\,l$$

ou

$$m\,\frac{\text{sin.}\,m\,l}{\text{cos.}\,m\,l} = \frac{h}{K},$$

et

$$K\,n^2\,\text{sin.}\,m\,l\,\text{sin.}\,n\,l = h\,n\,\text{sin.}\,m\,l\,\text{cos.}\,n\,l$$

ou

$$n\,\frac{\text{sin.}\,n\,l}{\text{cos.}\,n\,l} = \frac{h}{K}.$$

Cette compensation qui s'établit sans cesse entre la chaleur dissipée et la chaleur transmise, est une conséquence manifeste de l'hypothèse, et le calcul ne reproduit ici que la condition qui avait d'abord été exprimée : mais il est utile de remarquer cette conformité dans une matière nouvelle, et qui n'avait point encore été soumise à l'analyse.

61. Supposons que le demi côté l du quarré qui sert de base au prisme soit une ligne extrêmement grande, et que l'on veuille connaître la loi suivant laquelle les températures décroissent pour les différents points de l'axe : on donnera à y et à z des valeurs nulles dans l'équation générale, et à l une valeur infinie. Or la construction fait connaître que si la quantité l qui entre dans la constante $\frac{hl}{K}$ est infinie, la première valeur de ε est $\frac{\pi}{2}$, la seconde $3\frac{\pi}{2}$, la troisième $5\frac{\pi}{2}$, etc. On fera les substitutions dans l'équation générale et

l'on remplacera $n_1 l$, $n_2 l$, $n_3 l$, $n_4 l$, etc. par les valeurs $\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, $5\frac{\pi}{2}$, $7\frac{\pi}{2}$, etc.; l'on mettra aussi la fraction α au lieu de $e^{-\frac{l}{l}\frac{\pi}{2}}$. On trouvera alors

$$
\begin{aligned}
v\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \; & \frac{1}{1}\left(\alpha^{\sqrt{1^2+1^2}} - \frac{1}{3}\alpha^{\sqrt{1^2+3^2}} + \frac{1}{5}\alpha^{\sqrt{1^2+5^2}} - \frac{1}{7}\alpha^{\sqrt{1^2+7^2}} + \text{etc.}\right) \\
& - \frac{1}{3}\left(\alpha^{\sqrt{3^2+1^2}} - \frac{1}{3}\alpha^{\sqrt{3^2+3^2}} + \frac{1}{5}\alpha^{\sqrt{3^2+5^2}} - \frac{1}{7}\alpha^{\sqrt{3^2+7^2}} + \text{etc.}\right) \\
& + \frac{1}{5}\left(\alpha^{\sqrt{5^2+1^2}} - \frac{1}{3}\alpha^{\sqrt{5^2+3^2}} + \frac{1}{5}\alpha^{\sqrt{5^2+5^2}} - \frac{1}{7}\alpha^{\sqrt{5^2+7^2}} + \text{etc.}\right) \\
& - \frac{1}{7}\left(\alpha^{\sqrt{7^2+1^2}} - \frac{1}{3}\alpha^{\sqrt{7^2+3^2}} + \frac{1}{5}\alpha^{\sqrt{7^2+5^2}} - \frac{1}{7}\alpha^{\sqrt{7^2+7^2}} + \text{etc.}\right) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

On voit par ce résultat que la température des différents points de l'axe décroit rapidement à mesure qu'on s'éloigne de l'origine. Si donc on plaçait sur un support échauffé et maintenu à une température permanente un prisme d'une hauteur infinie, ayant pour base un quarré dont le demi côté l serait très-grand, la chaleur se propagerait dans l'intérieur du prisme et se dissiperait par la surface dans l'air environnant, qu'on suppose à la température o. Lorsque le solide serait parvenu à un état fixe, les points de l'axe auraient des températures très-inégales; et à une hauteur égale à la moitié du côté de la base, la température du point le plus échauffé serait moindre que la cinquième partie de la température de la base.

X.

Du mouvement varié de la chaleur dans un solide de forme cubique.

62. Nous allons présentement considérer l'équation

$$\frac{dv}{dt} = K\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right]$$

qui exprime le mouvement de la chaleur dans un solide de forme cubique exposé à l'action de l'air.

On supposera $v = e^{-mt}\cos. nx . \cos. py . \cos. qz$, et en substituant dans la proposée on aura l'équation de condition

$$m = K(n^2 + p^2 + q^2).$$

Il suit de là que si l'on met au lieu de n, p, q, des quantités quelconques, et si on prend pour m la quantité $K(n^2 + p^2 + q^2)$, la valeur précédente de v satisfera toujours à l'équation aux différences partielles. On aura donc pour une solution particulière l'équation

$$v = e^{-Kt(n^2+p^2+q^2)} . \cos. nx . \cos. py . \cos. qz.$$

L'état de la question exige aussi que si x change de signe, y et z demeurant les mêmes, la valeur de v ne change point, et que cela ait aussi lieu par rapport à y et à z. Or cette condition est remplie par la valeur de v. Enfin les conditions relatives à l'état de la surface sont exprimées par les équations suivantes,

$$K\frac{dv}{dx} + hv = 0,$$

$$K\frac{dv}{dy} + hv = 0,$$

$$K\frac{dv}{dz} + hv = 0:$$

elles doivent être satisfaites lorsque x a sa plus grande valeur a, lorsque $y=a$, et lorsque $z=a$. On prend le centre du cube pour l'origine des coordonnées.

On a

$$\frac{dv}{dx}=-e^{-mt}n\sin.nx.\cos.py.\cos.qz,$$

et

$$-e^{-mt}n\sin.nx.\cos.py.\cos.qz+\frac{h}{K}e^{-mt}\cos.nx.\cos.py.\cos.qz=0.$$

ou

$$-n\,\text{tang}.nx+\frac{h}{K}=0,$$

qui doit avoir lieu lorsque $x=a$: on aura donc

$$na\,\text{tang}.na=\frac{ha}{K}.$$

Soit $\frac{h}{K}=g$ et $na=\varepsilon$, on aura

$$\varepsilon\,\text{tang}.\varepsilon=ga.$$

Il résulte de là qu'on ne peut pas prendre pour n une valeur quelconque, car l'équation $na\,\text{tang}.na=ga$ ne serait pas nécessairement satisfaite, et la condition $K\frac{dv}{dx}+hv=0$ n'aurait point lieu. Pour trouver la valeur de n, il faut résoudre l'équation déterminée $\varepsilon\,\text{tang}.\varepsilon=ga$, ce qui donnera la valeur de ε, et l'on prendra $n=\frac{\varepsilon}{a}$. Or l'équation $\varepsilon\,\text{tang}.\varepsilon=ga$ a une infinité de racines réelles; donc on pourra trouver pour n une infinité de valeurs différentes, et il n'y aura que celles-là parmi lesquelles on pourra choisir. On trouvera de la même manière les équations relatives à p et à q.

La construction que l'on a employée pour la solution de la question précédente, représente les différentes valeurs que l'on peut prendre pour n. Nous désignerons ces racines, en commençant par la plus petite, par n_1, n_2, n_3, n_4, etc. Ainsi on pourra prendre pour v la valeur particulière donnée par l'équation

$$v = a\,e^{-K(n^2+p^2+q^2)}.\cos.\,n\,x.\cos.\,p\,y.\cos.\,q\,z,$$

pourvu que l'on mette au lieu de n, p, q, une quelconque des quantités n_1, n_2, n_3, n_4, etc.

On peut former ainsi une infinité de valeurs particulières de v, et il est visible que la somme de plusieurs de ces valeurs, en nombre quelconque, donnera encore une valeur de v. De plus l'équation de condition $K\frac{dv}{dx}+h\,v=0$ sera également satisfaite par la somme des valeurs particulières. On reconnaît d'après cela que l'on peut former une valeur de v, aussi générale que notre question l'exige, en réunissant un nombre indéfini de valeurs particulières. Nous prendrons pour cette valeur générale celle qui est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} v = &\left(A_1\cos.n_1x.e^{-Kn_1^2t} + A_2\cos.n_2x.e^{-Kn_2^2t} + A_3\cos.n_3x.e^{-Kn_3^2t} + \text{etc.}\right). \\ &\left(\quad\cos.n_1y.e^{-Kn_1^2t} + \quad\cos.n_2y.e^{-Kn_2^2t} + \quad\cos.n_3y.e^{-Kn_3^2t} + \text{etc.}\right). \\ &\left(\quad\cos.n_1z.e^{-Kn_1^2t} + \quad\cos.n_2z.e^{-Kn_2^2t} + \quad\cos.n_3z.e^{-Kn_3^2t} + \text{etc.}\right). \end{aligned}$$

Le second membre doit se former par le produit des trois facteurs écrits dans les trois lignes horizontales, et les quantités A_1, A_2, A_3, etc. sont des coëfficients absolument arbitraires. Or selon l'hypothèse, si l'on fait $t=0$, cette valeur de v doit être la même pour tous les points du cube : il faut donc déterminer A_1, A_2, A_3, etc. en sorte que la valeur de v soit constante quelle que soit la valeur que l'on donne, soit à x, soit à y, soit à z, pourvu que chacune de ces valeurs soit comprise entre a et $-a$. Appelant 1 la température initiale commune à tous les points du solide, on posera l'équation

$$1 = A_1 \cos. n_1 x + A_2 \cos. n_2 x + A_3 \cos. n_3 x + \text{etc.},$$

dans laquelle il s'agit de déterminer A_1, A_2, A_3, A_4, etc. On multipliera chaque membre par $\cos. n_1 x$, et l'on intégrera depuis $x=a$, jusqu'à $x=-a$. Or il résulte de l'analyse employée précédemment (pag. 461), que l'on a l'équation

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin. n_1 a \cos. n_1 x}{n_1 a\left(1 + \frac{\sin. 2 n_1 a}{2 n_1 a}\right)} + \frac{\sin. n_2 a \cos. n_2 x}{n_2 a\left(1 + \frac{\sin. 2 n_2 a}{2 n_2 a}\right)} + \frac{\sin. n_3 a \cos. n_3 x}{n_3 a\left(1 + \frac{\sin. 2 n_3 a}{2 n_3 a}\right)} + \text{etc.}$$

Désignant par μ_1 la quantité $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin. 2 n_1 a}{2 n_1 a}\right)$, et par μ_2, μ_3, etc. les quantités analogues, on aura

$$1 = \frac{\sin. n_1 a}{n_1 a \mu_1} \cos. n_1 x + \frac{\sin. n_2 a}{n_2 a \mu_2} \cos. n_2 x + \frac{\sin. n_3 a}{n_3 a \mu_3} \cos. n_3 x + \text{etc.}:$$

cette équation aura toujours lieu lorsque l'on donnera à x une valeur comprise entre a et $-a$.

On peut en conclure la valeur générale de v; elle est exprimée par l'équation suivante :

$$v = \left(\frac{\sin. n_1 a}{n_1 a \mu_1} \cos. n_1 x . e^{-K n_1^2 t} + \frac{\sin. n_2 a}{n_2 a \mu_2} \cos n_2 x . e^{-K n_2^2 t} + \frac{\sin. n_3 a}{n_3 a \mu_3} \cos. n_3 x . e^{-K n_3^2 t} + \text{etc.}\right)$$
$$\left(\frac{\sin. n_1 a}{n_1 a \mu_1} \cos n_1 y . e^{-K n_1^2 t} + \frac{\sin. n_2 a}{n_2 a \mu_2} \cos. n_2 y . e^{-K n_2^2 t} + \frac{\sin. n_3 a}{n_3 a \mu_3} \cos. n_3 y . e^{-K n_3^2 t} + \text{etc.}\right)$$
$$\left(\frac{\sin. n_1 a}{n_1 a \mu_1} \cos. n_1 z . e^{-K n_1^2 t} + \frac{\sin. n_2 a}{n_2 a \mu_2} \cos. n_2 z . e^{-K n_2^2 t} + \frac{\sin. n_3 a}{n_3 a \mu_3} \cos. n_3 z . e^{-K n_3^2 t} + \text{etc.}\right)$$

dans laquelle le second membre est égal au produit de trois facteurs séparés.

On voit par là que la valeur de v est égale au produit de trois fonctions semblables, l'une de x, l'autre de y, la troisième de z; on aurait pu arriver directement à cette conclusion de la manière suivante.

Dans l'équation $\frac{dv}{dt} = K\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right]$ on supposera $v = XYZ$, en dénotant par X une fonction de x et t seulement, par Y une fonction de y et t, par z une fontion de z et t: on aura

$$XY\frac{dZ}{dt} + XZ\frac{dY}{dt} + YZ\frac{dX}{dt} = K\left[XY\frac{d^2Z}{dz^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + YZ\frac{d^2X}{dx^2}\right]$$

On prendra les trois équations séparées

$$\frac{dZ}{dt} = K\frac{d^2Z}{dz^2},$$

$$\frac{dY}{dt} = K\frac{d^2Y}{dy^2},$$

$$\frac{dX}{dt} = K\frac{d^2X}{dx^2}.$$

De plus on doit avoir pour la surface ces équations de condition,

$$K\frac{dv}{dx} + hv = 0,$$

$$K\frac{dv}{dy} + hv = 0.$$

$$K\frac{dv}{dz} + hv = 0.$$

qui fournissent celles-ci:

$$K\frac{dX}{dx}+hX=0,$$
$$K\frac{dY}{dy}+hY=0,$$
$$K\frac{dZ}{dz}+hZ=0.$$

Il suit de là que, pour résoudre complètement la question, il suffit de prendre l'équation $\frac{du}{dt}=K\frac{d^2u}{ds^2}$, et d'y ajouter l'équation de condition $K\frac{du}{ds}+hu=0$, qui doit avoir lieu lorsque $s=a$; on mettra ensuite à la place de s, ou x, ou y, ou z, et l'on aura les trois fonctions X, Y, Z, dont le produit XYZ est la valeur générale de v.

Ainsi la question proposée est résolue comme il suit :

$$v=\varphi(x,t).\varphi(y,t).\varphi(z,t),$$

$$\varphi(x,t)=\frac{\sin.n_1a}{n_1a\mu_1}\cos.n_1x.e^{-Kn_1^2t}+\frac{\sin.n_2a}{n_2a\mu_2}\cos.n_2x.e^{-Kn_2^2t}+\text{etc.}$$

n_1 ainsi que n_2, n_3, etc. sont donnés par l'équation suivante :

$$\varepsilon\,\text{tang.}\,\varepsilon=\frac{ha}{K}\text{ et }n_1a=\varepsilon.$$

La valeur de μ_1 est $\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin.2n_1a}{2n_1a}\right)$; il en est de même des quantités analogues μ_2, μ_3, μ_4, etc. On trouve de la même manière les fonctions $\varphi(y,t)$, $\varphi(z,t)$.

On peut se convaincre que cette valeur de v résout la question dans toute son étendue, et que l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles doit nécessairement prendre cette forme pour exprimer les températures variables du solide. En effet la valeur de v satisfait à l'équation aux différences partielles et aux conditions relatives à la surface : donc les variations des températures qui résultent dans un instant de l'action des molécules et de l'action de l'air sur la surface, sont celles que l'on trouverait en différentiant la valeur de v par rapport à t. Il s'ensuit que si au commencement d'un instant la fonction v représente le système des températures, elle représentera encore celles qui ont lieu au commencement de l'instant suivant ; et l'on prouve de même que l'état variable du solide sera toujours exprimé par la fonction v, dans laquelle on augmentera successivement la valeur de t. Or cette même fonction convient à l'état initial. Donc elle représentera tous les états ultérieurs du solide. Ainsi on est assuré que toute solution qui donnerait pour v une fonction différente de la précédente serait erronée.

63. Si l'on suppose que la valeur du tems t est devenue très-considérable, on ne devra plus faire usage que du premier terme de la valeur de v : il est donné par l'équation

$$v=\left(\frac{\sin. n_1 a}{n_1 a \mu}\right)^3 \cos. n_1 x . \cos. n_1 y . \cos. n_1 z . e^{-3 K n_1^2 t}.$$

Voilà donc l'état principal vers lequel le système des températures tend continuellement, et qu'il atteint sans erreur sensible après une certaine valeur de t. Dans cet état la température de chacun des points décroît proportionnellement aux puissances de la fraction $e^{-3 K n_1^2}$. Alors les états successifs sont tous semblables, et ne diffèrent que par la quantité des températures, qui diminuent toutes comme les termes d'une même progression géométrique. On trouvera facilement, au moyen de l'équation précédente, la loi suivant laquelle les températures décroissent d'un point à l'autre dans le sens des diagonales ou des arêtes du cube, ou enfin d'une ligne donnée de position. On reconnaîtra aussi quelle est la nature des surfaces qui déterminent les couches de même température. On voit clairement que dans l'état extrême et uniforme que nous considérons ici, les points d'une même couche conservent toujours la même température, ce qui n'avait point lieu dans l'état initial et dans ceux qui lui succèdent immédiatement. Pendant la durée infinie de cet état principal et uniforme, la masse se subdivise en une infinité de couches dont tous les points ont une température commune.

64. Il faut maintenant rechercher la valeur de la température moyenne de la masse, qui s'obtient en ajoutant les produits du volume de chaque molécule par sa température, et divisant par le volume entier. v fonction de x, y, z et t étant la température d'un point quelconque, on aura

$$\iiint \frac{v\,dx\,dy\,dz}{a^3}$$

pour la valeur de la température moyenne V. L'intégrale doit être prise successivement par rapport à x, à y et à z, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$. La valeur de v étant de cette forme, X Y Z, on aura

$$V=\frac{1}{a^3}\int X\,dx.\int Y\,dy.\int Z\,dz\,;$$

ainsi la valeur de la température moyenne est $\frac{1}{a^3}\left(\int X\,dx\right)^3$, car les trois intégrales totales ont une valeur commune. Donc

$$V = \left\{ \frac{\sin.(n_1 a)^2}{(n_1 a)^2 \mu_1} e^{-Kn_1^2 t} + \frac{\sin.(n_2 a)^2}{(n_2 a)^2 \mu_2} e^{-Kn_2^2 t} + \frac{\sin.(n^3 a)^2}{(n_3 a)^2 \mu_3} e^{-Kn_3^2 t} + \text{etc.} \right\}^2.$$

La quantité $n_1 a$ est representée plus haut par ε_1, qui est une racine de l'équation $\varepsilon \operatorname{tang}. \varepsilon = \frac{ha}{K}$, et μ est égale à $\frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin. 2\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$. On a donc, en désignant les différentes racines de cette équation par ε_1, ε_2, ε_3, etc.,

$$2\sqrt{V} = \left(\frac{\sin.\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)^2 \frac{e^{-K\frac{\varepsilon_1^2}{a^2}t}}{1 + \frac{\sin. 2\varepsilon_1}{2\varepsilon_1}} + \left(\frac{\sin.\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right)^2 \frac{e^{-K\frac{\varepsilon_2^2}{a^2}t}}{1 + \frac{\sin. 2\varepsilon_2}{2\varepsilon_2}}$$
$$+ \left(\frac{\sin.\varepsilon_3}{\varepsilon_3}\right)^2 \frac{e^{-K\frac{\varepsilon_3^2}{a_2}t}}{1 - \frac{\sin. 2\varepsilon_3}{2\varepsilon_3}} + \text{etc.}$$

ε_1 est entre o et $\frac{\pi}{2}$, ε_2 entre π et $3\frac{\pi}{2}$, ε_3 entre 2π et $5\frac{\pi}{2}$, etc.: les moindres limites π, 2π, 3π, etc. approchent de plus en plus des racines ε_2, ε_3, ε_4, etc., et finissent par se confondre avec elles lorsque l'indice n est très-grand. Les arcs doubles $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$, $2\varepsilon_3$, etc. sont compris entre o et π, entre 2π et 3π, entre 4π et 5π, etc.; c'est pourquoi les sinus de ces arcs sont tous positifs. Les quantités

$$1 + \frac{\sin. 2\varepsilon_1}{2\varepsilon_1},\quad 1 + \frac{\sin. 2\varepsilon_2}{2\varepsilon_2},\quad 1 + \frac{\sin. 2\varepsilon_3}{2\varepsilon_3},\ \text{etc.}$$

sont positives et comprises entre 1 et 2. Il résulte de là que tous les termes qui entrent dans la valeur de $2\sqrt[3]{V}$ sont positifs.

65. Proposons-nous maintenant de comparer la vitesse du refroidissement dans le cube à celle que l'on a trouvée pour une masse sphérique.

Nous avons vu que pour l'un et l'autre de ces corps le système des températures converge vers un état durable, qu'il atteint sensiblement après un certain temps. Alors les températures des différents points du cube diminuent toutes ensemble en conservant les mêmes rapports, et chacune d'elles en particulier décroît comme les termes d'une progression géométrique. Il en est de même de la sphère solide; mais la raison de la progression géométrique n'est pas la même dans les deux corps. Il résulte des deux solutions que pour la sphère la raison est e^{-Kn^2}, et pour le cube $e^{-3K\frac{\varepsilon^2}{a^2}}$. La quantité n est donnée par l'équation

$$\frac{na \cos. na}{\sin. na} = 1 - \frac{ha}{K},$$

a étant le demi-diamètre de la sphère.

Cela posé, on considérera deux cas différents : celui où le rayon de la sphère et le côté du cube sont l'un et l'autre égaux à a, quantité très-petite; et celui où la même quantité a est très-grande. La quantité ε est donnée par l'équation

$$\varepsilon \text{ tang. } \varepsilon = \frac{ha}{K},$$

ou

$$\frac{na \sin. na}{\cos. na} = \frac{ha}{K}.$$

Supposons d'abord que les deux corps ont une petite dimension: $\frac{ha}{K}$ ayant une très-petite valeur, il en sera de même de ε:

on aura donc

$$\frac{ha}{K} \quad \varepsilon^2.$$

Donc la fraction $e^{-3K\frac{\varepsilon^2}{a^2}}$ est égale à $e^{-3\frac{h}{a}}$. Ainsi les dernières températures que l'on observe sont représentées par une quantité de cette forme,

$$Ae^{-3\frac{h}{a}}.$$

Si maintenant dans l'équation

$$\frac{na\cos.na}{\sin.na} = 1 - \frac{ha}{K}$$

on suppose que le second membre diffère très-peu de l'unité, on aura

$$\frac{h}{K} = \frac{n^2 a}{3}:$$

ainsi la fraction e^{-Kn^2} est $e^{-3\frac{h}{a}}$.

On conclut de là que si le rayon de la sphère est très-petit, la vitesse finale du refroidissement dans cette sphère et dans le cube circonscrit sont égales, et qu'elles sont l'une et l'autre en raison inverse du rayon; c'est-à-dire que si la temperature d'un cube dont le demi-côté est a, passe de la valeur A à la valeur B dans le tems t, une sphère dont le demi-diamètre est a passera aussi dans le même temps de la température A à la température B. Si la quantité a venait à changer pour l'un et l'autre corps, et devenait a', le temps nécessaire pour passer de A à B aurait une autre valeur

t', et le rapport des temps t et t' serait celui des demi-côtés a et a'.

Il n'en est pas de même lorsque le rayon a est extrêmement grand, car ε équivaut alors à $\frac{1}{2}\pi$, et les valeurs de na sont les quantités π, 2π, 3π, 4π, etc. On trouvera donc facilement dans ce cas les valeurs des fractions

$$e^{-3K\frac{\varepsilon^2}{a^2}} \text{ et } e^{-Kn^2}:$$

ces valeurs sont

$$e^{-3\frac{K\pi^2}{4a^2}} \text{ et } e^{-\frac{K\pi^2}{a^2}}.$$

On tire de là deux conséquences remarquables: 1° si deux cubes ont des dimensions considérables, que a et a' soient leurs demi-côtés, que le premier emploie le temps t pour passer de la température A à la température B, et que le second emploie le temps t' pour ce même intervalle; les temps t et t' seront proportionnels aux quarrés a^2 et a'^2 des demi-côtés : on a trouvé un résultat semblable pour les sphères de grande dimension. 2° si un cube a pour demi-côté une longueur considérable a, et qu'une sphère ait la même quantité a pour rayon ; que pendant le temps t la température du cube s'abaisse de A à B, il s'écoulera au temps différent t' pendant que la température de la sphère s'abaissera de A à B, et les temps t et t' seront dans le rapport de 4 à 3.

Ainsi le cube est la sphère inscrite se refroidissent également vite, lorsqu'ils ont une petite dimension, et dans ce cas la durée du refroidissement est pour l'un et l'autre corps proportionnelle à l'épaisseur. Si le cube et la sphère inscrite ont une grande dimension, la durée du refroidissement final n'est pas la même pour les deux solides. Cette durée est plus grande pour le cube que pour la sphère dans la raison de 4 à 3, et pour chacun des deux corps en particulier la durée du refroidissement augmente comme le quarré du diamètre.

XI.

Du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans les corps dont une dimension est infinie.

66. Nous avons considéré jusqu'ici le mouvement de la chaleur dans des solides d'une figure déterminée. Pour étendre cette même théorie à des corps d'une dimension infinie, il est nécessaire de donner aux intégrales une forme différente, que nous allons faire connaître. On remplira cet objet en traitant les deux questions suivantes, qui se rapportent à la diffusion de la chaleur dans une ligne infinie.

La partie $a\,b$ (fig. 9) d'une ligne infinie est élevée dans tous les points à la température 1; les autres parties de la ligne ont la température actuelle 0. On suppose que la chaleur ne peut se dissiper dans le milieu environnant. Il faut déterminer quel est l'état de la ligne après un temps donné. On peut rendre aussi cette question plus générale, en supposant 1° que les températures initiales des points compris entre a et b sont inégales et représentées par les ordonnées d'une ligne quelconque, composée de deux parties symétriques; 2° que le solide est une barre très-peu épaisse et d'une longueur infinie, et qu'une partie de la chaleur se dissipe par la surface.

La seconde question se rapporte aussi au mouvement linéaire de la chaleur. Elle consiste à déterminer les états successifs d'une barre prismatique d'une longueur infinie, dont l'état initial est donné, et qui est assujettie par son extrémité à une température constante : il s'agit d'exprimer par une formule générale la loi suivant laquelle la chaleur se propage vers l'extrémité opposée. La résolution de ces deux questions dépend de l'intégration de l'équation

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{C.D}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{hl.v}{C.D.S},$$

qui exprime le mouvement linéaire de la chaleur. v est la température que le point placé à la distance x de l'origine doit avoir après le temps écoulé t. K, h, C, D, l, S, désignent la conducibilité intérieure, la conducibilité extérieure, la capacité spécifique de chaleur, la densité, le contour de la section perpendiculaire, et l'aire de cette section.

Nous considérons d'abord le cas où la chaleur initiale se propage librement dans la ligne infinie, ce qui est l'objet de la première question. Soit

$$\frac{K}{C.D}=K,\quad \frac{hl}{C.D.S}=h:$$

dans l'équation

$$\frac{dv}{dt}=K\frac{d^2v}{dx^2}-h\,v,$$

on fera

$$v=e^{-ht}z,$$

et l'on aura

$$\frac{dz}{dt}=K\frac{d^2z}{dx^2}.$$

On prendra pour z la valeur particulière

$$a\cos.qx.e^{-Kq^2t}.$$

a et q sont des constantes arbitraires. Soient q_1, q_2, q_3, etc. une suite de valeurs quelconques de q, et a_1, a_2, a_3, etc. une suite de valeurs correspondantes du coëfficient a: on aura

$$z = a_1 \cos. q_1 x . e^{-Kq_1^2 t} + a_2 \cos. q_2 x . e^{-Kq_2^2 t} + a_3 \cos. q_3 x . e^{-Kq_3^2 t} + \text{etc.}$$

Supposons maintenant 1° que les valeurs q_1, q_2, q_3, etc croissent par degrés infiniment petits, comme les abscisses q d'une certaine courbe, en sorte qu'elles deviennent égales à dq, $2dq$, $3dq$, etc., dq étant la différentielle constante de l'abscisse; 2° que les valeurs a_1, a_2, a_3, etc. sont proportionnelles aux ordonnées Q de la même courbe, et qu'elles deviennent égales à $Q_1 dq$, $Q_2 dq$, $Q_3 dq$, etc., Q étant une certaine fonction de q. Il en résulte que la valeur de z pourra être exprimée ainsi

$$z = \int dq \, Q \cos. q x . e^{-Kq^2 t}.$$

Q est une fonction fq entièrement arbitraire, et l'intégrale peut être prise de $q=0$ à $q=\frac{1}{0}$. Toute la difficulté se réduit à déterminer convenablement la fonction arbitraire Q. Pour y parvenir, il faut, en désignant par φx les températures initiales des différents points de la barre, supposer t nulle dans l'expression de z, et l'égaler à φx: on a ainsi l'équation de condition

$$\varphi x = \int dq \, Q \cos. q x.$$

Si l'on mettait au lieu de Q une fonction quelconque de q, et que l'on achevât l'intégration depuis $q=0$ jusqu'à $q=\frac{1}{0}$, on trouverait une fonction de x. Il s'agit de résoudre la question inverse, c'est-à-dire de connaître qu'elle est la fonction de q qui, étant mise au lieu de Q, donnera pour résultat la fonction donnée φx; problème singulier, dont la solution exige un examen attentif. En développant le signe de l'intégrale, on écrira comme il suit l'équation dont il faut déduire valeur de Q,

$$\varphi x = dq Q_1 \cos. q_1 x + dq Q_2 \cos. q_2 x + dq Q_3 \cos. q_3 x + \text{etc.},$$

et pour faire disparaître tous les termes du second membre, excepté un seul, on multipliera de part et d'autre par $dx \cos. rx$, et l'on intégrera ensuite par rapport à x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n\pi$, n étant un nombre infini. r représente une grandeur quelconque égale à l'une des suivantes:

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \text{etc.},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$dq,\ 2dq,\ 3dq,\ 4dq,\ \text{etc.}$$

Soit q_1, ou généralement q_i, une des valeurs de q; et q_j une autre valeur, qui est celle que l'on a prise pour r: on aura $r = q_j = j dq$, et $q = q_i = i dq$. On considérera ensuite le nombre infini n comme exprimant combien l'unité de longueur contient de fois l'élément dq, en sorte que l'on aura $n = \frac{1}{dq}$. Maintenant, si l'on procède à l'intégration, on reconnaîtra facilement que la valeur de l'intégrale $\int dx \cos. qx . \cos. rx$ est nulle toutes les fois que r et q sont des grandeurs différentes. Mais cette même valeur de l'intégrale est $\frac{1}{2}n\pi$ lorsque $q=r$. Il suit de là que l'intégration élimine dans le second membre tous les termes excepté un seul, savoir celui qui contient q_{i} ou r. Désignant donc par R la fonction Q_{i} qui affecte ce même terme, on aura

$$\int dx\,\varphi x\cos.rx = dq\,R\cdot\tfrac{1}{2}n\pi;$$

et mettant pour ndq sa valeur 1,

$$\frac{\pi R}{2}=\int dx\,\varphi x.\cos.rx.$$

On a donc en général

$$\frac{\pi Q}{2}=\int dx\,\varphi x.\cos.qx.$$

Ainsi pour trouver la fonction Q qui satisfait à la condition précédente, il faut multiplier la fonction donnée φx par $dx\cos.qx$, intégrer de x nulle à x infinie, et multiplier le résultat par $\frac{2}{\pi}$; c'est-à-dire que de l'équation

$$\varphi x=\int dq\,fq.\cos.qx,$$

on déduit celle-ci

$$fq=\frac{2}{\pi}\int dx\,\varphi x.\cos.qx,$$

la fonction φx représentant les températures initiales d'un prisme infini dont une partie intermédiaire seulement est échauffée.

Si l'on substitue dans l'expression de z, ou dans celle de v, On exprimera comme il suit la valeur générale de z.

$$z = a_1 e^{-Kg_1^2 t} \sin. g_1 x + a_2 e^{-Kg_2^2 t} \sin g_2 x + a_3 e^{-Kg_3^2 t} \sin. g_3 x + \text{etc} ;$$

faisant ensuite $x = X$, ce qui doit rendre nulle la valeur de z, on aura pour déterminer la série des exposants g la condition

$$\sin. g_i X = 0, \text{ ou } g_i X = i\pi,$$

i étant un nombre entier: donc

$$z = a_1 e^{-K\frac{\pi^2}{X^2}t} \sin\left(x\frac{\pi}{X}\right) + a_2 e^{-K2^2\frac{\pi^2}{X^2}t} \sin.\left(2x\frac{\pi}{X}\right) + a_3 e^{-K3^2\frac{\pi^2}{X^2}t} \sin\left(3x\frac{\pi}{X}\right) + \text{etc.}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la série des constantes a_1, a_2, a_3, a_4, etc. Faisant $t = 0$, on a

$$z = \varphi x = a_1 \sin.\left(x\frac{\pi}{X}\right) + a_2 \sin.\left(2x\frac{\pi}{X}\right) + a_3 \sin.\left(3x\frac{X}{\pi}\right) + \text{etc.}$$

Soit $\frac{\pi x}{X} = u$, et désignons φx, ou $\varphi\left(u\frac{X}{\pi}\right)$, par fu: on aura

$$fu = a_1 \sin. u + a_2 \sin. 2u + a_3 \sin. 3u + \text{etc.}$$

Or on a trouvé précédemment

$$a_i = \frac{2}{\pi}\int du\, fu\, .\sin. i u,$$

l'intégrale étant prise de $u = 0$ à $u = \pi$: donc

$$\frac{X}{2} a_i = \int dx\, \varphi x \sin.\left(i\frac{\pi}{X}x\right),$$

l'intégrale étant prise de $u = 0$ à $u = \pi$, c'est-à-dire de $x = 0$

à $x = X$. En faisant les substitutions on forme l'équation

$$v = \frac{2e^{-ht}}{X}\left\{ e^{-K\frac{\pi^2}{X^2}t}\sin.\left(x\frac{\pi}{X}\right)\int dx\,\varphi x.\sin.\left(\frac{\pi x}{X}\right)\right.$$

$$+ e^{-K 2^2\frac{\pi^2}{X^2}t}\sin.\left(2x\frac{\pi}{X}\right)\int dx\,\varphi x.\sin.\left(2x\frac{\pi}{X}\right)$$

$$\left.+ e^{-K 3^2\frac{\pi^2}{X^2}t}\sin.\left(3x\frac{\pi}{X}\right)\int dx\,\varphi x.\sin.\left(3x\frac{\pi}{X}\right) + \text{etc.}\right\}$$

Il faut présentement rendre la longueur X infinie. Soit $X = n\pi$, n étant un nombre infini; soit aussi q une variable dont les accroissements infiniment petits dq sont égaux; désignons n par $\frac{1}{dq}$: le terme général de la série qui entre dans l'équation précédente est

$$e^{-i^2\frac{\pi^2}{X^2}}\sin.\left(ix\frac{\pi}{X}\right)\int dx\,\varphi x.\sin.\left(ix\frac{\pi}{X}\right).$$

On représentera par $\frac{q}{dq}$ le nombre i qui est variable, et devient infini. Ainsi l'on a

$$X = \frac{\pi}{dq}, \quad n = \frac{1}{dq}, \quad i = \frac{q}{dq}.$$

Faisant ces substitutions dans le terme général, il devient

$$e^{-Kq^2t}\sin.\,qx\int dx\,\varphi x.\sin.\,qx.$$

Chacun de ces termes doit être divisé par X, ou $\frac{\pi}{dq}$: il devient par-là une quantité infiniment petite, et la somme de la série n'est autre chose qu'une intégrale, qui doit être prise

Si l'on fait $t=0$, on aura

$$\frac{\pi \varphi x}{2} = \int \frac{dq \cos. qx}{1+q^2},$$

ce qui correspond à l'état initial. Donc l'expression

$$\frac{2}{\pi}\int \frac{dq \cos. qx}{1+q^2}$$

équivaut à e^{-x}. Il faut remarquer maintenant que la fonction φx, qui représente l'état initial, ne change point de valeur, par hypothèse, lorsque x devient négative; car la chaleur communiquée par le foyer se propage également à la droite et à la gauche du point qui la reçoit immédiatement. Il suit de là que la ligne dont l'équation serait

$$y = \frac{2}{\pi}\int \frac{dq \cos. qx}{1+q^2},$$

est composée de deux branches symétriques, que l'on forme en répétant à gauche de l'axe des y la partie de la logarithmique qui est à la droite de cet axe, et a pour équation $y=e^{-x}$. On voit ici un second exemple d'une fonction discontinue exprimée par une intégrale définie.

69. La question de la propagation de la chaleur dans une barre infinie dont l'extrémité est assujettie à une température constante, se réduit, comme on le verra dans la suite (article 72), à celle de la diffusion de la chaleur dans une ligne infinie : mais il faut supposer que la chaleur initiale, au lieu d'affecter également les deux moitiés contigues du solide, y est disposée d'une manière contraire ; c'est-à-

dire qu'en représentant par φx la valeur initiale de la température d'un point éloigné de x du milieu de la ligne, la température initiale du point opposé, pour lequel la distance est $-x$, a pour valeur $-\varphi x$. Cette seconde question diffère très-peu de la précédente, et pouvait être résolue par les mêmes principes, mais il est préférable de faire dépendre cette solution de l'analyse que nous avons appliquée aux solides dont les dimensions sont déterminées.

Supposons qu'une partie ab (fig. 12) de la barre prismatique infinie soit échauffée d'une manière quelconque, et que la partie opposée $\alpha\beta$ soit dans un état semblable, mais de signe contraire. Tout le reste du solide a o pour température initiale. On suppose que le milieu environnant est entretenu à la température constante o, et qu'il reçoit de la barre ou lui communique la chaleur par sa surface extérieure. Il s'agit de trouver quelle est, après un temps donné t, la température v d'un point dont la distance à l'origine a est x.

On supposera que la barre a une longueur finie égale à $2X$, et qu'à chacune de ses extrémités elle est maintenue par une cause quelconque à la température o du milieu : on fera ensuite $X = \frac{1}{0}$. On emploiera d'abord l'équation commune

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D}\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{hl}{C.D.S}v,$$

ou

$$\frac{dv}{dt} = K\frac{d^2 v}{dx^2} - hv;$$

et faisant $v = e^{-ht}.z$, on aura

$$\frac{dz}{dt} = K\frac{d^2 z}{dx^2}.$$

la valeur que l'on vient de trouver pour la fonction Q, on aura l'intégrale suivante, qui contient la solution générale de la question proposée.

$$\frac{\pi v}{2} = e^{-ht} \int dq \cos. qx . e^{-Kq^2 t} \int dx \varphi x . \cos. qx .$$

L'intégrale étant d'abord prise par rapport à x de x nulle à x infinie, il en résulte une fonction de q; et prenant ensuite l'intégrale de q nulle à q infinie, on obtient pour v la fonction de x et t qui représente les états successifs du solide.

67. Supposons en premier lieu que toutes les températures initiales des points compris entre a et b (fig. 10), depuis $x = 1$ jusqu'à $x = -1$, aient pour valeur commune 1, et que les températures de tous les autres points soient nulles. La fonction φx sera donnée par cette condition; il faudra intégrer par rapport à x depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, car le reste de l'intégrale est nulle par l'hypothèse. On trouvera ainsi

$$Q = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin. q}{q},$$

et

$$\frac{\pi v}{2} = e^{-ht} \int \frac{dq}{q} \cos. qx . \sin. q . e^{-q^2 K t} .$$

Le deuxième membre peut être facilement converti en série convergente, comme on le verra par la suite; il représente exactement l'état du solide en un instant donné, et si l'on y fait $t = 0$, on exprime l'état initial.

Ainsi la fonction $\frac{2}{\pi} \int \frac{dq \sin. q . \cos. qx}{q}$ équivaut à l'unité, si l'on donne à x une valeur quelconque comprise entre 1 et — 1; mais cette fonction est nulle, si l'on donne à x toute autre valeur non comprise entre 1 et -1. On voit par là que les fonctions discontinues peuvent aussi être exprimées en intégrales définies.

68. Pour donner une seconde application de la formule précédente, nous supposerons que la barre a été échauffée en un de ses points par l'action constante du même foyer, et qu'elle est parvenue à l'état permanent, que l'on sait être représenté par une courbe logarithmique (fig. 11). Il s'agit de connaître suivant quelle loi s'opérera la diffusion de la chaleur après qu'on aura retiré le foyer. En désignant par (v) la valeur initiale de la température, on aura

$$(v)=\mathrm{A}e^{-x\sqrt{\frac{\mathrm{HL}}{\mathrm{KS}}}};$$

A est la température constante du point le plus échauffé. On fera, pour plus de simplicité,

$$\mathrm{A}=1 \text{ et } \frac{\mathrm{HL}}{\mathrm{KS}}=1:$$

on a donc

$$\varphi x=e^{-x}.$$

On en déduit

$$\mathrm{Q}=\int dx.e^{-x}\cos.qx;$$

et prenant l'intégrale de x nulle à x infinie, $\mathrm{Q}=\frac{1}{1+q^2}$. Ainsi la valeur de v en x et t est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\pi v}{2}=e^{-ht}\int\frac{dq\cos.qx}{1+q^2}\cdot e^{-\mathrm{K}q^2t}.$$

62.

par rapport à q, de $q=0$ à $q=\frac{1}{0}$. Donc

$$v = \frac{2}{\pi}\int dq\, e^{-Kq^2t}\sin.qx\int dx\,\varphi x.\sin.qx.$$

L'intégrale par rapport à x doit être prise de $x=0$ à $x=\frac{1}{0}$, et la seconde intégrale doit être prise par rapport à q, de $q=0$ à $q=\frac{1}{0}$. L'équation précédente contient la solution générale de la question proposée, et en substituant pour φx une fonction quelconque, assujettie ou non à une loi continue, on pourra toujours exprimer en x et t la valeur de la température.

70. La solution de cette seconde question fait connaître distinctement quel rapport il y a entre les intégrales définies que nous venons d'employer, et les résultats de l'analyse que nous avons appliquée aux solides d'une figure déterminée. Lorsque, dans les séries convergentes que cette analyse fournit, on donne aux quantités qui désignent les dimensions une valeur infinie, chacun des termes devient infiniment petit, et la somme de la série n'est autre chose qu'une intégrale. On pourrait passer directement de la même manière, et sans aucune considération physique, des diverses séries trigonométriques que nous avons employées aux intégrales définies, et l'on découvre ainsi des propriétés remarquables qui s'accordent dans les cas les plus simples avec celles que l'on connaissait déjà.

Par exemple dans l'équation (voyez page 304)

$$\frac{1}{4}\pi = \sin.x + \frac{1}{3}\sin.3x + \frac{1}{5}\sin.5x + \ldots \frac{1}{2i+1}\sin.(2i+1)x + \text{etc.}$$

On désignera par n un nombre infini égal à $\frac{1}{dq}$, et par q une quantité variable formée successivement par l'addition de ses parties infiniment petites égales à dq. On représentera le nombre variable i par $\frac{q}{dq}$. Si maintenant dans le terme général

$$\frac{1}{2i+1}\sin.(2i+1).\frac{u}{n},$$

on met pour i et n leurs valeurs, ce terme deviendra

$$\frac{2\,dq}{q}\sin.qu\,;$$

donc la somme de la série sera

$$2\int\frac{dq}{q}\sin.qu,$$

l'intégrale étant prise de $q=0$ à $q=\frac{1}{0}$. On a donc l'équation

$$\frac{1}{2}\pi=\int\frac{dq}{q}\sin.2qu,$$

qui a toujours lieu quelle que soit la valeur positive de u. Soit $2qu=r$, r étant une nouvelle variable, on aura

$$\frac{dq}{q}=\frac{dr}{r}\ \text{ et }\ \frac{1}{2}\pi=\int\frac{dr}{r}\sin.r.$$

On sait que la valeur de l'intégrale définie $\int\frac{dr}{r}\sin.r$, de $r=0$ à $r=\frac{1}{0}$, est en effet $\frac{1}{2}\pi$. Si l'on prenait cette même intégrale de $r=0$ à $r=-\frac{1}{0}$, on aurait un résultat de signe contraire $-\frac{1}{2}\pi$. On peut vérifier par ce moyen la propriété de la fonction $\frac{2}{\pi}\int dq \frac{\sin.q.\cos.qx}{q}$ (voir page 490), dont la valeur est 1 ou 0, selon que x est ou n'est pas comprise entre 1 et -1. En effet on a

$$\int \frac{dq}{q}\cos.qx.\sin q = \frac{1}{2}\int\frac{dq}{q}\sin.(x+1)q - \frac{1}{2}\int\frac{dq}{q}\sin.(x-1)q.$$

Le premier terme vaut $\frac{1}{4}\pi$ ou $-\frac{1}{4}\pi$, selon que $x+1$ est une quantité positive ou négative; le second, abstraction faite du signe, vaut $\frac{1}{4}\pi$ ou $-\frac{1}{4}\pi$, selon que $x-1$ est une quantité positive ou négative. Donc l'intégrale totale est nulle si x est >1, car les deux termes se détruisent; elle est nulle par la même raison si x est <-1 : elle vaut $\frac{1}{2}\pi$ si x est >-1 et <1, car les deux termes s'ajoutent.

On pouvait déduire aussi de la transformation des séries en intégrales les propriétés des deux expressions

$$\int\frac{dq\cos.qx}{1+q^2}, \quad \int\frac{q\,dq\sin.qx}{1+q^2}.$$

La première (voyez page 492, art. 68) équivaut à e^{-x}, lorsque x est positive, et à e^{x} lorsque x est négative. La seconde équivaut à e^{-x} si x est positive, et à $-e^{-x}$ si x est négative; en sorte que ces deux intégrales ont la même valeur si x est positive, et des valeurs opposées si x est négative.

71. L'équation

$$\sin. x = 2\alpha\left[\frac{\sin.\alpha\sin.x}{\pi^2-\alpha^2}+\frac{\sin.2\alpha\sin.2x}{\pi^2-2^2\alpha^2}+\frac{\sin.3\alpha\sin.3x}{\pi^2-3^2\alpha^2}+\text{etc.}\right]$$

que nous avons rapportée (page 312, art. 29) conduit pareillement à l'intégrale

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{dq\sin.q\pi.\sin.qx}{1-q^2}.$$

Cette dernière expression équivaut à $\sin.x$ si x est comprise entre 0 et π, et s'évanouit si x surpasse π.

La même transformation s'applique à l'équation générale (art. 23)

$$\tfrac{1}{2}\pi\varphi x = \sin.x\int dx\varphi x.\sin.x + \sin.2x\int dx\varphi x.\sin.2x$$
$$+ \sin.3x\int dx\varphi x.\sin.3x + \text{etc.}$$

Faisant $x=\frac{u}{n}$, on désignera φx, ou $\varphi\left(\frac{u}{n}\right)$, par fu. En supposant une variable q qui reçoit des accroisements infiniment petits, égaux à dq, on représentera n par $\frac{1}{dq}$, et i par $\frac{q}{dq}$. Substituant ces valeurs dans le terme général

$$\sin.\left(\frac{iu}{u}\right)\int\frac{du}{n}\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\sin.\left(\frac{iu}{n}\right),$$

on trouvera

$$dq\sin.qu.\int du fu.\sin.qu;$$

et comme l'intégrale par rapport à x est prise de $x=0$ à $x=\pi$, l'intégration par rapport à u doit avoir lieu de $u=0$ à $x=n\pi$, ou de u nulle à u infinie.

On obtient ainsi un résultat général exprimé par cette équation :

$$\frac{1}{2}\pi\, \mathrm{F}u = \int dq \sin.qu \int du\, \mathrm{F}u.\sin.qu. \quad (e)$$

C'est pourquoi en désignant par Q une fonction de q telle que l'on ait l'équation

$$\mathrm{F}u = \int dq\, \mathrm{Q} \sin.qu,$$

Fu étant une fonction donnée, on aura

$$\mathrm{Q} = \frac{2}{\pi} \int du\, \mathrm{F}u \sin.qu,$$

l'intégrale étant prise de u nulle à u infinie. Nous avons déjà résolu une question semblable, page 489, art. 66; et des deux équations

$$\varphi x = \int dx\, \mathrm{Q} \cos.qx$$

et

$$\mathrm{Q} = \frac{2}{\pi} \int dx\, \varphi x.\cos.qx,$$

on aurait pu conclure celle-ci :

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \int dq \cos.qx \int dx\, \varphi x.\cos.qx, \quad (\varepsilon)$$

équation analogue à la précédente. En ajoutant les deux équations (e) et (ε), et réduisant, on a en cosinus l'expression de Fx+φx, qui peut être une fonction quelconque d'une ou de plusieurs variables.

Pour donner une application particulière de l'équation (e), nous supposerons Fx=x^r; le second membre deviendra par cette substitution

$$\int dq \sin.qx \int dx.x^r.\sin.qx.$$

L'intégrale

$$\int dx \,.\, x^r \,.\, \sin.\, qx,$$

ou

$$\frac{1}{q^r q}\int q\, dx\, (qx)^r \sin.\, qx$$

équivaut à

$$\frac{1}{q^r q}\int du \,.\, u^r \,.\, \sin.\, u,$$

l'intégrale étant prise de u nulle à u infinie. Soit μ cette intégrale totale

$$\int du \,.\, u^r \,.\, \sin.\, u:$$

il reste à prendre l'intégrale

$$\int dq \frac{1}{q.q^r}\mu \sin.\, xq,$$

ou

$$\mu\int dq \,.\, q^{-r-1} \sin.\, xq,$$

ou

$$\mu\, x^r \int x\, dq\, (xq)^{-r-1} \sin.\, xq,$$

ou

$$\mu\, x^r \int du \,.\, u^{-r-1} \sin.\, u.$$

Désignant par ν cette dernière intégrale prise de u nulle à u infinie, on aura pour résultat des deux intégrations successives le terme

$$x^r \mu\nu.$$

On doit donc avoir, selon la condition exprimée par l'équaon (e),

$$\tfrac{1}{2}\pi x^r = x^r \mu\nu,$$

ou

$$\mu\nu = \frac{1}{2}\pi.$$

Ainsi le produit des deux transcendantes

$$\int du\,.\,u^r \sin.\,u \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{u\,.\,u^r} \sin.\,u$$

est $\frac{1}{2}\pi$. Par exemple si $r = -\frac{1}{2}$, on trouve pour $\int \frac{du \sin.\,u}{\sqrt{u}}$ sa valeur connue

$$\sqrt{\frac{1}{2}\pi}.$$

On trouve de la même manière

$$\int \frac{du \cos.\,u}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,;$$

et de ces deux équations on pourrait aussi conclure la suivante

$$\int dt\, e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

l'intégrale étant prise de $t = 0$ à $t = \frac{1}{0}$, qui est employée depuis long-temps. En effet on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \cos.\,x + \sqrt{-1} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \sin.\,x$$

ou

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{x\sqrt{-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\,(1 + \sqrt{-1});$$

et faisant $x\sqrt{-1} = -t^2$, on trouve

$$\int dt\, e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

On pourrait encore déduire des équations (e), (ε) la solution de la question suivante, qui appartient aussi à l'analyse des différences partielles : quelle est la fonction Q de la variable q qui doit être placée sous le signe intégral, pour que l'expression $\int dq\, Q e^{-qx}$ soit égale à une fonction donnée, l'intégrale étant prise de q nulle à q infinie? Les équations précédentes fournissent diverses autres conséquences utiles à l'analyse ; mais on ne pourrait les développer ici, et faire connaître les limitations auxquelles elles sont sujettes, sans s'écarter beaucoup de l'objet principal. Au reste, ces limitations sont celles que nous avons remarquées pour les équations (M), (N), (P), (II) des pages 300, 308, 328, 398 ; car les équations (e), (ε) ne sont autre chose que les précédentes où l'on supposerait la dimension infinie. Les théorèmes exprimés par ces équations sont très-remarquables, 1° parce qu'ils conviennent évidemment à un nombre quelconque de variables ; 2° parce qu'il suffit de supposer les dimensions infinies pour représenter la diffusion libre de la chaleur, soit qu'elle s'opère selon une, deux ou trois dimensions.

72. On peut aussi résoudre la question de la propagation de la chaleur dans une ligne infinie, en donnant à l'intégrale de l'équation aux différences partielles une forme déja connue, qui présente une fonction arbitraire sous le signe de l'intégrale définie.

Supposons que la chaleur initiale étant répartie d'une manière quelconque dans la barre infinie AB (fig. 13), on entretienne le point A à une température constante, tandis qu'une partie de la chaleur communiquée se dissipe par la surface extérieure : il s'agit de déterminer l'état du prisme après un temps donné, ce qui est l'objet de la seconde question que nous nous sommes proposée. En désignant par 1 la température constante de l'extrémité A, par o celle du milieu, on aura

$$e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}$$

pour l'expression de la température finale du point situé à la distance x de cette extrémité (voir l'article 7). En désignant par v la température variable du même point après le temps écoulé t, on aura pour déterminer v cette équation :

$$\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{hl}{CD.S}v.$$

Soit maintenant $v=e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}+z$: on aura

$$\frac{dz}{dt}=\frac{K}{CD}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{hlz}{CD.S};$$

ou

$$\frac{dz}{dt}=K\frac{d^2z}{dx^2}-hz,$$

K remplaçant $\frac{K}{CD}$, et h, $\frac{hl}{CD.S}$. Si l'on fait $z=e^{-ht}u$, on a

$$\frac{du}{dt}=K\frac{d^2u}{dx^2}.$$

La valeur de z, ou $v-e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}$, est celle de la différence entre la température actuelle et la température finale. Cette différence z, qui tend de plus en plus à s'évanouir, et dont la dernière valeur est nulle, équivaut d'abord à

$$Fx - e^{-x\sqrt{\frac{H}{K}}}, \text{ ou } fx;$$

Fx désignant la température initiale d'un point situé à la distance x, et fx, l'excès de la température initiale sur la température finale. Ainsi z est une variable qui satisfait à l'équation $\frac{dz}{dt} = K\frac{d^2z}{dx^2} - hz$, et qui a pour valeur initiale fx, et pour valeur finale o. Au point A, où $x = 0$, la quantité z, ou $v - be^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}$, a par hypothèse une valeur constante égale à zéro. On voit par là, en comparant à ce que l'on a dit précédemment, que z représente une chaleur excédante qui est d'abord accumulée dans le prisme, et qui ensuite s'évanouit, soit en se propageant à l'infini, soit en se dissipant dans le milieu.

Ainsi pour se représenter l'effet qui résulte de l'échauffement uniforme de l'extrémité A d'une ligne infinie, il faut concevoir 1° que cette ligne est aussi prolongée à la gauche du point A, et que chaque point situé à droite est présentement affecté de la température excédante. 2° Que l'autre moitié de la ligne à la gauche du point A est dans un état contraire, en sorte qu'un point placé à la distance $-x$ du point A, a pour température initiale $-fx$. Ensuite la chaleur commence à se mouvoir librement dans l'intérieur de la barre, et à se dissiper à la surface. Le point A conserve la température o, et tous les autres points parviennent insensiblement au même état. C'est ainsi que l'on peut ramener le cas où le foyer extérieur communique incessamment une nouvelle chaleur, à celui où la chaleur primitive se propage dans l'intérieur du solide. On pourrait donc résoudre la question proposée de la même manière que celle de la diffusion de la chaleur (voir art. 69, page 492); mais afin de multiplier les moyens de résolution, dans une matière aussi nouvelle, il est préférable d'employer une intégrale différente de celle que nous avons considérée jusqu'ici.

73. On satisfait à l'équation $\frac{du}{dt}=K\frac{d^2u}{dx^2}$ en supposant u égale à $e^{-x}.e^{Kt}$. Cette fonction de x et t peut être mise sous la forme d'une intégrale définie, ce qui se déduit très-facilement de la valeur connue de $\int dq e^{-q^2}$. On a en effet

$$\sqrt{\pi}=\int dq e^{-q^2},$$

lorsque l'intégrale est prise de

$$q=-\tfrac{1}{0} \text{ à } q=\tfrac{1}{0}.$$

On aura donc aussi

$$\sqrt{\pi}=\int dq e^{-(q+a)^2},$$

a étant une constante quelconque. De l'équation

$$\sqrt{\pi}=e^{-a^2}\int dq e^{-(q^2+2aq)},$$

on conclut, en faisant $a^2=r$,

$$e^r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq e^{-q^2}.e^{-2q\sqrt{r}};$$

donc la valeur précédente de u, ou $e^{-x}.e^{Kt}$, équivaut à

$$e^{-x}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq\,e^{-q^2}e^{-2q\sqrt{Kt}},$$

ou bien à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq\,e^{-q^2}.e^{-(x+2q\sqrt{Kt})}.$$

On pourrait aussi supposer u égale à la fonction

$$ae^{-nx}.e^{Kn^2t},$$

a et n étant deux constantes quelconques; et l'on trouvera de même que cette fonction équivaut à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq\,e^{-q^2}.ae^{-n(x+2q\sqrt{Kt})}.$$

On prendra donc pour valeur générale de u la somme d'une infinité de valeurs semblables, et l'on aura:

$$u=\int dq\,e^{-q^2}\left[a_1e^{-n_1(x+2q\sqrt{Kt})}+a_2e^{-n_2(x+2q\sqrt{Kt})}+a_3e^{-n_3(x+2q\sqrt{Kt})}+\text{etc.}\right]$$

Les constantes a_1, a_2, a_3, etc. et n_1, n_2, n_3, etc. étant indeterminées, la série est l'expression d'une fonction quelconque de $x+2q\sqrt{Kt}$: on a donc

$$u=\int dq\,e^{-q^2}\varphi(x+2q\sqrt{Kt})$$

L'intégrale doit être prise de $q=-\frac{1}{0}$ à $q=+\frac{1}{0}$. Cette valeur de u satisfait nécessairement à l'équation

$$\frac{du}{dt}=K\frac{d^2u}{dx^2}$$

on en conclut

$$z=e^{ht}\int dq\,e^{-q^2}\varphi(x+2q\sqrt{Kt}).$$

et

$$v = be^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}} + e^{-ht}\int dq\, e^{-q^2}\varphi(x+2q\sqrt{Kt}).$$

Lorsque $t=0$, la valeur de z est

$$Fx - e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}, \quad \text{ou} \quad fx.$$

Donc

$$fx = \int dq\, e^{-q^2}\varphi x, \quad \text{ou} \quad \varphi x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} fx.$$

Ainsi la fonction arbitraire φ qui entre dans l'intégrale est déterminée au moyen de la fonction donnée f; et l'on a l'équation suivante, qui contient la solution de la question proposée,

$$v = be^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}} + \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}}\int dq\, e^{-q^2} f(x+2q\sqrt{Kt}),$$

résultat qu'il est facile de représenter par une construction.

74. Nous appliquerons la solution précédente au cas où tous les points de la ligne AB ayant la température initiale o, on échauffe l'extrémité A pour la retenir continuellement à la température 1. Il en résulte que Fx a une valeur nulle lorsque x diffère de o; ainsi fx équivaut à

$$-e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}$$

toutes les fois que x diffère de o, et à o lorsque x est nulle. D'un autre côté, il est nécessaire qu'en faisant x négatif, la valeur de fx change de signe, en sorte que l'on a

$$f(-x) = -fx.$$

On connaît ainsi la nature de la fonction discontinue fx: elle est

$$-e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}$$

lorsque x surpasse o, et

$$+e^{+x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}$$

lorsque x est moindre que o. Il faut maintenant écrire au lieu de x la quantité

$$x+2q\sqrt{Kt}.$$

Pour trouver u, ou

$$\int dq\, e^{-q^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x+2q\sqrt{Kt}),$$

on prendra d'abord l'intégrale depuis $x+2q\sqrt{Kt}=0$ jusqu'à $x+2q\sqrt{Kt}=\frac{1}{0}$, et ensuite depuis $x+2q\sqrt{Kt}=0$ jusqu'à $x+2q\sqrt{Kt}=-\frac{1}{0}$. Pour la première partie on a

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq\, e^{-q^2}.e^{-\sqrt{\frac{hl}{KS}}(x+2q\sqrt{Kt})};$$

et remplaçant K par la valeur $\frac{K}{CD}$, on a

$$-\int\frac{dq}{\sqrt{\pi}}e^{-q^2}.e^{-\sqrt{\frac{hl}{KS}}\left(x+2q\sqrt{\frac{Kt}{CD}}\right)},$$

ou

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\int dq\, e^{-q^2}.e^{-2q\sqrt{\frac{hl}{CDS}t}}.$$

ou

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\,e^{\frac{hl}{CD.S}t}\int dq\,e^{-\left(q+\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}\right)^2},$$

ou

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\,e^{\frac{hl}{CD.S}t}\int dr\,e^{-r^2},$$

en faisant

$$r=q+\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}.$$

Cette integrale $\int dr.e^{-r^2}$ doit être prise par hypothèse depuis

$$x+2q\sqrt{\frac{Kt}{CD}}=0 \text{ jusqu'à } x+2q\sqrt{\frac{Kt}{CD}}=\frac{1}{0},$$

ou de

$$q=\frac{-x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}} \text{ jusqu'à } q=\frac{1}{0},$$

ou de

$$r=\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}-\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}} \text{ jusqu'à } r=\frac{1}{0}.$$

La seconde partie de l'intégrale est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq\,e^{-q^2}.e^{\sqrt{\frac{hl}{KS}}\left(x+2q\sqrt{\frac{K}{CD}t}\right)},$$

ou

$$\frac{e^{x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}}{\sqrt{\pi}}\int dq\,e^{-q^2}.e^{2q\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}},$$

ou

$$\frac{e^{x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}}{\sqrt{\pi}}.e^{\frac{hl}{CD.S}t}\int dq\,e^{-\left(q-\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}\right)^2},$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\cdot e^{\frac{hl}{CD.S}t}\int dr\,e^{-r^2}.$$

en faisant

$$r=q-\sqrt{\frac{hl}{CD.S}}\,t$$

L'intégrale doit être prise par hypothèse depuis

$$x+2q\sqrt{\frac{Kt}{CD}}=-\frac{1}{0}\ \text{ jusqu'à }\ x+2q\sqrt{\frac{Kt}{CD}}=0.$$

ou de

$$q=-\frac{1}{0}\ \text{ à }\ q=\frac{-x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}},$$

ou de

$$r=-\frac{1}{0}\ \text{ à }\ r=-\sqrt{\frac{hl}{CD.S}}\,t-\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}.$$

Ces deux dernières limites peuvent, d'après la nature de la fonction e^{-r^2}, être remplacées par celles-ci :

$$r=\sqrt{\frac{hl}{CD.S}}\,t+\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\ \text{ et }\ r=\frac{1}{0}.$$

Il suit de là que la valeur de u est exprimée ainsi :

$$u=\frac{e^{x\sqrt{\frac{hl}{KS}}t}\cdot e^{\frac{hl}{CD.S}t}}{\sqrt{\pi}}\int dr\,e^{-r^2}-\frac{e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\cdot e^{\frac{hl}{CD.S}t}}{\sqrt{\pi}}\int dr\,e^{-r^2}.$$

la première intégrale doit être prise de

$$r=\sqrt{\frac{hl}{CD.S}}\,t+\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\ \text{ à }\ r=\frac{1}{0},$$

et la seconde de

$$r=\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}-\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\quad\text{à}\quad r=\frac{1}{0}.$$

Représentons maintenant par $\psi(R)$ l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dr\,e^{-r^2},$$

depuis $r=R$ jusqu'à $r=\frac{1}{0}$: l'on aura

$$u=e^{\frac{hl}{CD.S}t}.\,e^{x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\,\psi\left\{\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}+\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right\}$$

$$-\,e^{\frac{hl}{CD.S}t}.\,e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\,\psi\left\{\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}-\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right\};$$

donc z, qui équivaut à $e^{-\frac{hl}{CD.S}t}.\,u$, a pour expression

$$e^{x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\,\psi\left\{\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}+\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right\}-e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\,\psi\left\{\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}-\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right\},$$

et

$$v=e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}-e^{-x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\,\psi\left\{\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}-\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right\}$$

$$+\,e^{x\sqrt{\frac{hl}{KS}}}\,\psi\left\{\sqrt{\frac{hl}{CD.S}t}+\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right\}.$$

La fonction désignée par $\psi(\mathrm{R})$ est connue depuis long-temps, et l'on peut calculer facilement, soit au moyen de séries convergentes, soit par les fractions continues, les différentes valeurs que reçoit cette fonction lorsqu'on met au lieu de R des quantités données : ainsi l'application numérique de la solution n'est sujette à aucune difficulté.

75. Si l'on fait h nulle on a

$$v = 1 - \left\{ \psi\left(\frac{-x}{2\sqrt{\frac{\mathrm{K}t}{\mathrm{CD}}}}\right) - \psi\left(\frac{+x}{2\sqrt{\frac{\mathrm{K}t}{\mathrm{CD}}}}\right) \right\}.$$

Cette équation représente la propagation de la chaleur dans une barre infinie dont tous les points étaient d'abord à la température o, et dont l'extrémité est élevée et entretenue à la température constante 1. On suppose que la chaleur ne peut se dissiper par la surface extérieure de la barre, ou, ce qui est la même chose, que cette barre a une épaisseur infiniment grande. Cette dernière valeur de v fait donc connaître la loi suivant laquelle la chaleur se propage dans un solide terminé par un plan infini, en supposant que ce mur infiniment épais a d'abord dans toutes ses parties une température initiale o, et que l'on assujettit la surface à une température constante 1. Il ne sera point inutile de faire observer quelques résultats de cette solution.

En désignant par $\varphi(\mathrm{R})$ l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dr.e^{-r^2}$, prise de $r=0$ à $r=\mathrm{R}$, on a, lorsque R est une quantité positive,

$$\psi(\mathrm{R}) = \tfrac{1}{2} - \varphi(\mathrm{R}).$$

et

$$\psi(-R) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \varphi(R);$$

donc

$$\psi(-R) - \psi(R) = 2\varphi(R),$$

et

$$v = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right);$$

et en développant l'intégrale $\varphi(R)$, on a

$$\varphi(R) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(R - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}R^5 - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{7}R^7 + \text{etc.}\right).$$

Donc

$$\frac{1}{2}v\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}} + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right)^3 - \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right)^5 + \text{etc.}$$

1° Si l'on suppose x nulle, quelle que soit d'ailleurs la valeur de t, on trouvera $v = 1$, ce qui est conforme à l'hypothèse; 2° si x n'étant point nulle, on suppose $t = 0$, la somme des termes qui contiennent x représente l'intégrale $\int dr e^{-r^2}$, prise de $r = 0$ à $r = \frac{1}{0}$, et par conséquent équivaut à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Donc v est nulle, ce qui a lieu en effet dans l'état initial.

3° Différents points du solide placés à des profondeurs différentes x_1, x_2, x_3, etc. parviennent à une même température après des temps différents t_1, t_2, t_3, etc., qui sont proportionnels aux quarrés des longueurs x_1, x_2, x_3, etc.

4° Pour comparer les quantités de chaleur qui traversent pendant un instant infiniment petit une section S, placée dans l'intérieur du solide, à la distance x du plan échauffé, on prendra la valeur de la quantité $-KS\frac{dv}{dx}$, et l'on aura

$$KS\frac{dv}{dx} = \frac{K}{\sqrt{\pi}\cdot 2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right)^2 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right)^4\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right)^6 + \text{etc.}\right] = \frac{S}{2}\cdot\frac{\sqrt{CD}\cdot\sqrt{K}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{t}}\,e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{Kt}{CD}}}\right)^2};$$

ainsi l'expression de la quantité $\frac{dv}{dt}$ est entièrement dégagée du signe intégral. La valeur précédente, à la surface du solide échauffé, est

$$\frac{1}{2}S\frac{\sqrt{CD}\cdot\sqrt{K}}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{t}},$$

ce qui fait connaître comment le flux de chaleur à la surface varie avec les quantités C, K et t. Pour trouver la quantité de chaleur que le foyer fournit au solide pendant un temps écoulé t, on prendra l'intégrale

$$\int \frac{1}{2}S\frac{\sqrt{CD}\cdot\sqrt{K}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t}},$$

ou

$$S\frac{\sqrt{CD}\cdot\sqrt{K}\cdot\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

Ainsi la chaleur acquise croît proportionnellement à la racine quarrée du temps écoulé.

76. On peut traiter par une analyse semblable la question

de la diffusion de la chaleur, qui dépend aussi de l'intégration de l'équation

$$\frac{dv}{dt} = K\frac{d^2v}{dx^2} - hv.$$

On représentera par $f(x)$ la température initiale d'un point de la ligne, placé à la distance x de l'origine ; et l'on cherchera à déterminer quelle doit être la température de ce même point après un temps t. Faisant $v = e^{-ht}z$, on aura

$$\frac{dz}{dt} = K\frac{d^2z}{dx^2},$$

et par consequent

$$z = \int dq\, e^{-q^2} \varphi(x + 2q\sqrt{Kt}).$$

Lorsque $t = 0$ on doit avoir

$$v = fx = \int dq\, e^{-q^2} \varphi x,$$

ou

$$\varphi x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} fx;$$

donc

$$v = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{Kt})$$

77. Pour appliquer cette expression générale au cas où une partie de la ligne, depuis $x = -\alpha$ jusqu'à $x = \alpha$, est uniformément échauffée, tout le reste du solide étant à la température 0 ; il faut considérer que le facteur $f(x + 2q\sqrt{Kt})$ qui multiplie e^{-q^2}, a, selon l'hypothèse, une valeur constante 1 lorsque la quantité qui est sous le signe de la fonction est comprise entre $-\alpha$ et α, et que toutes les autres valeurs de

ce facteur sont nulles; donc l'intégrale $\int dq\, e^{-q^2}$ doit être prise depuis $x + 2q\sqrt{Kt} = -\alpha$ jusqu'à $x + 2q\sqrt{Kt} = \alpha$, ou de

$$q = \frac{-x - \alpha}{2\sqrt{Kt}} \quad \text{à} \quad q = \frac{-x + \alpha}{2\sqrt{Kt}}.$$

En désignant comme ci-dessus par $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\psi(R)$ l'intégrale

$$\int dr\, e^{-r^2}$$

prise de $r = R$ à $r = \frac{1}{0}$, on aura

$$v = e^{-ht}\left[\psi\left(\frac{-x-\alpha}{2\sqrt{Kt}}\right) - \psi\left(\frac{-x+\alpha}{2\sqrt{Kt}}\right)\right].$$

78. Nous appliquerons encore l'équation générale

$$v = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{Kt})$$

au cas où la barre infinie, échauffée par un foyer d'une intensité constante 1, est parvenue à des températures fixes, et se refroidit ensuite librement dans un milieu entretenu à la température 0. Pour cela il suffit de remarquer que la fonction initiale, désignée par $f(r)$, équivaut à

$$e^{-r\sqrt{\frac{h}{K}}},$$

tant que la variable r, qui est sous le signe de fonction, surpasse l'unité; et que cette même fonction équivaut à

$$e^{+r\sqrt{\frac{h}{K}}}$$

lorsque la variable qui est affectée du signe $\int$ est au-dessous de o. Donc

$$v = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}}\left(\int dq\, e^{-q^2} . e^{-x\sqrt{\frac{h}{K}}} . e^{-2q\sqrt{ht}}\right.$$
$$\left. + \int dq\, e^{-q^2} . e^{x\sqrt{\frac{h}{K}}} . e^{2q\sqrt{ht}}\right).$$

La première intégrale doit être prise depuis

$$x + 2q\sqrt{Kt} = 0 \text{ jusqu'à } x + 2q\sqrt{Kt} = \frac{1}{0},$$

et la seconde depuis

$$x + 2q\sqrt{Kt} = 0 \text{ jusqu'à } x + 2\sqrt{Kt} = -\frac{1}{0}.$$

La première partie de la valeur de v est

$$\frac{e^{-ht - x\sqrt{\frac{h}{K}}}}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-(q^2 + 2q\sqrt{ht})},$$

ou

$$\frac{e^{-x\sqrt{\frac{h}{K}}}}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-(q + \sqrt{ht})^2},$$

ou

$$\frac{e^{-x\sqrt{\frac{h}{K}}}}{\sqrt{\pi}} \int dr\, e^{-r^2},$$

en faisant $r = q + \sqrt{ht}$. L'intégrale doit être prise de

$$q = -\frac{x}{2\sqrt{Kt}} \text{ à } q = \frac{1}{0},$$

ou de

$$r = \sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{Kt}} \text{ à } r = \frac{1}{0}.$$

La seconde partie de la valeur de v est

$$\frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{x\sqrt{\frac{h}{K}}} \int dq\, e^{-q^2} \cdot e^{-2q\sqrt{ht}},$$

ou

$$e^{x\sqrt{\frac{h}{K}}} \int dq\, e^{-(q+\sqrt{ht})^2},$$

ou

$$e^{x\sqrt{\frac{h}{K}}} \int dr\, e^{-r^2},$$

en faisant $r = q + \sqrt{ht}$. L'intégrale doit être prise de

$$q = \frac{-x}{2\sqrt{Kt}} \text{ à } q = \frac{1}{0},$$

ou de

$$r = -\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{Kt}} \text{ à } r = -\frac{1}{0},$$

ou de

$$r = \sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{Kt}} \text{ à } r = \frac{1}{0}.$$

On en conclut l'expression suivante :

$$v = e^{-x\sqrt{\frac{h}{K}}} \psi\left(\sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) + e^{x\sqrt{\frac{h}{K}}} \psi\left(\sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right).$$

On a obtenu (page 517, art. 77) l'équation

$$v = e^{-ht}\left[\psi\left(\frac{-x-\alpha}{2\sqrt{Kt}}\right) - \psi\left(\frac{-x+\alpha}{2\sqrt{Kt}}\right)\right]$$

pour exprimer la loi de la diffusion de la chaleur dans une barre peu épaisse, échauffée uniformément à son milieu entre les limites données $x = -\alpha$ et $x = \alpha$. On avait précédemment résolu la même question par une analyse différente, et l'on était parvenu, en supposant $\alpha = 1$, à l'équation

$$v = \frac{2}{\pi} e^{-ht} \int \frac{dq}{q} \cos.qx.\sin.q.e^{-q^2 K t}$$

(voy. page 490, art. 67). Pour comparer ces deux résultats on supposera dans l'un et dans l'autre $x = 0$. Désignant encore par $\varphi(\mathrm{R})$ l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dr e^{-r^2}$ prise de $r = 0$ à $r = \mathrm{R}$, on a

$$v = e^{-ht}\left[\psi\left(\frac{-\alpha}{2\sqrt{Kt}}\right) - \psi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{Kt}}\right)\right] = e^{-ht}\, 2\varphi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{Kt}}\right)$$

$$= \frac{2e^{-ht}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{P}{2\sqrt{Kt}} - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{Q}{2\sqrt{Kt}}\right)^3 + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{R}{2\sqrt{Kt}}\right)^5 - \text{etc.}\right].$$

D'un autre côté on doit avoir

$$v = \frac{2e^{-ht}}{\pi}\int\frac{dq}{q}\sin.q.e^{-q^2Kt}$$

$$= \frac{2}{\pi}e^{-ht}\int dq e^{-q^2Kt}\left(1 - \frac{q^2}{2.3} + \frac{q^4}{2.3.4.5} - \frac{q^6}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}\right).$$

Or l'intégrale $\int du e^{-u^2} u^{2m}$, prise de $u = 0$ à $u = \frac{1}{0}$, a une valeur connue : m étant un nombre entier positif on a en général

$$\int du e^{-u^2} u^{2m} = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^{m+1}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\frac{2m-1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

L'équation précédente donne donc, en faisant $q^2Kt = u^2$,

$$v=\frac{2e^{-ht}}{\pi\sqrt{Kt}}\int du\, e^{-u^2}\left(1-\frac{u^2}{2.3}\cdot\frac{1}{Kt}+\frac{u^4}{2.3.4.5}\cdot\frac{1}{K^2t^2}-\frac{u^6}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{K^3t^3}+\text{etc.}\right)$$

$$=\frac{2e^{-ht}}{\pi\sqrt{Kt}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Kt}\right)+\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1.3}{2.2}\left(\frac{1}{Kt}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1.3.5}{2.2.2}\left(\frac{1}{Kt}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

ou

$$v=\frac{2e^{-ht}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2\sqrt{Kt}}-\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{Kt}}\right)^3+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{Kt}}\right)^5\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2\sqrt{Kt}}\right)^7+\text{etc.}\right]$$

Cette équation est la même que la précédente lorsqu'on suppose $\alpha=1$. On voit par là que ces intégrales, que l'on a obtenues par deux analyses très-différentes, conduisent aux mêmes séries convergentes. On parvient aussi à deux résultats identiques dans le cas général, quelle que soit la valeur de x.

79. On pourrait dans cette question, comme dans les précédentes, comparer les quantités de chaleur qui dans un instant donné traversent différentes sections du prisme échauffé; et l'expression générale de ces quantités ne contient aucun signe d'intégration. Mais, sans s'arrêter à ces remarques, on terminera cet article par la comparaison des différentes formes que l'on a données à l'intégrale de l'équation qui représente la diffusion de la chaleur dans une ligne infinie.

Pour satisfaire à l'équation $\frac{du}{dt}=K\frac{d^2u}{dx^2}$, on peut supposer $u=e^{-x}.e^{Kt}$, et en général $u=e^{-nx}.e^{n^2Kt}$. On en déduit facilement (voir pages 506 et 507, art. 73) l'intégrale

$$u=\int dq\, e^{-q^2}\varphi(x+2q\sqrt{Kt}$$

De l'équation connue

$$\sqrt{\pi}=\int dq\, e^{-q^2},$$

l'intégrale étant prise de $q=-\frac{1}{0}$ à $q=+\frac{1}{0}$, on conclut celle-ci :

$$\sqrt{\pi}=\int dq\, e^{-(q+a)^2},$$

et par conséquent

$$e^{a^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq\, e^{-q^2}.e^{-2aq},$$

ou

$$e^{a^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dq\, e^{-q^2}\left[1-2aq+\frac{4a^2q^2}{2}-\frac{8a^3q^3}{2.3}+\text{etc.}\right].$$

Cette équation ayant lieu quelle que soit la valeur de a, on développera le premier membre, et en comparant les coëfficients des puissances de a, on obtiendra les valeurs déja connues de l'intégrale $\int dq\, e^{-q^2}.q^n$. Cette valeur est nulle lorsque n est impair; et l'on trouve, lorsque n est un nombre pair $2m$,

$$\int dq\, e^{-q^2}q^{2m}=\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}.$$

On a employé précédemment pour l'intégrale de l'équation $\frac{du}{dt}=K\frac{d^2u}{dx^2}$ l'expression

$$u=a_1e^{-n_1^2Kt}\cos n_1x+a_2e^{-n_2^2Kt}\cos.n_2x+a_3e^{-n_3^2Kt}\cos.n_3x+\text{etc.},$$

ou celle-ci:

$$u = a_1 e^{-n_1^2 Kt} \sin. n_1 x + a_2 e^{-n_2^2 Kt} \sin. n_2 x + a_3 e^{-n_3^2 Kt} \sin. n_3 x + \text{etc.};$$

a_1, a_2, a_3, etc., n_1, n_2, n_3, etc. étant deux séries de constantes arbitraires. Il est aisé de voir que chacun de ces termes équivaut à l'intégrale

$$\int dq e^{-q^2} \sin. n(x + 2q\sqrt{Kt}),$$

ou

$$\int dq e^{-q^2} \cos. n(x + 2q\sqrt{Kt}).$$

En effet pour déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int dq e^{-q^2} \sin.(x + 2q\sqrt{Kt}),$$

on lui donnera la forme suivante:

$$\int (dq e^{-q^2} \sin. x . \cos. 2q\sqrt{Kt}) + \int (dq e^{-q^2} \cos. x . \sin. 2q\sqrt{Kt}),$$

ou celle-ci:

$$\int dq e^{-q^2} \sin. x \left(\frac{1}{2} e^{2q\sqrt{-Kt}} + \frac{1}{2} e^{-2q\sqrt{-Kt}}\right)$$
$$+ \int dq e^{-q^2} \cos. x \left(\frac{1}{2\sqrt{-1}} e^{2q\sqrt{-Kt}} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} e^{-2q\sqrt{-Kt}}\right)$$

qui équivaut à

$$e^{-Kt} \sin. x \left(\frac{1}{2}\int dq e^{-(q-\sqrt{-Kt})^2} + \frac{1}{2}\int dq e^{-(q+\sqrt{-Kt})^2}\right)$$
$$+ e^{-Kt} \cos. x \left(\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int dq e^{-(q-\sqrt{-Kt})^2} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int dq e^{-(q+\sqrt{-Kt})^2}\right).$$

66

L'intégrale

$$\int dq\, e^{-(q\pm\sqrt{-Kt})^2},$$

prise de $q=-\frac{1}{0}$ à $q=\frac{1}{0}$, est $\sqrt{\pi}$. On a donc, pour la valeur de l'intégrale

$$\int dq\, e^{-q^2} \sin.(x+2q\sqrt{Kt}),$$

la quantité

$$e^{-Kt}\sin.x.\sqrt{\pi};$$

et en général

$$e^{-n^2Kt}\sin.nx.\sqrt{\pi}=\int dq\, e^{-q^2}\sin.n(x+2q\sqrt{Kt}).$$

On parviendra de la même manière à déterminer l'intégrale

$$\int dq\, e^{-q^2}\cos.(nx+2q\sqrt{Kt}),$$

dont la valeur est

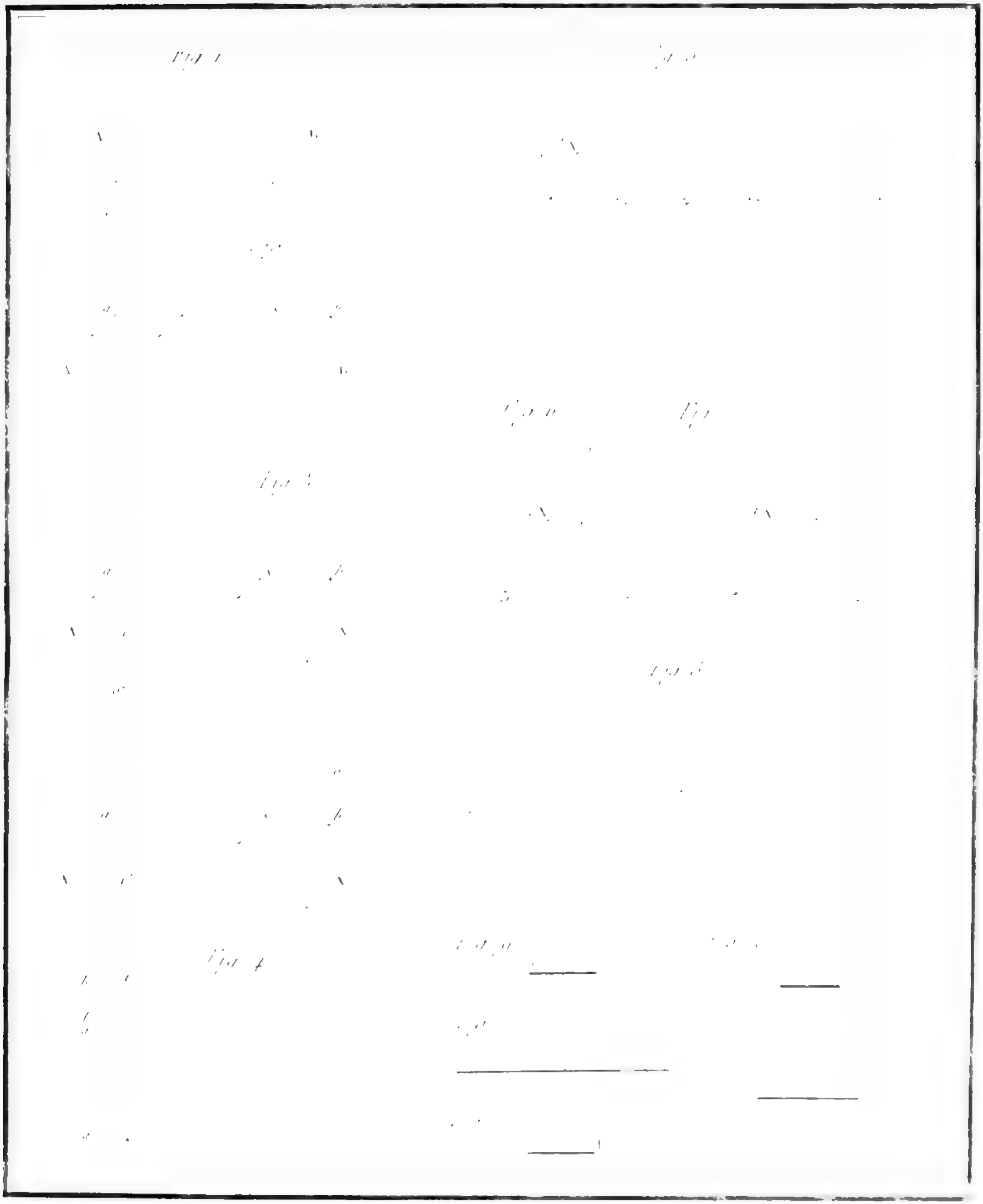
$$e^{-n^2Kt}\cos.nx.\sqrt{\pi}.$$

On voit par là que l'intégrale générale

$$e^{-n_1^2Kt}(a_1\sin.n_1x+b_1\cos.n_1x)+e^{-n_2^2Kt}(a_2\sin.n_2x+b_2\cos.n_2x)$$
$$+e^{-n_3^2Kt}(a_3\sin.n_3x+b_3\cos.n_3x)+\text{etc.}$$

équivaut à :

$$\int dq\, e^{-q^2}[a_1\sin.n_1(x+2q\sqrt{Kt})+a_2\sin.n_2(x+2q\sqrt{Kt})$$
$$+a_3\sin.n_3(x+2q\sqrt{Kt})+\text{etc.}$$
$$+b_1\cos.n_1(x+2q\sqrt{Kt})+b_2\cos.n_2(x+2q\sqrt{Kt})$$
$$+b_3\cos.n_3(x+2q\sqrt{Kt})+\text{etc.}]$$



La valeur de la série représente, comme on l'a vu précédemment, une fonction quelconque de $x + 2q\sqrt{Kt}$. Ainsi l'intégrale générale peut être mise sous cette forme

$$\int dq\, e^{-q^2} \varphi(x + 2q\sqrt{Kt}).$$

Au reste l'intégrale de l'équation

$$\frac{du}{dt} = K \frac{d^2 u}{dx^2}$$

peut être présentée sous diverses autres formes : la question suivante en offre un exemple remarquable.

TABLE

DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CE MÉMOIRE.

Numéro de l'article.	Numéro des pages.

épaisseur, les températures permanentes de ce solide seront exprimées par l'équation suivante :

7.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2h}{Kl} \cdot y.$$

Ce premier résultat est connu depuis long-temps, et il a eté confirmé par les expériences de plusieurs physiciens ; y est la température fixe du point dont la distance à l'origine est x ; K et h désignent les conducibilités intérieure et extérieure. La section perpendiculaire à l'axe est un quarré dont le côté
210. est $2l$. A est la température constante de l'extrémité.

210. On peut, en observant l'état permanent d'une barre métallique, déterminer le rapport $\frac{h}{K}$, et non les valeurs séparees de h et K.

Si deux barres de même matière et de dimensions inégales sont assujetties par leur extrémité à une température commune, les distances comprises entre l'origine et les points qui, dans chaque prisme, acquièrent la même température,
8. sont entre elles comme les racines quarrées des épaisseurs.

Si les deux barres ont des dimensions égales, et sont formées de substances différentes, et si l'état de leur surface extérieure est le même, les distances comprises entre l'origine et les points qui parviennent à une même température fixe, sont entre elles comme les racines quarrées des conducibilités spécifiques.

La quantité de chaleur que le foyer constant communique
222. à la barre échauffée pendant l'unité du temps est $4A\sqrt{2hKl^3}$.

[illegible] Équation du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans une armille.

Si l'on donne des températures initiales quelconques aux divers points d'un anneau metallique d'une petite épaisseur, et qu'ensuite ce solide se refroidisse librement dans l'air en-

Numéros des articles | Numéros des pages

tretenu à une température constante o, l'état variable de l'anneau sera exprimé par l'équation suivante :

9.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{C.D}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{hl}{C.D.S}z.$$

z est la température que doit avoir, après le temps écoulé t, un point dont la distance à un point fixe de l'anneau est x, h est la conducibilité extérieure; K, la conducibilité spécifique; C, la capacité de chaleur; D, la densité; S, la surface 225. de la section; l, le contour de cette section.

225. Si l'anneau, étant exposé par un de ses points à l'action constante d'un foyer de chaleur, est parvenu à un état fixe, et si après avoir divisé en parties égales une portion quelconque de la circonférence de l'anneau, on observe les températures 10. permanentes des points de division, on remarquera que ces quantités forment une série récurrente; en sorte que si l'on en mesure trois consécutives, la somme des deux extrêmes divisée par la moyenne donne un quotient constant qui ne 227. dépend ni de l'intensité du foyer, ni du lieu où il est placé.

227. Équation du mouvement varié de la chaleur dans une sphère solide.

Si une sphère solide, après avoir été plongée dans un milieu échauffé, se refroidit librement dans l'air entretenu à une température constante, son état variable sera exprimé par l'équation suivante :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K}{C.D}\left[\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2}{x}\cdot\frac{dz}{dx}\right].$$

11. z est la température que doit avoir, après le temps écoulé t, le point du solide dont la distance au centre est x. K, C, D désignent les mêmes quantités que dans la question précédente.

De plus la valeur de z doit satisfaire à l'équation déterminée

$$\frac{dz}{dx} + \frac{h}{K}z = o$$

231. lorsque $x = X$, rayon de la sphère.

Numéros des articles	Numéros des pages

231. Équation du mouvement varié de la chaleur dans un solide de forme cylindrique.

Si l'on plonge un cylindre solide à base circulaire d'une longueur infinie dans un milieu échauffé, et qu'on l'expose ensuite à l'air entretenu à une température constante, son état variable sera exprimé par l'équation

12.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{K}{CD}\left[\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dz}{dx}\right].$$

z est la température que doit avoir, après le temps écoulé t, la molécule solide dont la distance à l'axe du cylindre est x.

La valeur de z doit aussi satisfaire lorsque $x=X$, rayon du cylindre, à l'équation déterminée

$$\frac{h}{K}z+\frac{dz}{dx}=0.$$

234.

234 Équation du mouvement constant de la chaleur dans un prisme.

Les températures permanentes d'une barre prismatique, d'une épaisseur quelconque et d'une longueur infinie, sont exprimées par l'équation suivante :

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0.$$

13.

v est la température fixe d'un point dont les coordonnées sont x, y, z; de plus la valeur de v à la surface du solide doit satisfaire aux deux équations déterminées :

$$\frac{dv}{dy}+\frac{h}{K}v=0$$

et

$$\frac{dv}{dz}+\frac{h}{K}v=0.$$

238.

239. Équation du mouvement varié de la chaleur dans un cube solide.

Si l'on donne des températures initiales quelconques aux

Sections	Numéros des articles

IV. *De la propagation de la chaleur dans une lame rectangulaire dont les températures sont constantes.*

Numéros des articles	Numéros des pages

21. $$\frac{1}{4}\pi z = e^{-\frac{1}{2}\pi x}\cos.\left(\frac{1}{2}\pi y\right) - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\pi x}\cos.\left(\frac{3}{2}\pi y\right) + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{2}\pi x}.\cos.\left(\frac{5}{2}\pi y\right) - \frac{1}{7}e^{-\frac{7}{2}\pi x}\cos.\left(\frac{7}{2}\pi y\right) + \text{etc.}$$

z est la température fixe du point de la barre dont les coordonnées sont x et y. 281.

281. Développement d'une fonction arbitraire φx en série de sinus d'arcs multiples.

Dans l'équation

$$\varphi x = a\sin.x + b\sin.2x + c\sin.3x + d\sin.4x + \text{etc.},$$

on détermine les coefficiens a, b, c, d, etc., en éliminant les inconnues dans un nombre infini d'équations du premier degré.

On obtient ainsi l'équation :

22. $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\pi\varphi x = \varphi\pi & \left[\sin.x - \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{3}\sin.3x - \frac{1}{4}\sin.4x + \text{etc.}\right] \\ - \varphi''\pi & \left[\frac{1}{1^3}\sin.x - \frac{1}{2^3}\sin.2x + \frac{1}{3^3}\sin.3x - \frac{1}{4^3}\sin.4x + \text{etc.}\right] \\ + \varphi^{\text{IV}}\pi & \left[\frac{1}{1^5}\sin.x - \frac{1}{2^5}\sin.2x + \frac{1}{3^5}\sin.3x - \frac{1}{4^5}\sin.4x + \text{etc.}\right] \\ - \varphi^{\text{VI}}\pi & \left[\frac{1}{1^7}\sin.x - \frac{1}{2^7}\sin.2x + \frac{1}{3^7}\sin.3x - \frac{1}{4^7}\sin.4x + \text{etc.}\right] \\ + \text{etc.} &\end{aligned}$$

Par exemple le développement de la fonction $e^x - e^{-x}$ donne la série :

$$e^x - e^{-x} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{\sin.x}{1+\frac{1}{1}} - \frac{\sin.2x}{2+\frac{1}{2}} + \frac{\sin.3x}{3+\frac{1}{3}} - \frac{\sin.4x}{4+\frac{1}{4}} + \text{etc.}\right)$$ 299.

299. On peut donner à l'équation générale de l'article 22 la forme suivante :

23. $$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \sin.x\int(dx\,\varphi x\sin.x) + \sin.2x\int(dx\,\varphi x\sin.2x) + \sin.3x\int(dx\,\varphi x\sin.3x) + \text{etc.}$$

Nos des articles	Nos des pages

$$\frac{1}{2}v = e^{-\frac{1}{2}\pi x}\cos.\left(\frac{1}{2}\pi y\right)\int\left[dy\cos.\left(\frac{1}{2}\pi y\right)\varphi y\right]$$

30.

$$+e^{-\frac{3}{2}\pi x}\cos.\left(\frac{3}{2}\pi y\right)\int\left[dy\cos.\left(\frac{3}{2}\pi y\right)\varphi y\right]$$

$$+e^{-\frac{5}{2}\pi x}\cos.\left(\frac{5}{2}\pi y\right)\int\left[dy\cos.\left(\frac{5}{2}\pi y\right)\varphi y\right]$$

$$+\text{etc.}$$

v est la temperature fixe du point dont les coordonnées sont x, y; la fonction φy exprime les valeurs données de la température à l'extrémité de la lame où $x=0$: les intégrales $\int$ sont prises depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$. La fonction $\varphi(y)$ est
300. supposée telle que l'on a $\varphi(y)=\varphi(-y)$.

V. *Du mouvement linéaire et varié de la chaleur dans une armille.*

320. Le développement d'une fonction arbitraire en une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples est donné par l'equation génerale :

31.

$$\pi\varphi x=\frac{1}{2}\mathrm{S}(\varphi x\,dx)+\sin.1x\,\mathrm{S}(dx\sin.1x.\varphi x)$$
$$+\sin.2x\,\mathrm{S}(dx\sin.2x.\varphi x)+\text{etc.}$$
$$+\cos.1x\,\mathrm{S}(dx\cos.1x.\varphi x)$$
$$+\cos.2x\,\mathrm{S}(dx\cos.2x.\varphi x)+\text{etc.}$$

328.

328. La question du mouvement de la chaleur dans une armille est resolue par l'equation suivante :

Numéros des articles	Numéros des pages

451 La question du mouvement de la chaleur dans le cylindre solide est résolue par l'équation suivante:

$$\frac{\pi R^2}{2} = \sum \frac{\int dx . x \varphi x . u_i}{U_i^2\left(1 + \frac{h^2 R^2}{K^2 \theta_i}\right)} u_i e^{-2^2 \frac{K t}{R^2} \theta_i}.$$

Il faut donner à i ses valeurs successives, 1, 2, 3, 4, 5, ... i, etc. $\int$ doit être prise de $x=0$ à $x=R$. La fonction u_i est égale à

$$\frac{1}{\pi}\int\left[dq \cos.\left(\frac{2x}{R}\sqrt{\theta_i}\sin.q\right)\right],$$

56. l'intégrale étant prise de $q=0$ à $q=\pi$. Les différents nombres θ_1, θ_2, θ_3, etc. sont les racines de l'équation en θ, rapportée dans l'article précédent. La fonction U_i est la valeur de u_i, prise lorsque $x=R$; enfin la fonction φx exprime l'état initial et arbitraire du solide.

L'état variable du solide est, comme celui de la sphère, composé d'une multitude d'états simples, pour chacun desquels les températures peuvent décroître ensemble, en conservant leurs rapports actuels. La chaleur tend de plus en plus à se distribuer suivant une loi constante, qui ne dépend point de l'échauffement initial. Dans ce dernier état la durée du refroidissement est pour différents cylindres d'un petit diamètre, proportionnelle à cette dimension, et pour ceux qui ont un grand diamètre, elle est proportionnelle au quarré de

457. cette dimension.

IX. *De la propagation de la chaleur dans un prisme dont l'extrémité est assujettie à une température constante.*

458. La question du mouvement constant de la chaleur dans le prisme est résolue par l'équation suivante:

Numéros des articles	Numéros des pages

X. Du mouvement varié de la chaleur dans un solide de forme cubique.

473\. x, y, z étant les coordonnées d'un point du solide dont la température est v après le temps écoulé t, v est une fonction de x, y, z et t: cette fonction est donnée par l'équation

$$\frac{v}{4\cdot4\cdot4}=S\frac{\sin.(n_i a)\cos.(n_i x)e^{-Kn_i^2 t}}{2n_i a+\sin.(2n_i a)}$$

$$S\frac{\sin.(n_i a)\cos.(n_i y)e^{-Kn_i^2 t}}{2n_i a+\sin.(2n_i a)}$$

$$S\frac{\sin.(n_i a)\cos.(n_i z)e^{-Kn_i^2 t}}{2n_i a+\sin.(2n_i a)}$$

Il faut développer chacun des signes S en mettant pour i les valeurs successives 1, 2, 3, 4, ... i, etc.; a est le demi-côté du cube; n_i equivaut à $\frac{\varepsilon_i}{a}$, et le nombre ε_i est une racine quelconque de l'équation

$$\varepsilon\,\text{tang.}\,\varepsilon=\frac{h}{K}a$$

La valeur de v est le produit de trois fonctions semblables:
479\. l'une de x, la seconde de y, et la troisième de z.

479\. Le système des températures se rapproche de plus en plus d'un état principal, dans lequel toutes les températures dé-
480\. croissent à la fois sans changer leurs rapports actuels.

483\. La valeur variable de la température moyenne V est exprimée par l'équation:

Numéros de l'article.	Numéros des pages

point situé à la distance x; v est la température variable de ce même point. On suppose que la fonction φx, qui est d'ailleurs arbitraire, soit telle que l'on ait la relation $\varphi(x) = \varphi(-x)$. h mesure la conducibilité de la surface, et K la conducibilité intérieure. La quantité v, qui est fonction de x et de t, est donnée par l'équation :

$$\frac{\pi v}{2} = e^{-ht} \int \left[dq \cos. qx . e^{-Kq^2 t} . \int (dx \varphi x \cos. qx) \right].$$

L'intégrale $\int$, par rapport à x, doit être prise depuis $x = 0$

66. jusqu'à $x = \frac{1}{0}$; et l'on doit prendre ensuite l'intégrale $\int$, par rapport à q, de $q = 0$ à $q = \frac{1}{0}$. Cette solution est fondée sur le théorème suivant : pour trouver une fonction fq, telle que l'intégrale

$$\int [dq . fq . \cos. (qx)]$$

prise de $q = 0$ à $q = \frac{1}{0}$, soit une fonction donnée $\varphi(x)$, il faut employer l'équation

$$fq = \frac{2}{\pi} \int [dx \varphi x \cos. (qx)],$$

qui dérive de celle-ci :

$$\varphi x = \int [dq fq . \cos. (qx)].$$

Les intégrales sont prises dans la première de $x = 0$ à $x = \frac{1}{0}$,

490. et dans la seconde de $q = 0$ à $q = \frac{1}{0}$.

490. En appliquant cette solution au cas où tous les points de

496. Les séries qui donnent le développement des différentes fonctions en sinus ou cosinus d'arcs multiples peuvent être facilement transformées en intégrales définies, chaque terme de la série devenant une quantité infiniment petite.

On trouve ainsi que la valeur de l'intégrale

70.

$$\int \frac{dq}{q} \sin.(qx),$$

prise de $q=0$ à $q=\frac{1}{0}$, est toujours $\frac{1}{2}\pi$, quelle que soit la

498 valeur positive de x.

499 L'intégrale

$$\frac{2}{\pi}\int\left[\frac{dq.\sin.(q\pi)\sin.(qx)}{1-q}\right],$$

prise de $q=0$ à $q=\frac{1}{0}$, équivaut à sin. x si l'on donne à x une valeur comprise entre 0 et π, et cette même intégrale est nulle si x surpasse π.

En général pour trouver une fonction fq, telle que l'intégrale

$$\int\left[dq fq.\sin.(qx)\right],$$

prise de $q=0$ à $q=\frac{1}{0}$, soit une fonction donnée φx, il faut employer l'équation

$$fq=\frac{2}{\pi}\int\left[dx\varphi(x)\sin.(qx)\right],$$

71 qui dérive de celle-ci :

$$\varphi x=\int\left[dq fq \sin. qx\right].$$

L'intégrale est prise dans la première de $x=0$ à $x=\frac{1}{0}$, et dans

Numéros de l'article	Numéros des pages

la seconde de $q=0$ à $q=\frac{1}{0}$. On en conclut, comme un cas particulier, que le produit des deux intégrales

$$\int(dx.\sin.x.x^{m}) \quad \text{et} \quad \int\left(\frac{dx\sin.x}{x.x^{m}}\right)$$

équivaut au nombre π. Par exemple si $m=-\frac{1}{2}$, on a pour

$$\int\left(\frac{dx\sin.x}{\sqrt{x}}\right)$$

sa valeur connue

503. $$\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$$

503. De la propagation de la chaleur dans un prisme d'une longueur infinie.

On suppose qu'un prisme de peu d'épaisseur et d'une longueur infinie est assujetti par son extrémité à une température
72. constante, et l'on détermine la loi suivant laquelle l'état du solide varie continuellement, en s'approchant de plus en plus de celui qui convient aux températures permanentes.

On pourrait ramener cette question à celle de la diffusion
506. de la chaleur.

506. L'état variable du solide est représenté par l'équation suivante :

$$v = ae^{-x\sqrt{\frac{h}{K}}} + \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}}\int dq\, e^{-q^2} f(x+2q\sqrt{Kt}).$$

L'intégrale doit être prise de $q=-\frac{1}{0}$ à $q=+\frac{1}{0}$; a est la tem-
73. pérature fixe de l'extrémité, en sorte que $ae^{-x\sqrt{\frac{h}{K}}}$ exprime l'état final du prisme; la fonction f est telle que fx représente

Numéros de l'article.	Numéros des pages.

516. Si tous les points de la partie échauffée depuis $x = -\alpha$ jusqu'à $x = +\alpha$ ont une température commune 1, on aura

$$v = \frac{e^{-ht}}{\sqrt{\pi}} \int dq\, e^{-q^2}.$$

77.

L'intégrale doit être prise depuis

$$q = \frac{-x-\alpha}{2\sqrt{Kt}} \quad \text{jusqu'à} \quad q = \frac{-x+\alpha}{2\sqrt{Kt}}.$$

517.

517. Si le prisme infini, ayant été échauffé en un des points intermédiaires, est parvenu à des températures fixes, et qu'ensuite il se refroidisse librement, on trouve

$$v = \frac{e^{-x\sqrt{\frac{h}{K}}}}{\sqrt{\pi}} \int_1 dq\, e^{-q^2} + \frac{e^{x\sqrt{\frac{h}{K}}}}{\sqrt{\pi}} \int_2 dq\, e^{-q^2}.$$

78. La première intégrale est prise de

$$q = \sqrt{ht} - \frac{x}{2\sqrt{Kt}} \quad \text{à} \quad q = \frac{1}{0}.$$

et la deuxième de

521. $$q = \sqrt{ht} + \frac{x}{2\sqrt{Kt}} \quad \text{à} \quad q = \frac{1}{0}.$$

521. Les solutions précédentes, qui ne renferment que la transcendante connue

$$\int dq\, e^{-q^2},$$

conduisent à des séries convergentes, et l'on trouve les mêmes résultats en développant les solutions que fournit la transformation des séries en intégrales définies.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU MÉMOIRE.

Nota. La suite de cette table se trouve à la fin de la seconde partie du Mémoire, qui est imprimée dans le volume suivant. Cette seconde partie a principalement pour objet la question des températures terrestres et la théorie de la chaleur rayonnante.

FAUTES A CORRIGER

RECONNUES DANS LE COURS DE L'IMPRESSION

PAGE 224, ligne 13; temperature l; *lisez*, température 1.

272 — 14: $-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$, *lisez*, $+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$.

273 — 18: *au lieu de cette ligne, lisez*,

$$v=\frac{1}{2}x-\int\frac{\cos.\left(m+\frac{1}{2}\right)x.dx}{2\cos.\frac{1}{2}x}=C+\frac{1}{2}x+\frac{1}{m+\frac{1}{2}}\,\frac{\sin.\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2\cos.\frac{1}{2}x}+\text{etc}$$

307 — 1: *mettez au commencement le n° 26.*

326 — 9: des, *lisez*, les.

347 — 1, 5 et 6, à compter d'en bas: $\frac{1}{m}$, *lisez*, $\frac{K}{m}$.

348 — 2: $\frac{1}{m}$, *lisez*, $\frac{K}{m}$.

351 — 1, 3, 4 et 5, à compter d'en bas: *effacez* $=0$.

367 — 13: *avant* $\frac{2K}{m}$ *mettez le signe* —.

400 — 7: *Mettez au commencement le n° 44.*

409 — 17: $S[\sin.(n,x)Fxdx]$, *lisez*, $S[x\sin.(n,x)Fxdx]$.

idem. — 18: $S[\sin.(n,x)Fxdx]$, *lisez*, $S[x\sin.(n,x)Fxdx]$.

414 — dernière: H, *lisez*, h.

415 — 2, à compter d'en bas: H, *lisez*, h.

431 — 15, au denominateur: $\frac{\theta}{2}$, *lisez*, $\frac{\theta^2}{2^2}$.

432 — 8: $\theta\frac{d^2y}{d^2\theta}$, *lisez*, $\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}$.

437 — 10: *à la fin de cette ligne ajoutez:* Le coefficient de ω^2 est

$$2\left(\frac{\alpha^2}{2.4}-\frac{\alpha^4}{2^2.4.6}+\frac{\alpha^6}{2^2.4^2.6.8}-\frac{\alpha^8}{2^2.4^2.6^2.8.10}+\text{etc.}\right).$$

451 — 1 et 3, à compter d'en bas: $\frac{hR}{2K}$, *lisez*, $\frac{hR}{K}$.

452 — dernière: $\frac{h}{2K}\psi$, *lisez*, $\frac{h}{K}\psi$.

456 — 22: *effacez* 2^2 au-devant de K, dans le denominateur.