MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

TOME X

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

QUAI DES AUGUSTINS, 55

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME X.

DE L'IMPRIMERIE DE AMB. FIRMIN DIDOT,
IMPRIMEUR DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME X.

PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT FRÈRES, LIBRAIRES,

RUE JACOB, N° 24.

1831.

ABLE

DES MÉMOIRESONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le dixième *de collection des Mémoires de l'Académie des Sciences, de l'ordonnance de* 21 *mars* 1816.

Pages

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

Analyse des travaux de l'Académie royaleles sciences, pendant l'année 1827.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année 1827.

PARTIE PHYSIQUE,

ERRATA.

Nouvel essai sur la trigonométrie sphéroidique.

Pages 469, ligne 3, qu'il faudra, *lisez :* qu'il faudrait.
492, lig. 9, qui donneront, *lisez :* qui donnerait.
497, lig. 5, plus, *lisez :* puis.
522, lig. 2, en remontant, venons faire, *lisez :* venons de faire.
535, lig. 12 et 13, somme, *lisez* : moyenne.
539, lig. 2, en remontant, attendu, *lisez :* entendu.
543, lig. 13, en remontant, on les diminuerait, *lisez :* on diminuerait ces bases.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1827.

PARTIE MATHÉMATIQUE.

PAR M. LE BARON FOURIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

GÉOMÉTRIE.

Supplément au cinquième volume du Traité de la Mécanique céleste de M. de Laplace.

CE Mémoire a été publié sur un manuscrit trouvé dans les papiers de l'illustre auteur. M. le marquis de Laplace, son fils, a bien voulu l'offrir à l'Académie.

La première partie concerne le développement en série du radical qui exprime la distance mutuelle de deux planètes.

Une seconde partie du Mémoire a pour objet le développement des coordonnées elliptiques. Dans les derniers articles, l'auteur considère le flux et reflux lunaire atmosphérique. M. de Laplace avait traité précédemment ces questions; il reproduit et perfectionne dans ce dernier écrit l'analyse dont il s'était servi. Les géomètres y trouveront des applications singulièrement ingénieuses et utiles de la méthode qu'il a inventée autrefois pour exprimer en intégrale définie le terme général de chaque développement, et pour découvrir la valeur de cette expression lorsque le nombre des termes est devenu très-grand. On reconnaît ainsi les cas où les séries cessent d'être convergentes.

Cet emploi de l'analyse des fonctions, où il entre de très-grands nombres, nous paraît offrir une des conceptions mathématiques les plus heureuses et les plus fécondes dont on est redevable à ce grand géomètre. La partie de ce Mémoire où il soumet à la théorie des probabilités la question du flux et reflux lunaire, excitera au plus haut degré l'attention de tous les géomètres qui ont cultivé cette branche si importante du calcul : elle donne lieu de prévoir les avantages immenses que doit procurer l'analyse mathématique à la philosophie naturelle.

Mémoires d'analyse lus par M. Cauchy.

M. Cauchy a présenté, dans le cours de cette année, des Mémoires d'analyse dans lesquels il traite les questions les plus importantes et les plus variées. La nature de ces recherches ne nous permettrait pas d'en faire connaître distinctement l'objet sans l'emploi des expressions et des signes propres à la science du calcul; nous donnerons seulement l'énumération et les titres exacts de ces savants Mémoires :

Extrait d'un Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique.

Développement du Mémoire précédent.

Sur le choc des corps élastiques.

Sur la pression ou tension dans les corps solides (Extrait de la première partie d'un Mémoire sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques et non élastiques.)

Sur la transformation des fonctions en intégrales doubles, et sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles.

De la différentiation sous le signe $\int$.

Sur la détermination du reste de la série de Lagrange par une intégrale définie. Dans un autre Mémoire, l'auteur fixe les règles de convergence de la série de Lagrange et d'autres séries du même genre, et il prouve que cette convergence dépend, dans tous les cas, de la résolution d'une équation transcendante : cette équation comprend celle qui a été obtenue par M. de Laplace dans la théorie du mouvement elliptique.

Second Mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique.

Sur la transformation des fonctions qui représentent les intégrales générales des équations différentielles linéaires.

M. Cauchy annonce qu'il s'est occupé depuis long-temps de l'équilibre et du mouvement intérieur d'un corps solide, considéré comme un système de molécules distinctes les unes des autres, et qu'il est parvenu à des équations dans lesquelles les composantes des forces exercées sur chaque molécule ne se réduisent pas généralement à des intégrales. Il a présenté le manuscrit où se trouvent consignées les recherches qu'il a faites à ce sujet.

Sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus.

Sur le développement des fonctions en fractions rationnelles.

Usage du calcul des résidus pour la sommation ou la transformation des séries dont le terme général est une fonction paire du nombre qui représente le rang de ce terme.

Mémoire sur le mouvement de rotation de la terre.

M. Poisson a lu un *Mémoire sur le mouvement de rotation de la terre.*

Ce mémoire a pour objet de faire disparaître la différence des solutions que l'on a données des deux problèmes de la translation et de la rotation des corps célestes; l'auteur expose le but et le plan de son travail dans le passage suivant:

Si l'on excepte une inégalité à longue période qui paraît affecter la longitude moyenne de la lune, mais dont l'existence n'est pas encore bien constatée, toutes les circonstances du mouvement des astres et de la terre que les observations ont fait connaître, les géomètres, et particulièrement l'auteur de la Mécanique céleste, en ont déterminé les lois et la cause d'après le principe de la gravitation universelle. Il ne reste guère maintenant qu'à simplifier les méthodes qu'ils ont employées; et c'est, en effet, les rendre plus simples et les perfectionner, que de les ramener autant qu'il est possible à l'uniformité. Dans le cas du mouvement des planètes autour du soleil, la petitesse des excentricités et des inclinaisons de leurs orbites permet de développer la fonction perturbatrice en une série de sinus des multiples de leurs moyens mouvements. Or, on peut donner une forme semblable à cette fonction relative au mouvement de rotation de la terre, en observant que la terre tourne à très-peu près autour d'un de ses axes principaux, et considérant l'amplitude des oscillations des pôles de rotation à sa surface comme une très-petite constante arbitraire dont on aura à déterminer les variations dues aux forces perturbatrices. Cela étant, si l'on compare les six éléments arbitraires du mouvement de la terre autour de son centre de gravité aux six éléments du mouvement elliptique, on aura d'une part cette amplitude et la longitude géographique de l'axe de rotation à une époque déterminée, qui répondront à l'excentricité de l'orbite et à la longitude du périhélie; ensuite l'inclinaison de l'équateur et la longitude de son nœud sur l'écliptique, quantités analogues à l'inclinaison et à la longitude du nœud de l'orbite; enfin la vitesse angulaire de rotation et la longitude géographique à l'origine du temps, d'une droite tracée dans le plan de l'équateur, qui remplaceront le moyen mouvement ou le grand axe dont il se déduit, et ce qu'on appelle dans la théorie des planètes la longitude moyenne de l'époque. C'est sous ce point de vue que l'auteur envisage la question qui est l'objet de ses nouvelles recherches.

Mémoire sur la figure de la terre.

M. Biot donne, dans ce Mémoire, les résultats des mesures du pendule qu'il a faites en 1824 et 1825, avec son fils, sur l'arc de parallèle qui s'étend de Bordeaux à Fiume en Istrie, et sur la portion australe du grand arc de méridien qui, partant des îles Shetland, traverse l'Écosse, l'Angleterre, la France, passe sur une partie de l'Espagne, et se termine entre l'Europe et l'Afrique dans la petite île de Formentera. L'auteur a réuni ces observations à celles qu'il avait précédemment faites sur les autres portions des mêmes arcs, soit seul, soit avec MM. Mathieu et Bouvard. Ces expériences, toutes exécutées par la même méthode et parfaitement comparables entre elles, étant ainsi rassemblées, M. Biot cherche les rapports qu'elles indiquent entre les intensités de la pesanteur sur les divers arcs qu'elles embrassent; et il arrive à des conséquences bien différentes de celles auxquelles on paraissait s'être arrêté jusqu'alors. En effet, les observateurs qui ont fait jusqu'ici des mesures du pendule, et qui les ont appliquées à la détermination de la figure de la terre, ont considéré cette figure comme un ellipsoïde dont l'aplatissement pouvait être calculé d'après les relations mathématiques établies par la théorie de la gravitation universelle; mais l'auteur remarque que ces relations ne se déduisent de la théorie que dans certaines suppositions sur la constitution intérieure du sphéroïde terrestre, suppositions dont la réalité ne peut être aucunement démontrée d'avance, mais doit être conclue des lois effectives que la pesanteur suit sur les diverses portions du sphéroïde. Il s'attache donc d'abord à discuter ces lois mêmes, d'après les mesures qu'il a rassemblées; et il montre qu'elles sont loin d'offrir la forme qu'on leur attribuait, qui était d'être proportionnelles au carré du sinus de la latitude. Car, en admettant ce mode de variation entre des points très-voisins du globe, comme le permet l'ensemble des expériences, si l'on établit les deux coefficients qui lui sont propres, d'après les observations successives depuis Unst jusqu'à Formentera, ces deux coefficients, au lieu d'être constants, comme ils devraient l'être dans les hypothèses physiques qui donneraient la terre elliptique, se montrent au contraire graduellement variables, d'une station à la suivante, sur toute cette étendue, et avec une intensité qui ne permet pas d'attribuer ce phénomène aux erreurs maintenant si petites des observations. M. Biot répète la même épreuve sur un autre méridien d'Europe, celui qui, partant du Spitzberg, passe à Drontheim en Norwège, puis à Padoue, et se termine à Lipari dans les îles Éoliennes. Il y trouve un mode de variation de la pesanteur analogue à celui de Formentera et d'Unst, quoique avec des intensités absolues sensiblement différentes aux mêmes latitudes. Ces comparaisons le conduisent à conclure que l'accroissement de la pesanteur, en allant de l'équateur vers le pôle, n'est pas, du moins à l'occident de l'Europe, tel que l'exigerait une figure elliptique résultante des conditions de constitution intérieure employées jusqu'à présent par la théorie. En discutant de même les mesures du pendule faites sur le parallèle de Bordeaux à Fiume et réduites par le calcul à une même latitude géographique, il y trouve aussi des inégalités incompatibles avec une figure elliptique de révolution; et il montre qu'une cause physique, très-étendue et très-puissante, y rend généralement la pesanteur plus forte à l'orient des Alpes qu'à l'occident. Partant de ces rapports uniquement donnés par l'expérience, M. Biot conclut, des observations faites à de hautes latitudes, la longueur du pendule telle qu'on l'observerait au pôle même. Il calcule pareillement la longueur du pendule équatorial, d'après les nombreuses expériences faites dans ces derniers temps sur le contour de l'équateur terrestre; et il place entre ces longueurs la valeur moyenne qu'il a trouvée lui-même, avec son fils, entre Bordeaux et Fiume, sur le parallèle de 45°. Ces trois résultats, qui devraient être équidistants dans l'hypothèse elliptique, se trouvent bien loin de l'être en réalité; et ils offrent ainsi une confirmation nouvelle autant qu'indépendante des conclusions obtenues d'abord par les seules observations d'Europe. Leurs inégalités expliquent pourquoi les divers observateurs qui calculaient leurs expériences du pendule dans l'hypothèse elliptique, trouvaient généralement d'inégales valeurs pour l'aplatissement du globe, selon l'élévation plus ou moins grande des latitudes qui dominaient dans leurs stations. L'auteur retrouve en effet par ses trois coefficients, selon qu'il les combine, toutes les diverses valeurs ainsi obtenues. De là il conclut que les rapports de la pesanteur avec la figure de la terre sont beaucoup moins simples qu'on ne l'avait supposé. Il en infère que désormais les expériences du pendule, pour être utiles à la détermination de cette figure, doivent être faites systématiquement sur des arcs continus de méridiens ou de parallèles, et non pas sur des points isolés auxquels le hasard seul pourrait donner quelque intérêt local. Enfin, il fait remarquer que la longueur du pendule variant ainsi sur les méridiens, et même sur les parallèles, d'une manière qui paraît fort inégale et fort compliquée, elle n'est pas propre à être prise pour étalon de mesure, comme on l'a fait récemment en Angleterre; puisqu'il faudrait, pour la fixer dans l'avenir, définir jusqu'à la place même où l'expérience aurait été faite; encore en admettant, ce dont nous n'avons aucune certitude, que l'intensité de la pesanteur se conserve à perpétuité dans chaque lieu sans altération.

Mémoires lus par M. Fourier.

M. le baron Fourier a lu deux Mémoires : 1° *Mémoire sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application de théorèmes d'analyse algébrique aux fonctions appelées transcendantes, et spécialement aux questions de ce genre qui appartiennent à la théorie de la chaleur;*

2° *Mémoire sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires.*

PHYSIQUE.

Observations météorologiques faites à l'Observatoire de Paris.

M. Bouvard a présenté à l'Académie un Mémoire *sur les observations météorologiques faites à l'Observatoire de Paris.*

Les observations que l'auteur s'est proposé de faire connaître et de discuter sont au nombre de plus de cent mille, tant barométriques que thermométriques. Elles ont été faites régulièrement et jour par jour, sans interruption, au lever du soleil, à 9 heures du matin, à midi, à 3 heures et à 9 heures du soir.

Les observations barométriques embrassent un espace de 11 années complètes (du 1er janvier 1816 au 1er janvier 1827). Les observations thermométriques comprennent un espace de 21 années (du 1er janvier 1806 au 1er janvier 1827). L'auteur s'occupe d'abord des observations barométriques.

Il résulte des quatre premiers tableaux dressés par M. Bouvard, qu'à la latitude de Paris, la période barométrique de 9 heures du matin à 3 heures du soir, prise sur une moyenne de 11 années, est égale à $0^{mm},756$, et que celle de 3 heures à 9 heures du soir n'est que de $0^{mm},373$, c'est-à-dire environ la moitié de la première.

Ces tableaux ne font pas seulement connaître les différences de hauteur qui existent entre les différentes heures du jour, ils montrent encore celles qui ont lieu d'un mois à l'autre aux mêmes heures ; et ils confirment cette remarque importante faite depuis long-temps par M. Ramond, que le choix des heures et des mois d'observations n'est pas indifférent quand il s'agit de déterminer la pression moyenne de l'atmosphère et l'étendue de la période diurne dans un lieu donné comparativement à ce qui a lieu à Paris.

A l'égard de la pression moyenne de l'atmosphère à Paris, les plus grandes hauteurs barométriques ont eu lieu au mois de janvier, et les plus petites au mois d'avril et d'octobre. L'excès du maximum sur le minimum est de $0^{mm},39$, quantité qui indique que l'incertitude de la hauteur moyenne du baromètre est d'environ $0^{mm},15$ en plus ou en moins.

Quant à la période barométrique de 9 heures du matin à 3 heures du soir, les tableaux prouvent que sa valeur pendant les mois de novembre, décembre et janvier, est certainement moins grande que celle qu'elle a dans les trois mois suivants (février, mars, avril); et que pendant les six autres mois elle n'éprouve que de légères oscillations autour de la moyenne. Il y a donc une cause annuelle qui diminue la variation diurne dans les mois de novembre, décembre et janvier, qui l'augmente dans les trois mois suivants, et la soutient dans une valeur intermédiaire pendant les six autres.

D'autres tableaux font aussi ressortir l'influence que la direction du vent exerce sur les hauteurs barométriques, et sur les variations extrêmes qu'elles éprouvent dans le cours de l'année à Paris. Les hauteurs moyennes sont les plus faibles par le vent du sud; elles atteignent leur *maximum* par le vent du nord, et la différence moyenne s'élève jusqu'à 7,2 millimètres. En prenant les milieux entre les hauteurs qui correspondent à des vents diamétralement opposés, on trouve des résultats qui sont presque égaux. Il en résulte la confirmation de cette remarque de M. Ramond, que pour déterminer exactement la hauteur moyenne du baromètre, il faut employer, autant que possible, un nombre égal d'observations faites par des vents de directions contraires.

On trouvera dans le Mémoire de M. Bouvard (imprimé tome VII) une application du calcul des observations barométriques à la détermination des oscillations de l'atmosphère dues à l'action de la lune. Les formules dont l'auteur a fait usage sont celles que M. de Laplace a déduites de sa *Théorie des marées*, et communiquées au bureau des longitudes peu de jours avant sa mort.

Cette application conduit M. Bouvard à reconnaître que le nombre qui exprime la quantité du flux s'élève à peine à Paris à $0^{mm},018$, quantité si petite qu'il est permis de la négliger dans tous les cas.

Enfin, pour compléter les éléments nécessaires à la discussion d'une longue suite d'observations barométriques, M. Bouvard a calculé de nouvelles tables pour réduire ces observations à zéro de température et les corriger des dépressions dues à la capillarité du tube et à la position du zéro de l'échelle de l'instrument.

La seconde partie du mémoire de M. Bouvard est relative aux observations thermométriques faites, jour par jour, depuis le 1^{er} janvier 1806 jusqu'au 1^{er} janvier 1827, et aux phénomènes atmosphériques correspondants à ces observations.

Après avoir déterminé les températures moyennes des jours, des mois, et celle de l'année, conclue de l'ensemble de toutes les observations, l'auteur cherche à représenter ces observations à l'aide d'une formule déduite des températures observées. Les différences des observations et de la formule, présentées dans un tableau joint au Mémoire, n'excèdent pas celles que comportent les observations.

M. Bouvard termine son Mémoire par vingt-un tableaux relatifs à l'état de l'atmosphère. Ces tableaux présentent les nombres comparatifs de jours couverts, de jours de pluie, de brouillard, de gelée, de neige, de grêle et de tonnerre, ainsi que le nombre de jours où le vent a soufflé des huit principaux points de l'horizon.

Un dernier tableau présente les résultats moyens des vingt-un tableaux précédents. L'auteur trouve, pour une année moyenne à Paris, 182 jours de ciel couvert, 184 nuageux, 142 de pluie, 58 de gelée, 180 de brouillards, 12 de neige, 9 de grêle ou grésil, et 14 de tonnerre.

Le vent souffle 63 jours du sud, 67 du sud-ouest, 70 de l'ouest, 34 du nord-ouest, 45 du nord, 40 du nord-est, et 23 de l'est et du sud-est. Il résulte enfin des tableaux dressés par M. Bouvard, que la quantité de pluie qui tombe à Paris, mesurée sur l'Observatoire, est de 482 millimètres, et dans la cour, à 24 mètres au-dessous de la plate-forme, de 565 millimètres, c'est-à-dire d'environ un septième de plus.

Sur le mouvement d'un fluide élastique qui s'écoule hors d'un réservoir ou gazomètre.

M. Navier a lu un *Mémoire sur le mouvement d'un fluide élastique qui s'écoule hors d'un réservoir ou gazomètre.*

Daniel Bernoulli a résolu, dans son *Hydrodynamica*, diverses questions relatives au mouvement d'un fluide élastique qui s'écoule d'un vase dans un autre par un très-petit orifice. Ce grand géomètre, pour arriver à la solution de ces questions, supposait que le fluide était en repos dans l'intérieur du vase, que la pression était égale dans toutes ses parties, enfin que les molécules prenaient, en franchissant l'orifice, la vitesse due à la pression intérieure, comme cela aurait lieu dans le cas d'un fluide incompressible.

D'Alembert, dans son *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, en s'occupant des mêmes questions, est parti d'hypothèses semblables; et les solutions auxquelles il est arrivé ont été reproduites depuis dans l'Hydrodynamique de Bossut et dans d'autres ouvrages, et ont conduit à cette proposition généralement admise dans les traités de physique, que « l'écoulement d'un fluide élastique dans un espace vide

« s'opère avec la vitesse due à la hauteur d'une colonne de « fluide d'une densité égale à celle qui a lieu dans l'intérieur « du vase, et dont le poids produirait la pression à laquelle « le fluide est soumis. »

Les hypothèses sur lesquelles les solutions dont on vient de parler sont fondées, diffèrent des circonstances naturelles, et elles paraissent surtout s'en écarter en ce que l'on suppose que les tranches du fluide qui franchissent l'orifice ont la même densité que le fluide qui remplit l'intérieur du vase ; ce qui semble impossible, puisque les parties du fluide placées à la section extrême, ne supportant évidemment que la pression extérieure, doivent avoir la densité correspondante à cette pression.

Il s'ensuit que l'on doit admettre une diminution progressive de la pression et de la densité dans les tranches de fluide qui s'écoulent hors du vase. C'est ce qu'a fait M. Navier; et en adoptant l'hypothèse du parallélisme des tranches et la supposition que le mouvement du fluide n'est pas altéré par le frottement sur les parois, il a donné la loi de l'écoulement d'un fluide qui sort d'un réservoir ou gazomètre dans lequel la pression est maintenue constante et supérieure à celle du milieu, dans lequel le fluide s'écoule en parcourant un tuyau où la section varie d'une manière arbitraire. Cette solution fait connaître les quantités de fluide qui s'écoulent dans un temps donné, ainsi que les pressions et les densités qui ont lieu dans les diverses parties du tuyau.

Les résultats auxquels l'auteur est parvenu ne permettent plus d'admettre la proposition introduite dans les traités de physique dont il a été fait mention ci-dessus. En effet, on déduit de ces résultats que la vitesse d'écoulement du fluide tend à devenir infinie lorsque la force élastique du milieu dans lequel il s'écoule tend à devenir nulle.

Mémoire sur la double réfraction.

Dans ce Mémoire, M. Biot commence par rappeler la série des découvertes progressives qui ont été faites sur la double réfraction de la lumière depuis Huygens, qui le premier trouva la loi de ce phénomène dans le spath d'Islande, jusqu'à Fresnel, qui en donna l'expression plus générale pour toutes sortes de cristaux, soit à un, soit à deux axes. M. Biot fait remarquer ensuite que, dans tous les corps cristallisés doués de deux axes, on n'a jusqu'ici aperçu que des phénomènes symétriques autour de ces deux directions, quoiqu'il fût généralement concevable que cette symétrie pourrait ne pas exister toujours. L'idée d'une telle possibilité avait depuis long-temps engagé l'auteur à chercher comment, dans les cas de symétrie ou de non symétrie qu'offrirait accidentellement la nature, la loi analytique de la double réfraction pourrait être conclue des expériences seules, indépendamment de toute hypothèse sur la nature de la lumière, en partant du principe de la moindre action, qui, par son essence, paraît toujours, comme l'a montré M. de Laplace, devoir s'appliquer à cette classe de phénomènes, et en le combinant avec les expressions des vitesses représentées par des fonctions du second ordre des sinus et co-sinus des angles formés par les axes de chaque cristal avec les rayons réfractés; expressions qui offrent jusqu'ici une approximation très-suffisante, à cause de la petitesse des changements que la réfraction absolue de chaque rayon subit dans les divers sens d'un même cristal.

Lorsque M. Fresnel eut publié sa belle découverte de la variabilité des deux vitesses dans les cristaux à deux axes, M. Biot chercha à employer ce caractère expérimental, comme nous venons de le dire; et il obtint des formules qui, s'accordant avec celles de M. Fresnel pour les cristaux observés jusqu'alors, pouvaient s'adapter également au cas où la nature viendrait à offrir la généralité plus grande de phénomènes non symétriques autour des deux axes. D'après cela, M. Biot se borna à déposer dans un paquet cacheté ses formules, et la méthode qu'il avait employée pour y parvenir. Mais il vient de les reprendre, pour les appliquer à cette extension des phénomènes qu'il a reconnue dans un minéral jusqu'alors assez rare à l'état de transparence parfaite. Ce minéral est le pyroxène diopside du Tyrol. Il s'offre ordinairement en prismes alongés, dans lesquels les axes de double réfraction sont placés de manière que l'un fait, avec l'axe longitudinal des prismes, un angle à très-peu près de 68°, et l'autre un angle de 11° 14'; ce qui donne 56° 46' pour leur inclinaison mutuelle. Maintenant, si l'on taille dans le diopside des plaques à faces parallèles, suivant des sens respectivement perpendiculaires à ces deux directions, on trouve que ces plaques, placées entre deux tourmalines, offrent des anneaux dont la configuration n'est pas la même, près de l'un et l'autre axe, quand on les tourne dans leur propre plan : il n'y a que deux positions rectangulaires entre elles où l'accord ait lieu; et il y a dissymétrie dans toutes les autres. L'axe transversal, le plus oblique à la longueur des prismes, offre les phénomènes ordinaires à tous les autres cristaux; mais l'axe longitudinal présente, près du centre des anneaux, lorsqu'on tourne les plaques, des distorsions tout-à-fait inusitées, quoique régulières en elles-mêmes et semblables dans tous les échantillons. M. Biot s'occupe de découvrir si ces nouveaux caractères sont, comme il est vraisemblable, accompagnés de différences dans les vitesses de transmission suivant les deux axes; mais l'extrême délicatesse des mesures que cette recherche exige ne lui a pas encore permis de la terminer.

Sur les sons produits par les vibrations d'une lame mince ébranlée par un courant d'air.

M. Savart a lu, dans le cours de la présente année, plusieurs Mémoires. Ce savant physicien ayant été nommé à la place vacante dans le sein de l'Académie par le décès de M. Fresnel, ces Mémoires, qui ont contribué au perfectionnement de l'acoustique, n'ont été l'objet d'aucun rapport. Nous allons donner ici une idée de leur contenu.

Le premier est relatif aux *Sons produits par les vibrations d'une lame mince ébranlée par un courant d'air.*

Lorsqu'un courant de gaz ou de vapeur s'échappe par un orifice percé dans une paroi plane, on sait qu'une lame mince et circulaire placée au devant de cet orifice, loin d'être chassée par le courant, demeure à une petite distance de la paroi plane, et que, dans certains cas, le phénomène s'accompagne d'un son plus ou moins grave, plus ou moins intense. M. Savart s'est proposé d'examiner les circonstances qui déterminent ou qui accompagnent la production du son doux dans cette circonstance. Il arrive à ce résultat, que le son doux est produit alors par les vibrations propres du disque, de sorte que si l'on fait varier les dimensions des disques, les nombres des vibrations sont en raison inverse des carrés des diamètres, et proportionnels à l'épaisseur, ainsi que cela a lieu pour les lames circulaires ébranlées directement. En effet, si l'on dispose l'appareil qui sert à faire ces expériences de manière que la lame circulaire soit horizontale, et qu'ensuite on répande une poussière légère sur la face supérieure de la lame, tandis que le son se produit, la poussière se réunit pour dessiner les lignes nodales fort nettes, et le son est exactement le même que celui qu'on obtient pour le même mode de division en ébranlant la lame directement avec un archet : d'où il résulte que l'action du courant d'air, réunie à celle de la pression atmosphérique, constitue dans ce cas un genre particulier d'ébranlement qui ne diffère pas essentiellement de tous ceux qu'on peut produire, quoiqu'il soit fort remarquable, en ce que les corps qui y sont soumis sont parfaitement libres dans toute leur étendue.

Recherches sur les vibrations normales.

Chladni et après lui M. Œrsted avaient remarqué que quand on répand sur une lame en vibration du sable mélangé d'une poussière très-fine, le sable trace une figure acoustique, et que la poussière, plus légère, forme de petits amas. M. Savart s'est proposé de trouver la cause de ce singulier phénomène, et d'en déterminer les lois. Il résulte de ses recherches que, quand un corps solide exécute des vibrations normales, il est toujours le siége de deux modes de division qui se superposent ; que l'un de ces modes est indiqué par le sable, et l'autre par la poussière la plus déliée. M. Savart désigne ce dernier par la dénomination de mode secondaire de division. Par exemple, si l'on fait produire à une lame circulaire la figure acoustique qui se compose d'une seule ligne circulaire tracée par le sable, la poussière fine dessine une autre ligne circulaire placée entre la précédente et le bord de la lame, et de plus elle se réunit en un petit amas au centre même de la lame. A l'aide de lois simples que M. Savart a découvertes, on peut toujours prévoir la figure acoustique secondaire quand on connaît la figure principale; et réciproquement, la figure secondaire étant connue, on peut toujours remonter au mode principal de division.

M. Savart regarde les mouvements secondaires comme la cause principale du timbre des divers corps sonores, et il présume que les lignes nodales héliçoïdales qu'il a observées sur les faces des corps sonores qui vibrent, ne sont que les traces d'un mode secondaire de division. Cette remarque est propre à éclaircir l'un des points les plus obscurs et les plus curieux de l'acoustique.

Note sur un mouvement de rotation qui peut être imprimé au système des parties vibrantes de certains corps.

Lorsqu'on fait résonner une lame circulaire dont le centre est immobile, et qu'elle présente l'un des modes de division qui se composent d'un plus ou moins grand nombre de lignes nodales diamétrales, soit seules, soit combinées avec des lignes circulaires, on sait que le nombre des subdivisions qui se produisent, ainsi que la position des lignes de repos, dépendent en général des dimensions mêmes de la lame, de la nature de la substance dont elle est formée, de la position du point ébranlé directement, et enfin de la vitesse avec laquelle on fait mouvoir l'archet sur le bord de la lame; de sorte que rien n'étant changé dans ces conditions, les lignes nodales devraient toujours occuper la même position. Néanmoins M. Savart a trouvé qu'il n'en était pas ainsi, et qu'il pouvait arriver que le système des parties vibrantes affectât un mouvement d'oscillation autour d'une position fixe, et même qu'il devînt le siége d'un mouvement de rotation tangentiel au plan de la lame. Par exemple, si l'on fait produire à une lame circulaire le mode de division qui se compose de deux lignes nodales qui se coupent rectangulairement, cas pour lequel le mode secondaire est formé du même nombre de lignes diamétrales augmenté d'une ligne circulaire, il peut arriver que la poussière fine qui trace cette dernière ligne, forme une espèce de courant circulaire animé d'un mouvement de transport tangentiel très-rapide, et que les lignes diamétrales, changeant sans cesse de place, finissent par s'effacer entièrement. M. Savart indique plusieurs moyens pour constater l'existence de ce genre de mouvement, non-seulement dans les lames circulaires, mais encore dans les anneaux, les timbres et les membranes.

Recherches sur l'élasticité.

Dans ce travail, M. Savart a en vue de montrer qu'au moyen des vibrations sonores, on peut déterminer l'état élastique des diverses substances solides, opaques ou transparentes; de même qu'au moyen de la lumière on peut étudier la structure intérieure des corps diaphanes. L'auteur se fonde sur cette proposition, qu'une lame circulaire homogène et également épaisse dans toute son étendue, ne devrait faire entendre qu'un seul son pour une même figure acoustique, et que cette figure devrait se placer dans toutes les directions possibles, si le lieu de l'ébranlement parcourait successivement tous les points de la circonférence du disque. En conséquence, toute substance qui ne remplira pas ces conditions devra évidemment être considérée comme ne jouissant pas des mêmes propriétés dans tous les sens. Des lames métalliques fondues, laminées, ou amincies au marteau, ayant été soumises à ce genre d'épreuve, M. Savart a trouvé qu'elles présentaient toutes deux sens rectangulaires, suivant lesquels l'élasticité n'était pas la même: c'est ce qu'il a vérifié sur l'argent, l'étain, le cuivre, le fer, le plomb, le zinc, le bismuth, l'antimoine, l'acier, la fonte de fer, le laiton, le métal des cloches, et plusieurs autres alliages. On conçoit qu'il doit en être de même pour toutes les substances fibreuses. Mais, ce qu'il était plus difficile de prévoir, le soufre, le plâtre coulé en lames minces, les résines et diverses substances salines qui cristallisent confusément, présentent un résultat tout-à-fait analogue. M. Savart désigne par l'expression d'axes d'élasticité, les deux sens rectangulaires de plus grande et de moindre élasticité; et il montre par diverses expériences que l'existence de ces axes est le résultat d'un phénomène moléculaire analogue à la cristallisation, et lié intimement avec elle; car, d'après ses observations, tout semble se passer dans les diverses substances solides comme si elles étaient formées par un système de fibres parallèles. Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Savart a étendu ses recherches aux corps régulièrement cristallisés, ainsi qu'aux métaux fondus en grandes masses, et il a reconnu que le mouvement de rotation dont nous avons parlé dans l'article précédent dépend de la structure même des corps, et de l'inégalité de leur élasticité dans différents sens. Ces recherches ne tarderont pas à être publiées.

MÉCANIQUE.

Mémoire sur les grandes routes, les canaux de navigation et les chemins de fer.

M. Girard a lu un *Mémoire sur les grandes routes, les canaux de navigation et les chemins de fer.* Ses recherches sur cet important sujet, qui se rattache d'une manière immédiate aux besoins les plus pressants de l'industrie, établissent avec plus d'exactitude qu'on ne l'avait fait jusqu'ici les différents prix de transport sur chacune des trois voies de communications qu'il compare entre elles; et l'auteur justifie par des motifs positifs la préférence qu'on doit accorder à chacune dans tel cas donné.

Nous allons indiquer les résultats principaux de ces nouvelles recherches.

C'est toujours pour effectuer la circulation d'une certaine quantité de marchandises, que l'on se propose d'ouvrir une communication quelconque entre deux points fixes. Connaissant d'ailleurs le montant des charges annuelles qui doivent être acquittées pour les droits de péage perçus sur cette communication et les dépenses effectives de roulage qu'elle occasionne, on trouve aisément que la différence du prix total du transport à la dépense effective du roulage, par tonneau et par kilomètre, est égale au montant des charges annuelles des concessionnaires divisé par le nombre de tonneaux transportés annuellement sur cette voie.

Supposant, par exemple, de 100,000 ce nombre de tonneaux, on déduit de la règle précédente que le prix total du transport par tonneau et par kilomètre sera,

Sur une route ordinaire, de .... $0^{fr.},418$,
Sur un chemin de fer, de .... $0^{fr.},141$,
Enfin, sur un canal, de .... $0^{fr.},112$.

D'où l'on voit que, dans cette hypothèse de mouvement de marchandises, un canal comparé à un chemin de fer présenterait une économie de $0^{fr.},029$ sur $0^{fr.},141$, ou de plus de 20 pour 100.

Cette économie du transport par eau comparé au transport par la voie actuelle du roulage, serait de $0^{fr.}306$ sur $0^{fr.}418$, ou de 73 pour 100 environ.

L'avantage de la voie navigable devient bien plus sensible à mesure que la masse des denrées à transporter devient plus considérable.

Si, par exemple, on supposait que cette masse fût annuellement de 250,000 tonneaux, on trouve que le prix du transport sur un chemin de fer serait de $0^{fr.}0824$, tandis que ce prix ne serait que de $0^{fr.},0546$ sur un canal. Cette dernière voie présenterait donc une économie de $0^{fr.}0278$ sur $0^{fr.},0824$, c'est-à-dire une économie de plus de 35 pour 100.

Veut-on, en fixant à $0^{fr.},141$ le prix total du transport sur un canal comme sur un chemin de fer, déterminer combien il devra passer de tonneaux de marchandises sur la première de ces voies, quand il en passe 100,000 sur la seconde, de manière que les charges annuelles de l'une et de l'autre soient également acquittées par les produits de leurs péages respectifs; on trouve immédiatement qu'il suffira, sur le canal, d'une circulation de 77,216 tonneaux.

Et réciproquement, si l'on fixe à $0^{fr.},112$ le prix total du transport sur un chemin de fer comme sur un canal, on trouvera que pour acquitter les charges annuelles du premier, il faudra qu'il y passe 142,930 tonneaux, tandis qu'il n'en passera que 100,000 sur le second.

La conséquence générale de cet examen est que toutes les fois qu'il s'agira d'établir une voie de communication entre des points plus ou moins éloignés, soit en suivant le cours d'une vallée, soit en traversant un pays de plaine, un canal navigable devra toujours être préféré à un chemin de fer, dans les intérêts du commerce. Mais il peut se rencontrer une multitude de cas d'exception, dans lesquels le maintien des mêmes intérêts exigera qu'il soit pris un parti contraire.

Si, par exemple, on doit faire descendre du sommet d'une côte les matières extraites d'une carrière ou d'une mine, il sera presque toujours plus avantageux de pratiquer un chemin de fer à la surface du sol, que d'y ouvrir un canal ou tranchée.

Ainsi, en conservant l'hypothèse d'une exploitation annuelle de 100,000 tonneaux, on trouve que le rapport numérique de 125 à 98, entre les charges annuelles d'un canal et celles d'un chemin de fer, est la limite au-dessous et au-dessus de laquelle la première de ces voies l'emporte sur la seconde ou lui est inférieure. On voit comment, en admettant que les charges annuelles d'un canal soient doubles de celles d'un chemin de fer, on arriverait, avec M. Tredgold et quelques autres, à conclure que les chemins de fer sont plus avantageux que les canaux.

Il est un cas où leur avantage se manifeste évidemment, c'est celui où des chariots chargés, qui descendent d'eux-mêmes sur des plans inclinés, font en même temps remonter des chariots vides. Le prix du transport se réduit alors aux seuls droits de péage établis pour l'acquittement des dépenses annuelles des concessionnaires du chemin. Ce prix se réduirait, dans l'exemple que nous avons choisi, à $0^{fr.},098$, au lieu de $0^{fr.},141$. Pour que le transport par eau présentât le même avantage, il faudrait que le kilomètre de longueur de canal ne coûtât que 82,000 fr. au lieu de 96,520 fr.

L'emploi des machines à vapeur, comme locomotives, sur les chemins de fer, est encore en Angleterre l'objet d'une grande question, que M. Girard aborde aussi dans son Mémoire. « Quand même, dit-il, on admettrait, avec les partisans de ce moyen, qu'il offre plus d'économie que l'usage des chevaux, il est essentiel d'observer que le combustible à la consommation duquel ces machines doivent la production de leur force motrice, est chaque jour enlevé à des dépôts naturels que leur vaste étendue ne rend pas néanmoins inépuisables. La valeur de ce combustible s'élevera donc, non-seulement avec le prix de toutes choses, mais encore à mesure qu'il deviendra plus rare, ou plutôt à mesure qu'on craindra davantage qu'il ne le devienne. Les calculs économiques que l'on fonderait sur sa valeur ne conviennent qu'à un état de choses transitoire, et ne peuvent être admis que sous cette réserve. L'emploi des chevaux n'est pas sujet aux mêmes chances; les forces motrices qu'ils sont propres à développer ont pour aliment les productions du sol, que la nature renouvelle chaque année, et qu'elle continuera de reproduire avec d'autant plus d'abondance que l'agriculture fera plus de progrès. » Si de telles vérités ont été senties en Angleterre, combien à plus forte raison, dit M. Girard, doit-on en être frappé en France, dans un pays dont le sol est plus fertile et où les mines de charbon sont beaucoup plus rares.

Mémoire sur la composition des moments en mécanique.

M. Poinsot a lu un Mémoire sur la *Composition des moments en mécanique.* M. Poinsot rappelle dans ce Mémoire la théorie des couples, dont il est l'inventeur; il montre que le plan qui est nommé invariable n'est, à proprement parler, que le plan du couple résultant de tous les couples du système par rapport au centre que l'on considère.

Notice sur des étalons de l'ancienne coudée égyptienne.

M. Girard a lu une *Notice sur quelques étalons de l'ancienne coudée égyptienne*, récemment découverts.

La découverte du premier de ces étalons date de 1799. M. Girard le retrouva dans l'ancien nilomètre de l'île d'Éléphantine, décrit par Strabon. Cette unité de mesure était divisée en 28 doigts et en 7 palmes ; sa longueur absolue est de 527 millimètres.

Un second étalon fut trouvé, en 1822, dans les ruines de Memphis, par les soins de M. Drovetti, notre consul général en Égypte. Cette coudée est aussi divisée en 7 palmes; sa longueur, mesurée avec la plus grande précision par MM. Plana et Bidone, est de 523 millimètres.

Un troisième étalon de la même unité de mesure a été trouvé également à Memphis, par M. Drovetti; il est déposé dans le nouveau Musée royal égyptien. C'est encore une coudée septénaire, dont la longueur absolue est de 525 millimètres.

Enfin, un quatrième étalon, destiné au Musée de Florence, a été découvert par M. d'Anastasy, consul de Suède en Égypte.

Sa longueur est de 526 millimètres et demi; il est d'ailleurs divisé, comme les précédents en 7 palmes ou en 28 doigts.

D'après ces faits, M. Girard regarde la véritable longueur de l'ancienne coudée égyptienne comme irrévocablement fixée. Cette longueur, comprise entre 524 et 527 millimètres, lui sert à expliquer de la manière la plus évidente un passage de Pline sur la longueur du côté de la base de la grande pyramide, et à rétablir la véritable longueur du stade (de 700 au degré) connu des géographes sous le nom de stade d'Ératosthène.

ASTRONOMIE.

Mémoire sur la comète périodique de 6 *ans* $\frac{7}{10}$.

M. Damoiseau a présenté un *Mémoire sur la comète périodique de* 6 *ans* $\frac{7}{10}$.

Cette comète découverte par M. Biela, le 27 février 1826, fut immédiatement observée dans presque tous les Observatoires de l'Europe. Les premiers résultats furent bientôt suffisants pour faire entrevoir, par le calcul des orbites paraboliques, que les éléments de la nouvelle comète avaient une grande ressemblance avec ceux des comètes de 1772 et 1806. En reconnaissant une même comète dans ces trois apparitions, on vit que l'on s'écartait beaucoup des observations; mais MM. Gambart et Clausen, après quelques essais, ont trouvé chacun séparément une ellipse qui représente les observations assez exactement pour ne laisser aucun doute sur l'identité de ces trois astres.

La révolution moyenne, 2460 jours, qui établit l'identité de la comète de 1806, doit être plus grande de 9 jours pour établir celle de la comète de 1772. Cette différence ne peut être expliquée que par l'altération qu'a dû causer, dans le mouvement de la comète, l'action de Jupiter, qui en a passé assez près en 1782 et en 1794. L'identité une fois admise, pour annoncer le temps du prochain retour de la comète, il fallait nécessairement avoir égard aux perturbations dues à l'action des planètes dans l'intervalle des passages aux périhélies de 1806 et de 1826, et dans l'intervalle de ce dernier passage à celui de 1832, année qui sera remarquable par les réapparitions des deux comètes à courte période de notre système, jusqu'à présent connues.

Voici ce que donne la théorie pour les perturbations du moyen mouvement diurne de la comète et de son anomalie moyenne, par l'action de Jupiter, la Terre et Saturne :

		Moy. mouv. diur.	Anom. moy.
de 1806 à 1826...	♃.......	+ 1",4497.........	+ 0°.45'.39",94
	♁.......	+ 0 ,1811.........	+ 0 .22 .10 ,72
	♄.......	— 0 ,0317.........	— 0 . 2 .45 ,95
		+ 1",5991.........	+ 1° . 5'. 4",71
de 1826 à 1832...	♃.......	+ 5",5745.........	+ 1°.28'.50",94
	♁.......	+ 0 ,0332.........	— 0 . 0 .34 ,69
	♄.......	— 3 ,0311.........	— 0 . 3 .14 ,83
		+ 5",5766.........	+ 1°.25'. 1",42

On a conclu de ces résultats que l'action des planètes a diminué de $14^{j},6507$ la révolution moyenne de 1806 à 1826, et que cette diminution sera de $9^{j},6642$ sur la révolution propre au périhélie de 1826, pendant la période actuelle. Si donc l'on suppose que la comète ait passé au périhélie en

1826 le 18,9688 mars, son retour prochain au périhélie aurait lieu en 1832 le 27,4808 novembre.

Les altérations que doivent éprouver les éléments de l'orbite pendant cette dernière période ont été déterminées comme il suit :

Variation de la longitude des nœuds sur l'écliptique...	—	3°.13'.45''
Variation de la longitude du périhélie...............	+	5'.13''
Variation de l'inclinaison de l'orbite...............	—	20'. 2''
Variation de l'excentricité.........................	+	0,0047388

En partant des éléments de 1826 de M. Gambart, on a formé, avec ces variations, les éléments suivants pour 1832 :

Longitude du périhélie.................	109°.56'.45''
Longitude du nœud ascendant............	248 .12 .24
Inclinaison............................	13 .13 .13
Excentricité...............	0,7517481
Demi grand axe.............	3,53683

Sur la comète périodique de 3 $\frac{1}{3}$ ans.

Le même académicien a lu un *Mémoire sur la comète périodique de 3 ans $\frac{1}{3}$*.

Cette comète, qui a déja été observée plusieurs fois, et notamment en 1805, 1819, 1822 et 1825, doit reparaître vers la fin de l'été de cette année. Elle passera successivement dans les constellations d'Andromède, de Pégase, du petit Cheval, d'Antinoüs, etc. Sa plus courte distance à la terre sera 0,47 (la distance moyenne de la terre au soleil étant 1). La comète atteindra cette plus courte distance le 11 décembre; ensuite elle continuera de s'approcher du soleil jusqu'au

10,56 janvier 1829, jour de son passage au périhélie; sa distance au soleil sera alors 0,35.

Le dernier passage fut observé, en 1825, le 16,78 septembre; ainsi la période actuelle sera de 1211,78 jours. La période de 1822 à 1825 a été de 1211,30 jours; celle de 1819 à 1822 de 1212^j,74, et la période moyenne de 1805 à 1819 de 1203^j,69. Les différences qu'on remarque entre les longueurs de ces périodes proviennent de l'action des planètes sur la comète; cet effet est devenu assez sensible de 1819 à 1822, la comète s'étant approchée de Jupiter jusqu'à la distance 1,13 pendant cette période.

Cette comète n'a pas été visible à la vue simple lors de ses apparitions précédentes.

Le retour de 1828 pourra beaucoup contribuer à faire connaître s'il est nécessaire d'admettre la résistance du milieu, pour représenter le mouvement de la comète.

GÉOGRAPHIE.

Cartes de la marine.

Nous avons fait connaître, dans les analyses précédentes, les avantages que procure aux sciences le dépôt général des cartes et plans de la marine et des colonies.

Ce grand établissement est dirigé par M. le contre-amiral de Rossel, membre de l'Académie des sciences, que seconde puissamment M. Beautemps-Beaupré, membre de la même Académie. Ces importants travaux sont continués avec le même zèle et une activité toujours croissante; ils obtiennent de plus en plus la reconnaissance des navigateurs et des savants. La plupart des cartes publiées chaque année proviennent des travaux du corps des ingénieurs-hydrographes, qui se trouvent sous les ordres immédiats des chefs de l'établissement. Les autres cartes sont le fruit des travaux d'officiers de la marine instruits et expérimentés, qui ne négligent aucune occasion de lever des plans de parties de côtes et de ports qu'ils ont visités dans les régions les plus éloignées du globe.

L'autorité royale, en créant ce dépôt, a voulu propager les connaissances nautiques, et procurer ainsi aux bâtiments de guerre et à ceux du commerce les moyens de se préserver de nombreux accidents. Les intentions du monarque ont été fidèlement remplies; les opérations qu'exige la construction des cartes et plans de la marine ont toujours été favorisées, et ont reçu tout le développement désirable. Dans l'espace de 11 ans, environ 250 cartes ou plans ont été publiés; c'est-à-dire que depuis 1816 la collection des cartes a été presque doublée. Les nouvelles cartes, levées par des méthodes récemment perfectionnées, sont très-préférables aux précédentes; elles ont acquis un degré éminent d'exactitude.

Les ingénieurs hydrographes sous les ordres de M. Beautemps-Beaupré ont terminé, en 1826, les opérations qui procureront aux navigateurs des cartes très-détaillées de toutes les côtes du golfe de Gascogne et de tous les ports, même les moins considérables, de ces côtes.

Les écueils ont été explorés avec le plus grand soin, et leur position a été déterminée très-exactement. Toutes les passes ont été sondées, ainsi que la partie de mer libre qui y conduit. Au moyen des dessins où se trouve représenté l'aspect des côtes vues des points où l'on est obligé de se placer, les navigateurs qui viennent chercher quelque mouillage ou quelque port, et ceux qui parcourent certaines parties de la côte, peuvent diriger leur route avec sécurité.

Ce travail, qui a reçu la plus grande précision qu'il soit possible d'atteindre, doit se rattacher à celui de la carte de France faite par les ingénieurs géographes du dépôt de la guerre; il complètera cette carte en y ajoutant toutes les connaissances nécessaires à la navigation de nos côtes.

Le public va bientôt connaître ce qui reste à publier des travaux de M. Gauttier dans les mers du Levant. Deux cartes de l'Archipel et une seconde feuille de la carte générale de la Méditerranée vont très-incessamment être mises au jour; et, en s'ajoutant à la première feuille de la Méditerranée, aux cartes de la mer Adriatique, de la mer de Marmara et de la mer Noire, elles complèteront tout ce qu'il est possible de retirer des travaux de cet officier, et feront connaître les éminents services qu'il a rendus à la navigation. M. Benoist, ingénieur-hydrographe, a accompagné M. Gauttier dans toutes ses campagnes, et a été chargé d'observer tous les angles et les relèvements nécessaires à la construction des cartes. C'est lui qui a rédigé celles qui vont être publiées, d'après des minutes qui avaient été primitivement arrêtées sous les yeux de M. Gauttier.

L'île de Corse, détachée de la France, a fixé l'attention du ministre de la marine. M. Hell, capitaine de vaisseau, a été chargé de lever des cartes de toutes les côtes de cette île. Il a eu sous ses ordres des officiers zélés et instruits, possédant des connaissances et des talents très-variés. Quatre campagnes ont suffi pour déterminer les contours des côtes, lever le plan des ports, placer les écueils, et reconnaître la profondeur de l'eau dans toutes les passes à tous les mouillages. Vingt-huit ou trente cartes ou plans formeront la collection des cartes de cette île, et l'on est fondé à croire que l'on a marqué sur ces cartes tous les écueils qui pourraient compromettre la sûreté des bâtiments; on en a, pour ainsi dire, acquis la certitude, parce que les localités ont permis d'employer un moyen connu par les pêcheurs du pays. Au large de toutes les parties saillantes de la côte où l'on pouvait craindre que les contreforts des montagnes, en se continuant sous l'eau, donnassent lieu à quelque écueil isolé, on a promené dans la mer, à une profondeur que ne peut jamais atteindre la quille des plus grands bâtiments, un cordage qui ne pouvait pas manquer de rencontrer les têtes de roches dangereuses, dont il a été ensuite facile de déterminer la position; cet ingénieux procédé a fait découvrir sur les côtes de Corse deux ou trois écueils de cette nature. Plusieurs cartes ont déja été publiées, et l'on espère que le reste paraîtra dans le courant de 1828.

La belle collection de cartes des côtes du Brésil, dont les matériaux ont été recueillis pendant la campagne dirigée par M. le contre-amiral baron Roussin, alors capitaine de vaisseau, a été publiée, et est généralement connue. Toutes les côtes depuis l'île Sainte-Catherine jusqu'à Maranham sont comprises dans 14 cartes ou plans. Il faut y ajouter la carte de l'embouchure de la rivière de Cayenne et de ses environs : c'est le travail particulier du bâtiment qui naviguait de concert avec *la Bayadère*, commandée par M. le baron Roussin; on le doit à M. Gressier, ingénieur hydrographe.

M. Givry, ingénieur hydrographe, était embarqué sur *la Bayadère,* commandée par M. le baron Roussin. C'est lui qui a recueilli tous les matériaux nécessaires à la construction des cartes; il les a rédigées au Dépôt des cartes et plans de la marine, sous les yeux des chefs de l'établissement. Ce beau travail honore à la fois l'officier sous les ordres duquel les matériaux en ont été recueillis, et l'établissement précieux où il a été définitivement rédigé; il prouve un soin scrupuleux de faire valoir les opérations des officiers qui se distinguent par des travaux hydrographiques.

M. le baron Roussin, commandant *la Bayadère,* n'a pas rendu de moins grands services dans une campagne qu'il a faite sur les côtes d'Afrique, avant d'explorer celles du Brésil. Il était accompagné de M. Givry, ingénieur hydrographe, qui a rempli pendant cette campagne les mêmes fonctions que pendant celle du Brésil. Une carte de l'espèce de golfe compris entre le cap Blanc et le cap Vert, où se trouve l'embouchure du Sénégal, est le premier fruit que l'on a retiré de cette campagne. Une seconde carte qui comprend depuis le cap Bojador, situé près des Canaries, jusqu'au cap Blanc, va être incessamment publiée. Une carte du contour extérieur des îles Bisagots, et du canal qui sépare ce groupe d'îles du continent, a été également publiée. *La Bayadère* n'a pu visiter l'intérieur de cet archipel; le peu de profondeur des canaux qui séparent les îles exige l'emploi de bateaux qui tirent très-peu d'eau. La même cause a empêché M. le contre-amiral Roussin d'approcher d'une grande partie des côtes situées entre le cap Vert et la rivière de Gambie, et même de voir ces côtes. Il en résulte que, dans la portion de côte qu'il a visitée au-delà du cap Vert, il se trouve des lacunes qu'on était dans l'impossibilité de remplir. On attend que des officiers qui auraient parcouru ces côtes dans les bâtiments d'un faible tirant d'eau, aient recueilli les matériaux qu'exige cette exploration : on publiera alors cette portion des travaux faits à bord de *la Bayadère*.

Une de ces lacunes vient d'être remplie récemment par ordre de M. Massieu, capitaine de vaisseau, commandant la station d'Afrique. Il a expédié sur une goëlette M. Le Prédour, lieutenant de vaisseau, qui a reconnu et fixé, à l'aide d'observations astronomiques et de montres marines, la position de la côte depuis le cap Naze jusqu'à la rivière de Gambie, intervalle que l'on n'avait pu reconnaître à bord de *la Bayadère*.

Les ingénieurs hydrographes embarqués sur les bâtiments de S. M. ont répandu parmi les officiers les méthodes adoptées par le dépôt de la marine, et consacrées par l'expérience. Il en est résulté une grande émulation parmi ces derniers, et ils se sont portés avec un zèle digne des plus grands éloges à faire par la suite l'application des connaissances qu'ils avaient acquises pendant leur coopération au travail des ingénieurs hydrographes. Une foule de plans particuliers, de cartes de portions de côtes, ont été envoyés au dépôt de la marine, et ont augmenté ses richesses. Il serait impossible d'énumérer ici tous ces plans, rédigés d'après les travaux particuliers des officiers de marine. On se contentera de citer MM. Lartigue et Le Prédour, lieutenants de vaisseau : le premier nous a procuré la carte d'une portion de la côte du Pérou qui avait été tracée très-imparfaitement par les Espagnols, et un grand nombre de plans de ports situés tant sur cette côte que sur celle du Chili. M. le Prédour, outre la partie de la côte qu'il a levée à la côte d'Afrique, a déterminé la position géographique d'un grand nombre de points de la côte d'Or et de celle qui s'étend plus au sud jusqu'au cap Lopez; on lui devra un plan de la baie de San-Antonio dans l'île du Prince. Des montres marines sont embarquées à bord des bâtiments de S. M. Les officiers font concourir les longitudes des montres avec le résultat des distances de la lune au soleil et aux étoiles, et obtiennent, à l'aide de ces deux moyens, des positions géographiques d'une exactitude plus que suffisante pour la sûreté de la navigation, et bien supérieures à celles que l'on pouvait obtenir autrefois, à moins que l'on n'eût occasion d'observer les occultations d'étoiles. On a pu remarquer que des distances observées en grand nombre sur plusieurs points, et rapportées à un seul par les différences en longitude des montres, donnent dans certains cas des longitudes qui méritent autant de confiance que le résultat d'une seule occultation observée dans un seul lieu.

Les méthodes pour faire utilement usage des montres marines, et pour combiner les résultats qu'elles donnent avec ceux des distances, sont fixées: c'est ce qui a donné les moyens de publier des séries de longitudes obtenues par des montres dans les principales campagnes. On en a déja publié un grand nombre dans la *Connaissance des temps,* afin de les faire connaître à tous les géographes. La disposition des tableaux est telle, que l'on pourra juger toujours de la confiance que chacune d'elles mérite en particulier, et de celle que l'on doit ajouter à la masse des longitudes faisant partie d'une même série. Les mouvements diurnes de chaque montre sont indiqués au commencement et à la fin de chaque série, et les moyens employés pour conclure la longitude de chaque lieu porté dans le tableau, sont aussi indiqués par des caractères particuliers, soit que le lieu ait été placé par un relèvement direct, ou par le calcul d'un triangle dont une partie de la route du vaisseau forme un côté.

Les positions géographiques déterminées par M. Gauttier sur la plus grande partie des côtes de la Méditerranée, sur les contours de l'Adriatique, dans l'Archipel, sur les contours de la mer de Marmara et de la mer Noire, ont été publiées. Il en est de même de toutes les latitudes et longitudes observées sur les côtes du Brésil, à bord de *la Bayadère*, commandée par M. le baron Roussin. Les positions géographiques des parties de la côte d'Afrique reconnues et levées sous les ordres du même officier-général, le seront successivement. Les positions que M. Lartigue, lieutenant de vaisseau, a déterminées tant sur les côtes du Pérou et du Chili, que sur la partie septentrionale des côtes du Brésil, ont été insérées dans la *Connaissance des temps*.

Tous les objets dont on vient de parler forment la partie la plus essentielle des travaux du dépôt des cartes et plans de la marine; mais, pour remplir complètement sa destination, il est nécessaire qu'il publie des descriptions détaillées propres à faire connaître l'aspect que présentent en général les côtes tracées sur les cartes, et l'aspect particulier des parties les plus fréquentées. Il doit, en outre, ajouter à ces descriptions des règles propres à diriger avec sûreté les bâtiments qui s'engagent dans des passes étroites ou dangereuses, ou qui font route le long d'une côte précédée d'écueils. De pareils ouvrages ne peuvent être faits que par l'examen scrupuleux des journaux de plusieurs bâtiments qui auraient visité les mêmes lieux, ou d'après les ouvrages publiés antérieurement.

Plusieurs instructions nautiques, rédigées au Dépôt des cartes de la marine, ont été publiées ; mais celles qui sont les plus complètes sont les instructions nautiques rédigées en quelque sorte sur les lieux mêmes par les officiers qui les ont visités. On doit à M. le baron Roussin une instruction nautique détaillée sur toutes les côtes du Brésil, dont il a levé les cartes; on lui doit également une instruction nautique de la partie des côtes occidentales d'Afrique qu'il a reconnues.

M. Lartigue a publié la description de la partie des côtes du Pérou et du Chili, dont il a déterminé la position géographique. Le même officier est l'auteur d'une description des côtes de la Guyane, depuis le grand fleuve des Amazones jusqu'à Maranham ; il y a compris des détails très-remarquables sur les vents et sur l'état de l'atmosphère dans les différentes saisons de l'année, ainsi que sur le mouvement des eaux aux mêmes époques : ces détails sont d'autant plus précieux, que l'auteur a discuté les causes des phénomènes observés. Non-seulement le Dépôt général de la marine publie tous les travaux des ingénieurs hydrographes et des marins français, mais encore il s'attache à procurer à ces derniers toutes les connaissances nautiques acquises chez les autres nations maritimes, principalement en Angleterre. En conséquence, on fait graver toutes les cartes des Espagnols, des Anglais et des autres nations, lorsque l'on a la certitude qu'elles sont le résultat de travaux authentiques. Il en est de même des instructions nautiques dont le ministre de la marine ordonne la traduction, lorsqu'après avoir été mûrement examinées, elles paraissent dignes de confiance ; ces derniers travaux pour la plupart sont le fruit du zèle des officiers de la marine française. Toutes ces traductions sont soumises à l'inspection du directeur général du dépôt des cartes et plans de la marine. Ainsi le chef de ce grand établissement ne néglige aucun soin pour donner au corps entier les moyens d'ajouter à une gloire si justement acquise par les armes, celle de contribuer aux progrès et à la propagation des connaissances nautiques. Cette institution est la seule qui ait été formée en Europe sur un plan aussi étendu; la masse de ses travaux s'accroît chaque jour, et sa réputation est actuellement établie chez toutes les nations maritimes. On peut dire sans exagération qu'aucune d'elles ne peut rivaliser avec la France, soit pour la perfection des méthodes d'où dépend l'exactitude des cartes, soit pour le fini et la netteté de la gravure, soit par rapport au grand nombre de cartes et d'ouvrages successivement publiés.

Mémoires lus par M. Dupin.

Les travaux que M. le baron Dupin a présentés à l'Académie, sont tous dirigés vers de grandes questions d'utilité publique. Pour donner une juste idée de l'ensemble de ces recherches et des motifs qui animent l'auteur, nous insérons dans ces analyses l'extrait suivant, où l'on a exposé les principaux résultats auxquels il a été conduit. Une analyse plus sommaire de ces ouvrages n'en donnerait qu'une connaissance imparfaite.

1° *Recherches statistiques sur les rapports de l'instruction populaire avec le bien-être et la moralité des habitants de la France.*

Ces recherches ont pour objet de considérer l'influence de l'instruction populaire sur le bonheur public et sur les mœurs.

L'auteur compare les quarante-trois départements qui envoient, proportionnellement à leur population, le plus d'enfants aux écoles primaires, avec les quarante-trois autres départements.

Il trouve que, dans les quarante-trois premiers, on ne compte qu'un enfant naturel par vingt-six enfants qu'ils envoient à l'école; tandis que les quarante-trois derniers n'envoient que six enfants à l'école à raison de chaque enfant naturel.

L'auteur insiste d'une manière particulière sur ce qui est relatif à la moralité; il trouve que, sous ce rapport, les départements éclairés l'emportent de beaucoup sur ceux qui sont livrés à l'ignorance.

M. Dupin montre ensuite que, dans les quarante-trois départements où l'instruction commune est la plus répandue, la longueur de la vie moyenne est de quarante ans cinq mois et six jours; tandis que, dans les quarante-trois autres départements, elle est seulement de trente-huit ans et neuf mois : ce qui résulte de la différence de bien-être des deux populations, et de la prévoyance, des soins conservateurs, de la propreté, etc., qui prédominent chez la population la plus éclairée.

L'auteur présente ensuite, pour les divers arrondissements de Paris, des comparaisons analogues à celles qu'il a faites entre les divers départements de la France. Il prend pour base de ses recherches la *Statistique de la Seine*, dont plusieurs volumes ont été publiés. Il fait voir que les arrondissements de la capitale qui possèdent le plus de moyens d'instruction populaire, l'emportent sur les autres sous les rapports de bien-être, de longévité et de moralité. Il exprime ces rapports par une carte figurative à teintes plus ou moins foncées, qu'il applique sur les arrondissements dont l'instruction populaire est plus ou moins incomplète.

En terminant ces recherches, l'auteur donne l'idée de plusieurs écrits dont la composition serait d'une grande utilité pour le peuple.

M. le baron Dupin a calculé qu'un impôt proposé sur les livrets à l'usage du peuple, greverait les classes inférieures d'une taxe de 40,500,000 francs; taxe que les personnes à petite fortune seraient dans l'impossibilité de payer, et qui diminuerait beaucoup les moyens d'instruction d'une très-grande partie de la population.

Discours prononcé lors des obsèques du duc de La Rochefoucauld-Liancourt, au nom de l'Académie des sciences et des professeurs du Conservatoire des arts et métiers.

Dans ce discours, M. le baron Dupin présente l'énumération des institutions de bienfaisance et des travaux d'industrie qui doivent, soit leur création, soit leur activité et une prospérité nouvelle à ce grand citoyen.

Situation progressive des forces productives et commerciales de la France depuis 1814.

M. Charles Dupin a montré le développement annuel des forces productives et commerciales de la France depuis 1814 jusqu'en 1827. Il a réuni dans un court espace un grand nombre de résultats desquels il a tiré des rapports utiles aux théories statistiques. Dans une partie de ce travail, l'auteur a cherché la mesure de l'accroissement annuel de la production et du commerce dans la période dont il a voulu faire connaître les progrès. Voici les résultats qu'il présente :

Accroissements annuels.

	Pour cent.
De la population humaine	$\frac{2}{3}$
Du nombre des chevaux	1
Du nombre des moutons	1 $\frac{1}{4}$
Des consommations indiquées par les droits indirects	3
Idem, par les octrois	3 $\frac{1}{3}$
Des opérations industrielles indiquées par le revenu des patentes	3 $\frac{2}{3}$
De la circulation indiquée par le revenu de la poste.	3 $\frac{3}{4}$
Du commerce indiqué par les droits de la douane.	4
Des productions industrielles indiquées par l'extraction de la houille	4
Idem, par la fabrication du fer	4 $\frac{1}{2}$
Des publications de la presse périodique et non-périodique	9 $\frac{1}{4}$

Mémoire sur la vie civile et l'économie domestique des Romains, par M. Moreau de Jonnès.

M. Moreau de Jonnès a continué de présenter à l'Académie, dans le cours de cette année, des communications importantes sur des sujets très-variés. Nous insérons ici l'extrait suivant d'un travail qui intéresse spécialement la statistique, et dans lequel on a exposé les résultats des recherches de l'auteur sur la vie civile et l'économie des Romains au quatrième siècle.

Une découverte archéologique, faite récemment dans l'Asie-Mineure, a permis de joindre au secours que prêtaient les historiens pour traiter ce sujet, l'avantage de données numériques, nouvelles et authentiques. Le monument qui a fourni ces données est une inscription tabulaire, dont les fragments rassemblés et réunis ont fait connaître un édit de Dioclétien, publié l'an 303 de notre ère, et fixant le maximum du prix du travail et des subsistances dans l'empire romain. Aucun monument de l'antiquité ne nous a conservé une aussi longue suite de témoignages positifs sur l'économie domestique des Romains.

M. de Jonnès a déterminé, d'après ce document, quel était, sous le règne de Dioclétien, le maximum du prix du travail et des subsistances, en monnaie romaine et en monnaie de France, valeur intrinsèque de l'argent; quelle était à cette époque leur valeur représentative. Cet examen fait connaître quels étaient, dans l'empire romain, il y a quinze siècles, l'élévation du prix du travail agricole et industriel, la valeur relative de l'argent et l'étendue de la circulation du numéraire, l'abondance ou la rareté de tel ou tel produit naturel, l'usage plus ou moins commun de telle sorte d'aliments, la multiplication du bétail et des troupeaux, les progrès de la culture potagère, l'étendue de la production des vignobles de diverses qualités; enfin les relations de valeur existant entre les produits de l'agriculture et ceux de l'industrie. On peut ainsi apprécier le degré de prospérité auquel était parvenue, à cette époque éloignée, chacune de ces branches principales de la richesse publique.

L'ensemble des recherches de l'auteur l'a conduit à reconnaître que, comparées au prix du travail, les subsistances étaient, en Italie, sous Dioclétien, moitié plus chères qu'elles ne le sont en France aujourd'hui; que, comparées à leur valeur un siècle auparavant, elles avaient doublé de prix, et que, selon la nature de chacune, il fallait, pour les acheter, dix à vingt fois autant d'argent qu'il en faut maintenant pour en avoir la même quantité. Une différence si extraordinaire suppose nécessairement une abondance de numéraire prodigieuse et une disproportion funeste entre la quantité des produits naturels et industriels et l'étendue des besoins de la consommation. L'auteur a déduit ce double résultat des témoignages des historiens contemporains, et de ceux de l'édit de Dioclétien. D'après ces vues, l'auteur trace le tableau de l'économie sociale sous le règne de ce prince; cette discussion le conduit à des conséquences très-remarquables sur l'état politique de l'empire romain.

RAPPORTS.

Rapport de M. Mathieu sur un Mémoire de M. Francœur, relatif aux mesures anglaises.

M. le professeur Francœur, dont les savants ouvrages ont contribué à répandre les connaissances mathématiques les plus utiles à la société, a présenté à l'Académie des sciences un Mémoire sur les mesures anglaises, et sur leurs rapports avec les nouvelles mesures usitées en France : une commission, composée de MM. Legendre, Mathieu et Dulong, a examiné ce travail de M. Francœur, et le rapport présenté par M. Mathieu a fait connaître le but et l'utilité de ce travail. Les remarques de la commission ont perfectionné cette comparaison précise des mesures légales des deux pays de l'Europe où les usages civils ont retiré le plus d'avantage de l'application des théories mathématiques.

Le gouvernement anglais avait désigné, parmi des savants justement célèbres, une commission chargée de présenter un système uniforme de poids et mesures pour toute la Grande-Bretagne. Cette commission a proposé l'adoption générale de la plupart des mesures déja en usage à Londres et dans une grande partie de l'Angleterre; mais pour que l'on pût au besoin retrouver les unités de longueur et de poids, elle a cherché, par des expériences précises, leur rapport avec la longueur du pendule à seconde à Londres, et avec le poids d'un pouce cube d'eau distillée.

Une décision légale du 17 juin 1824 a établi l'usage de ces mesures sous le nom de mesures impériales, et a prescrit, à dater du 1er mai 1825, l'abolition de toutes les autres mesures dans le royaume.

Le yard impérial, déclaré mesure légale, est la distance prise à la température de 62° Fahrenheit entre deux points marqués sur deux clous en or fixés à une règle de cuivre, confiée à la garde du clerc de la chambre des communes, et sur laquelle on lit: Yard étalon de 1760.

Le capitaine Kater, en suivant un procédé fort ingénieux, dont la première idée appartient à M. de Prony, avait trouvé, en 1818, que le pendule qui bat la seconde à Londres sous la latitude 51° 31′ 34″ dans la maison de M. Brown à *Port-*

land place, a pour longueur 39,13929 pouces de l'étalon de sir George Schuckburgh. Ayant comparé entre eux plusieurs étalons de yard (philos. Trans. de 1821), il a trouvé une différence si petite entre l'étalon de sir George Schuckburgh et celui de 1760, que l'on peut les considérer comme parfaitement identiques. Ce dernier, construit par Bird en 1760, est précisément celui qui, sur la demande de la commission des poids et mesures, a été adopté pour l'unité de longueur. C'est d'après ces différentes déterminations du capitaine Kater, que la loi définit le yard impérial comme il suit : *Le pendule simple qui, dans le vide, à la latitude de Londres et au niveau des mers, bat la seconde sexagésimale de temps moyen par des oscillations infiniment petites, a pour longueur* 39,1393 *pouces.*

Si l'étalon du yard impérial se perdait ou s'altérait, on ne pourrait pas le retrouver exactement par la mesure du pendule, en suivant seulement ces indications de la loi. Il faudrait nécessairement refaire les expériences du pendule à Londres dans l'endroit même où le capitaine Kater a fait les siennes; car on sait maintenant que l'on peut trouver des discordances de 3 à 4 centièmes de millimètre dans les longueurs du pendule à secondes mesurées à une même latitude sous des méridiens différents.

L'unité de poids reconnue par la loi anglaise est la livre troy construite en 1758. Sir George Schuckburgh a donné, dans les *Transactions philosophiques* de 1798, le détail des expériences qu'il a faites avec un cube, un cylindre, et une sphère de cuivre qu'il pesait dans l'air et dans l'eau distillée, pour déterminer un étalon de poids. On ne peut élever aucun doute, dit le capitaine Kater (phil. Trans. de 1821), sur la partie de ces expériences qui est relative aux pesées; mais comme sir George Schuckburgh n'est pas entré dans de grands détails sur la méthode qu'il a suivie pour mesurer les dimensions du cube, de la sphère et du cylindre, il était à désirer que cette opération fût répétée avant que la commission des poids et mesures fît son rapport définitif. C'est au moyen des données de sir George Schuckburgh, et des dimensions plus précises du cube, du cylindre et de la sphère, obtenues par le capitaine Kater, que les commissaires des poids et mesures ont déterminé le poids d'un pouce cube d'eau distillée; et le résultat auquel ils sont arrivés est consigné dans l'article suivant de la décision légale : *Le pouce cube d'eau distillée, pesé dans l'air avec des poids de cuivre, à la température de* 62° *Fahrenheit, le baromètre étant à* 30 *pouces, pèse* 252,458 *grains troy, dont* 5750 *font la livre troy, et* 7000 *la livre avoir de poids.*

Dans la première partie de son Mémoire, M. Francœur fait une énumération complète des différentes mesures qui se déduisent des deux unités que nous venons de faire connaître, en remontant aux diverses expériences qui en ont préparé l'adoption. M. Francœur remarque qu'en adoptant les mesures de Londres, on a cependant remplacé les mesures de capacité qui étaient différentes pour la bière, le vin, le blé, etc., par une mesure unique pour toutes les substances.

Dans la seconde partie, M. Francœur se propose de déterminer le rapport des mesures anglaises et françaises, en s'appuyant sur les définitions que la loi anglaise donne des deux unités fondamentales. En se conformant aux seules dispositions de la loi, M. Francœur avait réduit à la latitude de

Londres la longueur du pendule à secondes mesurée à Paris par Borda; il obtenait ainsi en partie du mètre la longueur du pendule à Londres. Les remarques de la commission, fondées sur une comparaison que le capitaine Kater a faite avec beaucoup de soin, du yard avec les mètres étalons de l'observatoire de France et des archives, ont donné le résultat suivant : le yard équivaut à $0^{m}91438348$; on connaît ainsi avec une grande précision le rapport du yard impérial avec le mètre français.

Quant au rapport des poids français et anglais, on parvient, comme il suit, à les connaître assez exactement. M. Hallstrom a donné, dans les Mémoires de l'Académie de Suède, des expériences faites avec de très-grands soins, et calculées par la méthode des moindres carrés sur la pesanteur spécifique et la dilatation de l'eau depuis zéro jusqu'à 30°; il trouve le maximum de densité à 4°,1 : l'incertitude qui peut rester sur cette valeur probable étant d'un quart de degré, les résultats obtenus par M. Hallstrom servent à trouver les nombres dont il s'agit. Nous insérons ici la partie du rapport des commissaires qui concerne cette discussion. D'après le rapport entre le mètre et le yard, on trouve qu'un pouce cube d'eau distillée à la température normale de 62° Fahrenheit ou $16^{\circ}\frac{2}{3}$ centigr., est égal à 16,38617 centimètres cubes, le mètre étant ainsi à sa température normale zéro : ces 16,38617 centimètres cubes d'eau distillée à la température de $16\frac{2}{3}$, étant ramenés au maximum de densité, sont équivalents en poids à $\frac{16,386174}{1,000974}$ ou 16,37023 centimètres cubes, en admettant, d'après les expériences de M. Hallstrom, qu'un volume d'eau représenté par l'unité au maximum de densité ou à 4°, 1 cent. devient, par sa dilatation, 1,000974 à 16° $\frac{2}{3}$ cent. : or 16,37023 grammes, tel est le nombre de grammes qui équivalent à un pouce cube d'eau distillée à 16° $\frac{2}{3}$ pesé dans le vide; mais, d'après la loi anglaise, ce pouce cube d'eau doit être pesé avec des poids de cuivre dans l'air à 16° $\frac{2}{3}$, le baromètre étant à 30 pouces : il faut donc chercher la perte de poids qu'éprouve dans l'air un pouce cube ou 16,38617 centimètres cubes d'eau, et le poids en cuivre. On trouve, par le calcul, que 16,38617 centimètres cubes d'air pèsent 0,020074 grammes. Quant au poids de cuivre, dont la densité est 8, 2, celle de l'eau étant l'unité, le volume d'air qu'il déplace est 8, 2 fois plus petit et son poids seulement de 0,002448 grammes. La différence entre ces deux pertes de poids dans l'air donne enfin 0,017626 pour ce qu'il faut retrancher du poids, 16,37023 grammes, d'un pouce cube d'eau dans le vide, et l'on obtient 16,3526 pour le poids d'un pouce cube d'eau distillée pesée dans les circonstances exigées par la loi anglaise: mais cette même loi veut que ce poids soit de 252,458 grains, dont 5760 font la livre troy; on trouve d'après cela, que la livre troy vaut 373,09562 grammes, et l'once 31,0913 grammes. L'auteur du Mémoire ne trouve que 31,0832 : ce résultat est un peu faible, parce qu'on y suppose une trop grande dilatation de l'eau, et parce qu'on n'a pas eu égard au poids de l'air déplacé par le poids de cuivre. Le résultat que nous trouvons, ajoute le rapporteur, s'accorde, à 2 ou 3 milligrammes près, avec les pésées que nous avons faites d'une once construite avec soin en Angleterre et envoyée à un fabricant de balances de Paris.

Les conclusions proposées, et que l'Académie a adoptées, sont les suivantes : Le rapport du yard impérial au mètre français a été obtenu avec une grande précision par une comparaison immédiate de ces deux étalons; le mètre vaut 39,37079 pouces anglais, et le yard $0^{m},91438348$. On peut accorder une entière confiance à toutes les mesures linéaires de superficie et de volume qui seront déduites de ces deux nombres.

Quant à la valeur de l'once, 31,0913 grammes, que nous avons obtenue, en faisant par le calcul toutes les réductions convenables, et en adoptant les déterminations les plus précises sur la dilatation de l'eau et le poids de l'air, nous pensons que l'on peut la regarder comme exacte, à 3, 4 ou 6 milligrammes près, et que l'on peut l'employer lorsqu'on n'aura pas besoin d'une plus grande précision, jusqu'à ce qu'on ait obtenu, par des pesées directes, exécutées avec des étalons authentiques, ce rapport du kilogramme à la livre troy.

Nous proposons à l'Académie d'accorder son approbation à un travail dans lequel M. Francœur a résolu avec adresse un problème intéressant. Si nous avons apporté quelques modifications à son résultat pour le poids de l'once troy, c'est principalement parce que nous avons employé pour la dilatation de l'eau une détermination qui nous paraît mériter plus de confiance que toute autre.

Rapport sur un modèle de train de voiture, présenté par M. Van-Hoorick.

M. Van-Hoorick, inspecteur général des haras, a présenté à l'Académie un modèle de train de voiture à quatre roues, destiné à prévenir, dans un grand nombre de cas, le versement de ce genre de voitures. Une commission, composée de MM. de Prony, Girard et Molard, a examiné cette nouvelle disposition proposée par M. Van-Hoorick. Il a été reconnu que le procédé indiqué ne peut qu'être avantageux : il consiste dans l'emploi de flèches cylindriques de fer susceptibles de tourner sur les deux essieux de l'avant et de l'arrière-train, au lieu d'être adhérentes comme les flèches ordinaires. Ce changement ne nuit point à la solidité ; il simplifie la construction, et peut, dans certains cas, prévenir le versement. Une première épreuve de l'application de la flèche mobile à une calèche a été faite sous les yeux des commissaires, et ils ont vu la voiture franchir un obstacle considérable sans être renversée. Au reste, de nouvelles expériences, qui seront faites par l'administration royale des Messageries, ne tarderont pas à prononcer définitivement sur l'utilité de cette disposition. L'Académie a adopté la conclusion du rapport de la commission présenté par M. Girard (rapporteur), chargé d'examiner ce modèle. L'Académie a donné son approbation à l'invention de M. Van-Hoorick, dont l'expérience a déja prouvé l'utilité.

Rapport sur le cours de mécanique appliquée aux machines, présenté par M. Poncelet.

MM. Arago et Dupin (rapporteur) ont rendu compte à l'Académie d'un ouvrage qui a pour objet l'enseignement de la mécanique appliquée aux machines. L'auteur est M. Poncelet, capitaine au corps royal du génie militaire, et professeur de mécanique à l'école d'application de l'artillerie et du génie militaire à Metz.

M. Poncelet a rendu aux sciences des services que l'Académie a déja appréciés; il a traité avec succès diverses questions de géométrie: tous ses Mémoires contiennent des recherches importantes. Il a beaucoup perfectionné les roues hydrauliques, et l'Académie a couronné, en 1824, le travail important dont la mécanique lui est redevable.

L'ouvrage spécial qui est l'objet du rapport que nous venons d'indiquer, contient la première partie du cours que ce savant professeur fait à l'école de Metz. Il comprend l'enseignement de la mécanique appliquée à la science des machines.

M. Poncelet a présenté la partie de son cours qui se rapporte à la théorie générale et au calcul des moteurs et des machines considérées comme simples agents de la transmission du mouvement et des forces.

La seconde partie traitera des principales machines employées dans les travaux de l'artillerie et du génie militaire.

La première partie est subdivisée en trois sections, qui traitent successivement:

1° De l'évaluation des effets ou du travail des machines et des moteurs.

2° Des principaux moyens de regulariser l'action des forces qui agissent sur les machines, et d'assurer l'action du mouvement:

3° De l'évaluation des résistances passives dans les machines.

Le rapport fait connaître, avec beaucoup de soins et de détails, la marche que suit l'auteur dans chacune de ces parties principales. Il est terminé par la conclusion suivante, que l'Académie a adoptée: « Nous pensons que l'ouvrage de

M. Poncelet est digne de l'approbation de l'Académie, et nous proposerions de l'insérer dans la collection des Mémoires des savants étrangers, s'il n'appartenait pas à S. Ex. le ministre de la guerre de décider la publication illimitée de cette production. »

Rapport sur un essai de navigation intérieure de la France, présenté par M. Brisson.

M. Brisson ayant présenté à l'Académie le résultat d'un travail très-considérable, sous le titre d'Essai de navigation intérieure de la France, une commission composée de MM. de Prony, Lacroix et Dupin (rapporteur), a été chargé de faire un rapport sur cet important travail.

Le rapport indique l'ensemble des résultats obtenus par M. Brisson sur la direction des voies navigables, la largeur des canaux, la dépense que leur construction doit exiger, les difficultés principales qu'elle pourrait présenter.

M. Dupin emploie une notation qui permet d'écrire avec concision les données du cours d'un canal, montées, descentes, longueurs horizontales et dénivellations verticales. Ce rapport, que toutes les personnes étrangères aux travaux de l'art peuvent lire avec fruit, offrira des résultats utiles aux administrateurs et aux citoyens qui s'occuperont à l'avenir des voies commerciales de la France.

M. Brisson, auteur de ce travail, est connu depuis longtemps des géomètres par de savantes et ingénieuses recherches d'analyse. L'exposé de ses vues sur la navigation intérieure de la France prouve, qu'il réunit à la science du calcul les connaissances administratives et expérimentales qui intéressent la société.

Rapport sur un Mémoire relatif à quelques cas de rupture des solides, présenté par M. Vicat.

M. Vicat, ingénieur en chef des ponts et chaussées, connu par un travail fort important sur les mortiers hydrauliques, a présenté à l'Académie un Mémoire intitulé : Observations physico-mathématiques sur quelques cas de rupture des solides. Au nom d'une commission dont faisaient partie MM. de Prony et Dupin, M. Girard, rapporteur, a rendu compte, d'une manière très-favorable, du travail de M. Vicat.

Galilée, Léibnitz et Mariotte, qui ont traité les premiers de la résistance des corps solides, les ayant considérés comme formés de fibres élastiques appliquées parallèlement entre elles, ont donné des formules qui conviennent rigoureusement aux bois, et, en général, à toutes les substances végétales que ces géomètres avaient en vue. Mais si on suppose aux corps solides une contexture différente, si on les regarde comme formés de molécules agglutinées, ce qui a lieu pour les pierres et autres substances minérales, il est évident que leur résistance doit suivre d'autres lois, qu'il est très-utile d'assigner.

Coulomb est le premier qui se soit occupé de la détermination de ces lois dans un mémoire qui fait partie du septième volume de la Collection des savants étrangers. M. Girard s'est livré, en 1809, à de nouvelles recherches sur cette matière : enfin, elle paraît s'être considérablement développée par de nouvelles observations de M. Vicat et les conséquences qu'il en a tirées.

Nous transcrivons ici les conclusions du rapport, que l'Académie a adoptées.

« Le zèle et la persévérance de l'habile ingénieur, auteur du Mémoire, n'ont pas besoin d'être encouragés : ce qui caractérise ses travaux, ce qui les rend véritablement utiles, ce sont les soins qu'il apporte à en approfondir l'objet, et la sagacité avec laquelle il y parvient. Vos commissaires ne peuvent qu'inviter M. Vicat à faire connaître, le plus tôt possible, l'important Mémoire qu'il annonce, et dont il n'a soumis que l'introduction à votre jugement. »

Rapport sur un Mémoire de M. Clémnt-Désormes relatif à un phénomène que présente l'écoulement des fluides élastiques.

M. Clément-Désormes a soumis à l'Académie un Mémoire relatif à un phénomène que présente l'écoulement des fluides élastiques, et au danger des soupapes de sûreté employées dans les appareils à vapeur. Le 10 septembre 1827, une commission composée de MM. Biot, Poisson et Navier, rapporteur, a fait un rapport à ce sujet.

Le phénomène exposé dans ce Mémoire, et qui a excité l'attention des physiciens, a été observé pour la première fois par M. Griffith, ingénieur des machines de Fourchambault, et l'expérience a été répétée, en septembre 1826, aux hauts fourneaux de Torreton en Berri, en présence de MM. Thénard et Clément-Désormes. Il consiste en ce que, si l'air fortement comprimé dans un réservoir jaillit par un orifice ouvert dans une surface plane, et que l'on présente au choc de la veine d'air une planche ou un disque de métal, ces corps, repoussés d'abord par l'action de ce choc, sont attirés au contraire lorsque, en surmontant cette répulsion, on les approche à une très-petite distance des rebords plans de l'orifice. L'écoulement du fluide s'établit alors, suivant des directions divergentes, dans le petit intervalle qui reste entre les deux plans, et il en résulte une action qui retient le plan mobile, en sorte qu'on ne peut plus l'écarter du plan de l'orifice sans surmonter une résistance.

Cette expérience a été répétée et variée de diverses manières par M. Clément, en substituant la vapeur aqueuse à l'air atmosphérique. Ce savant physicien, par des expériences directes, a mis en évidence la diminution de pression qui a lieu dans le fluide qui s'écoule entre les bords de l'orifice et le disque, et qui est la seule cause à laquelle on puisse attribuer cette singulière adhérence par laquelle le disque se trouve maintenu dans une position où il ferme, pour ainsi dire, passage au fluide, ou du moins en obstrue beaucoup l'écoulement. Il a montré l'analogie du mode d'écoulement dont il s'agit avec le cas où le fluide jaillirait hors d'un orifice par un tuyau divergent; cas dans lequel les mêmes phénomènes de diminution de pression se manifestent, ainsi qu'on l'avait observé depuis long-temps sur les fluides incompressibles. M. Clément a fait aussi des remarques importantes relatives aux changements de température, que subit un jet de vapeur en entrant dans l'air atmosphérique. L'expérience prouve qu'un jet, sortant avec peu de vitesse d'un réservoir où la vapeur n'est échauffée qu'à 100° environ, peut brûler fortement, mais qu'il n'en est plus de même lorsque la vapeur, plus fortement échauffée, sort avec une densité et une vitesse beaucoup plus grandes, la température du jet s'abaissant alors considérablement, aussitôt qu'il a dépassé l'orifice.

Les commissaires ont distingué ce qui concerne les fluides incompressibles de l'effet qui se rapporte aux fluides élastiques. Ils ont rappelé les recherches relatives à la pression qui a lieu dans les diverses parties d'un fluide incompressible coulant dans un vase, recherches qui sont dues à Daniel Bernoulli, et dont les résultats ont été confirmés par l'expérience. Ils ont fait également mention de la solution donnée par l'un d'entre eux pour le cas de l'écoulement d'un fluide élastique. On reconnaît par cet examen qu'il peut exister, dans l'intérieur du tuyau que parcourt le fluide, une pression inférieure à la pression atmosphérique dans deux cas, savoir: quand le fluide remplit entièrement les sections du tuyau, et quand la veine de fluide jaillit sans toucher aux parois de ce tuyau. On conçoit, dans ce dernier cas, que le fluide qui s'écoule tend, par un effet de frottement, à entraîner l'air qui l'entoure, et qui est contenu entre la veine et la paroi, et que cet air ne peut se renouveler sans qu'il s'établisse dans le tuyau une pression un peu inférieure à la pression atmosphérique. C'est à ce dernier cas que paraissent appartenir les phénomènes observés par M. Clément, et qui ont été depuis reproduits par quelques autres physiciens.

A l'égard de l'influence que ces phénomènes peuvent avoir sur la sûreté des appareils dans lesquels on produit la vapeur aqueuse, les commissaires ont remarqué que la production des effets dont il s'agit supposait certaines proportions dans les parties de l'appareil, et certaines relations entre le poids dont la soupape est chargée, l'adhésion qui s'établit entre les bords de l'orifice et la soupape, et l'excès momentané de force élastique acquis par la vapeur. Les limites dans lesquelles ces effets peuvent avoir lieu ne sont pas assez bien déterminées pour que l'on puisse aujourd'hui apprécier la probabilité d'un accident dont il serait cause. Cette probabilité diminuera beaucoup si, comme on le fait ordinairement, on donne peu de largeur aux bords de l'orifice et au disque. Il suffit d'ailleurs que l'on puisse concevoir la possibilité d'un accident de ce genre, pour que l'on doive chercher à l'éviter, au moyen de la précaution qui vient d'être indiquée, ou même en employant des soupapes de sûreté disposées d'une autre manière.

Les conclusions qui ont été adoptées par l'Académie sont, que le Mémoire est très-digne d'intéresser les physiciens, soit par la nouveauté des phénomènes qui y sont décrits, soit par les notions que l'auteur s'en était formées, soit enfin par les avantages que les arts peuvent recueillir de la connaissance de ces phénomènes, et qu'il doit être approuvé et imprimé dans le recueil des savants étrangers.

Rapport sur un essai de géographie méthodique et comparative, présenté par M. Denaix.

M. Denaix, ancien élève de l'École polytechnique et chef de bataillon au corps d'état-major, ayant présenté à l'Académie un ouvrage manuscrit intitulé : *Essai de géographie méthodique et comparative,* M. le comte Andréossy et M. Lacroix, rapporteur, ont rendu compte à l'Académie de cet important ouvrage de M. Denaix. Ce rapport contient des vues très-remarquables sur les principes fondamentaux de la géographie, et rappelle un mémoire précédent de M. Girard, sur les moyens d'obtenir des nivellements multipliés dont l'administration publique et la géographie naturelle retireraient les plus grands avantages.

Le rapport de la commission sur le travail de M. Denaix est détaillé et très-favorable. Nous insérons ici les conclusions.

« L'ouvrage que M. Denaix a présenté nous paraissant digne « d'attention, non-seulement par le fond de la méthode, mais « encore par la variété des documents qu'il a réunis et par la « manière dont il les a coordonnés, nous pensons que l'Aca- « démie doit encourager ce travail par son approbation, et « inviter l'auteur à poursuivre la publication de son ouvrage, « propre, ce nous semble, à exercer une influence très-utile « sur l'enseignement et l'étude de la géographie.

Ces conclusions ont été adoptées par l'Académie.

Rapport sur l'enseignement du dessin linéaire.

M. le baron de Sylvestre, ayant été prié de faire un rapport à l'Académie, au sujet d'un ouvrage de M. Francœur sur l'enseignement du dessin linéaire, a exposé l'objet de cet ouvrage et les avantages que les arts en doivent retirer.

Le travail de M. Francœur est divisé en six sections. Dans la première, l'auteur traite du dessin linéaire à vue levée : les élèves, soit qu'ils s'exercent individuellement, soit qu'ils travaillent simultanément, tracent, sur la demande du professeur, des lignes horizontales, verticales, obliques ; ils leur donnent une longueur déterminée; ils les divisent en parties proportionnelles; ils mènent des parallèles dans toutes les directions à des distances indiquées ; ils forment des angles, des triangles et des rectangles de toutes dimensions. Le tracé successif et souvent répété de toutes les figures rectilignes familiarise les élèves avec la construction à vue et à main-levée de tous les corps réguliers; le professeur rectifie, sous leurs yeux, leur travail, à l'aide de la règle et du compas, dont il est seul autorisé à faire usage.

On pourrait d'obord borner à ce simple exercice le dessin linéaire, puisqu'il ne s'agit que de rendre l'œil de l'élève juste et sa main sûre, et qu'un long exercice des procédés compris dans la première division produit ordinairement cet effet; Mais M. Francœur ouvre aux élèves, dans les sections suivantes, une autre carrière d'applications qu'il leur est bien utile de parcourir.

Dans la seconde section, il cherche à les familiariser avec l'emploi de la règle et du compas, pour parvenir au tracé géométrique des mêmes figures qui avaient été dessinées à main-levée, ou pour leur apprendre à pouvoir donner à leurs travaux cette précision nécessaire pour la construction; précision que la plus grande habileté de l'œil et de la main ne saurait jamais atteindre.

Dans la troisième section, M. Francœur expose les premiers éléments de l'art des projections, à l'aide desquelles il donne des notions de la levée des plans et de l'art des constructions.

Il cherche à établir, dans la quatrième, pour les élèves qui se destinent à la pratique des beaux-arts, quelle est la transition la plus convenable entre le dessin rigoureusement indiqué des figures géométriques, et celui des figures naturelles irrégulières. Il s'attache, avec un soin tout particulier, à faciliter ce passage de ce qu'on pourrait appeler la pratique du métier, à l'exercice de l'art, et à signaler le danger de laisser substituer la roideur à la rectitude par un emploi inconsidéré de ces moyens de régularité. Il n'abandonne pas néanmoins encore ses élèves à leur simple coup-d'œil; et, continuant l'usage des mesures et des lignes pour les principales divisions et pour les rectifications qui pourraient être nécessaires, il semble placer sous la main même de l'élève un régulateur toujours présent qui prévient les erreurs, et lui donne le moyen de corriger lui-même les fautes qui auraient pu lui échapper.

M. Francœur part de ce principe, que toute figure, quelque compliquée qu'elle soit, peut être ramenée aux rectangles et aux cercles avec l'habitude, déja acquise par l'élève, de tracer correctement des rectangles et des cercles de toutes les dimensions, et de les diviser en parties proportionnelles; il trace et divise ainsi les masses des objets qu'il veut représenter, afin d'en resserrer les détails dans de justes limites. Cette méthode est celle qu'emploient les géographes lorsqu'ils veulent tracer une carte ou un plan; c'est celle qu'emploient les peintres lorsqu'ils veulent réduire un grand tableau, excepté qu'ils font, avec la règle et le compas, ce que les élèves qui ont pratiqué le dessin linéaire peuvent facilement exécuter à vue. Après avoir dessiné quelque temps, ainsi dirigé par des carreaux proportionnels tracés sur l'original et sur la copie, l'élève s'habitue peu à peu à substituer des lignes idéales aux lignes matérielles de son réseau; une réglette marquée de divisions équidistantes, qui lui sert, tant pour les niveaux que pour les à-plombs, le prépare à se passer de toute espèce de régulateur. L'auteur termine cette section par des considérations sur les dimensions de toutes les parties du corps humain qui doivent être l'objet de l'instruction donnée aux élèves. Il cite, à cet égard, les règles données par *Jean Cousin*, en faisant observer qne ces règles ne sont pas rigoureuses, et peuvent seulement présenter des termes moyens entre les meilleures proportions. C'est surtout ce genre d'études auquel les Anciens s'appliquaient avec une grande prédilection, et pour lequel les plus habiles peintres et sculpteurs avaient écrit, sous le titre de *canons,* des règles que nous ne connaissons plus que par leur renommée, mais qui sont bien à regretter, si elles ont contribué à former les artistes dont les productions nous semblent inimitables, ou bien si ces préceptes sont le résultat de profondes méditations de ces artistes habiles.

M. Francœur expose, dans la cinquième section de son ouvrage, les règles de la perspective; il a réuni dans un petit nombre de pages ce qui est à l'usage des peintres, et peut être compris et retenu par eux, avec une telle facilité, qu'on doit être surpris qu'un aussi grand nombre dédaigne de consacrer quelques journées à acquérir une connaissance si nécessaire à l'exécution de leurs travaux.

Un atlas *in-folio,* composé de douze tableaux, présente le tracé de toutes les figures qui doivent servir de modèle aux élèves dans l'étude des différentes sections de l'ouvrage.

L'auteur aurait pu terminer ici son livre; tout ce qui concerne le dessin linéaire était exposé. Un jeune élève qui posséderait parfaitement toutes les parties de cet ouvrage, serait en état de faire des progrès rapides en suivant, pour l'étude de l'art, les leçons de nos habiles professeurs. Mais l'auteur a voulu tirer un nouveau parti de son ouvrage, pour la plus grande instruction de ceux des élèves qui, en dessinant ces figures géométriques, auraient parfaitement compris les préceptes spéciaux. Il a voulu leur faciliter les moyens d'appliquer utilement le calcul et la connaissance des figures de géométrie qu'ils avaient acquise; et il a termine sa seconde édition, comme il avait terminé la première, par une série de problèmes où les calculs sont appliqués à la géométrie. Il a réuni en conséquence en un corps de doctrine les connaissances simples de la géométrie et du calcul; il a exposé la série des règles et des problèmes les plus fréquents dans les usages ordinaires de la vie, et il y a joint des exemples numériques pour faire concevoir l'application des principes. Cet exercice, qui occupe agréablement les élèves, en présentant un but manifestement utile, leur donnera lieu d'apprécier l'étendue des résultats de leur travail, de faire eux-mêmes leurs devis, de composer leurs mémoires, de calculer le prix et la quantité de matériaux nécessaires à leurs entreprises, enfin de faire toutes les évaluations qui peuvent être nécessaires.

Je me suis arrêté avec intérêt, dit en terminant M. le rapporteur, sur l'ouvrage de M. Francœur, dont vous m'aviez ordonné de vous soumettre l'analyse. Il m'a paru que l'auteur avait bien rempli son objet; il est à désirer que ce livre fasse partie de l'instruction générale élémentaire. L'industrie française lui devra des succès. Un objet non moins important de ce travail est l'indication des exercices préparatoires à l'étude des arts d'imitation.

OUVRAGES IMPRIMÉS.

Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral, par M. Lacroix.

Les avantages que les sciences mathématiques ont retirés des traités publiés par M. Lacroix, sont trop généralement connus pour qu'il soit nécessaire de les rappeler : les questions les plus importantes et les plus difficiles y sont exposées avec beaucoup de méthode et de clarté, et ces ouvrages forment le corps de doctrine mathématique le plus complet qui existe dans aucune langue.

L'auteur vient de publier la quatrième édition de son Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral. Après avoir expliqué les principes fondamentaux de l'analyse différentielle, les règles de ce calcul et les théorèmes qui servent au développement des fonctions, l'auteur présente les applications de l'analyse à la recherche des racines égales, à la théorie des courbes, et à l'importante question des maximum. On reconnaît de la manière la plus claire, en lisant ce traité, qu'il ne peut rester aucun doute sur l'exactitude rigoureuse du calcul différentiel. Les principes des théories de Newton et de Leibnitz, ceux qui ont été exposés dans les ouvrages de d'Alembert et de Lagrange, n'ont aucune différence essentielle ; ils constituent une théorie unique, fondée sur l'application de l'analyse générale des nombres à la méthode d'exhaustion des Anciens.

Après les applications à la théorie des courbes, l'auteur présente celles qui se rapportent aux surfaces courbes et aux courbes à double courbure ; ensuite il traite avec non moins de clarté des différentes parties du calcul intégral, et il en donne les applications à la géométrie des courbes et des surfaces courbes. Il passe à l'intégration des équations différentielles, et traite successivement des branches de cette importante analyse, et notamment des équations où il entre des différentielles partielles. Il donne ensuite la méthode des variations, qui est, à proprement parler, l'application de la théorie élémentaire des *plus grands* ou des *moindres,* au cas où le nombre des inconnues est infini. L'ouvrage est terminé par un appendice très-important, où l'on expose les éléments du calcul des différences et des séries. Dans cette partie de l'ouvrage sont indiquées les découvertes les plus récentes des géomètres sur l'analyse des intégrales définies.

Cet ouvrage réunit toutes les conditions que l'on peut désirer dans une exposition des principes de la science du calcul. Il contient une instruction solide, suffisamment et clairement développée, éminemment propre aux grands établissements où l'on admet ceux qui se destinent aux différentes parties du service de l'état.

Exercices mathématiques de M. Cauchy.

M. Cauchy a continué de présenter à l'Académie ses exercices mathématiques.

Les livraisons de ces savantes publications, offertes cette année, comprennent depuis la 11^e^ jusqu'à la 23^e^.

Histoire de l'Astronomie au dix-huitième siècle, par M. Delambre, publiée par M. Mathieu.

Le dernier volume de l'Histoire de l'Astronomie de M. Delambre a été offert à l'Académie dans le cours de cette année : le monde savant a vu avec un grand intérêt une publication qui complète celle d'un ouvrage important que la mort de son illustre auteur semblait devoir laisser imparfait.

Huit feuilles seulement de l'Histoire de l'Astronomie au XVIII^e siècle étaient imprimées quand les sciences perdirent M. Delambre. Mais M. Mathieu a bien voulu se charger de revoir ses manuscrits, de vérifier sur les ouvrages originaux les diverses citations, et d'y ajouter, lorsque cela était nécessaire, des notes explicatives.

Une table dans laquelle le lecteur pût trouver une analyse détaillée des matières, était indispensable pour faciliter les recherches dans un ouvrage qui présente une si grande variété d'objets. M. Mathieu en a ajouté une qui ne laisse rien à désirer.

L'Histoire de l'Astronomie n'est pas le seul ouvrage que M. Delambre ait laissé inédit : on a trouvé également dans ses papiers une Histoire de la mesure de la terre. M. Mathieu se propose de faire jouir le public de cette importante production ; il acquerra ainsi de nouveaux droits à la reconnaissance des amis des sciences.

M. le comte de Cassini, membre de l'Académie des Sciences, section d'astronomie, vient de publier des réflexions relatives à divers passages de l'ouvrage de M. Delambre sur l'Histoire de l'Astronomie au XVIII^e siècle. On se borne ici à faire mention de ces remarques : elles doivent, sous tous les rapports, attirer l'attention de ceux qui veulent acquérir une connaissance éclairée et impartiale des travaux d'astronomie. Nous ferons connaître plus en détail l'objet de ces remarques dans les analyses subséquentes.

Partie historique du voyage de l'Uranie.

L'Académie continue de recevoir les différentes parties de la Relation du voyage de l'*Uranie ;* les livraisons de botanique et celles qui intéressent l'histoire ont été présentées cette année.

Un volume de cette dernière partie, rédigée par M. le capitaine Freycinet, qui commandait cette mémorable expédition, a déja été mis au jour, ainsi que huit livraisons des planches destinées à composer l'Atlas de cet important ouvrage ; ces planches comprennent des cartes, des paysages, des portraits et des sujets très-divers, propres à faire connaître les usages et les mœurs des peuples visités pendant l'expédition.

Une partie très-considérable du volume offert cette année à l'Académie, est consacrée au Brésil : cette partie formant un tout complet, en donne une idée exacte qui nous paraît le moyen le plus sûr de faire connaître la méthode que l'auteur a suivie, et l'on pourra juger des avantages que les sciences vont retirer de cette grande collection.

M. de Freycinet rapporte d'abord d'une manière générale les particularités de son séjour à Rio-Janeiro : il rappelle les opérations entreprises pour l'intérêt des sciences dans cette colonie portugaise, et il paie un tribut de reconnaissance aux personnes qui ont facilité ses recherches, ou lui ont procuré des documents utiles.

Un premier chapitre contient un résumé succinct, mais complet, de l'histoire civile de la province de Rio-Janeiro, depuis l'époque de sa découverte jusqu'à nos jours.

Passant ensuite à la description géographique et physique, l'auteur fait connaître successivement les limites et les dimensions du pays, les montagnes qui s'y trouvent, les rivières, les lacs et les marais les plus remarquables. Il examine les ports et les rades dans leurs rapports avec le commerce et la prospérité publique. Ces détails sont indépendants des considérations nautiques et hydrographiques déja consignées dans un ouvrage de M. de Freycinet, imprimé en 1826.

Les divisions politiques de la province, l'énumération et la situation respective des villes et villages, forment la matière d'un paragraphe distinct. On trouve ensuite le résumé des observations de météorologie, et l'exposé des principaux faits de géologie et de minéralogie; la *météorologie*, le *magnétisme*, les *observations du pendule et des marées*, ont été déja ou doivent être plus tard l'objet d'ouvrages spéciaux.

Les détails botaniques sont aussi consignés dans un travail spécial; mais l'auteur fait connaître, dans sa partie historique, la fertilité du sol et les productions végétales qui intéressent les rapports économiques et industriels; il indique, dans des tables assez développées, et les qualités les plus remarquables des bois du pays, et les principales propriétés physiques de ceux qui servent à la charpente.

L'auteur réunit sous le titre de *productions animales* tout ce que l'histoire des animaux du pays peut offrir d'important pour la société civile.

M. de Freycinet passe ensuite aux considérations qui se rapportent à l'espèce humaine. Il examine d'abord quelles étaient les peuplades sauvages qui habitaient ces contrées à l'époque de l'arrivée des Européens. Il décrit leurs qualités physiques, leurs usages, leurs mœurs, leur industrie, leur religion et leur état politique. L'objet de cette recherche préliminaire est de mettre le lecteur en état de juger des effets qu'a pu produire sur ces peuples sauvages la présence des colons portugais, arrivés sur ces bords avec tous les avantages d'une civilisation avancée.

A cette analyse succède le tableau général de la colonie de Rio-Janeiro; le chapitre qui contient ces détails est partagé en sept paragraphes: l'importance du sujet nous porte à entrer ici dans des développements plus étendus.

Le premier paragraphe traite des différentes races d'habitants qui peuplent la colonie, de leurs qualités physiques, des maladies qui les affligent, et des traitements employés pour les combattre.

Sous le titre de *rapports domestiques,* le second paragraphe décrit la nourriture, les vêtements, les habitations, les meubles et les ustensiles économiques.

Le troisième est consacré aux *rapports moraux et sociaux:* c'est là que sont réunies les descriptions des villes et des villages dont on n'avait donné plus haut que la situation géographique. On y rapporte des détails intéressants sur la population, l'éducation, la religion, les usages particuliers, les amusements et les objets de luxe.

Le quatrième paragraphe traite de la littérature, des sciences et des beaux-arts; le cinquième de l'industrie agricole et manufacturière, comprenant l'agriculture proprement dite, la chasse, la pêche, ainsi que tout ce qui intéresse les arts, les métiers et les manufactures.

Le sixième, consacré à l'industrie commerciale, est une des parties les plus étendues de l'ouvrage: elle contient une multitude de données numériques et positives, tant sur la nature des objets propres aux exportations et importations, que sur les quantités et les prix. On y indique les marchés, les halles, le transport des marchandises, soit par terre, soit par eau, le nombre des navires qui entrent ou sortent annuellement du port, l'intérêt de l'argent, les transactions commerciales, les banques, les compagnies d'assurance, etc. Enfin on y donne des détails très-circonstanciés sur les mesures et les monnaies, sur leur rapport avec les monnaies et les mesures françaises.

Le septième paragraphe est encore plus étendu; il traite des *gouvernements*. M. de Freycinet en fait connaître la nature, et présente des notions importantes sur les lois, les tribunaux, le système d'administration publique et les finances. Il a joint à ce dernier article des tableaux très-développés des budjets du Brésil depuis 1808 jusqu'en 1827. Ces détails sont suivis d'une description de l'état militaire, des arsenaux, des fortifications et des forces navales.

L'auteur termine ce qu'il avait à dire sur la province de Rio-Janeiro, en jetant un coup-d'œil sur la situation actuelle des peuples indigènes qui l'habitent; il consacre à cet écrit un dernier chapitre, qui termine le volume; il décrit l'état actuel des Indiens civilisés, celui des Indiens à-demi civilisés, puis enfin l'état de ceux qui sont encore entièrement sauvages.

En ce qui concerne ces derniers, l'auteur s'attache à montrer combien sont défectueux les moyens employés depuis long-temps pour amener ces peuplades indigènes à jouir des bienfaits de la civilisation. Il indique les causes d'une dépopulation toujours croissante, et exprime sur toutes ces questions les opinions et les vœux qui lui paraissent les plus conformes aux intérêts de l'humanité.

Forces productives et commerciales de la France, par M. Dupin.

M. Dupin a présenté un ouvrage intitulé *Forces productives et commerciales de la France.*

Dans cet ouvrage l'auteur évalue les forces productives et commerciales, en prenant pour unité l'homme de force moyenne.

D'après cette base, il calcule l'équivalent des forces des hommes, des animaux et des moteurs inanimés, employés aux travaux de la production et du commerce. Il opère les mêmes calculs pour la France et pour la Grande-Bretagne, et trouve les résultats suivants pour l'époque actuelle et pour 1780.

FORÇES PRODUCTIVES ET COMMERCIALES ÉVALUÉES EN TRAVAILLEURS EFFECTIFS.

	De la France.	Des trois royaumes britanniques.
En 1780	38,792,666	31,281,032
En 1826	48,814,889	60,206,302
Augmentation en 46 années.	10,022,223	28,925,270

Frappé de l'infériorité de l'accroissement de nos forces productives et commerciales, comparées à celles des trois royaumes britanniques, l'auteur s'occupe surtout, dans son ouvrage, des moyens d'accélérer le développement de ces forces dans les diverses parties de la France.

On ne peut donner qu'une idée très-sommaire d'un ouvrage dont la première partie, la seule encore publiée, comprend deux volumes in-4°. Aussi nous nous bornerons à quelques indications.

M. Dupin consacre un livre spécial à l'amélioration des forces productives, non-seulement des forces inanimées et les moyens mécaniques qu'elles font agir, mais surtout des forces animées.

Dans les livres suivants, l'auteur décrit en particulier les forces productives et commerciales des trente-deux départements (la France septentrionale.)

Le dernier livre offre le développement des rapports généraux entre les trente-deux départements de la France septentrionale et les cinquante-quatre départements de la France méridionale.

Ces rapports confirment les recherches précédentes de l'auteur, relativement à l'influence de l'instruction populaire sur la richesse, et toutes les sources du progrès social dans les diverses parties de la Fance.

Ce livre est terminé par l'exposition des vues de l'auteur sur le canal maritime projeté pour aller de Paris à l'Océan, et la description des opérations exécutées sur le terrain.

Afin de rendre populaires les principaux résultats renfermés dans l'ouvrage intitulé les *Forces productives et commerciales de la France*, et dans ses traités d'économie sociale, M. Dupin les a résumées dans une suite de petits volumes.

Le premier volume de cette collection présente la situation progressive des forces de la France depuis 1814; les suivants portent pour titres : le *Petit Propriétaire,* le *Petit Fabricant*, *le Petit Commerçant, l'Ouvrier français et l'Ouvrière française.*

Chacun de ces volumes offre un résumé des moyens d'améliorer le sort physique et moral de chacune des classes d'habitants auxquels l'ouvrage est destiné.

Atlas de la géographie physique, par M. Bory de Saint-Vincent.

M. Le colonel Bory de Saint-Vincent a adressé à l'Académie un volume de l'Encyclopédie par ordre de matières, intitulé : *Atlas de la Géographie physique*, et dont il est l'auteur. Feu M. Desmarest, membre de l'Institut, l'un des collaborateurs de cette grande entreprise, avait fait graver pour cet ouvrage un certain nombre de planches qui demeuraient sans explications : ce sont ces planches qui ont fourni à M. le colonel Bory de Saint-Vincent les considérations qu'il publie sur une partie de la science qui, jusqu'ici, était très-imparfaite et même confuse. Se fondant sur la distribution des corps organisés à la surface du globe, et surtout sur l'examen de la végétation aquatique, ou de cette branche de la botanique appelée hydrophytologie, M. de Saint-Vincent propose une division et une nomenclature des mers d'autant plus heureuse, qu'elle donne une répartition analogue à celle des continents. Ainsi, d'après ces aperçus nouveaux, il existerait cinq océans et cinq continents, dont quatre opposés deux à deux avec un impair, et chacun de ces océans et continents devrait être considéré comme un berceau de formations locales. Quant aux méditerranées, elles seraient en plus grand nombre qu'on ne le suppose, et présenteraient cinq océans.

M. Bory de Saint-Vincent s'attache à prouver que l'étude géologique des montagnes ne peut fournir des données aussi importantes qu'on le suppose généralement sur la contexture intérieure du globe. Il attaque surtout ce système qui avait prévalu, vers la fin du dernier siècle, sur l'enchaînement de toutes les montagnes comme ossature de notre planète, et réduit considérablement ce qu'on avait avancé d'hypothétique sur la configuration des terrains, des bassins, et des amas et cours d'eau douce dans les îles et les continents. La lecture de cet ouvrage intéresse les diverses parties des sciences, et contribuera aux progrès de la géographie.

Recherches sur les antiquités des États-Unis de l'Amérique septentrionale.

M. Warden a présenté à l'Académie un ouvrage intitulé *Recherches sur les antiquités des États-Unis de l'Amérique septentrionale.*

L'auteur accompagne la présentation de cet ouvrage de renseignements sur les monuments de Palenqué, dans l'ancienne province de Guatimala.

Les premières de ces antiquités cachées depuis si long-temps dans les épaisses forêts du Nouveau-Monde, consistent en ouvrages considérables, qui s'étendent depuis le bord méridional du lac Érié jusqu'au golfe du Mexique, et le long du Missouri jusqu'aux monts Rocheux; ces monuments, de formes et de grandeurs différentes: les objets d'antiquités découverts jusqu'à ce jour comprennent, 1° des fortifications; 2° des tumulis ou tertres; 3° des murailles de terre parallèles; 4° des murailles souterraines de terre et de briques, et des objets enfouis à une profondeur considérable; 5° des ouvertures pratiquées dans la terre; 6° des rochers avec des inscriptions; 7° des idoles; 8° des coquilles d'autres pays; et 9° des momies.

L'une de ces fortifications, située dans l'état de l'Ohio, couvre une superficie de plus de cent acres, et est entourée d'une muraille en terre de vingt pieds d'épaisseur à sa base, et de douze pieds de hauteur, et d'un fossé ou tranchée d'environ vingt pieds. On a trouvé, sur les murailles des fortifications et tertres, des arbres d'une grosseur prodigieuse, et dont quelques-uns comptaient plus de quatre cents cercles annuels de végétation très-distincts. Il est à remarquer que les Indiens modernes ne connaissent point l'usage des tertres, et ne se servent pas de retranchements.

Les idoles trouvées dans l'état de Ténessée et à Natchez (état de Mississipi), les coquilles marines du genre murex, découvertes dans une ancienne fortification du Kentucky, les momies des cavernes calcaires du même état, enfin les inscriptions hiéroglyphiques trouvées sur un rocher dans l'état de Massachussets, sont autant de faits importants dans la grande question de l'origine des Américains.

On peut en conclure, suivant M. Warden, que la vallée de l'Ohio, depuis le pays des Illinois jusqu'au Mexique, a été habitée par un peuple très-différent de ceux qui l'occupaient à l'époque de sa découverte par les colons français du Canada et de la Louisiane : tout ce qui concerne l'origine, la durée et l'extinction de ce peuple, est enveloppé dans une obscurité impénétrable. On ne peut douter cependant qu'il n'ait été plus civilisé qu'aucun des peuples indiens qui existaient lors de la découverte de l'Amérique.

Toutefois cette civilisation était peu avancée, si on la compare à celle des habitants de *Palenqué*. Les ruines trouvées dans ce dernier pays prouvent que ses monuments pouvaient rivaliser avec ceux de plusieurs villes de l'Europe, et que ce peuple était arrivé à un grand développement de facultés intellectuelles.

La ligne des fortifications et tertres s'étendant depuis le Mexique jusqu'aux grands lacs des États-Unis, peut-être les anciens peuples de l'Ohio étaient-ils une colonie de *Palenqué* placée dans cet espace pour la facilité des conquêtes et du commerce. Cette question pourrait être résolue, si un savant naturaliste se donnait la peine d'examiner les crânes des squelettes trouvés dans les terres de la vallée de l'Ohio, et de les comparer aux figures palenquiennes, dont la tête pointue et la physionomie diffèrent de celles de tous les peuples connus.

Les anciens monuments de Palenqué, dit M. Warden, sont la découverte la plus étonnante qui ait été faite en Amérique : ils prouvent que le continent appelé *Nouveau-Monde* a été peuplé beaucoup plus anciennement qu'on ne le croit, puisqu'il renferme tant de vestiges d'art sur lesquels la tradition reste muette, et qui appartiennent peut-être à une époque plus reculée que celle où les annales des peuples de l'Europe commencent à s'appuyer de preuves historiques.

M. le professeur Despretz a offert à l'Académie la deuxième édition de son *Traité élémentaire de physique*.

L'auteur est connu depuis long-temps par des recherches qui ont éclairé les questions les plus importantes de la physique; les nouveaux Mémoires qu'il a présentés, et dont nous allons indiquer l'objet, sont autant de témoignages du zèle qui anime ses travaux, et des avantages qu'ils procurent aux sciences.

Le premier Mémoire traite de la compression des gaz. Les expériences qui y sont rapportées font connaître que les gaz ammoniacal, acide sulfureux, acide hydro-sulfurique, le cyanogène, etc., comparés à l'air atmosphérique, subissent, dans tout le cours de la compression, une diminution de volume différente de celle qu'éprouve ce dernier gaz; ainsi, les volumes de ces gaz ne sont pas proportionnels aux pressions.

L'appareil de M. Despretz consiste en deux éprouvettes exactement comparables, et plongeant dans le mercure: l'une de ces éprouvettes contient l'air; l'autre contient le gaz qu'on lui compare. Cet appareil est placé dans un tube de cristal plein, et dans l'intérieur duquel on exerce une pression à l'aide d'une pompe foulante.

Les nombres suivants, qui répondent à l'air atmosphérique, au gaz hydro-sulfurique et au gaz ammoniacal, donneront une juste idée des différences dont il s'agit.

Air et gaz ammoniacal.

Pressions indiquées par l'air.	Pressions indiquées par le gaz ammoniacal.
$0^m,812$	$0^m,812$
1 ,819	1 ,850
2 ,582	3 ,663
3 ,865	4 ,132

Air et gaz acide sulfureux.

Pressions indiquées par l'air.	Pressions indiquées par l'acide hydrosulfureux.
0m,810	0m,810
2 ,243	2 ,293
3 ,975	4 ,020
5 ,789	6 ,021
7 ,568	8 ,058
10 ,837	12 ,018

Un second Mémoire de M. Despretz a pour objet la chaleur développée dans la combustion du carbone, de l'hydrogène, du phosphore et de plusieurs métaux.

Le calorimètre employé par l'auteur est analogue à celui du comte de Rumford : il en diffère cependant en ce qu'il peut servir à la combustion d'un corps quelconque, et en ce que le corps étant enveloppé d'eau de toutes parts, il n'y a pas de perte occasionée par le rayonnement.

Chaleur dégagée pour un gramme d'oxigène absorbé.

Par l'hydrogène	2578° centigrades.
Par le charbon	2967° »
Par le fer	5325° »

Le zinc, l'étain. développent des quantités de chaleur peu différentes de celles que développe le fer.

Il est remarquable que le charbon, qui ne change pas le volume du gaz oxigène en brûlant, dégage les $\frac{2}{3}$ de chaleur rendue libre par le fer, qui réduit ce gaz à l'état solide.

Dans un troisième Mémoire, l'auteur montre que la quantité de chaleur, développée par un corps qui ne change pas le volume du gaz oxigène, est toujours la même, quelle que soit la densité de ce gaz : du moins ce résultat est indiqué par des expériences faites sur le charbon. M. Despretz déduit de ces observations plusieurs conséquences importantes, qu'il se propose de développer.

Le baron de Férussac a informé l'Académie de l'amélioration qu'il vient d'apporter dans l'établissement dont les sciences lui sont redevables. Il a formé, pour la publication du Bulletin universel des connaissances scientifiques et industrielles, une association légalement autorisée, dont le but est de favoriser de plus en plus la propagation des découvertes utiles. S. A. R. M^gneur le Dauphin accorde une protection spéciale à cette entreprise, en considération des services qu'elle a déja rendus, et de ceux que la société et les arts en doivent retirer. Un grand nombre de personnes, connues par l'intérêt qu'elles portent aux sciences et aux arts, se sont empressées de concourir à cette association.

M. Poncelet, ancien élève de l'École polytechnique, professeur de mécanique à l'école d'application de l'artillerie et du génie de Metz, a présenté à l'Académie un travail intitulé : *Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes, mues par-dessous ; suivi d'expériences sur les effets mécaniques de ces roues ;* nouvelle édition augmentée d'un second *Mémoire sur des expériences en grand, relatives à la nouvelle roue*, contenant une *instruction pratique sur la manière de procéder à son établissement.*

M. Poncelet s'est proposé, dans ses nouvelles recherches, de répéter en grand sur une roue hydraulique à aubes courbes, construite à Metz, la plupart des expériences déja faites par lui, en 1824, sur un modèle de petite dimension, et il est parvenu ainsi à lever tous les doutes qui auraient pu subsister sur les avantages du nouveau système dans son application à la pratique.

M. Poncelet a saisi l'occasion qui se présentait de donner quelques développements à la théorie exposée dans son premier Mémoire, notamment dans ce qui concerne les meilleures proportions à adopter, suivant les cas, pour les différentes parties de l'appareil. Il a cherché également à établir, par la théorie et par l'expérience, les principes relatifs aux cas où la roue peut être noyée en arrière jusqu'à une certaine hauteur. Il prouve que les nouvelles roues ne présentent pas, dans cette circonstance, au même degré, les inconvénients attachés aux anciennes roues hydrauliques à palettes. Enfin il s'efforce d'éclaircir tous les points difficiles et de mettre tout constructeur intelligent en état de faire complètement le projet d'établissement de la nouvelle roue d'après des principes positifs, et dont l'exactitude a été constatée par l'application qui en a été faite dans plusieurs des usines de la France.

M. Poncelet s'applaudit surtout d'avoir mis en usage l'appareil très-ingénieux, que l'on doit à M. de Prony, pour mesurer la force des machines en mouvement. L'emploi de cet appareil, qui devrait être connu de tous les chefs et constructeurs d'usines, joint au résultat des expériences faites par l'auteur, lui a donné moyen de confirmer les résultats de son premier Mémoire. Cet examen met en évidence les avantages que présentent les roues à aubes courbes pour les chutes au-dessous de deux mètres.

M. Colladon de Genève a lu à l'Académie un Mémoire sur la déviation de l'aiguille aimantée, par le courant des machines électriques et par l'électricité atmosphérique. Jusqu'alors la propriété de dévier l'aiguille aimantée n'avait été reconnue que pour le courant de la pile de Volta ou pour celui de l'appareil thermo-électrique. En isolant entre eux les tours du galvanomètre et en augmentant leur nombre, M. Colladon est parvenu à prouver que les machines électriques à frottement, ainsi que la décharge d'une bouteille de Leyde, peuvent produire un courant et dévier l'aiguille aimantée de plusieurs degrés; ce fait offre une nouvelle analogie entre l'électricité d'une machine à frottement et celle de la pile de Volta.

M. Colladon s'est aussi servi du même galvanomètre pour faire des recherches analogues sur l'électricité atmospérique; par un temps serein, la déviation de l'aiguille est nulle; mais pendant les orages, l'électricité soutirée des nuages par une pointe élevée peut produire un courant plus intense que celui des plus fortes machines électriques.

L'aiguille aimantée indique par ses mouvements l'instant qui precède immédiatement un coup de tonnerre, par une augmentation ou un changement subit de déviation.

M. Colladon s'est assuré que l'électricité se distribue quelquefois sur de grandes masses de nuages, comme sur un corps conducteur continu.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE M. LE MARQUIS

DE LAPLACE,

PRONONCÉ DANS LA SÉANCE PUBLIQUE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, LE 15 JUIN 1829.

PAR M. BARON FOURIER.

MESSIEURS,

LE nom de LAPLACE a retenti dans tous les lieux du monde où les sciences sont honorées : mais sa mémoire ne pouvait recevoir un plus digne hommage que le tribut unanime de l'admiration et des regrets du corps illustre dont il a partagé les travaux et la gloire. Il a consacré sa vie à l'étude des plus grands objets qui puissent occuper l'esprit humain.

Les merveilles du ciel, les hautes questions de la philosophie naturelle, les combinaisons ingénieuses et profondes de l'analyse mathématique, toutes les lois de l'univers, ont été présentes à sa pensée pendant plus de soixante années, et ses efforts ont été couronnés par des découvertes immortelles.

On remarqua, dès ses premières études, qu'il était doué d'une mémoire prodigieuse : toutes les occupations de l'esprit lui étaient faciles. Il acquit rapidement une instruction assez étendue dans les langues anciennes, et cultiva diverses branches dans la littérature. Tout intéresse le génie naissant, tout peut le révéler. Ses premiers succès furent dans les études théologiques; il traitait avec talent et avec une sagacité extraordinaire les points de controverse les plus difficiles.

On ignore par quel heureux détour Laplace passa de la scolastique à la haute géométrie. Cette dernière science, qui n'admet guère de partage, attira et fixa son attention. Dès-lors il s'abandonna sans réserve à l'impulsion de son génie, et sentit vivement que le séjour de la capitale lui était devenu nécessaire. D'Alembert jouissait alors de tout l'éclat de sa renommée. C'est lui qui venait d'avertir la cour de Turin que son académie royale possédait un géomètre du premier ordre, Lagrange, qui, à défaut de ce noble suffrage, aurait pu rester long-temps ignoré. D'Alembert avait annoncé au roi de Prusse qu'un seul homme en Europe pouvait remplacer, à Berlin, l'illustre Euler, qui, rappelé par le gouvernement de Russie, consentit à retourner à St.-Pétersbourg. Je trouve, dans les lettres inédites que possède l'Institut de France, les détails de cette glorieuse négociation qui fixa Lagrange à la résidence de Berlin.

C'est vers le même temps que Laplace commençait cette longue carrière qu'il devait bientôt illustrer.

Il se présenta chez d'Alembert, précédé de recommandations nombreuses, qu'on aurait pu croire très-puissantes. Mais ses tentatives furent inutiles : il ne fut pas même introduit. C'est alors qu'il adressa à celui dont il venait solliciter le suffrage une lettre fort remarquable sur les principes généraux de la mécanique, et dont M. Laplace m'a, plusieurs fois, cité divers fragments. Il était impossible qu'un aussi grand géomètre que d'Alembert ne fût point frappé de la profondeur singulière de cet écrit. Le jour même, il appela l'auteur de la lettre, et lui dit, ce sont ses propres paroles : « Monsieur, vous voyez que je fais assez peu de cas des recommandations; vous n'en aviez pas besoin. Vous vous êtes fait mieux connaître; cela me suffit : mon appui vous est dû. » Il obtint, peu de jours après, que Laplace fût nommé professeur de mathématiques à l'École militaire de Paris. Dès ce moment, livré sans partage à la science qu'il avait choisie, il donna à tous ses travaux une direction fixe dont il ne s'est jamais écarté : car la constance imperturbable des vues a toujours été le trait principal de son génie. Il touchait déja aux limites connues de l'analyse mathématique, il possédait ce que cette science avait alors de plus ingénieux et de plus puissant, et personne n'était plus capable que lui d'en agrandir le domaine. Il avait résolu une question capitale de l'astronomie théorique. Il forma le projet de consacrer ses efforts à cette science sublime : il était destiné à la perfectionner, et pouvait l'embrasser dans toute son étendue. Il médita profondément son glorieux dessein; il a passé toute sa vie à l'accomplir avec une persévérance dont l'histoire des sciences n'offre peut-être aucun autre exemple.

L'immensité du sujet flattait le juste orgueil de son génie. Il entreprit de composer l'*almageste* de son siècle: c'est le monument qu'il nous a laissé sous le nom de *Mécanique céleste;* et son ouvrage immortel l'emporte sur celui de Ptolémée autant que la science analytique des modernes surpasse les éléments d'Euclide.

Le temps qui seul dispense avec justice la gloire littéraire, qui livre à l'oubli toutes les médiocrités contemporaines, perpétue le souvenir des grands ouvrages. Eux seuls portent à la postérité le caractère de chaque siècle. Ainsi le nom de Laplace vivra dans tous les âges. Mais, et je me hâte de le dire, l'histoire éclairée et fidèle ne séparera point sa mémoire de celle des autres successeurs de Newton. Elle réunira les noms illustres de d'Alembert, de Clairaut, d'Euler, de Lagrange et de Laplace. Je me borne à citer ici les grands géomètres que les sciences ont perdus, et dont les recherches ont eu pour but commun la perfection de l'astronomie physique.

Pour donner une juste idée de leurs ouvrages, il est nécessaire de les comparer; mais les bornes qui conviennent à ce discours m'obligent de réserver une partie de cette discussion pour la collection de nos Mémoires.....

....

Après Euler, Lagrange a le plus contribué à fonder l'analyse mathématique. Elle est devenue, dans les écrits de ces deux grands géomètres, une science distincte, la seule des théories mathématiques dont on puisse dire qu'elle est complètement et rigoureusement démontrée. Seule, entre toutes ces théories, elle se suffit à elle-même, et elle éclaire toutes les autres; elle leur est tellement nécessaire, que, privées de son secours, elles ne pourraient que demeurer très-imparfaites.

Lagrange était né pour inventer et pour agrandir toutes les sciences de calcul. Dans quelque condition que la fortune l'eût placé, ou pâtre ou prince, il aurait été grand géomètre; il le serait devenu nécessairement, et sans aucun effort : ce qu'on ne peut pas dire de tous ceux qui ont excellé dans cette science, même dans les premiers rangs.

Si Lagrange eût été contemporain d'Archimède et de Conon, il aurait partagé la gloire des plus mémorables découvertes. A Alexandrie il eut été rival de Diophantes.

Le trait distinctif de son génie consiste dans l'unité et la grandeur des vues. Il s'attachait en tout à une pensée simple, juste et très-élevée. Son principal ouvrage, la *Mécanique analytique*, pourrait être nommée la Mécanique philosophique; car il ramène toutes les lois de l'équilibre et du mouvement à un seul principe; et ce qui n'est pas moins admirable, il les soumet à une seule méthode de calcul dont il est lui-même l'inventeur. Toutes ses compositions mathématiques sont remarquables par une élégance singulière, par la symétrie des formes et la généralité des méthodes, et, si l'on peut parler ainsi, par la perfection du style analytique.

Lagrange n'était pas moins philosophe que grand géomètre. Il l'a prouvé, dans tout le cours de sa vie, par la modération de ses désirs, son attachement immuable aux intérêts généraux de l'humanité, par la noble simplicité de ses mœurs et l'élévation du caractère, enfin par la justesse et la profondeur de ses travaux scientifiques.

Laplace avait reçu de la nature toute la force du génie que peut exiger une entreprise immense. Non-seulement il a réuni dans son *Amalgeste du* 18ᵉ *siècle* ce que les sciences mathématiques et physiques avaient déja inventé, et qui sert de fondement à l'astronomie; mais il a ajouté à cette science des découvertes capitales qui lui sont propres, et qui avaient échappé à tous ses prédécesseurs. Il a résolu, soit par ses propres méthodes, soit par celles dont Euler et Lagrange avaient indiqué les principes, les questions les plus importantes, et certainement les plus difficiles de toutes celles que l'on avait considérées avant lui. Sa constance a triomphé de tous les obstacles. Lorsque ses premières tentatives n'ont point eu de succès, il les a renouvelées sous les formes les plus ingénieuses et les plus diverses.

Ainsi l'on observait dans les mouvements de la lune une accélération dont on n'avait pu découvrir la cause. On avait pensé que cet effet pouvait provenir de la résistance du milieu éthéré où se meuvent les corps célestes. S'il en était ainsi, la même cause, affectant le cours des planètes, tendrait à changer de plus en plus l'ordre primitif. Ces astres seraient incessamment troublés dans leur cours, et finiraient par se précipiter sur la masse du soleil. Il serait nécessaire que la puissance créatrice intervînt de nouveau pour prévenir ou pour réparer le désordre immense que le laps des temps aurait causé.

Cette question cosmologique est assurément une des plus grandes que l'intelligence humaine puisse se proposer; elle est résolue aujourd'hui. Les premières recherches de Laplace sur l'invariabilité des dimensions du système solaire, et son explication de l'équation séculaire de la lune, ont conduit à cette solution.

Il avait d'abord examiné si l'on pourrait expliquer l'accélération du mouvement lunaire, en supposant que l'action de la gravité n'est pas instantanée, mais assujettie à une transmission successive, comme celle de la lumière. Par cette voie, il ne put découvrir la véritable cause. Enfin une nouvelle recherche servit mieux son génie. Il donna, le 19 mars 1787, à l'Académie des Sciences, une solution claire et inattendue de cette difficulté capitale. Il prouve très-distinctement que l'accélération observée est un effet nécessaire de la gravitation universelle.

Cette grande découverte éclaira ensuite les points les plus importants du système du monde. En effet, la même théorie lui fit connaître que, si l'action de la gravitation sur les astres n'est pas instantanée, il faut supposer qu'elle se propage plus de cinquante millions de fois plus vite que la lumière, dont la vitesse bien connue est de soixante-dix mille lieues par seconde.

Il conclut encore de sa théorie des mouvements lunaires que le milieu dans lequel les astres se meuvent n'oppose au cours des planètes qu'une résistance pour ainsi dire insensible; car cette cause affecterait surtout le mouvement de la lune, et elle n'y produit aucun effet observable.

La discussion des mouvements de cet astre est féconde en conséquences remarquables. On en peut conclure, par exemple, que le mouvement de rotation de la terre sur son axe est invariable. La durée du jour n'a point changé de la centième partie d'une seconde depuis deux mille années. Il est remarquable qu'un astronome n'aurait pas besoin de sortir de son observatoire pour mesurer la distance de la terre au soleil. Il lui suffirait d'observer assidûment les variations du mouvement lunaire; il en concluait cette distance avec certitude.

Une conséquence encore plus frappante est celle qui se rapporte à la figure de la terre; car la forme même du globe terrestre est empreinte dans certaines inégalités du cours de la lune. Ces inégalités n'auraient point lieu, si la terre était parfaitement sphérique. On peut déterminer la quantité de l'aplatissement terrestre par l'observation des seuls mouvements lunaires, et les résultats que l'on en a déduits s'accordent avec les mesures effectives qu'ont procurées les grands voyages géodésiques à l'équateur, dans les régions boréales, dans l'Inde et diverses autres contrées.

C'est à Laplace surtout que l'on doit cette perfection étonnante des théories modernes.

Je ne puis entreprendre d'indiquer ici la suite de ses travaux, et les découvertes qui en ont été le fruit. Cette seule énumération, quelque rapide qu'elle pût être, excéderait les limites que j'ai dû me prescrire. Outre ses recherches sur l'équation séculaire de la lune, et la découverte non moins importante et non moins difficile de la cause des grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, on aurait à citer ses théorèmes admirables sur la libration des satellites de Jupiter. Il faudrait rappeler ses travaux analytiques sur le flux et reflux de la mer, et montrer l'étendue immense qu'il a donnée à cette question.

Il n'y a aucun point important de l'astronomie physique qui ne soit devenu pour lui l'objet d'une étude et d'une discussion approfondie, il a soumis au calcul la plupart des conditions physiques que ses prédécesseurs avaient omises. Dans la question déja si complexe de la forme et du mouvement de rotation de la terre, il a considéré l'effet de la présence des eaux distribuées entre les terres continentales, la compression des couches intérieures, la diminution séculaire des dimensions du globe.

Dans cet ensemble de recherches, on doit remarquer surtout celles qui se rapportent à la stabilité des grands phénomènes : aucun objet n'est plus digne de la méditation des philosophes. Ainsi l'on a reconnu que les causes, ou fortuites, ou constantes, qui troublent l'équilibre des mers, sont assujetties à des limites qui ne peuvent être franchies. La pesanteur spécifique des eaux étant beaucoup moindre que celle de la terre solide, il en résulte que les oscillations de l'Océan sont toujours comprises entre des limites fort étroites; ce qui n'arriverait point si le liquide répandu sur le globe était beaucoup plus pesant. En général, la nature tient en réserve des forces conservatrices et toujours présentes, qui agissent aussitôt que le trouble commence, et d'autant plus que l'aberration est plus grande. Elles ne tardent point à rétablir l'ordre accoutumé. On trouve dans toutes les parties de l'univers cette puissance préservatrice. La forme des grandes orbites planétaires, leurs inclinaisons, varient et s'altèrent dans le cours des siècles; mais ces changements sont limités. Les dimensions principales subsistent, et cet immense assemblage des corps célestes oscille autour d'un état moyen vers lequel il est toujours ramené. Tout est disposé pour l'ordre, la perpétuité et l'harmonie.

Dans l'état primitif et liquide du globe terrestre, les matières les plus pesantes se sont rapprochées du centre; et cette condition a déterminé la stabilité des mers.

Quelle que puisse être la cause physique de la formation des planètes, elle a imprimé à tous ces corps un mouvement de projection dans un même sens autour d'un globe immense: par là le système solaire est devenu stable. Le même effet se produit dans le système des satellites et des anneaux. L'ordre y est maintenu par la puissance de la masse centrale. Ce n'est donc point, comme Newton lui-même et Euler l'avaient soupçonné, une force adventice qui doit un jour réparer ou prévenir le trouble que le temps aurait causé. C'est la loi elle-même de la gravitation qui règle tout, qui suffit à tout, et maintient la variété et l'ordre. Émanée une seule fois de la sagesse suprême, elle préside depuis l'origine des temps, et rend tout désordre impossible. Newton et Euler ne connaissaient point encore toutes les perfections de l'univers.

En général, toutes les fois qu'il s'est élevé quelque doute sur l'exactitude de la loi neutonienne, et que, pour expliquer les irrégularités apparentes, on a proposé l'accession d'une cause étrangère, il est toujours arrivé, après un examen approfondi, que la loi primordiale a été vérifiée. Elle explique aujourd'hui tous les phénomènes connus. Plus les observations sont précises, plus elles sont conformes à la théorie. Laplace est de tous les géomètres celui qui a le plus approfondi ces grandes questions; il les a, pour ainsi dire, terminées.

On ne peut pas affirmer qu'il lui eût été donné de créer une science entièrement nouvelle, comme l'ont fait Archimède et Galilée; de donner aux doctrines mathématiques des principes originaux, et d'une étendue immense, comme Descartes, Newton et Leibnitz; ou, comme Newton, de transporter le premier dans les cieux, et d'étendre à tout l'univers la dynamique terrestre de Galilée : mais Laplace était né pour tout perfectionner, pour tout approfondir, pour reculer toutes les limites, pour résoudre ce que l'on aurait pu croire insoluble. Il aurait achevé la science du ciel, si cette science pouvait être achevée.

On retrouve ce même caractère dans ses recherches sur l'analyse des probabilités, science toute moderne, immense, dont l'objet, souvent méconnu, a donné lieu aux interprétations les plus fausses, mais dont les applications embrasseront un jour tout le champ des connaissances humaines, heureux supplément à l'imperfection de notre nature.

Cet art est né d'un seul trait du génie clair et fécond de Pascal; il a été cultivé, dès son origine, par Fermat et Huygens. Un géomètre philosophe, Jacques Bernoulli, en fut le principal fondateur. Une découverte singulièrement heureuse de Stirling, les recherches d'Euler, et surtout une application ingénieuse et importante due à Lagrange, ont perfectionné cette doctrine; elle a été éclairée par les objections mêmes de d'Alembert et par les vues philosophiques de Condorcet : Laplace en a réuni et fixé les principes. Alors elle est devenue une science nouvelle, soumise à une seule méthode analytique, et d'une étendue prodigieuse. Féconde en applications usuelles, elle éclairera un jour d'une vive lumière toutes les branches de la philosophie naturelle. S'il nous est permis d'exprimer ici une opinion personnelle, nous ajouterons que la solution d'une des questions principales, celle que l'illustre auteur a traitée dans le dixième chapitre de son ouvrage, ne nous paraît point exacte; et toutefois considéré dans son ensemble, cet ouvrage est un des monuments les plus précieux de son génie.

Après avoir cité des découvertes aussi éclatantes, il serait inutile d'ajouter que M. Laplace appartenait à toutes les grandes académies de l'Europe.

Je pourrais aussi, je devrais peut-être, rappeler les hautes dignités politiques dont il fut revêtu; mais cette énumération n'appartiendrait qu'indirectement à l'objet de ce discours. C'est le grand géomètre dont nous célébrons la mémoire. Nous avons séparé l'immortel auteur de la *Mécanique céleste* de tous les faits accidentels qui n'intéressent ni sa gloire ni son génie. En effet, Messieurs, qu'importe à la postérité, qui aura tant d'autres détails à oublier, d'apprendre ou non que Laplace fut quelques instants ministre d'un grand état? Ce qui importe, ce sont les vérités éternelles qu'il a découvertes; ce sont les lois immuables de la stabilité du monde, et non le rang qu'il occupa quelques années dans le sénat appelé *conservateur*. Ce qui importe, Messieurs, et plus encore peut-être que ses découvertes, ce sont les exemples qu'il laisse à tous ceux à qui les sciences sont chères; c'est le souvenir de cette persévérance incomparable qui a soutenu, dirigé, couronné tant de glorieux efforts.

J'omettrai donc des circonstances accidentelles, et, pour ainsi dire, fortuites, des particularités qui n'ont aucun rapport avec la perfection de ses ouvrages. Mais je dirai que, dans le premier corps de l'état, la mémoire de Laplace fut célébrée par une voix éloquente et amie, que d'importants services rendus aux sciences historiques, aux lettres et à l'état, avaient depuis long-temps illustrée (1).

Je rappellerai surtout cette solennité littéraire qui attira l'attention de la capitale. L'Académie française, réunissant ses suffrages aux acclamations de la patrie, jugea qu'elle acquerrait une gloire nouvelle, en couronnant (2) les triomphes de l'éloquence et de la vertu politique.

En même temps, elle choisit, pour répondre au successeur de Laplace, un académicien illustre (3) à plus d'un titre, qui réunit, dans la littérature, dans l'histoire, dans l'administration publique, tous les genres de supériorité.

Laplace a joui d'un avantage que la fortune n'accorde pas toujours aux grands hommes. Dès sa première jeunesse, il a été dignement apprécié par des amis illustres. Nous avons sous les yeux des lettres encore inédites qui nous apprennent tout le zèle que mit d'Alembert à l'introduire à l'École militaire de France, et à lui préparer, si cela eût été nécessaire, un meilleur établissement à Berlin. Le président Bochard de Saron fit imprimer ses premiers ouvrages. Tous les témoignages d'amitié qui lui ont été donnés rappellent de grands travaux et de grandes découvertes; mais rien ne pouvait contribuer davantage aux progrès de toutes les connaissances physiques, que ses relations avec l'illustre Lavoisier, dont le nom, consacré

---

(1) M. le marquis de Pastoret.

(2) M. Royer-Collard.

(3) M. le comte Daru.

par l'histoire des sciences, est devenu un éternel objet de respects et de douleur.

Ces deux hommes célèbres réunirent leurs efforts. Ils entreprirent et achevèrent des recherches fort étendues pour mesurer l'un des éléments les plus importants de la théorie physique de la chaleur. Ils firent aussi, vers ce même temps, une longue série d'expériences sur les dilatations des substances solides. Les ouvrages de Newton font assez connaître tout le prix que ce grand géomètre attachait à l'étude spéciale des sciences physiques. Laplace est de tous ses successeurs celui qui a fait le plus d'usage de sa méthode expérimentale; il fut presque aussi grand physicien que grand géomètre. Ses recherches sur les réfractions, sur les effets capillaires, les mesures barométriques, les propriétés statiques de l'électricité, la vitesse du son, les actions moléculaires, les propriétés des gaz, attestent que rien, dans l'investigation de la nature, ne pouvait lui être étranger. Il désirait surtout la perfection des instruments; il fit construire à ses frais, par un célèbre artiste, un instrument d'astronomie très-précieux, et le donna à l'Observatoire de France.

Tous les genres de phénomènes lui étaient parfaitement connus. Il était lié par une ancienne amitié avec deux physiciens célèbres, dont les découvertes ont éclairé tous les arts et toutes les théories chimiques. L'histoire unira les noms de Berthollet et de Chaptal à celui de Laplace. Il se plaisait à les réunir, et leurs entretiens ont toujours eu pour but et pour résultat l'accroissement des connaissances les plus importantes et les plus difficiles à acquérir.

Les jardins de Berthollet à sa maison d'Arcueil n'étaient point séparés de ceux de Laplace. De grands souvenirs, de grands regrets, ont illustrés cette enceinte. C'est là que Laplace recevait des étrangers célèbres, des hommes puissants, dont la science avait reçu ou espérait quelques bienfaits, mais surtout ceux qu'un zèle sincère attachait au sanctuaire des sciences. Les uns commençaient leur carrière, les autres devaient bientôt la finir. Il les entretenait tous avec une extrême politesse. Il la portait même si loin, qu'il aurait donné lieu de croire à ceux qui ne connaissaient point encore toute l'étendue de son génie, qu'il pouvait lui-même retirer quelque fruit de leurs entretiens.

En citant les ouvrages mathématiques de Laplace, nous avons dû surtout faire remarquer la profondeur des recherches et l'importance des découvertes. Ses ouvrages se distinguent encore par un autre caractère que tous les lecteurs ont apprécié. Je veux parler du mérite littéraire de ses compositions. Celle qui porte le titre de *Système du monde* est remarquable par l'élégante simplicité du discours et la pureté du langage. Il n'y avait point encore d'exemple de ce genre de productions; mais on s'en formerait une idée bien inexacte, si l'on pensait que l'on peut acquérir la connaissance des phénomènes du ciel dans de semblables écrits. La suppression des signes propres à la langue du calcul ne peut pas contribuer à la clarté, et rendre la lecture plus facile. L'ouvrage est une exposition parfaitement régulière des résultats d'une étude approfondie : c'est un résumé ingénieux des découvertes principales. La précision du style, le choix des méthodes, la grandeur du sujet, donnent un intérêt singulier à ce vaste tableau; mais son utilité réelle est de rappeler aux géomètres les théorèmes dont la démonstration leur était déja connue. C'est, à proprement parler, une table de matières d'un traité mathématique.

Les ouvrages purement historiques de Laplace ont un autre objet.

Il y présente aux géomètres avec un talent admirable la marche de l'esprit humain dans l'invention des sciences.

Les théories les plus abstraites ont, en effet, une beauté d'expression qui leur est propre : c'est ce que l'on remarque dans plusieurs traités de Descartes, dans quelques pages de Galilée, de Newton et de Lagrange. La nouveauté des vues, l'élévation des pensées, leurs rapports avec les grands objets de la nature attachent et remplissent l'esprit. Il suffit que le style soit pur et d'une noble simplicité : c'est ce genre de littérature que Laplace a choisi ; et il est certain qu'il s'y est placé dans les premiers rangs. S'il écrit l'histoire des grandes découvertes astronomiques, il devient un modèle d'élégance et de précision. Aucun trait principal ne lui échappe; l'expression n'est jamais ni obscure ni ambitieuse. Tout ce qu'il appelle grand est grand en effet; tout ce qu'il omet ne méritait point d'être cité.

M. Laplace a conservé dans un âge très-avancé cette mémoire extraordinaire qui l'avait fait remarquer dès ses premières années; don précieux qui n'est pas le génie, mais qui lui sert pour acquérir et pour conserver. Il n'a point cultivé les beaux-arts ; mais il les appréciait. Il aimait la musique de l'Italie et les vers de Racine, et il se plaisait souvent à citer de mémoire divers passages de ce grand poète. Les compositions de Raphaël ornaient ses appartements. On les trouvait à côté des portraits de Descartes, de François Viète, de Newton, de Galilée et d'Euler.

Laplace avait toujours eu l'habitude d'une nourriture très-légère : il en diminua de plus en plus et excessivement la quantité. Sa vue, très-délicate exigeait des précautions continuelles; il parvint à la conserver sans aucune altération. Ces soins de lui-même n'ont jamais eu qu'un seul but, celui de réserver tout son temps et toutes ses forces pour les travaux de l'esprit. Il a vécu pour les sciences : les sciences ont rendu sa mémoire éternelle.

Il avait contracté l'habitude d'une excessive contention d'esprit, si nuisible à la santé, si nécessaire aux études profondes; et cependant il n'éprouva quelque affaiblissement sensible que dans les deux dernières années.

Au commencement de la maladie à laquelle il a succombé, on remarqua avec effroi un instant de délire. Les sciences l'occupaient encore. Il parlait avec une ardeur inaccoutumée du mouvement des astres, et ensuite d'une expérience de physique qu'il disait être capitale, annonçant aux personnes qu'il croyait présentes qu'il irait bientôt entretenir l'Académie de ces questions. Ses forces l'abandonnèrent de plus en plus. Son médecin (1), qui méritait toute sa confiance par des talents supérieurs et par des soins que l'amitié seule peut inspirer, veillait auprès de son lit. M. Bouvard, son collaborateur et son ami, ne l'a pas quitté un seul instant.

Entouré d'une famille chérie, sous les yeux d'une épouse dont la tendresse l'avait aidé à supporter les peines

(1) M. Magendie.

inséparables de la vie, dont l'aménité et les graces lui avaient fait connaître le prix du bonheur domestique, il a reçu de M. le marquis de Laplace son fils les témoignages empressés de la piété la plus touchante.

Il se montra pénétré de reconnaissance pour les marques réitérées d'intérêt que lui donnèrent le Roi et Monsieur le Dauphin.

Les personnes qui ont assisté à ses derniers instants lui rappelaient les titres de sa gloire, et ses plus éclatantes découvertes. Il répondit : « Ce que nous connaissons est peu de chose, ce que nous ignorons est immense. » C'est du moins, autant qu'on l'a pu saisir, le sens de ses dernières paroles à peine articulées. Au reste, nous l'avons entendu souvent exprimer cette pensée, et presque dans les mêmes termes. Il s'éteignit sans douleur.

Son heure suprême était arrivée : le génie puissant qui l'avait long-temps animé, se sépara de l'enveloppe mortelle, et retourna vers les cieux.

Le nom de Laplace honore une de nos provinces déja si féconde en grands hommes, l'ancienne Normandie. Il est né le 23 mars 1749; il a succombé, dans la 78me année de son âge, le 5 mai 1827, à neuf heures du matin.

Vous rappellerai-je, Messieurs, la sombre tristesse qui se répandit dans ce palais comme un nuage, lorsque la nouvelle fatale vous fut annoncée. C'était le jour et l'heure même de vos séances accoutumées? Chacun de vous gardait un morne silence; chacun ressentait le coup funeste dont les sciences venaient d'être frappées. Tous les regards se portaient sur cette place qu'il avait si long-temps occupée parmi vous. Une seule pensée vous était présente; toute autre méditation était devenue impossible. Vous vous séparâtes par l'effet d'une résolution unanime, et cette seule fois vos travaux habituels furent interrompus.

Il est beau sans doute, il est glorieux, il est digne d'une nation puissante de décerner des honneurs éclatants à la mémoire de ses hommes célèbres. Dans la patrie de Newton, les chefs de l'état ont voulu que les restes mortels de ce grand homme fussent solennellement déposés parmi les tombes royales. La France et l'Europe ont offert à la mémoire de Laplace une expression de leurs regrets moins fastueuse sans doute, mais peut-être plus touchante et plus vraie.

Il a reçu un hommage inaccoutumé; il l'a reçu des siens dans le sein d'une compagnie savante qui pouvait seule apprécier tout son génie. La voix des sciences éplorées s'est fait entendre dans tous les lieux du monde où la philosophie a pénétré. Nous avons sous les yeux des correspondances multipliées de toutes les parties de l'Allemagne, de l'Angleterre, de l'Italie, de la Nouvelle-Hollande, des possessions anglaises dans l'Inde, des deux Amériques; et nous y trouvons ces mêmes sentiments d'admiration et de regrets. Certainement ce deuil universel des sciences si noblement et si librement exprimé, n'a pas moins de vérité et d'éclat que la pompe sépulcrale de Westminster.

Qu'il me soit permis, avant de terminer ce discours, de reproduire ici une réflexion qui se présentait d'elle-même, lorsque j'ai rappelé dans cette enceinte les grandes découvertes d'Herschel, mais qui s'applique plus directement encore à celles de Laplace.

Vos successeurs, messieurs, verront s'accomplir les grands phénomènes dont il a découvert les lois. Ils observeront dans les mouvements lunaires les changements qu'il a prédits et dont lui seul a pu assigner la cause. L'observation continuelle des satellites de Jupiter perpétuera la mémoire de l'inventeur des théorèmes qui en règlent le cours. Les grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, poursuivant leurs longues périodes, et donnant à ces astres des situations nouvelles, rappelleront sans cesse une de ses plus étonnantes découvertes. Voilà des titres d'une gloire véritable, que rien ne peut anéantir. Le spectacle du ciel sera changé; mais à ces époques reculées, la gloire de l'inventeur subsistera toujours : les traces de son génie portent le sceau de l'immortalité.

Je vous ai présenté, Messieurs, quelques traits d'une vie illustre consacrée à la gloire des sciences : puissent vos souvenirs suppléer à d'aussi faibles accents! Que la voix de la patrie, que celle de l'humanité tout entière, s'élèvent pour célébrer les bienfaiteurs des nations, seul hommage digne de ceux qui ont pu, comme Laplace, agrandir le domaine de la pensée, et attester à l'homme la dignité de son être, en dévoilant à nos regards toute la majesté des cieux!

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1827.

PARTIE PHYSIQUE.

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

MÉTÉOROLOGIE.

M. MOREAU DE JONNÈS a communiqué à l'Académie la notice des tremblements de terre qui ont eu lieu aux Antilles en 1827. Il en a donné la date précise, qui peut jeter quelque lumière sur la direction des commotions souterraines et sur la rapidité de leur propagation.

Le premier de ces tremblements de terre s'est fait sentir à la Martinique le 3 juin, à 2 heures du matin.

Le second, le 24 juillet, à 5 heures 45 minutes après midi : ces deux secousses ont été très-fortes.

Le troisième, le dimanche 5 août, à 10^h 30′ du matin.

Le quatrième, le 25 septembre, à 5^h 30′ du matin.

Le cinquième, le 27 du même mois, à 4^h 30′ du matin.

Le sixième, le 2 octobre, à 4^h après midi.

Le septième, le 30 novembre, à 2^h 45′ du matin.

Le huitième, le 1er décembre, à 10^h du matin.

Le neuvième, le même jour, à 5^h 15′ après midi.

Et enfin le dixième, le 8 décembre, à 5^h 20′ du matin.

La plupart de ces tremblements de terre n'ont été que des mouvements ondulatoires et lents dont il n'est résulté aucun événement fâcheux; mais celui du 30 novembre, avant le jour, a été singulièrement violent et prolongé: la moindre estimation de sa durée la porte à 50 secondes, et l'on assure qu'on n'en a point éprouvé d'aussi fort et d'aussi long depuis près d'un siècle. Il n'a fait cependant qu'ébranler et lézarder quelques édifices, et les accidents qui ont eu lieu doivent être attribués seulement à l'effroi qu'il a causé, et qui a fait abandonner les maisons avec trop de précipitation. Des lettres de la Guadeloupe ont fait connaître que ce tremblement de terre s'est étendu à la Grande-Terre, l'une des deux îles de cette colonie, située à environ 40 lieues au nord-ouest de la Martinique; il s'y est fait sentir avec une violence non moins grande, mais quelques minutes plus tard qu'au Fort-Royal. La Martinique est de formation volcanique, tandis que la Grande-Terre de la Guadeloupe est de formation calcaire.

L'opinion commune aux Antilles, que ces commotions du sol sont des phénomènes liés par leurs causes à l'état de l'atmosphère, s'est appuyée de nouveaux indices. On a remarqué que la pluie a commencé à tomber immédiatement après que la terre a tremblé; et l'on a si constamment observé cette coïncidence singulière, que plusieurs personnes inclinent à ne point l'attribuer au hasard.

On a appris postérieurement que des tremblements de terre désastreux ont eu lieu, pendant novembre dernier, dans la montagne de Quindiu, à la Nouvelle-Grenade; et que le 16 de ce mois, à 6^h 15′ du soir, une partie de la ville de Santa-Fé-de-Bogota a été renversée, par une suite de violentes secousses qui se sont prolongées durant 24 heures.

CHIMIE.

Une loi de la composition des corps, qui a été entrevue depuis long-temps dans la classe des acides et des alcalis, confirmée par Richter et généralisée depuis par MM. Wollaston, Guy-Lussac et d'autres chimistes, c'est que les quantités pondérables dans lesquelles deux substances entrent en combinaison, conservent, dans toutes les combinaisons qu'elles peuvent former avec une même masse de toute autre substance, un rapport constant, ou dont les variations, lorsqu'il en éprouve, sont des multiples ou des sous-multiples de l'une de ses valeurs; et nous avons vu, dans notre analyse de 1819, à quelle précision M. Berzelius a porté la table de ces rapports. Elle est telle que l'on peut aujourd'hui l'employer à la vérification des analyses qui comportent le plus de chances d'erreurs, et qu'elle sert à prédire même la proportion des combinaisons qui n'ont pas encore été réalisées. Une conséquence nécessaire de ces faits, dans le système de la philosophie corpusculaire, c'est que les matières entrent en combinaison par des nombres déterminés de molécules de chacune d'elles : on est même allé plus loin, et l'on a cherché à fixer ce nombre pour chaque substance dans chacune des combinaisons où elle peut entrer. Mais ici un mélange d'hypothèse a été inévitable, ou plutôt on a dû s'arrêter à un certain point, à celui qui est nécessaire pour rendre compte des combinaisons connues; et quelquefois il arrive que la découverte de combinaisons nouvelles, où des substances entrent dans des proportions moins simples que celles que l'on connaissait, oblige de subdiviser par la pensée les molécules hypothétiques qu'on leur avait attribuées. Dans les substances que nous pouvons observer à l'état gazeux, et où nous pouvons déterminer les proportions par les volumes qui sont toujours faciles à mesurer, les résultats laissent beaucoup moins d'incertitude que dans les combinaisons des substances fixes; mais l'on a du moins l'avantage d'appliquer cette méthode à celles de ces dernières substances qui passent à l'état gazeux par l'effet de la combinaison, et ces substances sont en assez grand nombre.

M. Dumas, jeune chimiste déja connu par des travaux intéressants sur diverses branches des sciences naturelles, s'est occupé de ce genre de recherches. Toutes les fois que l'on combine deux gaz, la combinaison éprouve une contraction, et le volume qui en résulte est lui-même dans un rapport constant avec ceux des gaz combinés. Si l'on pouvait donc déterminer exactement la densité d'une combinaison binaire gazeuse où entrent une substance fixe et celle de son élément élastique, il resterait peu d'incertitude sur la densité de la vapeur qui en constitue l'autre élément, et qui est provenue de la substance fixe. C'est de ce fait que M. Dumas est parti; mais, pour l'appliquer, il a été obligé de supposer que la contraction est semblable à celle qu'éprouve l'ammoniaque lors de sa formation, ce qui introduit aussi dans sa méthode un principe hypothétique. Il a d'ailleurs, par un moyen ingénieux et simple, imaginé de constater directement la densité des divers fluides élastiques à une température et sous une pression données, base nécessaire et préalable de tout son travail. L'exactitude de ce moyen a été confirmée par un essai qu'il en a fait sur la densité de la vapeur d'iode, et qui lui a donné un nombre peu différent de celui qui avait été déduit d'analyses très-exactes. La densité de la vapeur du mercure, si utile à connaître pour un grand nombre d'opérations, a été déterminée également avec beaucoup de soin, ainsi que celles de l'hydrogène phosphoré au maximum et au minimum, de l'hydrogène arseniqué, des acides fluo-silicique et fluo-borique, et du chlorure de bore; et l'auteur s'est occupé ensuite de l'application de sa méthode aux substances fixes qui entrent dans ces combinaisons gazeuses. L'examen de l'hydrogène proto-phosphoré et du proto-chlorure de phosphore lui a donné pour le phosphore le résultat qu'il cherchait; il l'a obtenu pour l'arsenic, au moyen de l'hydrogène arseniqué et du proto-chlorure d'arsenic. Il a examiné dans les mêmes vues les chlorures de silicium, d'étain et de titane, et les résultats qu'il a obtenus sur le nombre et le poids relatifs des atomes de chaque substance sont exprimés en chiffres, dans lesquels des hypothèses différentes de celles dont il est parti ne produiraient que des multiplications ou des divisions, et qui offrent toujours par conséquent un élément permanent. Tout en poursuivant l'objet principal de ses recherches, M. Dumas a eu occasion de faire des observations importantes sur la préparation, les propriétés physiques et la composition de plusieurs combinaisons connues.

Ainsi il a fait voir que la composition du gaz hydrogène arseniqué, privé du gaz hydrogène qui s'y trouve mêlé en proportion variable, est la même que celle du gaz hydrogène proto-phosphoré, sur lequel il a publié antérieurement des observations importantes.

Il indique un nouveau moyen de préparer le chlorure de bore, découvert par M. Berzelius, et un chlorure de titane volatil, qui n'avait point encore été observé.

Enfin, il annonce la découverte d'un chlorure gazeux de manganèse correspondant à l'acide manganésique; mais il se propose de revenir sur cette combinaison dans un autre Mémoire.

Nous avons annoncé, dans notre analyse de l'année dernière, la découverte que M. Balard a faite du brome, substance d'une grande analogie avec le chlore et avec l'iode, et qui forme avec les autres corps des combinaisons fort semblables.

M. Sérullas s'est particulièrement attaché à l'étude de ces combinaisons. Il a obtenu successivement un éther hydro-bromique; un cyanure de brome; des bromures d'arsenic, d'antimoine et de bismuth, et un oxibromure d'arsenic. L'éther hydro-bromique se rapproche singulièrement de l'éther hydriodique : c'est un liquide plus pesant que l'eau, d'une odeur forte, très-soluble dans l'alcohol, dont il est précipité par l'eau. Le cyanure de brome n'a pas moins de ressemblance avec le cyanure d'iode : il cristallise en aiguilles longues et déliées, d'une grande volatilité, d'une odeur très-piquante, et d'une action si forte sur l'économie animale, qu'un grain dissous dans un peu d'eau suffit pour tuer un lapin.

La décomposition du bromure d'arsenic par l'eau a principalement fixé l'attention de M. Sérullas. Employée en quantité suffisante, l'eau réduit ce bromure en acide arsenieux et en acide hydro-bromique; lorsqu'il y a moins d'eau, il se précipite une poudre, qui donne à la distillation, de l'eau, de l'acide arsenieux et du bromate d'arsenic, et qui paraît à l'auteur un sous-bromate d'arsenic.

Le bromure de sélénium s'opère aisément quand on rapproche quatre parties de la première substance avec une de la seconde dans un grand état de division; au moment de leur union, il se dégage de la chaleur; un léger bruit se fait entendre. Ce bromure a l'odeur du chlorure de soufre; il se volatilise à une grande chaleur; il se dissout dans l'eau, mais en passant à l'état d'acide hydro-bromique et d'acide sélénique.

Le même chimiste s'est occupé des propriétés d'une combinaison que Berthollet, qui en a parlé le premier, avait nommée *acide prussique oxigéné*, mais que, d'après la nouvelle théorie qui a reconnu des substances acidifiantes autres que l'oxygène, et qui a donné au chlore le premier rang dans cette classe de corps, M. Gay-Lussac a dû nommer *acide chloro-cyanique*.

Il résulte du travail de M. Sérullas une connaissance plus exacte des propriétés de cette combinaison et des moyens de l'obtenir avec pureté, ainsi que des notions plus approfondies touchant l'action du chlore sur l'acide hydro-cyanique et sur le cyanure de mercure. Pour l'obtenir, on introduit quelques grammes de cyanure de mercure délayés avec de l'eau dans un flacon rempli de chlore; on le laisse 10 à 12 heures dans l'obscurité : le chlore se partage alors, et forme d'une part du bichlorure de mercure, et de l'autre la combinaison que l'on désire. En plongeant le flacon dans un mélange frigorifique à 18° au-dessous de 0, cette matière cristallise sur les parois. Du chlorure de calcium, introduit dans le vase, s'y empare de l'eau; au bout de 7 jours, on refroidit de nouveau le flacon, et on le débouche sous du mercure également refroidi, qui le remplit aussitôt : on y ajuste alors un tube qui va s'ouvrir sous une cloche pleine de mercure; et l'appareil reprenant la température de l'atmosphère, la combinaison obtenue se fond et s'évapore, et va remplir la cloche.

Une première propriété observée par M. Sérullas, c'est qu'à l'état de pureté, elle ne rougit point la teinture de tournesol, et ne peut être considérée comme un acide : aussi la nomme-t-il chlorure de cyanogène, dénomination à laquelle les commissaires de l'Académie préfèrent celle de cyanure de chlore. Elle cristallise à 18° au-dessous de 0, et se fond à 15 ou à 12. Sous une pression quadruple de celle de l'atmosphère, elle conserve sa liquidité jusqu'à 20° au-dessous de 0. Son action sur les animaux est des plus délétères.

Si, au lieu de tenir à l'obscurité et au froid le flacon rempli de chlore où l'on a mis du cyanure de mercure, on l'expose au soleil, il se produit un liquide jaune plus pesant que la solution du bichlorure de mercure produite en même temps, et que l'on peut en séparer aisément. Ce liquide ne se dissout point dans l'eau, ne précipite point le nitrate d'argent, et ne rougit point le tournesol : il est très-soluble dans l'alcohol.

D'après sa décomposition par le temps, et ce qui arrive quand on le distille sur un mélange de craie et de chlorure de calcium, M. Sérullas le regarde ou comme un mélange très-intime de *proto-chlorure de carbone* et de *chlorure d'azote*, ou comme un *proto-cyanure de chlore*. C'est cette dernière idée qui a paru la plus vraisemblable aux commissaires de l'Académie.

La théorie nouvelle dont nous venons de parler, et qui place le chlore, l'iode, le fluor, le brome et le soufre comme l'oxygène, dans la classe des substances électro-négatives qui peuvent produire des combinaisons analogues aux acides, et jouant le même rôle dans les combinaisons ultérieures, et la classification que l'on a faite en général de toutes les substances d'après leur électricité relative, ont conduit à reconnaître et à examiner une foule de composés dont on n'avait point d'idée auparavant, et à enrichir la chimie d'une foule prodigieuse de faits aussi nouveaux qu'importants. Ceux de ces composés qui se forment de deux combinaisons binaires, et sont par conséquent analogues aux sels proprement dits, ont dû fixer de préférence l'attention des chimistes; et tels sont surtout ceux qui résultent de l'union de l'hydrogène sulfuré avec les sulfures métalliques, que M. Gay-Lussac a considérés comme des sels auxquels ce sulfure métallique tiendrait lieu de base : tels sont encore les doubles sulfures, les doubles cyanures, les doubles chlorures. Il arrive aussi que le sulfure, le chlorure d'un métal s'unit à l'oxide du même métal, d'où il résulte encore une longue série de produits analogues aux précédents.

M. Polydore Boullay a essayé de faire sur les combinaisons de l'iode ce qui avait déja été opéré sur celles du soufre et du chlore; et il a reconnu que les iodures métalliques, d'après leur position relative dans l'échelle électrique, jouent les unes le rôle d'acide, les autres celui de base, et que les premiers s'unissent aux seconds de manière à produire des espèces de sels; que l'acide hydriodique peut s'unir à des iodures métalliques, comme l'acide hydro-sulfurique à des sulfures; que les iodures et les chlorures peuvent se combiner les uns aux autres, mais en des composés peu stables, et que les diverses combinaisons peuvent avoir lieu en des proportions différentes, mais toujours définies; le bi-iodure de mercure, par exemple, se combine en trois proportions avec les iodures alcalins, et ses trois composés peuvent se représenter par un atome d'iodure alcalin avec 1, 2, 3 atomes de bi-iodure de mercure faisant fonction d'acide.

On sait depuis long-temps que de l'acide sulfurique, chauffé avec un poids égal d'alcohol, donne naissance à divers produits, dont les plus anciennement connus sont : l'*éther* et l'*huile douce du vin*.

Depuis long-temps MM. Fourcroy et Vauquelin avaient pensé que, dans cette opération, l'acide sulfurique réagit sur l'alcohol, contraint une partie de son hydrogène et de son oxigène à se combiner pour former de l'eau qui s'incorpore à l'acide, et qu'il reste ainsi un composé où le carbone est dans une proportion plus forte que dans l'alcohol, et qui est l'éther. En effet, les expériences de MM. Théodore de Saussure et Gay-Lussac ont constaté qu'un volume de vapeur d'alcohol est représenté par un volume de vapeur d'eau et un volume d'hydrogène bicarboné; tandis qu'un volume d'éther l'est par un volume de vapeur d'eau et deux volumes d'hydrogène bicarboné. Néanmoins la découverte faite par M. Davy, et confirmée par MM. Sertürner, Gay-Lussac et Vogel, que, dans l'opération par laquelle on fait l'éther, il se dégage aussi un acide particulier que l'on a nommé *sulfo-vinique*, exigeait d'être prise en considération; et il devenait nécessaire de connaître les éléments de cet acide, et même d'examiner ceux de l'huile douce du vin, sur lesquels on n'avait pas fait encore des recherches assez exactes.

M. Hennell a entrepris ce travail en Angleterre, et MM. Dumas et Polydore Boullay s'en sont occupés, de leur côté, à Paris.

Ces deux derniers chimistes ont constaté l'exactitude des analyses antérieures de l'éther; ils ont trouvé l'huile douce du vin formée de quatre volumes de carbone et de trois d'hydrogène; ils ont déterminé la composition élémentaire de l'acide sulfo-vinique, en faisant l'analyse des sulfo-vinates de baryte et de deutoxide de cuivre, et celle du bisulfo-vinate de plomb. Leurs expériences les ont conduits à reconnaître que l'acide sulfo-vinique est composé d'un atome d'acide hyposulfurique contre deux atomes d'huile douce du vin, et que, dans les sulfo-vinates neutres de baryte et de cuivre, il y a un atome d'hyposulfate, deux atomes d'huile et cinq atomes d'eau.

D'après ces données, MM. Dumas et Boullay pensent que, lors de l'éthérification, une portion d'alcohol se change, par l'influence de l'acide sulfurique, en éther et en eau, et que cette eau affaiblit une portion de l'acide; qu'une autre portion de l'acide se change en acide hypo-sulfurique, en cédant une partie de son oxigène, laquelle se combine avec de l'hydrogène provenant de l'hydrogène bicarboné de l'autre portion de l'alcohol; qu'il reste ainsi la proportion d'hydrogène et de carbone nécessaire pour former l'huile douce; et qu'une partie de cette huile douce, en s'unissant à une partie de l'acide hypo-sulfurique, donne l'acide sulfo-vinique. Une partie d'eau, provenant de la décomposition de l'alcohol, est d'ailleurs mise en liberté.

MM. Dumas et Boullay pensent, au reste, avec M. Vogel, que l'acide sulfo-vinique se forme en même temps que l'éther; et que sa production et celle de l'huile douce, quoique simultanées, avec celle de l'éther, en sont indépendantes.

Depuis long-temps des chimistes distingués ont étudié la garance, et ont cherché à reconnaître de quelle manière on peut l'employer dans la teinture avec le plus d'avantage; et toutefois, son analyse proprement dite, qui aurait été le plus sûr moyen d'arriver à ce résultat, n'a pas été poursuivie avec assez de soin, et il est remarquable que, dans cette multitude de travaux entrepris depuis trente ans sur la chimie végétale, le seul écrit que l'on puisse citer sur la composition de cette racine est celui de M. Kuhlman, qui n'a paru qu'en 1824. Jusqu'alors on n'avait que les essais de Walt sur l'action que sa décoction éprouve de la part des réactifs, et ceux de MM. Bartholdi et Braconnot, pour y rendre sensible la présence du sulfate de magnésie et de l'acide malique.

MM. Colin et Robiquet ont cherché à remplir cette lacune de la science; et leurs travaux leur ont procuré des résultats intéressants, et qui en laissent entrevoir de plus intéressants encore.

De la racine de garance macérée dans le triple de son poids d'eau et égouttée donne un marc qui, abandonné à lui-même dans un lieu frais, se prend en une gelée, qui contient presque toute la couleur rouge. On la traite à plusieurs reprises par l'alcohol bouillant; et après avoir concentré les solutions alcoholiques, on y ajoute de l'acide sulfurique et de l'eau. Il en tombe un précipité d'un jaune-fauve, qui bien lavé et chauffé, donne un sublimé cristallisé de la couleur et de l'aspect du plomb rouge de Sibérie, volatil, soluble dans l'eau en petite quantité, très-soluble dans l'alcohol et surtout dans l'éther, formant avec les alcalis des combinaisons bleues ou violettes. MM. Colin et Robiquet ont nommé cette substance *alizarine*. Appliquée sur la toile de coton au moyen d'un mordant alumineux, et avec des avivages suffisamment énergiques, elle donne une teinture d'un beau rouge; et néanmoins, comme on ne peut en préparer de belle laque avec l'alun, il y avait fort à douter que ce fût le seul principe colorant de la garance. Ces chimistes durent donc se livrer à de nouvelles recherches, et ils découvrirent dans la garance une autre substance, qu'ils ont nommée *purpurine*, et qui est douée à un bien plus haut degré du pouvoir tinctorial.

La purpurine, comme l'alizarine, est fusible, volatile, cristallisable par sublimation, dissoluble dans l'éther : elle a plus de solubilité dans l'eau que l'alizarine, et surtout les alcalis ne lui donnent point de teintes bleues ou violettes; enfin, sa propriété distinctive la plus frappante, c'est de donner avec la solution d'alun bouillante une liqueur d'un rouge-rosé très-pur, dont on peut retirer une belle laque.

Il reste à savoir si l'alizarine et la purpurine sont bien réellement deux principes immédiats distincts, ou si la première n'est pas une purpurine altérée par quelque mélange : c'est ce que MM. Colin et Robiquet ont été invités à examiner. Dans le cours de leurs expériences, ils sont parvenus à quelques résultats pratiques. Leurs procédés leur donnent les moyens d'assigner la vraie valeur des garances venues dans des sols et à des expositions différentes, et qui, comme on sait, varient beaucoup pour la quantité de matière tinctoriale qu'elles contiennent; ils ont reconnu que certains degrés de fermentation n'altèrent point la couleur rouge, et que l'on ne doit point jeter la garance qui les a subis; ils ont préparé une laque qui aura des avantages pour l'art de la peinture, même après celle dont la fabrication a été découverte par M. Mérimée; enfin, en traitant la garance par l'acide sulfurique, ils ont obtenu une sorte de charbon qui contient la matière colorante à un état beaucoup plus pur que celui où elle se trouve dans la racine même, et que l'on peut aussi employer avec plus d'avantage pour la fabrication des toiles peintes.

Des membres ou des correspondants de l'Académie ont fait paraître sur la chimie des ouvrages généraux, qui, par leur nature, ne sont pas susceptibles d'être analysés ici, et dont nous ne pouvons rapporter que les titres.

Tels sont la cinquième édition du Traité de chimie de M. Thénard, le Nouveau Système de philosophie chimique de M. Dalton, et le Traité des manipulations chimiques de M. Faraday.

MINERALOGIE ET GÉOLOGIE.

M. Berthier, ingénieur des mines, aujourd'hui membre de l'Académie, avait présenté, avant son élection, quatre Mémoires minéralogiques.

Le premier a pour objet une substance connue sous le nom de petro-silex rouge de Sahlberg, et que sa fusibilité en un émail blanc et une analyse déja ancienne avaient fait considérer comme appartenant, ainsi que les autres petro-silex, aux feldspaths compactes. Mais la potasse y est remplacée par la soude, et il s'y joint une quantité notable de magnésie; enfin il y a beaucoup plus de silice que dans aucun feldspath, en sorte que l'on est conduit à considérer cette pierre comme une espèce distincte.

Le second de ces Mémoires est relatif à un minerai d'antimoine découvert en Auvergne, et dont on n'avait pu extraire le métal. Il s'est trouvé formé de sulfure d'antimoine et de proto-sulfure de fer en combinaison intime, et telle que le fer n'agit point sur l'aimant, et d'une petite quantité de sulfure de zinc. La proportion des deux principaux composants est de quatre atomes pour le premier, et de trois pour le second. Ce minerai est analogue à celui que l'on a nommé jamesonite; seulement dans ce dernier, le sulfure de fer est remplacé par du sulfure de plomb.

Dans son troisième Mémoire, M. Berthier traite d'une substance jaune, tendre, onctueuse, qui se trouve en rognons dans les argiles ferrugineuses où l'on exploite le minerai de manganèse, dit vulgairement de Périgueux. Elle se compose de silice, de peroxide de fer, d'alumine et de magnésie; et comme elle ne ressemble point aux silicates ordinaires de peroxide de fer, il y a lieu de croire que de l'eau entrée en combinaison est ce qui en modifie les caractères.

Enfin le quatrième Mémoire, qui est d'un intérêt pratique, traite de la composition du minerai de fer en grains. C'est essentiellement un peroxide de fer hydraté, mais souvent altéré par des mélanges accidentels d'hydrates d'alumine, de phosphates de fer et de chaux. Certains grains mêlés aux autres dans quelques localités s'en distinguent par une action magnétique. M. Berthier a reconnu que cette propriété est due à la présence d'un silicate de protoxide de fer et d'alumine, et cette combinaison du fer avec la silice est analogue à un minerai que M. Berthier a reconnu à Chamoison dans le Valais, et où il a trouvé un atome de silicate de fer, un atome d'aluminate biferruginé, et douze atomes d'eau; les grains magnétiques, dont il donne ici l'analyse, contiennent seulement une plus grande proportion de peroxide de fer.

Une observation remarquable de l'auteur, c'est que les grains qui renferment de l'oxide de manganèse perdent leur action sur le barreau aimanté, lorsqu'on les calcine, et que ceux qui n'en renferment pas ont, au contraire, une action à peu près aussi forte après la calcination qu'auparavant; ce qui s'explique très-bien, parce que l'oxide de manganèse cède son oxigène au fer, qui, de l'état de protoxide, passe ainsi à celui de peroxide. Quelques minerais de fer hydraté ont laissé, lors de leur dissolution, de petits cristaux octaèdres de fer titané, qui étaient accidentellement mélangés à leur masse.

A ce travail M. Berthier a joint l'analyse d'autres minerais de fer, qui s'exploitent en couches réglées dans un calcaire oolitique du département de la Moselle, et qui lui ont offert un mélange de carbonate de fer avec un peu de carbonate de chaux, et 48 pour 100 de silicate alumineux de fer magnétique. Sa composition est d'un atome d'aluminate de fer, de quatre atomes de silicate bi-ferrugineux, et de six atomes d'eau.

Ces Mémoires ajoutent, comme on voit, quatre espèces à celles que l'on possédait en minéralogie, si toutefois l'on doit continuer de donner aux combinaisons minérales, et uniquement d'après les proportions des éléments combinés, un titre qui ne semble applicable qu'aux règnes organiques.

M. Brongniart a fait paraître un petit traité sur les roches, extrait du Dictionnaire des sciences naturelles. Il les y considère sous le rapport géologique, c'est-à-dire à l'égard de leur position mutuelle à la surface du globe, et sous le rapport minéralogique ou des minéraux d'espèces plus ou moins nombreuses qui les composent. Minéralogiquement parlant, les roches sont simples ou composées : les roches simples sont formées d'un minéral connu, ou ne peuvent être rapportées avec certitude à aucune espèce minérale; les roches composées résultent ou de la cristallisation de leurs composants, ou de leur simple agrégation. La nature du minéral dans les roches simples, et lorsqu'il s'agit de roches composées, la nature de celui qui y domine, donnent ensuite les divisions ultérieures. C'est ainsi que M. Brongniart arrive à établir ses genres. Il en a cinquante-un, seulement dans les roches composées. A l'article de chacun d'eux, il décrit les espèces ou variétés qui y appartiennent, et fait connaître avec soin les lieux où on les trouve, et leurs positions relatives, en sorte qu'en relevant ce qui est dit de ces positions, on en déduirait aisément une classification géologique.

Ce que la géologie demande par-dessus tout aujourd'hui, ce sont des descriptions méthodiques des terrains dans les divers pays, d'où il puisse résulter une connaissance générale et positive de la structure des couches qui enveloppent le globe.

MM. Delcros et Rozet, ingénieurs géographes, ont présenté un travail de ce genre sur les montagnes qui bornent au sud les étangs de Caroute et de Berre en Provence.

Ils y ont reconnu trois dépôts successifs. Le plus ancien est un calcaire tendre, de nature oolitique, contenant des coquilles très-différentes de celles de la craie, et qui devient compacte à sa partie supérieure. Au-dessus est une suite de couches alternatives de grès calcarifère, de sable ferrugineux et de marne rougeâtre, qui a aussi à sa partie supérieure des couches considérables d'un calcaire compacte qui contient des hippurites, des sphérulites, une petite gryphée et beaucoup de madrépores. Les auteurs regardent ces couches comme analogues à celles qui portent en Angleterre le nom de coral-rag. Le dépôt supérieur confinant avec le précédent, et renfermant les mêmes hippurites, est formé de lits alternatifs de marnes plus ou moins bitumineuses, et de lignites qui, d'après cette position, seraient plus anciens que la plupart des lignites connus.

Les marnes schisteuses, voisines de ces lignites, contiennent des coquilles d'apparence fluviatile, mais qui ne sont pas assez bien conservées pour que l'on puisse en déterminer les espèces avec certitude. On a cru pouvoir comparer ce troisième dépôt à celui de Kimridge en Angleterre.

Il semble résulter de ces observations, que ces montagnes appartiennent à un ordre de formation beaucoup plus ancien qu'on ne l'avait supposé jusqu'à présent.

Nous avons parlé, en 1824, du grand travail entrepris par M. de Bonnard sur la constitution géologique d'une partie du département de la Côte-d'Or, où le calcaire, dit communément alpin, n'est séparé du granite que par une roche à gros grains de quartz et de feldspath, qui appartient au genre des psammites ou grauwackes, et que, dans ces derniers temps, on a nommée *arkose*. Les autres roches qui servent communément d'intermédiaires à celles-là sont réduites, dans le pays dont il s'agit, à de légers vestiges dont la série même n'est pas complète.

Depuis lors, M. de Bonnard a poursuivi ses recherches dans d'autres parties de ce département, et dans ceux de la Nièvre, de Saône-et-Loire, de la Loire, et du Rhône. Elles ont été singulièrement favorisées par les excavations et les percées souterraines qu'ont exigées les canaux de Bourgogne et de Nivernais; et partout l'auteur a pu constater la justesse de ses premières idées, à quelques modifications près, en sorte qu'il peut présenter aujourd'hui ce rapprochement de couches, qui, ailleurs, sont fort séparées, non plus comme un accident particulier à certaines localités assez circonscrites, mais comme une disposition constante du sol d'une partie considérable de la France. Les terrains qui reposent immédiatement sur le granite, le porphyre ou le gneiss, sont, en certains endroits, l'arkose, en d'autres le grès houiller; et ce qui est très-remarquable, ces deux terrains semblent étrangers l'un à l'autre; ils ne se superposent ni ne s'enveloppent : partout où est l'un, l'autre manque, quoique les terrains supérieurs et inférieurs demeurent uniformes. Il semblerait que ce soient deux formations parallèles, ou deux de ces équivalents géognostiques dont on a déja cité d'autres exemples. Les passages entre les granites et les arkoses sont tellement insensibles, que l'on est souvent embarrassé d'en tracer la limite. Mais la liaison de l'arkose avec les terrains supérieurs est d'une tout autre sorte : il s'y interpose par couches jusqu'à une certaine hauteur; les minerais métalliques qu'il contient s'y élèvent comme lui. M. de Bonnard conclut même de là que le lias (l'un de ces terrains supérieurs) a des rapports géologiques plus intimes avec l'arkose qu'avec les calcaires oolitiques, dans la série desquels on le range communément.

On sait depuis long-temps que l'Allemagne et la Hongrie recèlent dans plusieurs de leurs cavernes des amas immenses d'ossements d'ours, d'hyènes et d'autres animaux aujourd'hui étrangers à ces pays. Ce fait, déja intéressant par lui-même, a acquis encore plus d'importance depuis que l'on a trouvé des cavernes semblables, et plus riches encore en ossements, dans d'autres pays de l'Europe. M. le professeur Buckland, qui a décrit celles de l'Angleterre dans son ouvrage, intitulé : *Reliquiæ diluvianæ,* a contribué lui-même à en découvrir en France. Visitant celle d'Oiselles, près de Besançon, il a jugé que des couches de stalactites qui la tapissent devaient recouvrir quelques dépôts d'ossements; et, en effet, des fouilles ayant été faites et continuées pendant quelque temps par les ordres de M. de Milon, préfet du département, et par les soins de M. Gevril, conservateur du cabinet de Besançon, il en a été retiré une très-grande quantité de crânes et d'os de la grande espèce d'ours à front bombé, déja reconnue dans les cavernes d'Allemagne, et qui a entièrement péri; et ce qui est remarquable, c'est qu'ils n'y sont accompagnés de ceux d'aucune autre espèce.

Une autre caverne, située à Échenoz, près de Vesoul, a été examinée plus récemment par M. Thiriat, qui y a découvert des os d'hyène et de plusieurs herbivores.

Des savants distingués, et particulièrement MM. Marcel de Serres et Dubreil, professeurs à Montpellier, sont chargés en ce moment de décrire une caverne découverte, il y a trois ou quatre ans, à Lunel-Vieil, département de l'Hérault, et qui contient surtout des ossements d'hyène; et l'on doit espérer que leur travail verra bientôt le jour. Il s'en est trouvé aussi une à Saint-Macaire, dans le département de la Gironde, où des os d'hyène sont également accompagnés de ceux de beaucoup d'herbivores. Il en a été annoncé une du département de l'Aude. En un mot, les cavernes à ossements paraissent devoir devenir un phénomène général commun à toutes les montagnes ou collines de la nature de celles qui composent le Jura, et la destruction des animaux qui les habitaient se place au nombre des faits importants de l'ancienne histoire du globe, dont la géologie cherche l'explication.

Beaucoup de géologistes se croient autorisés à penser que la mer a envahi à plusieurs reprises la surface d'une partie de nos continents, et qu'il y a eu entre ses invasions des intervalles pendant lesquels cette surface était à découvert, et nourrissait des végétaux et des animaux terrestres. Ils fondent cette opinion sur les alternatives de couches remplies de productions de la mer, avec d'autres qui ne paraissent contenir que des productions terrestres.

M. *Constant* Prevost n'a pas jugé cette manière de voir conforme aux faits qu'il a observés; et, dans un Mémoire présenté à l'Académie, il s'attache à prouver qu'entre les divers terrains de transport et de sédiment il n'existe aucune couche que l'on puisse regarder comme ayant formé une surface continentale, et ayant été couverte pendant longtemps de productions terrestres. Il en a vainement cherché des traces au contact des terrains marins et des terrains d'eau douce : il rappelle que les fleuves portent à de grandes distances des débris organiques de toute espèce, et que les eaux de la mer, accidentellement soulevées de leur bassin, font quelquefois irruption sur des terrains bas, dans des marais et des lagunes dont le fond a dû être rempli auparavant de dépôts renfermant des débris de productions de la terre et de l'eau douce; il fait sentir enfin que, par diverses causes, le détroit de la Manche doit avoir sur son fonds des alternations de couches fort analogues à celles qui constituent la partie inférieure de beaucoup de terrains tertiaires, et que, si le niveau en baissait de vingt-cinq brasses, il se changerait en un vaste lac, où il se formerait des dépôts très-semblables à ceux qui composent la partie supérieure des mêmes terrains.

Il essaie de faire une application de cette théorie à nos couches des environs de Paris, et après en avoir représenté la position relative au moyen de deux coupes transversales où l'on prend une idée assez nette des alternats, des mélanges et des enchevêtrements des divers dépôts, il tâche d'établir que les couches marines de la craie, du calcaire grossier, des marnes et des grès supérieurs, ont pu être formées dans le même bassin et sous les mêmes eaux que l'argile plastique, le calcaire siliceux, et le gypse lui-même, qui ne renferment essentiellement que des débris d'animaux et de végétaux terrestres et fluviatiles.

A une première époque, selon M. Prevost, une mer profonde et paisible a déposé les deux variétés de craie, qui constituent le fond et les bords du vaste bassin dont il s'agit.

A une seconde époque, ce bassin, par l'abaissement progressif de l'Océan, est devenu un golfe où les affluents des rivières ont formé des brèches crayeuses et des argiles plastiques, bientôt recouvertes par les dépouilles marines du premier calcaire grossier.

Il est arrivé une troisième époque où ces dépôts ont été interrompus par une commotion qui en a brisé et déplacé les couches : le bassin est devenu un lac salé traversé par des cours d'eaux volumineux, venant alternativement de la mer et des continents, et qui ont produit les mélanges et les enchevêtrements du calcaire grossier, du calcaire siliceux et du gypse.

Une quatrième époque a amené dans ce lac l'irruption d'une grande quantité d'eau douce, chargée d'argiles et de marnes, au milieu desquelles se formaient encore quelques dépôts de coquilles marines; le bassin n'a plus été qu'un immense étang saumâtre.

A une cinquième époque, il a cessé de communiquer avec l'Océan; le niveau de ses eaux a baissé au-dessous de celui des eaux de la mer; il a continué de recevoir les dépôts des eaux continentales et de leurs productions.

A une sixième époque, les eaux de la mer ont rompu leurs digues, et ont rempli l'étang où elles ont formé les grès marins supérieurs; le bassin, presque comblé, n'a pu recevoir alors que des eaux douces peu profondes; enfin la succession de toutes ces opérations s'est terminée par le grand cataclysme diluvien.

Le grand problème de la géologie est tellement indéterminé, qu'il offrira pendant long-temps de l'exercice aux combinaisons de l'esprit: heureux du moins lorsque ceux qui se livrent à ce genre de spéculation ont soin, comme M. Prevost, de chercher dans les faits des appuis à leurs conjectures. Ils enrichissent véritablement la science, pour peu qu'un rapport nouveau, une superposition inaperçue, des débris jusque-là inconnus, s'offrent à leurs regards, et c'est seulement lorsque le trésor qu'ils concourent à agrandir aura été complété, que l'on sera en état de rendre justice à leur sagacité, et d'assigner le degré de justesse avec lequel chacun d'eux avait conçu ses hypothèses.

Tout le monde s'accorde à croire que la masse du globe a été liquide; mais cette liquidité était-elle aqueuse ou ignée? c'est sur quoi il y a plus de divergence. La température propre du globe, les motifs que l'on peut avoir d'admettre l'existence d'un feu central, sont au nombre des éléments qui doivent conduire à la solution de cette question; et sous ce rapport la géologie doit y prendre un grand intérêt. M. Cordier s'en est occupé, et a communiqué, à ce sujet, à l'Académie, un Mémoire étendu.

Cette supposition du feu central, soutenue par Descartes, par Leibnitz, par Buffon, avait été fort ébranlée par les observations de Saussure, et par les théories de Pallas et de Werner. Mais la certitude acquise depuis quelque temps, que les agents volcaniques résident sous les terrains primordiaux, l'identité des laves dans toutes les parties de la terre, la facilité avec laquelle certains minéraux se cristallisent par l'action du feu, la chaleur des sources, une certaine augmentation de température dans les grandes profondeurs, ont commencé à lui rendre du crédit. De grands mathématiciens ne l'ont point trouvée en contradiction avec leurs calculs. Il s'agit de lui donner l'appui d'expériences précises et concluantes. M. Cordier a rassemblé les résultats de celles que d'habiles physiciens ont faites, et qui sont au nombre de plus de trois cents, et ont eu lieu dans quarante mines différentes. L'auteur lui-même en a fait dans trois mines de houille fort éloignées les unes des autres.

Après avoir analysé avec soin les différentes causes de perturbation qui résultent de la pénétration de l'air extérieur, de sa circulation dans la mine, de l'introduction des eaux qui y pénètrent, enfin de la présence des hommes et des lumières qu'ils emploient, causes dont l'effet s'étend jusqu'au fond des excavations les plus éloignées, il a toujours trouvé la preuve d'un accroissement rapide de température dans la profondeur. Ainsi, les eaux qui s'échappent des mines d'étain de Cornouailles ont une chaleur moyenne de 10 degrés supérieure à la chaleur moyenne du pays, tandis que deux mille ouvriers auraient à peine suffi pour en élever la masse d'un quart de degré. Toutes les eaux de sources, excepté celles qui sont dominées par de grands amas de neiges et de glaces, donnent des résultats analogues.

La loi de cet accroissement offre plus de difficultés.

D'après ce que l'on a constaté dans les caves de l'Observatoire, il y aurait 1 degré d'angmentation pour 28 mètres; ce qui, si l'augmentation se faisait uniformément, ferait croire qu'à 2,503 mètres, ou une forte demi-lieue au-dessous de Paris, la chaleur de la terre égalerait déja celle de l'eau bouillante. M. Cordier a observé un accroissement semblable dans une mine; mais il en est une autre où il ne l'a trouvé que de 1° pour 43 mètres; et au contraire, dans une troisième, elle était de 1° pour 15 mètres; et dans une quatrième, de 1° pour 19 mètres. En général, la moyenne des observations annonce un accroissement plus rapide que tout ce que l'on avait imaginé jusqu'à présent, et d'après lequel il suffirait de descendre à vingt et trente lieues pour rencontrer une chaleur capable de fondre toutes les laves et la plupart des roches connues. On doit donc croire que l'intérieur du globe conserve encore sa fluidité primitive. L'écorce solide du globe s'épaissit à mesure que le globe lui-même se refroidit : son épaisseur actuelle n'est pas au-dessus de la cent vingtième partie du diamètre. Mais cette épaisseur n'est point égale, et c'est une des causes qui font varier les différents climats, indépendamment de leur latitude. Il est même probable que l'écorce du globe jouit encore d'une certaine flexibilité, qui expliquerait les phénomènes des tremblements de terre, cette élévation progressive du sol, que l'on dit s'observer en Suède, et l'abaissement que l'on assure avoir lieu sur d'autres côtes, et plusieurs autres phénomènes embarrassants pour la géologie. Les éjections des volcans se trouveraient ainsi un simple effet mécanique de la contraction de la croûte qui se refroidit, et qui de temps en temps doit comprimer certaines parties des matières fluides qu'elle enveloppe. Des laves arrivant de vingt lieues seraient pressées par une force équivalente à celle de 28,000 atmosphères, et il ne faut rien moins qu'une telle puissance pour élever leurs énormes masses.

Dans l'origine, les couches les moins fusibles doivent s'être consolidées les premières; et en effet, dans les terrains primordiaux, ce sont les calcaires, les talcs, les quartz, qui se superposent aux autres couches. Cette fluidité centrale est ce qui a permis aux couches de se rompre et de se disloquer comme nous les voyons, etc., etc.

Ces conclusions si importantes, si variées, et beaucoup d'autres que l'espace qui nous est accordé ne nous permet pas de développer, résultent, comme on voit, d'un fait très-simple en apparence, mais dont la fécondité selon M. Cordier est en quelque sorte merveilleuse, celui de l'augmentation sensible de température dans les profondeurs, fort petites, à la vérité, où nous pouvons pénétrer, et de la supposition qu'il juge très-vraisemblable que cette augmentation continue proportionnellement à des profondeurs plus grandes.

Le peuple a le préjugé que les eaux thermales conservent plus long-temps leur chaleur que les eaux échauffées artificiellement.

M. Gendrin a pris la peine de réfuter cette bizarre opinion, et il a fait voir, par des expériences précises, que les différences, lorsqu'il y en a, et elles sont toujours infiniment petites, ne tiennent qu'aux principes étrangers, dissous dans ces eaux, lesquels, comme chacun sait, en altèrent la capacité pour le calorique.

M. Longchamps avait déja publié précédemment des expériences analogues.

Parmi les volcans éteints, qui couvrent une partie de la France et de l'Europe, il en est qui appartiennent à des époques différentes, et l'on a aujourd'hui dans les couches remplies de corps organisés, sur lesquelles ils ont versé leurs déjections, un moyen de fixer leur chronologie relative. C'est ce que M. Marcel de Serres a essayé pour quelques-uns de ceux du midi de la France, dont les éruptions ont été postérieures au deuxième terrain d'eau douce de MM. Cuvier et Brongniart, terrain dont M. Marcel de Serres a fait lui-même une étude très-soignée, et qu'il a suivi sur de fort grands espaces. Cette formation calcaire, marneuse et siliceuse, qui ne renferme que des coquilles de terre et d'eau douce, n'est pas, selon M. Marcel de Serres, en assises continues, mais en lambeaux isolés, et elle occupe d'ordinaire des fonds de vallées où elle se superpose à des terrains tertiaires marins ou à des couches volcaniques; ce qui avait déja été observé par plusieurs géologistes. Mais ce que M. Marcel de Serres a remarqué de plus que la plupart de ses prédécesseurs, c'est que les produits volcaniques sont souvent en mélange intime avec le calcaire d'eau douce, et que ce calcaire a éprouvé de grands dérangements dans leur voisinage : d'où il conclut que tantôt les matières volcaniques arrivaient de l'intérieur de la terre avec assez de force pour saisir des masses de calcaire d'eau douce, et que tantôt elles n'ont pu que soulever la grande assise de calcaire, et s'étendre par-dessous. Il promet de développer cette opinion dans une édition nouvelle qu'il donnera bientôt de ses observations sur les volcans éteints du midi de la France.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE ET BOTANIQUE.

M. Dutrochet a confirmé ses recherches sur cette force qui, selon lui, est le principal agent de la vie, et qu'il dérive de l'électricité. On a vu, par nos analyses précédentes, que lorsque deux liquides de densité ou de nature chimique différente sont séparés par une cloison mince et perméable, il s'établit au travers de cette cloison deux courants dirigés en sens inverse, et inégaux en force. Il en résulte que la masse liquide s'accumule de plus en plus dans la partie vers laquelle est dirigé le courant le plus fort. Ces deux courants existent dans les organes creux qui composent les tissus organiques, et c'est là que M. Dutrochet les a désignés sous les noms d'*endosmose* pour le courant d'introduction, et d'*exosmose* pour le courant d'expulsion. Ses expériences lui ont prouvé que ce phénomène n'est pas produit exclusivement par les membranes organiques. Les plaques poreuses inorganiques, très-minces, le produisent également; mais une extrême minceur de la cloison perméable est une condition nécessaire du phénomène. Si la cloison perméable a quatre millimètres d'épaisseur, par exemple, il ne se manifeste point; mais il a lieu si elle n'est épaisse que d'un millimètre, quoique l'action capillaire des plaques poreuses soit égale dans l'une et l'autre circonstance : d'où il résulte, selon M. Dutrochet, que le phénomène ne dépend point de la seule capillarité.

Un autre fait qui lui paraît démonstratif en faveur de sa manière de voir, c'est qu'il existe au travers de la cloison deux courants opposés et inégaux en force; ce qu'une différence de capillarité entre les deux fluides ne pourrait pas produire.

M. Dutrochet ajoute que si l'endosmose et l'exosmose étaient des phénomènes dus à la capillarité, il devrait exister un rapport constant entre la hauteur à laquelle les différents liquides s'élèvent dans un même tube capillaire, et la manière dont ils se comportent par rapport à l'endosmose et à l'exosmose. Or il a observé qu'à la vérité, lorsque l'eau pure est séparée par une cloison membraneuse d'un liquide dont l'ascension dans les tubes capillaires est moindre, on voit l'accumulation s'effectuer du côté où se trouve le liquide le moins ascendant; mais que si l'expérience a lieu entre de l'huile d'olive, par exemple, et de l'huile de lavande, c'est du côté de l'huile d'olive que se fait l'accumulation, quoique l'huile d'olive s'élève dans les tubes capillaires plus que l'huile de lavande, comme 67 à 58. Cette action, qui est très-faible, a besoin, pour devenir appréciable, d'une température qui ne soit pas inférieure à + 15 degrés R. Si l'on met en rapport l'huile essentielle de lavande avec l'alcohol, on voit l'accumulation du liquide s'effectuer du côté de l'huile essentielle, c'est-à-dire encore du côté où se trouve le liquide le plus *ascendant dans les tubes capillaires.* Cette action est beaucoup plus énergique que la précédente. L'huile essentielle de térébenthine se comporte, dans ces expériences, comme l'huile essentielle de lavande.

Ainsi, dit M. Dutrochet, il est démontré que l'accumulation des liquides, dans les expériences dont il s'agit, n'est point dans un rapport constant avec la manière dont ces mêmes liquides se comportent par rapport à l'attraction capillaire, et il en résulte en définitive que l'action capillaire n'est point la cause de ce phénomène d'accumulation. Il reste à déterminer si cette cause est dans l'affinité qui peut exister entre des liquides hétérogènes : des expériences que l'auteur a rapportées dans son ouvrage lui paraissent avoir répondu à cette question. Si l'on met du blanc d'œuf dans un large tube de verre, et que l'on fasse couler dessus avec précaution de l'eau pure, il ne se fera aucun mélange de ces deux liquides; on verra parfaitement la ligne de démarcation qui les sépare. Cette ligne de démarcation ne variera point; il n'y aura aucune augmentation du volume de l'albumen, quel que soit le temps que durera cette expérience. L'albumen n'a donc aucune affinité pour l'eau qui le recouvre. Et néanmoins, lorsque les deux substances sont séparées par une membrane, l'eau traverse cette membrane pour s'accumuler du côté de l'albumen, avec lequel elle se mêle alors. C'est donc à une autre cause qu'à l'affinité réciproque des liquides qu'il faut attribuer ce phénomène.

M. Dutrochet persite à penser que cette cause est l'électricité, tout en convenant que cette électricité ne manifeste point du tout sa présence au galvanomètre : il avait d'abord été porté à croire qu'elle naissait du rapprochement des deux liquides hétérogènes que sépare imparfaitement la cloison perméable qui leur est interposée ; mais alors ces deux liquides devraient posséder une électricité différente, ce que le galvanomètre ne manifeste point. Il lui paraît donc assez probable que cette électricité résulte du contact des liquides sur la cloison qui les sépare. On sait, par les expériences de M. Becquerel, que le courant des liquides sur les corps solides produit de l'électricité: ainsi, dans cette circonstance, le contact des deux liquides différents sur les deux faces opposées de la cloison produira deux degrés différents d'électricité, laquelle sera, par conséquent, plus forte d'un côté que de l'autre. C'est probablement de cette double action électrique que résultent les deux courants opposés et inégaux en intensité qui traversent la cloison. Ce qu'il y a de certain, c'est que ce phénomène cesse d'avoir lieu lorsque les deux faces opposées de la cloison ne sont plus en contact immédiat qu'avec un seul des deux liquides. Un tube de verre, muni d'un évasement terminal, bouché par une plaque d'argile blanche cuite, fut rempli en partie avec une solution aqueuse de gomme arabique, et plongé ensuite dans l'eau au-dessus de laquelle la partie vide du tube s'élevait verticalement. L'endosmose eut lieu, et le liquide gommeux s'éleva graduellement dans le tube. Quelques heures après, l'ascension s'arrêta, et bientôt le liquide commença à descendre. Ayant retiré l'appareil de l'eau, M. Dutrochet s'aperçut que la plaque d'argile était enduite en dehors par le liquide gommeux, qui avait transsudé du dedans, chassé par l'exosmose; il essuya la surface extérieure de cette plaque, et replaça l'appareil dans l'eau. Dès ce moment, l'endosmose se manifesta de nouveau par l'ascension du liquide dans le tube.

Le double phénomène de l'endosmose et de l'exosmose pouvant être produit avec des lames minces de corps inorganiques perméables aux liquides, comme il l'est avec des membranes organiques, ce n'est point exclusivement un phénomène organique ; cependant il se trouve appartenir exclusivement aux corps organisés, parce que ce n'est que chez eux qu'il existe des liquides hétérogènes séparés par des cloisons minces et perméables. C'est le point par lequel la physique des corps vivants se confond avec la physique des corps inorganiques; et M. Dutrochet pense, avec beaucoup de physiologistes, que plus on avancera dans la connaissance de la physiologie, plus on aura de motifs pour cesser de croire que les phénomènes de la vie sont essentiellement différents des phénomènes de la physique générale.

M. de Mirbel s'est appliqué à démontrer que les couches du liber des arbres et des arbrisseaux à deux cotylédons conservent chacune, pendant une suite d'années plus ou moins considérable, la propriété de végéter et de croître; que la croissance du liber se manifeste par l'élargissement ou la multiplication des mailles de son réseau, et par l'augmentation de la masse de son tissu cellulaire; que, lorsque le liber se porte en avant, ce n'est pas, comme on le croit communément, parce que les nouvelles productions qui s'interposent chaque année entre le bois et l'écorce le chassent devant elles, mais parce qu'il acquiert plus d'ampleur par l'effet de sa propre croissance, et que, par conséquent, il se sépare et s'écarte de lui-même du cône ligneux sur lequel il était appliqué; que si, dans cette circonstance, on n'aperçoit pas de lacune entre le bois et le liber, cela provient de ce que la place abandonnée par le liber est occupée immédiatement par le cambium. Il cherche à prouver, en outre, que les canaux séveux ou méats de M. Tréviranus, qui, selon cet auteur, sont les interstices que laissent entre elles des utricules, d'abord séparées complètement les unes des autres, puis soudées incomplètement ensemble, ne sont, en réalité, que des fentes produites par le dessèchement tardif de la substance interne des parois épaisses du tissu cellulaire originairement mucilagineux et continu dans tous ses points; que l'on ne saurait voir dans les tubes criblés des couches ligneuses, que des cellules plus larges et plus longues que celles du tissu cellulaire alongé qui constitue la partie la plus compacte du bois ; que les parois des tubes criblés sont en même temps les parois des cellules alongées contiguës à ces mêmes tubes; et qu'ainsi, sans qu'il soit nécessaire d'alléguer d'autres faits, on peut déja affirmer, contre le sentiment de plusieurs auteurs, qu'il existe des cellules criblées, comme M. de Mirbel l'a annoncé autrefois.

M. Du Petit-Thouars, ayant voulu faire connaître quelques particularités de la végétation des conifères importantes pour leur culture, a cru devoir faire précéder leur exposition par des recherches de bibliographie historique; il s'est arrêté principalement à faire connaître le premier ouvrage spécial qui ait été publié sur ce sujet : c'est le traité *de Arboribus coniferis*, de Belon.

Il fait voir que cet excellent observateur avait déja signalé plusieurs singularités de ces arbres. Ainsi il annonçait que l'on peut de loin distinguer les espèces par la forme déterminée de chacune d'elles ou par leur port; il citait entre autres le cèdre du Liban et le pin pignon; les prenant dès leur naissance, il remarquait, entre autres dans le sapin, que les premières feuilles (ou les cotylédons) sont verticillées. Cet arbre se distingue aussi des autres, dit-il, parce que ses rameaux sont de même verticillés quatre à quatre, et disposés, ce sont ses termes, comme les feuilles de la garance. Il faisait pareillement observer que dans les pins, surtout le sylvestre, les premières feuilles sont simples et aiguës comme celles du genévrier, tandis que les autres sortent deux à deux. Ce n'était pas seulement dans le cours de ses voyages qu'il observait ces arbres, il cherchait à les multiplier sur tous les points de la France, en recueillant partout des graines : il les semait, soit à Paris dans les jardins de l'abbaye de Saint-Germain-des-Prés, soit au Mans dans ceux de l'évêque du Bellai. Il y avait vu germer le cèdre du Liban, des cônes qu'il avait rapportés du Levant: les jeunes cèdres étaient déja assez forts lorsqu'ils lui furent volés, et ce qui le désola, c'est que c'était par des ignorants qui les laissèrent périr. Il constatait qu'à cette époque on avait déja introduit en France un arbre non moins magnifique, mais qui ne devait pas encore y prospérer. Examinant à Fontainebleau le *thuia occidentalis,* on lui fit voir un autre arbre qu'on disait avoir été rapporté avec ce thuia du Canada, et que l'on confondait avec lui sous le même nom d'*arbre de vie.* Belon crut que l'on se trompait, et il lui sembla que c'était le *pin cembro* des Alpes. C'était Belon qui était dans l'erreur, car il avait sûrement sous les yeux de jeunes plants du pin qui n'a reparu en Europe que deux siècles après, sous le nom de *lord Weimouth*, mais on s'y tromperait encore aujourd'hui en voyant les deux arbres sans fructification.

Cet ouvrage doit donc être regardé comme le premier d'un genre qui ne s'est multiplié que long-temps après, celui des descriptions particulières que l'on nomme monographies, et il faut arriver jusqu'à ces derniers temps pour en trouver qui le surpassent pour le fond. Il suffit pour placer Belon aux premiers rangs parmi les botanistes de son temps, tandis que, dans l'ouvrage intitulé *Remontrances sur le défaut de labeur*, il se montre le cultivateur le plus zélé pour la prospérité de son pays; si l'on eût suivi ses conseils, il n'y aurait pas un espace vide qui ne fût recouvert de végétation.

C'est par l'examen des racines, que M. du Petit-Thouars rentre dans son sujet; il commence par faire un résumé de sa manière d'envisager cette partie essentielle des végétaux: mais ce qui lui paraît le plus important à découvrir, ce sont les phases de la végétation des racines, c'est-à-dire, l'époque de leur première apparition et celle de leur arrêt ou terminaison.

Les liliacées, ou les plantes à oignons, nous indiquent, suivant lui, déja quelque chose de remarquable; c'est que sur les bulbes enfouis, les racines disparaissent en même temps que les feuilles, et que les unes et les autres reparaissent à la même époque.

Les conifères semblent destinées à nous éclairer sur un autre point; c'est que, dans ces arbres, les racines ont un moment assez précis pour commencer leur élongation. Si l'on découvre les racines d'un *pin* pendant l'hiver, on trouve que leur extrémité est simple, c'est-à-dire formée d'un cylindre sans ramifications, de trois à quatre pouces de long; il paraît sec et d'une couleur fauve; son bout est renflé, et des espèces d'écailles lui donnent l'apparence d'un bourgeon. Pour plus de conformité, cette élongation paraît se faire jour à travers les écailles; elle s'alonge insensiblement jusqu'à ce qu'elle ait acquis à peu près la longueur de la précédente; mais elle s'en distingue par sa couleur blanche et son apparence succulente, et par un diamètre à peu près double. Il en sort horizontalement des tubercules blancs disposés distiquement qui fournissent des racines latérales, lesquelles sont en conséquence rangées comme les dents d'un peigne; elles sont de moitié plus petites dans leur dimension que la terminale, et parviennent à peu près en même temps à leur maximum. Alors la couleur blanche se ternit, en même temps l'épaisseur diminue, et, vers le milieu de l'été, elles se trouvent recouvertes d'un épiderme sec et fauve. L'extrémité de l'élongation se déchire longitudinalement en lanières étroites qui prennent l'aspect d'écailles et recouvrent le bout, qui seul conserve son diamètre primitif et sa couleur blanche; de là vient l'apparence de bourgeons de cette partie. Le bout reste stationnaire jusqu'au printemps suivant. Alors une partie seulement des racines latérales font leur évolution; les autres disparaissent. Un nouvel épiderme se reforme sous l'ancien; celui-ci est obligé de se déchirer en lambeaux pour lui faire place, et d'années en années il s'accumule. Ces faits sont analogues à ce qui se passe sous l'écorce extérieure, c'est-à-dire celle du tronc et des branches; mais il y a des modifications qui dérivent de leur position respective. M. du Petit-Thouars regarde leur examen comme un des points capitaux qui lui restent à étudier.

M. DE MIRBEL a présenté à l'Académie des recherches sur la distribution géographique des végétaux phanérogames de l'ancien monde, depuis l'équateur jusqu'au pôle arctique. Il serait impossible de donner une courte analyse d'un Mémoire aussi étendu, et qui renferme de nombreux aperçus sur la géographie physique, le climat et la végétation des contrées que l'auteur passe en revue. Nous nous bornerons donc à donner en peu de mots les idées fondamentales auxquelles il rattache tous les faits particuliers, et le plan qu'il a suivi dans l'exécution de son travail.

Quand on suit les mêmes méridiens des pôles à l'équateur, et que l'on fait abstraction des accidents locaux qui contrarient de temps en temps la marche normale des phénomènes, on voit que les richesses végétales se multiplient en raison de l'élévation croissante de la température annuelle et de la plus longue durée de la période des développements. On peut donc établir une progression numérique des espèces, croissante ou décroissante, selon que l'on descend les latitudes ou qu'on les remonte.

On compte cent cinquante à cent soixante familles de plantes phanérogames dans l'ancien monde. Toutes, sans exception, figurent entre les tropiques. Par-delà ces limites, un grand nombre d'entre elles s'éteignent successivement. Dans les contrées boréales, sous le 48^e degré, il n'y en a guère que la moitié qui soit représentée; il n'y en a pas quarante sous le 65^e degré; il n'y en a que dix-sept au voisinage des glaces polaires.

L'auteur pense que, s'il était permis de se former une opinion d'après des notions très-positives, mais qui sont loin d'être complètes, on pourrait dire qu'entre les tropiques le nombre des espèces ligneuses, arbres, arbrisseaux et sous-arbrisseaux, égale, s'il ne surpasse, celui des espèces herbacées annuelles, bisannuelles et vivaces. Le rapport des espèces ligneuses aux espèces herbacées annuelles, bisannuelles et vivaces, décroît de l'équateur au pôle; mais, par une sorte de compensation, le rapport des herbes vivaces aux herbes annuelles et bisannuelles va croissant. Près du terme de la végétation, il est au moins de 24 à 1.

Cette échelle végétale, avec des circonstances analogues, a été observée également dans les montagnes. Les plaines situées à leur pied sont pour elles ce que sont les régions équatoriales pour les deux hémisphères. Le nombre des espèces et des familles, le rapport des espèces ligneuses aux espèces herbacées, le rapport des espèces annuelles aux espèces vivaces, diminuent de la base au sommet des montagnes, et chaque station offre une végétation qui lui est propre. Ici, comme dans les plaines, la température trace les lignes d'arrêt. Plus on s'élève au-dessus du niveau de la mer, moins est chaude et longue la période des développements, et par conséquent plus est froide et prolongée la période du repos. Que les causes qui déterminent le décroissement progressif de la température soient autres qu'à la surface plane et basse de la terre; qu'en rase campagne le refroidissement marche beaucoup plus vite durant la période du repos que durant la période des développements; que sur les montagnes il soit un peu plus accéléré durant la période des développements que durant celle du repos, l'auteur ne pense pas que cela infirme la comparaison, si les résultats généraux de la végétation sont les mêmes, et si les différences s'expliquent d'une manière satisfaisante, soit par la graduation particulière de la température, soit par des circonstances climatériques qui lui sont étrangères, soit enfin par les qualités diverses du sol.

M. de Mirbel est si frappé de la ressemblance des résultats, qu'il n'hésite pas à comparer les deux hémisphères de notre globe à deux énormes montagnes réunies base à base, portant sur leurs larges flancs une innombrable quantité de végétaux, et chargées à leur sommet d'un épais et vaste chapeau de neiges permanentes.

Les botanistes, pour exposer avec méthode et clarté la succession des végétaux sur les pentes des Pyrénées, des Alpes, des Andes, etc., se sont appliqués à déterminer la hauteur des lignes d'arrêt des espèces qui caractérisent le mieux les diverses stations; et, par ce moyen, ils ont partagé horizontalement la surface des masses proéminentes du globe en grandes bandes ou régions végétales. Le même procédé a été employé pour les deux hémisphères, mais non pas avec autant de succès : les difficultés sont incomparablement plus grandes.

De la base au sommet des montagnes, la température poursuit sans intermittence une marche descendante plus ou moins rapide, selon les hauteurs des stations : il n'en est pas ainsi dans les plaines. A la vérité, le refroidissement progressif considéré dans l'ensemble des phénomènes est de toute évidence; mais quand on vient aux faits particuliers, on reconnaît que souvent des circonstances locales précipitent ou retardent la marche de la température, ou même quelquefois lui font prendre une direction rétrograde. Tantôt ce sont les espèces du Nord qui s'enfoncent vers le tropique; tantôt celles du Midi qui remontent vers le Nord; et quelquefois des groupes appartenant à ces races distinctes font échange de patrie, se croisent, et, chacun de leur côté, s'en vont établir des colonies dans des stations privilégiées, au milieu de populations végétales auxquelles ils ne sont pas moins étrangers par la physionomie que par le tempérament.

Ces difficultés n'ont point rebuté M. de Mirbel; il distingue dans l'ancien continent, depuis l'équateur jusqu'au pôle arctique, cinq régions végétales, savoir: la zone équatoriale, la zone de transition tempérée, la zone tempérée, la zone de transition glaciale, et la zone glaciale.

Partout où aucune limite accidentelle n'arrête ces zones dans leurs expansions naturelles, on peut les comparer aux couleurs du prisme, qui se fondent les unes dans les autres par leurs bords; de sorte que l'œil ne saurait les séparer, alors même qu'il les distingue parfaitement. Pour marquer le terme des différentes zones, le moyen le plus sûr est de prendre pour limite de chacune d'elles les points d'arrêt des espèces qui, caractérisant le mieux sa flore particulière, cessent de se propager sitôt que des changements notables et généraux dans les températures annuelles amènent sur la scène une flore nouvelle.

M. de Mirbel avoue qu'il lui a été impossible de faire l'application de ce procédé à la zone équatoriale, parce que des sables et des chaînes de montagnes y contrarient trop souvent l'expansion normale de la végétation: il a été plus heureux en remontant vers le Nord. La zone de transition équatoriale trouve une limite naturelle dans la ligne d'arrêt de l'olivier; la zone tempérée, dans la ligne d'arrêt du chêne commun; la zone de transition glaciale, dans la ligne d'arrêt du pin sylvestre en Occident, et du mélèze en Orient. Quant à la zone glaciale, l'auteur la divise en deux bandes; l'inférieure ou méridionale, la supérieure ou septentrionale : l'une et l'autre n'offrent aucun arbre; la première nourrit encore beaucoup d'arbrisseaux ou arbustes, et finit où ils s'arrêtent; la seconde ne nourrit guère que de petites herbes vivaces, et finit où commencent les neiges permanentes. Les espèces de la zone glaciale ne forment qu'une seule et même flore en Asie, en Europe et en Amérique.

L'auteur joint à ce Mémoire un tableau de la végétation des contrées les plus connues des quatre zones septentrionales, et il indique dans un appendice les lignes d'arrêt méridionales et septentrionales d'un grand nombre d'arbres.

M. de Mirbel a publié en même temps que ce travail la description de neuf espèces nouvelles d'arbres de la famille des amentacées. Nous ne connaissions jusqu'ici que trois espèces de hêtres : il a porté ce nombre à sept; deux des quatre espèces qu'il publie croissent au Chili, et les deux autres au détroit de Magellan.

L'ouvrage de M. Adolphe Brongniart, fils de l'un de nos confrères, sur la fécondation des végétaux, qui a obtenu l'année dernière une distinction éminente, a été publié.

D'après les observations de l'auteur, le pollen forme d'abord une masse qui n'adhère point aux parois de la loge qui le renferme, et qui se divise bientôt en cellules contenant les grains; mais chaque grain de pollen mûr contient lui-même dans sa membrane un certain nombre de grains plus petits, ou de granules enveloppés aussi dans une tunique membraneuse mince.

M. Amici avait observé que lorsque le grain de pollen tombe sur le stygmate, il en sort un filet plus ou moins long, qui paraît une production de sa membrane interne, dans lequel une partie des granules se porte et exerce des mouvements. Ce filet a été vu et dessiné par M. Adolphe Brongniart dans un grand nombre d'espèces. Il s'introduit dans l'épiderme du stygmate, s'y unit en quelque sorte, et paraît être un organe important pour la fécondation. C'est aux granules qu'il contient et qu'il transporte dans le stygmate, que notre jeune auteur attribue surtout cette fonction. Il les compare aux animalcules spermatiques, dont ils semblent avoir les mouvements. Dans quelques espèces même, telles que certaines malvacées, ils s'agitent visiblement, et se courbent comme des vibrions.

M. Brongniart croit que les granules polliniques ne se sont pas formés dans l'intérieur du grain de pollen, mais qu'ils ont été absorbés par des pores très-visibles à sa surface dans certaines espèces. C'est au travers du parenchyme du stygmate, et non par des vaisseaux particuliers qu'il les fait arriver aux ovules. Il suppose que le liquide dont le stygmate est couvert à sa surface aide à les transporter à l'intérieur par le mouvement naturel qu'il prend dans cette direction. La graine future, ou l'ovule, composée de deux enveloppes et d'une amande parenchymateuse, reçoit ses vaisseaux nourriciers par son point d'adhérence, qui se nomme hile ou chalaze, mais a constamment ses téguments ouverts en un autre point qui est le micropile, et même dans les ovules où l'amande est soudée aux téguments, elle a un mamelon qui fait saillie au travers de cette ouverture. C'est en face de ce point que se termine sensiblement le tissu du stygmate, qui sert à la transmission des granules, sans toutefois s'y unir; et de cet endroit ouvert, il règne dans l'intérieur de l'ovule un tube particulier jusqu'au sac embryonnaire; ce tube sort même quelquefois de l'ovule sous forme de filet, et M. Brongniart croirait volontiers qu'il prend toujours cette extension au moment de la fécondation.

La marche des granules, depuis la surface du stygmate jusque dans l'ovule, est assez lente, et l'auteur assure avoir remarqué que dans les cucurbitacées elle exige au moins huit jours. Dans le sac embryonnaire est une petite vésicule destinée à devenir ou à renfermer l'embryon. M. Brongniart la compare à la cicatricule de l'œuf des oiseaux. Il a cru y voir dans certaines plantes, au milieu d'une petite masse parenchymateuse, un grain qu'il soupçonne d'être un granule provenu du pollen, qui y aurait pénétré, et il suppose que l'embryon formé d'un ou de plusieurs de ces granules du pollen, et de plusieurs autres granules fournis par l'ovule, se confond avec cette vésicule, qui devient son épiderme.

M. Turpin, qui a fait tant de recherches microscopiques sur le tissu intime des végétaux, les a portées cette année sur la truffe, et a fait ses efforts pour en découvrir l'organisation et le mode d'accroissement et de propagation.

Cette production singulière, dépourvue de feuilles et de racines, ne se nourrit que par l'absorption de sa surface, et n'a de moyens de se reproduire que dans son intérieur.

Sa masse ne se compose que de deux sortes d'organes élémentaires, des vésicules globuleuses destinées à la reproduction, et que M. Turpin compare au tissu cellulaire des autres végetaux, et des filaments court et stériles qu'il nomme *tigellules*, les comparant aux tiges des végétaux ordinaires et aux vaisseaux que ces tiges renferment.

Le tout forme une chair blanche d'abord, et qui, en avançant en âge, devient brune, à l'exception de certaines parties qui imitent les veines blanches d'un marbre. Ce changement de couleur est dû, selon M. Turpin, à l'apparition des corps reproducteurs qu'il nomme *truffinelles*, et dont il explique la formation et le développement de la manière suivante : Chaque vésicule globuleuse est disposée de façon à donner naissance de ses parois à une multitude de corps reproducteurs; mais il n'y en a qu'un petit nombre qui remplisse réellement cette destination ; et celles-là, après s'être dilatées, font voir dans leur intérieur des vésicules plus petites, dont quelques-unes grossissent, brunissent, se hérissent extérieurement de petites pointes, et se remplissent encore d'autres vésicules qui s'entre-greffent bientôt. Ce sont ces petites masses ainsi formées, ou les truffinelles, qui deviendront des truffes, après que celle dans l'intérieur de laquelle elles ont été conçues aura elle-même péri. Micheli et Bulliard avaient reconnu une partie de ces faits; mais M. Turpin les a mieux constatés, les a débarrassés d'hypothèses gratuites, et les a représentés par de très-beaux dessins.

Mais comment ces petites truffes, qui ne jouissent d'aucun mouvement progressif, peuvent-elles quitter le point où elles sont nées, et se propager à distance? C'est un problème dont M. Turpin ne s'est point occupé, et digne d'exercer toute la sagacité d'un observateur qui habiterait les lieux où la truffe croît abondamment.

Les laminaires, genre de la grande classe des hydrophytes, sont sujettes à de fortes variations, d'après l'âge où on les observe, et ces variations avaient donné lieu à en admettre jusqu'à quinze espèces sur nos côtes de Normandie. Des observations faites sur ces plantes dans leur lieu natal, et qui ont porté sur toutes les modifications que leurs formes, leurs grandeurs, leurs couleurs et leurs consistances éprouvent, soit successivement dans le même individu, soit simultanément dans un grand nombre, ont démontré à M. Despréaux que ces quinze espèces doivent se réduire à cinq.

Les ouvrages de botanique proprement dite, les recueils de descriptions et de figures si précieux pour la science des végétaux, mais si difficiles à analyser dans un travail tel que le nôtre, ont été nombreux cette année.

La Flore brésilienne de M. Auguste de Saint-Hilaire a continué de paraître, et MM. Adrien de Jussieu et Cambessède se sont associés à ce savant et zélé botaniste, pour en accélérer la publication.

Les plantes recueillies lors du voyage de M. Freycinet sont décrites par M. Gaudichaud, et forment une partie importante du bel ouvrage où sont consignés les riches résultats de cette savante circumnavigation. M. Delille a fait imprimer le travail sur l'*Isoëtes*, dont nous avons déja rendu compte dans notre analyse de 1824. Le même botaniste a publié une centurie de plantes recueillies par M. Caillaud en Nubie, et le long des rives de cette branche du Nil que l'on a nommée le Fleuve blanc : ce sont surtout des végétaux de l'antique Méroë, cette source de la civilisation égyptienne, autrefois si fameuse et si respectée, maintenant livrée à la même désolation que le reste de l'Afrique. M. Jaume-Saint-Hilaire annonce une *Flore* et une *Pomone française*, qui fera suite à la Flore française qu'il a fait paraître depuis quelques années. M. Decandolle a donné un traité sur les plantes de la famille des mélastomées.

Parmi les genres et les espèces si nombreuses dont la botanique a été ainsi enrichie, nous ferons remarquer le *Joliffia*, cucurbitacée vivace à tiges sarmenteuses et ligneuses, à rameaux grimpants, qui croissent à cinquante et cent pieds de longueur, à fruit charnu, anguleux, long de deux et trois pieds, sur huit pouces de diamètre, et dont les grains fournissent une bonne huile. Cette plante est originaire de la côte orientale de l'Afrique, et s'est propagée à l'Ile-de-France, où on la nomme *Liane joliff*, d'après le nom du capitaine qui l'y a apportée le premier. On n'y possédait d'abord que des pieds femelles; mais l'espèce a été complétée par M. Bojer, botaniste anglais, qui l'a recueillie dans une expédition faite à Madagascar et à Zanquebar; les nègres de cette côte la connaissent sous le nom de *Kouémé*. C'est de M. Delille que l'Académie a reçu l'histoire de ce végétal intéressant.

M. Auguste de Saint-Hilaire, ainsi que nous l'avons déja fait connaître plus d'une fois, ne s'est pas borné à la simple description des plantes qu'il a recueillies; et cette année il a présenté, dans un Mémoire particulier, des considérations nouvelles sur les rapports qui unissent entre elles les différentes familles de plantes de la classe des polypétales. Il prouve, par de nouveaux exemples, tirés de ses découvertes, ce que déja les recherches de tous les naturalistes ont fait apercevoir; c'est que l'établissement d'une série linéaire complète des genres et des familles serait un problème insoluble; que l'on ne pourrait essayer de la former sans sacrifier des rapports importants pour en ménager d'autres, et qu'enfin il ne serait pas impossible de composer plusieurs séries qui, différant sur un certain nombre de points, seraient pourtant également bonnes. Les exemples qu'il allègue à l'appui de son assertion paraissent incontestables, mais ne sont pas de nature à être rapportés ici.

ZOOLOGIE.

M. Bory Saint-Vincent a publié une Histoire naturelle de l'homme, extraite du Dictionnaire classique d'Histoire naturelle, et conçue d'après des idées entièrement propres à l'auteur. Selon lui, le genre humain, non-seulement ne serait pas réduit à une seule espèce, mais il se composerait d'espèces plus nombreuses qu'il n'en a été admis jusqu'à ce jour par les écrivains qui les ont le plus multipliées. Le commun des Européens, les Arabes, les Indous, les Tartares, les Chinois, les petits hommes qui habitent le nord des deux continents et que l'on connaît sous les noms de Lapons, de Samoyèdes et d'Esquimaux, les habitants des îles de la mer du Sud, ceux de la Nouvelle-Hollande, seraient des espèces distinctes aussi bien que les Nègres, les Cafres et les Hottentots. L'Amérique aurait trois espèces qui lui seraient propres ; celle qui occupe les pays situés entre la baie d'Hudson et le fleuve des Amazones, celle qui habite au sud de ce fleuve, et celle qui est confinée à la pointe méridionale, ou ce que l'on appelle les Patagons : mais les Mexicains et les Péruviens seraient descendus de l'espèce des îles de la mer du Sud. M. Bory donne des noms à ces quinze espèces, et cherche à leur assigner des caractères distinctifs; il les subdivise en races et en variétés. Ainsi, l'espèce japétique ou européenne se divise en race caucasique, race pélage, race celtique, race germanique, qui elle-même comprend une variété teutone et une variété slavone.

Les personnes qui se sont occupées d'ethnographie, et se sont fait quelque idée des caractères des peuples, concevront facilement sur quelles bases reposent ces distinctions, et en rechercheront sans doute avec intérêt le détail dans l'ouvrage de M. Bory.

La girafe donnée au roi par le pacha d'Égypte, et qui se voit aujourd'hui à la ménagerie du Jardin du Roi, étant le premier individu de cette espèce qui ait été vu vivant en France, a donné lieu à plusieurs écrits concernant son histoire naturelle.

M. Mongez a rassemblé les passages des auteurs anciens où il en est question, et ceux des auteurs du moyen âge qui parlent des girafes vues en Europe à diverses époques.

Aristote ne paraît pas avoir connu ce singulier animal : Ptolomée Philadelphe fut le premier qui en montra une dans la célèbre fête dont Athénée nous a conservé le détail. L'espèce a été décrite par Agatharchide et par Artémidore. César en fit paraître une à Rome, dans les jeux du Cirque, 45 ans avant Jésus-Christ. Il y en a une représentée assez exactement sur la mosaïque de Palestrine, monument que l'on croit de l'époque d'Adrien. A la fin du premier millénaire de Rome, l'an de Jésus-Christ 248, l'empereur Philippe fit voir, entre autres animaux extraordinaires, jusqu'à dix girafes à la fois; et il en parut encore plusieurs au triomphe d'Aurélien, en 284.

Il en est question ensuite dans nombre d'auteurs. Cosmas, Philostorge, Héliodore, Marcellin, Cassianus Bassus, Pachimère, en parlent plus ou moins exactement; et l'on juge, par ce que ces écrivains en disent, qu'il avait dû en être amené plus d'une fois, soit à Alexandrie, soit à Constantinople.

Depuis la conquête de l'Afrique par les Arabes, c'est presque aux princes mahométans que le privilége d'en posséder a été réservé, et ce sont en général les maîtres de l'Égypte qui en ont fait des présents. Il en fut envoyé une à Tamerlan, à Samarkand, en 1404. Bernard de Breitenbach, chanoine de Mayence, en vit une au Caire, en 1483, et la représenta grossièrement dans son Voyage à la Terre-Sainte, imprimé en 1486. Les sultans de Constantinople en ont reçu à plusieurs reprises. Gillius en vit trois dans la ménagerie du sérail, au commencement du seizième siècle, et Thevet, son compagnon de voyage, en donne des figures dans sa Cosmographie. Il y en avait une peu de temps avant l'arrivée de Busbeck, en 1554. Michel Baudier y en dessina une en 1622, et M. le comte Andréossy a fait voir à l'Académie la gravure qui se trouve dans l'Histoire du sérail de cet auteur, imprimée en 1632; mais, dans l'Europe chrétienne, on n'en cite que trois durant tout le moyen âge.

L'empereur Frédéric II, qui entretenait des relations assez intimes avec les princes du Levant, et qui avait envoyé un ours blanc au soudan d'Égypte, en reçut en retour une girafe, qui a été décrite par Albert-le-Grand. Il en fut envoyé une autre à son fils naturel, Mainfroi, roi de Sicile.

La troisième et en même temps la dernière qui ait été vue dans la chrétienté, avant celle qui est maintenant à Paris, avait été envoyée à Laurent de Médicis, en 1486, par le soudan d'Égypte: elle est peinte dans les fresques de Poggio Caiano; et Antoine Constanzio, qui l'avait vue à Fano, l'a décrite dans une lettre insérée dans son Recueil d'épigrammes, imprimé en 1502, et adressé à Galéas Manfredi, prince de Faenza.

Les parties du corps de la girafe étaient elles-mêmes rares dans les cabinets.

Buffon et Daubenton n'en ont jamais vu qu'un os du radius, qui était conservé d'ancienne date au garde-meuble de la couronne comme un os de géant. Depuis quelques années, on en possédait des peaux au cabinet du roi et au muséum britannique; et le premier de ces établissements en avait un beau squelette. Les derniers voyages en Afrique les ont rendues plus communes. Feu Delalande en a rapporté du Cap une peau de femelle et plusieurs têtes osseuses, il en est venu récemment plusieurs squelettes du Sénégal, et M. Ruppel en a envoyé aussi des peaux et des têtes au cabinet de Francfort; mais c'est en Nubie qu'il les a recueillies, pays où la girafe vivante du Jardin du Roi paraît également avoir été prise.

Ces différentes peaux ne se ressemblent pas entièrement pour la grandeur et pour la distribution des taches, et l'on observe aussi quelques variétés dans les formes des têtes, ce qui a fait penser à M. Geoffroy-Saint-Hilaire que les girafes du Cap et celles de Nubie pourraient bien ne pas appartenir à la même espèce.

Deux faits curieux et nouveaux pour l'anatomie comparée résultent de l'examen de ces pièces : le premier, c'est que les cornes de la girafe ne sont pas simplement, comme les noyaux des cornes des bœufs ou des moutons, des productions des os frontaux, mais qu'elles constituent des os particuliers, séparés d'abord par des sutures, et attachés à la fois sur l'os frontal et sur le pariétal; le second, plus important peut-être encore, c'est que la troisième petite corne, ou le tubercule qui est placé entre les yeux en avant des cornes, est elle-même un os particulier, séparé aussi par une suture, et attaché sur la suture longitudinale qui sépare les deux os du front. Cette circonstance affaiblit les objections que plusieurs auteurs, et surtout Camper, avaient faites contre l'existence de la licorne, objections fondées sur ce qu'une corne impaire aurait dû être attachée sur une suture, ce qui leur paraissait impossible. Toutefois il ne résulte pas de là que la licorne existe; et en effet, bien que partout la croyance populaire admette la réalité de cet animal, bien que partout on trouve des hommes qui prétendent l'avoir vu, tous les efforts des voyageurs européens pour le retrouver ont jusqu'à présent été inutiles.

M. Geoffroy-Saint-Hilaire a traité de l'oiseau que les anciens avaient nommé *trochilus*, qui débarrasse la gueule du crocodile des insectes qui l'incommodent; les faits qu'il a constatés à ce sujet dans la Thébaïde, pendant l'occupation de l'Égypte par les Français, ont été publiés en 1807;

et deux ans après (en 1809), M. Descourtils a assuré que la même chose a lieu sur le crocodile de Saint-Domingue.

Ce ne sont pas des sangsues, comme l'a dit Hérodote, qui tourmentent ce grand amphibie, car il n'y en a point dans les eaux courantes du Nil, mais bien des cousins, insectes si insupportables dans tous les pays chauds; ils s'attachent à la langue du crocodile, seule partie de son corps assez molle pour être entamée par leur trompe, et qui de plus ne peut se défendre, puisqu'elle est fixée à la mâchoire inférieure.

L'oiseau qui vient avec tant de sécurité enlever ces insectes ne paraît pas le même dans les deux pays. On a donné comme tel à M. Geoffroy le petit pluvier à collier, nommé *charadrius œgyptius*, qui se nomme en Égypte *tec-tac* ou *sec-sac*, nom qui avait déja été indiqué par le P. Sicard comme étant celui du trochilus. M. Descourtils dit simplement qu'à Saint-Domingue c'est le todier (*todus viridis*), oiseau d'une toute autre famille, qui, à la vérité, se nourrit aussi d'insectes, mais qui les poursuit et les prend en volant avec beaucoup d'adresse.

Quelques auteurs avaient pensé que le trochilus pourrait être un des pluviers ou des vanneaux armés que produit l'Afrique, et qu'il pouvait se défendre contre le crocodile au moyen des éperons qui garnissent ses ailes; mais une pareille défense serait trop faible contre un être si robuste et si vorace. On ne peut donc douter que si en effet l'oiseau vient prendre des cousins sur la langue du crocodile, ce ne soit du consentement de cet amphibie. C'est l'opinion de M. Geoffroy, et il croit que le crocodile est déterminé en cela par le sentiment du bien-être que lui procure l'opération du trochilus.

M. Geoffroy s'est aussi occupé de nouveau d'un sujet qu'il avait déja traité, il y a quelques années, des espèces de crocodiles de moindre taille, qui peuvent vivre dans le Nil, et du nombre desquelles il pense qu'était celle à laquelle les Égyptiens rendaient des hommages religieux. L'examen de plusieurs momies de crocodiles, rapportées dans ces derniers temps, et celui d'un assez grand nombre d'individus récents du même genre, lui ont offert, dans la forme plus alongée du museau, et dans d'autres détails, des caractères qui lui paraissent suffisants pour établir cette multiplicité d'espèces; et il continue de penser que l'une d'elles, moins cruelle et plus docile que les autres, portait spécialement le nom de *suchus*, et que c'était celle-là qui recevait les honneurs divins.

M. Cuvier, qui s'occupe de l'impression d'un grand ouvrage sur l'histoire naturelle des poissons, en a communiqué quelques chapitres à l'Académie. Il l'a entretenue surtout du poisson si célèbre chez les anciens, sous le nom de *scarus*, et d'un poisson d'Amérique, qui a été nommé *tambour*, à cause du bruit très-fort et très-singulier qu'il fait entendre.

Les anciens regardaient le scarus comme supérieur, pour le goût, à tous les autres poissons; il n'habitait que les mers de Grèce, et les Romains avaient envoyé des flottes pour en rapporter dans la mer de Toscane et l'y naturaliser. On fit des lois pour en protéger la propagation, et cependant il paraît ne pas s'y être conservé long-temps. Les naturalistes n'étaient même pas d'accord sur l'espèce à laquelle le nom de scarus a appartenu; mais on savait que les Grecs modernes donnent encore ce nom à un poisson de leurs côtes qu'ils estiment beaucoup. M. l'amiral de Rigny ayant bien voulu faire prendre de ces scarus des Grecs modernes, et les envoyer au Cabinet du roi, il a été facile de reconnaître qu'ils répondent à tout ce que les anciens ont dit du leur, et que c'est la même espèce qui a gardé son nom au travers des siècles. Aldrovande se trouve être le seul moderne qui ait connu et décrit ce poisson, qu'il a nommé *scarus creticus*. Bloch a donné à sa place une espèce du même genre, mais assez différente; et Belon a représenté sous ce nom de scarus un poisson inconnu aujourd'hui, et qu'il n'a peut-être dessiné ou décrit que de mémoire, en sorte qu'il a induit en erreur les autres naturalistes, et nommément Gmelin et M. de Lacépède.

Le poisson appelé *tambour* est le *pogonias* que M. de Lacépède a décrit, mais seulement d'après de petits individus. Son espèce devient très-grande : il égale ou surpasse notre *maigre*, dont il se rapproche aussi par toute son organisation; mais il s'en distingue par une multitude de petits filaments qui lui forment une espèce de barbe sous la mâchoire inférieure. Dans son gosier sont des plaques pavées de grosses dents rondes, et sa vessie natatoire, qui est très-épaisse, a, comme celle du maigre, des espèces de ramifications qui pénètrent dans l'épaisseur des chairs.

M. Cuvier, considérant que le maigre fait aussi entendre un bruit particulier, soupçonne que cette disposition de la vessie natatoire n'est point étrangère à la production de ce bruit. Néanmoins le phénomène reste encore difficile à expliquer par cette voie : c'est dans l'eau même que le bruit est produit; il est très-fort, très-continu; on l'entend de l'intérieur des vaisseaux quand le poisson s'en approche, et plus d'une fois il a effrayé des navigateurs.

M. de Blainville a fait paraître à part, sous le titre de Manuel de Malacologie et de Conchyliologie, un ouvrage dont il avait déja jeté les principales bases dans le Dictionnaire des sciences naturelles, et où il embrasse la classe entière des mollusques sous un point de vue général, en donne l'histoire et la bibliographie, et présente, d'après une distribution qui lui est propre, le tableau des genres, avec des exemples pris des espèces les plus remarquables, et de belles planches.

Le même naturaliste a donné un traité particulier sur les bélemnites, où il considère ces corps comme des coquilles intermédiaires aux os des sèches, et aux coquilles chambrées des nautiles et des spirules, et où il en décrit méthodiquement plus de quarante espèces. Il fait connaître à la fin quelques autres productions fossiles analogues aux bélemnites. Cet ouvrage est aussi accompagné de figures exactes et nombreuses.

Il n'est pas rare de voir des insectes du même genre, mais assez différents par l'espèce ou du moins par les caractères de couleurs, que l'on a cru désigner des espèces, s'accoupler ensemble.

M. Lepelletier de St-Fargeau a observé de ces sortes d'unions dans les voluccelles, genre de mouches à deux ailes qui ressemblent singulièrement à ces abeilles sauvages et velues que l'on a nommées bourdons, et dont, par une de ces coïncidences dans lesquelles il est si difficile de ne pas voir des causes finales, les larves sont destinées à vivre aux dépens de celles des bourdons. M. Lepelletier de St.-Fargeau pense que certaines voluccelles qui semblent tenir le milieu entre deux espèces du même genre, ne forment pas véritablement une troisième espèce, mais sont le résultat de ces accouplements qu'il appelle illégitimes. C'est une présomption qui mériterait d'être constatée par des expériences suivies.

M. Léon Dufour, qui a travaillé avec beaucoup de suite à l'anatomie des insectes, et qui a décrit les viscères d'un très-grand nombre d'entre eux, a présenté un Mémoire sur le genre des *forficules,* nommés vulgairement *perce-oreilles,* où il entre dans les plus grands détails sur leur splanchnologie.

Leurs organes de la digestion ne ressemblent pas entièrement à ceux de l'ordre dans lequel on les range, celui des orthoptères; elles ont des appendices pyloriques plus notables : leur second estomac ou gésier est très-petit, quoique très-propre à la trituration; leurs appendices hépatiques sont plutôt disposées comme dans les hyménoptères, comme dans les guêpes, par exemple, etc. De ces détails, et de quelques autres relatifs à la disposition des anneaux de l'abdomen, M. Dufour conclut que l'on doit, à l'exemple de M. Kirby, faire des perce-oreilles un ordre particulier. Il le nomme *labidoüre,* ce qui signifie *queue en tenaille,* et se rapporte à la conformation singulière de la pince qui termine l'abdomen des perce-oreilles, et qui déja en latin les a fait nommer *forficula.*

Nous sommes loin de l'époque où Linnæus avait cru pouvoir se contenter de diviser en trois genres la famille des papillons. L'innombrable quantité des espèces découvertes depuis ce grand naturaliste, et les formes variées de leurs organes, ont donné lieu de multiplier les coupes génériques au point que l'on en fait maintenant plus de 50, et que l'on a été même obligé de les répartir entre certaines tribus que l'on a élevées au rang de familles. Dans ce nombre est celle des zygénides, démembrée des sphynx de Linnæus, et qui aujourd'hui comprend assez de genres pour être elle-même subdivisée.

M. Boisduval, qui en a fait l'objet d'une étude spéciale, a présenté à son sujet un Mémoire d'autant plus remarquable par les faits curieux qu'il contient sur les habitudes de ces insectes, que trop souvent les auteurs de semblables recherches s'en tiennent à des descriptions et à des nomenclatures. La chenille de l'un des genres, le *thyris*, vit dans l'intérieur des rameaux de l'hyèble, et sa chrysalide, comme celle de plusieurs autres insectes dont la larve vit dans le bois, est armée de petites épines qui lui servent à s'avancer du fond de sa retraite vers l'orifice extérieur, par lequel le papillon doit sortir. L'auteur a continué pendant huit années ses observations sur les zygènes proprement dites. Ces jolis insectes, dont les ailes supérieures sont d'ordinaire d'un bleu d'acier, et ornées de taches rouges ou jaunes, volent en plein jour, se reposent toujours sur des fleurs, et y demeurent accouplés pendant vingt-quatre heures : le mâle périt deux jours après, et la femelle aussitôt après sa ponte. Les accouplements d'espèces différentes ne sont pas rares dans ce genre; mais l'auteur n'en a jamais obtenu d'œufs. Après la première mue, même lorsque le temps est encore assez beau, les chenilles s'engourdissent, et elles demeurent dans cet état jusqu'au printemps suivant. Elles vivent à découvert et isolées, ou en petites sociétés. Des légumineuses herbacées servent de nourriture au plus grand nombre. Elles forment, pour se métamorphoser, des cocons de la consistance de parchemin, ou de coquille d'œuf, vernissés en dehors et en dedans, qu'elles suspendent à des plantes grêles. M. de Boisduval décrit dans ce seul genre jusqu'à quarante espèces.

Les *cecidomyes* sont de petits insectes à deux ailes, détachés par Meigen du genre des *tipules* de Linnæus, et dont l'histoire est intéressante, parce que les larves de plusieurs espèces vivent dans l'intérieur des végétaux, et qu'il en est même qui font tort aux céréales.

M. Vallot, professeur à Dijon, en a décrit sept espèces, dont six doivent être ajoutées, selon lui, aux dix-sept qui avaient déja été décrites par Meigen. Sur les six, Réaumur en a connu deux, mais seulement à l'état de larve : l'une d'elles produit de grandes altérations dans les étamines et les pistils du verbascum; une seconde produit de petites galles barbues, qui s'observent sur la véronique chamædris. Des monstruosités analogues dans le lychnis, l'euphorbe et le laiteron, sont dues à trois autres. La plus singulière serait celle dont la larve habite, selon M. Vallot, la surface inférieure des feuilles de la grande éclaire, et y sucerait les cirons ou acarus qui s'y trouvent, comme les larves de certains syrphus, autre genre de diptères qui font la guerre aux pucerons; mais ce genre de vie serait si différent de celui que suivent les autres espèces, que l'on croit nécessaire de le constater par de nouvelles observations.

M. Bosc a découvert, dans les étangs des environs de Paris, une production vivante semblable à une légère croûte verdâtre qui se contracte quand on la touche, et qui, vue au microscope, paraît composée de petits tubes anguleux, dans chacun desquels on observe un animal à tentacules nombreux et courts, un peu disposés en entonnoir. Cette production ressemblant, à quelques égards, à ces polypiers marins que l'on a nommés *alcyons,* a été rangée dans leur genre par Bruguière, et décrite par lui sous le nom d'*alcyon fluviatile;* et depuis lors, M. de Lamarck en a fait un genre distinct, qu'il appelle *alcyonelle,* mais qu'il laisse auprès des alcyons.

MM. Raspail et Robineau-Desvoidy ont fait nouvellement une étude particulière de l'alcyonelle, et ils assurent avoir constaté que ses tubes ne sont pas ouverts; que chacun d'eux est occupé par une sorte de sac rempli de petits corps ovales, comprimés, entourés d'un bourrelet, dont l'écorce est dure et cornée, et l'intérieur cellulaire et élastique, rempli de myriades de granules qui se répandent sur le porte-objet du microscope comme par explosion. Les auteurs considèrent ces petits corps comme des gemmes, et le sac qui les contient comme un ovaire. Les gemmes se développent successivement, et lorsque l'ovaire en est rempli, sa membrane se déchire pour les laisser sortir : c'est alors que l'alcyonelle paraît composée de tubes.

Quant aux animaux que l'on y a observés, MM. Raspail et Robineau les croient des parasites qui sont venus se loger dans les tubes. En ayant retiré un, ils lui ont vu un corps formé de quatorze anneaux et terminé par des filaments, que l'on peut avoir pris pour des tentacules de polype : ils regardent ces animaux comme des naïdes. Les commissaires de l'Académie pensent que ce sont plutôt des larves de diptères, de la famille des tipules, et que leurs filaments adhèrent, non pas à la tête, mais à la partie postérieure.

Cette production mérite, comme on voit, une attention particulière de la part des naturalistes; mais on voit aussi qu'elle a besoin d'être encore étudiée avec persévérance avant de décider les difficultés qui se présentent sur sa nature et sa classification.

Lorsque, en 1820, M. Bory de Saint-Vincent présenta, pour la première fois, à l'Académie ses observations sur les êtres organisés qu'il nomme *psychodiaires,* et qu'il regarde comme des intermédiaires entre les plantes et les animaux, il y forma un ordre des *artrodiées* ou articulées, et il établit dans cet ordre une famille des *oscillariées,* dans laquelle entre le genre nommé *Tremelle,* par Adanson, et *Oscillaire*, par M. Bory lui-même, il y a bien long-temps; que M. Vaucher a appelé depuis *Oscillatoires.* M. Bory se défend beaucoup du soupçon qu'il partagerait l'idée de quelques naturalistes qui ont cru voir dans des êtres de cette famille des animalcules réunis pour végéter sous la forme de plantes, ou des plantes qui se résoudraient en animalcules, pour recommencer alternativement cette disjonction animale, ou cette coalition végétale; les Oscillaires, d'après sa définition, sont des filaments simples, formés de deux tubes articulés, s'enveloppant l'un l'autre, et dont l'intérieur contient une matière colorante : chaque filament constitue un individu; et les individus sont associés en groupes, enduits d'une mucosité dans laquelle ils exercent des mouvements spontanés. Ces mouvements observés par M. Bory de Saint-Vincent, avec beaucoup plus de suite que par ses prédécesseurs, sont plus variés qu'on ne l'avait cru jusqu'ici. Aucune règle n'y préside; en général ils sont brusques; quelques espèces ne peuvent en faire qu'un; d'autres les exécutent tous, et il est impossible, quand on les a observés, de leur supposer une cause mécanique ou physique; les enlacements, les reptations de quelques-unes de ces espèces sont des marques d'animalité trop prononcées pour qu'on puisse laisser les Oscillaires dans le domaine de la botanique. M. Bory de Saint-Vincent a décrit avec le plus grand soin, et examiné sous tous les points de vue près de trente espèces du genre *Oscillaria*, dont la plupart se trouvent dans les eaux stagnantes, mais dont quelques-unes, ce qui est assurément fort remarquable, ne vivent que dans les eaux thermales les plus chaudes.

Les genres *Microcoleus*, *Dilwinella* et *Anabaina*, complètent la famille des Oscillariées, sur laquelle le travail de M. Bory jette le plus grand jour.

La zoologie continue à s'enrichir d'ouvrages importants sur ses diverses branches. Après les nombreux matériaux qu'avait procurés à cette science le voyage de M. Freycinet, et qui ont été si bien décrits par MM. Quoy et Gaymard, nous voyons commencer une publication qui ne sera ni moins abondante ni moins belle, celle du voyage de MM. Duperrey et d'Urville, qui aura pour rédacteurs, quant à la zoologie, MM. Lesson et Garnot. Ce qui a déja paru est aussi remarquable par l'exécution que par la nouveauté des animaux que l'on y apprend à connaître. L'histoire des mammifères, par MM. Geoffroy-Saint-Hilaire et Frédéric Cuvier, en est à sa 57e livraison. Les insectes recueillis par M. Caillaud dans le pénible et dangereux voyage qu'il a fait dans l'ancienne Éthiopie, ont été décrits avec soin par M. Latreille.

ANATOMIE ET PHYSIOLOGIE ANIMALE.

M. Geoffroy-Saint-Hilaire a repris ses observations relatives à l'ornithorinque, et les a fait porter principalement sur les organes génitaux de la femelle. Dans cet animal singulier, ainsi que dans l'échidné, autre animal de la même famille, de celle que M. Geoffroy a appelée monotrèmes, rien ne semble fait comme dans les autres; et c'est à plusieurs reprises que M. Geoffroy lui-méme a dû étudier son organisation pour la ramener à un type comparable, soit avec celle des mammifères, soit avec celle des oiseaux et des reptiles. En 1822, il soupçonnait la vessie d'être un utérus; mais aujourd'hui il rend à cet organe le nom qui lui avait été d'abord attribué. Le nom de *monotrèmes* a été donné à ces animaux, parce qu'ils n'ont qu'une ouverture extérieure apparente pour les excréments et les produits de la génération. Une grande cavité percée de cette ouverture reçoit le rectum et un large canal qui y arrive de la vessie, et que M. Geoffroy nomme *urétro-sexuel*. C'est dans ce canal qu'aboutissent, d'une part, les uretères; de l'autre, et plus près de la vessie, dans le mâle, les canaux déférents, et dans la femelle, les canaux qui descendent des ovaires et qui se divisent en deux parties: une plus voisine de l'ovaire, plus mince, que M. Geoffroy, d'après les dénominations qu'il a appliquées aux oiseaux, appelle trompe de Falloppe; l'autre plus voisine du canal, plus large, à parois plus épaisses, qu'il nomme *ad-uterum*. L'auteur a découvert, à l'entrée de l'ad-uterum, dans le canal urétro-sexuel, une petite bride qui divise cette entrée en deux orifices. La grande cavité terminale, qui existe aussi dans les oiseaux et les reptiles, a été nommée communément *cloaque,* parce qu'elle reçoit les orifices par lesquels passent les produits du canal intestinal et des reins, aussi bien que ceux qui transmettent les produits de la génération. Et toutefois c'est mal à propos, selon l'auteur, qu'on lui a donné cette dénomination : aucun excrément n'y fait son séjour, on peut dire même qu'aucun n'y passe; mais l'animal la renverse au besoin, de manière que la terminaison du rectum, qui était percée dans son fond, se trouve portée à l'extérieur; et il en est de même, pour d'autres besoins, de celle du méat urétro-sexuel : c'est pourquoi il aime mieux l'appeler avec M. Home le vestibule commun. Au total, cette disposition des organes s'éloignerait peu de ce que l'on voit dans les reptiles, dans les tortues, par exemple; mais une circonstance particulière à l'ornithorinque, et que M. Geoffroy nomme, à cause de cela, une circonstance toute *monotrémique,* c'est que les orifices des organes de la génération, soit les canaux déférents, soit les ad-uterum, débouchent dans le canal urétro-sexuel, plus près de la vessie que ceux des organes urinaires. M. Geoffroy compare la double ouverture par laquelle se fait l'entrée de l'ad-uterum dans le canal urétro-sexuel à ce canal en forme d'anse que possèdent tous les marsupiaux de chaque côté de leur vagin, et qui établit une communication un peu détournée, mais la seule qui existe, entre ce vagin et l'utérus. Le pénis et le clitoris, attachés comme à l'ordinaire au pubis par leur racine, sont, dans l'état de repos, cachés dans une poche de la paroi inférieure du vestibule commun. Ils se terminent par un double gland, ce qui forme un nouveau rapport avec certains marsupiaux, les didelphes. Le pénis n'est pas, ainsi qu'on l'avait cru, simplement creusé d'un sillon, comme dans les oiseaux, mais il est perforé d'un canal qui n'est cependant point un urètre, car il ne conduit pas l'urine, mais seulement la semence. M. Geoffroy cherche à expliquer ces différentes terminaisons de trois ordres d'organes dans les diverses classes, par les nécessités que leur imposait la forme du bassin. Il ne paraît pas éloigné de penser que ce même développement de la peau, qui produit la bourse dans les didelphes, les kanguroos, y est déterminé par quelque mouvement des os particuliers qui s'attachent sur les pubis de ces animaux, et que c'est cette même expansion membraneuse qui, rentrée à l'intérieur dans les monotrèmes et les animaux ovipares, y forme le vestibule commun.

De tous ces détails d'organisation et du fait, qu'il regarde comme très-vraisemblable, que les monotrèmes sont ovipares et manquent de mamelles, M. Geoffroy conclut que l'on doit en former une classe distincte à la fois et des mammifères et des oiseaux et des reptiles.

M. Frédéric Cuvier a lu un Mémoire sur les épines du porc-épic, dont la grandeur lui a paru propre à éclairer sur la structure et le développement des poils; ces dernières productions n'étant en quelque sorte que des épines plus grêles et plus flexibles.

Les épines du porc-épic sont toujours implantées par séries transversales de sept, neuf ou onze, ordinairement placées les unes au-devant des autres. Malgré leurs variétés de grandeur, de forme et de couleur, elles sont toutes composées d'une enveloppe dure et cornée, striée en longueur à l'extérieur, et produisant à l'intérieur autant de cannelures saillantes qu'elle a de stries au dehors; tout le vide laissé par ces cannelures est rempli d'une substance spongieuse.

L'organe producteur de l'épine se compose d'un bulbe gélatineux, élastique et rempli de beaucoup de vaisseaux, et de deux tuniques membraneuses, dont l'externe s'unit plus ou moins à la peau, et dont l'interne, qui enveloppe immédiatement le bulbe, se termine et se confond avec l'épine à sa partie inférieure. Le bulbe a des stries profondes, dans lesquelles entrent des lames saillantes de la tunique; et ces lames se continuent avec les cannelures internes de l'épine, comme la tunique elle-même avec son enveloppe cornée: l'épine croît par en bas, et, par le développement et le durcissement graduel de sa partie inférieure; sa croissance dure aussi long-temps que le bulbe et la tunique qui l'enveloppent conservent leur activité; mais lorsque l'épine s'achève et prend une racine, ces deux organes s'oblitèrent; c'est le bulbe qui dépose la matière spongieuse de l'épine, et c'est la tunique interne qui donne l'enveloppe cornée et ses cannelures intérieures.

Il arrive, en certains cas, que le bulbe s'oblitère avant la tunique interne, et il se forme alors des portions de tubes cornés sans matière spongieuse : c'est ainsi que naissent entre autres les épines creuses de la queue, dont la pointe finit par se casser, et qui ne présentent plus alors que l'apparence de tubes ouverts et suspendus à des pédicules.

Ces pédicules eux-mêmes, et en général les racines de toutes les épines, sont les dernières productions de la tunique, lorsque déja il n'y a plus de bulbe qui puisse écarter les parois cornées de l'épine, ni en remplir le vide par de la substance spongieuse.

Cet appareil producteur de l'épine est implanté dans une grande poche ovale fermée, remplie de graisse, et il y a à l'un de ses côtés deux cavités plus petites qui communiquent l'une avec l'autre, et dont la plus superficielle verse dans la cavité de la tunique extérieure une matière sébacée et odorante, dont l'objet est sans doute de lubrifier la peau : ce sont des organes analogues aux follicules graisseux de la peau de l'homme, et qui n'ont que des rapports accidentels avec les épines et leur formation.

Ce détail, comparé avec celui que nous avons donné l'année dernière, d'après le même auteur, sur la formation des plumes, démontre la plus grande analogie entre ces deux genres d'organes.

Les poils grands et roides que le porc-épic a entre ses épines, les moustaches cornées des phoques naissent dans des appareils exactement semblables; ils ne diffèrent des épines que par leur minceur et leur flexibilité, et tout annonce que ce mode de production est en général celui des poils de toute espèce, et de ceux même que leur finesse n'a pas permis d'observer sous ce rapport.

M. VELPEAU a présenté un Mémoire sur l'œuf humain, et particulièrement sur sa membrane la plus extérieure, celle qui a reçu le nom de *Caduque*. Elle est visible sur un grand nombre d'œufs avortés; on la trouve tapissant la cavité de la matrice dans toutes les femmes qui meurent enceintes, et il en subsiste encore des lambeaux quelques jours après la mort dans les femmes qui étaient récemment accouchées. La plupart des auteurs pensent qu'elle se forme par une espèce d'exhalation de matière coagulable. Suivant M. Velpeau, cette matière se concrète en une espèce d'ampoule ou de sac sans ouverture, de sorte que l'ovule fécondé, après avoir traversé la trompe, pousse devant lui la portion de cette membrane qui lui ferme le passage, et se glisse entre elle et l'utérus; mais, après qu'il s'est attaché à l'utérus et lorsqu'il prend de l'accroissement, la membrane, ainsi devenue double, l'embrasse et l'enveloppe partout, hors le point par lequel il adhère à la matrice: la lame externe de cette membrane tapisse alors l'utérus, et sa lame interne ou sa partie réfléchie recouvre le chorion. Elle est disposée par rapport à l'utérus et à l'ovule comme la plèvre par rapport à la poitrine et au poumon.

M. Velpeau a bien constaté que la membrane caduque n'a point d'ouverture, que son intérieur est rempli d'une humeur limpide, rosée, filante, qui s'oppose à l'oblitération de sa cavité, et qui fait qu'à l'époque même de l'accouchement, elle peut encore se diviser en deux feuillets.

M. Velpeau n'adopte pas l'opinion des auteurs qui ont cru voir des vaisseaux dans la membrane caduque; il la croit, avec Haller, formée par simple concrétion, et propose de la nommer *anhiste*, c'est-à-dire sans *texture*. Il la regarde comme destinée à forcer l'œuf de s'implanter sur un point donné de la matrice, et à l'empêcher de se porter vers la partie la plus déclive.

M. Geoffroy-St-Hilaire a continué ses recherches sur la physiologie des monstres.

Depuis long-temps il pense que, lorsque des viscères se montrent au dehors de la cavité qui devrait les contenir, c'est parce qu'ils ont contracté, pendant que l'individu était à l'état d'embryon, quelque adhérence avec les membranes extérieures, et que les téguments qui devaient les recouvrir, n'ayant pu les embrasser, sont demeurés incomplets et ouverts.

Il a observé cette année un nouvel exemple de la puissance de cette cause. Un poulet naissant s'est trouvé avoir la tête repliée contre l'abdomen et hors d'état de se redresser; des adhérences l'avaient attachée au vitellus; et, à mesure que le jaune pénétrait dans le ventre, il l'en rapprochait davantage. Une peau rougeâtre, de forme cylindrique, servait de lien, et cette peau, remplie par le cerveau, n'était autre que la dure-mère : les lobes cérébraux et optiques, entraînés par les adhérences, sortaient hors du crâne, dont les os supérieurs, demeurés très-petits, entouraient comme un anneau l'ouverture par laquelle ces lobes sortaient; le cervelet était demeuré en place. Dans une autre circonstance, il a trouvé, à la vérité, le cerveau sorti du crâne et toutefois recouvert par les téguments extérieurs, la peau et même les plumes : mais il pense que, dans ce cas, l'adhérence qui avait empêché le crâne de se fermer avait cessé assez tôt pour que la peau eût le temps de prendre son développement ordinaire.

C'est par cette supposition que M. Geoffroy ramène ce cas particulier à une règle à laquelle il semblait d'abord fort contraire.

Le même auteur a présenté un Mémoire spécial sur un genre de monstruosité observé dans quelques chevaux dont le pied se divise en plusieurs doigts, et qu'il nomme *chiropodes.* Une monstruosité de ce genre se voit dans le cabinet de M. Brédin, directeur de l'école royale vétérinaire de Lyon. Ces doigts, multiples seulement aux pieds de devant, y sont au nombre de trois à droite, et de quatre à gauche; et l'un des doigts, à chaque pied, est imparfait et pourvu d'un seul osselet phalangien et de son ongle, qui est grêle et allongé. Un autre pied de cheval polydactyle fait partie du muséum anatomique de l'école vétérinaire d'Alfort. On y voit deux doigts seulement; l'externe de la grandeur ordinaire, était employé seul au mouvement progressif, et l'interne, de moitié moins gros et assez court, ne touchait pas à terre. Suétone, Pline et Plutarque rapportent qu'il était né, dans les haras de Jules-César, un cheval dont les pieds de devant étaient divisés en manière de doigts, et que les aruspices annoncèrent qu'il promettait à son maître l'empire du monde; c'était probablement quelque conformation analogue à celles-là.

Il est donc, ajoute M. Geoffroy-Saint-Hilaire, des cas où les faits de monstruosité rentrent dans la règle suivie dans le reste de la famille à laquelle l'animal appartient, car c'est une disposition générale des mammifères, que tout pied soit terminé par un nombre quelconque de doigts. Le cheval forme seul une exception. Il n'a qu'un doigt parfait, et, pour lui en trouver deux autres imparfaits sous la peau, il a fallu les inductions de la science et des observations anatomiques. C'est à rendre une existence entière à ces deux doigts ou à l'un des deux que s'est employée l'action de la monstruosité considérée dans cet article : le cheval y renonce aux caractères de son espèce, pour reprendre ceux des autres animaux de sa classe, les formes mutidigitales des mammifères.

M. Rambur, médecin à Ingrande, a envoyé la description d'un enfant à double corps, âgé d'un mois, et qui était encore vivant lorsque le médecin l'observait. C'est le genre de monstruosité que M. Geoffroy nomme *hétéradelphe*. Les deux individus étaient mâles et placés ventre à ventre : le principal complet dans toutes ses parties, et de la grosseur ordinaire à son âge; l'autre de moitié plus petit et sans tête. Les membres supérieurs de ce dernier étaient réduits à de très-courts moignons : le droit plus court que le gauche, et terminé par un seul doigt ; le gauche en avait deux faiblement attachés. Son anus était imperforé; mais il avait son appareil urinaire distinct, d'où l'urine coulait continuellement et goutte à goutte. Ses téguments étaient pâles, sa chaleur sensiblement moindre qu'à son frère; on ne lui sentait point de pouls : une plaie survenue spontanément à son genou a résisté à tous les essais de médication, et il ne paraissait donner aucun signe de sensibilité: Cet enfant est mort peu de temps après avoir été décrit, et ses parents n'ont pas permis que l'on en fît l'anatomie. Sa mort précoce a empêché aussi que l'on ne s'occupât de savoir s'il aurait été possible d'enlever ces parties surnuméraires ; ce qui, dans l'idée de M. Geoffroy, qui a fait le rapport de cette monstruosité à l'Académie, n'aurait peut-être pas offert beaucoup plus de difficultés que la résection d'un membre superflu.

M. Vincent Portal, médecin à Montmirail, a communiqué à l'Académie des observations sur trois de ces monstruosités par défaut, que M. Geoffroy nomme *anencéphales,* c'est-à-dire dépourvues de cerveau, et qui ont entre elles, malgré quelques différences inévitables, une similitude singulière : la boîte du crâne y est ouverte, et ses pièces atrophiées et rejetées sur ses côtés; les vertèbres du cou y sont aussi ouvertes en arrière; mais, dès le haut du thorax, tout rentre dans l'état ordinaire. Une poche pendait hors de cette solution de continuité contre nature, et cependant il ne paraît pas qu'il soit resté trace des adhérences qui ont dû produire cette déviation de l'organisation.

Une anomalie non moins étonnante que toutes celles dont nous venons de parler, s'est offerte à M. Robert, médecin du lazaret de Marseille : c'est une femme qui, outre ses mamelles ordinaires, en porte une à la cuisse, si parfaitement organisée, qu'elle a servi à nourrir plusieurs enfants.

On trouve, au mois de septembre, les branchies externes des moules d'étang, ou anodontes, et celles des mulètes, remplies d'un quantité prodigieuse de petits bivalves vivants; et Leuwenhoek, qui en a fait le premier l'observation, les regarda comme la progéniture de ces testacés. Il devait s'y croire d'autant plus autorisé, qu'à une époque antérieure, on trouve, au lieu de bivalves, des œufs qui bientôt laissent voit le petit bivalve dans leur intérieur, et qu'en les observant encore plus tôt, on découvre ces œufs, non pas dans les branchies, mais dans l'ovaire situé vers le dos de l'animal : aussi son opinion a-t-elle été généralement adoptée, sauf quelques légères modifications, jusqu'à ces derniers temps où quelques naturalistes du Nord ont cru devoir la combattre.

L'un d'eux, M. Rathke, a pensé que ces petits bivalves sont des animaux parasites, dont il a même cru devoir faire un genre sous le nom de cyclidium. M. Jacobson, savant anatomiste de Copenhague, a adressé à l'Académie un Mémoire à l'appui de cette manière de voir. Il y montre que la forme des petites coquilles n'est pas la même que celle des grandes dont les branchies les recèlent : en effet, leur forme approche de la triangulaire, et leurs valves ont chacune un petit crochet mobile et denté; entre ces crochets sort un petit faisceau de filets très-irritables, qui tient à l'abdomen. Il fait remarquer qu'elles sont de même grandeur et de même forme dans les diverses espèces, quelle que soit la taille de ces dernières; que leur développement n'est en rapport ni avec la saison, ni avec l'âge de l'individu où elles sont contenues; que leur quantité semble énorme en proportion du nombre existant des animaux dont on croit qu'elles sont les petits. Il ajoute enfin qu'il est bien difficile de concevoir comment des organes aussi délicats que les branchies ont pu être destinés naturellement à remplir la fonction d'oviductes, et même d'utérus.

A ces arguments, M. de Blainville, qui a fait le rapport sur l'ouvrage de M. Jacobson, en a opposé d'autres qui ne lui paraissent pas moins concluants. On voit dans l'ovaire des œufs tout semblables à ceux qui, à une certaine époque, remplissent les branchies externes. On peut suivre leur route depuis leur premier séjour jusqu'au second : avant que l'ovaire se débarrasse, la branchie se remplit d'une liqueur laiteuse, comme pour se préparer à recevoir le dépôt qui va lui être confié; un animal parasite irait-il déposer ses œufs au fond de cette cavité regardée comme l'ovaire? les déposerait-il même en si grande abondance dans les branchies, et seulement dans les branchies externes, sans qu'il s'en répandît ailleurs? Les anodontes, les mulètes ne marqueraient-elles pas quelque souffrance lorsqu'elles seraient ainsi surchargées de parasites? Au contraire, on ne voit jamais à leurs branchies des traces de désorganisation. Pour mieux établir son opinion, M. de Blainville a observé, de concert avec M. de Roissy, des mulètes et des anodontes dans la saison où leurs branchies se remplissent. Ils les ont vu pondre et déposer des grains, qu'ils ont regardés comme des œufs, par séries assez régulières et en petites masses inégales; mais ils n'ont pu en voir sortir de petits animaux : observation qui serait assez peu d'accord avec celles d'après lesquelles les petits éclôraient dans le corps même de la mère, ce qui serait nécessaire si les êtres sur lesquels on est en doute étaient les petits eux-mêmes; car bien certainement ceux-ci se développent dans le corps de la moule. MM. Éverard, Home et Baüer ont vu les œufs bien formés dans l'ovaire le 10 août; ils les ont vus passer dans l'intérieur de la branchie vers le 20, mais offrant déja le petit bivalve au travers de leurs parois. Lorsque les petits animaux s'apprêtent à quitter cette demeure, il se forme un canal qui entoure en partie le pied de la moule, et par lequel ils sortent, ce qui a lieu en octobre et en novembre. A la fin de novembre tous ces petits animaux sont sortis, et l'on trouve déja dans l'ovaire de jeunes œufs préparés pour l'année suivante.

Les organes de la circulation des crustacés ont été l'objet de recherches suivies, et de préparations anatomiques très-soignées de la part de MM. Audouin et Milne Edwards. On savait, par ces leçons d'anatomie comparée de M. Cuvier, que, dans ces animaux, comme dans les mollusques gastéropodes et acéphales, le cœur musculaire est placé à l'inverse des poissons, c'est-à-dire sur le dos, où il reçoit le sang des branchies, qu'il transmet par les artères dans les diverses parties du corps, tandis que le sang du corps, réuni dans un ou plusieurs troncs veineux qui règnent le long du ventre, se distribue aux branchies sans appareil musculaire; d'où il résulte que le cœur des crustacés représente les cavités gauches du cœur de l'homme, tandis que celui des poissons en représente les cavités droites. Mais des ouvrages postérieurs avaient jeté du doute sur cette doctrine. MM. Audouin et Milne Edwards, ayant injecté les vaisseaux de plusieurs grandes espèces d'écrevisses et de crabes, ont non-seulement reconnu que telle est la marche du fluide dans ces animaux; mais ils ont encore décrit et représenté dans le plus grand détail la distribution de leurs vaisseaux, la structure de leurs branchies, en un mot, tout ce qui se rapporte à leur angiologie. L'ouvrage de ces naturalistes, accompagné de belles planches lithographiées, forme une monographie complète de cette partie importante du système vasculaire; il a été imprimé dans les Annales des Sciences naturelles, recueil qui devient de jour en jour plus intéressant par la richesse des Mémoires dont il se compose.

Un grand vaisseau de chaque côté va des branchies au cœur; des valvules placées à l'entrée du viscère s'opposent à la rétrogradation du sang; six artères principales sortent du cœur: trois en avant pour les yeux, les antennes et les parties voisines; deux moyennes pour le foie; enfin une sixième plus considérable, qui descend vers la poitrine, et se distribue dans l'abdomen, dans les parties postérieures du tronc et dans les membres. Les veines sont d'une ténuité extrême; leur tunique ne semble qu'une membrane liée intimement au tissu des parties qu'elles traversent. Elles aboutissent à un ou à deux sinus ou réservoirs pratiqués dans l'épaisseur des pièces écailleuses qui composent le thorax, et elles forment, sous leur protection, des espèces de cellules communiquant ensemble et d'où se détachent les vaisseaux qui s'introduisent sur la face externe des branchies par leur base. Après que le sang a été subdivisé presque à l'infini sur les parois des lames ou des houppes branchiales, c'est par des vaisseaux de leur face interne qu'il retourne dans les deux grands troncs qui aboutissent au cœur.

Ces cellules veineuses, qui envoient le sang aux branchies, ont, selon MM. Audouin et Milne Edwards, de l'analogie avec ce que, dans les céphalopodes, on a nommé les cœurs latéraux. Elles représentent, en effet, les cavités droites; seulement elles ne paraissent pas musculaires.

Nous ne pouvons qu'indiquer ici un travail considérable de M. Chabrier, sur les mouvements progressifs de l'homme et des animaux, travail qui offre des détails précieux sur les organes par lesquels ce mouvement s'exécute, et qui en donne une théorie que l'auteur juge nouvelle, mais qui n'a paru différer que par les termes, de celle qui est le plus généralement reçue.

MÉDECINE ET CHIRURGIE.

Nous ne répéterons pas ce que nous avons dit l'année dernière du grand Traité sur l'épilepsie de M. le baron Portal. Cet ouvrage, dont nous avons donné alors une courte analyse, a été publié, et tous les praticiens ont été à même de l'apprécier; la justice qu'ils lui ont rendue était le seul éloge que pût rechercher le célèbre auteur de tant d'ouvrages, tous consacrés au soulagement de l'humanité souffrante.

M. Moreau de Jonnès a communiqué à l'Académie la notice des irruptions de la fièvre jaune, qui ont eu lieu cette année aux Antilles. Ces îles ont éprouvé, jusqu'au mois de juin dernier, une sécheresse extraordinaire et désastreuse. Il n'est point tombé de pluie pendant soixante-dix jours, période pendant laquelle les campagnes des Antilles en reçoivent ordinairement beaucoup plus que celles de la France pendant l'année entière. Aussi les sources ont-elles été taries, la plupart des rivières desséchées, et les moissons presque entièrement perdues. C'est pendant cette sécheresse, sans exemple dans l'Archipel, que la fièvre jaune a paru, et qu'elle a développé sa puissance meurtrière, depuis le littoral du Mexique jusqu'à Cuba. Ce fait s'élève contre l'opinion qui rattache l'origine de cette maladie à l'état de l'atmosphère, et qui fait de l'humidité de l'air sa cause essentielle ou l'une des conditions de son existence. Il semble indiquer que si les contrées de l'Inde en sont exemptes, il ne faut pas l'attribuer à la sécheresse de leur climat, et qu'il ne faut pas non plus accuser de ses ravages l'humidité des contrées de l'Amérique. Loin d'être arrêtée dans ses progrès ou atténuée dans sa malignité, par l'influence d'une constitution extraordinairement sèche, la fièvre jaune a montré cette année aux Antilles sa plus grande activité de propagation et ses symptômes les plus redoutables. Elle a fait périr beaucoup plus du tiers de ceux qu'elle a atteints, et, pour la première fois, depuis 1820, elle s'est manifestée par les caractères qui lui sont communs, à quelques époques, avec les contagions les plus formidables : des pétéchies et des charbons gangréneux.

D'après les recherches de M. de Jonnès, ce dernier caractère n'a été observé, dans les irruptions de la fièvre jaune, qu'aux époques suivantes : à la Martinique en 1694, par Labat; en 1796, par Davidson; en 1802, par Savarési et Moreau de Jonnès; à Rochefort en 1694, par Chirac; à la Barbade en 1715, par Hughes; à Minorque en 1744, par Cléghorn; à Saint-Domingue, de 1733 à 1746, par Poupée Desponts; à New-York en 1798 et 1805; à London en 1798; à Cadix en 1800, par les médecins anglais, et à Gibraltar en 1804, par Pym.

Un fait récent, dont la connaissance est acquise par des documents officiels, a été pareillement communiqué à l'Académie par M. Moreau de Jonnès. Un bateau ionien ayant été forcé d'avoir quelques rapports avec un vaisseau turc, l'équipage, lors de son retour à Céphalonie, fut mis en quarantaine. Le patron, qui était monté quelques instants à bord du bâtiment ottoman, était déja atteint des premiers symptômes de la peste, sans toutefois que les autres marins en donnassent aucun indice. Néanmoins le médecin anglais du lazaret résolut de les soumettre tous également à un traitement mercuriel énergique, interne et externe. Ainsi qu'il l'avait prévu, tous ces individus furent successivement attaqués de la peste, mais avec des différences extrêmement remarquables. Le patron et un autre homme de l'équipage, qui n'avaient éprouvé aucun effet sensible du traitement mercuriel, subirent la maladie dans toute sa violence et sa malignité, et ils y succombèrent. Au contraire, les matelots, sur qui le mercure produisit ses effets ordinaires en se portant sur les glandes salivaires, ne furent atteints que de symptômes sans aucun danger. Ils échappèrent à la mort, et rien ne peut faire douter que cette heureuse issue n'ait été causée par les frictions mercurielles, qui ont empêché et prévenu le développement de la maladie et ses suites funestes.

Un moyen aussi simple et aussi facile, qui préviendrait sinon l'invasion de la peste, du moins ses effets mortels, doit exciter, ajoute M. de Jonnès, un intérêt d'autant plus grand, que des communications avec des navires infectés de cette contagion peuvent être provoquées à chaque instant par les événements dont la Méditerranée est aujourd'hui le théâtre.

M. Brechet, l'un de nos anatomistes et chirurgiens les plus instruits, a porté l'attention des gens de l'art sur une lésion particulière du cœur, dont la description avait été omise dans les principaux traités des maladies de cet organe. Il la nomme anévrisme faux consécutif du cœur ; c'est une sorte de déchirure qui se fait dans les parois du cœur, à certains endroits du ventricule gauche, mais particulièrement vers sa pointe. Le sang s'engage dans cette ouverture, pousse au dehors les enveloppes membraneuses, et produit ainsi à la surface du cœur une tumeur quelquefois aussi volumineuse que cet organe lui-même : le sang se coagule dans cette espèce de poche, et y forme des couches de fibrine, qui lui opposent pendant quelque temps une résistance suffisante, et retardent ainsi une mort qui autrement aurait été inévitable.

M. Brechet, à la suite de plusieurs observations qu'il a trouvées dans les livres, ou qui lui ont été communiquées, en rapporte une qui lui est propre, et qui a été faite sur le cœur du célèbre Talma. Une poche assez grande pour contenir un petit œuf de poule communiquait avec le ventricule gauche par une ouverture circulaire d'un pouce de diamètre, garnie d'une sorte de virole cartilagineuse, épaisse de près de trois lignes; ce qui annonce que l'ouverture était fort ancienne, bien que personne, ni Talma lui-même, qui, dans sa jeunesse, avait étudié en médecine, n'en ait soupçonné l'existence. Les émotions, les sentiments exaltés, qu'avec un talent tel que le sien il devait nécessairement éprouver dans l'exercice de son art, n'ayant point fait naître d'accidents qu'il ait pu remarquer, on doit croire que ce genre de lésion serait peu redoutable dans des hommes d'une existence plus paisible.

Un officier anglais, atteint depuis long-temps de cette maladie, a succombé, en dormant, à la rupture de sa poche et à l'épanchement du sang dans le péricarde.

Le traitement de cette affection, comme on le comprend aisément, doit consister dans tous les moyens qui peuvent donner à la circulation plus de calme et de régularité : éviter tout ce qui peut occasioner des émotions fortes, ne point déclamer, faire peu de mouvements, prendre peu de nourriture, ralentir la marche du sang par des remèdes appropriés et en diminuer la quantité par des saignées. Ce sont à peu près les mêmes moyens que ceux qu'exigent les anévrismes ordinaires.

M. Senn, médecin de Genève, a fait connaître les résultats d'une opération de trachéotomie qu'il a pratiquée avec succès. Une petite fille, après divers accidents, avait au larynx un engorgement qui apportait la plus grande gêne à sa respiration : elle maigrissait à vue d'œil; mais une incision à sa trachée-artère, dans laquelle on introduisit une canule d'argent, rétablit promptement cette fonction importante : elle n'a pas cessé dès-lors de se bien porter; son larynx a commencé même à reprendre ses dimensions naturelles; sa voix est devenue plus forte; et l'on espère même qu'à l'époque de la puberté, elle pourra se débarrasser de l'incommodité qui lui rend ce moyen artificiel nécessaire.

Il y a des exemples semblables dans les animaux, et plusieurs membres de l'Académie ont vu une jument qui depuis dix-huit mois ne respirait que par un tube implanté dans la trachée, et qui n'en faisait pas moins un service très-pénible.

Depuis long-temps on a cherché à remédier à l'obstruction de la pupille, en perçant l'iris et en formant ainsi une pupille artificielle; mais il arrive quelquefois que cette nouvelle ouverture se referme, par la tendance de ses bords à se rapprocher et à se joindre.

M. Faure, oculiste de S. A. R. Madame Duchesse de Berry, a fait beaucoup d'expériences sur des animaux, pour constater par quel mode d'incision on peut obtenir l'ouverture la plus durable. L'enlèvement d'un lambeau lui paraît plus avantageux qu'une simple incision; et néanmoins il s'est assuré qu'une incision dans la direction des rayons et en travers des fibres circulaires d'un iris parfaitement sain, mais sans diviser le bord de la prunelle, donne une ouverture qui a moins de tendance que toute autre à s'oblitérer, quoique l'on n'ait point emporté de lambeau.

Une des opérations les plus étonnantes de la chirurgie, et qui cependant est pratiquée de toute ancienneté dans l'Inde, est celle par laquelle on peut reproduire un nez qui a été coupé ou qui a péri par tout autre accident. On parvient du moins à en rendre à peu près l'équivalent, au moyen d'un lambeau triangulaire de la peau du front que l'on détache, à l'exception d'un pédicule par lequel on lui conserve de l'adhérence, et que l'on abaisse en tordant ce pedicule, pour le greffer par approche sur les bords ravivés du nez enlevé. M. Delpech de Montpellier, et M. Lisfranc de Paris, et d'autres habiles chirurgiens y ont parfaitement réussi.

M. Lisfranc a présenté à l'Académie l'individu dont il a ainsi restauré la figure, et qui ne présente rien de difforme.

Cet homme a même retrouvé l'odorat, que le contact trop immédiat de l'air sur la membrane pituitaire lui avait fait perdre; la cicatrice de son front n'est pas trop désagréable à la vue; mais ce déplacement de parties a amené de singuliers changements dans ses sensations. Lorsqu'on le frappe sur le milieu du front, il ressent le choc sur son nez artificiel; touché à la racine de ce nez, il rapporte la sensation au front; la percussion faite sur les ailes du nez est ressentie aux joues, mais il n'y a point à cet égard de réciprocité.

M. Lisfranc, pour éviter une difformité que la torsion du lambeau du front produit quelquefois, l'avait incisé plus bas d'un côté que de l'autre et n'avait eu qu'à le faire pivoter sur sa pointe. Il en insère les bords dans une incision qui divise perpendiculairement la peau, et offre ainsi une rainure toute prête à les recevoir, et il les maintient au moyen de bandes agglutinatives qui dispensent d'y faire des sutures. Des rubans de plomb laminé, roulés sur eux-mêmes et fixés dans les narines, en ont conservé le diamètre.

M. Delpech a lu un Mémoire sur le même sujet. C'est surtout aux artères qui remontent de la racine du nez vers le front, et que l'on ménage en coupant le lambeau, qu'il rapporte le grand avantage de cette méthode; la laxité du tissu cellulaire qui unit l'aponévrose du muscle frontal au péricrâne fait que ces points de suture rapprochent avec une facilité extrême les bords de la plaie, dont il ne reste ainsi que des traces très-légères. Les précautions variées qu'exigent les divers états des parties sont indiquées avec beaucoup de soin dans ce Mémoire, qui est fondé sur de nombreux succès;

mais M. Delpech ne s'est pas borné à réparer des nez. Il a restauré une partie de la paupière inférieure, et les voies de l'excrétion des larmes, dans un individu où, dès la naissance, ces parties avaient été détruites par une sorte d'arrachement. Une bande étroite de la peau du front, abaissée et greffée, a réparé cette erreur de la nature, et fait disparaître une difformité hideuse.

Un étranger, qui montrait à Rouen une ménagerie ambulante, ayant été piqué à la main par un serpent à sonnettes, la mort s'ensuivit au bout de huit heures, quoique l'on se fût empressé de lier et de cautériser la partie blessée. Les docteurs Pinhorel et Desmoulins trouvèrent le sang d'une grande partie des veines du bras concrété en un caillot continu. Ce malheur a engagé l'autorité à requérir l'avis de l'Académie sur les moyens de prévenir de semblables accidents. L'Académie a demandé que l'exposition, et même l'introduction de ces sortes d'animaux à l'état de vie, fût interdite, et elle l'a demandé avec d'autant plus d'instance, que leur climat natal n'étant pas moins froid que le nôtre, rien n'empêcherait une femelle pleine qui viendrait à s'échapper, de propager son espèce. On sait, par exemple, que la grande vipère fer-de-lance, qui n'est pas moins venimeuse que le serpent à sonnettes, et qui ravage si cruellement la Martinique et Sainte-Lucie, n'a été introduite dans ces îles que par des causes accidentelles, et n'existe point dans les autres Antilles. Leur arracher les crochets à venin ne préviendrait point le danger, car ces crochets sont promptement remplacés; et quant aux autres remèdes, quoique l'on en ait préconisé plus de trois cents, il n'en est aucun dont l'efficacité soit suffisamment constatée. La ligature elle-même est, selon M. Delille, qui a donné un Mémoire à ce sujet, un moyen beaucoup trop faible. C'est à l'ablation ou à la cautérisation la plus prompte de la partie blessée, qu'il faut recourir sans délai; et trop souvent encore elles n'ont point de résultat, parce qu'elles ne peuvent être exécutées en temps utile.

VÉTÉRINAIRE, AGRICULTURE, ET TECHNOLOGIE.

Des expériences curieuses, non seulement pour l'agriculture, mais pour la physiologie générale, sont celles de M. Girou de Busaraingues, sur la procréation des sexes. C'est du plus ou moins de vigueur comparative des individus que l'on accouple, que dépend selon lui le sexe du produit. Si l'on veut avoir plus de femelles, il faut employer des mâles jeunes et des femelles dans l'âge de la force, et nourrir celles-ci plus abondamment que ceux-là. Il faut faire l'inverse si l'on veut produire plus de mâles. Avec le premier procédé l'on a obtenu d'un agnelage 84 femelles contre 53 mâles; et avec le second, l'on a eu 55 brebis contre 80 mâles; tandis qu'une égalité de force et de nourriture avait donné dans le même troupeau 71 femelles et 61 mâles. Les oiseaux suivent la même loi que les moutons. Dans la même basse-cour, les plus fortes femelles procurent un nombre d'individus de leur sexe plus grand que les petites; les jeunes femelles qui n'ont pas acquis un développement précoce, donnent plus de mâles.

Un rapport de M. Silvestre sur l'exploitation du domaine rural de Grignon, qui est devenu une sorte d'école d'agriculture, et un Mémoire de M. Girou de Busaraingues sur le revenu d'une ferme dans le département de l'Aveyron, montrent ce que la terre peut devenir dans des mains intelligentes.

C'est précisément le contraire que l'on peut apprendre dans le Mémoire de M. Auguste Saint-Hilaire sur l'agriculture des Brésiliens : couper de belles forêts, les ensemencer pendant quelques années sans aucun labour; les abandonner ensuite à de mauvaises herbes qui empêchent jusqu'au moindre arbuste de s'y remontrer, et en aller chercher d'autres pour les traiter de même, voilà tout ce qu'ont imaginé jusqu'à présent les habitants de la province de Minas-Geraës.

La maladie des chevaux que l'on nomme en français *fourbure* est appelée *Crithiasis* par les vétérinaires grecs, qui l'attribuent à un usage immodéré de l'orge, dout le nom grec est Κριθή : les traducteurs ont rendu ce mot en latin par *hordeatio*, et comme l'H se change aisément en F, c'est du mot *hordeum* devenu *forbeum*, que M. Huzard dérive celui de *fourbu* ou *forbeu ;* et il a fait imprimer une note à ce sujet accompagnée d'articles intéressants sur l'ancienne bibliographie vétérinaire. D'autres auteurs croyaient le nom *forbu* venu de ce que la fourbure arrive aussi aux chevaux lorsqu'on les fait trop boire, ou boire lorsqu'ils ont trop chaud, boire hors de propos.

Il a été fait, à la demande de M. le préfet de police, un travail intéressant auquel MM. Darcet et Huzard, membres de cette Académie, ont concouru, sur l'enlèvement et l'emploi des chevaux morts. Le résultat en a été publié en un vol. in-4°. Les auteurs y font l'histoire de cette branche de la police, décrivent son état actuel, font connaître tout le parti que l'on peut encore tirer de ces utiles animaux après qu'ils ont succombé à leurs fatigues, et proposent un projet de réglement pour améliorer cette partie du service public.

M. Heron de Villefosse a publié un ouvrage important sur les progrès de la fabrication du fer en France et sur son état actuel. Les premières causes de ces progrès ont été la substitution de la houille au charbon, et celle du laminoir au marteau; l'accroissement rapide de la consommation du fer, suite des progrès des autres industries, y a également concouru, et l'auteur y donne aussi une grande part à la protection accordée aux usines françaises par la loi des douanes de 1822. Ce qui paraît certain, c'est que la France ne produisait encore, en 1820, que les deux tiers de la quantité de fer en barres qu'elle a produite en 1825. L'accroissement annuel de la production a été d'environ 400,000 quintaux métriques. L'importation du fer en barres qui, en 1821, fut encore de 138,000 quintaux métriques, s'est réduite au tiers de cette quantité. Mais un effet contraire au but que l'on se proposait par l'introduction de la houille, c'est que la consommation du bois a augmenté, parce que, pour affiner plus de fer au moyen de la houille et du laminage, il a fallu plus de fonte, et que jusqu'à présent c'est encore par le bois que l'on obtient la fonte brute. Cependant on commence à élever de hauts fourneaux pour traiter la fonte par la houille carbonisée dite coke, et ce procédé, en se répandant, fera cesser l'inconvénient dont nous venons de parler.

Il existe aujourd'hui en France 379 hauts fourneaux qui donnent plus de 1,600,000 quintaux métriques de fonte. Quatre seulement sont alimentés par le coke. Il en vient encore de l'étranger plus de 70,000 quintaux métriques.

L'affinage par la houille et le laminoir ne s'exécute jusqu'à présent que dans 31 établissements dits forges à l'anglaise, et dans 172 fours d'affinage; mais il y a encore 1215 feux d'affinerie où l'on n'emploie que du bois. On doit ajouter 96 feux dits de *forges catalanes*, où l'on obtient directement le fer sans faire préalablement de la fonte.

La fabrication du fer affiné a produit, en 1825, plus de 1,100,000 quintaux métriques, et l'on en a tiré 51,000 quintaux de l'étranger; 70,000 ouvriers environ sont employés, sous divers rapports, dans ce genre d'industrie, et la valeur du fer en barre produit est d'environ 73 millions.

Le haut prix des fers en France ne pourra être réduit que par la multiplication des fourneaux où l'on emploiera le coke, par leur rapprochement des mines de houille, ou par l'établissement de routes et de canaux qui facilitent soit le transport de la houille, soit celui du minerai. D'après les projets que l'on connaît à divers particuliers, et les ouvrages entrepris par le gouvernement, on peut espérer que la production de la fonte pourra augmenter jusqu'à 600,000 quintaux métriques. Plus de 70 millions sont déja engagés en entreprises de hauts fourneaux et de forges à l'anglaise.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE M. BOSC,

LU A LA SÉANCE PUBLIQUE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, LE 15 JUIN 1829.

PAR M. LE BARON CUVIER,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

Louis-Augustin-Guillaume Bosc, long-temps connu sous le surnom de D'ANTIC, naquit à Paris, le 29 janvier 1759, de Paul Bosc d'Antic (1) et de Marie-Angélique Lamy d'Hangest.

Sa famille paternelle, autrefois florissante dans les Cévennes, était fort déchue par suite des guerres de religion; et l'attachement permanent qu'elle avait montré au protestantisme avait consommé sa ruine. M. d'Antic le père, contraint par sa position d'embrasser un état lucratif, choisit la médecine : mais, comme protestant, il ne put prendre de degrés

(1) Paul Bosc d'Antic, né en 1726 à Pierre-Ségude en Languedoc, mort à Paris en 1784. Ses œuvres ont été recueillies en 2 vol. in-12. Paris, 1780.

en France; et c'était en Gueldre, sur les bords du Zuyderzée, et dans la très-petite et très-obscure université de Harderwick, qu'il était allé chercher le bonnet de docteur : aussi ne lui fut-il permis d'exercer à Paris que long-temps après, à la faveur d'une charge qu'il acheta dans la maison du Roi. En attendant, il s'occupait de la chimie et des arts chimiques, et on a de lui, sur ces matières, des ouvrages qui ne sont pas sans mérite pour leur temps.

Le jeune Bosc pouvait espérer un appui plus utile de ses parents maternels : sa mère était fille et sœur de deux officiers-généraux d'artillerie, distingués dans leur arme, et cette circonstance engagea sa famille à le destiner de bonne heure au service militaire.

Rarement le génie d'un enfant se conforme-t-il à ces vocations arrangées d'avance. Celui-ci du moins ne s'occupa jamais de la sienne. A peine sut-il marcher, que l'observation des objets naturels devint son unique passion. Il rassemblait des pierres et prenait des insectes bien avant de savoir écrire, et il a dit de lui-même qu'il ne se souvenait pas d'avoir eu d'autres jouets.

Le goût de la campagne et d'une vie solitaire, et même un peu sauvage, qui s'alliait si bien avec cette première inclination, se renforça encore par des événements domestiques. M. d'Antic avait fait un second mariage, et s'était transporté à Servin, près de Langres, où on lui avait confié une grande verrerie. Sa nouvelle femme montrait peu de tendresse pour un fils d'un premier lit. On le laissait passer ses journées au milieu des bois, et l'amour qu'il y prit pour la solitude se conserva si long-temps, qu'à quinze ans, et tout protestant qu'il était, l'idée de s'y livrer tout entier, jointe à celle de cultiver un petit jardin, le décida presque à céder aux suggestions d'un chartreux qui voulait l'attirer dans son ordre.

Cependant on pensait toujours à le préparer à l'état auquel on le destinait, et son père s'étant chargé d'une verrerie plus considérable que celle de Servin, qui était située dans les montagnes de l'Auvergne, le laissa âgé de dix ans au collége de Dijon, en priant ses maîtres de l'appliquer de préférence aux mathématiques, et à tout ce qui pouvait être utile à un futur officier; direction qui, suivie trop à la lettre, lui fit négliger les langues anciennes et la littérature, sans le rendre un grand mathématicien. En effet, aucune idée d'avancement ni de fortune ne pouvait le détourner de ses premiers goûts. Les petites ambitions de collége ne le touchèrent pas plus que ne firent dans la suite celles du monde; il ne prenait même qu'une faible part aux jeux de ses camarades, et ne se montrait guère au milieu de leurs ébats que lorsqu'il y avait des faibles à protéger; car dès-lors une justice inflexible faisait le fond de son caractère. Le reste de ses récréations se passait, dans sa chambre, à arranger ses plantes ou ses insectes, et à lire sans choix toutes sortes de livres, et chaque fois qu'il pouvait sortir, il se hâtait de courir à la campagne. Enfin ses maîtres imaginèrent de l'envoyer au cours de botanique de Durande, qui avait alors à Dijon quelque célébrité, et il se crut éclairé d'un jour tout nouveau. L'étude méthodique de ces objets que jusqu'alors il n'avait recueillis et observés que dans une sorte de confusion, s'empara de son esprit : ce même écolier pour qui le latin de Cicéron n'avait point eu d'attrait se passionna pour celui de Linnæus; il ne voulut plus en écrire d'autre, et son français même, nous devons l'avouer, eut quelquefois avec son latin une trop grande ressemblance.

Ce n'étaient pas là des moyens d'obtenir les prix du collége : peut-être même ne se serait-il pas trouvé trop bien préparé pour son examen de l'artillerie; mais d'autres événements le dispensèrent de subir cette épreuve.

La nouvelle entreprise de M. d'Antic le père ne lui avait valu que des procès ruineux. Venu à Paris pour chercher d'autres ressources, et ne pouvant plus présenter son fils pour un corps où l'on n'entrait point sans faire preuve de quelque revenu, il se trouva heureux de lui obtenir un petit emploi dans les bureaux du contrôle général, et ensuite dans ceux de la poste. C'était un cruel changement pour un jeune homme qui n'avait de bonheur qu'à courir tout le jour à l'air libre des champs; mais, quelque ami que fût M. Bosc d'une vie indépendante, il savait aussi mettre son caractère à se ployer à ses devoirs, et l'intendant des postes, M. d'Ogny, le trouva si exact et si intelligent, qu'après quelques années il l'éleva à l'emploi de secrétaire de l'intendance, ce que maintenant l'on décorerait du titre de secrétaire général, et qu'il lui donna la promesse d'une place encore mieux rétribuée, celle de premier commis, ou de chef de division, comme on s'exprime aujourd'hui.

Dès ce moment, M. Bosc, arrivé à quelque aisance, put disposer d'une partie de son temps en faveur de ses premiers goûts, et il se lia successivement avec les hommes qui les partageaient à Paris. Sa place lui donnant la franchise des ports, il en profita pour établir des correspondances étendues, et il ne tarda point à se mettre en relation suivie avec les naturalistes les plus célèbres de France et de l'étranger. Bientôt il prit lui-même parmi eux une sorte de rang.

A cette époque, l'histoire naturelle n'était pas, à beaucoup près, ce qu'on la voit de nos jours. Les élèves immédiats de Linnæus, oubliant que ce grand maître ne leur avait donné ses méthodes que comme les avenues du sanctuaire, que comme des moyens de se préparer à la véritable science, croyaient y voir la science tout entière. Ils s'y tenaient strictement attachés, ne proposaient que des systèmes artificiels, des caractères extérieurs, de sèches nomenclatures, le tout exprimé dans un langage créé tout exprès, ingénieux sans doute et expressif, mais que ses formes rendaient presque effrayant pour les hommes nourris des ouvrages classiques. La France, enorgueillie, à juste titre, des surprenantes découvertes de Réaumur, des profondes recherches de Bernard de Jussieu, des conceptions hardies et de la haute éloquence de Buffon, semblait peu touchée de cette précision dans la détermination des espèces, qui faisait le principal mérite de l'école du Nord, et dont on ne pressentait point encore toutes les conséquences. A peine les noms linnéens commençaient-ils à être adoptés pour les végétaux, et cela grace à l'appui que leur avait prêté Bernard de Jussieu. Herman à Strasbourg, Gouan à Montpellier, et à Paris son élève Broussonnet, étaient à peu près les seuls hommes de quelque réputation qui se fussent déclarés complètement sectateurs du naturaliste suédois.

M. Bosc, dont les premières occupations avaient été des collections de plantes et d'insectes, dut sentir de bonne heure la nécessité d'une nomenclature précise et applicable à un grand nombre d'objets. Linnæus seul pouvait la lui offrir, et c'est ce qui l'engagea à s'y attacher, et à s'y attacher exclusivement : le suivant avec scrupule pour les noms, pour les distributions, pour la terminologie, dans toutes les parties de la science. Romé Delille, qui plus tard a porté la crystallographie beaucoup plus loin que Linnæus, avait cependant aussi arboré l'étendard de ce grand naturaliste, et cette circonstance lui valut en M. Bosc un disciple zélé qui fit un bon usage dans ses études des crystaux de ce qui lui restait de ses mathématiques du collége. On lui doit même la découverte de l'espèce de pierre zéolitique appelée *chabasie* (1).

Néanmoins ce furent surtout les insectes qui l'occupèrent; et une anecdote curieuse qui montre bien l'état où se trouvait parmi nous l'étude de la nature, c'est qu'il n'apprit qu'en 1782, lorsque Broussonnet revint d'Angleterre, l'existence des ouvrages de Fabricius. Le *Systema entomologicum*, ce livre qui a fait une si grande révolution dans l'histoire des insectes, était imprimé depuis sept ans, et personne encore à Paris n'en avait entendu parler. Bientôt M. Bosc fit la connaissance de Fabricius lui-même, et cet excellent homme a été jusqu'à sa mort son ami dévoué. Il a décrit dans sa collection les plus intéressants de ses insectes, et il le cite à chaque page de ses écrits. M. Bosc lui abandonnait, en effet, toutes ses collections; et ce qu'il a fait pour Fabricius, il l'a fait pour une multitude d'autres : personne n'a été plus communicatif. Ne s'occupant des sciences que pour son plaisir, il ne ressentait, ni n'excitait ces jalousies personnelles qui ont troublé la vie de tant de savants. Tout au plus, les vieux antagonistes des méthodes linnéennes pou-

(1) *Description de la chabasie* dans le Journal d'histoire naturelle de Lamarck, Bruguière, etc., tome II, p. 181, et Journal des mines, tome V, p. 277-1791.

vaient-ils prendre quelque humeur de son ardeur à les propager; mais il était d'ailleurs d'un caractère si égal, si peu disposé à l'attaque, si juste appréciateur des mérites de chacun, que ces vieillards mêmes lui pardonnèrent. Quant aux jeunes gens, frappés de la facilité apparente des voies qu'il leur indiquait, ils se livrèrent et avec ardeur à sa direction. Si plus tard quelques-uns ne demeurèrent pas étrangers à des vues plus profondes, il n'en est pas moins vrai qu'il donna alors une vive et utile impulsion, et que c'est à cette impulsion que l'on a dû plusieurs des hommes qui maintenant honorent le plus la science.

Pour compléter l'espèce de révolution scientifique qu'ils avaient entreprise, Broussonnet et M. Bosc déterminèrent quelques-uns de ces jeunes naturalistes, et des hommes déja plus avancés, mais qui partageaient leurs sentiments, à fonder avec eux une société linnéenne sur le modèle de celle qui venait de se former à Londres, et qui a rendu de si grands services à toutes les branches de la science de la nature par les quinze volumes qu'elle a publiés, et qui sont si pleins de faits nouveaux et d'espèces singulières ou brillantes.

Celle de MM. Bosc et Broussonnet se proposait des travaux semblables, et voulait, en outre, par des excursions régulières, recueillir et faire connaître toutes les productions des environs de Paris; mais elle n'a pas eu le même succès. A la vérité, elle commença à préparer ses publications, et l'on a d'elle un cahier in-folio imprimé en 1792, dont M. Bosc a composé une grande partie (1), mais bientôt ces travaux fu-

(1) *Actes de la Société d'histoire naturelle de Paris*, tome I[er], 1[re] partie, Paris, 1792, in-fol. Il y a de M. Bosc neuf Mémoires : *Ardea gularis.* —

rent arrêtés par les troubles civils. Les gens de la campagne la prenaient dans ses excursions pour un rassemblement de malintentionnés; à Paris même, le buste qu'elle avait érigé à Linnæus, en 1790, sous le grand cèdre du Jardin-du-Roi, fut brisé par une populace qui, au lieu de *Charles Linnæus*, croyait lire *Charles neuf;* et ce qui lui fut plus funeste, c'est que les dissensions qui agitaient la nation pénétrèrent dans son sein et que les plus distingués de ses membres furent assez faibles pour se brouiller à propos d'opinions passagères, qu'eux-mêmes, quelques années après, avaient oubliées ou désavouées.

La société philomatique, composée d'éléments moins combustibles, donna plus de suite à ses travaux, et M. Bosc lui fournit plusieurs observations (1). Il enrichit aussi vers ce

---

Sepia rugosa. — *Lacerta exanthematica.* — *Serropalpus Keroplatus.* — *Acheta sylvestris.* — *Locusa punctatissima.* — *Lycoperdon Axatum.* — *Decumaria sarmentosa.*

(1) *Bulletin des sciences par la société philomatique*, tome I^{er}, 1re partie, 1791. Description d'un nouveau bostriche *(b. fuscatus);* — d'une nouvelle espèce d'opatie *(op. rafipes);* — d'une nouvelle espèce d'iule *(iulus guttulatus);* d'une nouvelle espèce de riz *(oriza cristata);* — d'un nouvel agrostis *(agr. cylindracea);* — d'un nouvel insecte *(callopus marginatus)*. 1792. Description de deux insectes nouveaux *(phalangium spinosum* et *cynips aptera)*. An III. Emploi économique des baies du *vaccinium myrtillus.* — Description de deux nouvelles espèces d'animaux *(corvus cærulescens* et *acarus manicatus)*. Plus tard on trouve de lui dans le même recueil : 1797. Description d'objets nouveaux d'histoire naturelle trouvés dans une traversée de Bordeaux à Charlestown (tantaculane-actinée panachée, plusieurs clara-oscane, plusieurs hydis. An VI. Du *Villarcia*. An VIII. Description de trois lépidoptères de la Caroline *(crancleus adspergillus, pyralis saccularia, alucita cerella)*. An IX. Description d'une espèce

temps-là de divers morceaux un Journal d'histoire naturelle, entrepris par MM. Lamarck, Brugnière, Haüy et Pelletier, qui ne fut pas de longue durée (2).

Au reste, ces nombreux petits écrits ne sont guère que des descriptions isolées d'espèces, et faites avec une brièvété peut-être plus que linnéenne; et toutefois ce genre facile de publications fut aussi interrompu, lorsque M. Bosc devint lui-même l'objet des persécutions d'un parti à jamais fameux par sa férocité.

Pour en expliquer les causes, il est nécessaire que nous le reprenions un peu plus haut dans la carrière de ses emplois.

Nous avons vu que l'estime bien fondée de M. d'Ogny l'avait porté par degrés à une place assez avantageuse dans les postes. En 1790, cette administration avait été ce que l'on

---

de conferve *(conf. incrapata)*; — d'une nouvelle de puce *(pulex fasciatus)*. An X. Observation et description d'une espèce de balane qui se fixe dans les madrépores *(bal. madreporatum)*; — sur deux nouvelles alvéolithes *(alv. grain de fétuque)*. An XI. Note sur l'*écureuil capistrate de la Caroline*. Plus tard il a inséré aussi quelques articles dans le nouveau Bulletin. 1808. Notice agronomique sur les espèces de frênes. Extrait du plan de travail adopté pour étudier et classer les diverses variétés de vignes cultivées dans les pépinières du Luxembourg. 1811. Sur un nouveau genre de vers intestinaux nommés *tétragales*. 1812. Description du dipodion, nouveau genre de vers intestinaux.

(2) Journal d'histoire naturelle, rédigé par MM. Lamarck, Bruguière, Olivier, Haüy et Pelletier, 2 vol. in-8°, Paris, 1792. Tome I^er^. Description d'une nouvelle espèce de grimpereau. II. — de deux mouches *(m. tridens* et *m. cephalotes)*; — du *sciurus carolinensis*; — du *cynips quercus tozæ*; — du *tanagra humeralis*. Mémoire sur la chabasie. Description d'une nouvelle espèce de cucume; — du *bostrichus furcatus*; — du *ripiphorus*; — du *coturnix ypsilophorus*.

appelle réorganisée. On en avait éloigné M. d'Ogny, et, suivant l'usage, les nouveaux administrateurs n'avaient eu rien de plus pressé que de faire descendre de quelques degrés le protégé particulier de leur prédécesseur. Un prompt retour de fortune le fit remonter, au contraire, beaucoup plus haut. Les événements portèrent momentanément au pouvoir un homme avec qui il était depuis long-temps lié d'une amitié étroite, ce Roland que sa probité et ses lumières n'empêchèrent point de commettre des fautes funestes à son pays, mais dont les malheurs ont fait pardonner la mémoire. On réorganisa une autre fois l'administration des postes, et, le 11 mars 1792, M. Bosc en fut nommé l'un des chefs, on peut dire même le chef principal; car ses liaisons particulières avec le ministère lui donnaient à peu près toute l'autorité: autorité passagère qui ne dura que seize mois, et devint pour celui qui en était le dépositaire la source de cruelles souffrances.

Le premier renvoi de Roland par Louis XVI n'eut point encore d'effet contre lui. Une troisième réorganisation déja imminente fut alors empêchée par l'Assemblée Législative. Mais il n'en fut pas de même du second renvoi du même ministre, lorsque le parti appelé de la Gironde, dont Roland était la créature, fut abattu et mis en jugement par celui qu'on nommait de la Montagne. Le 31 mai 1793, jour de cette révolution qui amena ce qu'on a appelé le règne de la terreur, M. Bosc fut arrêté dans son domicile, et nous le dirons avec honte, par un homme qui, sous prétexte d'histoire naturelle, s'était depuis long-temps insinué dans sa familiarité. On le conduisit à la poste, où on le rendit témoin de la première violation du secret des lettres qui ait eu lieu depuis qu'il en était administrateur, violation qui dès-lors continua ouvertement pendant tout le règne de la terreur, et qui, sous des formes moins impudentes, s'est prolongée long-temps depuis. A la vérité, la Convention, non encore subjuguée, le rendit pour lors à ses fonctions; et comme son département personnel n'embrassait que les messageries, il put encore y vaquer sans déshonneur; mais ses collègues et lui ne tardèrent pas à être définitivement renvoyés. Le 14 septembre 1793 fut le jour de leur destitution.

Si quelque chose étonna M. Bosc, ce fut d'avoir été conservé si long-temps. Intimement lié au ministère tombé, rien n'avait pu l'empêcher de lui montrer son attachement. Il avait visité Servan à la Conciergerie; il avait toujours vu ouvertement madame Roland, soit chez elle, soit dans ses différentes prisons. Le jour où elle fut arrêtée, elle lui avait confié sa fille, et c'est dans ses mains qu'elle déposa ces Mémoires célèbres où l'on est également frappé de l'esprit distingué et de la pureté d'ame de l'auteur, et du mal que peuvent produire les intentions les plus pures, et l'esprit le plus distingué, lorsque l'expérience ne leur sert pas de guide. Roland lui-même avait trouvé son premier asile dans une petite maison dont M. Bosc disposait, au fond de la forêt de Montmorency, et c'est de là que, par des chemins détournés, il s'était rendu à Rouen, où deux amies l'avaient dérobé à tous les yeux. C'en était plus qu'il ne fallait pour que le parti dominant ne l'en tînt pas quitte pour une destitution, et il est probable que s'il fût demeuré à Paris, il eût subi le même sort que ses amis. Heureusement il eut l'idée de se retirer dans cette même solitude. L'éloignement où il s'y trouvait des lieux et des chemins fréquentés, le costume populaire dont il s'y revêtit, le soin qu'il y prit de travailler lui-même à la terre et au bois, empêchèrent que le voisinage ne se doutât ni de ce qu'il était, ni surtout des liaisons qu'il avait eues, et qui, dans un temps où chaque village avait son inquisition, n'auraient pas manqué de le faire dénoncer.

Cependant les misérables qui s'étaient emparés du pouvoir multipliaient leurs assassinats. M. Bosc, quand par hasard il sortait de sa retraite et jetait les yeux sur un Journal, y lisait chaque fois la perte de quelque ami. Sa douleur n'eut plus de bornes lorsqu'il apprit que madame Roland avait péri sur l'échafaud, et que son mari, à cette nouvelle, s'était donné la mort. Lui-même se jugea perdu un jour qu'il rencontra face à face, dans une promenade, Robespierre, à qui il entendit prononcer tout bas son nom. Mais ni la douleur ni le danger ne lui firent repousser les malheureux qui venaient encore le prier de leur donner asile. On frissonne quand on le voit cachant dans un petit grenier l'un des députés voués à l'échafaud, au moment même où le hasard amenait autour de la maison des agents occupés de la recherche des proscrits; lorsque n'ayant quelquefois à partager avec ce malheureux que des limaçons et des racines sauvages, ne pouvant lui offrir, quand il souffre, que les œufs d'une seule poule, cette poule est tuée un jour par un oiseau de proie. Aucun roman n'a rien de si déchirant; mais aucun roman non plus n'a rien de si merveilleux que lorsque le même député, sorti, après le 9 thermidor, de son étroite cachette, se voit, au bout de quelques mois, nommé le premier à ce Directoire, qui, bientôt tout-puissant au-dedans et au-dehors, fait trembler l'Allemagne, conquiert l'Italie, détrône le pape, le roi de Sardaigne et le roi de Naples, humilie le roi d'Espagne, et contraint l'Autriche à signer une paix qui agrandit la France d'un quart, et la laisse à peu près maîtresse du Midi de l'Europe.

On va être tenté de croire que M. Bosc sera porté à la fortune par l'homme qui, si récemment, lui avait dû la vie, et que voilà devenu l'un des maîtres de l'état. Il n'en fut rien. M. Bosc était trop fier pour se laisser faire du bien autrement qu'il ne l'entendait. On voulait lui rendre sa place aux postes; mais on voulait, en même temps, qu'il y devînt le collègue de ceux qu'il croyait les provocateurs de sa destitution : rien au monde n'aurait pu l'y faire consentir, et son grand protecteur n'eut pas le pouvoir d'obtenir qu'il en fût autrement. Toute la faveur qu'il lui put montrer fut de venir quelquefois se promener avec lui dans la petite maison qui leur avait servi d'asile.

Un chagrin plus vif se joignit à celui-là. La jeune personne qu'une mère mourante lui avait confiée lui fit éprouver un sentiment qu'elle ne partagea point, et rien ne put le calmer qu'un grand et long éloignement.

On lui avait promis de le nommer, à la première vacance, consul aux États-Unis. Son ami Michaux dirigeait dans la Caroline un jardin de naturalisation. Il était sûr qu'il en serait bien reçu, et il se décida à aller attendre sa promotion sur les lieux; mais bien des désagréments lui étaient encore réservés dans l'intervalle. Après s'être rendu à pied à Bordeaux, faute de moyens de voyager autrement, il s'était embarqué, le 18 août 1798, sur un vaisseau américain, qui, à peine sorti de la Garonne, fut visité par une frégate anglaise. M. Bosc se vit au moment d'être dépouillé de tout ce qui lui restait, s'il n'eût réussi à se donner au capitaine pour un colon de Saint-Domingue qui essayait d'aller sauver quelques débris de sa fortune. Arrivé à Charlestown, il apprit que M. Michaux l'avait croisé. Nommé successivement vice-consul à Wilmington (1), et consul à New-York (2), il ne put obtenir d'*exequatur* du président Adams, qui avait alors avec la France de graves discussions politiques. Du moins il toucha ses traitements, et, n'ayant aucune fonction à exercer, il s'établit dans le jardin de Michaux, et s'y livra tout entier à l'histoire naturelle.

On comprend quel soulagement ce dut être pour lui après tant de soucis, de dangers et de malheurs, de reprendre, loin des cabales et des intrigues, cette vie des bois que, dès sa première jeunesse, il avait tant aimée. Le matin, à la chasse, ou à la recherche des plantes et des insectes; le soir, occupé d'étudier et de préparer ce qu'il avait recueilli, il redevint plus naturaliste que jamais; et lorsque, dans l'été de l'année 1800, les brouilleries entre la France et les États-Unis en furent venues au point qu'il n'y eut plus de possibilité pour des agents français de demeurer en Amérique, il se vit en état d'apporter des matériaux à tous les naturalistes de l'Europe.

En effet, toujours également généreux, s'il avait des insectes nouveaux, c'était pour son ami Fabricius ou pour Olivier; des poissons, il les donnait à Lacépède; des oiseaux, à Daudin; des reptiles, à M. La Treille. Quiconque travaillait sur quelque branche que ce fût, de l'histoire naturelle, était sûr d'obtenir de M. Bosc tout ce qu'il possédait, d'en appren-

(1) 18 messidor an V, avec 5000 fr. d'appointements.

(2) 12 messidor an VI, avec 12,000 fr.

dre tout ce qu'il savait qui s'y rapportât. Ce ne fut qu'après avoir enrichi tant d'écrivains du fruit de ses travaux, qu'il se décida à en profiter pour lui-même.

Peu après son retour, était arrivée la fameuse révolution du 18 brumaire. Inconnu au nouvel arbitre des fortunes, ballotté encore de l'administration des postes à celle des hospices, et de celle-ci aux postes, voyant que la carrière des emplois politiques ou administratifs ne lui promettait pas, depuis son retour, une existence plus assurée qu'avant son départ, il renonça enfin à demeurer dans une dépendance si immédiate du pouvoir; et M. le comte Chaptal l'ayant chargé en 1803 de l'inspection des jardins et des pépinières de Versailles, il se consacra désormais tout entier à cultiver l'histoire naturelle, et à en appliquer les principes aux diverses branches de l'agriculture. Appelé successivement au Conseil d'agriculture, à la Section d'agriculture de l'Institut, au Jury de l'École d'Alfort, à l'inspection générale des pépinières, il mena une vie nouvelle, tout opposée à la première, toute de calme et de considération; et c'est aussi depuis lors seulement que ses ouvrages ont pris un caractère d'importance et de durée.

Avant son départ, il n'avait publié, comme nous l'avons vu, que des fragments, que des descriptions d'espèces isolées, et rédigées avec sécheresse. A peine l'histoire des coquilles et des vers qu'il donna, peu après son retour, dans le petit Buffon de Déterville, sort-elle de cette catégorie (1). Mais

(1) *Histoire naturelle des coquilles,* contenant leur description, les mœurs des animaux qui les habitent, et leurs usages, avec figures dessinées d'après nature, 5 vol. in-18, avec 94 pl., Paris, 1801, et la 2^{e} édition, 1824,

le Nouveau Dictionnaire d'histoire naturelle et le Cours complet d'Agriculture, publiés par le même libraire, et auxquels M. Bosc a eu la plus grande part, se présentent sous un autre jour.

C'est surtout dans le Dictionnaire d'Histoire naturelle que M. Bosc a placé les nombreuses observations qu'il avait faites dans ses courses et dans ses voyages (1).

Sur les reptiles, les poissons, les mollusques, les vers, le plus grand nombre des articles est de lui, et il en a donné une infinité sur la botanique : tous sont remarquables par leur précision, leur netteté, et beaucoup renferment des faits propres à l'auteur. C'est aussi de ses portefeuilles que sont tirées un grand nombre de figures relatives à ces parties de la science. Tout autre aurait mieux aimé employer ces riches matériaux pour un ouvrage qui n'eût pas été collectif; mais ici, comme en tout le reste, M. Bosc ne voyait que l'utilité, et ne songeait point aux intérêts de son amour-propre. C'est par la même raison qu'il mettait le Cours d'Agriculture (2) au-dessus de ses autres travaux. La 2e édition de ce recueil paraît surtout avoir excité tous ses efforts. « Il ne m'est pas

---

Histoire naturelle des vers et des crustacés, 5 vol. in-18, 1821, et la seconde édition, 1825.

(1) Nouveau Dictionnaire d'histoire nrturelle, appliquée aux arts, principalement à l'agriculture et à l'économie rurale et domestique, par une société de Naturalistes et d'Agriculteurs, 24 vol. in-8°, Paris, 1803 et 1804; 2e édit., 36 vol., *id.*, *id.* 1816-1819.

(2) Nouveau cours complet d'agriculture théorique et pratique, ou dictionnaire raisonné et universel d'Agriculture, par les membres de la section d'agriculture de l'Institut de France, 13 vol. in-8°, Paris, 1809; — 2e édit. 16 vol., *id.*, *id.*, 1821-1823.

« passé un livre sous les yeux, écrivait-il, lorsque cette édi-
« tion se préparait; je n'ai pas assisté à une séance de société;
« je n'ai pas fait un pas dans les jardins ou dans la campagne
« sans prendre des notes, et ces notes sont rédigées de ma-
« nière à être intercalées, en peu de jours, dans les articles
« qu'elles concernent. »

C'est avec la même conscience qu'il a constamment travaillé, soit à ses notes sur l'édition d'Olivier de Serre, donnée par la Société d'Agriculture, soit aux Mémoires qu'il a insérés dans les collections de cette Société (1), dont il était un des membres les plus actifs, soit dans les Annales de l'Agriculture française (2), dont il partageait la rédaction avec notre respectable confrère M. Tessier, soit enfin dans les Mémoires de l'Institut (3).

Une grande partie de son temps était employée, et toujours par le même sentiment d'utilité, à ses fonctions publiques, et il n'y mettait pas seulement son temps : toute la fermeté, la roideur même de son caractère n'y étaient pas de trop; car, du moment où l'on sort du cercle de la pure théorie, ce ne

(1) Observations sur les différences qu'il y a entre les marais proprement dits, et les terrains marécageux (Mémoires de la Société d'agriculture de Paris, tome XVII, p. 20, 1814).

Rapport sur une maladie des pommiers à cidre, *ibid.*, 1821, page 421.

(2) *Voyez* à la fin de cet Éloge les titres des Rapports, Mémoires, Notices et Extraits d'ouvrages insérés par M. Bosc dans ces Annales.

(3) Mémoire sur les différentes espèces de Chênes qui croissent en France, et sur ceux étrangers à l'empire, qui se cultivent dans les jardins et péninières des environs de Paris, etc. Lu à l'Institut, le 2 juin 1806 Mémoires *id.*, tome VIII, p. 307, vol. de 1807).

Notice agronomique sur les diverses espèces de Frênes qui se cultisont plus de simples erreurs qu'il faut combattre, mais des erreurs alliées à des passions. M. Bosc en fit l'expérience dans plus d'une occasion, et nous voyons dans ses Mémoires qu'il se plaint avec amertume d'avoir eu, pendant quelque temps, pour supérieur un homme d'un caractère indéfinissable, qui semblait se plaire à détruire à mesure, tout ce dont il le voyait occupé avec intérêt.

Ailleurs, du moins, et soutenu par un ministre éclairé, il obtint le pouvoir de faire quelque bien. Chacun a pu voir la belle collection qu'il avait formée, près du Luxembourg, de nos principales variétés de vignes. Le royaume en produit plus de 14,000 : les comparer, fixer leurs caractères, constater pour chacune d'elles les conditions de leur prospérité; propager alors de préférence les plus avantageuses, relativement à chaque sol, à chaque exposition, à chaque latitude, serait un travail de la plus haute importance et dont les conséquences pourraient être immenses pour notre richesse territoriale: M. Bosc l'avait entrepris. Déja, en trois années, il avait décrit ou fait représenter plus de 400 de ces variétés; mais il lui aurait fallu dix ans, et en France il est bien rare qu'un projet qui n'est qu'utile trouve dix ans de suite de l'appui dans l'administration supérieure. Il faudrait que le chef fût aussi instruit que son subordonné, ou qu'il eût la modestie de ne pas vouloir mettre du sien dans la direction, et lorsqu'il possède l'une ou l'autre de ces qualités déja si rares, il faudrait qu'il restât dix ans en place : chacun voit bien que la réunion de ces conditions est la chose impossible.

---

vent, en ce moment, dans les jardins et pépinières de Paris, lu à l'Institut, le 29 février 1808 (Mémoires, *id.*, tome IX, p. 195, vol. de 1808).

C'est dans les voyages qu'il faisait pour compléter son travail que M. Bosc a pris le germe de la maladie qui a abrégé ses jours; il les faisait toujours à pied comme dans sa jeunesse; surpris en 1824, dans le département du Var, par un violent orage, il fut saisi d'une fièvre qui, mal soignée, se convertit en affections chroniques, dont la mort seule devait le délivrer.

Cette triste perspective, sur laquelle il perdit promptement toute illusion, l'affligeait d'autant plus, que le désintéressement le plus constant ne lui avait rien laissé faire pour l'avenir de sa famille. Une occasion cependant se présenta d'ajouter quelque chose à son aisance pendant les années qu'il espérait encore pouvoir travailler pour elle. Ce fut la vacance de la chaire d'horticulture au Jardin-du-Roi, lors du décès de notre confrère M. Thouin. Aucun titre assurément ne manquait à M. Bosc pour y prétendre, et toutefois il n'obtint pas la pluralité des suffrages des corps qui avaient droit d'y présenter : non qu'il n'y fût généralement aimé et respecté; non qu'on ne lui reconnût au plus haut degré toutes les lumières et l'expérience nécessaires, mais parce qu'à son âge et avec des souffrances, qui déja étaient devenues très-vives, on n'en espérait plus l'activité qu'exigeait, plus que jamais. un établissement aussi vaste, et depuis trop long-temps conduit par un vieillard. L'autorité cependant l'y nomma par un procédé dont il n'y a eu qu'un autre exemple, et qui dut paraître alors d'autant plus extraordinaire, que l'on n'apercevait pas comment M. Bosc s'était attiré une telle faveur. Aussi n'en était-ce pas une. L'éloignement pour son concurrent l'avait servi plus que son mérite; et à peine avait-il pris possession de son nouvel emploi, que l'on s'empressa, en supprimant les pépinières, de lui apprendre que ce n'était ni pour l'enrichir, ni pour lui plaire, que l'on s'était écarté de tous les usages. Trompé ainsi dans un espoir si légitime, le chagrin qu'il en conçut donna plus d'activité au mal qui le rongeait : les douleurs les plus violentes l'accablèrent souvent, et, malgré toute son ardeur à remplir ses devoirs, il ne put faire les cours publics dont il était chargé. L'administration du jardin occupa seule tous les moments que ses maux lui laissèrent, et du moins, en cette partie, il fit de grands efforts et obtint de vrais succès. Ses souffrances, devenues intolérables, l'enlevèrent enfin le 10 juillet 1828, à l'âge de soixante-neuf ans.

Sans les chagrins et les accidents qui se combinèrent pour détruire sa santé, il aurait pu long-temps encore se rendre utile aux sciences et à son pays. La nature l'avait créé vigoureux; une stature robuste, une figure noble et calme annonçaient à-la-fois la force du corps et la pureté de l'ame. Étranger aux intrigues du monde, on pourrait dire qu'il l'a été quelquefois aux ménagements que la société réclame; mais toujours aussi il a été plus sévère encore pour lui-même que pour les autres. Sa probité inflexible, son dévouement entier à ses amis, un désintéressement poussé jusqu'à l'exagération, et qui, après tant de travaux et tant d'occasions légitimes d'améliorer sa fortune, ne laisse à sa famille d'autre ressource que la justice du gouvernement, ne marqueront pas moins sa place parmi les hommes que leur caractère désigne au respect de la postérité, que parmi ceux que leurs services désignent à sa reconnaissance.

M. Bosc avait épousé, en 1800, mademoiselle Susanne Bosc, sa cousine. Il laisse deux fils, dont un officier de marine, et l'autre docteur en médecine, et deux filles, mesdames Pilatre et Soubeiran. Sa place à l'Académie a été remplie par M. Flourens, et sa chaire au Jardin-du-Roi, par M. de Mirbel.

LISTE

DES ARTICLES INSÉRÉS PAR M. BOSC DANS LES ANNALES DE L'AGRICULTURE FRANÇAISE.

1807. Rapport sur le Mémoire de M. Féburier, relatif à la culture de l'Anémone.
(Fait à l'Institut, le 22 juin 1807.)
(1^{re} *Série.* — T. 30, p. 346.)

1810. Rapport sur l'Essai relatif aux abeilles; par M. Féburier.
(Institut, 22 janvier 1810.)
(T. 42, p. 30.)

1810. Rapport sur un Mémoire de M. Deslandes: *Observation sur les sols et terres de bruyères.*
(Soc. d'agricult., 19 sept. 1810.)
(T. 43, p. 348.)

1812. Rapport sur la dessiccation des Châtaignes. (*Id.*)
(T. 51, p. 257.)

1821. Rapport au Conseil d'agriculture sur l'Éducation des Oiseaux.
(2^e *Série.* — T. 15, p. 329.)

1823. Rapport à la Soc. d'agriculture (le 20 août 1823) sur une presse propre à retirer la mie des gâteaux de cire.
(T. 24, p. 129.)

1824. Rapport fait à l'Académie des sciences (en 1824) sur une notice de M. Dejean, relative à la conservation des blés dans des vaisseaux hermétiquement fermés. (In-8°.)
(T. 26, p. 262.)

1824. Rapport fait à la Société centrale d'agricult. sur l'emploi du muriate de chaux, ou chlorure de chaux en agriculture.
(T. 26, p. 327.)

1806. Notice sur la vie et les travaux de J. M. Cels.

(Lue à la Soc. d'agr. du dépt. de Seine-et-Oise, le 22 juin 1806.)

(1re *Série.* — T. 27, p. 356.)

1806. Notice sur le traité des Arbres et Arbustes qu'on cultive en France en pleine terre; par Duhamel.

(Lue à l'Institut, le 26 janv. 1807.)

(1re *Série.* — T. 28, p. 388.)

1807. Note sur le sucre du Rosage pontique *(Rhododendron ponticum)*.

(Lue à l'Institut.)

(T. 30, p. 418.)

1807. Mémoire sur l'utilité des Clôtures en général, et sur celle des haies vives en particulier.

(Lu à la Soc. d'agricult. de Versailles, en 1807.)

(T. 31, p. 24.)

1807. Exposition faite à la Soc. centrale d'agricult. de la Seine, du plan de travail adopté pour étudier et classer les diverses variétés de vignes cultivées dans les pépinières du Luxembourg.

(T. 32, p. 100.)

1808. Mémoire sur les différentes espèces de Chênes, etc.

(Lu en extrait à l'Institut, le 2 juin 1806.)

(T. 33, p. 183.)

1808. Note sur le Kermès, et instruction sur sa récolte. (Avec MM. Olivier et Tessier.)

(T. 34, p. 231.)

1808. Considérations sur le Plant, et sur les principes qui doivent guider ceux qui l'arrachent et le replantent.

(T. 35, p. 130.)

1808. Note sur les espèces de Magnoliers qui se voient en pleine terre dans les jardins des environs de Paris, et de leur culture.

(T. 35, p. 392.)

1812. Note sur le Lin de Sibérie.

(T. 51, p. 278.)

1812. Notice sur deux insectes du G. Cerceris, qui font la guerre aux charançons, les plus nuisibles aux arbres fruitiers.

(T. 51, p. 370.)

1813. Notice sur la Pirole et autres insectes qui nuisent aux vignobles.

(T. 53, p. 379.)

1814. Notice sur les Insectes qui dévorent les laines des matelas et des habits, les fourrures, les plumes, et autres objets d'économie domestique.

(T. 57, p. 232.)

1814. Observations sur les différences qu'il y a entre les marais proprement dits, et les terrains marécageux.

(1re *Série*. — T. 57, p. 364.)

1817. Quelques aperçus sur l'insecte, connu sous le nom de *Mouche hessoise*, et sur un insecte parasite qui s'en nourrit.

(T. 70, p. 277.)

1819. Note sur les moyens de rétablir en état d'être consommés par les personnes les plus difficiles, les beurres devenus rances.

(2e *Série*. — T. 7, p. 104.)

1820. Note sur un rouleau coupant.

(T. 9, p. 149.)

1821. Note sur un remède reconnu propre à la guérison des abeilles affectées de dysenterie.

(T. 16, p. 154.)

1823. Note sur les Bières économiques.

(T. 23, p. 285.)

1826. Note sur les deux modes de cultures propres à augmenter les produits de la Champagne craïeuse.

(Lues à la Soc. d'agricult., 1824.)

(T. 33, p. 60.)

1827. Notice sur l'Arracacha.

(T. 35, p. 42.)

1827. Note sur les moyens de nourrir les vers à soie avec d'autres feuilles que celles du mûrier blanc.

(T. 37, p. 208.)

EXTRAITS D'OUVRAGES.

1811.[1] Ext. du *Traité du Citrus;* par Georges Gallesio. (In-8°.)
(1re *Série.* — T. 45, p. 328.)

1811. Ext. de l'ouvrage de M. G. H. Walz (méd. vétérin.) : *De la gale des moutons, de sa nature, de ses causes, et des moyens de la guérir.* (In-8°, traduit de l'allemand.)
(T. 46, p. 227.)

1811. Ext. de l'ouvrage de M. Truchet, sur l'insecte du Kermès. (In-8°, 1811.)
(T. 46, p. 328.)

1811. Ext. de l'ouvrage de M. Carena (H.), sur les Réservoirs artificiels, etc.
(1re *Série.* — T. 47, p. 120.)

1811. Ext. de l'ouvrage de M. Lullin de Châteauvieux, intitulé : *Des associations rurales pour la fabrication du lait, connues en Suisse sous le nom de* Fruitières. (In-8°.)
(T. 48, p. 122.)

1811. Ext. de l'ouvrage de M. Sarrazin : *Traité élémentaire de la culture du tabac en France.* (In-8°.)
(T. 48, p. 246.)

1812. Ext. de l'ouvrage de M. de Barbançois, intitulé : *Petit traité sur la partie la plus importante de l'agriculture en France.* (In-8°.)
(T. 50, p. 311.)

1813. Ext. du *Traité du Pastel et de l'indigo;* par Giobert. (2 vol. in-8°).
(T. 54, p. 202.)

1814. Ext. des nouvelles observations de M. F. Huber, sur les abeilles. (2 vol. in-8°.)
(T. 59, p. 241.)

1814. Ext. des *Principes pratiques sur l'éducation, la taille et l'ébourgeonnement des arbres fruitiers;* par J. Mozard. (In-8°.)
(T. 59, p. 232.)

---

(1) C'est à compter du mois de janvier 1811 que M. Bosc a partagé avec M. Tessier la direction principale du Journal.

1815. Ext. du Mémoire de M. Quenin, sur les Prairies Artificielles. (Couronné à Aix.)

(T. 62, p. 342.)

1815. Ext. du Mémoire de M. Pajot Descharmes, sur la culture de la Betterave à sucre.

(T. 63, p. 102.)

1815. Ext. d'un Mémoire sur les fonds ruraux du dépt. de l'Escaut; par M. de Lichtervelde. (1 vol. in-8°.)

(T. 64, p. 214.)

1816. Analyse de la partie agricole du *Journal des maires et des habitants des campagnes.*

(T. 65, p. 112 et 205;
66, p. 116;
68, p. 266 et 387.)

1817. Ext. de l'*Essai sur l'amélioration des principaux animaux domestiques du département de la Charente-Inférieure;* par M. Chambert. (2 vol. in-8°.)

(T. 69, p. 57.)

1817. Ext. de la *Topographie de tous les vignobles connus;* par M. A. Jullien. (In-8°.)

(T. 70, p. 31.)

1818. Ext. de l'ouvrage de M. L. Reynier : *De l'Economie publique et rurale des Celtes, des Germains, et autres peuples du Nord et du centre de l'Europe.* (In-8°.)

(2e *Série.* — T. 2, p. 380.)

1818. Ext. de la *Description du département de la Vendée, et considérations sur la guerre civile de* 1793 à 1797; par M. Cavoleau. (In-8°, 1818.)

(T. 3, p. 364.)

1819. Ext. de l'ouvrage de M. Trouvé : *Statistique du département de l'Aude.* (In-4°.)

(T. 6, p. 384.)

1821. Ext. du Rapport des travaux de la Société d'agriculture, d'histoire naturelle, et arts utiles de Lyon, en 1820; par M. Grognier. (In-8°.)

(T. 12, p. 112 et 218.)

1822. Ext. des *Principes sur la culture de la vigne en cordons, sur la conduites des treilles, et la manière de faire le vin* (Anonyme). In-8°.

(T. 19, p. 118.)

1822. Ext. de l'ouvrage de M. d'Harcourt : *Reflexions sur l'état agricole et commercial des provinees centrales de France.* (In-8°.)

(T. 19, p. 260.)

1822. Ext. de l'ouvrage intitulé : *De la disette et de la surabondance en France, et avec un Mémoire sur les réserves à domicile*; par M. Labonlinière. (In-8°.)

(T. 19, p. 388.)

1823. Ext. de l'ouvrage de M. Chaptal : *De la Chimie appliquée à l'agriculture.* (2 vol in-8°.)

(T. 23, p. 299.)

1824. Ext. de l'ouvrage intitulé : *Nouveau traité sur la laine et sur les moutons;* par MM. Perrault de Jatemps, Fabry et F. Girod de l'Ain. (In-8°.)

(T. 26, p. 345.)

1824. Ext. de l'ouvrage de M. Guyetant (couronné par la Soc. d'émulation du Jura, 14 juin 1822, et intitulé : *Essai sur l'état actuel de l'agriculture dans le Jura.* (In-8°.)

(T. 26, p. 362.)

1826. Ext. de l'ouvrage de M. Delamarre, intitulé : *Traité pratique de l'Agriculture des Pins à grandes dimensions, de leur aménagement, de leur exploitation, et des divers emplois de leur bois* (In-8°.)

(T. 33, p. 288.)

1827. Ext. de l'ouvrage de M. Puvis, ayant pour titre : *Essai sur la Marne.* (In-8°.)

(2[e] *Série.* — T. 35, p. 111.)

1828 Ext. du Mémoire de M. Gasparin, (lu à la Société centrale d'Agriculture de Paris, le 2 novembre 1825) : *Des effets du climat sur les assolements, considérés dans la région des oliviers.* (In-8°.)

(T. 38, p. 97.)

1828. Ext. du Mémoire de M. Théodore de Saussure (communiqué à la Société d'histoire naturelle de Genève, le 17 mars 1825): *De l'influence du dessèchement sur la germination de plusieurs graines alimantaires.* (In-8°.)

(T. 38, p. 108.)

1828. Ext. du *Cours de culture et de naturalisation des végétaux;* par A. Thouin, publié par son neveu Oscar Leclerc. (3 vol. in-8°, 1827.)

(T. 38, p. 379.)

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

QUATRIÈME MÉMOIRE

SUR

Les canaux de navigation considérés sous le rapport de la chute et de la distribution de leurs écluses.

PAR M. P. S. GIRARD.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 13 février 1826.

(1) APRÈS avoir développé, dans nos trois Mémoires précédents, les divers avantages que l'on trouve à réduire la chute des écluses pour obtenir tout à la fois l'économie de l'eau nécessaire à l'entretien de la navigation, et l'économie d'argent dans la dépense de construction des ouvrages, nous allons, dans celui-ci, considérer les écluses mises dans leur état

d'activité, et chercher comment la durée de leurs manœuvres peut modifier les avantages que nous venons d'indiquer.

(2) Jusqu'à présent les écluses des canaux de navigation ne paraissent pas avoir été envisagées sous leur véritable point de vue. Elles ne doivent pas être des monuments d'architecture hydraulique, mais de simples appareils au moyen desquels, à l'aide d'un certain volume d'eau qui tombe d'une certaine hauteur, on fait monter ou descendre des poids déterminés, c'est-à-dire, des bateaux plus ou moins chargés. Rentrant ainsi dans la classe des machines les plus simples, on doit en établir la discussion en les considérant successivement dans leur état de repos et dans leur état de mouvement; c'est, comme on voit, sous ce dernier aspect qu'il nous reste à les examiner.

(3) Lorsque nous avons avancé qu'en réduisant la chute des écluses, on pouvait obtenir, sur la dépense d'eau des canaux de navigation, une économie plus grande qu'on ne l'avait pensé jusqu'alors, on objecta que, par cette réduction de chute, le nombre de ces ouvrages sur une longueur donnée de canal pouvait devenir tel que l'accroissement de dépenses en argent résultant de leur construction, l'emporterait sur l'économie d'eau qu'on obtiendrait par la réduction de chute dont il s'agit.

(4) Quoique l'économie de l'eau soit toujours la plus importante de celles qu'on doit avoir en vue, quand on entreprend un canal de navigation, puisque la possibilité ou l'impossibilité de l'exécuter avec succès dépend du volume d'eau disponible pour son entretien ; cependant, sans égard à cette considération, nous avons recherché, dans notre troisième Mémoire, les rapports théoriques qui existent entre la dé-

pense de construction des écluses, et leur nombre sur une partie de canal dont les extrémités sont données, et nous sommes parvenus à démontrer, 1° que les chutes d'écluses demeurant telles qu'on est dans l'usage de les établir, la dépense de leur construction s'accroît plus rapidement que leur nombre n'augmente: 2° qu'il est toujours possible de racheter une pente déterminée, par des écluses de chute différente, dont la dépense de construction soit la même. Ce dernier théorème, d'une application facile à la pratique, lève toutes les objections que l'on fondait sur la prétendue augmentation de dépense de ces ouvrages résultant de l'augmentation de leur nombre entre deux extrémités fixes.

(5) Reste l'objection fondée sur la dépense du temps employé à parcourir un certain développement de canal. Dépense qui s'accroît à mesure que la chute de ses écluses devient moindre, de telle sorte, a-t-on dit, que la perte de temps qu'exigeraient des passages d'écluses trop multipliés, sur un espace donné, ne serait pas compensée par l'économie d'eau et d'argent que l'on pourrait obtenir dans la manœuvre ordinaire d'écluses à petites chutes, et dans les premiers frais de leur établissement.

(6) La recherche de l'expression rigoureuse du temps dont il s'agit, va réduire cette dernière objection à sa juste valeur.

Supposant d'abord le cas le plus simple, celui d'un seul bateau qui monte ou qui descend une portion de canal dont les écluses sont isolées, nous observerons que, soit qu'il monte ou qu'il descende, on aperçoit toujours le bateau d'assez loin pour, qu'avant son arrivée à l'écluse qu'il doit franchir, on ait le temps de remplir ou de vuider le sas de cette écluse, de sorte que la durée totale du trajet se compose, 1° du temps employé à parcourir le développement entier des biefs du canal; 2° du temps employé à en remplir ou en évacuer successivement tous les sas, quand le bateau y a été introduit.

Cela posé :

Faisons le développement de la partie donnée de canal . $=l$
Sa pente totale . . . . $=a$
La chute de chacune de ses écluses . . . . $=x$
Leur nombre . . . . $=n$
La longueur d'un sas . . . . $=\mathrm{L}$
Sa superficie . . . . $=\mathrm{S}$
Celle de l'orifice par lequel on introduit l'eau du sas dans le bief inférieur et du bief supérieur dans le sas . $=\mathrm{O}$
La gravité . . . . $=g$
Le temps employé pour parcourir successivement tous les biefs . . . . $=\tau'$
Le temps employé pour remplir ou pour vuider successivement tous les sas . . . . $=\tau''$
L'espace parcouru dans les biefs pendant l'unité de temps . . . . $=i$
Enfin la durée entière du trajet . . . . $=\tau$

Nous avons d'abord :

$$i : 1 :: l : \tau' = \frac{l}{i}.$$

En second lieu, le temps du remplissage ou de l'évacuation d'un sas, étant comme on sait, par les lois de l'hydraulique,

$$\frac{2S\sqrt{x}}{O\sqrt{2}}\ (1),$$

nous aurons :

$$\tau'' = \frac{2Sn\sqrt{x}}{O\sqrt{2g}},$$

ou bien à cause de $nx = a$;

$$\tau'' = \frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}};$$

donc

$$\tau' + \tau'' = \tau = \frac{l}{i} + \frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}}.$$

(7) Prenons pour exemple d'une application de cette formule, le canal de Soissons, destiné à joindre le canal de l'Ourcq à celui de St.-Quentin, entre le port aux Perches, sur l'Ourcq, et Manicamp sur la rivière d'Oise.

Suivant le projet que nous en avons rédigé (2).

$l = 60163$ mètres.
$a = 123^{m},575$.
$M = 100$.
$L = 34$.
$S = 88^{m},40$.
$O = 0^{m},25$.
$g = 9,808795$.

Supposons de plus, que le halage soit fait par des hommes, ou des chevaux, et que le bateau parcoure 2000^{m} par heure

---

(1) Architecture hydraulique de Prony, tome I, page 338.

(2) Mémoire sur le canal de Soissons, 1824.

la seconde étant prise pour unité de temps, on a

$$i = \frac{2000^{m}}{3600} = 0^{m},555.$$

La substitution de ces valeurs numériques, dans l'expression générale de τ, la change en celle-ci :

$$\tau = \frac{60163^{m}}{0,555} + \frac{176,8\sqrt{12357,5}}{0,25\sqrt{19,618}} = 123683'' = 34 \text{ heures } 41 \text{ min.}$$

(8) Si, au lieu de supposer aux écluses du canal de Soissons $1^{m},235$ de chute, on leur en supposait $3^{m},745$, on aurait $n = 33$. et la valeur de τ deviendrait

$$\tau = \frac{60163^{m}}{0,1555} + \frac{176,8\sqrt{4077,8}}{0,25\sqrt{19,618}} = 117224'' = 32 \text{ heures } 33 \text{ min.}$$

Ainsi, il n'y aurait qu'une différence de 2 heures 9 minutes dans le trajet d'un canal de 60,163 mètres de développement, et de $123^{m},57$ de chute totale, en supposant cette chute rachetée ou par 100 écluses de $1^{m},235$, ou seulement par 33 écluses de $3^{m},745$.

(9) Mais une considération importante, rend beaucoup moindre encore la différence que nous venons de trouver dans la durée du trajet du canal de Soissons, que nous avons pris pour exemple, suivant que l'on donnerait à ses écluses de grandes ou de petites chutes.

(10) Il arrive en effet presque toujours que, pour ouvrir les portes d'un sas dont un bateau doit sortir, on n'attend pas que la surface de l'eau se soit mise parfaitement de niveau en amont et en aval de ces portes, car une dénivellation de 3 à 4 centimètres ne présente qu'un très-léger obstacle à leur

ouverture, tandis que le temps nécessaire pour faire disparaître entièrement cette dénivellation, est toujours plus long que le temps nécessaire pour faire sortir entièrement le bateau du sas.

L'expression de τ, trouvée ci-dessus, peut donc être diminuée au moins du temps nécessaire pour parcourir tous les sas du canal, comme s'ils faisaient partie des biefs. On aura par conséquent

$$\tau = \frac{l}{i} + \frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}} - \frac{nL}{i}.$$

Pour le canal de Soissons L = 34^{m}, et en supposant 100 écluses de $1^{m},235$ de chute, on a

$$\tau = \frac{60163^{m}}{0,555} + \frac{176,8\sqrt{1235,5}}{0,25\sqrt{19,618}} - \frac{3400}{0,555} = 119894'' = 33 \text{ heur. } 18 \text{ min.}$$

Tandis que, dans l'hypothèse de 33 écluses de $3^{m},745$ de chute chacune, on a :

$$\tau = \frac{60163^{m}}{0,555} + \frac{176,8\sqrt{4077,8}}{0,25\sqrt{19,618}} - \frac{1122}{0,555} = 116865'' = 32 \text{ heur. } 34 \text{ min.}$$

En calculant ainsi la durée du trajet du canal de Soissons, on voit qu'il n'y aurait que 44 minutes de différence dans cette durée, en supposant la pente de ce canal rachetée, soit par 100 écluses de $1^{m},235$ de chute chacune, soit par 33 écluses de $3^{m},745$.

(11) Cet exemple, dans lequel nous avons regardé les écluses d'un canal de navigation comme isolées les unes des autres, suffit pour montrer, 1° que le temps employé à les traverser, n'est ordinairement qu'une faible partie de celui qui est employé à parcourir les biefs de ce canal. 2° Que dans

celui pris pour exemple, le retard occasionné dans le trajet, lorsqu'on réduit au tiers la chute de ces écluses, ou ce qui revient au même, lorsqu'on triple leur nombre, n'est guère que la 48e partie environ de la durée totale de ce trajet.

(12) Nous n'avons eu besoin, pour assigner le temps du remplissage ou de l'évacuation d'une écluse isolée, que d'appliquer à cette recherche une des formules les plus simples de l'hydrodynamique. La question se complique lorsqu'il s'agit d'assigner la durée du remplissage ou de l'évacuation des sas contigus d'une écluse multiple qui ont été mis simultanément en communication les uns avec les autres. Mais cette question ne se présentera pas dans l'usage ordinaire, attendu que le corps d'écluses qu'un bateau doit remonter ou descendre, peut toujours être chargé ou déchargé d'eau assez à temps pour que ce bateau soit introduit dans les sas inférieur ou supérieur, au moment même où il arrive au pied ou au sommet de cette écluse multiple.

(13) Supposons donc que pour préparer l'ascension d'un bateau, le nombre $n-2$ des sas d'une écluse multiple compris entre le premier et le dernier, aient été préalablement remplis au-dessus de leur profondeur ordinaire, d'un prisme d'eau que l'on désigne sous le nom de *prisme de remplissage*, la hauteur de ce prisme sera égale à la chute commune des écluses, et il est clair qu'immédiatement après l'introduction du bateau dans le sas inférieur E_n, l'eau se trouvera plus élevée dans le sas contigu E_{n-1} d'une quantité $= 2x$.

Le temps employé pour mettre l'eau de niveau dans les sas E_n et E_{n-1} (*voyez la figure*), sera donc représenté par :

$$\frac{S\sqrt{2x}}{O\sqrt{2g}} = \frac{S\sqrt{x}}{O\sqrt{g}} = \theta'.$$

Le temps employé pour mettre le sas E_{n-1} de niveau avec le sas E_{n-2} sera pareillement

$$\frac{S\sqrt{x}}{O\sqrt{g}}=\theta'.$$

Et ainsi du temps employé pour faire passer le bateau dans tous les sas, excepté pour le faire passer du sas E′ dans le bief supérieur B′, où le niveau reste constant: la durée du remplissage du sas supérieur E′ est alors, comme on sait, exprimée par:

$$\frac{2S\sqrt{x}}{O\sqrt{2g}}=\frac{S\sqrt{2}\sqrt{x}}{O\sqrt{g}}=\theta''.$$

La durée totale θ de l'ascension du bateau à travers l'écluse multiple sera donc;

$$\theta=\theta'(n-1)+\theta''=(n-1)\frac{S\sqrt{x}}{O\sqrt{g}}+\frac{S\sqrt{x}\sqrt{2}}{O\sqrt{g}}=\frac{S\sqrt{x}}{O\sqrt{g}}(n-1+\sqrt{2}).$$

(14) Tous les sas étant maintenant supposés évacués, on trouvera de même, pour la durée de la descente d'un bateau par la même écluse multiple:

$$\theta=\frac{S\sqrt{x}}{O\sqrt{g}}(n-1+\sqrt{2}),$$

ou bien à cause de $x=\frac{a}{n}$,

$$\theta=\frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{(n-1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}};$$

d'où l'on voit que le temps de la montée ou de la descente d'un seul bateau sera toujours d'autant plus grand que le nombre n des sas de l'écluse multiple sera lui-même plus considérable.

(15) Il n'en est pas toujours ainsi lorsque les bateaux cheminent en convoi. En effet, dès que le premier bateau d'un convoi ascendant (*fig.* 1ere) sera passé dans le 3e sas E_{n-2}, à partir du bief inférieur, le 2e sas E_{n-1} d'où il sort se trouvera rempli de l'eau du sas E_{n-2}, qui vient d'y être versée, et le sas E_n pourra se trouver évacué.

On y fera alors entrer le 2e bateau du convoi, qui passera à son tour dans le sas E_{n-2}. Alors le troisième bateau du convoi entrera dans E_n, et continuera de cheminer comme les précédents, de sorte que pendant l'ascension du convoi, l'écluse multiple contiendra au même instant un certain nombre de bateaux séparés les uns des autres par un seul sas.

Le temps employé par le premier bateau à passer du bief inférieur B″ dans le bief supérieur B′, sera, comme on vient de le trouver:

$$'\theta = \frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{(n-1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}},$$

Mais pendant ce temps-là, le 2e bateau a lui-même franchi tous les sas de l'écluse jusqu'au sas $E_{''}$, dans lequel il entre au moment même où le premier bateau est introduit dans le bief supérieur; par conséquent il ne faut plus à ce second bateau, pour passer dans ce bief, qu'un temps exprimé par:

$$''\theta = \frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}}.$$

lequel est toujours d'autant moindre, que le nombre des sas de l'écluse multiple est plus grand.

(16) Il est évident que, pendant la montée de ces deux premiers bateaux du convoi, le troisième arrivera au sas $E_{''}$, et pour qu'il entre dans le bief supérieur B′, il ne faudra plus

qu'un temps

$$'''\theta = \frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}}.$$

On trouvera de même pour le temps employé par le 4e bateau à passer du sas $E_{,,}$ dans le bief supérieur

$$^{\text{IV}}\theta = \frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}},$$

et ainsi de suite jusqu'au dernier bateau du convoi; de sorte qu'en désignant par $^{N}\theta_n$ le temps qu'un convoi composé d'un nombre N de bateaux emploie à traverser une écluse multiple d'un nombre n de sas, on aura :

$$^{N}\theta_n = '\theta + ''\theta + ''' + {}^{\text{IV}}\theta + \ldots\ldots {}^{N}\theta$$
$$= \frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{(n-1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}} + (N-1)\frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}} = \frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{(n-2+N\sqrt{2})}{\sqrt{n}}.$$

Les trois quantités θ, n et N sont, comme on voit, fonctions l'une des deux autres, de sorte qu'elles peuvent être considérées comme les coordonnées d'une surface courbe, dont l'équation sera, en faisant pour abréger

$$\frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} = A$$

$$^{N}\theta_n = A\frac{[n-2+N(1+\sqrt{2})]}{\sqrt{n}}.$$

Si l'on suppose le temps $^{N}\theta_n$ constant et $\frac{^{N}\theta_n}{A} = B$, on aura

$$B = \frac{n-2+N(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}},$$

équation de la projection sur le plan des coordonnées n, N, de l'intersection de la surface qu'on aura construite, par un plan parallèle à celui de ces coordonnées d'où l'on tire, toutes réductions faites :

$$n = \left[2 + \frac{B^2}{2}N - (\sqrt{2}+1)\right] \pm B\sqrt{\frac{B^2}{4} + 2 - N(1+\sqrt{2})},$$

laquelle appartient à une parabole; ce qui montre qu'un convoi d'un nombre déterminé N de bateaux pourra franchir dans le même temps une écluse multiple dont la chute totale est donnée, soit que dans l'expression du nombre variable n des sas de cette écluse, on affecte du signe + ou du signe — la quantité radicale qui entre dans cette expression. Ainsi l'on peut toujours satisfaire à la question par deux hypothèses différentes de distributions de chute.

(18) Suppsons maintenant que la même chute d'une écluse multiple soit répartie en un nombre n' de sas calculés, on aura pour le temps du passage ${}^{N'}\theta_{n'}$ d'un nombre n de bateaux à travers cette écluse.

$$\frac{{}^{N'}\theta_{n'}}{A} = \frac{n' - 2 + N'(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n'}}.$$

Si l'on suppose égaux entre eux les temps ${}^{N}\theta_{n}$ et ${}^{N'}\theta_{n'}$ de la traversée des deux écluses multiples de même chute totale, on aura :

$$\frac{n - 2 + N(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}} = \frac{n' - 2 + N'(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n'}},$$

équation qui exprime le rapport qu'ont entre elles les quatre quantités N, N', n, et n'; on en tire

$$N' = \frac{\sqrt{n'}}{\sqrt{n}}N + \frac{[\sqrt{n'}(n-2) - \sqrt{n}(n'-2)]}{\sqrt{n}(1+\sqrt{2})}.$$

Si l'on suppose N' = N, on trouve :

$$N = \frac{\sqrt{n'n}+2}{1+\sqrt{2}},$$

expression très-simple du nombre de bateaux qui traverseraient dans le même temps deux écluses multiples, dont la même chute totale *a* serait rachetée par des nombres différents *n* et *n'* de sas accolés.

(19) Pour faire une application de ces formules à un cas qui soit généralement connu, cherchons de quel nombre de bateaux devrait être formé un convoi ascendant pour traverser dans le même temps 24 écluses accollées qui seraient substitués aux sept sas actuels de l'écluse de Rogny sur le canal de Briare, lesquels rachètent comme on sait une pente totale de $23^m,253$.

Nous avons ici $n' = 24$, et $n = 7$, et ces valeurs substituées dans l'expression

$$N = \frac{\sqrt{nn'}+2}{1+\sqrt{2}},$$

donnent

$$N = 6,197.$$

C'est-à-dire qu'un convoi de six bateaux traversera les deux écluses multiples de 7 et de 24 sas accollés à très-peu près dans le même temps.

(20) Supposons, en second lieu, qu'un convoi de 25 bateaux traverse les écluses actuelles de Rogny dans un temps donné, et cherchons de quel nombre de bateaux serait composé un convoi qui traverserait, dans le même temps, les 24 sas qui rachèteraient la même chute totale.

Nous aurons comme ci-dessus :

$$n = 7 \text{ et } n' = 24,$$

Et de plus $N = 25$.

Ces valeurs étant substituées dans la formule

$$N' = N\frac{\sqrt{n'}}{\sqrt{n}} + \frac{[\sqrt{n'}(n-2) - \sqrt{n}(n-2)]}{\sqrt{n}(1+\sqrt{2})},$$

on en tire $N = 41$ bateaux.

Il serait superflu de pousser plus loin les applications que nous pourrions faire des formules auxquelles nous sommes parvenus.

Il nous suffira de remarquer que le temps de la descente d'un convoi de bateaux par une écluse multiple, est précisément le même que le temps de la montée du même convoi par la même écluse; ainsi ce qui vient d'être dit s'applique également à la traversée de cette écluse dans l'un ou l'autre sens.

(21) Nous allons maintenant comparer le temps de la traversée d'un certain nombre d'écluses simples, au temps de la traversée d'une écluse multiple qui rachèterait la même pente par un même nombre de sas accollés.

On a trouvé précédemment que le temps nécessaire à la montée d'un bateau, par une écluse simple, était exprimé par

$$\frac{2S\sqrt{x}}{O\sqrt{2g}}.$$

Lorsqu'un second bateau doit monter à la suite du premier, il faut d'abord évacuer le sas, et cette partie de la manœuvre exige un temps égal $\frac{2S\sqrt{x}}{O\sqrt{2g}}$.

Le second bateau étant introduit et enfermé dans le sas, il faut remplir celui-ci de nouveau pour faire passer ce bateau dans le bief supérieur, et cette dernière partie de la manœuvre exige encore le même temps $\frac{2S\sqrt{x}}{O\sqrt{2g}}$.

La durée totale du temps employé pour opérer la montée du second bateau sera donc

$$\frac{2(2S\sqrt{x})}{O\sqrt{2g}}.$$

Le 3^e^, le 4^e^ et généralement tous les bateaux dont un convoi ascendant sera composé, exigeront précisément le même temps; ainsi le nombre des bateaux de ce convoi étant toujours représenté par N, la durée de son passage par une écluse simple sera exprimé par :

$$[2(N-1)+1]\frac{(2S\sqrt{x})}{O\sqrt{2g}}.$$

Il faudra le même temps au même convoi pour passer une seconde écluse simple de même chute, de sorte que si, pour racheter la pente totale a d'une portion de canal comprise entre deux points fixes, il faut le nombre n d'écluses isolées, le temps τ'' nécessaire pour les franchir sera :

$$\tau''=n[2(N-1)+1]\frac{(2S\sqrt{x})}{O\sqrt{2g}}.$$

ou bien à cause de $x=\frac{a}{n}$

$$\tau''=\sqrt{2n}(2N-1)\frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}.$$

Mais on a vu (16) que le temps employé par le même convoi pour traverser une écluse multiple qui rachèterait la même pente totale a, au moyen du même nombre n de sas accollés, a pour expression :

$$^{N}\theta_n=\frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[n-2+N(1+\sqrt{2})]}{\sqrt{n}},$$

on a donc cette proportion :

$$\tau'' : {}^{\mathrm{N}}\theta_n :: \sqrt{2n}(2\mathrm{N}-1) : \frac{n-2+\mathrm{N}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{n}}$$
$$:: n\sqrt{2}(2\mathrm{N}-1) : n-2+\mathrm{N}(1+\sqrt{2}),$$

et l'on aura :

$$\tau'' > {}^{\mathrm{N}}\theta_n,$$

ou bien

$$\tau'' < {}^{\mathrm{N}}\theta_n,$$

suivant que l'on aura l'une ou l'autre de ces deux inégalités.

$$n\sqrt{2}(2\mathrm{N}-1) > n-2+\mathrm{N}(1+\sqrt{2}),$$
$$n\sqrt{2}(2\mathrm{N}-1) < n-2+\mathrm{N}(1+\sqrt{2}),$$

lesquelles reviennent à celles-ci :

$$\mathrm{N} > \frac{n(1+\sqrt{2})-2}{2n\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})}$$
$$\mathrm{N} < \frac{n(1+\sqrt{2})-2}{2n\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})}.$$

Or si l'on donne à n une valeur plus grande que l'unité, c'est-à-dire, si l'écluse est composée de deux ou d'un plus grand nombre de sas, les seconds termes des inégalités précédentes deviennent des quantités fractionnaires.

D'un autre côté, quel que soit le nombre de bateaux formant le convoi, ce nombre sera toujours un nombre entier, on aura donc toujours, sauf le cas particulier de $n=\mathrm{N}=1$,

$$\mathrm{N} > \frac{n(1+\sqrt{2})-2}{2n\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})},$$

Et par conséquent

$$\tau'' > {}^{\mathrm{N}}\theta_n.$$

C'est-à-dire, qu'un convoi formé d'un nombre quelconque de bateaux emploiera toujours plus de temps à traverser successivement un certain nombre d'écluses simples d'égale chute, qu'il n'en emploiera à traverser un corps d'écluse multiple qui rachèterait la même pente par un nombre de sas accollés égal à celui des écluses simples.

D'où il suit qu'en ayant seulement égard au temps employé à parcourir un canal de navigation, il convient, pour abréger la durée de ce trajet, de distribuer la pente de ce canal en écluses multiples, et d'y faire naviguer les bateaux en convois.

(22) Dans les recherches qui vont suivre sur le plus ou moins d'avantages que présentent les canaux de navigation, eu égard aux dépenses simultanées d'eau et de temps qu'occasionne, à raison de la chute de leurs écluses, le mouvement des bateaux qui y circulent, nous aurons besoin de connaître le volume d'eau dépensé pour l'ascension ou la descente, soit d'un seul bateau, soit d'un convoi de bateaux par une écluse multiple. Il nous reste à nous occuper de cette détermination avant d'aller plus loin, car il n'a été question dans notre premier Mémoire que de la dépense d'eau par des écluses simples.

Ne considérons d'abord qu'un seul bateau, montant ou descendant à travers une écluse multiple dont les sas $E_{,}$ $E_{,,}$, $E_{,,,}$.... E_{n} ont des chutes égales. (*Fig.* 1 et 2.)

L'eau est à son niveau naturel dans les sas lorsque sa hauteur y est égale à la profondeur d'eau du canal, c'est-à-dire au plus grand tirant d'eau des bateaux qui le fréquentent; chacun des sas contient alors un prisme d'eau que l'on désigne sous le nom de *prisme de flottaison*.

Dans cet état, il est évident que la différence de niveau de l'eau d'un sas à l'autre est égale à la chute x des écluses ; il est également évident que cette différence de niveau restera la même si l'on verse dans chacun des sas un prisme d'eau de même hauteur.

Supposant cette hauteur du *prisme de remplissage* $= x$, il est évident qne la différence de niveau des sas inférieurs E_n et E_{n-1} sera $= 2x$, tandis que les différences de niveau de toutes les autres compris depuis E_{n-1} jusqu'à $E_{,,}$ inclusivement, sera seulement $= x$.

Le bateau montant étant enfermé dans le sas inférieur E_n, on y verse le *prisme de remplissage* du sas E_{n-1}, ce qui établit le niveau entre l'eau de ces deux sas, et permet l'entrée du bateau dans celui-ci.

L'eau s'y trouve déprimée d'une hauteur $2x$ au-dessous de l'eau du sas E_{n-2}.

Le bateau étant enfermé dans le sas E_{n-1}, on en élève le niveau de la hauteur x en y versant le *prisme de remplissage* du sas E_{n-2} où le bateau est introduit aussitôt après ; et ainsi de suite en faisant passer successivement le *prisme de remplissage* d'un sas quelconque du corps d'écluses dans le sas inférieur contigu.

Lorsque le bateau est entré dans le bief supérieur B', tous les sas depuis E_n jusqu'à $E_,$ inclusivement, contiennent un *prisme de remplissage*, et la somme de ces prismes augmentée du volume d'eau que le bateau déplace représente l'eau fournie par le bief supérieur pour opérer l'ascension de ce bateau, cette dépense du bief supérieur est donc exprimée par $S(nx + t_,)$ en représentant par $t_,$, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le tirant d'eau du bateau montant.

On pourrait, laissant les choses dans cet état, procéder à la descente d'un bateau, mais il faudrait que les sas déja *chargés* eussent été rendus capables, par l'exhaussement de leurs murs, de contenir le nouveau volume d'eau qu'on y verserait; or après ces versements, les nouveaux prismes de remplissage des sas $E_{\prime} E_{\prime\prime} E_{\prime\prime\prime} E_{\text{IV}} \ldots E_n$ se trouveraient, comme il est aisé de s'en assurer,

$$\tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{3}{4}x,\ \tfrac{7}{8}x,\ \tfrac{15}{16}x \ldots\ldots \frac{(2^n-1)x}{2^n}.$$

Et l'on conçoit que la dépense et les autres inconvénients qui résulteraient de l'exhaussement des murs de sas pourraient bien n'être pas compensés par l'économie d'eau que l'on se procurerait au moyen de cet exhaussement.

Il est donc plus convenable pour faire descendre un bateau de décharger tous les sas, à l'exception du premier, de leur prisme de remplissage. Ainsi, par l'effet de cette manœuvre, en quelque sorte intermédiaire, il passera du corps d'écluse dans le bief inférieur un volume d'eau exprimé par;

$$S[(n-1)x],$$

et tous les sas depuis E_n jusqu'à $E_{\prime\prime}$ inclusivement, ne contiendront plus que leurs *prismes de flottaison.*

Le premier sas $E_{\prime}$ contiendra un prisme d'eau exprimé par

$$S(x+t_{\prime\prime}).$$

Le bateau descendant au moment où il y sera introduit, en fera sortir son *prisme de flottaison* $St_{\prime\prime}$, il y restera par conséquent $S(x+t_{\prime}-t_{\prime\prime})$, *prisme de remplissage* que l'on fera passer successivement dans tous les sas afin d'y recevoir successivement le bateau descendant jusqu'au bief inférieur $B_{\prime\prime}$.

Ce bief après le double passage aura donc reçu

$$S[(n-1)x+x+t_{\prime}-t_{\prime\prime}]=S(nx+t_{\prime}-t_{\prime\prime}),$$

volume d'eau précisément égal à celui qui aura été dépensé par le bief supérieur

(23) Tant que nx demeure une quantité constante, on voit que la dépense d'eau est la même pour le double passage d'un bateau montant et descendant, quels que soient le nombre et la chute des écluses accollées, il n'en sera pas ainsi lorsque les bateaux chemineront en convoi.

En effet, supposons un nombre N de bateaux montants (*fig.* 1[re]); il faudra d'abord tirer du bief supérieur B le volume d'eau nécessaire pour remplir tous les sas excepté le dernier E_n, ce volume est évidemment

$$(n-1)Sx,$$

pour faire passer successivement tous les bateaux du convoi montant N du sas supérieur $E_{\prime}$ dans le bief B′ contigu, il faudra tirer de ce bief un volume d'eau représenté par

$$NS(x+t_{\prime}).$$

La dépense du bief supérieur pour l'ascension du convoi sera par conséquent

$$Sx(n-1)+NS(x+t_{\prime}),$$

Il restera à opérer la descente du convoi que nous supposerons généralement composé du nombre de bateaux N′ (*fig.* 2[e]); à cet effet, on évacuera tous les sas, excepté le sas supérieur $E_{\prime}$

ce qui n'occasionera aucune nouvelle dépense d'eau dans le bief contigu.

Le premier bateau du convoi descendant trouvera le sas $E_{,}$ rempli au niveau du bief supérieur, et en y entrant il y fera refluer un volume d'eau $St_{,,}$ qui est par conséquent à retrancher de la dépense d'eau déja faite.

Tous les autres bateaux descendants, au nombre de N—1, exigeront qu'il soit tiré du bief supérieur un volume d'eau représenté par :

$$(N'-1)S(x-t_{,,}).$$

La dépense totale du bief supérieur, pour le double passage du convoi montant et du convoi descendant, sera par conséquent :

$$\begin{aligned} Sx(n-1)+NS(x+t_{,})-St_{,,}+(N'-1)S(x-t_{,,}) \\ =Sx(n+N+N'-2)+S(Nt_{,}-N't_{,,}), \end{aligned}$$

ou bien en faisant $x=\frac{a}{n}$,

$$\frac{Sa}{n}(N+N'-2)+Sa-S(N't_{,,}-Nt_{,})=Sy.$$

Expression qui, toutes choses égales d'ailleurs, sera toujours d'autant moindre, que le nombre n des sas sera plus grand, ou que la chute des écluses sera plus petite.

(24) Si l'on fait

$$n=1 \text{ et } N=N',\ N't_{,}=T'' \text{ et } Nt_{,}=T',$$

on aura :

$$Sy=Sa(2N-1)-(T''-T')S$$

pour la dépense d'eau occasionée par le double passage à travers une écluse simple, de deux convois composés d'un même nombre de bateaux.

Si, de plus, l'on suppose $N = 1$, on aura encore:

$$Sy = Sa - S(t_{\prime\prime} - t_{\prime})$$

pour la dépense du double passage d'un bateau montant et descendant à travers une écluse simple, résultats identiques avec ceux auxquels nous sommes déja parvenus dans notre premier Mémoire, en faisant les mêmes hypothèses.

(25) Maintenant que nous connaissons en fonction de la chute des écluses simples ou multiples, et en fonction du nombre de bateaux dont sont composés des convois montants et descendants, soit le temps employé par ces bateaux au passage de ces écluses, soit la quantité d'eau dépensée pour opérer ce passage, nous pourrons assigner l'avantage d'un système de distribution de chute sur un autre système pour un nombre donné de bateaux qui navigueraient isolément ou en convoi.

L'avantage dont il s'agit est évidemment exprimé par le rapport de l'effet utile à la dépense nécessaire pour le produire.

L'effet utile est le produit de la masse transportée, ou du chargement des bateaux qui forment le convoi, par le chemin qu'ils doivent parcourir.

Quant à la cause de cet effet, elle se compose évidemment d'une dépense d'eau et d'une dépense de temps, mais ces deux éléments d'une même cause n'étant point homogènes, il faut, pour les rendre comparables et les faire entrer dans l'expression de l'avantage cherché, les ramener à une mesure commune, c'est-à-dire les évaluer en argent.

(26) D'après quels principes la valeur de l'eau qui sert a entretenir la navigation sur un canal artificiel peut-elle être estimée? C'est une question que, jusqu'à présent, les ingénieurs ne se sont point occupés de résoudre. Cette valeur n'en est pas moins réelle et sa détermination n'en est pas moins importante.

Il faut admettre d'abord qu'un canal de navigation produit un certain revenu par les droits de péage qu'on y perçoit. Or ce revenu est évidemment la mesure palpable et l'expression numérique de l'utilité de l'entreprise.

On conçoit dès-lors comment le degré de cette utilité doit varier suivant les lieux, les temps, et une multitude de circonstances qu'il est impossible de prévoir et de classer.

(27) Mais si l'on ne peut en général assigner préalablement à son exécution jusqu'où s'étendra l'utilité d'un canal de navigation, il est du moins facile de fixer d'avance la limite à laquelle cette utilité doit commencer à se manifester.

En effet, il est évident que le revenu net d'un canal qui sera ouvert dans une certaine contrée devra être égal, quelques années après son établissement, au moins à l'intérêt des capitaux dont il aura exigé l'emploi. S'il en arrivait autrement, et que le revenu du canal restât inférieur à l'intérêt de ces capitaux, il est manifeste qu'on aurait pu faire un meilleur placement des fonds qu'on y aurait dépensés, et par conséquent le canal ne serait pas véritablement utile, en tant qu'il serait considéré sous le rapport de son produit immédiat.

Au surplus, quel que soit le revenu net d'un canal utile, il est évident que sa valeur vénale sera exactement représentée par le capital de ce revenu net.

(28) Mais un canal quelconque ne peut avoir d'existence comme moyen de communication par eau, qu'autant qu'il est entretenu par un volume d'eau suffisant.

Si donc on suppose que, par une cause quelconque, l'eau qui servait à entretenir ce canal vienne tout-à-coup à lui manquer, le revenu qu'on en retirait se trouvera anéanti, et il ne lui restera plus de valeur vénale que celle des terrains qu'il occupe et des matériaux de diverses natures qui sont entrés dans la construction de ses ouvrages. La valeur de l'eau, par laquelle il était alimenté, peut donc être rigoureusement exprimée par la différence qui existe entre le capital de son revenu net et le capital composé du prix actuel des terrains qu'il occupe, et du prix des matériaux provenant de la démolition de ses ouvrages, en supposant toutefois que ces terrains et ces matériaux puissent être vendus, pour recevoir une nouvelle destination.

(29) Faisons donc le capital du revenu net d'un canal de navigation. . . . . $= C$,

Le prix qu'on pourrait obtenir des terrains qu'il occupe, s'ils étaient mis en vente après l'assèchement du canal. . . . . $= P$,

Le prix des matériaux provenant de la démolition de ses ouvrages. . . . . $= M$;

Enfin le prix de l'eau. . . . . $= E$,

on aura :

$$C-(P+M)=E,$$

équation dans laquelle les quantités P et M sont constantes.

Si donc on regarde C et E comme variables, leur rapport sera exprimé par celui des coordonnées d'une ligne droite et l'on voit que la valeur de l'eau d'un canal de navigation s'accroît proportionnellement au capital de son revenu net.

Cette valeur est nulle lorsque

$$C-(P+M)=o;$$

ce qui n'exprime autre chose, sinon que dans cette hypothèse le capital C du revenu net n'est plus que la valeur intrinsèque d'une certaine surface de terrain et d'une certaine quantité de matériaux; alors en effet il n'existe plus de canal, car on a aussi $E=o$, et l'eau d'un canal quelconque en activité doit toujours avoir une certaine valeur réelle et positive.

(30) Observons maintenant que le capital dépensé pour l'exécution d'un canal se compose :

1° Du prix des terrains qu'il a fallu acquérir pour son emplacement;

2° De la valeur *brute* des matériaux employés dans l'exécution de ses ouvrages;

3° Des frais de main-d'œuvre, et de salaires de toute espèce qu'il a fallu acquitter pour le mettre en état de perfection;

4° Des indemnités au prix desquelles il a fallu acheter le volume d'eau nécessaire à son entretien, si ce volume d'eau, par l'emploi utile qu'on en faisait déjà avait acquis une certaine valeur échangeable.

Ainsi, faisant le capital dépensé pour l'établissement du canal . . . . $=C'$

Le prix des terrains acquis . . . . $=P'$

La valeur brute des matériaux. . . . . $=M'$

Les frais de main-d'œuvre, salaires, etc. . . . . $=F'$

Enfin les indemnités dues pour les cours d'eau. . $=E'$

On aura cette équation

$$C' = P' + M' + F' + E'.$$

(31) Il doit toujours exister un certain rapport entre le capital du revenu net du canal quand il est en activité, et le capital dépensé pour son établissement, c'est-à-dire que l'on a toujours

$$C = mC',$$

m étant un nombre entier ou fractionnaire.

Dans le cas de $m = 1$ ou de $m > 1$, le canal est une propriété avantageuse entre les mains de ceux qui l'ont créée, puisque le capital du revenu net qu'ils en retirent, est au moins égal au capital qu'ils ont dépensé pour l'établir : dans le cas de $m < 1$ au contraire, cette propriété leur serait onéreuse, puisqu'ils en retireraient un revenu moindre que celui qn'ils auraient pu retirer du capital employé pour la créer s'ils en avaient fait un autre placement.

(32) En raisonnant ainsi, on voit que l'utilité du canal commence à se manifester à ses propriétaires lorsque $m = 1$ ou bien lorsque $C = C'$; nous admettrons cette hypothèse comme la limite de celles d'après lesquelles on se détermine à ouvrir un canal de navigation.

Cela posé, nous aurons deux valeurs de C, savoir :

$$C = E + P + M$$
$$C = E' + P' + M' + F',$$

donc

$$E - E' = F' + (M' - M) + (P' - P),$$

c'est-à-dire que l'excédent de valeur que l'eau employée à entretenir un canal de navigation, a acquise sur celle qu'elle avait lorsqu'elle servait précédemment à tout autre usage, est exprimé par trois termes, dont le premier représente toujours le prix du travail de toute nature au moyen duquel on est parvenu à l'exécution du canal, et dont les deux autres représentent, tant la détérioration des matériaux employés dans sa construction, que celle des terrains qu'il occupe.

(33) Cependant si ces terrains ont été améliorés par des plantations, ou si on les a rendus susceptibles de produits plus recherchés que ceux qu'on en retirait avant l'ouverture du canal, on peut avoir dans certains cas,

$$(M'-M)+(P'-P)=0.$$

La détérioration des matériaux se trouve ainsi compensée par l'amélioration des terrains, et l'on a :

$$E-E'=F'.$$

D'où l'on voit que dans ce cas particulier l'augmentation de valeur que l'eau a acquise, en passant de l'usage primitif auquel elle était employée, à l'usage de la navigation sur le canal, est précisément égale au prix du travail que l'exécution de celui-ci a exigé.

(34) Mais si l'eau que nous avons supposée enlevée au canal après son exécution, restait encore disponible pour être rendue à sa première destination, il est évident qu'elle reprendrait sa valeur primitive, laquelle viendrait en déduction de la valeur que cette même eau avait acquise pendant qu'elle était employée à l'entretien de la navigation.

On aurait alors les deux équations

$$C=E+P+M+E'$$
$$C=E'+P'+M'+F',$$

d'où l'on tire

$$E = F' + (M' - M) + (P' - P);$$

et dans l'hypothèse faite plus haut de $(M' - M) = (P - P')$, on aurait :

$$E = F'.$$

Ce qui signifie que la valeur de l'eau nécessaire pour l'entretien de la navigation sur un canal artificiel, est exactement représentée par le prix du travail, ou par la masse des salaires de toute espèce acquittés pour son exécution.

Conséquence rigoureuse et qui s'accorde parfaitement avec l'opinion de David Ricardo ; lequel n'attribue, comme on sait, à quelque objet que ce soit, de valeur échangeable ou vénale que celle du travail employé pour rendre cet objet productif.

(35) Le capital qui représente la valeur de l'eau dans un canal de navigation, étant déterminé comme nous venons de le faire, la consommation annuelle de cette eau sera le revenu en nature de ce capital.

Si donc on suppose le taux de l'intérêt à 5 pour 100, on aura $\frac{E}{20}$ pour la valeur de l'eau dépensée annuellement, si de plus le volume de cette eau exprimé en mètres cubes est représenté par k, le prix du mètre cube d'eau dépensé sera $\frac{E}{20\,k} = p$.

Quant à l'évaluation en argent du temps employé à franchir une écluse, il est beaucoup plus simple d'y parvenir.

En effet, le loyer du bateau, celui des chevaux qui y sont attelés, le salaire des hâleurs et les gages des bateliers qui le conduisent, sont toujours évalués en argent, soit par jour, par heure, par minute, etc. On peut donc toujours évaluer cette dépense pour l'unité de temps que l'on aura adoptée dans le calcul.

Le prix du mètre cube d'eau dépensée étant donc $= p$
Le prix de l'unité de temps.................... $= p'$
Le volume d'eau dépensé pour le passage d'un bateau ou d'un convoi par une écluse simple ou multiple.................................. $= V$
La durée du passage.......................... $= \theta$
Enfin la masse transportée..................... $= G$

On aura pour le rapport de l'effet utile à la dépense en argent

$$\frac{G\sqrt{a^2+l^2}}{Vp+\theta p'},$$

qu'il conviendra toujours de rendre le plus grand possible en faisant $Vp+\theta p' = minimum$, ou $d(Vp+\theta p')=0$.

(35) Proposons-nous pour premier exemple, de déterminer le nombre d'écluses simples et de chute égale qui doivent racheter la pente d'un canal de navigation, entre deux points donnés de manière que la dépense en argent de l'eau consommée et du temps employé, soit la moindre possible: appliquons d'abord cette recherche à un bateau montant.

On a ici $G = St_i$, et l'effet utile est exprimé ici par $St_i\sqrt{a^2+l^2}$.

Mais pour ce cas particulier nous avons aussi

$$1^\circ \qquad Vp = pS(x+t_i) = S\left(\frac{a}{n}+t_i\right)p,$$

$$2^\circ \qquad \theta p' = \left(\frac{l}{i}+\frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}}\right)p'$$

Le rapport de l'effet utile à la cause qui le produit, est donc:

$$\frac{St_i\sqrt{a^2+l^2}}{S\left(\frac{a}{n}+t_i\right)p+\left(\frac{l}{i}+\frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}}\right)p'}.$$

La seule quantité n étant variable si l'on fait

$$d\left[\frac{\mathrm{S}t_{,}\sqrt{a^2+l^2}}{\mathrm{S}\left(\frac{a}{n}+t_{,}\right)p+\left(\frac{l}{i}+\frac{2\mathrm{S}\sqrt{an}}{\mathrm{O}\sqrt{2g}}\right)p'}\right]=0:$$

on trouve

$$n=\frac{\sqrt[3]{2pp.\mathrm{O}^2ag}}{\sqrt[3]{p'p'}}$$

pour le nombre d'écluses propre à rendre le rapport précédent le plus grand possible.

(36) Si l'on considère un bateau descendant, le chemin parcouru horizontalement sera $-l$, la chute parcourue sera aussi $-a$, mais l'on aura toujours pour la résultante de ces deux directions,

$$\sqrt{a^2+l^2}.$$

Le rapport de l'effet utile à la dépense d'eau et d'argent est donc

$$\frac{\mathrm{S}t_{,,}\sqrt{a^2+l^2}}{\mathrm{S}\left(\frac{a}{n}-t_{,,}\right)p+\left(\frac{l}{i}+\frac{2\mathrm{S}\sqrt{an}}{\mathrm{O}\sqrt{2g}}\right)p'},$$

expression dont la différentielle égalée à zéro, donne encore

$$n=\frac{\sqrt[3]{2pp\mathrm{O}^2ag}}{\sqrt[3]{p'p'}}.$$

Ainsi, le même système de distribution d'écluses est également le plus avantageux dans les deux hypothèses de la montée et de la descente d'un bateau, et par conséquent dans l'hypothèse du double passage.

(37) En jetant les yeux sur la valeur de n, à laquelle nous venons de parvenir, on voit que le nombre des écluses simples

d'un canal de navigation propre à rendre leur système de distribution le plus avantageux possible sous le rapport de la dépense d'eau et de temps nécessaire pour leur manœuvre, doit croître comme la racine cubique de la pente totale qu'elles servent à racheter.

Or, on a vu, dans notre précédent Mémoire, qu'en considérant les écluses sous le rapport des frais de construction de leurs murs de sas, ces frais étaient les moindres possibles lorsque leur chute était égale à la profondeur d'eau des canaux où elles sont établies, c'est-à-dire au plus grand tirant d'eau des bateaux qui y naviguent; cette hauteur de chute h restant par conséquent la même pour deux canaux de même navigation, il est évident que les nombrs n et n' des écluses de chacun d'eux doivent être proportionnels à leurs pentes respectives a et a'.

Il faut donc satisfaire tout à la fois aux trois conditions d'une moindre dépense de construction pour les écluses d'un canal, et d'une moindre dépense d'eau et de temps pour le parcourir satisfaire simultanément à ces deux équations,

$$nh=a,$$

$$n=\frac{\sqrt[3]{2pp\,O^2ag}}{\sqrt[3]{p'p'}},$$

d'où l'on tire

$$O=\frac{ap'}{ph\sqrt{2gh}},$$

c'est-à-dire que les orifices des pertuis qui servent au remplissage et à l'évacuation des sas, doivent être sur deux canaux de même navigation et de pentes totales différentes proportionnels à ces pentes.

(38) Recherchons maintenant, par un calcul analogue, l'avantage d'une écluse multiple, suivant le nombre de sas qui la composent.

L'effet utile dans cette hypothèse a pour expression, L étant la longueur d'un sas et n leur nombre,

$$S t_{\prime} \sqrt{a^2 + n^2 L^2}.$$

Quant à la cause qui le produit, nous avons trouvé ci-dessus (22), que la dépense d'eau nécessaire pour faire monter un seul bâteau à travers une écluse multiple, était toujours la même, quel que fût le nombre des sas, pourvu que la chute totale fût constante. Elle est exprimée par :

$$S(nx + t_{\prime}) = S(a + t_{\prime}).$$

De plus nous avons trouvé (14), que le temps employé à franchir cette écluse était :

$$\frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{[(n-1)+\sqrt{2}]}{\sqrt{n}}.$$

On a donc pour l'avantage cherché

$$\frac{t_{\prime}\sqrt{a^2+n^2L^2}}{(a+t_{\prime})p + \frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{[(n-1)+\sqrt{2}]p'}{\sqrt{n}}},$$

ou bien en ayant seulement égard au mouvement ascensionnel du bateau,

$$\frac{a t_{\prime}}{(a+t_{\prime})p + \frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}} \frac{[(n-1)+\sqrt{2}]p'}{\sqrt{n}}},$$

expression qui devient évidemment d'autant moindre que le nombre n des sas devient plus considérable.

Lorsque le bateau descend, l'effet utile ayant lieu dans une direction contraire à l'ascension, l'avantage est exprimé par :

$$\frac{-t_{''}a}{\left(\frac{a}{n}-t_{''}\right)p+\frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[(n-1)+\sqrt{2}]p'}{\sqrt{n}}}.$$

Or, le premier terme du dénominateur de cette expression diminue par l'accroissement du nombre des sas, tandis que le deuxième terme de ce même dénominateur augmente avec ce nombre; il y a donc une valeur de n, qui rend le rapport précédent le moindre possible, valeur que l'on détermine en faisant,

$$d\left[\frac{-at_{''}}{\left(\frac{a}{n}-t_{''}\right)p+\frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[(n-1)+\sqrt{2}]p'}{\sqrt{n}}}\right]=0,$$

d'où l'on tire

$$-\frac{ap}{n^2}+\frac{p'\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{2n\sqrt{n}}-\frac{1}{n\sqrt{2n}}\right)=0;$$

et par conséquent, après avoir réduit au même dénominateur tous les termes du second membre de cette expression,

$$-\frac{ap}{n^2}+\frac{p'\sqrt{a}(n-0{,}414)}{2O\sqrt{g}.n^{\frac{3}{2}}}=0,$$

donc enfin :

$$a^2p^2=\frac{p'p'an}{4O^2g}(n-0{,}414)^2,$$

équation du troisième degré, d'où l'on tirera la valeur cherchée de n.

(39) Lorsqu'il y a successivement passage inverse d'un bateau montant et descendant, on a pour déterminer le nombre n, qui rend l'avantage le plus grand possible,

$$d\left[\frac{at_{,}}{(a+t)p+\frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[(n-1)+\sqrt{2}]p'}{\sqrt{n}}}\right]-d.\left[\frac{at_{,,}}{\left(\frac{a}{n}-t_{,,}\right)p+\frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[(n-1)+\sqrt{2}]p'}{\sqrt{n}}}\right]=0.$$

Il sera toujours facile de déduire de cette équation la valeur cherchée de n; nous ne croyons pas devoir nous y arrêter : nous passerons à la recherche du plus grand avantage des écluses multiples quand elles sont traversées par des convois plus ou moins nombreux.

(40) Nous avons trouvé plus haut (23), que la dépense d'eau d'une écluse multiple ayant un nombre n de sas, lorsqu'elle est traversée par un convoi ascendant composé d'un nombre N de bateaux, avait pour expression :

$$(n-1)Sx+NS(x+t_{,})=\frac{Sa(n-1)}{n}+SN\left(\frac{a}{n}+t_{,}\right).$$

Nous avons trouvé aussi (16) pour le temps de cette ascension :

$$\frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[n-2+N(\sqrt{2}+1)]}{\sqrt{n}}.$$

L'effet utile est d'ailleurs $SaNt_{,}$ l'avantage est donc

$$\frac{aNt_{,}}{p\left[\frac{a(n-1)}{n}+N\left(\frac{a}{n}+t_{,}\right)\right]+p'\frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[n-2+N(\sqrt{2}+1)]}{\sqrt{n}}}.$$

Si le convoi composé du nombre N' de bateaux descend une écluse multiple ayant un nombre n' de sas, on se rappelle (23) que la dépense d'eau est exprimée par :

$$-St_{,,}+(N'-1)S\left(\frac{a}{n}-t_{,,}\right),$$

et le temps employé par :

$$\frac{S\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[n'-2+N'(1+\sqrt{2})]}{\sqrt{n'}}. \qquad (16)$$

L'effet utile est d'ailleurs

$$-SaN't_{,,},$$

quantité négative parce que cet effet utile s'opère en sens inverse de celui qui a lieu en montant.

L'avantage cherché, en descendant l'écluse, a donc pour expression :

$$\frac{-aN't_{,,}}{p\left[-t_{,,}+(N'-1)\left(\frac{a}{n'}-t_{,,}\right)\right]+p'\frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[n'-2+N'(1+\sqrt{2})]}{\sqrt{n'}}}.$$

(41) Si l'on suppose l'écluse multiple déja construite, et par conséquent les nombres de sas n et n' donnés d'avance, il ne restera qu'à déterminer les nombres de bateaux N et N', dont il faudra composer les convois ascendant et descendant pour que les avantages des écluses multiples à l'expression desquels nous venons de parvenir soient les plus grands possibles.

Or il suffit de jeter les yeux sur ces deux expressions pour reconnaître immédiatement que ces avantages seront d'autant plus grands, que les convois seront composés d'un nombre de bateaux plus considérable.

(42) Si l'on suppose au contraire que les convois montant et descendant un canal de navigation, soient toujours formés du même nombre de bateaux N et N', et qu'il s'agisse de déterminer dans cette hypothèse les nombres n et n' de sas, dont les écluses multiples devront être composées pour que l'avantage de leur montée et de leur descente soit le plus

grand possible, il faudra que l'on ait, en regardant N et N' comme des quantités constantes les deux équations :

$$d\left[\frac{a\mathrm{N}t_{,}}{p\left[\frac{a(n-1)}{n}+\mathrm{N}\left(\frac{a}{n}+t_{,}\right)\right]+p'\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{O}\sqrt{g}}\frac{[n-2+\mathrm{N}(\sqrt{2}+1)]}{\sqrt{n}}}\right]=0;$$

et

$$d\left[\frac{-a\mathrm{N}'t_{,,}}{p\left[-t_{,,}+(\mathrm{N}'-1)\left(\frac{a}{n_{,}}-t_{,,}\right)\right]+p'\frac{\sqrt{a}}{\mathrm{O}\sqrt{g}}\frac{[n'-2+\mathrm{N}(1+\sqrt{2})]}{\sqrt{n'}}}\right]=0$$

lesquelles donnent

$$\frac{[pa\mathrm{O}\sqrt{g}(\mathrm{N}-1)]^2}{p'\sqrt{a}}=n\frac{[\mathrm{N}(1+\sqrt{2})-(n+2)]^2}{2},$$

et

$$\frac{[pa\mathrm{O}\sqrt{g}(\mathrm{N}'-1)]^2}{p'\sqrt{a}}=n'\frac{[\mathrm{N}'(1+\sqrt{2})-(n'+2)]^2}{2}.$$

Ainsi les nombres de sas cherchés n et n' se déduisent chacun de la solution d'une équation du troisième degré de même forme.

(43) Lorsqu'il s'agira de faire monter ou descendre un même nombre de bateaux par deux corps d'écluse de même chute, il est clair que l'on aura $n=n'$, et par conséquent la même distribution de sas sera également la plus avantageuse pour la montée et la descente de convois formés d'un même nombre de bateaux.

La dépense en eau et en argent occasionée par le double passage, à travers la même écluse, de deux convois montant et descendant, composés du même nombre de bateaux, sera :

$$S\left[\frac{pa}{n}(N-1)+p(a+Nt_{,})\right]+\frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}p'[n-2+N(1+\sqrt{2})]$$
$$+S\left[\frac{pa}{n}(N-1)-pNt_{,,}\right]+\frac{\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}p'\frac{[n-2+N(1+\sqrt{2})]}{\sqrt{n}}\ldots\ldots$$
$$=S\left[\left(\frac{2a}{n}(N-1)+a\right)p+\frac{2\sqrt{a}}{O\sqrt{g}}\frac{[n-2+N(1+\sqrt{2})]}{\sqrt{n}}p'\right].$$

Expression qui, comme on voit, est tout-à-fait indépendante du tirant d'eau des bateaux.

(44) L'équation

$$\frac{[paO\sqrt{g}(N-1)]^2}{p'\sqrt{a}}=n\frac{[N(\sqrt{2}+1)-(n+2)]^2}{2},$$

qui donne le rapport entre le nombre n de sas, dont une écluse multiple doit être composée pour qu'un convoi d'un nombre N de bateaux occasionne, pour son passage à travers cette écluse, la moindre dépense possible d'eau et de temps, appartient, comme on voit, à une courbe du troisième degré que l'on pourra toujours tracer graphiquement. Mais nous devons faire ici une observation importante sur les solutions numériques que l'on en tirera.

Remarquons en effet, que par la nature même de la question les quantités n et N doivent toujours être des nombres entiers, or il peut arriver qu'en donnant pour valeur à l'une de ces quantités, prise pour variable indépendante tous les nombres entiers possibles, on trouve pour les valeurs de l'autre des nombres composés d'entiers et de fractions; on ne peut alors satisfaire *pratiquement* à la question qu'en prenant pour cette dernière quantité le nombre entier qui approche le plus de celui auquel le calcul aura conduit; ainsi la solution à laquelle on parviendra ne sera qu'approximative.

(45) Remarquons d'un autre côté que des convois qui cheminent sur un canal ne sont pas toujours composés du même nombre de bateaux; il faudrait donc pour obtenir de la distribution des sas d'une écluse multiple qu'ils doivent traverser, le plus grand avantage possible, que le nombre de ces sas variât avec celui des bateaux du convoi, ce qui est évidemment impraticable. C'est donc d'après le nombre moyen des bateaux dont on peut supposer les convois formés, qu'il faut déterminer sur un canal le nombre des sas dont une écluse multiple doit être composée pour racheter une pente donnée. Toutes les fois que le nombre de bateaux d'un convoi sera au-dessus ou au-dessous du nombre moyen pour lequel la distribution du corps d'écluse aura été faite, il est évident que la question n'aura encore été résolue qu'approximativement: nous insistons sur ces remarques, afin qu'en appliquant la théorie qui fait l'objet de ce Mémoire, on n'attribue pas à ses résultats plus de rigueur et de précision qu'ils n'en comportent en effet.

(46) Nous allons terminer ce Mémoire en assignant pour un cas particulier les valeurs en argent de l'unité de volume d'eau dépensée, et de l'unité de temps employé au passage d'une écluse; appliquons par exemple à cette recherche les conditions du canal de Soissons, dont nous avons rédigé le projet.

Ce canal est estimé 4,135,916 fr. y compris une somme de 216,000 fr. pour la valeur des terrains qu'il occupe, on a donc: 1° ci .... $P=216{,}000$ fr.

Les ouvrages d'art de ce canal sont estimés ci 1,670,000

et comme la valeur brute des matériaux employés dans leur construction, n'est guère que le tiers de ce prix, on aura 2° ci. . . . . . M $=$ 600,000 fr. environ.

Nous ne comptons point ici de dépense à faire pour l'acquisition de l'eau nécessaire à l'entretien du canal, parce que les usines que l'on pourra établir à la chute de ses écluses compenseront au moins par leurs produits celles qui auront pu être supprimées.

Le revenu brut du canal de Soissons a été évalué 523,166 fr. si l'on porte à 123,166 fr. les frais annuels d'entretien et d'administration de ce canal, il restera un revenu net de 400,000 fr.; lequel étant multiplié par 20 donnera la somme de 8,000,000 fr. pour le capital C, dont ce revenu net représentera l'intérêt au taux de 5 pour 100.

La formule

$$C-(P+M)=E,$$

que nous avons trouvée plus haut (29), devient par la substitution des valeurs numériques que nous venons d'assigner :

$$8{,}000{,}000 \text{ fr.} - 816{,}000 \text{ fr.} = 7{,}184{,}000 = E.$$

Le produit annuel de cette eau évalué au taux de 5 pour cent de sa valeur vénale qui vient d'être trouvée, est donc de 359,200 fr.

Que l'on suppose 300 jours de navigation par année, l'eau dépensée chaque jour vaudra 1197 fr. environ.

La superficie S d'un sas du canal de Soissons est, comme on l'a vu (7), de $88^{m},40$ superficiels.

La chute moyenne de ses écluses est de $1^{m},25$; par conséquent le volume d'eau d'une éclusée sera $= 110^{m},5$ cubes.

Supposons que la dépense journalière soit de 15 éclusées entre ses deux extrémités, on dépensera par jour 16575 mètres cubes, qui vaudront en argent 1197 fr., comme on vient de le trouver, ce qui porte le prix du mètre cube d'eau à $0^{\text{fr.}}, 72$ c., ainsi on a

$$p = 0^{\text{fr.}}, 72 \text{ c.}$$

(47) S'il n'y avait qu'une seule écluse sur un canal de navigation, l'eau tirée du bief de partage de cette seule écluse serait dépensée au passage; alors le prix du mètre cube d'eau pour ce passage serait tel que nous venons de l'assigner: mais, attendu que l'eau fournie par le réservoir culminant passe dans les biefs inférieurs, et sert aux passages successifs des écluses qui les séparent, il est évident que le prix du mètre cube d'eau tiré de ce réservoir, doit se répartir sur toutes les écluses, de telle sorte par exemple que ce nombre d'écluses étant de 100 entre les deux extrémités du canal, le prix du mètre cube d'eau à chaque écluse sera $=\frac{p}{100}$, et généralement il serait $\frac{p}{n}$ le nombre des écluses étant n. Ainsi pour avoir la valeur en argent de l'eau dépensée pour le trajet d'un bateau qui, ne parcourant qu'une certaine longueur du canal, ne traverserait qu'un certain nombre de ses écluses, il faudrait multiplier le prix $\frac{p}{n}$ du mètre cube d'eau dépensé à chaque écluse par le nombre n' des écluses traversées.

(48) Pour évaluer maintenant en argent le prix de l'unité de temps, supposons le prix d'un bateau de...... 3000 fr. et sa durée de 15 ans.

L'intérêt du capital employé pour le construire est de 150

La prime de son renouvellement de 200

portons-en les réparations annuelles à 70 fr., ci..	70 fr.
Supposons que le bénéfice annuel du propriétaire du bateau soit de 20 pour 100 de sa valeur ou de..	600
Les gages du patron du bateau de..............	1800
Les gages de son aide........................	900
Le salaire de deux hâleurs pour 300 jours de navigation, ci..............................	1200
Dépense annuelle du bateau................	4920 fr.

En supposant 300 jours de travail ou de navigation, la dépense journalière sera de 16 fr. 40 c., et comme il n'y a que 10 heures de travail, la dépense par heure sera de ci.. 1 fr. 64 c.

par minute de ci......................... 0 fr. 027333

et par seconde ci......................... 0 fr. 000455

ainsi l'on a $p' =$ 0 fr. 000455.

La seconde étant prise pour unité de temps.

(49) Nous allons maintenant considérer un seul bateau montant et traversant toutes les écluses d'un canal ou d'une portion de canal, depuis son bief inférieur jusqu'à son réservoir culminant; nous aurons alors $n = n'$, et par conséquent le prix du mètre cube d'eau dépensé $= p$.

Supposons, comme pour le canal de Soissons :

La longueur du canal ou $l = 60000^m$

$S = 88^m,40$

$a = 123^m,575$

$n = 100$

$i = 0^m,555.$

Le tirant d'eau du bateau ou $t_{,} = 1^{m}$

$$O = 0{,}25$$
$$g = 9{,}808795$$
$$p = 0^{fr.},72$$
$$p' = 0^{fr.},000455.$$

On aura pour le prix de la montée de ce bateau qui est généralement exprimé par

$$S\left(\frac{a}{n} + t_{,}\right)p + \left(\frac{l}{i} + \frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}}\right)p'$$

$$1^{\circ}\ S\left(\frac{a}{n} + t_{,}\right)p = 88{,}40.(2{,}2357).0^{fr.},72 = 142^{fr.},210$$

$$2^{\circ}\ \frac{l}{i}p' = \frac{60000}{0{,}555}\,0^{fr.},000455 = 49^{fr.},189$$

$$3^{\circ}\ \frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}}p_{,} = \frac{176{,}80\sqrt{12357}}{0{,}25\sqrt{19{,}6176}}.0{,}000455 = 8^{fr.},074.$$

Ainsi, dans la dépense totale de $199^{fr.}, 50^{cent.}$ faite pour la montée du bateau, la valeur de l'eau est de $142^{fr.}, 21^{cent.}$; tandis que celle du temps est de $57^{fr.}\ 26^{cent.}$ seulement, et encore cette dernière somme ne comprend-elle que $8^{fr.}.\ 07^{cent.}$ pour la valeur du temps employé au passage des écluses.

(50) Nous avons trouvé (35) pour le nombre n des écluses, propre à rendre l'avantage d'un canal le plus grand possible, sous le rapport de la dépense d'eau et de temps,

$$n = \frac{\sqrt[3]{2gO^{2}app}}{\sqrt[3]{p'p'}}.$$

La substitution des quantités numériques applicables à l'exemple que nous avons choisi donne

$$n = 723{,}825,$$

ou en nombres ronds 724; par conséquent pour obtenir la moindre dépense d'eau et de temps dans la montée d'un bateau sur un canal de 60000 mètres de développement, au moyen d'écluses simples qui racheteraient une pente totale de 123 met. 57 c., il faudrait distribuer cette pente en 724 écluses; d'où l'on voit que la chute de chacune de ces écluses devrait être encore environ sept fois moindre que celle de $1^m,223$, à laquelle les écluses du canal de Soissons sont réduites.

(51) Si dans l'expression de la dépense

$$S\left(\frac{a}{n}+t_{,}\right)p+\left(\frac{l}{i}+\frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}}\right)p'.$$

On suppose $n=724$ ou plus exactement $n=723,825$, on trouvera :

1° $S\left(\frac{a}{n}+t_{,}\right)p=$	74 fr. 468 c.
2° $\frac{l}{i}p'=$	49 fr. 189
3° $\frac{2S\sqrt{an}}{O\sqrt{2g}}p'=$	21 fr. 729
et pour la dépense totale..................	145 fr. 386

laquelle est la moindre possible.

(52) Si l'on ne faisait que 50 écluses au lieu de 100, on aurait

1° $S\left(\frac{a}{n}+t_{,}\right)p=$	220 fr. 086 c.
2° $\frac{l}{i}p'=$	49 fr. 189
3° $\frac{2S\sqrt{an}}{o\sqrt{g}}p'=$	5 fr. 710
dépense totale........................	274 fr. 985 c.

La dépense pour 100 écluses a été trouvée de...	199 fr. 503 c.
Ainsi, cette dernière distribution présente une	
économie de.	75 fr. 482

(53) Il est inutile de multiplier les applications que nous pourrions faire des formules auxquelles nous sommes parvenus; mais il importe de faire remarquer que la valeur de l'eau dépensée pour la navigation sur un canal, est en général beaucoup plus considérable que la valeur du temps employé à le parcourir. C'est en effet dans la quantité d'eau par laquelle un canal est alimenté, que réside, à proprement parler, la force motrice des bateaux qui y circulent, et la valeur de cette force l'emporte de beaucoup sur la valeur de la main d'œuvre nécessaire à son développement. C'est ainsi que dans l'usage d'une machine à vapeur la dépense du combustible est presque toujours plus forte que celle qui se compose des intérêts du capital employé à la construction de cette machine, des frais de son entretien journalier et de son remplacement, enfin du salaire des divers ouvriers qui la tiennent en activité; et comme les machines à vapeur se sont perfectionnées à mesure que l'on a mis en œuvre de nouveaux moyens d'économiser le combustible, de même aussi l'art de construire des canaux artificiels se perfectionnera par tous les procédés à l'aide desquels on parviendra à économiser l'eau destinée à les entretenir.

(54) Résumons en terminant ce mémoire les propositions fondamentales qu'il contient.

Après avoir déduit des formules fondamentales de l'hydrodynamique la durée du remplissage ou de l'évacuation d'une écluse simple, nous avons montré que le temps exigé par l'une ou l'autre de ces manœuvres, n'était communément qu'une faible partie de celui qui est nécessaire pour faire parcourir à un bateau les biefs successifs d'un canal. Nous avons recherché ensuite, sous la forme la plus générale, l'expression du temps du remplissage, et de l'évacuation des sas accolés d'une écluse multiple, et nous avons indiqué comment cette question se simplifie dans l'usage ordinaire. Lorsque l'écluse multiple rachète une pente donnée, le temps de la montée et de la descente d'un bateau isolé croît évidemment avec le nombre des sas qui la composent; mais il n'en est pas ainsi lorsque les bateaux cheminent en convoi: il existe un certain rapport entre le nombre de bateaux dont ce convoi est composé et celui des sas de l'écluse multiple qu'il doit traverser pour que le temps qu'il emploie à ce passage soit un *minimum*.

En général, le nombre de bateaux d'un convoi, celui des sas d'une écluse multiple, et le temps de sa traversée par ce convoi, sont les trois coordonnées d'une surface courbe, dont nous avons donné l'équation.

Faisant l'application des propositions théoriques auxquelles nous avons été conduits au cas généralement connu des sas accolés de l'écluse de Rogny sur le canal de Briare, nous avons fait voir que si un convoi était composé de plus de six bateaux, il lui faudrait plus de temps pour franchir les sept écluses actuelles de Rogny, qu'il ne lui en faudrait pour franchir vingt-quatre écluses qui racheteraient la même chute qui est totale de 23^{m} 253^{c}.

(55) Nous avons comparé ensuite le temps qu'un convoi emploierait à traverser une suite d'écluses simples au temps qu'il employerait à traverser les sas accolés d'une écluse

multiple qui racheterait la même pente. Il résulte de cette comparaison, qu'il y a toujours économie de temps, d'autant plus grande dans la traversée de l'écluse multiple que le nombre de bateaux du convoi et celui des sas de l'écluse sont plus considérables ; d'où l'on tire cette conclusion générale : qu'en ayant seulement égard au temps employé à parcourir un canal de navigation, il conviendrait, pour abréger la durée de ce trajet, de distribuer la pente de ce canal en écluses multiples, et d'y faire naviguer les bateaux en convois.

Mais il ne s'agit pas seulement d'économiser le temps, il s'agit surtout de diminuer autant que possible la consommation de l'eau nécessaire à la navigation. On y parvient évidemment par la réduction des chutes des écluses ; et nous avons vu, dans nos précédents mémoires, comment cette réduction doit s'opérer, lorsque ces écluses sont isolées.

(56) Il nous restait à rechercher dans celui-ci la dépense d'eau qu'occasionne le passage d'un seul bateau ou d'un convoi de bateaux à travers une écluse multiple. Dans le premier cas, la dépense d'eau pour le double passage d'un seul bateau montant et descendant est la même, quel que soit le nombre de sas dont l'écluse multiple est composée ; dans le second cas, c'est-à-dire, pour le double passage de plusieurs bateaux cheminant en convoi, la dépense d'eau est toujours d'autant moindre que l'écluse multiple est divisée en un plus grand nombre de sas.

Et comme au-delà d'un certain nombre de bateaux, un convoi franchit une écluse multiple d'autant plus promptement que sa chute totale est divisée en un plus grand nombre de chutes partielles, il résulte de notre théorie, que l'on diminue simultanément les dépenses d'eau et de temps pour le passage d'une écluse multiple : 1° en la composant d'un plus grand nombre de sas; 2° en répartissant une quantité donnée de marchandises sur un plus grand nombre de bateaux, avantage de la petite navigation sur la grande qui n'avait point encore été remarqué.

(57) Sous quelque point de vue qu'on considère la navigation des canaux artificiels, le passage de leurs écluses donne toujours lieu à deux sortes de dépenses distinctes : celle de l'eau tirée du bief de partage, et celle du temps employé à la traversée des écluses. Dans certains cas, il y a diminution de dépense d'eau et augmentation de dépense de temps; le contraire arrive dans d'autres circonstances; enfin, en combinant le nombre de bateaux d'un convoi avec le nombre de sas accollés des écluses multiples, on obtient une double économie dans la dépense de l'eau et du temps.

Ces deux dépenses ne peuvent être comparées entre elles qu'autant qu'on les ramène à une mesure commune, c'est-à-dire qu'on les évalue en argent. L'évaluation en argent de l'eau consommée pour l'entretien de la navigation sur un canal, est l'objet d'une question nouvelle; la solution que j'en ai donnée, est déduite des considérations les plus simples.

Il en résulte que la valeur de l'eau dont il s'agit, est égale au capital du revenu net que l'on retire du canal, moins le capital qui représente la valeur des terrains qu'il occupe, et des matériaux qui sont entrés dans la construction de ses divers ouvrages. L'eau dépensée annuellement pour la navigation, équivaut donc rigoureusement à l'intérêt du capital qui représente la valeur de cette eau, et comme ce capital et son intérêt sont connus, et que d'ailleurs on est censé connaître la consommation annuelle et journalière de l'eau pour le passage des écluses, il est aisé d'en déterminer rigoureusement le prix du mètre cube.

Quant à la valeur du temps, le prix d'achat des bateaux, leur durée, le bénéfice que retire leur propriétaire de leur loyer, le salaire des bateliers qui les conduisent, et celui des hommes ou des chevaux qui les mettent en mouvement étant assignés d'avance, on peut aisément connaître la valeur en argent de la journée d'emploi d'un bateau et des divers agents auxquels il est confié; la valeur de l'unité de temps se trouve ainsi déterminée, et par suite la dépense en argent du temps employé par ce bateau au passage d'une écluse simple ou multiple.

(58) Ces déterminations obtenues, on assigne facilement l'avantage de tel système de chute d'écluses sur tel autre système, en rendant le plus grand possible le rapport de l'effet utile de la navigation sur le canal, à la cause de cet effet.

Or, cet effet utile est toujours le produit de la masse transportée par le chemin qu'elle parcourt dans les directions horizontale et verticale.

D'un autre côté la cause de cet effet est évidemment la dépense d'eau et de temps qu'il faut faire en argent pour effectuer le mouvement du bateau, et de son chargement d'un point à l'autre du canal.

Si donc on divise l'effet utile par cette dépense totale, et qu'on regarde la chute des écluses comme variable, on obtiendra en égalant à zéro la différentielle de ce rapport, la chute qu'il convient de donner aux écluses pour que l'avantage du canal sur lequel elles sont établies, soit le plus grand possible, la détermination de cette chute dépend en général de la solution d'une équation du 3e degré.

(59) Lorsqu'on recherche le plus grand avantage d'une écluse multiple qui rachète une pente donnée, eu égard au nombre de sas qui la composent et au nombre de bateaux dont sont formés les convois qui la traversent, il est évident que ces deux nombres dépendant toujours l'un de l'autre, on peut les représenter par les coordonnées d'une certaine courbe : dans la pratique, la construction de l'écluse multiple étant nécessairement antérieure à l'usage du canal, le nombre des sas dont elle est composée, est nécessairement la variable indépendante d'après laquelle le nombre de bateaux des convois qui la traversent doit être déterminé ; et comme il n'est pas présumable que l'on puisse constamment réunir en convoi précisément le même nombre de bateaux pour le passage de cette écluse, il faut regarder le nombre de bateaux indiqué par le calcul comme celui dont il convient de se rapprocher le plus possible.

(60) L'application que nous avons faite des propositions théoriques auxquelles nous sommes parvenus, montre que la valeur de l'eau employée à l'entretien d'un canal de navigation, est de beaucoup supérieure à la valeur du temps employé à la traversée de ses écluses dans le mouvement plus ou moins actif imprimé aux bateaux qui naviguent sur un canal ; l'eau qui l'alimente est la matière de leur force motrice, comme un combustible quelconque est la matière de la force motrice d'une machine à vapeur ; or, la valeur de ce combustible, à moins qu'on ne l'emploie dans la mine qui le produit, est toujours beaucoup plus considérable que le prix du temps des ouvriers chargés de surveiller sa combustion pour

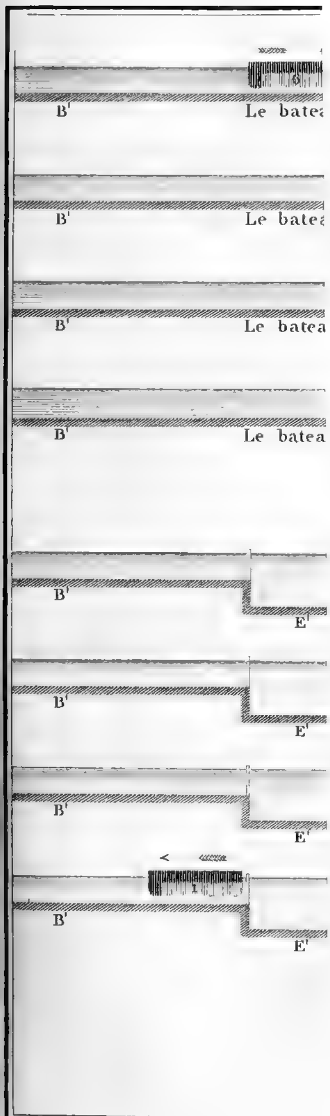
tenir la machine en activité. Cette analogie nous a paru digne de remarque.

Ayant pris pour exemple un canal de 60000 mètres de longueur, dont la pente totale de $123^m,575$ est rachetée par cent écluses de $1^m,23$ centimètres de chute, nous avons trouvé que le prix de l'eau dépensée pour le parcourir était de 142 fr. 21 c., tandis que le prix du temps employé à la manœuvre des écluses n'était que de 8 fr. 074 c., c'est-à-dire dix-huit fois moindre environ; nous avons trouvé aussi que pour rendre la moindre possible la dépense du trajet de ce canal en eau et en temps, évaluée en argent, il fallait réduire à 17 centimètres la chute de ces écluses, c'est-à-dire à moins du quatorzième de la chute dont l'usage a prévalu dans les divers canaux qui ont été ouverts jusqu'à présent.

L'objection qu'on a tirée contre le système d'écluses à petites chutes, de l'excès de temps employé à en traverser un plus grand nombre rachetant une chute donnée, est donc tout-à-fait dénuée de fondement; et comme par l'adoption de ce système on obtient évidemment une économie plus ou moins considérable dans la dépense d'eau qui a lieu au passage des écluses, et une réduction importante dans les frais de leur construction, il ne peut plus rester de doutes sur les avantages qui lui sont propres.

(61) Au surplus quand on soumet à des calculs théoriques des matières analogues à celles que nous avons traitées, il ne faut pas prétendre appliquer les résultats de ces calculs dans toute la rigueur mathématique; on est obligé de mettre en œuvre des matériaux que la nature n'a pas doués de toutes les propriétés qu'on leur suppose, et il n'est pas toujours permis de compter, pour le meilleur emploi du temps, sur

l'exactitude et la précision des agents auxquels la conduite des bateaux est confiée. La théorie n'en est pas moins indispensable, elle pose les véritables principes, elle en déduit les conséquences utiles, et ne fût-elle propre qu'à indiquer la perfection comme une limite à laquelle il est impossible d'atteindre, ce ne sera jamais qu'aux discussions qu'elle fera naître que l'art devra ses progrès.


B'
Le batea
B'
Le batea
B'
Le batea
B'
Le batea
B'
E'
B'
E'
B'
E'
B'
E'

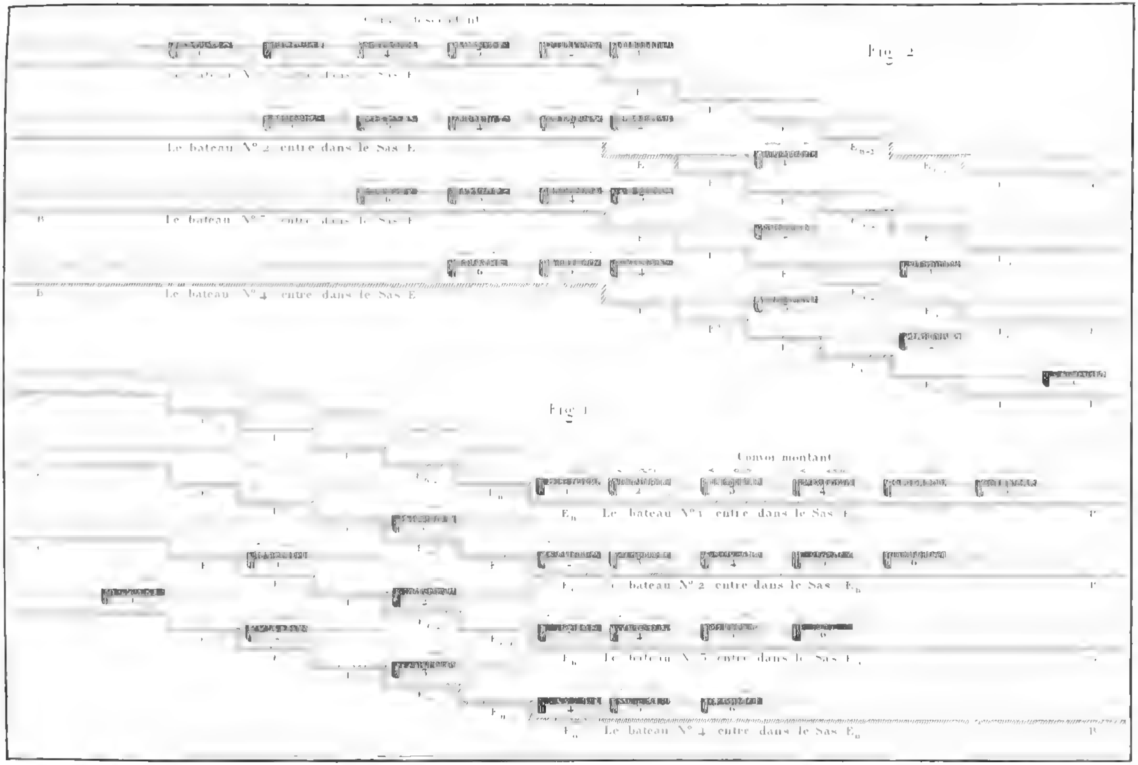


Fig. 2
Le bateau N° 2 entre dans le Sas E
Le bateau N° 4 entre dans le Sas E
Fig. 1
Convoi montant
Le bateau N° 1 entre dans le Sas E
bateau N° 2 entre dans le Sas E_n
Le bateau N° 4 entre dans le Sas E_n

EXPÉRIENCES

SUR

LE MÉCANISME DE LA RESPIRATION DES POISSONS.

PAR M. FLOURENS.

Lues à l'Académie royale des Sciences, le 12 avril 1830.

§ I.

1. Dès qu'il a été démontré que ce n'est pas l'eau que le poisson *respire*, mais seulement l'air contenu dans l'eau, il a été naturel de se demander quel était donc le rôle que jouait l'eau dans la respiration du poisson?

2. Or, l'eau ne peut avoir, dans la respiration du poisson, que trois genres d'action : ou une *action chimique*, et supposé que, n'étant pas *respirée*, c'est-à-dire *décomposée* par le poisson, comme je viens de le dire, elle ait pourtant une pareille action, je ne m'en occupe point ici ; ou une *action physique*, comme, par exemple, de prévenir le desséchement des branchies, et l'on verra bientôt qu'on a beaucoup trop exagéré l'étendue de cette action : ou une *action mécanique*, et l'on verra bientôt encore que c'est précisément ce genre d'action, assez peu connu jusqu'ici, qui est le principal.

3. Ainsi donc, l'eau joue-t-elle un rôle dans le mécanisme de la respiration du poisson, et quelle est la limite de ce rôle; ou, en d'autres termes, quels sont les divers ressorts du mécanisme de la respiration du poisson, et jusqu'à quel point l'intervention de l'eau est-elle nécessaire à l'accomplissement de ce mécanisme? Ce sont-là les questions à la détermination desquelles ont été consacrées ces expériences.

4. Malpighi (1) est le premier qui ait fait connaître la singulière diversité de structure qu'offre l'appareil respiratoire, dans les différents animaux; Perrault (2) et Duverney (3) ont montré ensuite que le mécanisme, ou le jeu, de cet appareil ne variait pas moins que sa structure; et Duverney (4) le premier a mis dans tout son jour cette grande proposition: que, quelque varié que soit ce mécanisme, quelque variée que soit cette structure, le but fondamental, le but définitif de toute structure, comme de tout mécanisme respiratoire, est toujours de présenter le sang à l'air dans l'état de la plus extrême division possible.

5. Mais pour que l'organe présente le sang à l'air dans cet *état extrême de division,* il faut évidemment que cet organe acquière la plus grande étendue, la plus grande surface, le plus grand développement possibles. Or, la question ainsi précisée, tout le monde voit que la détermination du mécanisme par lequel chaque animal respire n'est autre chose que

---

(1) Malpighi Opera etc.

(2) Perrault, Œuvres de physique, etc.

(3) Duverney, Mémoire sur la circulation des poissons et sur leur respiration, etc. Mém. de l'Acad. roy. des Sciences de Paris, an. 1701.

(4) *Ibid.*

la détermination du mécanisme par lequel l'organe respiratoire de chaque animal se déploie et se développe.

6. Dans les animaux à poumons vésiculeux, mammifères, oiseaux, reptiles, deux ressorts distincts concourent au développement de l'organe respiratoire: l'un, le mouvement actif de l'appareil extérieur de la respiration, l'autre, l'élasticité de l'air.

7. Ainsi, dans les mammifères, dans les oiseaux, c'est d'abord le thorax (c'est-à-dire l'appareil extérieur doué dans ces animaux d'un mouvement actif) qui se dilate; les poumons se dilatent par suite du thorax, et l'air, pénétrant de lui-même dans les poumons en partie dilatés, achève et accomplit leur développement.

8. Dans certains reptiles, nommément dans les batraciens, le mécanisme a un peu changé. Ce n'est plus le thorax, c'est la gorge qui se dilate; l'air ne pénètre plus de lui-même dans les poumons, il y est poussé par la contraction de la gorge: mais, quoique le mécanisme ait changé, le résultat est toujours le même, et ce sont toujours les mêmes ressorts, ou des ressorts de même genre, qui amènent ce résultat.

9. Ainsi donc, que ce soit le thorax ou la gorge qui se dilatent, que l'air pénètre de lui-même dans les poumons ou qu'il y soit poussé par les contractions de la gorge, c'est toujours par l'action combinée de deux ressorts, le mouvement actif d'une partie quelconque de l'appareil extérieur, d'une part, et l'élasticité de l'air, de l'autre, que le développement des poumons ou de l'organe respiratoire est produit dans les animaux des trois premières classes. Les ressorts qui déterminent le développement de l'organe respiratoire, dans les poissons, sont-ils les mêmes, ou bien l'un d'eux a-t-il changé, et quel est-il? C'est-là, comme l'on va voir, toute la question.

§ II.

1. L'appareil respiratoire des poissons (du moins de la plupart, et de ceux en particulier sur lesquels ont été faites ces expériences, la carpe, la tanche, etc.) se compose, comme celui des autres animaux vertébrés, de deux appareils distincts : un appareil extérieur, et un appareil intérieur.

2. L'appareil extérieur comprend les deux mâchoires, l'arcade palatine, l'hyoïde, les opercules, les rayons et la membrane branchiostèges; l'appareil intérieur se compose de quatre paires de branchies, portées sur quatre paires d'arcs.

3. Chaque branchie se compose de deux feuillets ; chaque feuillet, d'un rang de lames ou franges ; ces lames ou franges, libres à leur sommet, sont réunies à leur base ; et ce sont ces lames, ces franges, ces feuillets, ces *branchies,* en un mot, qui, comme chacun sait, sont l'organe respiratoire même, ou les poumons des poissons.

4. Duverney a non-seulement fait connaître presque tous les détails de cette structure aussi curieuse que compliquée; il a fait connaître encore la route que suit le sang, soit pour se porter du cœur aux branchies, soit pour se porter des branchies au reste du corps. Duverney a même indiqué, et toujours avec sa précision savante, la plupart des mouvements qui constituent le mécanisme de la respiration des poissons : le mouvement de la bouche, celui des lèvres, celui de la gorge, celui des opercules, celui des arcs branchiaux, etc.

5. Mais Duverney n'a vu qu'une partie de ce mécanisme; et c'est pour n'avoir pas vu ce mécanisme tout entier, qu'il

n'a donné qu'une explication erronée de ce phénomène si singulier et qui embarrasse depuis si long-temps les physiologistes, savoir : que, bien que les poissons ne respirent dans l'eau que l'air, ils meurent par asphyxie dans l'air, où pourtant, et puisque ce n'est pas l'eau mais l'air qu'ils respirent, ils devraient respirer plus commodément que dans l'eau.

§ III.

1. Si l'on examine un poisson qui respire dans l'eau, on distingue bientôt les deux mouvements principaux qui constituent sa respiration, et que Duverney a si bien marqués. Dans l'un, toutes les parties de l'appareil, la bouche, la gorge, l'arcade palatine, les opercules, les rayons et la membrane branchiostèges, les arcs branchiaux, se dilatent; l'eau entre par la bouche, et c'est l'inspiration : dans l'autre, toutes ces parties se resserrent, se rapprochent, se rétrécissent; l'eau, pressée de toute part, sort par l'ouverture des ouïes, et c'est l'exspiration.

2. Mais tous ces mouvements, quelque variés, quelque nombreux qu'ils soient, composent-ils à eux seuls tout le mécanisme respiratoire? Non : car tous ces mouvements ne sont qu'un moyen, ce moyen a un but, ce but est le développement des branchies ou de l'organe respiratoire même.

3. Ce n'est donc pas tout que d'avoir vu le mécanisme par lequel s'effectuent tous ces mouvements; il fallait encore voir quel est le mécanisme par lequel tous ces mouvements concourent à opérer le développement des branchies; il fallait voir s'ils suffisent à l'opérer; il fallait voir s'ils

l'opèrent également dans l'air et dans l'eau : et ce sont là tout autant de points que Duverney n'a ni vus ni songé à voir.

4. Ainsi donc, Duverney a vu le mécanisme par lequel se meuvent presque toutes les parties de l'appareil ; ce qu'il n'a pas vu, c'est le développement des branchies, pour lequel seul pourtant tout ce mécanisme est fait ; omission d'un grand anatomiste qui n'a point été réparée depuis, du moins à ma connaissance.

§ IV.

1. La détermination du mode selon lequel se développent les branchies étant, conséquemment à ce que je viens de dire, le point important et le point jusqu'ici négligé du mécanisme respiratoire, c'est de cette détermination que j'ai dû m'occuper d'abord.

2. Or, si l'on examine un poisson qui respire dans l'eau, d'une respiration libre et régulière, on voit ses branchies, et toutes les parties de ses branchies, s'approcher et s'écarter, ou, en d'autres termes, se resserrer et se développer tour à tour.

3. Pour mieux suivre ce mécanisme du mouvement des branchies dans tous ses détails, j'ai successivement enlevé, sur plusieurs tanches et sur plusieurs carpes, soit l'opercule d'un seul côté, soit les deux opercules ; et comme ces ablations n'ont pas empêché ces poissons de survivre durant plusieurs jours (1), j'ai pu répéter et varier, avec tout le soin convenable, mes observations.

(1) Quoique, dès l'ablation même des opercules, l'énergie du mécanisme respiratoire, soit pour l'inspiration, soit pour l'exspiration, et conséquemment pour le renouvellement ou le passage de l'eau, fût très-diminuée. Aussi les poissons à opercules enlevés ne font-ils presque plus

4. J'ai donc vu que, pendant la respiration, les branchies 1° s'écartent et se rapprochent tour à tour les unes des autres; 2° qu'elles s'écartent l'une de l'autre en se portant en avant, et qu'elles se rapprochent en se portant en arrière; 3° que, dans leur rapprochement, elles ne vont jamais jusqu'à se toucher, et gardent toujours une certaine distance entre elles; 4° qu'au contraire, les deux feuillets de chaque branchie, après s'être brusquement détachés et écartés, se réappliquent promptement et complétement l'un sur l'autre; 5° que les branchies sont continuellement agitées d'un double mouvement d'extension et de raccourcissement alternatifs, d'une part, et de rotation d'arrière en avant et d'avant en arrière, de l'autre; et 6° que les lames ou franges de chaque feuillet, après s'être écartées, se rapprochent et vont quelquefois jusqu'à se toucher (1).

---

aucun mouvement, et faut-il renouveler beaucoup plus souvent l'eau dans laquelle ils sont placés.

(1) J'ai vu, en second lieu (ce qui avait été déja plus ou moins bien vu par d'autres), que les arcs branchiaux 1° ont chacun deux mouvements distincts, l'un de rotation d'avant en arrière et réciproquement, l'autre d'élongation et de raccourcissement alternatifs; mouvement d'élongation et de raccourcissement qui, comme le mouvement particulier de l'arcade palatine, avait échappé à Duverney, et qui, comme le mouvement de cette arcade, a été décrit depuis par M. Cuvier; 2° que le mouvement de rotation ou de transport en avant correspond toujours au mouvement d'élongation, et le mouvement de rotation en arrière, au mouvement de raccourcissement; 3° que le mouvement de rotation en avant écarte les arceaux, et que celui de rotation en arrière les rapproche; et 4° ce qui se voit surtout par la bouche maintenue ouverte, que le mouvement d'écartement va jusqu'à amener un vide entre les dentelures des arceaux, et le mouvement de rapprochement jusqu'à porter ces dentelures les unes sur les autres.

5. Après avoir ainsi déterminé les divers genres de mouvements propres à chacune de ces parties, je voulus déterminer l'ordre que ces mouvements observent entre eux.

6. Or, je vis bientôt, et toujours sur des carpes et des tanches dont les opercules étaient enlevés : 1° que la rotation des arcs et des branchies en avant, la séparation des deux feuillets de chaque branchie, l'éloignement des lames ou franges de chaque feuillet, c'est-à-dire tous les mouvements d'écartement ou de développement, s'opéraient simultanément ; 2° que, par opposition, la rotation des arcs et des branchies en arrière, la rejonction des feuillets, le réappliquement des lames, c'est-à-dire tous les mouvements de resserrement ou de rétrécissement, s'opéraient simultanément de même ; et 3° que chacun de ces deux mouvements principaux, soit de resserrement, soit de développement, correspondait toujours au mouvement pareil des parties extérieures de la respiration, c'est-à-dire des opercules, de l'hyoïde, de l'arcade palatine, des deux mâchoires, des rayons et de la membrane branchiostèges.

7. Je n'entre point ici dans le détail des mouvements de ces dernières parties ; mouvements qui, pour la plupart, ont été si bien indiqués par Duverney, comme je l'ai déja dit, et qui, comme tout ce qui tient à la structure de l'appareil respiratoire des poissons, ont été si complétement exposés depuis dans deux grands ouvrages de M. Cuvier, ses *Leçons d'Anatomie comparée*, et son *Histoire naturelle des poissons* (1).

8. Je reviens au développement ou écartement des bran-

(1) Voyez aussi au sujet de la structure et du mécanisme de la respiration des poissons : Broussonnet, Mémoire de l'Acad. roy. des Sciences

chies, et à la concordance de ce développement avec celui de toutes les autres parties de l'appareil.

9. Ainsi donc, le mécanisme respiratoire des poissons se compose de deux mécanismes distincts : celui de l'appareil extérieur, et celui de l'appareil intérieur.

10. Voyons maintenant quels sont les ressorts par lesquels ces deux mécanismes s'opèrent, soit dans l'air, soit dans l'eau ; et jusqu'à quel point l'un et l'autre s'opèrent dans l'un ou l'autre de ces deux milieux.

§ V.

1. Si on examine un poisson qui respire dans l'eau, on voit ses mâchoires, son hyoïde, son arcade palatine, ses opercules, ses arcs branchiaux, etc., se mouvoir dans un certain ordre.

2. Si l'on met ce poisson dans l'air, toutes ces parties non-seulement se meuvent encore, mais elles se meuvent avec une énergie, avec une violence qu'elles n'avaient pas dans l'eau.

3. Cependant le poisson, dans l'air, meurt bientôt par asphyxie. Ainsi donc, ni le mouvement de toutes ces parties, puisqu'il subsiste, ni l'intervention de l'air, puisque l'animal y est plongé, ne suffisent à l'accomplissement de sa respiration.

4. Si, ne bornant plus son attention aux mouvements de l'appareil extérieur, on examine ce qui se passe dans les branchies mêmes, on voit ces branchies et toutes les parties

---

de Paris, an. 1785.—M. Duméril, *Mémoire sur le mécanisme de la respiration des poissons;* M. de Humboldt, *Recherches sur la respiration des poissons ;* etc.

de ces branchies, quand le poisson respire dans l'eau, se mouvoir, et se mouvoir dans l'ordre (d'écartement et de rapprochement alternatifs) que j'ai exposé plus haut.

5. Mais si l'on met ce poisson dans l'air, tout aussitôt ses branchies ne se meuvent plus. Il n'en est donc pas de leur mouvement, comme du mouvement de l'appareil extérieur; celui-ci persiste dans l'air, et celui des branchies n'y persiste pas.

6. J'ai souvent observé, sur plusieurs tanches, sur plusieurs carpes, et soit que les opercules fussent enlevés ou non, l'état des branchies, quand le poisson est dans l'air; et j'ai toujours vu qu'au lieu et de l'écartement des branchies, et de celui de leurs feuillets, et de celui de leurs lames, tous écartements qui constituent le développement des branchies dans l'eau, ces branchies et toutes leurs parties ne formaient plus, dans l'air, qu'une masse, un faisceau solides: à peine si ce faisceau tout entier se mouvait un peu et en bloc (1); à peine si les branchies, ébranlées par les efforts violents de l'appareil extérieur, glissaient un peu les unes sur les autres; mais aucune partie de cette masse, de ce faisceau solides qu'elles formaient, ne se détachait, ne se séparait, ne s'écartait plus; toutes ces parties restaient attachées et collées les unes aux autres.

7. En replongeant, au contraire, l'animal dans l'eau, je voyais aussitôt toutes ces parties se détacher et se séparer;

(1) Quelquefois dans les mouvements des opercules, une branchie (en général, l'antérieure ou la postérieure) reste collée ou à l'opercule (l'antérieure), ou au corps (la postérieure), et se trouve ainsi accidentellement séparée du faisceau commun.

les branchies prendre une certaine distance entre elles ; leurs feuillets s'ouvrir et se fermer tour à tour ; et tour à tour leurs lames s'éloigner et se rapprocher.

8. Or, le développement total des branchies n'est que le résultat de l'écartement partiel de chacune de leurs parties : cet écartement n'ayant plus lieu dans l'air, les branchies ne s'y développent donc pas. D'un autre côté, le développement des branchies étant le but final de tout le mécanisme respiratoire, et ce développement ne s'opérant plus dans l'air, l'animal ne respire donc réellement plus dans l'air, ou il n'y respire que d'une manière très-imparfaite, et conséquemment il y succombe bientôt par asphyxie. Enfin, le mouvement actif de l'appareil extérieur (et je n'excepte pas celui des arcs branchiaux, car il subsiste dans l'air comme celui de toutes les parties de l'appareil extérieur) ne suffit pas sans l'intervention de l'eau pour opérer le développement des branchies, pas plus que le mouvement actif du thorax, par exemple, dans les mammifères et les oiseaux, ne suffirait à développer les poumons sans l'intervention de l'air.

9. Ainsi, dans un mammifère, quand le thorax est ouvert, l'air ne pénétrant plus dans les poumons, ces poumons ne se dilatent plus aussi ; mais les mouvements du thorax n'en subsistent pas moins un certain temps encore : ces mouvements subsistent surtout long-temps, si un seul côté du thorax est ouvert, parce qu'alors l'animal respire par le développement du poumon de l'autre côté.

10. Or, ces poumons du mammifère qui, le thorax ouvert, ne se dilatent plus, bien que tous les mouvements du thorax persistent, ce sont ces branchies du poisson qui, l'animal

étant à l'air, ne se développent plus, bien que tous les mouvements, et des opercules, et des mâchoires, et de l'arcade palatine, etc., subsistent : dans les deux cas, l'organe respiratoire est plongé dans l'air; mais, dans les deux cas, il ne se développe pas, et il est tout aussi naturel, dans l'un de ces cas que dans l'autre, que l'animal succombe par asphyxie.

§ VI.

1. L'eau joue donc un rôle constant et déterminé dans le mécanisme de la respiration des poissons; et ce rôle est tel que si l'on plonge dans l'eau un poisson mort (1), on voit ses branchies et toutes leurs parties, leurs feuillets, leurs lames, jusqu'aux arcs branchiaux, prendre un certain écartement entre elles et le garder : mais 1° cet écartement n'est plus aussi prononcé que pendant la vie de l'animal; et 2° il ne s'y joint plus ce mouvement continuel qu'on y observait alors.

2. Ainsi donc, c'est l'eau qui écarte les branchies et qui les maintient dans un certain écartement donné; et c'est le mouvement actif de l'appareil, joint à l'intervention de l'eau, qui les meut et qui porte leur écartement au plus haut degré qu'il leur soit possible d'atteindre.

3. Deux ressorts distincts déterminent donc le développe-

(1) D'un autre côté, si, un poisson vivant étant mis dans l'air, on répand de l'eau sur ses branchies, on voit aussitôt toutes les parties de ces branchies se détacher ou se décoller, l'eau pénétrer plus ou moins dans tous leurs interstices, atteindre plus ou moins toutes leurs surfaces; et c'est là le mécanisme par lequel l'eau aérée, répandue sur les branchies, prolonge la respiration des poissons dans l'air.

ment de l'organe respiratoire des poissons : l'un, le mouvement actif des diverses parties de l'appareil ; l'autre, l'intervention de l'eau.

4. Maintenant, pour concevoir comment l'écartement et le mouvement des branchies s'opèrent facilement dans l'eau, et comment ils ne peuvent s'opérer dans l'air, il n'y a qu'à réfléchir sur les deux points suivants.

5. 1° L'eau maintient les branchies et toutes leurs parties, leurs feuillets, leurs lames, isolées; voilà donc un premier écartement qui se fait sans aucun effort de la part de l'animal : dans l'air, au contraire, toutes ces parties, par leur affaissement, se superposent, et il faudrait, pour surmonter leur force d'adhérence, une force à laquelle l'énergie musculaire de l'animal ne suffit pas.

6. 2° Quant au mouvement oscillatoire des feuillets et des lames, il suffit dans l'eau, pour le produire, du plus léger effort, parce que ces lames et ces feuillets y sont dans un état presque d'équilibre ; pour les mouvoir dans l'air, au contraire, il faudrait surmonter l'action totale de leur pesanteur.

7. Ainsi donc, l'eau, 1° isolant toutes les parties de l'organe branchial, supprime tout besoin d'effort musculaire pour ce premier isolement ; 2° maintenant toutes ces parties presque dans un état d'équilibre, elle diminue d'autant la quantité de force musculaire qu'il eût fallu dépenser pour leur mouvement; 3° c'est parce que, dans l'air, l'animal n'est plus aidé par une pareille intervention, que, réduit à ses seules forces, il ne peut plus ni isoler, ni mouvoir ces parties ; et 4° enfin, c'est à la diversité d'action ou de concours des deux milieux où elles sont alternativement plongées, que tient la possibilité

ou la non-possibilité alternatives du développement et du mouvement de toutes ces parties.

8. On sent donc que, pour ce qui n'est que du mécanisme, tout autre liquide pourrait y servir aussi bien que l'eau : aussi ai-je vu le mécanisme respiratoire des poissons s'opérer dans du vin, dans de l'huile, etc., bien que les qualités nuisibles de ces liquides et le défaut d'air permissent à peine à l'animal de survivre quelques instants.

9. On sent encore que, puisque la respiration du poisson ne dépend, quant au mécanisme, que du développement des branchies, si l'on entravait ce développement dans l'eau, l'animal y succomberait bientôt par asphyxie, comme dans l'air.

10. Il y a un moyen fort simple d'empêcher le développement des branchies dans l'eau, c'est de lier les opercules. Si la ligature est serrée au point de ne permettre aucun mouvement aux opercules et à l'hyoïde, l'animal succombe bientôt; si, au contraire, la ligature est assez lâche pour permettre aux opercules un certain mouvement, qui ne va pourtant pas jusqu'à laisser passer l'eau par l'ouverture des ouïes, alors l'eau est tour à tour avalée et rejetée par la bouche, et l'animal *inspire* et *exspire* par la même ouverture, comme les vertébrés aériens.

11. Mais la ligature des opercules, quand elle est très-serrée, empêchant l'eau de pénétrer jusqu'aux branchies, et n'empêchant pas, quand elle est peu serrée, un certain développement des branchies, il fallait avoir recours à des expériences plus décisives.

12. Or, le but du développement de tout organe respiratoire n'est, comme on l'a déja vu, que de présenter le sang

à l'air par une plus grande surface; et, comme on l'a vu encore, le poisson n'est asphyxié dans l'air que parce que, ses branchies ne s'y développant plus, au lieu de trente-deux surfaces (à ne compter même que les feuillets) qu'elles présentaient à l'air, dans l'eau, elles ne présentent plus à l'air, dans l'air, que les quatre surfaces des deux faisceaux solides qu'elles y forment. Il s'ensuivait donc que, en réduisant peu à peu le nombre des surfaces développées dans l'eau au nombre des surfaces développées dans l'air, on devait peu à peu réduire la respiration à être aussi imparfaite dans l'eau que dans l'air.

13. J'ai donc lié d'abord, pour prévenir l'effusion du sang, et retranché ensuite, soit une, soit deux, soit trois branchies de chaque côté et les arcs qui les portent; et, les branchies réduites à ce dernier état, j'ai vu la respiration, jusque là de plus en plus affaiblie, être à peu près aussi imparfaite dans l'eau qu'elle l'est naturellement dans l'air; et l'animal, ainsi mutilé, ne survivre dans l'eau qu'un temps à peu près égal au temps pendant lequel il eût, avec des branchies demeurées intactes, survécu dans l'air.

§ VII.

1. J'ai supposé jusqu'ici, comme un fait établi, que le poisson meurt dans l'air par asphyxie; voici quelques expériences propres à lever, sur ce point, tous les doutes, s'il en restait.

2. 1° J'ai maintenu dans l'air, durant un certain temps, plusieurs tanches et plusieurs carpes; et, ces poissons étant au moment de succomber, je les ai vus constamment reprendre une certaine énergie, dès que j'écartais les branchies les unes des autres, ou, en d'autres termes, dès que j'accrois-

sais artificiellement ainsi l'étendue ou le développement des surfaces branchiales présentées à l'air.

3. 2° C'est surtout dans les poissons que l'on a privés de leurs opercules que se voit bien tout l'effet de cet accroissement artificiel des surfaces. Un pareil poisson étant mis dans l'air, ses branchies deviennent peu à peu d'abord bleuâtres, puis noirâtres, et l'animal est sur le point de suffoquer; mais si on dilate alors les branchies, et qu'on les maintienne dilatées par l'écartement artificiel des arcs branchiaux, on voit ces branchies redevenir plus ou moins rouges et les signes de suffocation disparaître (1).

4. 3° Une expérience plus simple, et non moins directe, est de maintenir alternativement, et pendant un certain temps, un poisson dans l'air et dans l'eau; on voit alternativement alors, et au bout d'un certain temps, ses branchies devenir noirâtres dans l'air, et reprendre dans l'eau leur couleur rouge; et à mesure qu'elles deviennent noirâtres, l'animal offrir de plus en plus des signes d'angoisse et de suffo-

---

(1) On a cru pouvoir expliquer par le seul *dessèchement des branchies* l'asphyxie des poissons dans l'air; mais outre que ce *dessèchement* ne saurait avoir lieu dans les poissons qui meurent à l'instant même où on les tire de l'eau, j'ai toujours vu la mort d'un poisson quelconque survenir dans l'air avant que les branchies fussent *sèches*; j'ai toujours vu ces branchies, quelque temps même après la mort du poisson, contenir une certaine couche d'eau que le contact ou la pression y constataient. En second lieu, on voit par mes expériences que plus on écarte les branchies, (c'est-à-dire plus on accroît le *dessèchement*) et plus on prolonge la vie du poisson dans l'air; ce qui seul montre que, dans l'asphyxie du poisson dans l'air, le *défaut d'air* est une cause bien autrement immédiate et prochaine que le *dessèchement*.

cation; et à mesure qu'elles redeviennent rouges, l'animal reprendre son énergie.

5. Ainsi donc, et quant à la respiration même, tout dépend du développement ou de l'étendue des surfaces de l'organe respiratoire; et, soit dans l'air, ou dans l'eau, quand ce développement n'a plus lieu, l'animal succombe par asphyxie.

§ VIII.

1. On voit maintenant que la contradiction entre ces deux faits, l'un, que le poisson ne respire, dans l'eau, que l'air, et l'autre, qu'il meurt asphyxié dans l'air, n'est qu'une contradiction apparente; puisque c'est précisement quand il est dans l'air que l'air ne pénètre pas dans ses poumons, et que l'air n'y pénètre que quand il est dans l'eau.

2. On voit aussi combien est peu fondée l'opinion de Duverney qui, pour expliquer ce singulier contraste, suppose que le poisson meurt asphixié dans l'air parce que ses branchies *laissent un passage trop libre, trop large à l'air* (1); c'est précisément, au contraire, parce que l'air n'y peut plus passer ou les pénétrer.

3. On voit enfin, et en résumant tout ce qui précède, 1° que, dans les poissons, comme dans les vertébrés aëriens, le but définitif de tout le mécanisme respiratoire est le développement de l'organe respiratoire même; 2° que, dans les poissons, le développement de cet organe, ou des branchies, ne peut être opéré que par l'intervention de l'eau; 3° que, quelque énergiques que se maintiennent les mouvements du

---

(1) Hist. de l'Acad. des Sciences, an. 1701.

reste de l'appareil dans l'air, ces mouvements n'y produisent pas ce développement; et 4° que c'est parce que ce développement n'est pas produit dans l'air que l'animal y succombe par asphyxie.

4. Mais, arrivé à ce point de mon Mémoire, je sens qu'il se présente une grande difficulté dont les physiciens seront juges. Cette difficulté est de savoir si les quatre surfaces branchiales développées dans l'air n'équivalent pas aux trente-deux surfaces développées dans l'eau, et s'il n'y a pas compensation entre une petite surface et beaucoup d'air, d'une part, et une grande surface et très peu d'air, de l'autre.

5. Il est évident que, cette compensation admise, ou, en d'autres termes, le non-développement des surfaces branchiales ne suffisant pas à expliquer l'asphyxie du poisson dans l'air, il faudrait nécessairement supposer le concours de quelque autre cause.

6. Mais d'abord, je n'ai compté encore, en comparant les surfaces développées dans l'air aux surfaces développés dans l'eau, que les surfaces des feuillets : il faut y ajouter les surfaces des lames ou franges, lesquelles ne se développent pas dans l'air, comme on a vu, et qui, se développant dans l'eau, y déploient une multitude de nouvelles surfaces, dont le nombre, d'après le calcul de Duverney, s'élève à huit mille six cent quarante.

7. Ne pourrait-on pas dire d'ailleurs que, indépendamment de ce nombre infini de surfaces qui, dans l'air, sont perdues pour la respiration, celles mêmes que l'air y atteint, étant plus ou moins recouvertes d'une certaine couche d'eau, cette couche d'eau, adhérente et non renouvelée, s'oppose à

la pleine et entière action de l'air sur elles? Car, bien qu'à mesure que cette couche perd son oxigène, par la respiration, elle en reprenne à l'air, elle n'en reprend pourtant que proportionnellement, et à la petite quantité d'eau qui la compose, et au petit nombre de surfaces qu'elle recouvre. Ne pourrait-on pas dire que l'affaisement des surfaces (et je ne parle toujours que de celles que l'air atteint) s'opposant à ce que le sang les parcoure et s'y renouvelle avec autant de facilité que lorsqu'elles se développaient, diminue d'autant la quantité de sang qui respire? Ne faut-il pas tenir compte enfin de ce mélange, dans la circulation, de deux sangs dont l'un, celui des branchies extérieures, a reçu l'oxigénation, et dont l'autre, celui des branchies intermédiaires, n'a pas été modifié : mélange qui réduit la circulation parfaite du poisson à une circulation imparfaite, ou mêlée de sang rouge et de sang noir, comme celle du reptile, et qui réunit par-là, dans le même animal, à une respiration déja imparfaite une circulation devenue imparfaite aussi?

8. Quoi qu'il en soit de ces conjectures sur les causes, plus ou moins secondaires, qui peuvent se joindre à la cause immédiate et prochaine du non-développement des branchies, pour déterminer l'asphyxie du poisson dans l'air, je sépare ces conjectures des expériences mêmes de ce Mémoire; et je ne les donne ici que comme des essais, qui pourront en appeler d'autres, sur une question aussi importante que difficile.

RAPPORT

SUR

L'OUVRAGE DE M. JACOBI,

INTITULÉ :

FUNDAMENTA NOVA THEORIÆ FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.

Lu à l'Académie des Sciences, le 21 décembre 1829.

PAR M. POISSON.

POUR expliquer autant qu'il sera possible sans le secours des signes algébriques, l'objet de cet ouvrage dont l'Académie m'a chargé de lui rendre compte, et surtout pour faire connaître l'extension nouvelle et inattendue que l'auteur a donnée à cette théorie, je rappellerai d'abord les travaux de ses prédécesseurs dans la même matière.

(1) Sur la proposition de M. Lacroix, l'Académie a arrêté que ce rapport serait inséré dans la collection de ses Mémoires. On y a ajouté quelques notes, où l'on trouvera les nouvelles formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première espèce.

Les fractions rationnelles et quelques formules qui s'y ramènent immédiatement ou par une transformation très-simple, sont les seules différentielles dont on sache trouver les intégrales indéfinies. Relativement aux intégrales définies, le nombre de celles que l'on sait déterminer par différents moyens, est beaucoup plus considérable; mais ce nombre est encore extrêmement petit, eu égard à celui des intégrales qui peuvent se rencontrer dans les diverses applications de l'analyse; et le plus souvent on est obligé de calculer leurs valeurs approchées, soit par la réduction en séries convergentes, soit par la méthode des quadratures. Il y a lieu de penser que la plupart des intégrales qui ont résisté jusqu'à présent aux efforts si souvent réitérés des géomètres, et qui échappent à des méthodes où l'on a mis en œuvre toutes les ressources de l'analyse, sont impossibles sous forme finie, quoique cette impossibilité n'ait encore été démontrée pour aucune d'elles (1). Cela étant, on a cherché à diminuer le nombre de ces quantités transcendantes, en les faisant dépendre les unes des autres; ce qui a donné naissance à une branche d'analyse, très-étendue et d'une grande importance, dont l'objet est la comparaison et la réduction des intégrales.

Les principales classes d'intégrales que l'on a ainsi comparées entre elles, se réduisent à trois. Les unes sont les intégrales définies que M. Legendre a nommées *intégrales*

---

(1) Dans la Mécanique céleste, Laplace dit qu'il a démontré que l'intégrale d'où dépend l'attraction des sphéroïdes elliptiques, est impossible; mais cette démonstration n'a été publiée nulle part, et l'on n'en a trouvé aucune trace dans les papiers de l'auteur.

Eulériennes de première et de seconde espèce, et dont il a exposé la théorie avec tous les développements que l'on peut désirer. Les autres constituent les *fonctions elliptiques* qui doivent être l'objet spécial de ce rapport. Ces fonctions sont susceptibles de trois formes distinctes, et se divisent, en conséquence, en fonctions elliptiques de première, de seconde et de troisième espèce ; chacune des fonctions des deux premiers ordres ne renferme qu'une seule constante qu'on nomme le *module;* la fonction de seconde espèce est l'arc d'ellipse ; celle de troisième espèce est la plus compliquée, et contient deux quantités constantes. La variable d'où dépend chaque fonction s'appelle l'*amplitude*.

On compare les fonctions elliptiques sous deux points de vue différents : par rapport aux grandeurs de l'amplitude d'une même fonction, et relativement aux grandeurs du module de deux fonctions de même espèce, ou de deux fonctions d'espèce différente. Le théorème de *Fagnani* par lequel on assigne, sur une même ellipse, deux arcs dont la différence est une quantité donnée, et la division de la *Lemniscate* en parties égales, que ce géomètre a fait dépendre d'équations algébriques, se rapportent au premier mode de comparaison. Ce sont les premières questions de ce genre, dont les géomètres se soient occupés : elles datent de 1750 ; et on les citera toujours dans l'histoire du calcul intégral, comme le germe et l'origine de la théorie des fontions elliptiques. Vient ensuite (en 1761) une des plus belles découvertes d'*Euler*, l'intégration sous forme finie, d'une équation à deux termes dont aucun ne peut s'intégrer séparément. L'intégrale qu'Euler a obtenue, fait connaître les sinus et cosinus de la somme et de la différence des amplitudes de deux fonctions données ;

elle comprend les résultats particuliers que Fagnani avait donnés, et tout ce qui concerne le premier mode de comparaison des fonctions elliptiques et leur division en parties égales. Sur ce premier point, Euler n'a rien laissé à faire à ses successeurs, si ce n'est la résolution même des équations algébriques, d'où dépend la division d'une fonction donnée; résolution qui a été trouvée quatre-vingts ans plus tard, ainsi que nous le dirons à la fin de ce rapport. Mais M. Legendre remarque, comme une chose singulière, qu'Euler ne se soit jamais occupé de l'autre mode de comparaison et de réduction des fonctions elliptiques. Le premier pas qu'on a fait dans cette seconde partie, est le théorème de *Landen*, sur la réduction de l'arc d'hyperbole aux arcs d'ellipse. Quelque temps après (en 1784), Lagrange donna une méthode applicable à toutes les fonctions elliptiques, dont le but est d'en faciliter le calcul numérique, en augmentant ou diminuant de plus en plus la grandeur du module. Et, en effet, après qu'on a rendu par ce procédé, le module d'une fonction, très-peu différent de zéro ou de l'unité, on achève ensuite, sans difficulté, le calcul de sa valeur approchée. En la considérant comme une méthode d'approximation, celle que l'on doit à Lagrange ne laisse donc rien à désirer; mais indépendamment de leurs valeurs numériques, il existe entre les fonctions elliptiques, des relations nombreuses qu'il est intéressant de connaître, et qu'on doit regarder comme autant de théorèmes d'analyse, ou bien encore, comme autant d'intégrales particulières d'une équation à deux termes, d'où il est facile de conclure son intégrale complète. Or, à cet égard, Lagrange est loin d'avoir épuisé la matière; et il ne paraît pas même qu'il ait envisagé la question sous ce point de vue. Quoi qu'il en soit, par sa méthode, on établit entre deux fonctions de première espèce, un rapport constant ou indépendant des amplitudes. Leurs modules se déduisent très-simplement l'un de l'autre; et en répétant indéfiniment la même opération, on obtient une suite de fonctions équivalentes dont le rapport change continuellement d'un terme à l'autre, et l'on forme en même temps la série de leurs modules, ascendante dans un sens et descendante dans le sens opposé. Cette série est ce qu'on appelle une *échelle de modules:* celle qui se déduit de la méthode de Lagrange était la seule que l'on connût jusqu'à ces derniers temps.

Tel était l'état de cette partie de la science en 1786, lorsque M. Legendre donna un premier mémoire sur la comparaison des arcs d'ellipse. Depuis cette époque, jusqu'à la publication de son Traité des fonctions elliptiques, en 1825, M. Legendre est à peu près le seul géomètre qui se soit occupé de cette théorie. Après en avoir perfectionné successivement toutes les parties, notre illustre confrère les a réunies en un corps de doctrine qui contient un grand nombre de réductions et de propriétés des fonctions elliptiques que l'auteur a le premier fait connaître, et particulièrement une nouvelle échelle de module dont la découverte lui est également due. L'ouvrage de M. Legendre renferme les méthodes les plus simples pour réduire en tables, les valeurs numériques des trois espèces de fonctions elliptiques ; et joignant l'exemple aux préceptes, l'auteur a formé effectivement des tables de ces valeurs, calculées à un très-grand degré d'approximation. Le premier volume contient aussi des tables analytiques, comprenant un grand nombre d'intégrales qui se réduisent aux fonctions elliptiques ; réduction dont Maclaurin et d'Alembert avaient autrefois donné quelques exemples. On y trouve, en outre, les solutions de plusieurs problèmes de géométrie et de mécanique, propres à montrer l'usage des fonctions elliptiques et des tables de leurs valeurs numériques.

J'essaierai maintenant de donner à l'Académie une idée générale de l'ouvrage qui lui a été adressé par M. Jacobi, professeur à l'Université de Kœnisberg (1). L'auteur prouve que l'on peut transformer une fonction donnée de première espèce, en une autre, et établir entre elles un rapport constant, en prenant pour le sinus de l'amplitude de l'une, une fonction rationnelle du sinus de l'amplitude de l'autre, qui contient un nombre impair quelconque, et dont il assigne tous les coefficients pour chaque valeur de ce nombre (*note* A). Ces coefficients renferment les racines de l'équation algébrique, relative à la division en ce même nombre de parties égales, de la fonction donnée, dans le cas où son amplitude est égale à un angle droit. M. Jacobi donne aussi, au moyen des mêmes racines, l'expression du rapport des deux fonctions et la relation de leurs modules. En répétant indéfiniment cette réduction d'une fonction à une autre, il en résultera donc une échelle de modules, qui équivaudra à un nombre illimité d'échelles différentes, à raison du nombre indéterminé dont elle dépend, et qui sera même une échelle multiple pour chaque valeur particulière de ce nombre, à cause que chaque module se déduit du précédent par la résolution d'une équation d'un degré élevé (*note* B). Ainsi la découverte principale de M. Jacobi consiste en ce qu'il a résolu d'une infinité de manières différentes, et par des formules très-remarquables en elles-mêmes, un problème d'analyse dont on ne

(1) Dans sa séance du 8 février 1830, l'Académie a nommé M. Jacobi *correspondant* pour la section de géométrie.

connaissait auparavant que deux solutions particulières. L'échelle de modules que M. Legendre a trouvée et qui n'était pas encore connue de M. Jacobi, est renfermée dans la solution générale et répond au nombre trois. L'ancienne échelle n'y est pas comprise explicitement; mais elle a avec l'échelle indéterminée de M. Jacobi, une très-grande analogie, et peut être censée appartenir au nombre deux.

L'équation algébrique entre les modules des deux fonctions qu'on veut réduire l'une à l'autre, étant très-difficile à former, quand le nombre auquel ils répondent est un peu considérable, on y substitue avec avantage une équation transcendante, très-importante dans cette théorie, et dont M. Legendre a montré l'usage pour calculer la valeur approchée d'un terme quelconque de l'échelle des modules. M. Jacobi a aussi exprimé la relation entre deux modules consécutifs, par une équation différentielle du troisième ordre, qu'il a intégrée complètement au moyen des fonctions elliptiques. Des tables numériques de ces fonctions ayant été calculées, on peut maintenant admettre ce mode d'intégration dans l'analyse, aussi bien que l'intégration par arcs de cercle et par logarithmes. M. Legendre en avait déja donné l'exemple, à l'égard de deux équations différentielles du second ordre, et d'une équation du premier ordre, analogue à l'équation de *Riccati*.

Par une combinaison très-simple des formules de M. Jacobi, on obtient une solution nouvelle du problème de la multiplication et de la division des fonctions elliptiques dans le cas d'une amplitude quelconque, en supposant le problème résolu lorsque l'amplitude est un angle droit (*note C*). On en conclut immédiatement que l'équation relative à la division en un nombre impair de parties égales, dont le degré est marqué par le carré de ce nombre, peut se décomposer en deux autres, d'un degré seulement égal à ce même nombre. C'est de cette manière que M. Jacobi a résolu le premier par des radicaux du second et du troisième degré, le problème de la trisection d'une fonction elliptique dont le module et l'amplitude sont donnés.

En rendant infini le nombre indéterminé que ses formules renferment, M. Jacobi parvient, dans la seconde partie de son ouvrage, à de nouvelles formules au moyen desquelles le sinus et d'autres fonctions trigonométriques de l'amplitude se trouvent exprimés, soit en produits d'une infinité de facteurs, soit en séries infinies (Note D). L'auteur fait voir comment ces séries peuvent servir à la démonstration des théorèmes de *Fermat;* ce qui établit un rapport singulier entre la décomposition des nombres en plusieurs carrés et la transformation des fonctions elliptiques, et donne lieu à une nouvelle application de l'analyse à la théorie des nombres, tout-à-fait semblable aux recherches d'Euler sur la *partition* des nombres. Enfin M. Jacobi s'est aussi occupé de la réduction des fonctions de seconde et de troisième espèce; et depuis la publication de l'ouvrage dont nous rendons compte, il a donné suite à ses recherches sur ce point, dans un mémoire qui fait partie de l'un des derniers numéros du journal de M. Crelle. Il nous serait impossible de donner aucune idée de cette partie de son travail; nous dirons seulement que l'auteur propose de remplacer ces fonctions elliptiques, par deux autres transcendantes dont il a formé les développements en séries, et qui seraient plus simples que la fonction de troisième espèce, en ce qu'elles ne dépendent que de deux éléments, tandis que cette fonction contient trois quantités, l'amplitude, le module et le paramètre.

Aucun de nous n'a oublié les éloges que M. Legendre a donnés aux travaux de M. Jacobi, en les annonçant à l'Académie à mesure que l'auteur les lui communiquait, ou qu'il les publiait dans les Journaux de M. Schumacher et de M. Crelle. L'importance que M. Legendre y attache est encore prouvée par l'empressement qu'il a mis à publier deux suppléments à son Traité des fonctions elliptiques, où il expose les résultats de ces travaux, avec tous les développements nécessaires et des additions qui lui appartiennent. Le suffrage de M. Legendre en cette matière suffisait seul pour fixer l'opinion des géomètres et la mienne en particulier. L'étude que je viens de faire de l'ouvrage de M. Jacobi, n'a fait que confirmer l'idée que j'avais déjà du mérite de ses découvertes en analyse et de la haute capacité qu'elles supposent. Je partage également et je me plais à rappeler l'opinion émise par un de nos secrétaires, dans le compte rendu de 1828, en annonçant les travaux de M. Jacobi et d'un autre géomètre dont il me reste à parler : « les questions de « la philosophie naturelle, dit M. Fourier, qui ont pour but « l'étude mathématique de tous les grands phénomènes, « sont aussi un digne et principal objet des méditations des « géomètres. On doit désirer que les personnes les plus propres « à perfectionner la science du calcul, dirigent leurs travaux « vers ces hautes applications, si nécessaires aux progrès de « l'intelligence humaine. »

Qu'il me soit permis, avant de terminer ce rapport, d'ajouter encore quelques mots concernant des recherches analogues à celles de M. Jacobi, faites à la même époque par

M. Abel de Christiana, dont la mort prématurée est une des plus grandes pertes que les sciences pouvaient éprouver (1). Par un singulier hasard, Abel et M. Jacobi à peu près du même âge et inconnus l'un à l'autre, ont débuté en même temps dans la carrière des sciences, par de profondes investigations sur un même sujet, dont un seul géomètre s'occupait depuis long-temps; et plusieurs fois, il leur est arrivé de parvenir aux mêmes résultats, quoique les voies qu'ils ont suivies fussent très-différentes.

Dans son premier Mémoire sur les fonctions elliptiques, publié en 1827 dans le journal de M. Crelle, Abel eut l'heureuse idée de renverser la question et de considérer l'amplitude comme une fonction de l'intégrale, contrairement à ce qu'on avait fait jusque là. Il démontre que le sinus de l'amplitude est une fonction de l'intégrale qui a deux périodes distinctes, l'une réelle, comme le sinus d'un arc de cercle, et l'autre imaginaire, comme les fonctions exponentielles; ce qui est une découverte capitale, propre à jeter un grand jour sur la nature des fonctions elliptiques, et qui fait connaître la signification des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques que l'on obtient en égalant à zéro ou à l'infini, le sinus et d'autres fonctions trigonométriques de l'amplitude. L'auteur en conclut diverses expressions de ces fonctions en produits et en séries infinies, que M. Jacobi a obtenues ensuite par un moyen tout différent, ainsi que nous l'avons dit plus haut. Le même mémoire renferme aussi pour une amplitude quelconque, la

(1) Les géomètres français sauront gré à M. Abel d'avoir écrit ses ouvrages dans notre langue, et à M. Jacobi d'avoir fait usage du français ou du latin.

résolution complète de l'équation relative à la division d'une fonction elliptique, en supposant connue la résolution de la même équation dans le cas où l'amplitude est égale à un angle droit. Quant à ce cas particulier, l'auteur a d'abord fait voir que l'équation qui s'y rapporte peut se décomposer en deux équations auxiliaires d'un degré moins élevé, et que l'une de celles-ci est toujours résoluble par le procédé de M. Gauss, fondé sur la relation qui existe entre les racines et sur la considération des racines primitives des nombres. En revenant de nouveau sur le même sujet, il a montré que la seconde équation auxiliaire peut encore se résoudre par le même procédé, mais seulement dans quelques circonstances particulières, qui ont lieu par exemple relativement à la *Lemniscate;* d'où il conclut que la circonférence entière de cette courbe se divisera en parties égales, par la règle et le compas, dans les mêmes cas que la circonférence du cercle, c'est-à-dire, lorsque le nombre des parties sera premier et égal à une puissance de deux augmentée d'une unité.

Le second Mémoire du géomètre norvégien est postérieur aux premiers extraits publiés par M. Jacobi. L'auteur est conduit par ses propres idées à la transformation générale des fonctions de première espèce que son digne émule avait trouvée. Il termine son Mémoire en disant qu'il était achevé, lorsqu'il a eu connaissance du théorème de M. Jacobi; ce qu'on ne doit sans doute pas révoquer en doute, sans que cela change rien aux droits de M. Jacobi à l'antériorité.

Les recherches qu'il a publiées en moins de deux ans dans les journaux de M. Crelle et de M. Schumacher, prouvent, par leur nombre considérable, l'activité de son esprit et l'ardeur qu'il mettait à cultiver les sciences. Elles sont toutes remarquables par la généralité des considérations que l'auteur y expose, et par les vues nouvelles qu'il se proposait de développer. La mort a interrompu ses travaux avant qu'il eût achevé sa vingt-septième année; mais pendant une vie si courte, il s'est placé au premier rang parmi les géomètres; et dans ce qu'il a fait, la postérité saura reconnaître tout ce qu'il aurait pu faire, s'il eût vécu davantage.

Note A.

La démonstration du théorême de M. Jacobi peut se diviser en trois parties que je vais successivement exposer.

I.

Considérons d'abord la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-ax)(1-a'x)(1-a''x)(1-a'''x)}},$$

dans laquelle a, a', a'', a''', sont des constantes données; et proposons-nous d'y ramener une autre différentielle de la même forme, savoir :

$$\frac{\mu . dy}{\sqrt{(1-by)(1-b'y)(1-b''y)(1-b'''y)}},$$

en prenant pour y une fonction rationnelle de x, et déterminant convenablement μ, b, b', b'', b''', en fonctions de a, a', a'', a'''. On suppose ces quatre constantes inégales, ainsi que b, b', b'', b''', de manière que ces différentielles ne soient point intégrables sous forme finie.

Désignons par U et V deux fonctions rationnelles et entières de x, et par

$$y = \frac{U}{V},$$

la valeur cherchée de y. Pour que la seconde différentielle coïncide avec la première, il faudra qu'on ait

$$(V-bU)(V-b'U)(V-b''U)(V-b'''U)$$
$$=\mu^2(1-ax)(1-a'x)(1-a''x)(1-a'''x)\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right)^2. \quad (1)$$

Or, si l'on trouve par un moyen quelconque, des valeurs de U et V, et d'un troisième polynome T, qui rendent identique une équation :

$$(V-bU)(V-b'U)(V-b''U)(V-b'''U)$$
$$=(1-ax)(1-a'x)(1-a''x)(1-a'''x)\,T^2, \quad (2)$$

je dis qu'on aura nécessairement

$$T=\mu\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right),$$

en donnant à la constante μ une valeur convenable.

En effet, les deux polynomes U et V étant premiers entre eux, et les coefficients b, b', b'', b''', inégaux, les polynomes $V-bU$, $V-b'U$, $V-b''U$, $V-b'''U$, seront aussi premiers; par conséquent, les facteurs de T^2 ne pourront être que des facteurs doubles d'un ou de plusieurs de ces quatre polynomes. Réciproquement, les coefficients a, a', a'', a''', étant aussi inégaux, tous les facteurs doubles de ces polynomes sont facteurs de T^2; donc T^2 est égal au produit de tous les facteurs doubles de $V-bU$, $V-b'U$, $V-b''U$, $V-b'''U$, multiplié par un coefficient constant. Observons, de plus, que si p est le degré de U et de V, ou du plus élevé de ces deux polynomes, le premier membre de l'équation (2) sera du degré $4p$, et T, du degré $2p-2$; en sorte que ce nombre $2p-2$ sera celui des facteurs doubles de $V-bU$, $V-b'U$, $V-b''U$, $V-b'''U$.

D'un autre côté, on a identiquement

$$(V-bU)\frac{dU}{dx}-U\frac{d(V-bU)}{dx}=V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx};$$

ce qui montre que tout facteur double de $V-bU$ est un facteur simple de $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$. Il en sera de même à l'égard de tout facteur double des trois autres polynomes $V-b'U$, $V-b''U$, $V-b'''U$; par conséquent, le carré de $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ renfermera le produit de tous les facteurs doubles des quatre polynomes; ce qui exige que ce polynome $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ soit au moins du degré $2p-2$. Or, si p et p' sont les degrés de U et de V, celui du polynome dont il s'agit ne pourra surpasser $p+p'-1$: il sera égal à ce nombre, si p et p' sont égaux, et s'abaissera d'une unité, ou sera simplement égal à $2p-2$, dans le cas de $p'=p$; il faudra donc qu'on ait $p'=p$ ou $p'=p-1$; et dans ces deux cas le polynome $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ sera du degré $2p-2$. Par conséquent son carré ne pourra être que le produit de tous les facteurs doubles de $V-bU$, $V-b'U$, $V-b''U$, $V-b'''U$, multiplié par un coefficient constant; donc, à un coefficient près, ce polynome sera le même que T; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Ainsi, l'équation (1) sera une conséquence nécessaire de l'équation (2); et la transformation que nous voulons effectuer, se réduit à remplir la condition exprimée par cette dernière équation. Or, si l'on prend pour chacune des quantités U et V, le polynome le plus général du degré p, et pour T le polynome le plus général du degré $2p-2$, ces trois quantités comprendront $4p+1$ coefficients indéterminés; on pourra en réduire le nombre à $4p$, en divisant le numérateur et le dénominateur de y ou de la fraction $\frac{U}{V}$, par un de ces coefficients, ou, ce qui revient au même, en le faisant égal à l'unité; en ajoutant à ces quantités les quatre constantes b, b', b'', b''', on aura donc $4p+4$ coefficients indéterminés: le nombre des équations que l'on obtiendra en égalant les coefficients de chaque puissance de x, dans les deux membres de l'équation (2), sera égal à $4p+1$; il sera donc inférieur de trois unités à celui des coefficients dont on pourra disposer, et trois d'entre eux resteront indéterminés. Mais cette énumération des inconnues et des équations de condition ne suffit pas pour établir *a priori* la possibilité de l'équation (2); car il pourrait arriver que les équations de condition fussent incompatibles, et qu'on n'y pût satisfaire, ni par des valeurs réelles, ni par des valeurs imaginaires des inconnues, quoique le nombre de celles-ci fût plus grand que celui des équations. Dailleurs la méthode des coefficients indéterminés ne pourrait conduire à aucun résultat général, et c'est par d'autres moyens qu'il faudra satisfaire à l'équation (2). Toutefois, comme on peut toujours faire disparaître les puissances impaires de la variable, dans les différentielles de la nature de celles que nous considérons, nous nous occuperons simplement de la transformation exprimée par cette équation :

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{\mu\, dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}, \qquad (3)$$

dans laquelle k est une constante donnée, et μ et h sont des constantes inconnues. L'équation (2) sera alors remplacée par celle-ci :

$$(V^2-U^2)(V^2-h^2U^2)=(1-x^2)(1-k^2x^2)T^2. \quad (4)$$

II.

Si nous faisons

$$x=\sin.\varphi,\quad y=\sin.\psi,$$

l'équation (3) deviendra

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}}=\frac{\mu d\psi}{\sqrt{1-h^2\sin.^2\psi}}.$$

En prenant les intégrales de ses deux membres, de manière qu'elles s'évanouissent avec les variables φ et ψ, nous aurons

$$F(k,\varphi)=\mu F(h,\psi),$$

en sorte que la transformation demandée sera celle d'une fonction elliptique de première espèce en une autre; k et φ étant le module et l'amplitude de la fonction donnée, h et ψ le module et l'amplitude de la fonction cherchée, et μ le rapport de l'une à l'autre.

Représentons par K la fonction complète dont le module est k, de sorte qu'on ait

$$F(k,\tfrac{1}{2}\pi)=K;$$

π désignant à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre. Soit p un nombre impair quelconque; divisons K en un nombre p de parties égales; prenons un nombre m de ces parties, et représentons par α_m l'amplitude de $\frac{m}{p}K$, ou, autrement dit, faisons

$$\mathrm{F}(k, \alpha_m) = \frac{m}{p}\mathrm{K}.$$

Cela posé, nous allons considérer l'équation

$$1 - y = (1 \mp x)\frac{\left(1 \pm \frac{x}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2}{1 - k^2x^2\sin.^2\alpha_2}\frac{\left(1 \mp \frac{x}{\sin.\alpha_{p-4}}\right)^2}{1 - k^2x^2\sin.^2\alpha_4}\cdots\frac{\left(1 - \frac{x}{\sin.\alpha_1}\right)^2}{1 - k^2x^2\sin.\alpha_{p-1}}, \quad (5)$$

dans laquelle on prendra les signes supérieurs ou inférieurs selon que p sera de la forme $4n+1$ ou $4n-1$.

Pour transformer cette équation en une autre, soit en général

$$\mathrm{F}(k, \varphi) + \mathrm{F}(k, \theta) = \mathrm{F}(k, \sigma),$$
$$\mathrm{F}(k, \varphi) - \mathrm{F}(k, \theta) = \mathrm{F}(k, \delta).$$

D'après les formules connues d'Euler, on aura

$$\left.\begin{aligned}\sin.\sigma &= \frac{\sin.\varphi\cos.\theta\sqrt{1-k^2\sin.^2\theta} + \sin.\theta\cos.\varphi\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}}{1-k^2\sin.^2\varphi\sin.^2\theta},\\ \sin.\delta &= \frac{\sin.\varphi\cos.\theta\sqrt{1-k^2\sin.^2\theta} - \sin.\theta\cos.\varphi\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}}{1-k^2\sin.^2\varphi\sin.^2\theta};\end{aligned}\right\} (6)$$

et en faisant

$$\mathrm{K} - \mathrm{F}(k, \theta) = \mathrm{F}(k, \theta'),$$

on en conclura sans difficulté (*)

$$\frac{\left(1 - \frac{\sin.\varphi}{\sin.\theta'}\right)^2}{1 - k^2\sin.^2\varphi\sin.^2\theta} = \frac{(1-\sin.\sigma)(1-\sin.\delta)}{\cos.^2\varphi}.$$

Si l'on prend $\theta = \alpha_m$, on aura $\theta' = \alpha_{p-m}$, et en même temps

(*) Traité des fonctions elliptiques, tome III, page 4.

$$\mathrm{F}(k,\sigma)=\mathrm{F}(k,\varphi)+\frac{m}{p}\mathrm{K},$$

$$\mathrm{F}(k,\delta)=\mathrm{F}(k,\varphi)-\frac{m}{p}\mathrm{K}.$$

Soit, pour abréger,

$$\mathrm{F}(k,\varphi)=z;$$

l'angle φ sera l'amplitude de z; on pourra écrire

$$x=\sin.\varphi=\sin.\mathrm{A}z,$$

et, par la même raison,

$$\sin.\sigma=\sin.\mathrm{A}\left(z+\frac{m}{p}\mathrm{K}\right),\quad \sin.\delta=\sin.\mathrm{A}\left(z-\frac{m}{p}\mathrm{K}\right);$$

d'où il résultera

$$\frac{\left(1-\dfrac{x}{\sin.\alpha_{p-m}}\right)^2}{1-k^2x^2\sin.^2\alpha_m}=\frac{\left[1-\sin.\mathrm{A}\left(z+\frac{m}{p}\mathrm{K}\right)\right]\left[1-\sin.\mathrm{A}\left(z-\frac{m}{p}\mathrm{K}\right)\right]}{\cos.^2\alpha_m}.$$

A cause que le signe de l'amplitude change avec celui de la fonction, on pourra mettre $-x$ et $-z$ à la place de x et z; on aura, par conséquent, cette double expression :

$$\frac{\left(1\pm\dfrac{x}{\sin.\alpha_{p-m}}\right)^2}{1-k^2x^2\sin.^2\alpha_m}=\frac{\left[1\pm\sin.\mathrm{A}\left(z-\frac{m}{p}\mathrm{K}\right)\right]\left[1\pm\sin.\mathrm{A}\left(z+\frac{m}{p}\quad\right)\right]}{\cos.^2\alpha_m},$$

au moyen de laquelle, la formule (5) deviendra

$$1-y=\frac{(1\mp\sin.\mathrm{A}z)\,\mathrm{PP}'}{\cos.^2\alpha_1\cos.^2\alpha_2\ldots\cos.^2\alpha_{p-1}};\qquad(7)$$

P désignant le produit des $\frac{p-1}{2}$ facteurs :

$$1 \pm \sin. A\left(z - \frac{2}{p}K\right), \quad 1 \mp \sin. A\left(z - \frac{4}{p}K\right), \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots 1 - \sin. A\left(z - \frac{p-1}{p}K\right),$$

et P′ celui des $\frac{p-1}{2}$ facteurs :

$$1 \pm \sin. A\left(z + \frac{2}{p}K\right), \quad 1 \mp \sin. A\left(z + \frac{4}{p}K\right), \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots 1 - \sin. A\left(z + \frac{p-1}{p}K\right).$$

Les amplitudes de $2K$ et $4K$ étant π et 2π, on a

$$\sin. A(\zeta + 2K) = -\sin. A\zeta, \quad \sin. A(\zeta + 4K) = \sin. A\zeta,$$

quel que soit ζ; d'après cela nous mettrons $z+2K$ à la place de z dans les facteurs impairs de P et P′, et nous changerons les signes des sinus qu'ils contiennent, puis nous augmenterons z de $4K$ dans les facteurs pairs de P sans autre changement; cela fait, si l'on réunit les facteurs pairs de l'une des séries aux facteurs impairs de l'autre, on formera ces deux autres séries, de chacune $\frac{p-1}{2}$ facteurs, savoir :

$$1 \mp \sin. A\left(z + \frac{4}{p}K\right), \quad 1 \mp \sin. A\left(z + \frac{8}{p}K\right), \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots 1 \mp \sin. A\left(z + \frac{2p-2}{p}K\right),$$
$$1 \mp \sin. A\left(z + \frac{2p+2}{p}K\right), \quad 1 \mp \sin. A\left(z + \frac{2p+6}{p}K\right), \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots 1 \mp \sin. A\left(z + \frac{4p-4}{p}\right),$$

dont PP′ sera toujours le produit. Par conséquent la valeur précédente de $1-y$ deviendra

$$1-y=\frac{(1\mp\sin.\mathrm{A}z)\left[1\mp\sin.\mathrm{A}\left(z+\frac{4}{p}\mathrm{K}\right)\right]\ldots\left[1\mp\sin.\mathrm{A}\left(z+\frac{4p-4}{p}\mathrm{K}\right)\right]}{\cos.^2\alpha_2\cos.^2\alpha_4\ldots\cos.^2\alpha_{p-1}}, \quad (8)$$

où l'on prendra toujours les signes supérieurs ou inférieurs selon que p sera de la forme $4n+1$ ou $4n-1$.

Cette formule nous montre que la quantité $1-y$ ne changera pas, si l'on y met $z+\frac{4}{p}\mathrm{K}$ à la place de z; car alors chaque facteur du numérateur se changera dans le suivant, et le dernier dans le premier. Il en résulte que $1-y$ ne changera pas non plus en y mettant $z+\frac{4m}{p}\mathrm{K}$ à la place de z; m étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Or, en faisant $z=0$ dans les premières expressions des facteurs de P et P', leur produit devient

$$\mathrm{PP}'=\cos.^2\alpha_2\cos.^2\alpha_4\ldots\cos.^2\alpha_{p-1}.$$

à cause que l'on a

$$1-\sin.^2\mathrm{A}\left(\frac{2m}{p}\mathrm{K}\right)=\cos.^2\alpha_{2m}.$$

D'après la formule (7), on aura donc $1-y=1$, ou $y=0$, pour $z=0$, et par conséquent pour $z=\frac{4m}{p}\mathrm{K}$.

Maintenant l'équation (8) donne

$$y=\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}},$$

en prenant

$$\mathrm{V}=(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_2)(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_4)\ldots(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1}),$$

et désignant par U une fonction rationnelle et entière de x, qui sera du degré p. Cette fonction sera nulle, ainsi que y, pour $z=\frac{4m}{p}K$, c'est-à-dire, quand on y fera $x=\sin.\mathrm{A}\left(\frac{4m}{p}K\right)$; d'où il résulte que les p racines de l'équation $U=o$, seront

$$o, \pm\sin.\mathrm{A}\left(\frac{4}{p}K\right),\ \pm\sin.\mathrm{A}\left(\frac{8}{p}K\right), \ldots \pm\sin.\mathrm{A}\left(\frac{2p-2}{p}K\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$o, \pm\sin.\mathrm{A}\left(\frac{2}{p}K\right),\ \pm\sin.\mathrm{A}\left(\frac{4}{p}K\right), \ldots \pm\sin.\mathrm{A}\left(\frac{p-1}{p}K\right).$$

Nous aurons donc

$$U=\frac{x}{\mu}\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right);$$

μ désignant une quantité indépendante de x qui restera à déterminer. Par conséquent, la valeur de y aura pour expression :

$$y=\frac{x}{\mu}\,\frac{1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2}}{1-k^2x^2\sin.^2\alpha_2}\;\frac{1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_4}}{1-k^2x^2\sin.^2\alpha_4}\cdots\frac{1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-1}}}{1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1}}. \quad (9)$$

Pour déterminer μ, j'observe qu'en faisant $x=\pm 1$, selon que $\frac{1}{2}(p-1)$ sera pair ou impair, l'équation (8) donnera $y=1$ dans les deux cas. Je fais donc à la fois $x=\pm 1$ et $y=1$ dans l'équation (9); le nombre des facteurs de son second membre, le premier excepté, étant $\frac{1}{2}(p-1)$, il en résultera

$$\mu=\frac{(1-k^2\sin.^2\alpha_2)(1-k^2\sin.^2\alpha_4)\ldots(1-k^2\sin.^2\alpha_{p-1})}{\cot.^2\alpha_2\cot.^2\alpha_4\ldots\cot.^2\alpha_{p-1}}.$$

D'ailleurs à cause de

$$\mathrm{F}(k, \alpha_{2m}) = \frac{2m}{p}\mathrm{F}(k, \tfrac{1}{2}\pi), \ \mathrm{F}(k, \alpha_{p-2m}) = \frac{p-2m}{p}\mathrm{F}(k, \tfrac{1}{2}\pi),$$

on aura

$$\mathrm{F}(k, \tfrac{1}{2}\pi) - \mathrm{F}(k, \alpha_{2m}) = \mathrm{F}(k, \alpha_{p-2m});$$

si donc on prend $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \alpha_{2m}$, $\delta = \alpha_{p-2m}$, la seconde équation (6) donnera

$$\sin.^2 \alpha_{p-2m} = \frac{\cos.^2 \alpha_{2m}}{1 - k^2 \sin.^2 \alpha_{2m}}; \qquad (10)$$

au moyen de quoi la valeur précédente de μ deviendra plus simplement

$$\mu = \frac{\sin.^2 \alpha_1 \sin.^2 \alpha_3 \ldots \sin.^2 \alpha_{p-2}}{\sin.^2 \alpha_{p-1} \sin.^2 \alpha_{p-3} \ldots \sin.^2 \alpha_2}. \qquad (11)$$

III.

Il résulte de l'équation (9) que y change de signe avec x; si donc on met $-x$ et $-y$ à la place de x et y dans l'équation (8), on aura la valeur de $1+y$; et en la multipliant par celle de $1-y$, et prenant la racine carrée du produit, on en conclura

$$\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2}\,\frac{\left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-4}}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_1}\right)}{(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_2)(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_4)\ldots(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1})} \quad (12).$$

Je désigne par $\frac{1}{u}$ ce que devient y quand on y met $\frac{1}{kx}$ au lieu de x; d'après les équations (9) et (10), on aura

$$u = y k^p \mu^2 \sin.^4 \alpha_2 \sin.^4 \alpha_4 \ldots \sin.^4 \alpha_{p-1};$$

c'est-à-dire, $u = hy$, en ayant égard à la valeur de μ, et faisant

$$h = k^p \sin.^4 \alpha_1 \sin.^4 \alpha_3 \ldots \sin.^4 \alpha_{p-2}; \qquad (13)$$

d'où l'on conclut que x et y se changent simultanément en $\frac{1}{kx}$ et $\frac{1}{hy}$. J'effectue ce double changement dans l'équation (12); en divisant ses deux membres par $\sqrt{-1}$, il vient

$$\frac{1}{hy}\sqrt{1-h^2y^2}=\frac{1}{\beta x}\sqrt{1-x^2}\,\frac{(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-2})(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-4})\ldots}{\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ldots\ldots\ldots},$$

où l'on a fait pour abréger,

$$k^p\sin.^2\alpha_1\sin.^2\alpha_3\ldots\sin.^2\alpha_{p-2}.\sin.^2\alpha_2\sin.^2\alpha_4\ldots\sin.^2\alpha_{p-1}=\beta.$$

Je multiplie l'équation précédente par hy; je substitue ensuite dans son second membre, la valeur de y donnée par l'équation (9): en tenant compte des valeurs de μ, h, β, on obtient

$$\sqrt{1-h^2y^2}=\sqrt{1-k^2x^2}\,\frac{(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-2})(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-4})\ldots(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_1)}{(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_2)(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_4)\ldots(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1})}. \quad (14)$$

Au moyen des formules (12) et (14), nous aurons

$$\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}=\frac{QQ'}{V^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$Q=\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_3}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right),$$

$$Q'=(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_2)(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_4)\ldots(1-k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1}),$$

et prenant pour V la même valeur que précédemment. Si donc on met $\frac{U}{V}$ à la place de y, on aura

$$(V^2-U^2)(V^2-h^2U^2)=(1-x^2)(1-k^2x^2)Q^2Q'^2;$$

ce qui montre qu'on remplit la condition exprimée par l'équation (4), au moyen des valeurs précédentes de V, U, h, et en prenant QQ' pour T; par conséquent, en vertu de la première partie de cette démonstration, la valeur $\frac{U}{V}$ de y, ou la formule (9) satisfera à l'équation différentielle (3); μ et h étant donnés en fonctions de k par les formules (11) et (13). C'est en cela que consiste le théorème de M. Jacobi, qu'il s'agissait de démontrer.

L'équation (9) sera une intégrale particulière de cette équation différentielle; on en déduira l'intégrale complète, en désignant par c une constante arbitraire, et remplaçant y par

$$\frac{y\sqrt{(1-c^2)(1-h^2c^2)}+c\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}}{1-h^2c^2y^2},$$

dans les deux équations; substitution qui ne changera rien, comme on sait, au second membre de l'équation différentielle.

Les expressions du multiplicateur μ et du module h peuvent être présentées sous différentes formes, équivalentes aux formules (11) et (13). Les trois équations (9), (12) et (14), sont aussi équivalentes: elles font connaître les valeurs de $\sin.\psi$, $\cos.\psi$ et $\sqrt{1-h^2\sin.^2\psi}$, relatives à l'amplitude de la fonction cherchée, au moyen du sinus de l'amplitude φ de la fonction donnée et de son module k. Si l'on voulait avoir immédiatement l'amplitude ψ, on emploierait la formule (*)

$$\psi=\varphi+2\varphi_2+2\varphi_4+\ldots\ldots+2\varphi_{p-1},$$

(*) Traité des fonctions ellitiques, tome III, page 26.

dans laquelle φ_m est déterminé par l'équation :

$$\text{tang}\,\varphi_m = \frac{\cos.\alpha_m}{\sin.\alpha_{p-m}}\,\text{tang}.\,\varphi.$$

Note B.

Les sinus des amplitudes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$, qui entrent dans les formules précédentes, s'expriment tous en fonctions rationnelles du sinus et du cosinus de la première; mais pour obtenir les valeurs de $\sin.\alpha_1$, il faut résoudre l'équation relative à la division d'une fonction complète K en un nombre p de parties égales. Si l'on conçoit qu'on l'ait formée, et qu'on élimine l'inconnue $\sin.\alpha_1$ entre cette équation et la formule (13), on obtiendra une équation algébrique, que je désignerai par $M = 0$, entre les modules k et h des deux fonctions qu'on veut réduire l'une à l'autre. On pourra employer toutes les valeurs réelles ou imaginaires de h que l'on tirera de $M = 0$, et il en résultera autant de transformations différentes de la fonction $F(k, \varphi)$ en la fonction $F(h, \psi)$. Le degré de cette équation sera généralement très-élevé : en y faisant $k = u^{\frac{1}{4}}$, $h = v^{\frac{1}{4}}$, elle sera symétrique par rapport à u et v, et du quatrième degré dans le cas de $p = 3$, et du sixième dans le cas de $p = 5$. Si p n'est pas un nombre premier, on considérera séparément ses différents facteurs, et l'on opérera la transformation relative à p, par une suite de transformations relatives à tous ses facteurs. En prenant pour p un nombre premier quelconque, il existera deux valeurs de h pour lesquelles la transformation de $F(k, \varphi)$ en $F(h, \psi)$ se fera par des quantités réelles, c'est-à-dire, qu'abstraction faite des transformations imaginaires, il y aura toujours une double transformation réelle pour chaque valeur donnée du nombre premier p.

Pour le faire voir, soit, comme précédemment,

$$F(k, \varphi) = z.$$

Afin d'indiquer le module dans la notation de l'amplitude, nous écrirons

$$\varphi = A(z, k), \quad \sin.\varphi = \sin. A(z, k).$$

Nous conviendrons aussi de désigner par k', h', g', etc., les compléments des modules k, h, g, etc., et par K, H, etc., K', H', etc., les fonctions complètes dont les modules sont k, h, etc., k', h', etc., de sorte qu'on ait

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \quad h' = \sqrt{1-h^2}, \text{ etc.},$$
$$K = F(k, \tfrac{1}{2}\pi), \quad K' = F(k', \tfrac{1}{2}\pi), \quad H = F(h, \tfrac{1}{2}\pi), \text{ etc.}$$

M. Abel a démontré que $\sin. A(z, k)$ est une fonction de z qui ne change pas de valeur, quand on augmente ou qu'on diminue z, soit d'un multiple de $4K$, soit d'un multiple de $2K'\sqrt{-1}$, de manière qu'on a

$$\sin. A(z + 4nK + 2n'K'\sqrt{-1}, k) = \sin. A(z, k);$$

n et n' étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Il suit de là que si l'on veut diviser une fonction quelconque z en un nombre p de parties égales ; que le sinus de son amplitude soit donné, et qu'il s'agisse d'en déduire le sinus de celle d'une partie $\frac{1}{p}z$, les racines réelles ou imaginaires de l'équation relative à cette division seront les valeurs différentes de

$$\sin. A\left(\frac{z + 4nK + 2n'K'\sqrt{-1}}{p}, k\right),$$

dont il est aisé de voir que le nombre sera égal à p^2, savoir, p réelles, et toutes les autres imaginaires. Si donc on fait $z=\mathrm{K}$, on aura

$$\sin.\alpha_1=\sin.\mathrm{A}\left(\frac{(4n+1)\mathrm{K}+2n'\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{p},k\right),$$

pour l'expression de toutes les valeurs de $\sin.\alpha_1$. Or, parmi ces valeurs, nous considérerons celle qui répond à $n=0$ et $n'=0$, et la valeur relative à $2n'=1-p$ et $4n+1=\pm p$, selon que p sera un multiple de 4 augmenté ou diminué de l'unité. Ces deux valeurs seront

$$\sin.\alpha_1=\sin.\mathrm{A}\left(\frac{1}{p}\mathrm{K},k\right),$$

$$\sin.\alpha_1=\sin.\mathrm{A}\left(\pm\mathrm{K}-\mathrm{K}'\sqrt{-1}+\frac{\mathrm{K}'\sqrt{-1}}{p},k\right);$$

et quoique la seconde soit imaginaire, en l'employant dans les formules de la *note* A, elles n'en seront pas moins réelles.

En effet, pour un indice pair quelconque, on aura

$$\sin.\alpha_{2m}=\sin.\mathrm{A}\left(\pm 2m\mathrm{K}-2m\mathrm{K}'\sqrt{-1}+\frac{2m}{p}\mathrm{K}'\sqrt{-1},k\right);$$

on peut augmenter une amplitude, d'un multiple de $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$ sans rien changer à son sinus, et l'augmenter ou la diminuer d'un multiple de $2\mathrm{K}$ en changeant le signe de son sinus ou sans y rien changer, selon que ce multiple est impair ou pair; on aura donc simplement

$$\sin.\alpha_{2m}=\sin.^2\mathrm{A}\left(\frac{2m}{p}\mathrm{K}'\sqrt{-1},k\right).$$

D'ailleurs, si l'on fait

$$\sin.\varphi=\sqrt{-1}.\tang.\theta,$$

il vient

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}}=\frac{d\theta\sqrt{-1}}{\sqrt{1-k'^2\sin.^2\theta}};$$

dans cette hypothèse, on a donc

$$F(k,\varphi)=\sqrt{-1}\,F(k',\theta),\ \text{ou}\ z=z'\sqrt{-1},$$

en appelant z' la nouvelle fonction. Il en résultera

$$\sin.\,A(z,k)=\sin.\,A(z'\sqrt{-1},k')=\sqrt{-1}.\operatorname{tang}.\,A(z',k'),$$

et par conséquent

$$\sin.^2\alpha_{2m}=-\operatorname{tang}.^2 A\left(\frac{2m}{p}K',k'\right). \qquad (1)$$

Pour un indice impair, on aura, en même temps

$$\sin.^2\alpha_{p-2m}=\frac{1}{1-k'^2\sin.^2A\left(\frac{2m}{p}K',k'\right)},$$

en vertu de l'équation (10) de la note précédente; et d'après la même équation, on pourra aussi écrire

$$\sin.^2\alpha_{p-2m}=\frac{\sin.^2A\left(\frac{p-2m}{p}K',k'\right)}{\cos.^2A\left(\frac{2m}{p}K',k'\right)}. \qquad (2)$$

Or, les formules relatives à la transformation de $F(k,\varphi)$ ne renfermant que les puissances paires de $\sin.\alpha_1$, $\sin.\alpha_2$, ... $\sin.\alpha_{p-1}$, il s'ensuit qu'elles seront réelles, dans le cas de la seconde valeur de $\sin.\alpha_1$ comme dans le cas de la première.

Afin d'exprimer plus commodément ces deux systèmes de formules, nous conviendrons d'indiquer par la caractéristique Π, placée devant une quantité R_m, le produit des

$\frac{p-1}{2}$ facteurs que l'on obtient en prenant successivement pour m tous les nombres $1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$, de sorte que l'on ait

$$\Pi R_m = R_1 R_2 R_3 \ldots R_{\frac{1}{2}(p-1)},$$

R_m étant une fonction quelconque de m.

Cela posé, si l'on fait usage de la première valeur de $\sin. \alpha_1$, on satisfait à l'équation

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi),$$

au moyen des formules :

$$\left.\begin{aligned}
\sin.\psi &= \frac{\sin.\varphi}{\mu\,\Phi}\,\Pi\left(1-\frac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2 A\left(\frac{2m}{p}K, k\right)}\right),\\
\cos.\psi &= \frac{\cos.\varphi}{\Phi}\,\Pi\left(1-\frac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K, k\right)}\right),\\
\sqrt{1-h^2\sin.^2\psi} &= \frac{\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}}{\Phi}\,\Pi\left(1-k^2\sin.^2\varphi\sin.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K, k\right)\right),\\
\Phi &= \Pi\left(1-k^2\sin.^2\varphi\sin.^2 A\left(\frac{2m}{p}K, k\right)\right),\\
\mu &= \Pi\left(\frac{\sin.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K, k\right)}{\sin.^2 A\left(\frac{2m}{p}K, k\right)}\right),\\
h &= k^p\,\Pi\sin.^4 A\left(\frac{p-2m}{p}K, k\right).
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Le module k étant plus petit que l'unité, on aura $h<k$; si donc on calcule un troisième module qui dépende de h, comme h dépend de k, puis un quatrième, et ainsi de suite,

on formera, pour chaque valeur du nombre p, une échelle descendante de modules dont zéro sera la limite.

En employant de même la seconde valeur de $\sin. \alpha_1$, et par conséquent les formules (1) et (2); désignant par λ et g ce que μ et h deviennent; et mettant d'autres angles θ et ω à la place de φ et ψ, on satisfera à l'équation

$$F(k, \theta) = \lambda F(g, \omega),$$

au moyen des formules:

$$\left.\begin{aligned}
\sin. \omega &= \frac{\sin. \theta}{\lambda \Theta} \Pi \left(1 + \sin.^2 \theta \cot.^2 A\left(\frac{2m}{p} K', k'\right)\right), \\
\cos. \omega &= \frac{\cos. \theta}{\Theta} \Pi \left(\cos.^2 \theta + k'^2 \sin.^2 \theta \sin.^2 A\left(\frac{2m}{p} K', k'\right)\right), \\
\sqrt{1 - g^2 \sin.^2 \omega} &= \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin.^2 \theta}}{\Theta} \Pi \left(1 - \frac{k^2 \sin.^2 \theta}{1 - k'^2 \sin.^2 A\left(\frac{2m}{p} K', k'\right)}\right), \\
\Theta &= \Pi \left(1 + k^2 \sin.^2 \theta \operatorname{tang.}^2 A\left(\frac{2m}{p} K', k'\right)\right), \\
\lambda &= (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \Pi \left(\frac{\cot.^2 A\left(\frac{2m}{p} K', k'\right)}{1 - k'^2 \sin.^2 A\left(\frac{p}{2m} K', k'\right)}\right), \\
g &= k^p \Pi \left(\frac{\sin.^4 A\left(\frac{p-m2}{p} K', k'\right)}{\cos.^4 A\left(\frac{2m}{p} K' k'\right)}\right).
\end{aligned}\right\} (4)$$

On peut rendre le multiplicateur μ toujours positif, en supprimant le facteur $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$; ce qui est permis, pourvu qu'on suppose en même temps l'angle ω toujours croissant avec l'angle θ. En mettant k' à la place de k dans l'équation (10) de la note précédente, on a d'ailleurs

$$\frac{\cos.^2 A\left(\frac{2m}{p}K', k'\right)}{1 - k'^2 \sin.^2 A\left(\frac{2m}{p}K', k'\right)} = \sin.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K', k'\right); \qquad (5)$$

on aura donc plus simplement

$$\lambda = \Pi\left(\frac{\sin.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K', k'\right)}{\sin.^2 A\left(\frac{2m}{p}K', k'\right)}\right). \qquad (6)$$

Si l'on observe qu'en vertu de la seconde équation (4), ω et θ atteignent ensemble l'angle droit, et qu'on fasse $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et $\omega = \frac{1}{2}\pi$ dans la troisième, on en conclura

$$g' = k'^p \Pi\left(\frac{\cos.^4 A\left(\frac{2m}{p}K', k'\right)}{\left(1 - k^2 \sin.^2 A\left(\frac{2m}{p}K', k'\right)\right)^2}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$g' = k'^p \Pi \sin.^4 A\left(\frac{p-2m}{p}K', k'\right). \qquad (7)$$

Cette dernière équation montre qu'on aura $g' < k'$, ou $g > k$; par conséquent l'échelle de modules à laquelle elle donnera naissance, sera ascendante et aura l'unité pour limite. Pour des valeurs données de k et du nombre p, les deux racines réelles de l'équation $M = 0$, seront les modules de cette échelle et de la précédente qui suivent immédiatement le module k. On pourra remplacer cette équation algébrique entre deux modules consécutifs de l'une ou de l'autre échelle, par une équation trancendante à laquelle on parviendra comme il suit.

Si l'on fait croître φ depuis zéro jusqu'à π, l'angle ψ croîtra en même temps; mais la première équation (3) montre que sin. ψ passera par zéro, un nombre p de fois, et changera de signe à chaque passage; d'où il résulte qu'on aura $\psi = p\pi$ en même temps que $\varphi = \pi$, et par conséquent $F(h, \psi) = 2p\mathrm{H}$ en même temps que $F(k, \varphi) = 2\mathrm{K}$. Il en résultera donc

$$\mathrm{K} = \mu p \mathrm{H}.$$

D'un autre côté, si l'on fait

$$\sin.\varphi = \sqrt{-1}.\operatorname{tang}.\theta, \quad \sin.\psi = \sqrt{-1}.\operatorname{tang}.\omega,$$

les équations correspondantes

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}} = \frac{\mu . d\psi}{\sqrt{1-h^2\sin.^2\psi}}, \quad F(k,\varphi) = \mu . F(h, \psi),$$

se changeront en celles-ci :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin.^2\theta}} = \frac{\mu\, d\omega}{\sqrt{1-h'^2\sin.^2\omega}}, \quad F(k', \theta) = \mu . F(h', \omega).$$

Par les mêmes substitutions, la première équation (3) prendra la forme

$$\operatorname{tang}.\omega = \mathrm{P}\operatorname{tang}.\theta;$$

P étant une quantité positive qui ne pourra être ni nulle ni infinie, pour aucune valeur réelle de θ : les nouvelles variables θ et ω atteindront donc ensemble l'angle droit; il en résultera

$$\mathrm{K}' = \mu . \mathrm{H}';$$

et en éliminant μ entre cette équation et $\mathrm{K} = \mu p \mathrm{H}$, on aura

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'} = p\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}, \qquad (8)$$

qui sera l'équation demandée. Quand on en aura déduit la valeur approchée de h, l'une ou l'autre des deux équations précédentes fera connaître la valeur correspondante du coefficient μ.

En opérant de la même manière, sur la première équation (4), on en conclura d'abord l'équation $K=\lambda G$, et ensuite l'équation $K'=\lambda p G'$. L'une ou l'autre donnera la valeur de λ d'après celle de g; et pour calculer la valeur approchée de g, lorsque k et p seront donnés, on éliminera λ et l'on aura

$$\frac{G}{G'}=p\frac{K}{K'}.$$

Cette dernière formule, comparée à l'équation (8), nous fait voir que g se déduira de k de même que k se déduirait de h. Si donc on prenait h pour le module donné, k serait le premier module ascendant, c'est-à-dire, que si l'on met h à la place de k dans les équations qui se rapportent à l'échelle ascendante, il y faudra mettre en même temps k à la place de g. Par ce changement, le coefficient λ, qui était égal à $\frac{K'}{pG'}$, deviendra $\frac{H'}{pK'}$, ou $\frac{H}{K}$ à cause de l'équation (8); donc en vertu de l'équation $K=p\mu H$, on aura

$$\lambda\mu=\frac{1}{p}.$$

Les valeurs de μ et λ qui vérifieront cette équation seront données par la cinquième équation (3) et par la formule (6), en mettant dans celle-ci h' au lieu de k'; on devra donc avoir

$$\Pi\left(\frac{\sin.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K,k\right)\sin.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}H',h'\right)}{\sin.^2 A\left(\frac{2m}{p}K,k\right)\sin. A\left(\frac{2m}{p}H',h'\right)}\right)=\frac{1}{p}.$$

Après qu'on aura changé l'équation $F(k,\varphi)=\mu F(h,\psi)$ en $F(k',\theta)=\mu F(h',\omega)$ par la substitution de $\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,\theta$ et $\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,\omega$ à la place de $\sin.\varphi$ et $\sin.\psi$, si l'on y substitue k' au lieu de k, on aura $\mu=\lambda$, $h=g'$, $h'=g$, en vertu des deux dernières équations (3) et des formules (6) et (7). Il en résultera donc $F(k,\theta)=\lambda F(g,\omega)$; par conséquent chacune des trois premières équations (3) satisfera à celle-ci, après les substitutions qu'on a supposées; mais cette solution de l'équation $F(k,\theta)=\lambda F(g,\omega)$, coïncide avec celle qui est donnée par les équations (4). En effet, les substitutions étant effectuées, si l'on divise membre à membre la première équation (3) par la seconde, il vient

$$\sin.\omega=\frac{\sin.\theta}{\lambda}\,\Pi\left(\frac{1+\sin.^2\theta\cot.^2 A\left(\frac{2m}{p}K',k'\right)}{1+\sin.^2\theta\cot.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K',k'\right)}\right);$$

mais en vertu de l'équation (5), on a

$$\cot.^2 A\left(\frac{p-2m}{p}K',k'\right)=k^2\,\text{tang.}^2 A\left(\frac{2m}{p}K',k'\right);$$

ce qui fait coïncider la formule précédente avec la première équation (4). En divisant membre à membre, la première équation (3) par la troisième, et en renversant les deux membres de celle-ci, après les substitutions indiquées, on obtiendra de même la troisième et la seconde équation (4). Réciproquement les formules (4) se changeront dans les équations (3), par les substitutions de $\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,\varphi$, $\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,\psi$, k' et h', au lieu de $\sin.\theta$, $\sin.\omega$, k et g.

On peut combiner ensemble les formules (3) et (4), relatives à différentes valeurs impaires du nombre p; on peut aussi les combiner avec les formules de Lagrange citées au commencement de ce rapport, lesquelles sont censées répondre à $p=2$; il en résultera un nombre extrêmement grand de transformations réelles de la fonction elliptique de première espèce, lors même qu'on ne prendra pour p que des nombres peu considérables.

On peut les multiplier encore en observant que si l'on a trouvé une équation entre x et y qui satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{\mu dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}},$$

on y satisfera aussi en mettant dans l'équation donnée, $\frac{a+bx}{1+x}$ et $\frac{a'+b'y}{1+y}$ à la place de x et y, et déterminant les constantes a, b, a', b', de manière que l'équation différentielle reste la même; ce qui exige qu'on ait identiquement

$$\begin{aligned}&[(1+x)^2-(a+bx)^2]\,[(1+x)^2-k^2(a+bx)^2]\\&=(1-x^2)(1-k^2x^2),\\&[(1+y)^2-(a'+b'y)^2]\,[(1+y)^2-(a'+b'y)^2]\\&=(1-y^2)(1-h^2y^2),\end{aligned}$$

et pourra se faire de plusieurs manières différentes.

Note C.

Mettons dans les formules (4) de la note précédente, à la place de θ et k, l'angle ψ et le module h qui entrent dans les formules (3) : d'après ce qu'on vient de dire, il faudra en même temps mettre k et $\frac{1}{p\mu}$ à la place du module g

et du multiplicateur λ; ainsi l'on satisfera à l'équation

$$F(h, \psi) = \frac{1}{p\mu} F(k, \omega),$$

au moyen de la formule

$$\sin.\omega = p\mu \sin.\psi \,\Pi \left(\frac{1 + \sin.^2\psi \operatorname{tang.}^2 A\left(\frac{2m}{p} H', h'\right)}{1 + h^2 \sin.^2\psi \cot.^2 A\left(\frac{2m}{p} H', h'\right)} \right),$$

et simultanément à l'équation

$$F(k, \varphi) = \mu F(h, \psi),$$

au moyen de la première formule (3), savoir:

$$\sin.\psi = \frac{\sin.\varphi}{\mu} \Pi \left(\frac{1 - \dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2 A\left(\frac{2m}{p} K, k\right)}}{1 - k^2 \sin.^2\varphi \sin.^2 A\left(\frac{2m}{p} K, k\right)} \right).$$

Si donc on substitue cette valeur de $\sin.\psi$ dans celle de $\sin.\omega$ et qu'on élimine $F(h, \psi)$ entre les deux autres équations, on aura une valeur de $\sin.\omega$ en fonction rationnelle de $\sin.\varphi$, qui satisfera à l'équation

$$F(k, \omega) = pF(k, \varphi).$$

Ce sera le sinus de l'amplitude d'un multiple impair quelconque de la fonction donnée; mais cette expression renfermera les quantités irrationnelles $\sin. A\left(\frac{2m}{p} H', h'\right)$ et $\sin. A\left(\frac{2m}{p} K, k\right)$ qui sont étrangères à la question; et pour chaque valeur particulière de p, elle devra se réduire à une fonction rationnelle, non-seulement par rapport au sinus de l'amplitude de la fonction donnée, mais aussi par rapport à son module.

Réciproquement, la même équation entre sin φ et sin. ω servira à la division d'une fonction de première espèce, en un nombre p de parties égales. Pour cela, on y considérera sin. ω comme une quantité donnée, et sin. φ comme une inconnue : cette équation sera du degré p^2; mais on pourra la remplacer par les deux équations précédentes, l'une entre sin φ et sin. ψ, l'autre entre sin. ψ et sin. ω, et toutes les deux du degré p par rapport à l'inconnue sin. ψ. L'équation du degré p^2 pourra donc toujours se décomposer en deux équations du degré p, pourvu que l'on connaisse les valeurs de sin. $\mathrm{A}\left(\frac{2m}{p}\mathrm{K}, k\right)$ et sin. $\mathrm{A}\left(\frac{2m}{p}\mathrm{H}', h'\right)$ qui répondent à la division des fonctions complètes K et H', et dépendent, comme on sait, d'équations qui s'abaissent au degré $\frac{1}{2}(p^2-1)$. Dans le cas de $p=3$, ces équations auxiliaires n'étant que du quatrième degré, on pourra résoudre complètement l'équation du neuvième degré, ralative à la trisection d'une fonction donnée. La bisection répétée autant de fois qu'on voudra, ne dépend que d'équations du second degré; on pourra donc aussi résoudre les équations relatives à la division en un nombre n de parties égales, toutes les fois que n n'aura d'autres facteurs que 2 et 3, élevés à des puissances quelconques.

C'était là tout ce que l'on savait sur la division des fonctions elliptiques en parties égales, lorsque M. Abel s'est occupé de cette question, et qu'il est parvenu aux résultats énoncés à la fin du rapport.

Note D.

Parmi les développements en séries que M. Jacobi a obtenus, nous citerons ces trois formules :

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{k}\,\sin.\,\mathrm{A}\left(\tfrac{2x}{\pi}\mathrm{K},k\right) &= \frac{2\sum(-1)^n e^{-(2n+1)^2 r^2}\sin.(2n+1)x}{2\sum(-1)^n e^{-4n^2r^2}\cos.2nx-1},\\
\sqrt{\tfrac{k}{k'}}\cos.\,\mathrm{A}\left(\tfrac{2x}{\pi}\mathrm{K},k\right) &= \frac{2\sum e^{-(2n+1)^2r^2}\cos.(2n+1)x}{2\sum(-1)^n e^{-4n^2r^2}\cos.2nx-1},\\
\sqrt{\tfrac{1}{k'}}\sqrt{1-k^2\sin.^2\mathrm{A}\left(\tfrac{2x}{\pi}\mathrm{K},k\right)} &= \frac{2\sum e^{-4n^2r^2}\cos.2nx-1}{2\sum(-1)^n e^{-4n^2r^2}\cos.2nx-1},
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

dans lesquelles n est un nombre entier positif ou zéro, les sommes $\sum$ s'étendent à toutes les valeurs de n depuis $n=0$ jusqu'à $n=\infty$, e désigne la base des logarithmes népériens, les autres notations sont les mêmes que dans les notes précédentes, et l'on a fait

$$\frac{\pi\mathrm{K}'}{4\mathrm{K}}=r^2.$$

La variable x peut être réelle ou imaginaire. Si l'on fait $x=z\sqrt{-1}$, on aura, comme précédemment,

$$\sin.\,\mathrm{A}\left(\tfrac{2z}{\pi}\mathrm{K}\sqrt{-1},k\right)=\sqrt{-1}\,\mathrm{tang.}\,\mathrm{A}\left(\tfrac{2z}{\pi}\mathrm{K},k'\right),$$

et par conséquent

$$\cos.\,\mathrm{A}\left(\tfrac{2z}{\pi}\mathrm{K}\sqrt{-1},k\right)=\frac{1}{\cos.\,\mathrm{A}\left(\tfrac{2z}{\pi}\mathrm{K},k'\right)},$$

$$\sqrt{1-k^2\sin.^2\mathrm{A}\left(\tfrac{2z}{\pi}\mathrm{K}\sqrt{-1},k\right)}=\frac{\sqrt{1-k'^2\sin.^2\mathrm{A}\left(\tfrac{2z}{\pi}\mathrm{K},k'\right)}}{\cos.\,\mathrm{A}\left(\tfrac{2z}{\pi}\mathrm{K},k'\right)}.$$

Je subtitue ces valeurs dans les équations (1), et j'en conclus celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{k'}\sin.\mathrm{A}\left(\frac{2z}{\pi}\mathrm{K},k'\right)=\frac{\sum(-1)^n e^{-(2n+1)r^2}\left(e^{(2n+1)z}-e^{-(2n+1)z}\right)}{\sum e^{-(2n+1)r^2}\left(e^{(2n+1)z}+e^{-(2n+1)z}\right)},\\
&\sqrt{\frac{k'}{k}}\cos.\mathrm{A}\left(\frac{2z}{\pi}\mathrm{K},k'\right)=\frac{\sum(-1)^n e^{-4n^2r^2}\left(e^{2nz}+e^{-2nz}\right)-1}{\sum e^{-(2n+1)^2r^2}\left(e^{(2n+1)z}+e^{-(2n+1)z}\right)},\\
&\sqrt{\frac{1}{k}}\sqrt{1-k'^2\sin.^2\mathrm{A}\left(\frac{2z}{\pi}\mathrm{K},k'\right)}=\frac{\sum e^{-4n^2r^2}\left(e^{2nz}+e^{-nz}\right)-1}{\sum e^{-(2n+1)^2r^2}\left(e^{(2n+1)z}+e^{-(2n+1)z}\right)}.
\end{aligned}\right\}(2)$$

Cette transformation des équations (1) en ces dernières peut encore s'effectuer de la manière suivante.

D'après une formule connue, on a

$$e^{-4n^2r^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\cos.4nr\alpha\,d\alpha;$$

on aura donc

$$2\sum e^{-4n^2r^2}\beta^n\cos.2nx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum\beta^n\cos.2n(2r\alpha+x)$$
$$+\sum\beta^n\cos.2n(2r\alpha-x)\Big)e^{-\alpha^2}d\alpha;$$

β étant une quantité positive ou négative, mais plus petite que l'unité, abstraction faite du signe, afin que les sommes contenues dans le second membre de cette équation, soient des séries convergentes. On aura alors

$$2\sum\beta^n\cos.2n(2r\alpha\pm x)-1=\frac{1-\beta^2}{1-2\beta\cos.2(2r\alpha\pm x)+\beta^2};$$

d'où l'on conclura

$$2\sum e^{-4n^2r^2}\beta^n\cos.2nx-1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(fx+f(-x)\Big),\quad(3)$$

en faisant, pour abréger,

$$fx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\beta^2)e^{-\alpha^2}\,d\alpha}{1-2\beta\cos.2(2r\alpha+x)+\beta^2}.$$

Maintenant, soit $\beta=-1+\gamma$, γ étant une quantitité positive et infiniment petite. L'expression de fx se réduira d'abord à

$$fx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma e^{-\alpha^2}\,d\alpha}{\gamma^2+4\cos.^2(2r\alpha+x)}.$$

De plus, le coefficient de $d\alpha$ sous le signe $\int$ étant infiniment petit, excepté pour les valeurs de α qui rendent $\cos.(2r\alpha+x)$ infiniment petit, on pourra n'étendre l'intégration qu'à ces valeurs; en désignant donc par i un nombre entier, positif, négatif ou zéro, et faisant

$$2\alpha r+x=\frac{2i+1}{2}\pi+u,\quad d\alpha=\frac{du}{2r},$$

on pourra considérer la variable u comme une quantité infiniment petite, positive ou négative. D'après cela nous aurons

$$fx=\frac{1}{2r}e^{\frac{-x^2}{4r^2}}\sum e^{\frac{-(2i+1)^2\pi^2}{16r^2}}e^{\frac{(2i+1)\pi x}{4r^2}}\int\frac{\gamma\,du}{\gamma^2+4u^2};$$

la somme $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de i, et les limites de l'intégrale, l'une positive et l'autre négative, étant toutes deux infiniment petites. Mais à cause que cette intégrale est aussi infiniment petite, dès que u a acquis une grandeur finie, on n'en altèrera pas la valeur en l'étendant à des limites finies, ni même en la prenant, si l'on veut, depuis $u=-\infty$ jusqu'à $u=\infty$, ce qui donne

$$\int \frac{\gamma\, du}{\gamma^2 + 4u^2} = \frac{1}{2}\pi.$$

Je conclus de là que pour $6 = -1 + \gamma$, l'équation (3) deviendra

$$2\sum(-1)^n e^{-4n^2r^2} \cos. 2nx - 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4r} e^{\frac{-x^2}{4r^2}} \sum e^{\frac{-(2i+1)^2\pi^2}{16r^2}} \left(e^{\frac{(2i+1)\pi x}{4r^2}} + e^{\frac{-(2i+1)\pi x}{4r^2}} \right),$$

en négligeant γ dans son premier membre.

Si nous faisons

$$\frac{\pi^2}{16r^2} = \frac{\pi K}{4K'} = r'^2, \quad x = \frac{K'}{K} z = \frac{4r^2}{\pi} z,$$

cette équation pourra s'écrire ainsi :

$$2\sum(-1)^n e^{-4n^2r^2} \cos. 2nx - 1$$
$$= \frac{2r'}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-z^2}{4r'^2}} \sum e^{-(2n+1)^2 r'^2} \left(e^{(2n+1)z} + e^{-(2n+1)z} \right); \tag{4}$$

la somme $\sum$ ne s'étendant dans le second membre comme dans le premier, qu'aux valeurs positives du nombre n, depuis $n = 0$ jusqu'à $n = \infty$. Pour $6 = 1 - \gamma$, on trouvera de même que l'équation (3) devient

$$2\sum e^{-4n^2r^2} \cos. 2nx - 1 =$$
$$\frac{2r'}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-z^2}{4r'^2}} \left(\sum e^{-n^2r'^2} \left(e^{2nz} + e^{-2nz} \right) - 1 \right); \tag{5}$$

et par une semblable analyse, on obtiendra ces deux autres équations :

$$\sum e^{-(2n+1)^2r^2}\cos.(2n+1)x$$
$$=\frac{r'}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{-z^2}{4r'^2}}\left(\sum(-1)^n e^{-4n^2r'^2}\left(e^{2nz}+e^{-2nz}\right)-1\right), \tag{6}$$

$$\sum(-1)^n e^{-(2n+1)^2r^2}\sin.(2n+1)x$$
$$=\frac{r'}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{z^2}{4r'^2}}\left(\sum(-1)^n e^{-(2n+1)^2r'^2}\left(e^{(2n+1)z}-e^{-(2n+1)z}\right)\right); \tag{7}$$

au moyen desquelles et des deux équations précédentes, les formules (1) deviendront

$$\sqrt{k}\sin.A\left(\frac{2z}{\pi}K',k\right)=\frac{\sum(-1)^n e^{-(2n+1)r'^2}\left(e^{(2n+1)z}-e^{-(2n+1)z}\right)}{\sum e^{-(2n+1)^2r'^2}\left(e^{(2n+1)z}+e^{-(2n+1)z}\right)},$$

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos.A\left(\frac{2z}{\pi}K',k\right)=\frac{\sum(-1)^n e^{-4n^2r'^2}\left(e^{2nz}+e^{-2nz}\right)-1}{\sum e^{-(2n+1)^2r'^2}\left(e^{(2n+1)z}+e^{-(2n+1)z}\right)},$$

$$\sqrt{\frac{1}{k'}}\sqrt{1-k^2\sin.^2A\left(\frac{2z}{\pi}K',k\right)}=\frac{\sum e^{-4n^2r'^2}\left(e^{2nz}+e^{-2nz}\right)-1}{\sum e^{-(2n+1)^2r'^2}\left(e^{(2n+1)z}+e^{-(2n+1)z}\right)};$$

ce qui n'est autre chose que les équations (2) dans lesquelles on a mis k à la place de k', et par conséquent k', K', r', au lieu de k, K, r.

On peut remarquer qu'en opérant les mêmes changements dans les équations (4), (5), (6) et (7), et mettant en outre $x\sqrt{-1}$ à la place de z, il faudra mettre $z\sqrt{-1}$ au lieu de x, puisque cette variable était égale à $\frac{K'}{K}z$, qui devient $\frac{K}{K'}x\sqrt{-1}$, ou $z\sqrt{-1}$. De cette manière les équations (4) et (6) se changeront réciproquement l'une dans l'autre, et chacune des équations (5) et (7) demeurera la même, de sorte que les changements dont il s'agit ne fourniront pas d'autres formules, de la nature de ces équations.

En développant les fonctions trigonométriques de l'amplitude, en séries ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de la fonction elliptique, M. Jacobi a aussi trouvé ces deux formules :

$$\left.\begin{aligned} \frac{kK}{2\pi}\sin.\mathrm{A}\left(\frac{2x}{\pi}K,k\right)&=\Sigma\frac{\sin.(2n+1)x}{e^{(2n+1)\pi\alpha}-e^{-(2n+1)\pi\alpha}},\\ \frac{kK}{2\pi}\cos.\mathrm{A}\left(\frac{2x}{\pi}K,k\right)&=\Sigma\frac{\cos.(2n+1)x}{e^{(2n+1)\pi\alpha}+e^{-(2n+1)\pi\alpha}},\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

dans lesquelles on a fait

$$\frac{K'}{2K}=\alpha,$$

et qui s'accordent avec celles qu'on trouve à la fin du premier Mémoire d'Abel, cité dans ce rapport. On peut les changer en des séries d'exponentielles par le moyen suivant.

Quelle que soit la fonction F et la quantité l, on a (*)

$$\Sigma F(2n+1)l=-\frac{1}{2l}\int_0^\infty Fz\,dz+\frac{1}{l}\Sigma(-1)^n\int_0^\infty\cos.\frac{n\pi z}{l}Fz\,dz;$$

les sommes Σ s'étendant, comme dans les formules précédentes, à toutes les valeurs positives du nombre n, depuis et compris $n=0$ jusqu'à $n=\infty$. Si donc nous faisons $l=x$, et successivement

(*) On obtient cette équation en faisant $x=0$ dans celle de la pag. 451 du 19e cahier du Journal de l'École polytechnique.

$$Fz = \frac{\sin. z}{e^{\frac{\pi\alpha z}{x}} - e^{-\frac{\pi\alpha z}{x}}}, \quad Fz = \frac{\cos. z}{e^{\frac{\pi\alpha z}{x}} + e^{-\frac{\pi\alpha z}{x}}},$$

les équations (8) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
\frac{kK}{2\pi}\sin. A\left(\frac{2x}{\pi}K, k\right) &= -\frac{1}{2x}\int_0^\infty \frac{\sin. z\,dz}{e^{\frac{\pi\alpha z}{x}} - e^{-\frac{\pi\alpha z}{x}}} \\
&\quad + \frac{1}{x}\Sigma(-1)^n\int_0^\infty \frac{\cos.\frac{n\pi z}{x}\sin. z}{e^{\frac{\pi\alpha z}{x}} - e^{-\frac{\pi\alpha z}{x}}}\,dz, \\
\frac{kK}{2\pi}\cos. A\left(\frac{2x}{\pi}K, k\right) &= -\frac{1}{2x}\int_0^\infty \frac{\cos. z\,dz}{e^{\frac{\pi\alpha z}{x}} + e^{-\frac{\pi\alpha z}{x}}} \\
&\quad + \frac{1}{x}\Sigma(-1)^n\int_0^\infty \frac{\cos.\frac{n\pi z}{x}\cos. z}{e^{\frac{\pi\alpha z}{x}} + e^{-\frac{\pi\alpha z}{x}}}\,dz.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Soit maintenant

$$\frac{\alpha z}{x} = t, \qquad dz = \frac{x\,dt}{\alpha};$$

les limites des intégrales relatives à t seront toujours zéro et l'infini; au moyen des formules connues

$$4\int_0^\infty \frac{\sin. 2\theta t}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\,dt = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}},$$

$$2\int_0^\infty \frac{\cos. 2\theta t}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\,dt = \frac{1}{e^{\theta} + e^{-\theta}},$$

dans lesquelles θ est une constante quelconque, on obtiendra les valeurs des intégrales que contiennent les équations (9); et en les substituant dans ces équations, elles se changeront en celles-ci :

$$\frac{kK'}{\pi}\sin.\mathrm{A}\left(\frac{2x}{\pi}\mathrm{K},k\right)=-\frac{e^{\frac{x}{2\alpha}}-e^{-\frac{x}{2\alpha}}}{2\left(e^{\frac{x}{2\alpha}}+e^{-\frac{x}{2\alpha}}\right)}$$

$$+\left(e^{\frac{x}{\alpha}}-e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)\Sigma\frac{(-1)^n}{e^{\frac{n\pi}{\alpha}}+e^{-\frac{n\pi}{\alpha}}+e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}},$$

$$\frac{kK'}{\pi}\cos.\mathrm{A}\left(\frac{2x}{\pi}\mathrm{K},k\right)=-\frac{1}{2\left(e^{\frac{x}{2\alpha}}+e^{-\frac{x}{2\alpha}}\right)}$$

$$+\left(e^{\frac{x}{2\alpha}}+e^{-\frac{x}{2\alpha}}\right)\Sigma\frac{(-1)^n\left(e^{\frac{n\pi}{2\alpha}}+e^{-\frac{n\pi}{2\alpha}}\right)}{e^{\frac{n\pi}{\alpha}}+e^{-\frac{n\pi}{\alpha}}+e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}},$$

qu'il s'agissait de former.

REMARQUES GÉNÉRALES

SUR

L'APPLICATION DES PRINCIPES DE L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

AUX ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

PAR M. LE Bon FOURIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 9 mars 1829.

AVANT de traiter la question qui est l'objet principal de cette note, je discuterai, dans un premier article, une objection proposée plusieurs fois par M. Poisson, et que ce savant géomètre a reproduite récemment dans un écrit présenté à l'Académie.

Pour résoudre la question du mouvement de la chaleur dans le cylindre solide, j'ai appliqué un théorème d'analyse algébrique à l'équation transcendante propre à cette question. M. Poisson n'admet point cette conséquence. Il ne se borne pas à dire que l'on n'a point encore publié la démonstration de ce théorème, en faisant connaître qu'il s'applique aux équations transcendantes ; il soutient que l'on arriverait à une conclusion fausse si l'on étendait cette proposition à l'équation exponentielle

$$(1) \qquad e^x - b\,e^{ax} = 0.$$

Il assure que, si l'on fait dans ce cas l'application littérale du théorème, on trouve que l'équation (1) et ses dérivées ont toutes leurs racines réelles; et comme il est évident que cette équation a des racines imaginaires, l'auteur en conclut que la proposition conduirait ici à une conséquence erronée. Je me propose 1° de discuter cette objection spéciale, et de montrer qu'elle n'a pas de fondement; 2° de prouver que le théorème dont il s'agit s'applique exactement à l'équation transcendante propre au cylindre.

En général, cette proposition, exprimée dans les termes dont je me suis servi, doit s'étendre aux équations transcendantes; en sorte que l'on commettrait une erreur grave en restreignant le théorème aux équations algébriques.

Dans ce premier article, qui se rapporte à l'équation citée (1), je montrerai que le théorème n'indique nullement que cette équation (1) n'a point de racines imaginaires. Au contraire, il fait connaître qu'elle n'est pas du nombre de celles qui réunissent les conditions que le théorème suppose, et qui distinguent les équations dont toutes les racines sont réelles.

M. Poisson a présenté, pour la première fois, cette objection dans le 19^{me} cahier des Mémoires de l'École Polytechnique (page 382). Il ne citait point le théorème dont j'ai fait usage, mais une proposition très-différente, puisqu'il y omet une condition qui en est une partie nécessaire, et qu'il ne regardait point comme sous-entendue. La réfutation aurait donc été pour ainsi dire superflue : mais le même auteur a reproduit son objection plusieurs années après, et c'est alors seulement qu'il a cité la proposition dont il s'agit telle qu'on la trouve dans la Théorie de la chaleur (pages 372 et 373).

Voici l'énoncé du théorème :

Si l'on écrit l'équation *algébrique* $X=0$, et toutes celles qui en dérivent par la différentiation, $X'=0, X''=0, X'''=0$, etc.; et si l'on reconnaît que *toute racine réelle* d'une quelconque de ces équations, étant substituée dans celle qui la précède et dans celle qui la suit, donne deux résultats de signes contraires, il est certain que la proposée $X=0$ a toutes ses racines réelles, et que, par conséquent, il en est de même de toutes les équations subordonnées $X'=0$, $X''=0$, $X'''=0$, etc. Or, en proposant l'objection dont il s'agit, on n'a point fait l'application littérale du théorème, parce qu'on a omis de considérer les racines réelles du facteur $e^x=0$. Ce facteur coïncide avec celui-ci, $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=0$, lorsque le nombre m croît sans limites et devient plus grand que tout nombre donné. L'équation $e^x=0$ a donc une infinité de facteurs dont on ne doit point faire abstraction, lorsqu'on entreprend d'appliquer textuellement la proposition. On ne peut pas dire que l'équation $e^x+be^{ax}=0$ a une seule racine réelle, et une infinité de racines imaginaires; car cette équation, qui a une infinité de racines imaginaires, a aussi une infinité de racines réelles. Or l'auteur n'emploie qu'une seule de ces racines réelles : il en omet une infinité d'autres égales entre elles, savoir celles qui réduisent à zéro le facteur e^x.

Lorsque dans ce facteur on attribue à x une valeur réelle négative dont la grandeur absolue surpasse tout nombre donné, la fonction e^x approche continuellement de o, et devient plus petite que tout nombre donné. C'est ce que l'on exprime en disant que l'équation $e^x=0$ a pour racine réelle une valeur infinie de x prise avec le signe —. Une fonction telle que e^x diffère essentiellement de celles qu'on ne pourrait jamais rendre nulles, ou plus petites que tout nombre donné, en attribuant à x des valeurs réelles. Lorsqu'on assimile deux fonctions aussi différentes, on doit arriver à des conséquences erronées.

On connaît encore la nature de l'équation $e^x = 0$ si on la transforme en écrivant $x = -\frac{1}{x'^2}$; car la transformée $e^{-\frac{1}{x'^2}} = 0$ a certainement 0 pour racine réelle, puisque la ligne dont l'équation serait $y = e^{-\frac{1}{x'^2}}$ coupe l'axe à l'origine des x'.

Pour faire l'application complète du théorème que nous avons énoncé à l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, il ne faut pas se borner à une seule des racines réelles de cette équation, mais les considérer toutes. Or, si l'on rétablit ces racines réelles, auxquelles l'auteur de l'objection n'a point eu égard, on voit que la règle n'indique nullement que toutes les racines de l'équation sont réelles. Elle montre au contraire que cette équation ne satisfait pas aux conditions que le théorème suppose.

Pour établir cette conséquence, nous allons rappeler le calcul même qui est employé par l'auteur; et afin de rendre les expressions plus simples, sans altérer en rien les conclusions que l'on en déduit, nous considérerons seulement l'équation $e^x - e^{2x} = 0$. Le lecteur pourra s'assurer facilement qu'il n'y a ici aucune différence entre les conséquences qui conviennent à l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, a et b étant positifs, et celles que l'on déduirait de l'équation très-simple $e^x - e^{2x} = 0$.

Écrivant donc

$$X = e^x - e^{2x} = 0$$
$$\frac{d^n X}{dx^n} = e^x - 2^n e^{2x}$$
$$\frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} = e^x - 2^{n+1} e^{2x}$$
$$\frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = e^x - 2^{n+2} e^{2x},$$

et posant l'équation $\frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} = 0$, ou $e^x - 2^{n+1}.e^{2x} = 0$, on en tire la valeur de e^x pour la substituer dans les deux valeurs de $\frac{d^n X}{dx^n}$ et $\frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}}$. Par cette élimination, on trouve

$$\frac{d^n X}{dx^n} = 2^n.e^{2x}, \quad \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = -2^{n+1}.e^{2x},$$

et l'on détermine la valeur du produit $\frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}}$, qui est $-2^{2n+1}.e^{4x}$. L'auteur en conclut que toute racine réelle de l'équation intermédiaire $\frac{d^{n+1} X}{dx^n}$, étant substituée dans l'équation qui précède et dans celle qui suit, donne deux résultats de signes contraires : c'est cette conclusion que l'on ne peut pas admettre. En effet, si la valeur réelle de x qui rend nulle la fonction intermédiaire $e^x - 2^{n+1}.e^{2x}$, réduit à zéro le facteur e^x commun aux deux termes, cette même valeur de x étant substituée dans la fonction qui précède, savoir $e^x - 2^n.e^{2x}$, et dans celle qui suit, savoir $e^x - 2^{n+2}.e^{2x}$, réduira l'une et l'autre à zéro. Les deux résultats ne sont donc point de signes différents, ils sont les mêmes. Pour que l'un des résultats fût positif et l'autre négatif, il faudrait ne considérer parmi les racines réelles de l'équation $e^x - 2^{n+1}.e^{2x} = 0$, que celles de ces racines qui ne rendent point nul le facteur e^x. Or il n'y en a qu'une seule, savoir la racine réelle du facteur $1 - 2^{n+1} . e^x = 0$. Cette racine, qui rend e^x égale à $\frac{1}{2^{n+1}}$, donne certainement deux résultats de signes opposés : mais l'application du théorème ne consiste pas à substituer dans les deux fonctions intermédiaires une seule des racines réelles de l'équation $e^x - 2^{n+1} . e^{2x} = 0$; elle exige que l'on emploie toutes ces racines, et il est nécessaire qu'il n'y ait aucune de ces racines réelles qui, étant substituée dans les deux fonctions intermédiaires, donne deux résultats de signes opposés. C'est ce qui n'arrive point ici ; car il y a, au contraire, une infinité de valeurs réelles de x, dont chacune, étant mise pour x dans les deux fonctions intermédiaires, donne le même résultat, savoir zéro.

Pour appliquer à une équation $X = 0$ la proposition dont il s'agit, il faut reconnaître avec certitude qu'il n'y a dans le système entier des fonctions dérivées aucune fonction intermédiaire que l'on puisse rendre nulle, en mettant pour x une valeur réelle quelconque, qui, substituée dans la fonction précédente et dans la suivante, donne deux résultats de même signe. S'il y a une seule de ces valeurs réelles de x qui rendant nulle une quelconque des fonctions intermédiaires donne deux résultats de même signe pour la fonction précédente et la fonction suivante, ou si l'on ne peut reconnaître avec certitude que les signes des deux résultats sont différents, on ne doit point conclure que toutes les racines de $X = 0$ sont réelles.

Donc on n'est point fondé à objecter qu'il résulterait du théorème algébrique que l'équation $e^x - e^{2x} = 0$ a toutes ses racines réelles.

Il en est exactement de même de l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, où l'on suppose a et b des nombres positifs. Pour conclure que la proposition indique dans ce cas que toutes les racines sont réelles, il faudrait nécessairement omettre toutes les racines réelles du facteur $e^x = 0$. Il faudrait donc démontrer que ce facteur n'a point de racines, ou qu'elles sont toutes imaginaires; et, faisant comme nous l'avons dit plus haut, $x = -\frac{1}{x'^2}$, il faudrait supposer que l'équation transformée $e^{-\frac{1}{x'^2}} = 0$ n'a point o pour une racine réelle, en sorte que la courbe dont l'équation est $y = e^{-\frac{1}{x'^2}}$ ne rencontrerait point l'axe des x' à l'origine o. Toutes ces conséquences sont contraires aux principes du calcul. Au lieu de conclure que dans l'exemple cité le théorème est en défaut, *ce sont les expressions de l'auteur*, tome VIII des *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, il faut reconnaître que dans cet exemple les conditions qui indiqueraient que toutes les racines sont réelles ne sont point satisfaites.

Le résumé très-simple de notre discussion est que la difficulté assignée s'évanouit entièrement si, au lieu de faire une énumération incomplète des valeurs réelles de x qui rendent nul le facteur commun e^x, et par conséquent la fonction $e^x - be^{ax}$, on considère que cette fonction devient plus petite que tout nombre donné lorsqu'on met pour x une quantité réelle négative dont la valeur absolue devient plus grande que tout nombre donné.

Je rappellerai maintenant l'équation déterminée propre à la question du cylindre, et les principes qui m'ont conduit à appliquer avec certitude à cette équation un théorème d'analyse algébrique. L'équation qui sert à représenter le mouvement de la chaleur dans le cylindre solide, est commune à plusieurs questions physiques; elle exprime les effets du frottement dans un système de plans qui glissent les uns sur les autres, et elle se reproduit dans des recherches dynamiques très-variées : ainsi il est utile d'en discuter avec soin la nature.

M. Poisson a pensé que la proposition énoncée plus haut, concernant les conditions des racines réelles, ne s'applique point aux fonctions transcendantes, si ce n'est dans des cas très-particuliers (19ème cahier de l'École Polytechnique, page 383); mais par rapport à l'équation déterminée qui convient au cylindre, il a adopté successivement deux opinions différentes. Dans le tome VIII des Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences (page 367), après avoir affirmé de nouveau que le théorème cité serait en défaut si on l'appliquait à l'équation exponentielle $e^x - be^{ax} = 0$, il ajoute que la règle convient cependant à l'équation

$$(2) \qquad 0 = 1 - x + \frac{x^2}{(2)^2} - \frac{x^3}{(2.3)^3} + \frac{x^4}{(2.3.4)^4} - \text{etc.},$$

qui appartient à la question du cylindre. Le même auteur a énoncé une autre conclusion dans un second écrit présenté à l'Académie; il y rappelle qu'il avait d'abord pensé qu'à cause de l'accroissement des dénominateurs, le théorème s'appliquait à l'équation (2), mais qu'en y réfléchissant de nouveau il a reconnu que cette conséquence n'est pas fondée.

Il serait inutile de discuter ici ces conclusions, qui, en effet, ne peuvent être toutes les deux vraies, puisqu'elles sont opposées. Je dirai seulement que l'application du théorème algébrique à la question du cylindre doit être déduite d'une analyse exacte qui exclue toute incertitude.

Quant aux principes que j'ai suivis pour résoudre les équations algébriques, ils sont très-différents de ceux qui servent de fondement aux recherches de de Gua ou à la méthode des cascades de Rolle. L'un et l'autre auteur ont cultivé l'analyse des équations; mais ils n'ont point résolu la difficulté principale, qui consiste à distinguer les racines imaginaires. Lagrange et Waring ont donné les premiers une solution théorique de cette question singulière, et la solution ne laisserait rien à désirer si elle était aussi praticable qu'elle est évidente. J'ai traité la même question par d'autres principes, dont l'auteur de l'objection paraît n'avoir point pris connaissance. Je les ai publiés, il y a plusieurs années, dans un Mémoire spécial (Bulletin des Sciences, Société Philomatique, années 1818, page 61, et 1820, page 156.)

J'ai eu principalement en vue, dans cet écrit, la résolution des équations algébriques; je pense que personne ne peut contester l'exactitude de cette solution, dont l'application est facile et générale. En terminant ce mémoire très-succinct, j'ai ajouté que les propositions qu'il renferme ne conviennent pas seulement aux équations algébriques, mais qu'elles s'appliquent aussi aux équations transcendantes. Si j'avais omis cette remarque, j'aurais donné lieu de croire que je regardais la méthode de résolution comme bornée aux fonctions algébriques, proposition entièrement fausse: car j'avais reconnu depuis long-temps que les mêmes principes résolvent aussi les équations non algébriques. Je pensais alors qu'il suffisait d'énoncer cette remarque. Il me semblait qu'en lisant avec attention la démonstration des théorèmes, on distinguerait assez facilement ce qui convient à toutes les fonctions, et ce qui peut dépendre des propriétés spéciales des fonctions algébriques entières. Il est évident que ces dernières fonctions ont un caractère particulier, qui provient surtout de ce que les différentiations répétées réduisent une telle fonction à un nombre constant ; mais les conséquences principales, dont le mémoire contient la démonstration, ne sont point fondées sur cette propriété des fonctions entières. Les conclusions que l'on tire des signes des résultats, les procédés d'approximation, les conditions auxquelles il est nécessaire que ces procédés soient assujettis, la mesure exacte de la convergence, les différentes règles que j'ai données autrefois dans les cours de l'École Polytechnique pour suppléer à l'usage de l'équation aux différences, et qui conduisent toutes à distinguer facilement les racines imaginaires, les conséquences que fournit la comparaison des nombres de variations de signes, en ne considérant que les différences de ces nombres ; toutes ces propositions fondamentales, qui constituent la méthode de résolution, s'appliquent aux fonctions non algébriques.

Quant aux conditions données par de Gua pour reconnaitre qu'une équation a toutes ses racines réelles, elles conviennent certainement à toutes les équations, soit algébriques, soit transcendantes, qui sont composées d'un nombre fini ou infini de facteurs. Je n'ai point regardé alors comme nécessaire de développer ces propositions, parce qu'elles sont autant de conséquences des principes dont j'ai rapporté la démonstration dans le mémoire cité. Il n'y en a aucune qui soit bornée aux seules équations algébriques ; mais l'application de principes très-généraux peut nécessiter un examen spécial. C'est ainsi que le théorème de Viète sur la composition des coefficients s'applique différemment aux équations dont le premier membre est une fonction entière, et à celles qui ont des dénominateurs.

Il n'est pas moins évident que si l'on considère une fonction non continue, les conséquences algébriques ne subsistent point pour toute l'étendue de la fonction : elles s'appliquent aux parties où la fonction varie par degrés insensibles, et ne peut changer de signe qu'en devenant nulle. On doit aussi faire une remarque semblable au sujet de la proposition algébrique qui exprime que le produit de tous les facteurs du premier degré, correspondant aux racines de $X = 0$, équivaut au premier membre X de cette équation. J'ai prouvé, dans mes premières recherches sur la théorie de la chaleur, que cette proposition ne convient pas à certaines fonctions non algébriques : par exemple à l'équation très-simple $\tang. x = 0$. La fonction $\tang. x$ est fort différente du produit de tous les facteurs du premier degré formé des valeurs de x qui rendent $\tang. x$ nulle : ce produit complet donne $\sin. x$, et non $\tang. x$. Cela provient de ce que la fonction $\tang. x$ est le produit de $\sin. x$ par $\sec. x$. Or les racines de l'équation $\sec. x = 0$, qui sont imaginaires, ne rendent point $\tang. x$ nulle : elles donnent à $\sin. x$ une valeur infinie, de sorte que la fonction $\tang. x$ devient $\frac{0}{0}$; et j'ai montré que si l'on détermine exactement sa valeur, on trouve que $\tang. x$ se réduit à $\sqrt{-1}$, et non à zéro. Ainsi les racines du facteur $\sec. x = 0$ n'appartiennent pas à l'équation $\tang. x = 0$. Il en est de même de toutes les équations analogues que j'ai employées dans la Théorie de la chaleur, par exemple de celle-ci, $\varepsilon - \lambda$ tang. $\varepsilon = 0$. ε est l'inconnue, et λ est moindre que l'unité (page 367). En général le produit, quoique complet, des facteurs formés de toutes les racines d'une équation non algébrique $\varphi x = 0$ peut différer de la fonction φx; et cela arrive lorsque les valeurs de x qui rendent nul un des deux facteurs dont la fonction φx est composée, donnent à l'autre facteur une valeur infinie. Comme cette condition ne peut point avoir lieu dans les fonctions algébriques entières, c'est pour cette raison que le théorème de Viète sur la composition des coefficients convient à toutes ces fonctions. Je pourrais ici multiplier les exemples qui montrent que le produit de tous les facteurs simples peut différer du premier membre de l'équation. En général il faut distinguer *les cas où une fonction est égale au produit d'un nombre fini ou infini de facteurs formés de toutes les racines, et les cas où cette propriété n'a pas lieu;* mais nous ne pourrions point ici entreprendre cette discussion sans nous écarter trop long-temps du but spécial de cet article, qui est d'expliquer clairement comment j'ai été conduit à prouver, par l'application d'un théorème algébrique, que l'équation transcendante (2), qui se rapporte à la question du cylindre, a en effet toutes ses racines réelles, et de montrer quelles sont ces racines.

Il est d'abord nécessaire de rappeler un théorème général dont j'ai donné la démonstration dans les Mémoires de la Société Philomatique (année 1820, pages 160 et suiv.). Cette proposition peut être ainsi énoncée : une équation algébrique $X = 0$ étant donnée, on forme toutes les fonctions qui dérivent de X par la différentiation, et on écrit la suite entière dans cet ordre inverse,

$$X^{(n)}, X^{(n-1)}, X^{(n-2)}, \ldots\ldots X''', X'', X', X.$$

En substituant dans cette suite de fonctions un certain nombre α, et marquant les signes des résultats, on obtient une suite de signes, qui serait ou pourrait être très-différente si le nombre substitué α venait à changer. On suppose maintenant que la valeur substituée α augmente par degrés insensibles, depuis $\alpha = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{0}$, et l'on considère les changements qui surviennent dans le nombre des variations de signes que présente la suite des résultats. Cela posé, nous disons que les racines réelles ou imaginaires de la proposée $X = 0$ correspondent aux nombres des variations de signes que la suite des résultats perd, à mesure que le nombre substitué augmente. Voici en quoi consiste cette relation. Les variations de signes que peut perdre la suite des résultats, lorsque le nombre substitué passe par une valeur déterminée, sont de deux sortes.

1° Il peut arriver, lorsque quelques-unes de ces variations disparaissent, que la dernière fonction X devienne nulle.

2° Il peut arriver que des variations de signes disparaissent, sans que la dernière fonction X devienne nulle. Le premier cas répond aux racines réelles, et le second aux racines imaginaires.

J'ai reconnu que la proposée a précisément autant de racines réelles, égales ou inégales, que la suite perd de variations de signes de la première espèce; et qu'elle a précisément autant de racines imaginaires que la suite des résultats perd de variations de signes de la seconde espèce. Ce théorème, que l'on doit regarder comme fondamental, renferme comme corollaires la remarque de Hudde sur les racines égales, la règle de Descartes concernant le nombre des racines positives ou négatives, et la proposition de de Gua relative aux équations dont toutes les racines sont réelles.

La démonstration de ce théorème général, publiée dans les Mémoires cités de la Société Philomatique, ne diffère point de celle que j'ai donnée autrefois dans les cours de l'école Polytechnique de France. Je suppose ici que le lecteur a sous les yeux cette démonstration, et je me borne à rappeler les conséquences principales.

Le nombre substitué α passant par degrés insensibles de sa valeur initiale $-\frac{1}{0}$ à la dernière $+\frac{1}{0}$, il ne peut survenir de changements dans la suite des signes des résultats que lorsque α atteint et dépasse infiniment peu une valeur de x qui rend nulle une des fonctions $X^{(n)}, X^{(n-1)}, \ldots X''', X'', X', X$. Or, après que α a dépassé cette valeur de x, il peut arriver que le nombre des variations de signes de la suite n'ait point changé: ainsi on trouverait le même nombre de variations en les comptant avant et après. Il peut arriver aussi deux autres cas: le premier, lorsque la fonction qui s'évanouit est la dernière; alors la valeur substituée α est une des racines réelles, et le nombre des variations de signes ne demeure pas le même; il est diminué d'une unité. Dans l'autre cas, la fonction qui s'évanouit n'est pas X: elle est une des fonctions dérivées intermédiaires, et il arrive que le nombre des variations de signes n'est pas le même qu'auparavant; il est diminué de deux unités, et l'on conclud avec certitude que deux des racines de l'équation proposée sont imaginaires. Ainsi

1° Les valeurs accidentelles de x, qui font évanouir une des fonctions, peuvent n'apporter aucun changement dans le nombre total des variations ; ces valeurs substituées sont indifférentes.

2° La substitution qui fait évanouir une des fonctions peut diminuer d'une seule unité le nombre des variations; alors la valeur substituée est une racine réelle.

3° La substitution qui rend nulle une fonction intermédiaire fait disparaître deux variations de signes, sans rendre nulle la fonction X ; alors on est assuré que deux des racines de l'équation sont imaginaires. Ce sont les deux cas élémentaires pour lesquels le nombre des changements de signes diminue. Il ne peut jamais augmenter ; il est conservé, ou il est diminué d'une unité pour chaque racine réelle, ou il est diminué de deux unités pour chaque couple de racines imaginaires. Il n'y a point d'autres cas possibles ; ils peuvent se réunir accidentellement, et alors ils donnent lieu à autant de conclusions séparés.

Il est fort important de remarquer ces valeurs *critiques* de x, qui ont la propriété de faire disparaître à la fois deux variations de signe. Cette disparition a lieu parce que la valeur de x qui rend nulle la fonction dérivée intermédiaire donne deux résultats de même signe, lorsqu'on la substitue dans les deux fonctions dont l'une précède et l'autre suit la fonction intermédiaire qui s'évanouit: c'est cette condition qui est le caractère propre des racines imaginaires. Autant de fois que ce caractère se reproduit, autant la proposée a de couples de racines imaginaires ; réciproquement, il ne peut y avoir de couples de racines imaginaires que dans le cas où cette condition subsiste.

Cette considération nous fait mieux connaître la nature des racines imaginaires. En effet elle montre que les racines manquent dans de certains intervalles, savoir ceux où il arrive que le nombre substitué α, passant d'une valeur de x à une autre infiniment voisine, rend nulle une fonction intermédiare sans rendre nulle la fonction X, et fait ainsi disparaître deux variations de signes, en donnant deux résultats de même signe à la fonction qui précède et à celle qui suit. Cette conclusion a toujours été regardée comme évidente dans le cas très-simple où la courbe de forme parabolique, et dont l'équation est $y = X$, s'approche de l'axe des x, et après avoir atteint une valeur minimum sans rencontrer l'axe, s'en éloigne et poursuit son cours. Mais ce n'est là qu'un cas particulier des racines imaginaires : ce minimum peut avoir lieu pour une des fonctions dérivées d'un ordre quelconque, et alors il détermine toujours un couple de racines imaginaires. A proprement parler, les racines imaginaires sont des racines *déficientes*, qui manquent dans certains intervalles; et l'on reconnaît que c'est à un de ces intervalles que correspond en effet un couple de racines imaginaires, parce qu'il suffit de prouver que ces deux racines n'existent point dans l'intervalle dont il s'agit, pour conclure avec certitude que l'équation proposée a deux racines imaginaires.

Quoique dans l'énoncé de ces propositions nous ne considérions ici que les fonctions algébriques, il est assez évident que ces racines *déficientes*, que l'on a appelées imaginaires, ont le même caractère dans les équations non algébriques formées d'un nombre fini ou infini de facteurs du premier degré réels ou imaginaires. Ce minimum absolu est le signe propre du manque de deux racines ; mais nous écartons ici toute conclusion relative aux équations non algébriques, afin d'appliquer d'abord les principes fondamentaux à un objet simple et parfaitement défini.

Ce n'est pas seulement dans la fonction principale X que résident ces valeurs *critiques* de la variable x, elles peuvent appartenir à toutes les fonctions dérivées d'un ordre quelconque. Pour la résolution d'une équation il est nécessaire de connaître les intervalles où manquent les racines imaginaires; et ces derniers intervalles doivent être cherchés dans tout le système des fonctions dérivées des différents ordres.

Examinons d'après ces principes le cas particulier où l'équation proposée n'aurait que des racines réelles. Alors la suite des signes des résultats, qui perd successivement toutes ses variations à mesure que le nombre substitué passe de $-\frac{1}{0}$ à $+\frac{1}{0}$, ne perd ces variations que d'une seule manière. Elle en perd une toutes les fois que le nombre x devient successivement égal à chacune des racines réelles. Dans tous les autres cas où l'une des fonctions dérivées devient nulle, le nombre des variations de signes n'est point changé. Il n'arrive jamais qu'une valeur de x, qui rend nulle une fonction intermédiaire dérivée, donne le même signe à la fonction qui précède et à celle qui suit. Au contraire toute valeur réelle de x, qui rend nulle une fonction dérivée intermédiaire, donne deux signes différents à la fonction qui précède et à celle qui suit; et cette dernière condition n'a pas lieu seulement pour une des valeurs réelles de x qui fait évanouir une fonction intermédiaire, elle a lieu pour toutes les valeurs réelles de x qui ont cette propriété: s'il y avait une seule exception, il y aurait un couple de racines imaginaires. Réciproquement si l'on est assuré que toute valeur réelle de x, qui rend nulle une des fonctions intermédiaires, donne deux résultats de signes contraires lorsqu'on la substitue dans les deux fonctions précédente et suivante, il est certain que l'équation algébrique proposée a toutes ses racines réelles: c'est la proposition donnée par de Gua; on voit qu'elle est un corollaire évident du théorème général que j'ai énoncé plus haut.

Dans tous les cas possibles, une équation algébrique a nécessairement autant de racines imaginaires que la suite de signes perd de variations, lorsque le nombre substitué passe par de certaines valeurs réelles de x, qui font disparaître des variations de signes sans que la dernière fonction X s'évanouisse. Ainsi lorsqu'il n'y a point de telles valeurs de x, il n'y a point de racines imaginaires.

Il suffit donc, pour être assuré qu'une équation algébrique a toutes ses racines réelles, de reconnaître qu'il n'existe aucune de ces valeurs réelles de x qui, sans rendre nulle la dernière fonction X, fassent disparaître deux variations à la fois.

Nous considérons maintenant la fonction transcendante $\varphi r = 1 - \frac{r}{1} + \frac{r^2}{(1.2)^2} - \frac{r^3}{(1.2.3)^2} + \frac{r^4}{(1.2.3.4)^2} -$ etc., afin de prouver que l'équation $\varphi r = 0$ a toutes ses racines réelles. Cette équation est celle qui se rapporte au mouvement de la chaleur dans un cylindre solide.

Je me suis d'abord proposé de connaître la forme de la ligne courbe dont l'équation est $y = \varphi r$, y désignant l'ordonnée dont r est l'abcisse. Cette ligne a des propriétés fort remarquables, que l'on déduit d'une expression de φr en intégrale définie. Dans mon premier mémoire sur la Théorie de la chaleur (1807), j'ai employé cette intégrale pour déterminer la forme de la ligne dont l'équation est $y=\varphi r$; et j'ai indiqué une propriété principale, que j'ai rappelée dans la Théorie analytique de la chaleur, page 380. Le mémoire de 1807, qui demeure déposé dans les archives de l'Institut, contient d'autres détails, art. 127, page 180; on en conclud évidemment que la courbe dont il s'agit coupe une infinité de fois son axe, et forme des aires qui se détruisent alternativement.

L'examen attentif de l'intégrale définie ne laisse aucun doute sur la multiplicité et les limites des racines réelles. On voit clairement que l'équation transcendante $\varphi r=0$ a une infinité de ces racines réelles : nous les désignons par α, β, γ, δ, ε, etc. Mais, pour compléter la discussion, il restait à examiner si cette équation $\varphi r=0$ est en effet du nombre de celles qui ne peuvent avoir que des racines réelles.

Au lieu d'appliquer immédiatement à cette équation transcendante les théorèmes que nous avons rappelés ci-dessus, nous examinons d'abord la nature de la fonction algébrique suivante :

$$F(x,n)=1-\frac{nx}{1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{x^3}{2.3}$$
$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot\frac{x^4}{2.3.4}+\text{etc.}$$

Cette fonction est à deux variables x et n; n est un nombre entier. Le nombre des termes est $n+1$, et si l'on suppose n infini, la fonction transcendante qui en résulte ne contient que le produit nx, et devient

$$1-nx+\frac{n^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{n^3}{2.3}\cdot\frac{x^3}{2.3}+\frac{n^4}{2.3.4}\cdot\frac{x^4}{2.3.4}-\text{etc.}$$

Faisant $nx = r$, on trouve la fonction transcendante $\varphi(r)$ qui est l'objet de la question.

Nous allons maintenant démontrer que l'équation algébrique $F(x, n) = 0$, dont x est l'inconnue, n'a que des racines réelles; et nous prouverons qu'il s'en suit nécessairement que l'équation trancendante $\varphi(r) = 0$, dont r est l'inconnue, a aussi toutes ses racines réelles.

Pour reconnaître la nature des racines de l'équation algébrique $F(x, n) = 0$, nous appliquerons les théorèmes que l'on vient de rappeler.

La fonction $F(x, n)$ étant désignée par y, on trouve que y satisfait à l'équation différentielle $x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + (1 - x)\dfrac{dy}{dx} + ny = 0$, ce dont on peut s'assurer par la différentiation. On conclud de cette dernière équation les suivantes,

$$(e) \qquad \begin{array}{l} x\dfrac{d^3 y}{dx^3} + (2 - x)\dfrac{d^2 y}{dx^2} + n\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ x\dfrac{d^4 y}{dx^4} + (3 - x)\dfrac{d^3 y}{dx^3} + n\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 0 \\ x\dfrac{d^5 y}{dx^5} + (4 - x)\dfrac{d^4 y}{dx^4} + n\dfrac{d^3 y}{dx^3} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x\dfrac{d^i y}{dx^i} + (i - 1 - x)\dfrac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}} + n\dfrac{d^{i-2} y}{dx^{i-2}} = 0. \end{array}$$

Cette relation récurrente se reproduit autant de fois que la fonction y peut être différentiée sans devenir nulle, en sorte qu'il y a un nombre n de ces équations (e). Si actuellement on suppose, dans chacune des équations (e), que le second terme est rendu nul par la substitution d'une certaine valeur réelle de x dans une fonction dérivée, on voit que la même substitution donne, pour la fonction dérivée précédente et pour celle qui suit, deux résultats dont le signe ne peut pas être le même. En effet la valeur de x qui, substituée dans le second terme, rend ce terme nul, n'est pas un nombre négatif: car la fonction qui exprime y ne peut pas devenir nulle lorsqu'on donne à x une valeur négative, puisque tous les termes recevraient ce même signe. Il en est de même de $\frac{dy}{dx}$, et de toutes les fonctions dérivées de y: aucune de ces fonctions ne peut être rendue nulle par la substitution d'une valeur négative de x, car tous les termes prendraient le même signe. Donc les valeurs réelles de x, qui auraient la propriété de faire évanouir une des fonctions dérivées, ne peuvent être que positives. Donc en substituant pour x, dans une des équations (e), une valeur réelle de x qui ferait évanouir le second terme, il arrivera toujours que le premier et le dernier terme n'auront pas un même signe; car leur somme ne serait pas nulle. On ne peut pas supposer que la même valeur de x, qui fait évanouir le second terme, rend aussi nuls le premier et le troisième terme d'une des équations (e); car si cela avait lieu, on conclurait de ces équations que la même valeur de x fait évanouir les fonctions dérivées de tous les ordres, sans aucune exception. Ce cas singulier serait celui où l'équation proposée $y=0$ aurait toutes ses racines égales.

Il résulte évidemment de la condition récurrente qui vient d'être démontrée, que l'équation $F(x, n)=0$ a toutes ses racines réelles. En effet cette équation est algébrique, et il n'existe aucune valeur de x propre à faire évanouir une fonction dérivée intermédiaire, en donnant deux résultats positifs ou deux résultats négatifs pour les fonctions précédente et suivante. Il suit donc rigoureusement des principes de l'analyse algébrique que l'équation $F(x, n) = 0$ n'ayant aucune valeur *critique*, n'a point de racines imaginaires. Cette conséquence est entièrement indépendante de la valeur du nombre entier n : quel que puisse être ce nombre n, et quand on supposerait qu'il croît de plus en plus, et devient plus grand que tout nombre donné, chacune des équations que l'on formerait aurait toutes ses racines réelles et positives.

On supposera n infini, et désignant par $\varphi(n, x)$ la fonction transcendante, on voit que l'équation $\varphi(n, x) = 0$ n'est autre chose qu'un cas particulier de l'équation $F(n, x) = 0$. Elle appartient au système de toutes les équations que l'on forme, en donnant à n dans $F(n, x)$ les différentes valeurs 1, 2, 3, 4, 5, etc. à l'infini ; et comme on ne trouverait ainsi que des équations dont toutes les racines sont réelles, on en conclud que cette propriété, entièrement indépendante du nombre n, subsiste toujours lorsque n devient plus grand que tout nombre donné. Alors la fonction est transcendante, et l'équation devient $\varphi(r) = 0$. Donc cette équation n'a point de racines imaginaires. On pourrait regarder comme superflu tout examen ultérieur de l'équation $\varphi(r) = 0$; et toutefois la conclusion deviendra encore plus conforme aux principes communs de l'analyse algébrique, en le présentant comme il suit.

Soit $nx = r$: nous avons dit que, par l'emploi des constructions, ou en remarquant les propriétés de l'expression de $\varphi(r)$ en intégrale définie, on voit que la courbe dont l'équation est $y = \varphi(r)$ a une infinité de sinuosités, et qu'elle coupe l'axe des r en une multitude de points à la droite de l'origine o. Nous avons désigné par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. les distances de o à ces divers points d'intersection. Si l'on écrit $nx = r$ dans l'équation algébrique $F(x, n) = o$, qui est du degré n, et a ses n racines réelles, on a une transformée algébrique, que nous désignons par $f(r, n) = o$. r est l'inconnue, et toutes les racines, c'est-à-dire les valeurs de r, sont réelles ; car on les trouverait en multipliant par le nombre n les valeurs de x qui sont les racines de l'équation $F(x, n) = o$. Or si l'on donnait au nombre entier n une valeur immensément grande, qui surpasserait, par exemple, plusieurs millions, il est manifeste que l'équation algébrique $f(r, n) = o$ donnerait pour l'inconnue r des valeurs réelles a, b, c, d, etc. extrêmement peu différentes de ces racines que nous avons désignées par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., et qui, étant prises pour r, rendent nulle la fonction $\varphi(r)$. Si l'on remarquait une des valeurs algébriques a, b, c, d, etc., par exemple la quatrième d par ordre de grandeur, on la trouverait extrêmement peu différente de la racine δ du même rang qui satisfait à l'équation transcendante $\varphi(r) = o$. En général chacune des valeurs algébriques de r données par l'équation $f(r, n) = o$, et désignées par les quantités a, b, c, d, etc., approche continuellement de la valeur du même rang, prise parmi les racines de l'équation $\varphi r = o$; elle en approche d'autant plus que le nombre n est plus grand, et ce nombre peut être tel que la différence soit moindre que toute grandeur donnée. Les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. sont les limites respectives vers lesquelles les valeurs a, b, c, d, etc. convergent de plus en plus. Le nombre des valeurs données par l'équation $f(r, n) = o$ augmente continuellement, et ces valeurs se rapprochent infiniment des racines cherchées α, β, γ, δ, etc. Or l'équation $f(r, n) = 0$ étant algébrique, a toutes les propriétés élémentaires dont jouissent les équations algébriques et qui sont démontrées depuis long-temps : par conséquent les théorèmes de Viète et d'Harriot sur la composition des équations s'appliquent à celle-ci.

Ainsi la fonction $f(r, n)$ n'est autre chose que le produit des n facteurs du premier degré, qui répondent aux n valeurs réelles a, b, c, d, etc. données par l'équation $f(r, n) = 0$. Nous écrirons donc l'équation générale

$$(E) \qquad f(r, n) = \left(1 - \frac{r}{a}\right)\left(1 - \frac{r}{b}\right)\left(1 - \frac{r}{c}\right)\left(1 - \frac{r}{d}\right)\ldots$$

Il ne reste plus qu'à passer de cette équation au cas particulier où le nombre n est supposé infini.

Pour connaître la propriété qui, dans ce cas, est exprimée par l'équation (E), il suffit de porter les quantités qui entrent dans cette équation aux limites vers lesquelles elles convergent. Or la fonction $f(r, n)$ a pour limite la fonction transcendante $\varphi(r)$; les limites des valeurs a, b, c, d, etc. sont les nombres que nous avons désignés par α, β, γ, δ, etc. On a donc cette relation

$$\varphi(r) = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{r}{\beta}\right)\left(1 - \frac{r}{\gamma}\right)\left(1 - \frac{r}{\delta}\right)\ldots\ldots \text{ à l'infini.}$$

On connaît par ce résultat que la fonction transcendante $\varphi(r)$ est formée du produit d'un nombre infini de facteurs du premier degré correspondants aux racines α, β, γ, δ, etc., dont chacune fait évanouir la fonction $\varphi(r)$. On regarde comme utile de démontrer spécialement cette proposition pour la fonction transcendante $\varphi(r)$, parce qu'il y a, comme je l'ai remarqué autrefois, plusieurs cas où le produit des facteurs simples ne forme pas le premier membre de la proposée.

Il résulte donc de l'analyse précédente que la fonction $\varphi(r)$ est le produit de tous les facteurs du premier degré

$$1-\frac{r}{\alpha},\quad 1-\frac{r}{\beta},\quad 1-\frac{r}{\gamma},\quad 1-\frac{r}{\delta},\ \text{etc.}$$

qui correspondent aux racines. Cela posé, il est manifeste qu'aucune valeur différente des grandeurs réelles α, β, γ, δ, etc. ne pourrait faire évanouir cette fonction $\varphi(r)$. En effet un facteur tel que $1-\frac{r}{\alpha}$ ne peut devenir nul que si l'on fait $r=\alpha$: donc si l'on donnait à x une valeur quelconque réelle ou imaginaire qui ne serait ni α, ni β, ni γ, etc., aucun des facteurs ne serait nul; donc le produit aurait une certaine valeur non nulle. Donc si l'on met pour r dans $\varphi(r)$ une valeur quelconque, soit qu'on la suppose ou réelle ou imaginaire, et si elle n'est point une des racines que nous avons désignées par α, β, γ, δ, etc., la fonction $\varphi(r)$ ne devient point nulle: donc l'équation transcendante $\varphi r=0$ a ces racines réelles α, β, γ, δ, etc., et n'a aucune autre racine ou réelle ou imaginaire.

Il est remarquable que l'on parvienne ainsi à démontrer que toutes les racines de l'équation transcendante $\varphi(r)=0$ sont réelles, sans qu'il soit nécessaire de regarder comme connue la forme des expressions imaginaires, que l'on sait être celle du binôme $\mu+\nu\sqrt{-1}$.

Au reste, en considérant *a priori* que si les équations déterminées propres à la théorie de la chaleur avaient des racines imaginaires, leur forme ne pourrait être que celle du binôme $\mu+\nu\sqrt{-1}$, on voit qu'il est pour ainsi dire superflu de démontrer que les équations dont il s'agit ont toutes leurs racines réelles. Car la communication de la chaleur s'opérant toujours par voie de partage, il est évident, pour ceux qui connaissent les principes de cette théorie, que le mouvement oscillatoire ne peut s'établir et subsister sans une cause extérieure. Cela résulte aussi de la nature de l'équation différentielle, qui, dans les questions dont il s'agit, ne contient pas, comme les équations dynamiques, la fluxion du second ordre par rapport au temps. Or cette oscillation perpétuelle de la chaleur aurait lieu, si l'expression du mouvement contenait des quantités imaginaires. Si les équations déterminées qui conviennent à cette théorie pouvaient avoir de telles racines, on ne devrait point les introduire dans les solutions. On est assuré d'avance qu'il faudrait les omettre.

En recherchant la nature de ces racines, je n'ai d'autre but que de montrer l'accord de tous les éléments analytiques dont la théorie se compose.

Il me reste à rappeler les premières objections qui ont été présentées sur la nature des équations déterminées propres aux questions principales de la théorie de la chaleur. Cette théorie a été donnée pour la première fois sur la fin de l'année 1807, dans un ouvrage manuscrit qui est encore déposé aux archives de l'Institut. Les principes physiques et analytiques qui servent de fondement à ces recherches, n'ont point été saisis d'abord : il s'est passé plusieurs années avant qu'on en reconnût l'exactitude. Aujourd'hui même les résultats cosmologiques de cette théorie, la notion de la température des espaces planétaires, les lois mathématiques de la chaleur rayonnante, les équations différentielles du mouvement de la chaleur dans les liquides, n'ont point encore fixé l'attention de tous les principaux géomètres. Les vérités mathématiques, quoique exactement démontrées, ne s'établissent qu'après un long examen. Les théorèmes généraux qui m'ont servi à intégrer les équations différentielles s'appliquant à un grand nombre de questions physiques qui n'avaient point été résolues, la connaissance de ces théorèmes et la méthode d'intégration qui en dérive sont devenues assez générales; mais les autres résultats de la théorie sont, pour ainsi dire, encore ignorés. Quant à l'équation transcendante déterminée qui exprime le mouvement de la chaleur dans le cylindre, elle se reproduit dans des recherches physiques très-diverses : c'est pour cette raison que j'en présente aujourd'hui l'analyse avec de nouveaux développements.

On a objecté, durant plusieurs années, que les équations déterminées qui servent à exprimer le mouvement de la chaleur dans la sphère ont des racines imaginaires, et l'on a cité, comme exemple, l'équation très-simple tang. $x = 0$. Comme elle est formée des deux facteurs sin. x et sec. x, on concluait qu'elle doit avoir, 1° les racines réelles de l'équation sin. $x = 0$, 2° les racines de l'équation sec. $x = 0$, qui ne peuvent être qu'imaginaires.

J'ai discuté avec soin celles de ces objections qu'il m'a paru nécessaire de réfuter, et j'ai écrit à ce sujet des notes assez étendues, qui sont annexées au premier Mémoire, et déposées aux archives de l'Institut. Elles ont été communiquées à plusieurs géomètres, et il n'y a personne qui ne puisse en prendre connaissance. Ces pièces ont été remises à M. Laplace, qui, selon son usage, a bien voulu inscrire de sa main la date de la présentation, savoir le 29 octobre 1809. J'ai rappelé spécialement dans ces notes l'objection relative aux racines de l'équation tang. $x=0$; et pour la réfuter j'ai prouvé, non pas que l'équation sec. $x=0$ n'a aucune racine ni réelle ni imaginaire, ce qui ne serait pas conforme aux principes d'une analyse exacte, mais que les racines imaginaires de cette équation sec. $x=0$ n'appartiennent point à l'équation tang. $x=0$. On n'avait pas encore eu l'occasion de remarquer qu'il y a des cas où une fonction n'est pas le produit de tous les facteurs du premier degré correspondant aux racines de l'équation dont le premier membre est la fonction elle-même; je montrai que, pour l'équation dont il s'agit, tang. $x=0$, ce produit est sin. x, et non point tang. x.

Je termine ici ce Mémoire, en omettant des développements qui n'appartiendraient qu'aux traités généraux d'analyse. Ces considérations sur les propriétés des fonctions transcendantes, et sur leurs rapports avec l'analyse algébrique, méritent toute l'attention des géomètres. Elles montrent que les principes de la résolution des équations appartiennent à l'analyse générale, dont elles sont le vrai fondement.

L'étude approfondie de la théorie des équations éclaire des questions physiques très-variées et très-importantes, par exemple celles qui représentent les dernières oscillations des corps, ou divers mouvements des fluides, ou les conditions de stabilité du système solaire, ou enfin les lois naturelles de la distribution de la chaleur.

RECHERCHES

SUR

LA CHALEUR SPÉCIFIQUE DES FLUIDES ÉLASTIQUES

PAR M. DULONG.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 mai 1828.

PREMIÈRE PARTIE.

POUR traiter une multitude de questions théoriques ou pratiques, on a besoin d'estimer les quantités de chaleur qui correspondent à une certaine variation thermométrique de tel ou tel corps, et, par conséquent, de connaître la chaleur spécifique des divers substances solides, liquides ou gazeuses, ainsi que les lois des variations de cet élément, lorsqu'il ne demeure pas sensiblement constant.

L'importance de la détermination exacte de ce coëfficient spécifique s'est fait sentir depuis long-temps : on en peut juger par les nombreux travaux qui se rapportent à ce sujet.

Les méthodes expérimentales applicables aux corps solides et aux liquides ont, dans ces dernières années, reçu des perfectionnements remarquables. Quant aux fluides élastiques, il se présente d'autres difficultés, qui proviennent, en majeure partie, de ce que leurs dernières particules étant douées d'une mobilité toujours très-grande, mais inégale pour chacun d'eux, les effets que l'analogie porte à regarder comme devant servir de mesure aux chaleurs spécifiques, peuvent, dans ce cas, dépendre encore d'une autre cause, et quelquefois même devenir entièrement étrangers aux différences de chaleur spécifique. D'ailleurs, à l'égard de cette classe de corps, la question acquiert plus d'étendue : les variations de température nécessairement accompagnées d'un changement correspondant de volume, dans les solides et les liquides, peuvent être observées isolément dans les fluides élastiques ; en sorte que, pour ceux-ci, la chaleur spécifique peut et doit être envisagée de deux manières différentes : ou bien, avec changement de volume, sous une pression constante, ou bien, sous un volume invariable, avec une élasticité plus ou moins grande. Enfin, il est très-probable que des changements de volume aussi grands que ceux qui peuvent s'observer dans les gaz, entraînent des variations considérables dans le coëfficient de la chaleur spécifique ; ce qui rend indispensable la recherche des lois de ces variations

Malgré les efforts multipliés d'un grand nombre de physiciens qui se sont occupés de ces questions, on peut dire que nous sommes encore bien loin d'en posséder une solution complète.

Je ne retracerai pas ici l'histoire des premières tentatives dont les défauts ont depuis long-temps été signalés; toute incertitude semblait enfin avoir cessé, du moins quant aux chaleurs spécifiques des gaz soumis à une pression constante, par le travail très-étendu et justement estimé de MM. Laroche et Bérard (1), lorsque M. Haycraft, d'abord, et ensuite MM. de La Rive et Marcet sont venus révoquer en doute les résultats des physiciens français, et chercher, par des moyens différents, à établir ce principe : que tous les gaz simples ou composés ont, sous le même volume et à force élastique égale, la même chaleur spécifique.

On doit regretter que le premier n'ait pas décrit ses appareils avec tous les détails nécessaires, pour permettre d'apprécier les causes d'erreur que comporte sa méthode. Les circonstances qui, à une certaine époque, paraissent les plus indifférentes, peuvent acquérir une haute importance, lorsque la science a fait quelques pas de plus.

L'appareil de M. Haycraft (2) ne diffère pas essentiellement de celui que MM. Laroche et Bérard avaient employé. Mais, au lieu de mesurer, comme ceux-ci, l'élévation de température produite, dans le calorimètre, par un certain volume de gaz, M. Haycraft a établi, l'un à côté de l'autre, deux appareils semblables en tout, et il a cherché à constater si, toutes les circonstances étant les mêmes de part et d'autre, des volumes égaux de deux gaz différents cédaient aux deux calorimètres des quantités de chaleur égales ou inégales.

De ces expériences il croit pouvoir déduire cette loi générale : *que tous les gaz simples ou composés ont, à volume égal, la même capacité pour la chaleur.* Quoique l'auteur ne s'explique point à cet égard, il est évident que sa propo-

---

(1) Annales de Chimie, t. LXXXV, p. 72 et 113.

(2) *Edinburg's philosoph. Transact.*, Annales de Chim. et de Phys., t. XXVI, p. 298.

sition concerne seulement les fluides élastiques soumis à une pression égale et constante.

Nous ferons d'abord remarquer que l'auteur n'a expérimenté que sur six gaz différents, dont quatre sont simples, et que, des deux autres qui sont l'acide carbonique et le gaz oléfiant, le dernier a constamment indiqué une capacité supérieure. Déja les résultats de MM. Laroche et Bérard et les remarques que nous avions faites sur l'erreur qui devait affecter spécialement le coëfficient relatif au gaz hydrogène (1), rendaient très-probable que les gaz simples ont, sous le même volume, la même chaleur spécifique.

Les expériences de M. Haycraft tendent à confirmer cette proposition; mais je ne pense pas qu'elles autorisent à y comprendre aussi les gaz composés. L'acide carbonique est le seul corps de cette classe dont la chaleur spécifique n'ait pas excédé celle des gaz simples, et, lors même que le procédé expérimental ne donnerait prise à aucune objection, il ne serait pas permis d'étendre, à tous les autres corps, le résultat d'une observation faite sur un seul. Malheureusement l'omission de tous les détails dans la description des parties essentielles de l'appareil, ne laisse pas la possibilité de lever les doutes que suggère la lecture du Mémoire de M. Haycraft. Il aurait été utile de savoir comment les serpentins étaient disposés dans les calorimètres, si toutes leurs courbures etaient placées dans le même plan horizontal ou vertical, ou si elles avaient la forme de l'hélice qu'on leur donne assez souvent; de savoir, enfin, si le gaz entrait par la partie su-

(1) Annal. de Chim. et de Phys., t. x, p. 406.

périeure ou par l'extrémité inférieure : aucune de ces circonstances n'est indifférente.

Il paraît que M. Haycraft a fait usage d'un thermomètre à boule; et il passe entièrement sous silence l'artifice qu'il a dû employer pour évaluer exactement la température moyenne du calorimètre. Le comte de Rumford avait proposé de placer dans l'axe de l'instrument un thermomètre à réservoir cylindrique, d'une longueur égale à la profondeur du premier. J'ai fait voir anciennement que ce moyen pouvait encore occasionner des erreurs assez grandes, et qu'il était bien préférable de mélanger toutes les parties du liquide, afin de leur donner une température uniforme. Ne connaissant, du reste, ni la construction du calorimètre, ni la manière dont l'auteur s'en est servi, il est impossible de prononcer avec certitude sur le genre d'erreur inhérent à ce procédé; mais, puisque M. Haycraft ne fait mention d'aucune précaution spéciale pour se garantir des effets de l'inégale distribution de la chaleur qui a pu résulter de ce que des gaz différents, en parcourant un même conduit, perdent plus ou moins promptement leur excès de température, les circonstances étant égales d'ailleurs, il est très-probable que la différence, assez faible, qui existe entre la capacité de l'acide carbonique et celle des gaz simples, aura été masquée, dans ses expériences, par la cause que je viens de signaler.

Quelque temps après, MM. Aug. de La Rive et Marcet publièrent, sur le même sujet, un travail fort étendu (1), et, par un procédé tout autre, parvinrent à la même con-

---

(1) Annal. de Chim. et de Phys., t. xxxv, p. 5.

clusion que M. Haycraft; avec cette différence, cependant, que la loi annoncée par celui-ci se rapporte aux gaz soumis à une pression égale et constante, tandis que MM. de La Rive et Marcet supposent un volume constant. Le talent bien connu de ces jeunes physiciens, le soin avec lequel les observations paraissent avoir été faites, la simplicité de la loi, sa coïncidence avec les résultats de M. Haycraft, tout semble concourir pour donner une grande probabilité à l'opinion des savants Génevois. Cependant, si l'on soumet à un examen réfléchi les principes sur lesquels repose leur méthode expérimentale, on ne tarde point à s'apercevoir que le phénomène auquel ils ont eu recours, est trop complexe pour qu'il soit possible d'en tirer une mesure de la chaleur spécifique des gaz.

C'est en observant le refroidissement ou le réchauffement d'un même volume de tous les gaz contenus dans le même vase, et placé sous les mêmes influences, qu'ils ont cru pouvoir déterminer les rapports de leur chaleur spécifique. En thèse générale, il existe, en effet, une relation nécessaire entre la chaleur spécifique d'un corps et le temps qui s'écoule pendant qu'il subit une certaine variation thermométrique, sous l'influence d'une cause extérieure.

Nous avons fait connaître, Petit et moi (1), les précautions qu'il convient de prendre à l'égard des corps solides, pour que la relation dont il s'agit se présente de la manière la plus simple, et que l'observation du temps de refroidissement ou de réchauffement donne immédiatement le rapport des cha-

---

(1) Annal. de Chim. et de Phys., t. x, p. 400.

leurs spécifiques. La première condition à remplir, c'est que la quantité de chaleur absorbée ou perdue par l'enveloppe destinée à contenir les corps soumis à l'observation ne soit pas une fraction trop grande de la totalité de la chaleur perdue ou gaguée dans l'expérience; voilà ce qu'il est presque impossible de réaliser avec les fluides élastiques.

Les premières expériences de MM. de La Rive et Marcet ont été faites dans un ballon de verre de 4 cent. de diamètre et de $\frac{1}{2}$ millim., environ, d'épaisseur. Avec ces dimensions, le poids du verre devait être de $7^{gr},017$, et celui de l'air à $0^{m},65$, et à 20° de $0^{g},036$; la quantité de chaleur nécessaire pour faire varier la température de l'enveloppe, dans le rapport de 126 : 1 avec celle qu'aurait exigée, pour s'élever d'un même nombre de degrés, l'air qu'elle contenait. Pour un autre gaz possédant une capacité de 0,25 plus grande que celle de l'air, la chaleur correspondante à cette différence de capacité ne ferait que la $\frac{1}{500}$ partie de la quantité totale. Comment serait-il possible d'apprécier d'aussi petites fractions. Le refroidissement ou le réchauffement du même nombre de degrés, dans ces deux cas, correspondrait à des temps qui ne différeraient que de 36 tierces sur 5'.

Dans les premiers essais, on plongeait subitement, dans nn bain d'eau à 30°, le ballon successivement rempli de divers gaz sous une même pression et à la température initiale de 20°. Le réchauffement produit en 4'', et mesuré par l'augmentation même d'élasticité de chaque fluide, s'est trouvé différent pour chacun d'eux; résultat que les auteurs ont, avec raison, attribué à une différence de conductibilité pour la chaleur.

Déja, plusieurs fois, les physiciens ont cru reconnaître une grande inégalité de la part des divers fluides élastiques, dans la propriété de conduire ou de transporter la chaleur; mais cette propriété n'a pas toujours été bien nettement définie. Ce que nous avons nommé *pouvoir refroidissant* des fluides élastiques (1) est un effet composé qui dépend tout à la fois et de leur capacité pour la chaleur, et de l'inégalité de masse de leurs dernières particules, d'où résulte l'inégalité des vitesses qui leur sont communiquées par une même impulsion. Nous avons fait connaître les moyens de mesurer exactement ce coefficient et les lois suivant lesquelles il varie avec la force élastique de chaque gaz et l'excès de température du corps chaud. Toutes les fois qu'il s'agira d'évaluer la perte de chaleur occasionnée, dans un corps, par le contact d'un gaz dont l'élasticité sera connue, ainsi que la différence de température, cet effet pourra se calculer d'après les principes établis dans le Mémoire cité. Mais souvent on a moins à s'occuper de la quantité de chaleur enlevée que de la promptitude plus ou moins grande avec laquelle une masse de gaz se met en équilibre de température avec les parois qui servent à la contenir. Dans ce cas, il faut avoir égard, seulement à l'inégale mobilité des particules fluides; mais ce genre de phénomènes subordonné aux dimensions et à la configuration du vase ne peut plus être soumis au calcul. Avant que cette propriété fût bien constatée et rapportée à sa véritable origine on attribuait à des différences de capacité pour la chaleur, des phénomènes tout-à-fait étrangers à cet élément, et qui ne dépendent que de la densité plus ou moins

(1) Annal. de Chim. et de Phys., t. VII. p. 350.

grande des divers fluides. Suivant la disposition des appareils, on était porté à tirer des conséquences contraires sur l'ordre de supériorité des gaz relativement à la chaleur spécifique. Ainsi, dans le cas où c'était un thermomètre plongé dans la masse fluide, le gaz le plus facile à mettre en mouvement produisait un effet plus marqué; ce qui devait le faire regarder comme possédant une capacité plus grande (1). Si l'on recherchait, au contraire, les temps que deux volumes égaux de gaz différents exigeaient pour se mettre en équilibre de température avec les parois, c'est le gaz le plus mobile qui demandait le moins de temps, et qui paraissait avoir la capacité la plus faible (2).

MM. de La Rive et Marcet ont pensé qu'ils pourraient se mettre à l'abri des effets de la conductibilité en employant quelques-unes des précautions que nous avons indiquées dans notre Mémoire sur la chaleur spécifique des corps solides (3). Au lieu d'échauffer brusquement l'enveloppe, ils l'ont placée dans une enceinte vide, dont les parois étaient maintenues à une température constante et peu supérieure à celle des gaz. Dès lors, ils n'ont plus aperçu de différence sensible entre les températures prises, pendant le même temps, par tous les gaz; d'où ils ont conclu que tous possèdent, à volume égal, la même capacité pour la chaleur.

Quoique l'on désigne par le même nom, dans les solides et les gaz, la propriété de transmettre la chaleur, il ne faut pas oublier que la conductibilité des solides, qui n'est sans

---

(1) Mémoires d'Arcueil, t. I, p. 201.

(2) Journal de Physique, novembre 1819, t. LXXXIX, p. 337.

(3) Annal. de Chim. et de Phys., t. X, p. 400.

doute qu'un rayonnement à petites distances, est d'une nature très-différente du transport des parties du fluide inégalement chaudes, lequel constitue, à proprement parler, la conductibilité des gaz. Pour se rendre raison du résultat observé par MM. de La Rive et Marcet, et qui me paraît se rattacher encore à cette dernière propriété et non à la capacité, il faut se rappeler 1° que les quantités absolues de chaleur prises par les gaz, dans ces expériences, formaient une si petite fraction de la chaleur totale du système, qu'on peut ne pas y avoir égard. 2° Que les temps employés par les divers gaz pour s'échauffer d'un même nombre de degrés, dépendent exclusivement, dans les conditions de l'expérience dont il s'agit, de la rapidité plus ou moins grande du mélange des parties intérieures du fluide avec les parties extérieures, qui reçoivent seules la chaleur, par communication immédiate des parois de l'enveloppe. 3° Que, à force élastique égale pour tous les fluides ayant la même force élastique, ces temps différeraient d'autant plus entre eux que l'excès de température du même vaseserait plus considérable; de sorte que si ses parois s'échauffaient très-lentement, la différence pourrait devenir insensible. 4° Que dans le mouvement progressif de la température, le gaz doit toujours indiquer une moyenne inférieure à la température réelle des parois au même instant; mais que le mélange des parties inégalement chaudes d'un même gaz se faisant d'autant plus rapidement que ses molécules sont plus distantes ou que sa force élastique est plus petite, la quantité dont la température du fluide est en retard sur celle du vase, doit diminuer avec l'élasticité de ce fluide, et l'égalité du réchauffement des gaz de nature diverse, paraître d'autant plus exacte, que les fluides que l'on compare ont une élasticité moindre.

C'est surtout ce dernier résultat, c'est-à-dire la diminution du temps nécessaire pour produire le même effet thermométrique, dans le même volume d'un gaz de plus en plus raréfié, qui a paru à MM. de La Rive et Marcet un argument sans réplique en faveur de leur procédé; et, dans un nouveau travail, dont un extrait nous a été communiqué dans la dernière séance de l'Académie; ils reproduisent la même idée qu'ils avaient déja énoncée dans le premier Mémoire. savoir : que, puisque leur appareil est assez sensible pour montrer la diminution de capacité qui tient au changement de densité, il doit encore l'être suffisamment pour accuser la différence de capacité qui tiendrait à la diversité de nature; mais il me semble que, pour rendre ce raisonnement péremptoire, il faudrait commencer par prouver que l'inégalité des temps de réchauffement de volumes égaux du même gaz pris avec des densités différentes, dépend exclusivement de l'altération survenue dans la chaleur spécifique. Essayons de vérifier si les résultats en question peuvent se concilier avec cette supposition.

On trouve, dans le Mémoire de MM. de La Rive et Marcet (1), une série d'observations relatives à l'air atmosphérique, d'une force élastique comprise entre 65 et 26 centimètres. Au lieu des temps employés pour un réchauffement égal, dans les divers cas, c'est le nombre des degrés de température gagnés pendant le même temps qui est indiqué; ce qui rend la com-

(1) Annal. de Chim. et de Phys., t. xxxv, p. 28.

paraison un peu plus pénible. Toutefois si, en partant des autres données de l'expérience rapportées plus haut, on calcule la température qu'aurait dû manifester le gaz, après l'intervalle constant de 5′, en supposant que sa chaleur spécifique fût réduite à zéro, par l'effet de la raréfaction, on trouve, au lieu de 6°,3, qui correspond au gaz de 65 centim. de pression, 6°,329; or, dans le tableau des observations que nous venons de citer, une diminution de 6 centimètres seulement dans l'élasticité de l'air, entraîne une différence déja huit fois plus grande; en sorte que toutes les observavations conduiraient à une valeur *négative* (1) pour la capa-

---

(1) Appelons T l'excès variable de la température de l'enceinte sur celle du matras; S la surface extérieure de ce vase, e son pouvoir émissif ou absorbant, V son volume, D la densité et C la chaleur spécifique moyennes; enfin t le temps. Comme il ne s'agit ici que de petites différences de température, on peut, sans erreur sensible, faire usage de la loi de Newton. La vitesse de réchauffement sera, d'après l'énoncé même de cette loi, proportionnelle à l'excès T de la température de l'enceinte. n exprimant la valeur de cette vitesse, pour 1° d'excès de température, on aura en général $\frac{d\mathrm{T}}{dt} = -n\mathrm{T}$. Or, il est facile de voir que la constante n est directement proportionnelle à la surface s et au pouvoir absorbant e (puisqu'il s'agit d'une enceinte vide), et qu'elle doit être en raison inverse du poids VD du corps (le gaz et son enveloppe), et de la capacité C du systeme. L'équation devient ainsi $\frac{d\mathrm{T}}{dt} = -\frac{\mathrm{S}e}{\mathrm{VDC}}\mathrm{T}$, ou $\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} = -\frac{\mathrm{S}e}{\mathrm{VDC}}dt$, et, en intégrant, $\log.\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{S}e}{\mathrm{VDC}}t$: en nommant A la valeur de T lorsque $t=0$.

Après un temps θ, l'enveloppe contenant un certain gaz, l'excès de température sera T′, et, après le même temps θ, l'enveloppe renfermant un cité de l'air dilaté. Ce calcul, contre lequel je ne vois pas qu'on puisse élever d'objection, suffirait pour montrer que ce n'est pas à une diminution de capacité qu'il faut attri-

---

autre gaz, l'excès sera T″. On aura donc $\log.\frac{A}{T'} : \log.\frac{A}{T''} : : \frac{1}{D'C'} : \frac{1}{D''C''}$. Séparant les éléments relatifs à l'enveloppe de ceux du gaz qu'elle renferme, on aura, en nommant p le poids du verre, et c sa chaleur spécifique : $\log.\frac{A}{T'} : \log.\frac{A}{T''} : : p''c''+pc, : p'c'+pc;$ dans la série d'expériences dont il s'agit, $\frac{p'c'}{pc}=\frac{1}{126}$, pour l'air à $0^m,65$ et à 20°. Il sera donc facile de tirer, de la proportion précédente, ou la capacité c'' du même gaz, dont le poids p'' sera donné, ainsi que les excès T′ et T″, correspondants au même temps écoulé; ou bien la valeur de T″, que l'on devrait observer si c'' prenait une valeur déterminée.

Le 2e Mémoire de MM. de La Rive et Marcet, dont j'ai plus haut annoncé l'extrait, vient de paraître pendant l'impression de celui-ci, dans le tome 41 des Annales de chim. et de phys., p. 78. Les objections précédentes conservent la même force relativement aux conséquences que les auteurs tirent de leurs nouvelles expériences. Avec le ballon pesant 22 grammes et renfermant 0,4 gram. d'air, qu'ils ont substitué au premier, le rapport des quantités de châleur nécessaires pour produire une même variation de température dans l'air et dans son enveloppe, serait à peu près $\frac{1}{55}$, au lieu de $\frac{1}{126}$, qui convenait au premier appareil; ce qui n'apporterait qu'un changement insignifiant dans le résultat du précédent calcul Il paraît que le réchauffement du système était encore trop rapide pour que l'hydrogène s'accordât avec les autres gaz. En recouvrant d'une feuille d'argent la surface extérieure du ballon, je suis persuadé qu'alors on ne trouverait plus de différence, même pour ce gaz, dont les molécules possèdent en effet une mobilité beaucoup plus grande que celle de tous les autres, ainsi qu'on peut le prévoir, en comparant les pesanteurs spécifiques de tous ces fluides.

buer l'échauffement plus rapide du même volume de gaz, quand sa densité s'affaiblit. Je crois avoir assigné précédemment la vraie cause du phénomène.

En définitive, il ne me paraît pas possible d'imaginer une disposition d'appareil, ou une manière d'opérer, qui permette de conclure les chaleurs spécifiques des gaz, de l'observation des temps de leur réchauffement ou de leur refroidissement.

Les résultats de Laroche et Bérard sont donc jusqu'ici ceux qui doivent inspirer le plus de confiance; et, s'ils laissent encore désirer une plus grande précision, ils suffisent bien pour mettre hors de doute que tous les gaz simples ou composés n'ont pas, sous le même volume, une égale capacité pour la chaleur.

Toutefois, ces déterminations se rapportent seulement aux gaz soumis à une pression constante; la question relative à la supposition d'un volume constant reste tout entière. Envisagée sous le point de vue expérimental, celle-ci présente de beaucoup plus grandes difficultés que la première; jusqu'à présent, même, aucune méthode directe n'a été indiquée pour la résoudre.

Mais une des inspirations les plus heureuses de M de Laplace a fait découvrir, dans la théorie mathématique de la propagation du son, certaines relations entre les chaleurs spécifiques d'un même gaz considérées sous ces deux aspects différents.

On sait que c'est ce grand géomètre, dont nous ressentons encore si vivement la perte, qui imagina, le premier, que la différence entre l'évaluation de la vitesse du son dans l'air, par le calcul et par l'observation, pourrait bien provenir de ce que Newton et les géomètres qui depuis étaient parvenus au même résultat que lui, n'avaient point eu égard, dans le calcul, aux variations de température qui accompagnent les changements subits de densité dans les fluides élastiques. MM. Biot (1) et Poisson (2) firent voir, en effet, que, en tenant compte de cette cause, la vitesse calculée devait se rapprocher davantage de la vitesse réelle. Toutefois, on ne possédait point alors les données physiques indispensables pour vérifier complètement l'exactitude de cette conjecture (3).

Plus tard, M. de Laplace soumit cette idée à un nouvel examen, et prouva que la vitesse réelle du son devait s'obtenir en multipliant la vitesse calculée d'après la formule de Newton, par la racine carrée du rapport de la chaleur spécifique de l'air, sous une pression constante, à la chaleur spécifique du même fluide, sous un volume constant (4).

M. Poisson (5) parvint aussi au même théorème par un calcul plus direct et complètement débarrassé des hypothèses fort peu probables que l'auteur de la mécanique cé-

---

(1) Journal de Physique, t. LV, p. 173.

(2) Journal de l'École polytechnique, 14e Cahier, p. 362.

(3) C'est, sans doute, par inadvertance que le savant auteur du premier des deux Mémoires que nous venons de citer, cherche à déduire, de la seule connaissance du coëfficient de la dilatation des gaz, l'élévation de température qui résulterait, dans l'air, d'une compression déterminée. (Mémoire cité, p. 181).

(4) Annal. de Chim. et de Phys., t. III, p. 238; et Mécanique céleste, t. V, p. 123.

(5) Annal. de Chim. et de Phys., t. XXIII, p. 337; et Connaissance des Temps, 1826, p. 257.

leste avait adoptées touchant la manière d'être de la chaleur dans les fluides élastiques.

Une expérience de MM. Clément et Désormes (1), répétée avec des appareils plus parfaits et dans des circonstances plus variées par MM. Gay-Lussac et Welter (2), permit de calculer, pour l'air atmosphérique, la valeur de ce rapport des deux chaleurs spécifiques dont il vient d'être fait mention ; et, en la substituant dans la formule générale, la vitesse du son ainsi obtenue ne différa plus, que de quelques mètres, de la vitesse observée.

D'après les expériences de MM. Gay-Lussac et Welter, citées dans la Mécanique céleste, il paraîtrait que ce rapport des deux chaleurs spécifiques serait sensiblement constant pour l'air atmosphérique à toutes les températures et à toutes pressions. Cette condition introduite dans le calcul, permettrait d'assigner les variations de température qui correspondent aux changements brusques de densité d'une masse quelconque d'air; et, si l'on y joignait l'hypothèse, à la vérité fort invraisemblable, d'une capacité constante à toute température sous la même pression, on pourrait arriver à l'expression générale de la chaleur spécifique de l'air atmosphérique à force élastique constante, ou à volume invariable (3).

(1) Journal de Physique, t. LXXXIX, p. 333.

(2) Mécanique céleste, t. V, p. 125.

(3) Poisson, Ann. de Chim. et de Phys., t. XXIII, p. 341. M. Ivory, *Philos. Magazine new series*, vol. 1, p. 249, donne une autre expression du même élément; mais M. Avogadro (*Memorie della reale academia delle scienze di Torino*, t. XXXIII, p. 237) a fait voir comment M. Ivory avait été induit en erreur. On verra plus loin que mes observations m'ont con-

Enfin, en étendant la même supposition à tous les autres gaz, on pourrait résoudre toutes les questions relatives aux chaleurs spécifiques des divers fluides élastiques, par la seule connaissance du rapport des deux chaleurs spécifiques déterminé pour chacun d'eux, et au moyen d'une seule observation faite sous une pression quelconque. Ces lois sont trop importantes pour que l'on ne cherche pas à les vérifier dans leurs principales conséquences. Lors même que les hypothèses sur lesquelles elles sont fondées ne seraient pas conformes à ce qui existe, la détermination exacte du rapport des deux chaleurs spécifiques, pour chacun des gaz en particulier, n'en demeurerait pas moins une acquisition très-utile pour la science, puisque l'on pourrait alors conclure de la chaleur spécifique à pression constante, la seule que l'on sache mesurer directement, la chaleur spécifique à volume constant, qui intéresse le plus la théorie générale de la chaleur, et, enfin, la quantité de chaleur correspondant pour chaque gaz à une dilatation ou une condensation déterminée (1).

---

duit à une conséquence opposée à celle que le même géomètre avait tirée de sa théorie générale (*Phil. Magazine*, t. I, p. 253.

(1) Les essais ingénieux de M. Dalton (*Mém. de Manch.*, vol. V, p. 525, et *New System. of Chem. philos.*, t. I, p. 127) pouvaient bien prouver que les variations thermométriques observées dans un gaz, dont on change brusquement la densité, étaient loin de représenter le changement de température réellement produit dans le fluide élastique; mais ils n'auraient pu servir à une évaluation suffisamment approchée de la quantité de chaleur correspondant à une condensation déterminée.

Quant au moyen indiqué par M. Despretz (Ann. de Chim. et de Phys., t. XXXVII, p. 182) comme propre à déterminer la chaleur dégagée par la

Malgré toute l'habileté des observateurs et la perfection des appareils, je ne crois pas que l'on puisse arriver à une approximation suffisante, par un moyen analogue à celui qu'ont employé les physiciens que je viens de citer.

J'ai pensé qu'on y parviendrait plus sûrement en recherchant la vitesse réelle du son dans chaque fluide élastique et en la comparant, conformément à la théorie de M. Laplace, avec celle qu'indiquerait la formule de Newton.

Nous admettrons donc, comme un principe démontré, que le carré du quotient de la vitesse réelle du son dans un fluide élastique quelconque, divisée par la vitesse calculée d'après la formule de Newton, est égal au rapport de la cha-

---

condensation de l'oxigène et de quelques gaz brûlés, il ne pourrait conduire même à une approximation grossière des quantités qu'il s'agit de mesurer. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la chaleur dégagée par une compression du gaz oxigène qui en doublerait la densité (supposition conforme à l'expérience de M. Despretz) ne ferait pas $\frac{1}{2}$ centième de la chaleur produite par la combinaison de ce gaz avec le charbon, c'est-à-dire de la quantité que l'on mesure immédiatement par le mode d'expérimentation qu'il propose; et si les autres gaz abandonnaient, pour une même réduction de volume, des quantités de chaleur plus petites ou plus grandes d'$\frac{1}{3}$ ou d'$\frac{1}{4}$, ces différences ne correspondraient qu'à 1 ou 2 millièmes des nombres donnés par l'observation; de sorte que la quantité que l'on chercherait à déterminer serait *au moins quinze ou vingt fois plus petite que les erreurs inévitables dans ce genre d'expériences.* Si M. Despretz a exécuté le projet de recherches qu'il annonce dans le Mémoire cité, je suis persuadé qu'il n'a trouvé aucune différence entre les quantités de chaleur développées par la combinaison de l'oxigène d'une densité simple, puis double, avec le même corps, quel que soit l'état solide ou gazeux du produit de la combustion.

leur spécifique sous une pression constante à la chaleur spécifique sous un volume constant (1). Ainsi la recherche de ce rapport se réduit à celle des vitesses réelles du son dans les divers fluides élastiques.

Pour tout autre gaz que l'air atmosphérique, on ne peut songer à mesurer directement la vitesse de propagation d'une onde sonore; il faut évidemment recourir à un moyen indirect. La théorie des instruments à vent en a suggéré un qui a été indiqué et mis, pour la première fois, en pratique par Chladni et Jacquin (2). Ce moyen consiste à faire parler un même tuyau, à embouchure de flûte, successivement avec tous les fluides élastiques, supposés à la même température, et à déterminer la hauteur du ton donné par chacun d'eux. En admettant que la colonne fluide contenue dans l'instrument éprouve le même mode de subdivision dans tous les cas; qu'il corresponde, par exemple, à ce que l'on nomme le son fondamental, où le plus grave de tous ceux que la théorie de Bernoulli indique pour le même tuyau, on arrive facilement à connaître la longueur d'une onde et sa durée dans chaque fluide élastique et, par conséquent, la vitesse

---

(1) Soient h la hauteur du baromètre, g l'intensité de la pesanteur, D la densité du gaz, celle du mercure étant prise pour unité; t la température au-dessus de zéro, v la vitesse du son d'après l'observation; et k le rapport des deux chaleurs spécifiques sous une pression constante et sous un volume constant, on a :

$$k=\frac{v^2}{\frac{gh}{D}.(1+t.0{,}00375)}.$$

(2) Chladni, Traité d'Accoustique, p. 87 et 274. Paris, 1809.

avec laquelle un ébranlement se propagerait dans chacun d'eux (1).

Les expériences de Chladni ne peuvent être considérées que comme une ébauche très-imparfaite; il serait impossible d'en rien tirer pour la solution du problème qui nous occupe.

Kerby et Merrick (2) en Angleterre, perfectionnèrent l'appareil de Chladni; ils étendirent leurs observations à un plus grand nombre de corps, et, surtout, mirent plus de précision dans la détermination du nombre de vibrations propre à chaque ton. Peu de temps après, le professeur Benzenberg de Dusseldorf (3) fit de nouvelles observations, au moyen d'un appareil tout-à-fait identique avec celui de Chladni, mais en mesurant, à l'aide d'un monocorde, les nombres de vibrations de chaque son. Enfin M. Richard Van Rees prit pour sujet d'une thèse inaugurale soutenue à Utrecht, en 1819, la détermination de la vitesse du son dans les fluides élastiques (4) et exécuta, à cette occasion, dans le laboratoire de

---

(1) En nommant λ la longueur d'une onde condensante ou dilatante, v sa vitesse de propagation dans un fluide élastique, t la durée de chaque demi-oscillation positive ou négative d'une tranche de fluide, on a, comme on le sait, $\lambda = vt$; ou, en prenant le nombre n de vibrations dans une seconde, $v = \lambda n$. Dans la théorie de Bernoulli, le nombre des concamérations entières étant p, il existe la relation générale $(p+1)\lambda = l$: en appelant l la longueur d'un tuyau ouvert par les deux bouts; pour le ton fondamental $p=o$. $\lambda = l$; et, partant, $v = ln$. Si l'on se sert du même tuyau pour tous les gaz, on voit que les vitesses de propagation d'une onde, dans tous ces fluides, sont directement proportionnelles aux nombres de vibrations des tons qu'ils produisent.

(2) *Nicholson's journal*, t. XXVII, p. 269, et t. XXXIII, p. 161.

(3) *Annalen der Physik von Gilbert; neue Folge*, t. XII, p. 12.

(4) *Dissertatio physico-mathematica inauguralis de celeritate soni per*

M. Moll, une longue suite d'expériences, qui paraissent avoir été conduites avec beaucoup de soin. On verra, cependant, que par les erreurs dont elles sont affectées, elles ne permettraient, pas plus que les précédentes, de découvrir la loi du phénomène.

La discordance des résultats obtenus par les habiles expérimentateurs que je viens de citer, ne laissait guère d'espoir d'arriver à une solution satisfaisante de la question par l'emploi des mêmes procédés.

On devait soupçonner que ces observations n'étaient pas exactement comparables, soit parce que les gaz n'avaient pas toujours été exempts d'impuretés, soit parce que le mode d'insufflation pouvait, indépendamment de toute autre cause, faire varier la hauteur du ton. Je résolus donc de reconnaître et de vaincre, s'il était possible, les difficultés inhérentes à ce sujet.

D'abord, je voulus savoir quel degré de précision on pouvait attendre de ce genre d'expériences; pour cela, je fis parler des tuyaux de divers calibres avec de l'air atmosphérique. Ces tuyaux, à embouchure de flûte, réunissant les proportions que l'expérience a fait découvrir comme les meilleures pour obtenir un son plein et difficilement variable, étaient placés horizontalement dans l'air libre, et l'on y faisait passer un courant d'une vitesse constante, à l'aide d'un

---

fluida elastica propagati. Trajecti ad Rhenum. John Altheer, in-4° 1819. On trouve un extrait de cet ouvrage dans le tome XV, page 102 de la Bibliothèque universelle. Il n'existe pas dans le commerce, et je n'ai pu me le procurer que par l'obligeance de M. Hachette, et de M. Quetelet, de Bruxelles.

gazomètre muni d'une éprouvette qui laissait juger le degré de pression initiale. Cette pression était ordinairement de 3 centimètres d'eau.

Pour mettre sa théorie à l'épreuve, Daniel Bernoulli avait déja comparé les tons rendus par deux tuyaux de longueurs différentes, fermés par une de leurs extrémités (1), mais l'un des deux tons était obtenu en soufflant avec la bouche, à quelque distance, dans un tuyau fermé par un bout : tous ceux qui ont fait cette expérience savent que le son produit ainsi n'est, ni assez distinct, ni assez soutenu pour que l'on puisse garantir une grande précision dans les accords. D'ailleurs, de cette manière, on ne pourrait vérifier que la relation qui existe entre la longueur des colonnes vibrantes et les intervalles musicaux qui leur correspondent; mais il a aussi cherché à déterminer, par expérience, le nombre absolu de vibrations d'un son rendu par un tuyau d'une longueur donnée.

Sa formule indiquait 115 vibrations par seconde pour le ton d'un bourdon de 4 pieds, et le nombre de vibrations déterminé par une corde à l'unisson était de 116. La coïncidence semblait parfaite; cependant, si l'on examine les données du calcul, on voit qu'il prend 12000 pour le rapport de la densité du mercure à celle de l'air d'une force élastique de 28 p.; ce qui supposerait une température de 39° centigrades, supérieure de beaucoup, sans doute, à celle que possédait l'air au moment de l'expérience, et qui n'est point indiquée; enfin, si l'on fait entrer dans la formule, non plus la vitesse déduite

(1) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris; 1762, p. 467.

de l'ancienne théorie, mais la vitesse observée dans l'atmosphère, la coïncidence, que Bernoulli avait cru remarquer, n'existe plus : car on trouve que, dans son expérience, le ton rendu par le tuyau de 4 pieds fermé par un bout, devrait être, à la température ordinaire de 20°, de 132,7 vibr. par seconde, au lieu de 116 donné par la corde vibrante. L'expérience de Bernoulli était donc insuffisante pour la vérification dont il s'agit. Le même géomètre avait indiqué un procédé fort ingénieux, et qui paraît susceptible d'une grande exactitude, pour mesurer la longueur des colonnes d'air qui vibrent à plein orifice. Ce procédé consiste, comme l'on sait, à enfoncer un piston gradué dans le tube sonore, jusqu'à ce que celui-ci rende le même ton que lorsqu'il était ouvert. La distance de la surface antérieure du piston à l'orifice du tube est prise pour la longueur de la colonne d'air vibrant à plein orifice dans le tuyau, bouché par un bout, qui serait à l'unisson du premier. C'est ce moyen que j'ai d'abord employé sur des instruments de longueurs très-différentes, en y joignant la détermination du nombre exact de vibrations correspondant à chaque son. Pour ce dernier élément, la sirène de M. Cagniard de Latour (1) m'a paru ne rien laisser à désirer. Quand on s'est familiarisé avec cet instrument, la précision de ses indications est presque illimitée. La sirène dont je me sers habituellement porte un disque mobile assez épais pour conserver une vitesse invariable pendant les intermittences très-courtes du courant qui la fait parler. Une soufflerie d'un orgue de Grenié, qui permet d'augmenter à vo-

(1) Annales de Chimie et de Physique, t. XII, p. 167, et t. XVIII, p. 438.

lonté la vitesse du vent, en appuyant plus ou moins sur une pédale, sert à entretenir le mouvement du plateau à un degré tel, que le ton de la sirène se maintienne à l'unisson de celui que l'on veut évaluer : pour des sons purs et forts, l'oreille est sensible à de très-petites différences, et en soutenant pendant 4' au moins, comme je l'ai toujours fait, le mouvement du plateau, si l'unisson est d'ailleurs bien observé, on voit que les seules erreurs que l'on puisse commettre en engrenant la roue du compteur, ou en l'arrêtant, se trouvent réparties sur un intervalle aussi grand qu'on le veut, de manière à s'affaiblir de plus en plus, d'après un principe analogue à celui de la répétition des angles.

Il serait inutile de décrire en détail des expériences qui ont toutes été faites de la même manière : je me contenterai d'en rapporter les résultats dans le tableau ci-joint :

État de l'embouchure.	Nos des expériences.	Longueur du tuyau.	Largeur du tuyau.	Profondeur du tuyau.	Largeur de la bouche.	Pression dans le gazomètre, en eau.	Nombre de vibrations par seconde sexag.	Distance de la surface antérieure du piston à l'orifice.	Température de l'air pendant l'expérience.	Vitesse du son d'après la formule $333^m\sqrt{1+0{,}00375\,t}$.	Vitesse du son, déduite de la demi-concamération finale.
Bouche libre.	n° 4	$60^c,2$	$25^m,5$	32^m	5^m	3^c	491,4	$33^c,1$	20°	$345^m,2$	325,3
	5	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	490,6	33, 1	*id.*	*id.*	324,7
	6	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	5	504,6	32, 45	20, 5	....	327,5
	32	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	3	495,6	33, 16	*id.*	....	328,6
	33	29, 1	18	23	4	3	973,2	16, 77	20, 3	....	326,4
	34	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	973,6	16, 78	*id.*	....	326,6
	38	127, 15	62	74	8	*id.*	239,3	67, 6	20	345, 2	323,7
	63	62, 2	14	15	5	3	487,4	32, 9	9	338, 5	320,7
	63*bis*.	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	494	32, 4	*id.*	*id.*	320,1
Bouche couverte d'un entonnoir de fer-blanc.	8	60, 2	25, 5	32	5	3	466,6	35, 5	20	345, 2	331,28
	9	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	463,4	36, 3	*id.*	*id.*	336,4
	10	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	467	35, 95	*id.*	*id.*	335,77
Embouchure de flûte traversière.	13	61	26, 5	30	15	3	474,4	33, 15	*id.*	*id.*	314,15
	14	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	5	476,6	33	*id.*	*id.*	314,5
Bouche rétrécie par une lame de plomb.	18	60, 2	25, 5	32	5	3	948	17, 2	*id.*	*id.*	326
	19	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	954	17, 35	*id.*	*id.*	331,4
	20	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	*id.*	953,2	17, 35	*id.*	*id.*	330,7

Toutes ces observations s'accordent à donner une vitesse de propagation trop petite; on voit d'ailleurs que l'erreur est à peu près la même en considérant des tons graves ou des tons aigus. Cette remarque suffit pour écarter l'idée qu'elle pourrait provenir de la chaleur enlevée ou cédée à la colonne fluide par les parois du tuyau; car, si cet effet était sensible, il le serait davantage sur les tons les plus graves, produits par des vibrations plus lentes, et, partant, exposées plus long-temps à l'influence de la cause rétardatrice.

Mais la théorie plus générale et plus conforme aux effets naturels, que M. Poisson a donnée du mouvement de l'air dans les tuyaux de flûte (1), suggérant quelques doutes sur la vraie longueur de la demi-concamération finale, j'ai voulu essayer si, comme cette théorie l'indique, la mesure de l'intervalle entre deux nœuds consécutifs ne conduirait pas à des valeurs plus approchées de la vitesse du son. Le tableau suivant offre les résultats d'une série d'expériences dirigées vers ce but.

---

(1) Mémoires de l'Académie des sciences; 1817, p. 303.

Modification de l'embouchure.	Nos des expériences.	Longueur du tuyau.	Largeur du tuyau.	Profondeur du tuyau.	Largeur de la bouche.	Pression dans le gazomètre, col. d'eau.	Longueur de la demi-concamération finale.	Distance des deux surfaces nodales.	Température de l'air.	Nombre de vibrations par seconde sexagés.	Vitesse du son d'après la formule $333\sqrt{1+0,00375\,t}$.	Vitesse du son conclue de la demi-concamération finale.	Vitesse du son conclue de l'intervalle des 2 surfaces nodales.
Bouche rétrécie par une lame de plomb. Le tuyau octavie (1).	30	60c,2	25m,5	32m	2m,25	3c	16c,2	33,95	20°	990,4	345m,2	321	336,2
	31	id.	id.	id.	id.	id.	16, 1	34,18	id.	986	id.	317,1	336,6
	35	29, 1	18	23	2	id.	8, 1	17,6	20,3	1935,2	......	321,6	340,6
	36	id.	id.	id.	id.	id.	8, 08	17,52	20	1927,2	id.	311,4	337,6
	39	127, 15	62	..	4	..	33, 85	71,6	id.	464,6	id.	314,5	332,6
Le tuyau octavie par un plus grand volume d'air.	63	62, 2	14	15	5	3	17, 08	31,9	9	984,7	338, 5	336,4	314,8

Tuyau bouché par une extrémité. Son 3.

Modification de l'embouchure.	Nos des expériences.	Longueur du tuyau.	Largeur du tuyau.	Profondeur du tuyau.	Largeur de la bouche.	Pression dans le gazomètre, col. d'eau.	Longueur de la demi-concamération finale.	Distance des deux surfaces nodales.	Température de l'air.	Nombre de vibrations par seconde sexagés.	Vitesse du son d'après la formule $333\sqrt{1+0,00375\,t}$.	Vitesse du son conclue de la demi-concamération finale.	Vitesse du son conclue de l'intervalle des 2 surfaces nodales.
Bouche rétrécie par une lame de plomb, de manière à faire sortir le 2e son.	40	60,2	25, 5	32	5	3	......	43,6	20	757,2	345, 2	......	330,1
	41	id.	id.	id.	id.	id.	......	43,6	id.	762,6	id.	......	332,4
	41 bis.	id.	id.	id.	id.	id.	......	43,47	id.	761,3	......	......	331

La vitesse du son calculée en partant de l'intervalle des surfaces nodales approcherait donc davantage, d'après ces observations, de la vitesse réelle dans l'air libre. Il est très-

---

(1) En faisant ces expériences, j'ai eu occasion de remarquer un fait assez curieux qui mérite d'être rapporté. Lorsque l'on modifie, par degrés insensibles, l'ouverture de la bouche d'un tuyau de flûte ordinaire, ouvert par les deux bouts, on finit par lui donner une grandeur telle, que le son fondamental et son octave en sortent avec la même facilité. Dans ce cas, le tuyau rendant actuellement le ton le plus grave, si l'on agite l'air avec la bouche près de l'orifice du tube, perpendiculairement à sa direction, comme pour éteindre une bougie, le courant d'air générateur du son continuant d'ailleurs avec une vitesse constante, le ton passe à l'octave aiguë et y persiste. Alors, si on fait sonner, par un autre tuyau, l'octave grave (je me servais d'une anche libre) un peu fortement, le tuyau de flûte repasse à l'octave grave; et cette alternative est reproduite par les mêmes moyens autant de fois qu'on le désire. On peut, par cet artifice, comparer très-exactement les deux premiers tons donnés par le tuyau ouvert par les deux bouts; il n'y a ici aucune altération dans la vitesse du courant, ni dans la grandeur de la bouche, qui puisse troubler le rapport des deux tons. On voit ainsi qu'ils sont presque rigoureusement à l'octave l'un de l'autre (*). Je ne me suis même aperçu d'une légère altération que par les battements, qui devenaient plus sensibles, pour l'un des sons, quand je l'associais à un ton faible d'une anche expressive, et plus marqués pour l'autre quand la même anche parlait plus fortement.

Il n'en est pas de même des deux tons que rend le même tuyau successivement ouvert ou fermé par son extrémité opposée à l'embouchure : ils ne sont point exactement à l'octave l'un de l'autre. Le tuyau fermé donne un son qui est à peu près d'un demi-ton au-dessus de l'octave grave du son rendu par le tuyau entièrement ouvert. Voilà, du moins, le rapport que l'on observe pour un tuyau de la dimension que je viens d'indiquer.

(*) Le tuyau avait 60 cent. de longueur; il donnait à peu près l'*ut* du milieu du clavier.

remarquable que, dans la même expérience qui donne un résultat moins erronné par l'intervalle de deux nœuds consécutifs, la demi-concamération finale donne toujours, au contraire, un écart plus grand. Tel est le résultat obtenu avec des tuyaux bien proportionnés, c'est-à-dire construits d'après les règles des facteurs d'orgues; mais c'est le contraire sur le tuyau de la 63ᵉ expérience, beaucoup plus allongé, et dont il était difficile d'obtenir le son fondamental; la plus légère augmentation dans la vitesse du courant le faisant octavier.

On peut conclure de tout ce qui précède, que la valeur absolue de la vitesse du son dans l'air libre ne peut être exactement déduite de la position des surfaces nodales déterminée par le procédé de Daniel Bernoulli, lorsque d'ailleurs la durée des vibrations de la colonne d'air ne laisse aucune incertitude dans sa mesure.

Le nombre 333^m que j'ai adopté pour la vitesse à 0^o est la moyenne d'un très-grand nombre d'observations directes faites dans l'air libre par divers physiciens. J'ai vérifié, par l'expérience, que le coëfficient $\sqrt{1+0,00375\,t}$ représente fidèlement les variations qui dépendent de l'inégalité des températures, du moins entre 4^o et 22^o centigr. J'ai trouvé, par exemple, que le même tuyau, pour le même mode de division de la colonne d'air, rendait à 22^o un son de 500 vibrations par seconde, tandis qu'à 4^o le son correspondait seulement à 484,8. La formule, en partant du premier nombre, indiquait 484,2, qui ne diffère que d'un millième environ du nombre obtenu par l'observation.

Nous avons déja rejeté, comme contraire à l'expérience, la supposition que les parois du tuyau influent sur la température de la colonne d'air pendant les diverses périodes de ses oscillations. La vitesse de propagation du son serait-elle donc moindre dans une colonne cylindrique isolée de fluide élastique que dans le même milieu indéfiniment étendu dans tous les sens, comme M. Poisson a reconnu que cela devait être pour un milieu à l'état solide? La différence de constitution des solides et des fluides élastiques rend cette conjecture peu probable. La discordance que nous observons entre les résultats de la théorie et ceux du calcul, me paraît tenir beaucoup plus vraisemblablement à ce que l'on suppose, dans la théorie mathématique des tuyaux de flûte, que les vibrations s'exécutent parallèlement à l'axe du tuyau, et qu'il n'y a aucun mouvement dans le plan perpendiculaire à cette ligne; ce qui n'a pas lieu avec le mode d'embouchure généralement employé, ainsi que M. Savart s'en est assuré par des expériences très-concluantes (1). Je suis très-porté à croire aussi, d'après l'ensemble de mes observations, que les surfaces nodales qui s'établissent quand le tuyau est ouvert, ne sont pas de la même forme et n'occupent pas le même lieu lorsqu'on obtient le même ton du tuyau après l'introduction du piston.

J'ai voulu savoir si, avec un mode d'ébranlement plus conforme aux suppositions de la théorie, on arriverait à une solution plus exacte. J'ai donc cherché à ébranler la colonne d'air renfermée dans un tuyau bouché par un bout, en faisant vibrer, à l'extrémité ouverte, une lame élastique dont le ton pouvait être déterminé fort exactement: c'était d'abord un simple diapason, dont je plaçais une des branches

(1) Annales de Chimie et de Physique, t. XXIX, p. 406.

dans le plan de l'orifice d'un tube que je raccourcissais, à volonté, en y versant du mercure, jusqu'à ce que le ton rendu par le tuyau, et qui était toujours le même que celui de la tige élastique, fût le plus fort possible. Alors, en mesurant la longueur du tube, on pouvait, comme précédemment, en conclure une valeur de la vitesse du son. En faisant ces expériences, on s'aperçoit bientôt de la réalité du résultat auquel M. Poisson a été conduit par sa théorie, savoir : que le même tuyau peut rendre une infinité de sons peu différents les uns des autres ; ou, ce qui est la même chose, que le même son peut être obtenu de tuyaux différents : mais j'ai toujours employé la profondeur correspondant au son le plus intense.

A la température de 20°, une verge élastique qui rendait un son de 504 vibrations par seconde, faisait résonner le plus fortement une colonne d'air de $33^{c}2$ de longueur et renfermée dans un tuyau bouché par un bout. En considérant la longueur de cette colonne comme une demi-concamération finale, elle correspondrait à une vitesse de 334^{m}, au lieu de $345^{m},2$. — J'ai fait souder un disque de cuivre de 2 centimètres de diamètre à chacune des branches d'un autre diapason ; ce qui a fait descendre le ton d'une tierce et $\frac{1}{4}$ de ton : j'ai déterminé le nombre des oscillations correspondant à cette modification de l'instrument, et, en le faisant vibrer à l'orifice d'un tube dont je variais à volonté la profondeur ; j'ai déterminé celle qui donnait le son le plus intense :

Nombre de vibrations.............. 664,4 ;
Profondeur du tube................. $22^{c},9$;
Profondeur d'après la théorie....... 25, 9 ;

Ainsi ce nouveau mode d'ébranlement, qui doit produire des mouvements parallèles à l'axe du tuyau, conduit encore à une vitesse trop faible; mais cela tient, sans doute, à ce que l'orifice se trouve plus ou moins obstrué par la présence de la lame solide vibrante. Dans la 2e expérience, où la lame élastique couvre une plus grande partie de l'orifice, on voit, en effet, que la différence est plus grande : au surplus, comme il s'agirait ici de comparer les intensités de plusieurs sons successifs, on ne pourrait pas espérer d'un procédé fondé sur ce principe, une précision suffisante pour l'objet qui nous occupe.

Il me paraît bien établi, par les expériences ci-dessus rapportées, que la relation indiquée par la théorie entre la vitesse du son dans l'air libre, et la longueur, telle qu'on sait l'observer, des concamérations qui se forment dans un tuyau de flûte, ne se vérifie pas exactement : j'avais en vue quelques autres expériences propres à manifester d'une manière plus évidente la cause de cette discordance; mais, afin de ne pas m'écarter du sujet principal de mes recherches, j'ai préféré, pour le moment, de m'assurer si l'erreur, quelle qu'en soit la cause, n'affecterait pas proportionnellement la mesure de la vitesse de propagation du son dans tous les fluides élastiques. J'avoue que, en lisant un Mémoire de M. Biot sur ce sujet (1), je me sentis presque découragé, en voyant que le même tuyau enflé successivement avec plusieurs fluides élastiques se trouvait partagé en colonnes vibrantes de longueurs fort inégales; cependant, comme la cause de cette inégalité ne me parut pas très-clairement expliquée, et que, d'ailleurs,

(1) Bulletin de la Société philomatique; 1816, p. 192.

j'attachais une grande importance à la détermination qui fait l'objet de ces recherches, je voulus reconnaître moi-même quel genre d'obstacles il fallait surmonter. Je construisis donc un appareil qui permit de comparer le plus nettement possible les sons donnés par le même tuyau, que l'on ferait parler successivement avec divers fluides élastiques, et de rechercher comment les surfaces nodales se déplaçaient en substituant un fluide à un autre; soupçonnant que l'impulsion variable pour les divers gaz pouvait influer sur le résultat, je me suis attaché à rendre les expériences plus exactement comparables.

Le tuyau de flûte, placé dans une grande caisse de bois doublée de plomb en dehors et en dedans, et convenablement étayée dans l'intérieur pour supporter extérieurement la pression de l'atmosphère, recevait d'un gazomètre, à pression constante, le fluide élastique préalablement desséché par un sel déliquescent ou par de la chaux caustique. Sur la face de la caisse opposée à celle qui était traversée par le porte-vent, on avait pratiqué trois ouvertures : l'une, bouchée par un disque de glace, derrière lequel était un thermomètre; l'ouverture du milieu communiquait avec un large tube de verre qui pouvait être fermé par un bouchon à vis; enfin, la troisième ouverture laissait passer, à travers une boîte à cuir, une longue tige rodée qui servait à introduire un piston dans le tuyau, afin de connaître la position de la surface nodale. Après avoir fait le vide dans la caisse à l'aide d'un tube de plomb que l'on vissait sur la machine pneumatique, on la remplissait avec un fluide élastique; puis, en ouvrant le bouchon à vis, l'écoulement du gaz qui faisait parler le tuyau continuait sous la pression constante de l'atmosphère, sans que l'air extérieur pût se mêler avec le gaz intérieur; après avoir pris l'unisson du ton fondamental donné par chaque fluide élastique, lorsque le tuyau était ouvert, on introduisait le piston, pendant que l'écoulement du gaz et le son se prolongeaient, jusqu'à ce que l'on eût obtenu le ton primitif; alors l'enfoncement de la tige permettait, dans chaque cas, de connaître la position de la surface nodale. Toutes les précautions que j'avais prises pour rendre les résultats comparables m'ont permis de reconnaître bientôt, contre l'assertion de notre savant confrère, que la nature du fluide élastique n'apporte aucun changement dans le mode de division d'une colonne de même longueur. Si l'on cherchait à déterminer la vitesse absolue de propagation du son dans les divers fluides, d'après la distance de la surface nodale à l'orifice du tuyau, on trouverait, dans cette circonstance, une erreur plus grande encore que dans les exemples précédemment cités; car, pour le même nombre de vibrations, la colonne est plus courte : ce serait à peu près la même chose que si, avec la disposition ordinaire, l'on prenait pour base la demi-concamération tournée du côté de l'embouchure. Il arrivait même, dans mon appareil, que, par les proportions accidentelles de longueur et de diamètre du tube d'écoulement, la surface nodale était sensiblement au milieu du tuyau, c'est-à-dire que l'influence de toutes les parties extérienres était précisément la même que celle de son embouchure. Je ne crois pas qu'il faille chercher ailleurs que dans la moindre ouverture de la bouche, comparée à l'orifice du tuyau, la cause de l'inégalité de longueur des deux concamérations situees de part et d'autre de la surface nodale, dans un tuyau ouvert, et qui rend le son fondamental.

On voit, en effet, dans l'expérience que je viens de décrire, qu'un obstacle quelconque, apporté au mouvement de l'air du côté de l'orifice, a pour résultat de faire avancer la surface nodale de ce côté, c'est-à-dire de raccourcir la colonne vibrante. Quoi qu'il en soit, il est certain que, avec les gaz les plus différents par leurs propriétés physiques, tels que le gaz hydrogène et le gaz acide carbonique, la surface nodale était exactement à la même place. Ce point était trop capital pour que je ne cherchasse pas à le mettre hors de doute; aussi ne l'ai-je admis comme un fait positif et général, qu'après l'avoir vérifié sur six gaz différents : mais, ce principe une fois reconnu, il est évident qu'il suffit de constater les nombres de vibrations correspondant aux tons obtenus des mêmes tuyaux, parlant successivement avec tous les fluides élastiques; ces nombres exprimeront les rapports des vitesses de propagation du son dans les divers fluides. On pourra donc déterminer, par un calcul très-simple (1), la valeur du rapport de la chaleur spécifique sous une pression constante, à la chaleur spécifique sous un volume constant pour tous les fluides élastiques autres que l'air atmosphérique; la valeur de ce même rapport étant donnée, quant à ce dernier fluide, par la comparaison de la vitesse réelle de

(1) Soient n et n' les nombres de vibrations en une seconde de deux sons rendus par le même tuyau, le premier avec l'air atmosphérique, le deuxième avec un autre gaz d'une densité $= P$, celle de l'air étant 1; k le rapport des deux chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant, pour l'air; k', la quantité analogue pour l'autre gaz; on a la relation très-simple : $n : n' :: \sqrt{(1+0,00375t)}\sqrt{k} : \frac{\sqrt{(1+0,00375t')}\sqrt{k'}}{\sqrt{P}}$; où k' est la seule quantité inconnue.

propagation du son dans l'atmosphère avec la vitesse calculée d'après la formule de Newton. La table suivante présente des résultats relatifs à six fluides élastiques, choisis convenablement parmi ceux que l'on peut se procurer en assez grande quantité.

Noms des fluides élastiques.	Tons donnés par le même tuyau de 60 cent.	Nombre de vibrations en une seconde sexag.	Température, therm. centig.	Nombres adoptés dans le calcul pour la densité du fluide.	Vitesse de propagation du son, à la température de 0°, d'après la formule de Newton.	Vitesse de propagation du son, à la température 0°, déduite du ton donné par chaque fluide.	Rapport de la chal. spécif. à pression constante, à la chaleur spécifique à volume constant.	Chaleur spécifique à volume constant, celle de l'air étant prise pour unité.	Chaleur spécifique à pression constante, celle de l'air étant prise pour unité.	Chaleur spécifique à pression constante, d'après les observations de Laroche et Bérard.	Élévation de température produite par une condensat. d'$\frac{1}{267}$ du vol. primitif, supposé à 0° et à $0^m,76$.
Air atmosphérique.	ut_1 méd.	500,4	22°	1	$279^m,29$	333^m	1,421	1	1	1	0°,421
Gaz oxigène.	+ si_{-1}	474,9 475,2 474,5	21	1,1026	266	317, 17	1,415 1,417 1,413	1	1	0,976	*id.*
Hydrogène.	— si_3	1883,6 1881	17	0,0688	1064, 8	1269, 5	1,409 1,405	1	1	0,903	*id.*
Acide carbonique. .	sol_{-1}	393,18 392,68	22 20, 5	1,524	226, 24	261, 6	1,337 1,340	1,249	1,175	1,258	0, 337
Oxide de carbone. .	+ ut_1	501,3 503,07	15	0,974	283	337, 4	1,423 1,433	1	1	1,034	0, 423
Oxide d'azote.	sol_{-1}	392,7	20, 5	1,527	226	261, 9	1,343	1,227	1,16	1,35	0, 343
Gaz oléfiant.	— si_{-1}	466,9	16	0,981	281, 99	314	1,240	1,754	1,531	1,553	0, 240
N° 1.	n° 2.	n° 3.	n° 4.	n° 5.	n° 6.	n° 7.	n° 8.	n° 9.	n° 10.	n° 11.	n° 12.

C'est, surtout, relativement au gaz hydrogène que mes résultats diffèrent de ceux des précédents observateurs. La faible densité de ce fluide rend énormes les erreurs provenant du mélange accidentel de quelques portions d'un autre gaz permanent, ou même de vapeur d'eau. Préparé avec toutes les précautions nécessaires pour l'avoir pur, il donne sensiblement la double octave aiguë du ton rendu par l'oxigène. Chladni n'avait jamais trouvé plus d'une dixième d'intervalle, quelquefois qu'une octave. Le nombre obtenu par M. Van Rees, quoique moins erroné, était encore de $\frac{1}{9}$ environ plus faible que ne l'aurait voulu la formule de Newton. En sorte que la vitesse de propagation du son, loin d'être augmentée dans ce fluide, aurait été diminuée par l'effet des compressions et des dilations alternatives; ce qui eût été incompréhensible dans la théorie actuelle (1). Au surplus, les erreurs eussent été beaucoup plus faibles, qu'elles se seraient

(1) On trouve, dans le grand ouvrage (*Lectures on natural philosophy*, vol. II, p. 409) de M. Young, un passage qui ferait supposer que l'auteur s'est lui-même livré à des recherches expérimentales pour déterminer la vitesse réelle du son dans les fluides élastiques, bien qu'il ne rapporte aucun nombre, aucune indication précise de ses résultats. M. Young se borne à dire que « il parait (je traduis littéralement), d'après les expériences faites sur les sons rendus par les diverses espèces de gaz, que la correction relative à la vitesse du son serait presque la même (*nearly the same*) pour tous. » Cette assertion est bien éloignée de la conséquence à laquelle m'a conduit mon travail; car, parmi les gaz mentionnés dans le tableau précédent, qui ne comprend pas sans doute les extrêmes, la correction dont il s'agit, varierait déja du simple au double. Les résultats théoriques de M. Ivory ne s'accordent pas mieux avec mes recherches, puisque, suivant cette théorie, le rapport des deux chaleurs spécifiques, ou le facteur par lequel il faudrait multiplier la vitesse théorique du son pour passer à la vitesse réelle, devrait être *le même* pour tous les gaz. (*Phil. mag. new series*, t. I, p. 253).

encore opposées à la manifestation de la loi du phénomène.

Je ne puis m'empêcher de rappeler, à cette occasion, combien la science est redevable aux physiciens, dont les travaux ont pour objet de porter plus de précision dans la détermination des coëfficients numériques, qui deviennent des éléments théoriques d'un usage journalier. Pour être obtenus avec une exactitude suffisante, et pour conduire à la découverte d'une loi physique, les nombres contenus dans la huitième colonne du tableau précédent nécessitaient la connaissance préalable, 1° de l'intensité de la pesanteur; 2° du rapport de la densité du mercure à celle de l'air; 3° des coëfficients de dilatation des gaz et du mercure; 4° du rapport des densités des fluides élastiques; 5° de la vitesse réelle du son dans l'air; et 6° enfin, de la durée des vibrations d'une colonne de même longueur de tous les gaz. Une erreur un peu considérable, même sur une seule de ces données, aurait empêché d'apercevoir la relation existante entre les phénomènes qui nous occupent.

Les nombres qui marquent le rapport des deux chaleurs spécifiques sont tous plus grand que l'unité : ce qui doit être, puisque c'est la chaleur spécifique à volume constant que l'on suppose $= 1$, et que la quantité de chaleur nécessaire pour produire une même élévation de température avec dilatation, est toujours plus grande que celle qu'il faudrait pour accomplir la même variation de température sans changement de volume. Ainsi, la chaleur nécessaire pour faire varier d'un degré une certaine masse de gaz, d'air, par exemple, lorsque son volume reste invariable, étant prise pour unité, la chaleur nécessaire pour produire une élévation de 1° dans la même masse, libre de se dilater sous sa pression primitive, serait 1,421; et son volume augmenté de $\frac{1}{267}$, si l'on partait de la température 0°. Maintenant, supposons que, après avoir subi ce changement de température et de volume, la masse soit instantanément réduite à son volume primitif sans éprouver aucune perte de chaleur, l'élévation de température qui se manifestera sera due tout entière à la portion de chaleur correspondant au seul changement de volume, à la quantité de chaleur qu'absorberait la même masse en se dilatant de $\frac{1}{267}$, sans changer de température; et comme la capacité, sous le volume primitif, est prise pour unité, l'excès 0,421 du premier nombre sur l'unité sera la mesure de l'effet *thermométrique* produit dans la masse, sous un volume constant, par la chaleur que dégagerait une compression équivalente à $\frac{1}{267}$. Le même raisonnement s'applique à tous les autres fluides élastiques, et l'on peut ainsi comparer les élévations de température qui résulteraient, dans tous ces corps, d'une même compression.

On voit que, pour les gaz oxigène, hydrogène et pour l'air, c'est-à-dire pour les gaz simples, le rapport des deux chaleurs spécifiques est, à fort peu près, le même. Comme c'est en élevant au carré les nombres fournis immédiatement par l'observation, que l'on obtient ces coëfficients, on ne fera aucune difficulté d'attribuer aux erreurs de l'expérience les petites différences que l'on y aperçoit.

La fraction qu'ils comprennent pouvant être regardée comme exprimant l'élévation de température produite dans ces fluides par une condensation subite de $\frac{1}{267}$ de leur volume à 0°; on en conclurait donc que ces gaz, en subissant une même condensation, éprouvent une même *élévation de température :* or, s'il est reconnu que les gaz élémentaires ont la même chaleur spécifique sous une pression constante (1), la

(1) Annales de Chimie et de Physique, t. x, p. 406.

manière la plus simple et la plus probable de beaucoup, d'interpréter ce résultat, c'est d'admettre que la chaleur spécifique de ces gaz à volume constant est aussi la même, et que tous ces fluides dégagent une même *quantité absolue de chaleur* pour une condensation égale. Quant aux autres substances gazeuses, on voit que le rapport des deux chaleurs spécifiques devient en général d'autant plus petit, que le gaz auquel appartient ce coëfficient possède une capacité plus grande; par conséquent, *l'élévation de température* produite, dans ces divers gaz, par une même condensation, est d'autant plus faible que la chaleur spécifique est plus grande.

On est ainsi conduit à rechercher si ces différences de température ne proviendraient pas *uniquement* de la différence de capacité des divers fluides. Les rapports qui résulteraient de cette supposition entre les chaleurs spécifiques des quatre gaz composés sur lesquels j'ai opéré, se lisent dans la neuvième colonne du tableau précédent; et, en calculant, toujours dans la même hypothèse, les chaleurs spécifiques sous une pression constante, on trouve des nombres qui diffèrent très-peu de ceux qu'ont obtenus, par des observations directes, Bérard et Laroche, ainsi qu'on peut le voir en confrontant les colonnes 10e et 11e du tableau de la page 183 (1).

---

(1) Si l'inégalité des effets thermométriques produits dans tous les gaz par un même changement brusque de densité, dépendait seulement d'une différence de capacité, les variations de température correspondantes devraient être, en raison inverse, des chaleurs spécifiques *à volume constant*. Ainsi, par exemple, les variations correspondantes de température éprouvées par l'air et l'acide carbonique étant 0,421 et 0,337, le rapport des chaleurs spécifiques de ces deux fluides, à volume invariable, serait

Il en serait donc des gaz composés comme des gaz simples, et nous serions conduits à cette loi générale remarquable par sa simplicité, savoir : 1° *que des volumes égaux de tous les fluides élastiques pris à une même température et sous une même pression, étant comprimés ou dilatés subitement d'une même fraction de leur volume, dégagent ou absorbent la même* QUANTITÉ ABSOLUE DE CHALEUR ; 2° *que les variations de* TEMPÉRATURE *qui en résultent sont en raison inverse de leur chaleur spécifique à* VOLUME CONSTANT.

Je ferai remarquer, en passant, que si les fluides élastiques composés avaient tous une même chaleur spécifique, sous un volume constant, comme le pensent MM. de La Rive et Marcet; et, si les différences observées par MM. de La Roche et Bérard tenaient à l'inégalité des quantités de chaleur provenant de la diminution de volume qui accompagne le refroidissement d'un fluide élastique soumis à une pression constante, les effets thermométriques, dont nous venons de parler, devraient se présenter dans un ordre inverse de grandeur. Ainsi, par exemple, la compression du gaz oléfiant

---

obtenu par la proportion 0,421 : 0,337 : : x : 1, qui donne $x = 1,249$. La capacité de l'acide carbonique serait donc d'un quart plus grande que celle de l'air, lorsque les volumes ne peuvent pas changer. Mais si l'on comparait les capacités des deux mêmes corps sous une pression constante, leur rapport se trouverait en ajoutant 0,421 aux deux termes du précédent; et si l'on prend encore pour unité la chaleur spécifique de l'air sous une pression constante (en remarquant bien que cette unité n'a plus la même valeur que précédemment, quoiqu'elle se rapporte au même corps), on trouvera la capacité de l'acide carbonique par cette proportion 1,421 : 1,249 + 0,421 : : 1 : $x = 1,175$. Les autres nombres ont été obtenus de la même manière.

devrait produire une élévation de température sensiblement plus grande que celle de l'air, tandis qu'elle est presque deux fois plus faible.

Peut-être trouvera-t-on que le nombre des gaz, sur lequel cette loi se trouve maintenant appuyée, n'est pas suffisant pour lui donner toute la certitude désirable; mais, indépendamment de ce que la chaleur spécifique à pression constante n'a été déterminée jusqu'ici pour aucun autre gaz que ceux sur lesquels j'ai opéré, je me trouve dans la nécessité de modifier mes appareils, pour expérimenter ter sur d'autres fluides élastiques. Dans mes premiers essais, j'avais été forcé de donner des dimensions considérables (60 centimètres de longueur) au tube sonore, et, par suite, à l'enceinte destinée à le contenir, parce qu'il devenait indispensable d'établir, dans des circonstances identiques, une comparaison entre plusieurs gaz, parmi lesquels on ne pouvait manquer de comprendre l'hydrogène. En employant des dimensions plus petites, la plupart des gaz auraient rendu des sons facilement appréciables; mais le ton du gaz hydrogène aurait pu se trouver si aigu, qu'il n'aurait plus été possible d'en évaluer exactement le nombre de vibrations, d'autant plus que le peu d'intensité qui lui est propre le rend encore moins distinct. Tel est le volume de la boîte qui m'a servi jusqu'à présent, qu'il ne me fallait pas moins de 100 à 120 litres de fluide pour chaque observation; et, par la nature même du procédé, cette masse ne pouvait servir qu'une fois. La préparation de ces expériences devenait ainsi fort pénible et très-dispendieuse; mais, maintenant qu'il n'est plus nécessaire de comprendre le gaz hydrogène dans la série des substances à examiner, on peut considérablement réduire le volume intérieur de la caisse; la plupart des gaz devant donner des tons compris dans l'intervalle d'une quinte. Après avoir fait servir encore quelques autres corps à la vérification et à l'établissement définitif de la loi, j'espère pouvoir employer celle-ci à déterminer la chaleur spécifique des autres gaz pour lesquels on ne possède pas d'observations directes. Je dois aussi faire un changement nécessaire à mes appareils, pour rechercher les altérations qui surviennent dans la valeur des coëfficients déterminés dans ce Mémoire, lorsque l'on fait varier la température et la pression. Déja, même, j'ai tenté plusieurs expériences qui avaient pour but de manifester la loi suivant laquelle varient les chaleurs spécifiques, quand la pression subit des variations connues; mais ces expériences ne sont point encore assez multipliées pour que je puisse compter sur leurs résultats. Ce sera l'objet d'un deuxième Mémoire, où j'examinerai aussi les lois de la chaleur spécifique des gaz composés relativement à leur composition. Les quatre exemples compris dans le tableau s'accordent avec la loi que nous avons annoncée (1) relativement à la capacité des corps composés; mais on ne peut rien affirmer jusqu'à ce que l'on possède des observations relatives à tous les modes connus de contraction dans la combinaison des gaz élémentaires. Parmi les déductions les plus importantes de la loi précédemment énoncée, j'en citerai seulement une qui exigera cependant encore quelques essais pour être convenablement établie. Si les gaz permanents simples ou composés dégagent la même quantité absolue de châleur pour une même condensation,

(1) Annales de Chimie et de Physique, t. x, p. 407 et 408.

les circonstances initiales étant identiques, les vapeurs devront suivre aussi la même loi, si l'on a soin d'établir la comparaison de manière que la distance des particules étant la même dans l'état primitif du fluide, elle se trouve encore égale après la condensation. On voit maintenant pourquoi les chaleurs latentes, mesurées comme on l'a fait jusqu'ici, n'ont paru soumises à aucune loi; en les considérant sous ce nouveau point de vue, elles ne présenteront plus qu'un cas particulier de la loi générale que j'ai cherché à établir aujourd'hui : c'est ce que j'ai déja vérifié, quoique d'une manière encore incomplète, sur des observations entreprises il y a plus de douze ans, mais que je ne publiai point alors, parce que, ne possédant pas encore la clef de cette théorie, mes recherches demeurèrent sans succès. Je me borne, au reste, à indiquer ici cette idée, que je développerai, avec tous les détails qu'elle mérite, dans la deuxième partie de ce travail.

EXPOSÉ

DES RECHERCHES FAITES PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, POUR DÉTERMINER LES FORCES ÉLASTIQUES DE LA VAPEUR D'EAU A DE HAUTES TEMPÉRATURES.

Le Gouvernement ayant résolu de soumettre les machines à vapeur à des épreuves préalables, et d'assujettir leur emploi à certaines mesures de sûreté, consulta l'Académie des sciences sur les moyens qui, sans entraver le développement de l'industrie ou les opérations du commerce, seraient les plus propres à prévenir les accidents funestes que peut occasionner l'explosion des chaudières.

Cette importante question fut examinée par une commission spéciale, dont le rapport, discuté et approuvé par l'Académie, fut adressé à son Excellence le ministre de l'Intérieur.

Quelques mois après (1), parut une ordonnance royale qui rendit obligatoires les mesures proposées par l'Académie; c'est-à-dire, l'essai préalable de la résistance des chaudières destinées à supporter un effort intérieur de plus de deux atmosphères; l'application d'une soupape grillée, chargée d'un poids convenablement déterminé et qui ne puisse pas

(1) Le 29 octobre 1823. Bulletin des Lois, n° 637.

être augmenté ; enfin, un mur d'enceinte, ayant pour objet d'amortir les effets des explosions que l'on n'aurait pu éviter. Mais on y prescrit, en outre, l'emploi de rondelles métalliques fusibles à des températures qui surpassent de 10 et 20° les températures correspondant à l'élasticité de la vapeur dans le travail habituel de chaque machine.

MM. les ingénieurs des ponts et chaussées ou des mines, chargés spécialement de l'exécution de cette ordonnance, ont bientôt senti l'impossibilité de remplir cette dernière indication du réglement avec des données incertaines sur la force de la vapeur. On ne possédait, en effet, aucune table, d'une exactitude généralement reconnue, qui permît d'assigner sans hésitation les températures qui correspondent aux tensions de la vapeur supérieures à la pression de l'atmosphère; et comme l'ordonnance n'apportait, avec juste raison, aucune limite à la force élastique qui pourrait être mise en jeu dans les machines, on aurait infailliblement rencontré, sans sortir de la pratique ordinaire, des conditions tout-à-fait en dehors des expériences tentées jusqu'à ce jour.

L'administration, prévenue de ce genre d'obstacle, qu'elle n'avait pas prévu, s'adressa de nouveau à l'Académie, pour obtenir les documents réclamés par MM. les ingénieurs; mais la science ne possédait que des mesures assez discordantes au-dessous de huit atmosphères, et, pour des pressions plus fortes, absolument aucun résultat d'expériences directes (1), ni aucune théorie qui pût y suppléer.

(1) A l'époque où ceci a été écrit, nous ne connaissions pas encore le mémoire d'Arzberger qui sera cité plus loin.

Dans cet état de choses, il fut fait un rapport provisoire, dans lequel on présenta à l'Administration une table (1) qui s'étendait jusqu'à huit atmosphères, et qui avait été déduite, par interpolation, de toutes les expériences qui paraissaient mériter le plus de confiance, soit par l'habileté des observateurs, soit par la nature des méthodes d'observation. Pour aller au-delà, et même pour ne conserver aucun doute sur les nombres compris dans ces limites, il fallait se livrer à des recherches expérimentales, longues, pénibles et dispendieuses. Le Gouvernement engagea l'Académie à entreprendre ce travail, qui fut renvoyé à une commission dont la composition a subi quelques changements pendant la longue durée de son existence; elle est restée définitivement formée de MM. de Prony, Arago, Ampère, Girard et moi, qui ai été plus particulièrement chargé de la construction et de l'établissement des appareils. Ce sont les résultats de nos recherches que nous venons soumettre à l'examen et à l'approbation de l'Académie.

Il nous a paru que, pour remplir les intentions du gouvernement, il fallait que les observations s'étendissent à des tensions de plus de 20 atmosphères. Aucun physicien n'avait été au-delà de 8, à cause de l'extrême difficulté de ces sortes de recherches, et du danger qui les accompagne.

Si l'on se bornait, comme quelques observateurs, et entre autres, Robison, à déterminer le poids dont une soupape doit être chargée pour résister à l'effort de la vapeur, presque toutes les difficultés d'exécution disparaîtraient, et l'appareil

---

(2) Annal. de Chim. et de Phys., t. 27, p. 95.

deviendrait fort simple; mais on sait à quelles erreurs peuvent exposer ces sortes de mesures. La commission désirant donner à son travail toute la perfection que comporte et que réclame l'état actuel de la science, et présumant bien que, de long-temps, on ne trouverait l'occasion de recommencer et d'étendre aussi loin ce genre d'observation, s'est déterminée à recourir au moyen le plus pénible, mais aussi le plus exact : la mesure directe de la colonne de mercure capable de faire équilibre à l'élasticité de la vapeur.

Lorsque cette force n'excède pas un petit nombre d'atmosphères, la mesure immédiate de la colonne liquide qu'elle peut supporter, ne présente aucune difficulté ; mais lorsqu'il s'agit de contenir, dans un tube de verre, une colonne de mercure de 20 à 25 mètres de hauteur, il n'est personne qui ne regarde le succès de l'expérience comme très-douteux. On verra bientôt par quels moyens nous sommes parvenus à écarter toutes les chances défavorables.

On aurait pu, à la vérité, maintenir la colonne de mercure par une enveloppe métallique, et se garantir ainsi des inconvénients attachés à la fragilité du verre; mais alors il eût fallu borner les observations à des termes fixés d'avance par la longueur des tuyaux, puisque le sommet de la colonne n'eût été visible que dans le plan de niveau de l'extrémité de chaque tuyau ; d'un autre côté, l'élasticité de la vapeur ne pouvant être prise exactement qu'au moment même où l'appareil atteint un maximum de température que l'on n'est pas maître de porter à un degré déterminé, on voit que la difficulté de faire coïncider ce maximum avec la limite imposée par la longueur des tubes, rendait ce procédé à-peu-près impraticable.

Nous craindrions d'être entraînés dans des détails fastidieux, si nous exposions ici toutes les réflexions qui nous ont amenés, en dernier résultat, à la construction de l'appareil que nous avons employé: chacune des pièces qui le composent a été l'objet d'un examen approfondi, et ce n'est qu'après avoir apprécié, autant qu'il était possible de le faire, les conditions les plus avantageuses de grandeur, de forme et de position relative de toutes ses parties, que nous les avons fait exécuter par les artistes les plus exercés.

Toutefois, nous nous attacherons à donner une description exacte des dispositions principales, afin que les physiciens puissent juger, en supposant d'ailleurs les observations bien faites, de quelles erreurs nos résultats pourraient être encore susceptibles.

L'appareil aurait pu se réduire à deux parties essentielles: une chaudière destinée à fournir la vapeur, et un tube de verre employé à soutenir la colonne mercurielle; mais il était à craindre que l'augmentation trop rapide de la puissance de la vapeur, et surtout la diminution instantanée qui devait suivre l'ouverture de la soupape de sûreté, n'occasionnassent des chocs analogues à ceux du bélier hydraulique; ce qui aurait pu compromettre les parties lse plus fragiles, et entraîner l'effusion et la perte d'une masse considérable de mercure: la prudence commandait de se mettre à l'abri de cet accident. C'est afin de l'éviter que nous avons ajouté un manomètre pour servir de mesure intermédiaire ou de terme de comparaison. Cette addition qui, par des circonstances locales, est devenue d'une nécessité absolue, nous permettait d'ailleurs de vérifier, en même temps, une des lois physiques les plus utiles, que l'on n'étendait, que par induction, aux pressions très-élevées. Nous voulons parler de cette relation entre les volumes d'un gaz et les pressions correspondantes, connue sous le nom de loi de Mariotte.

Il fallait donc commencer par graduer le manomètre, c'est-à-dire qu'il fallait mesurer les colonnes de mercure capables de faire équilibre aux divers degrés d'élasticité d'une même masse d'air, réduite à des volumes successivement décroissants, et peu différents les uns des autres dans les termes consécutifs.

Des expériences qui exigeaient la mesure immédiate d'une colonne de mercure de 75 à 80 pieds de hauteur, ne pouvaient pas être exécutées partout; il devenait indispensable de trouver un édifice très-élevé dont la distribution intérieure se prêtât à l'établissement des échafauds nécessaires pour ériger la colonne et pour l'observer. Nous avions d'abord songé à appuyer le tube contre la surface extérieure de l'un des murs de l'Observatoire; mais en réfléchissant, d'une part, aux frais énormes que l'échafaudage aurait occasionnés, et de l'autre, au danger d'exposer nos instruments à toutes les intempéries de l'air, nous abandonnâmes ce projet, surtout lorsque nous aperçûmes un autre édifice qui nous parut présenter des conditions plus favorables.

Dans les bâtiments du collége royal de Henri IV, se trouve enclavée une tour carrée, seul reste de l'ancienne église de Sainte-Geneviève; il existait encore dans l'intérieur trois voûtes percées dans leur centre; disposition qui permettait de prendre des points d'appui plus fermes pour l'établissement de la charpente. Le collége n'ayant point encore employé ce local pour son usage, nous en fîmes la demande au proviseur et à la direction des bâtiments civils, et, après avoir rempli les formalités requises, nous obtînmes l'autorisation d'y installer nos appareils.

Au milieu de la tour s'élevait verticalement un arbre assez bien dressé sur sa face antérieure, composé de trois morceaux de sapin de 15 cent. d'équarrissage, assemblés à trait de Jupiter, et solidement fixés par des liens de fer aux voûtes et à la charpente qui supportait anciennement les cloches. Par ces attaches multipliées, on évitait les flexions qui auraient pu rompre la colonne de verre qui devait y être appliquée. Celle-ci se composait de 13 tubes de cristal, de 2 mètres de longueur, 5 millimètres de diamètre, et autant d'épaisseur, fabriqués exprès dans la verrerie de Choisi. MM. Thibeaudeau et Bontemps, directeurs de cette usine, d'une si grande utilité pour les arts, par sa proximité de la capitale, se sont prêtés, avec une complaisance que nous ne saurions trop louer, à tous les essais que nous avons dû tenter, afin d'obtenir les qualités de verre les plus convenables, soit pour rendre les tubes capables d'une résistanco suffisante, soit pour que, nonobstant leur grande épaisseur, ils pussent supporter, sans se briser spontanément, les variations de température de l'atmosphère. Ce qu'il y avait de plus embarrassant, dans l'établissement de cette longue colonne, c'était le moyen de décharger les tubes inférieurs du poids énorme des tubes plus élevés et de leurs viroles d'assemblage, poids qui aurait été plus que suffisant pour les écraser. Nous avions d'abord imaginé de faire reposer chaque virole de jonction sur des fourchettes scellées dans le mât de sapin, et d'éviter la fracture des tubes qui aurait pu résulter de l'inégale dilatabilité de leur matière et de celle de leur support, en employant des tiges de compensation; nous avions même déja déterminé les coëfficients de dilatation des substances dont les effets devaient être opposés l'un à l'autre, lorsqu'il nous vint à l'esprit un autre moyen plus simple, qui a parfaitement réussi.

Les tubes de verre sont réunis par des viroles, dont on voit la coupe verticale dans la fig. I, pl. 1. La virole supérieure s'appuie, par une surface dressée, sur un cuir qui recouvre le fond de la virole inférieure. Un écrou roulant, que l'on peut serrer avec une griffe, permet de faire joindre les surfaces de contact, de manière à résister à une très-forte pression intérieure. Le bord relevé *hh'* est destiné à contenir le mastic que l'on coule, au besoin, sur la jointure, pour s'opposer à la fuite du mercure, et en même temps pour assujettir, dans une position horizontale, la languette K dressée sur sa face supérieure, qui sert de point de repère pour la mesure des hauteurs, et qui fait partie d'une pièce indépendante oo'. Le tuyau inférieur *t* est maintenu dans un collier *cc'* en fer, fig. 2 et 3, fixé par une patte à vis sur la face antérieure de l'arbre de sapin. Au moyen de la vis *t'*, on maintient la virole dans une position à-peu-près invariable, en ne lui laissant que le jeu strictement nécessaire pour obéir aux variations de température. Les secousses latérales se trouvent, par-là, complétement évitées ; mais, afin de décharger les tubes inférieurs du poids de tout le reste de la colonne, on avait disposé au-dessus de chaque virole deux poulies pp', fig. 4, sur lesquelles passaient des cordons attachés par un bout à la virole située immédiatement au-dessous et portant à l'autre extrémité un petit seau de fer-blanc, dans lequel on mettait de la grenaille de plomb, jusqu'à ce que la charge totale fît à-peu-près équilibre au poids de chaque virole et du tube qu'elle portait. Par cette disposition, que l'on voit représentée en perspective, pl. III, fig. 1, les tubes inférieurs n'étaient pas plus comprimés que les supérieurs ; toute la colonne pouvait se mouvoir verticalement d'une seule pièce par le plus léger effort; ce qui rendait très-faciles les manipulations que l'on pouvait avoir besoin d'exécuter pour la réunir aux autres parties de l'appareil. On voit sur la pl. I, fig. 4, que la première virole était appliquée sur l'un des orifices latéraux d'un vase S à trois tubulures. Ce vase en fonte douce, de deux centimètres d'épaisseur, était capable de contenir 100 livres de mercure. Sur l'autre orifice opposé au premier, se trouvait placé le manomètre dont il faut donner une description détaillée, pour que l'on puisse apprécier le degré d'exactitude qu'il comporte dans ses indications.

Le tube manométrique aa', des mêmes dimensions en diamètre et en épaisseur que ceux de la colonne, avait seulement $1^{m},70$ de longueur ; avant de le mettre en place, il avait été gradué avec beaucoup de soin, mais sans pratiquer aucun trait sur sa surface extérieure, parce qu'il devait être soumis à des pressions très-fortes; deux petits morceaux d'étain laminé appliqués avec du vernis servaient de points de repère. Après l'avoir fermé à la lampe par le bas, on l'avait étranglé près de l'autre bout, en ne laissant subsister qu'un canal très-délié, et à parois assez minces pour être facilement fondues au chalumeau. Ce tube étant placé sur une planche verticale à côté d'une règle divisée munie d'un voyant et d'un vernier, dans la position même où il devait être pendant l'expérience, on dressa une table des longueurs correspondant à un même volume de mercure, dans toute l'étendue du tube. Nous passons sous silence une multitude de détails que les personnes habituées à ce genre d'opérations se représenteront aisément. Nous dirons seulement que ce procédé avait été adopté, pour éviter l'erreur assez grande qui aurait pu résulter, dans les hautes pressions, de la convexité de la colonne de mercure, si la mesure du volume n'eût pas été faite dans la même circonstance que la graduation. Ce tube coupé ensuite par le bas, et portant encore à sa partie supérieure le canal délié dont nous avons parlé, fut mastiqué dans la virole en fer bb', fig. 5, Pl. 1. Pour diminuer l'effort qu'il aurait à supporter dans l'expérience, le fond de cette virole n'offrait qu'une ouverture égale à la section de la colonne liquide qui devait être soulevée. Sans cette disposition, qui supprimait la pression exercée contre la surface annulaire du verre, les mastics n'auraient pu résister, et le tube eût été arraché. La même précaution avait été prise pour tous les tubes de la grande colonne. Avant de le mettre en place, il avait été désséché intérieurement; mais, pour plus de sûreté, on mit dans le vase de fonte, une quantité de mercure suffisante pour faire plonger de deux ou trois centimètres l'orifice inférieur du tube, et l'on fit passer pendant long-temps, à l'aide d'une machine pneumatique, un courant d'air sec qui entrait par le canal étroit encore existant dans le haut et qui sortait à travers le liquide métallique. Lorsque l'on présuma qu'il ne devait plus rester de traces d'humidité, on fondit avec le dard du chalumeau, le tube capillaire à un point marqué lors de la graduation, et le manomètre se trouva fermé et rempli d'air sec. Cette opération, exécutée avec adresse, ne peut occasionner aucune erreur sensible. On s'en est assuré, d'ailleurs, en vérifiant la graduation, après avoir terminé les expériences.

Dans un plan passant par l'axe de ce tube manométrique s'élevaient de part et d'autre deux règles verticales de laiton, dont l'une, divisée en millimètres, portait un vernier attaché à un voyant, tel que celui qui est employé dans le baromètre de Fortin. Ces règles étaient assujetties dans le haut à une traverse en cuivre, et fixées dans le bas sur la platine de la virole.

Les variations de température de l'air, qui ne se communiquent qu'après un temps assez long à une masse de verre de quelques millimètres d'épaisseur, auraient laissé dans une incertitude continuelle sur la vraie température du gaz renfermé dans le manomètre, s'il eût été exposé à l'air libre. Le seul moyen de lui donner, dans toutes ses parties, un même degré de chaleur et un degré facilement appréciable, c'était de le placer au milieu d'une masse d'eau continuellement agitée, afin que les couches situées à des hauteurs différentes ne fussent pas inégalement chaudes.

Tel est le but auquel était destiné le manchon de verre *mm'* qui enveloppe le tube et les règles. Un filet d'eau coulait continuellement d'un réservoir supérieur *e*, et, après avoir parcouru rapidement toute la longueur du manomètre, s'échappait par un robinet *r* situé dans le bas.

Le liquide du réservoir étant d'ailleurs à la température de l'air ambiant, la masse de gaz contenue dans le tube manométrique, devait posséder dans toutes ses parties une température uniforme, que l'on déterminait par un thermomètre X suspendu au milieu du liquide environnant. On voit en *u*, *q*, *y*, le mécanisme indispensable pour manœuvrer le voyant et pour prendre le niveau dans chaque observation. C'est un cordon de soie dont les deux bouts sont attachés à la pièce mobile et qui en passant sur les trois poulies supérieures et sur la poulie inférieure, s'enroule sur le tourniquet extérieur *u* qu'il suffit de tourner dans un sens ou dans l'autre pour faire monter ou descendre le voyant et le vernier qui en fait partie.

On doit voir par cette description, que ce genre d'observation comporte la même exactitude que la mesure des hauteurs du baromètre dans l'instrument de M. Fortin. Dire que cet habile artiste avait construit cette partie de l'appareil, c'est donner la plus forte garantie de la perfection avec laquelle elle a été exécutée.

Enfin, la troisième tubulure *n* du vase de fonte pouvait recevoir à volonté une pompe à liquide ou à gaz. Nous nous sommes d'abord servis de celle-ci, afin d'éviter l'humidité dans le vase de fonte; mais, après avoir reconnu que la hauteur du mercure contenu dans le réservoir était suffisante pour empêcher l'eau de passer dans le manomètre, nous avons substitué la pompe à eau, beaucoup plus expéditive.

Nous allons maintenant décrire la manière de procéder dans les observations, qui ont toutes été faites par M. Arago et moi.

Nous avons commencé par déterminer le volume initial de l'air du manomètre, et son élasticité à une température connue. Le volume était donné par l'observation du point de la règle auquel correspondait le sommet de la colonne de mercure, et en transportant ces mesures sur la table de graduation dont il a été parlé plus haut. L'élasticité se composait de la hauteur du baromètre au même moment, et de la différence de niveau des deux colonnes de mercure dans le grand tube vertical et dans le manomètre lui-même, différence qui était prise à l'aide du micromètre décrit *Ann. de Chim. et de phys.*, t. VII, p. 132.

Le soin que l'on avait eu de choisir les deux tubes du même diamètre, dispensait de toute correction de capillarité. En faisant agir l'une ou l'autre pompe, on réduisait à volonté le volume de l'air du manomètre et le mercure s'élevait dans la colonne verticale *dd'* jusqu'à ce qu'il y eût équilibre; il était donc facile de prendre des termes aussi rapprochés qu'on le désirait. A chaque observation, on déterminait le volume de l'air, comme il vient d'être dit; pour connaître la hauteur de la colonne de mercure, on avait mesuré d'avance la différence invariable de hauteur de deux repères consécutifs à l'aide d'une règle divisée *gg'*, dont le zéro coïncidait avec le plan supérieur du repère immédiatement au-dessous, et l'autre bout portait une languette complémentaire que l'on poussait, jusqu'à ce qu'elle affleurât la surface supérieure du repère suivant, fig. I, pl. 1. On avait fait d'avance le relevé de toutes les distances comprises entre les viroles consécutives, en sorte qu'il ne restait, dans chaque observation, qu'à connaître le N° du tube où la colonne de mercure se terminait. et à mesurer la différence de niveau du sommet de cette colonne avec le repère immédiatement au-dessous; ce qui se faisait avec la même règle, qui s'adaptait également à toutes les stations, et qui était, pour cette raison, munie d'un voyant et d'un vernier.

Ces mesures, pour être faites exactement, exigeaient qu'on pût placer l'œil à la hauteur du sommet de la colonne en quelque point qu'il se trouvât. L'établissement primitif nécessitait aussi des manipulations assez délicates à la jonction de tous les tubes; il existait pour cela des échafauds de 2 en 2 mètres, avec des échelles de communication, dans toute la hauteur de l'arbre de sapin. Enfin, on avait distribué six thermomètres dans toute l'étendue de la colonne, pour apprécier la densité du mercure, et afin que leurs indications fussent plus approchées, leurs réservoirs plongeaient dans des portions de tube des mêmes dimensions que ceux de la grande colonne et remplies de mercure.

Nous avons fait trois séries d'expériences sur la même masse d'air. Nous en rapporterons seulement les résultats tout calculés et ramenés à la même température.

TABLE des forces élastiques et des volumes correspondants d'une même masse d'air atmosphérique, la température étant supposée constante pendant chaque observation.

ELASTICITÉ exprimée en atmosphères de $0^m,76$ de mercure.	ÉLASTICITÉ exprimée en centimètres de mercure.	VOLUME OBSERVÉ.	VOLUME CALCULÉ.	TEMPÉRATURE THERM. CENTIG.
		Ire SÉRIE.		
1	80.09	479.73	....	14.3
2	156.9	244.687	244.88	14.3
4	326.706	117.168	117.6	14.4
4.8	365.452	104.578	105.205	14.5
6.5	504.072	75.976	76.222	id.
7	557.176	68.910	69.007	id.
9	688.54	55.45	55.801	id.
11.6	883.94	43.359	43.466	id.
12	933.346	40.974	41.137	id.
14	1070.862	35.767	35.881	id.
		IIe SÉRIE.		
1	79.497	481.806	....	13.3
2	156.112	244.986	245.205	13.5
4	313.686	121.542	121.989	13.6
4.7	362.11	104.795	105.488	12.5
5	381.096	99.59	100.253	id.
6.1	464.752	81.787	82.218	12.6
6.6	508.07	74.773	75.208	id.
6.6	506.592	74.985	75.427	id.
7.6	578.162	65.723	66.09	id.
7.6	580.002	65.473	65.881	id.
8	637.108	59.767	60.039	13.8
11.5	875.052	43.428	43.682	13.7
11.6	881.202	43.146	43.378	id.
12	962.108	39.679	39.758	14.5
16.6	1269.132	30.136	30.140	13.7
		IIIe SÉRIE.		
1	76	501.3	....	13
4.75	361.248	105.247	105.47	id.
4.94	375.718	101.216	101.412	id.
5	381.228	99.692	99.946	id.
6	462.518	82.286	82.380	id.
6.58	500.078	76.095	76.193	id.
7.6	573.738	66.216	66.417	id.
11.3	859.624	44.308	44.325	id.
13	999.236	37.851	38.132	id.
16.5	1262.000	30.119	30.192	id.
17	1324.506	28.664	28.770	id.
19	1466.736	25.885	25.978	id.
21.7	1653.49	22.968	23.044	id.
21.7	1658.44	22.879	22.972	id.
24	1843.85	20.547	20.665	id.
26.5	2023.666	18.833	18.872	id.
27	2049.868	18.525	18.588	id.

Indépendamment de l'objet principal que l'on s'était proposé en faisant les expériences précédentes, on peut encore, ainsi que nous l'avons dit en commençant, s'en servir pour constater si la loi de Mariotte s'étend à des pressions de 27 atmosphères.

Jusqu'à ces dernières années, on n'avait cherché à vérifier cette loi que pour des forces peu supérieures à la pression habituelle de l'atmosphère. Les essais de Boyle (1) et de Musschenbroek (2) paraissaient indiquer que, même au-dessous de 4 atmosphères, la compressibilité de l'air atmosphérique allait en diminuant pour des forces de plus en plus grandes; en sorte que pour réduire une masse d'air, soumise d'abord à la pression ordinaire de l'atmosphère, à un volume 4 fois moindre, par exemple, il aurait fallu employer une force plus de 4 fois aussi grande que cette pression (3). Les expériences entreprises long-temps après par Sulzer (4) et Robison (5), donnaient un résultat opposé. L'air réduit à $\frac{1}{8}$ de son volume primitif n'aurait possédé qu'une élasticité égale à 6,8, l'élasticité primitive étant 1. Mais, depuis que nos expériences sont commencées, M. OErsted a fait connaître celles qu'il a entre-

---

(1) *Defensio contra Linum*, t. V.

(2) Musschenbroek, *Essai de physique*, tome II, p. 655. Leyde, 1751.

(3) Mariotte, *Traité des eaux*, p. 142, éd. in-12, 1700, ne rapporte aucun nombre et se borne à indiquer le genre d'appareil avec lequel on peut vérifier la loi qu'il énonce sans restriction.

(4) Sulzer, Mém. de l'Acad. de Berlin, 1753.

(5) Encyclopédie Britannique, art. *Pneumatics*, t. 16, p. 700.

prises avec le capitaine Suensson (1). Les élasticités de l'air ont été mesurées jusqu'à 8 atmosphères, par la longueur de la colonne de mercure à laquelle elles pouvaient faire équilibre, et les volumes se sont trouvés, assez exactement, en raison inverse des pressions correspondantes. Ces physiciens ont même étendu leurs observations jusqu'à 60 atmosphères, en déterminant les pressions par les poids nécessaires pour vaincre la résistance d'une soupape ; mais, nous ne pensons pas que l'on puisse accorder à ce dernier procédé une entière confiance.

Dans le tableau qui précède, on voit les résultats de 39 expériences faites sur la même masse d'air soumise à des pressions comprises entre 1 et 27 atmosphères. La troisième colonne indique les volumes observés, et la quatrième le volume initial multiplié par le rapport inverse des élasticités correspondantes, toutes corrections faites pour ramener les deux termes à la même température.

Si l'on compare les nombres de la 3e et de la 4e colonne, on peut s'assurer que, dans aucun cas, la différence entre le calcul et l'observation ne s'élève à $\frac{1}{100}$, qu'elle est pour la plupart de $\frac{1}{200}$ environ, et pour quelques-uns presque nulle. On ne remarque pas que ces différences augmentent avec les pressions, comme cela devrait avoir lieu, si elles tenaient à une déviation réelle de la loi que nous cherchons à vérifier. D'ailleurs, d'après le procédé qu'on est dans l'habitude d'em-

(1) Edinburgh's Journal of Sciences, t. 4, p 224. Bulletin universel, t. 5, p. 331.

ployer, pour jauger les tubes, on doit s'attendre à ce que les observations ne soient pas toutes affectées de la même erreur: or, nous nous sommes assurés que les termes qui s'accordent le mieux avec le calcul, sont précisément ceux qui s'écartent le moins des points de la graduation fixés par des mesures directes, et pour lesquels la supposition d'une forme exactement cylindrique dans une certaine longueur du tube ne peut exercer qu'une très-légère influence.

On aurait pu facilement adapter au manomètre un appareil propre à mesurer l'augmentation de capacité occasionnée dans le tube à air par la pression qu'il supportait intérieurement; mais ayant constaté que le tube tout entier ne subissait pas un allongement sensible sur la division des règles qui servaient à mesurer le volume, lors même que la pression atteignait son maximum, nous en avons conclu que la correction relative à cet effet devait être tout-à-fait inappréciable.

On peut donc regarder la loi de compression de l'air atmosphérique comme étant vérifiée directement jusqu'à 27 atmosphères; et l'on pourrait, sans doute, en étendre l'application beaucoup au-dessus de cette limite sans erreur notable. Bien qu'il soit très-probable que les autres gaz permanents obéissent à la même loi, notre intention était de profiter du même appareil pour soumettre à l'observation deux ou trois autres espèces de fluides; mais nous devions, avant tout, compléter les recherches attendues par le Gouvernement, et lorsque celles-ci furent terminées, nous ne pûmes obtenir, de l'administration des bâtiments civils, la jouissance du local où notre appareil de compression était établi. Cette circonstance est d'autant plus fâcheuse, que nous aurions pu achever d'éclaircir ce point important de la mécanique des gaz, sans augmentation de dépense, et en très-peu de temps ; tandis qu'il faudrait maintenant une dépense considérable et plusieurs mois de travaux pénibles pour reprendre ce sujet où nous l'avons laissé.

Détermination de la force élastique de la vapeur d'eau.

Les expériences précédemment décrites pouvaient servir à faire connaître, par le volume de l'air du manomètre, les pressions correspondantes qui ne dépasseraient pas 29 atmosphères.

Il suffisait donc de faire communiquer une chaudière avec le réservoir du manomètre pour mesurer l'élasticité de la vapeur, avec la même précision que si l'on eût observé immédiatement la colonne de mercure qui lui aurait fait équilibre. On avait même l'avantage, en opérant ainsi, d'éviter les inconvénients déja signalés des grandes oscillations de la colonne métallique. L'appareil avait été disposé de manière qu'on pût substituer une chaudière à vapeur à la pompe de compression, sans déranger aucune autre pièce.

Mais, après avoir remarqué que la moindre explosion pouvait entraîner l'éboulement des trois voûtes, dont l'état de délabrement faisait craindre même une chute spontanée ; effrayés des conséquences d'un pareil accident, qui aurait pu compromettre les bâtiments environnants, nous nous déterminâmes à faire les expériences, sur la vapeur d'eau, dans une des cours de l'Observatoire. Il fallut donc y transporter le manomètre sans le séparer du réservoir en fonte auquel il était adapté, afin que les nouvelles indications de l'instrument fussent identiques avec les premières. Cette translation n'était pas sans difficulté, à cause du poids énorme de l'ensemble et des grandes dimensions du tube à air. Cependant, par des précautions multipliées, nous avons réussi à l'opérer, en conservant la même masse d'air qui existait primitivement dans le tube. Ce point important a été soigneusement vérifié.

On peut prendre une idée générale de l'appareil, en jetant les yeux sur la planche III, fig. 2, où il est représenté en perspective, et sur la planche II, fig. 1, qui en offre une coupe verticale, dans laquelle on a supprimé les parties accessoires pour éviter la confusion.

La chaudière *a*, pl. II, fig. 1, d'une capacité de 80 litres environ, a été construite dans les ateliers de Charenton, sous la direction de M. Wilson, dont les lumières et l'expérience sont bien connues de l'Académie. Elle est formée de trois morceaux de tôle de première qualité fabriquée exprès, ayant 13 millimètres d'épaisseur dans sa partie cylindrique, et beaucoup plus vers le fond et près de l'orifice. Cet orifice, de 17 centimètres de diamètre, était fermé par une plaque de fer battu de 4$^{\text{cent.}}$, 5 d'épaisseur et de 26 centimètres de diamètre. Elle portait en-dessous une languette circulaire bien dressée sur sa face inférieure qui était reçue dans une rainure de la même forme, pratiquée dans l'épaisseur du bord de la chaudière et dont le fond était garni d'une lame de plomb. En dedans de cette rainure, on avait fait entrer, à force, de dedans en dehors, six boulons d'acier, à large tête, de 35 millimètres de diamètre, qui traversaient le couvercle, et dont la partie supérieure taraudée recevait un écrou à pans. En interposant, entre l'écrou et le couvercle, un anneau de plomb, ce métal s'introduisait, pendant le serrage, dans tous les interstices, de manière à fermer hermétiquement, même pour les plus fortes pressions.

Toute cette fermeture demandait impérieusement une matière sans défauts et un travail soigné. Le couvercle seul devait en effet pouvoir supporter, dans quelques expériences, un effort intérieur équivalent à près de 20,000 kilogrammes; et bien que les dimensions eussent été calculées dans les suppositions les plus défavorables, avant de faire usage de cette chaudière, il était prudent de l'essayer. C'est ce que nous avons d'abord voulu faire à l'aide d'une pompe à eau, telle que celles qui sont employées pour le service des presses hydrauliques. Pour appliquer à notre chaudière l'article du réglement concernant les essais préalables, il aurait fallu la soumettre à une pression de 150 atmosphères; mais, bien avant ce terme, quelques fissures du métal et plusieurs des joints rivés laissaient sortir une quantité d'eau égale à celle que la pompe permettait d'injecter dans le même temps; de sorte que la pression ne pouvait plus être augmentée. En faisant ces essais, nous avons eu l'occasion de remarquer dans quelles erreurs on peut être jeté quand on estime la pression, comme on le fait ordinairement, par une soupape conique chargée d'un poids qui doit être soulevé. Indépendamment de la difficulté de connaître l'étendue de la surface exposée à la pression intérieure, l'adhérence très-variable de la soupape, selon sa position, avec les parois de la cavité où elle est reçue peut occasionner des différences énormes, quoique la pression soit réellement la même. Il serait préférable d'employer des soupapes planes qui nécessiteraient, il est vrai, des soins assidus pour être en bon état, ou, mieux encore, un manomètre conique, lorsque les forces de compression ne dépasseraient pas 50 ou 60 atmosphères. Comme il nous aurait fallu beaucoup de temps pour adapter ce mécanisme à notre pompe, et que d'ailleurs la haute température à laquelle la chaudière devait être exposée, nous aurait encore laissés dans l'incertitude sur l'affaiblissement qui pouvait en résulter dans la cohésion des substances métalliques, nous avons préféré de la soumettre à une épreuve plus rassurante, en la plaçant dans les conditions mêmes de l'expérience, et sous l'influence d'une force expansive plus grande que celle qui devait faire le sujet de nos observations. C'est principalement pour cet essai, que nous imaginâmes la soupape que l'on voit représentée en *bb'*, fig. 1, pl. II, et dont la construction offre l'avantage, que l'on n'obtiendrait pas avec celles qui sont communément usitées, de donner une libre issue à la vapeur, aussitôt que son élasticité a dépassé le terme pour lequel les deux poids ont été calculés d'avance.

Les poids mobiles sur les deux bras de levier sont composés de plusieurs pièces susceptibles d'être réunies ou séparées; ce qui permet de faire varier leur grandeur, selon la pression à laquelle on se propose d'atteindre, et le moindre soulèvement de la soupape les fait glisser, l'un vers le centre de mouvement et l'autre vers l'extrémité du bras opposé, de manière à laisser constamment ouvert l'orifice par où la vapeur peut s'échapper.

Le refroidissement occasionné par la perte de vapeur à travers les jointures et par un vent assez violent, réuni à quelques autres dispositions peu favorables du fourneau provisoire établi dans les ateliers de Charenton, ne nous permit pas d'observer le soulèvement de la soupape dont la charge avait été calculée pour une élasticité de 60 atmosphères; mais nous avions eu la précaution de mettre un thermomètre dont l'échelle pouvait être observée de loin avec une lunette, et la température de 240° à laquelle parvint l'intérieur de la chaudière, nous fit présumer, d'après quelques résultats obtenus en Angleterre, que nous avions dû approcher de la limite que nous nous étions proposée, de sorte que l'épreuve ne fut pas poussée plus loin. On verra, par la suite que, dans cette circonstance, la force de la vapeur n'avait été que la moitié environ de celle à laquelle nous croyons avoir soumis notre instrument.

Cette chaudière ainsi essayée, fut établie sur un fourneau d'une masse assez considérable pour que le système n'éprouvât pas des variations trop brusques de température. Un tuyau de fer $d\,d'\,d''$ composé de plusieurs canons de fusil, s'élevait d'abord verticalement au-dessus du couvercle et sa branche latérale $d'\,d''$, légèrement inclinée, allait s'adapter par son autre extrémité à la tubulure moyenne du réservoir en fonte f. C'est par ce tuyau que la pression se transmettait au manomètre. On commençait par le remplir d'eau, avant l'expérience, et, pour apprécier exactement la pression exercée par cette colonne, qui s'ajoutait à celle de la vapeur, on faisait continuellement tomber un filet d'eau froide sur des linges placés en V près du coude supérieur. L'intérieur de l'appareil étant vide d'air, on conçoit qu'il s'établissait une distillation continuelle qui devait remplacer les petites portions de liquide que l'accroissement d'élasticité de la vapeur avait fait écouler dans le vase de fonte, et que pendant toute la durée de l'expérience, le mercure était surmonté d'une colonne d'eau qui s'élevait constamment jusqu'à la jonction du tuyau incliné avec le tuyau vertical *d*.

Le niveau variable *tt'* du mercure dans le réservoir de fonte était connu à chaque instant par l'observation de la colonne *kp*, communiquant, par le haut avec le même réservoir, au moyen d'un tube de plomb OX. La hauteur du mercure au-dessus d'un repère fixe était prise sur la règle *lm*, déja décrite. Enfin, la force élastique de la vapeur s'obtenait en ajoutant, à l'élasticité correspondant au volume de l'air du manomètre, la hauteur de la colonne mercurielle soulevée, dans cet instrument, au-dessus du niveau *tt'*, et en retranchant la pression due à la colonne d'eau comprise entre ce même niveau et le point fixe *d'*. Cette dernière quantité qui ne variait que de quelques centimètres, avait été déterminée relativement à un point fixe de la règle *lm*, et la position variable du sommet K servait à trouver ce qu'il fallait ajouter ou retrancher à cet élément dans chaque cas particulier.

La mesure exacte des températures présentait quelque difficulté. Le thermomètre, quel qu'il fût, ne devait point être exposé immédiatement à la pression de la vapeur; car, lors même qu'il aurait pu la supporter sans en être brisé, il aurait fallu tenir compte des effets de la compression dont l'évaluation eût été assez embarrassante; c'est pour obvier à cet inconvénient, que l'on a introduit dans la chaudière, deux canons de fusil fermés par un bout et amincis au point de ne conserver que la résistance nécessaire pour ne point être écrasés pendant l'expérience. L'un descendait presque jusqu'au fond de la chaudière, l'autre ne dépassait pas le quart de sa profondeur.

C'est dans l'intérieur de ces cylindres remplis de mercure, que l'on plaçait les thermomètres; le plus court servant à donner la température de la vapeur, et le plus long celle de l'eau qui conservait encore la forme liquide. Ce moyen, le seul praticable dans des expériences de cette nature, serait très-défectueux, si l'on ne réunissait pas les circonstances convenables pour rendre, très-lentes, les variations de température. C'est une des causes qui nous avaient fait donner à la chaudière et au fourneau, des dimensions plus considérables que celles dont on aurait pu, sans cela, se contenter; mais nous nous sommes assurés, à plusieurs reprises que, près du maximum, les plus légères variations d'élasticité de la vapeur, en plus ou en moins, étaient accompagnées de variations correspondantes dans les indications des thermomètres.

Si l'on se fût contenté de plonger les réservoirs de ces instruments dans les enveloppes dont il vient d'être question, les corrections relatives à la température toujours beaucoup plus basse des tiges, situées au-dehors, eussent été trop incertaines. Il est vrai qu'on aurait pu se dispenser de ce soin, en employant des thermomètres à poids (1); mais les observations devant être très-multipliées, nous avons préféré conserver

(1) Journal de l'École Polytechnique, 18ᵉ cahier, p. 201.

à l'instrument sa forme ordinaire, en donnant à la tige tout entière une température uniforme et facile à déterminer.

On voit sur la fig. 2, pl. II, que cette tige se recourbait à angle droit au-dessus du couvercle de la chaudière, et était enveloppée par un tube de verre dans lequel on faisait couler de l'eau provenant d'un grand réservoir. La température de ce liquide, qui variait très-lentement, se communiquait à la tige, et était accusée par un autre thermomètre plus petit, situé horizontalement à côté. A chaque observation, on avait soin de lire, après l'indication principale de chaque thermomètre, la température du mercure de la tige, et, par un calcul très-simple, on pouvait atteindre à la même précision que si le thermomètre tout entier eût été plongé dans la chaudière. Il est presque inutile de dire que ces instruments avaient été calibrés, et qu'ils présentaient dans leur graduation toute la précision que l'on sait maintenant leur donner.

D'après la description que nous venons de faire de l'appareil, on doit se représenter facilement la manière d'opérer ; la chaudière étant chargée de la quantité d'eau convenable, pour que le réservoir du petit thermomètre fût tout entier au-dessus de sa surface, on tenait le liquide en ébullition pendant 15 ou 20′ ; la soupape de sûreté étant ouverte, ainsi que l'extrémité *d′* du tube vertical, pour chasser complétement l'air atmosphérique et les gaz dissous ; on fermait alors, toutes les ouvertures et l'on réglait les robinets d'écoulement soit pour le manomètre, soit pour les tiges des thermomètres, soit enfin pour la condensation de la vapeur dans la partie V du tuyau de fer. On chargeait d'avance le fourneau d'une quantité de combustible plus ou moins grande, selon le degré plus ou moins élevé que l'on se proposait d'obtenir; puis on attendait que la marche ascendante de la température se rallentît; l'un de nous observait le manomètre et l'autre les thermomètres, et, lorsque le réchauffement ne faisait plus que des progrès très-lents, nous commencions à noter les indications simultanées du manomètre, des 4 thermomètres de la chaudière et de la hauteur du mercure dans le tube latéral *op*. Nous prenions ainsi plusieurs nombres très-rapprochés, jusqu'à ce que nous eussions atteint le maximum; c'était seulement l'observation faite à ce terme qui était calculée. Les précèdentes et les suivantes ne servaient qu'à garantir des erreurs de lecture. Lorsque le manomètre et les thermomètres avaient sensiblement baissé, on mettait une nouvelle dose de combustible et l'on procédait de la même manière. On ne pouvait pas, à la vérité, obtenir ainsi la force élastique correspondant à une température déterminée. Toutefois, en faisant un grand nombre d'observations, on a fini par avoir des termes assez rapprochés dans toute l'étendue de l'échelle. Nous avions l'intention de pousser les expériences jusqu'à trente atmosphères, mais la chaudière perdait une si grande quantité d'eau qu'il nous fût impossible d'aller au-delà de 24. On verra bientôt qu'il serait permis de suppléer aux observations directes, même pour des pressions beaucoup plus éloignées de la limite à laquelle nous avons été contraints de nous arrêter.

Les explications précédemment données indiquent assez la manière dont les observations devaient être calculées. Comme toutes les échelles étaient arbitraires, ces calculs ont exigé beaucoup de temps; il serait inutile de rapporter ici tous les intermédiaires ; nous nous contenterons de donner les résultats définitifs. La comparaison des termes très-rapprochés a servi de vérification.

	INDICATION des NUMÉROS de L'OBSERVATION	PETIT THERMO-MÈTRE.	GRAND THERMO-MÈTRE.	FORCE élastique en mètres de mercure.	FORCE élastique en atmosphères de $0^m,76$.	CONDITION des observations. (1)	FORCE élastique en mètres de mercure, à 0°.
1	29 oct. 3e	122.97	123.7	1.62916	2.14	max.	1.62916
2	25 oct. 1re	132.58	132.82	2.1823	2.87	a.	2.1767
3	28 oct. 1re	132.64	133.3	2.18726	2.88	p. max.	2.1816
4	28 oct. 2e	137.70	138.3	2.54456	3.348	a.	2.5386
5	29 oct. 5e	149.54	149.7	3.484	4.584	max.	3.4759
6	28 oct. 3e	151.87	151.9	3.69536	4.86	a.	3.6868
7	25 oct. 2e	153.64	153.7	3.8905	5.12	a.	3.881
8	2 nov. 1e	163.00	163.4	4.9489	6.51	max.	4.9383
9	30 oct. 4e	168.40	168.5	5.61754	7.391	max.	5.6054
10	28 oct. 4e	169.57	169.4	5.78624	7.613	a.l.	5.7737
11	23 oct. 3e	171.88	172.34	6.167	8.114	a.	6.151
12	28 oct. 5e	180.71	180.7	7.51874	9.893	p. max.	7.5001
13	25 oct. 4e	183.70	183.7	8.0562	10.6	a.	8.0352
14	28 oct. 6e	186.80	187.1	8.72218	11.48	a l.	8.6995
15	22 oct. 2e	188.30	188.5	8.8631	11.66	max.	8.840
16	25 oct. 5e	193.70	193.7	10.0254	13.19	a.	9.9989
17	28 oct. 7e	198.55	198.5	11.047	14.53	a.l.	11.019
18	25 oct. 6e	202.00	201.75	11.8929	15.65	a.	11.862
19	24 oct. 1re	203.40	204.17	12.321	16.21	a.l.	12.2903
20	25 oct. 7e	206.17	206.10	13.0211	17.13	a.	12.9872
21	2 nov. 6e	206.40	206.8	13.0955	17.23	max.	13.061
22	24 oct. 2e	207.09	207.4	13.167	17.3	p. max.	13.1276
23	28 oct. 8e	208.45	208.9	13.7204	18.05	a.	13.6843
24	25 oct. 8e	209.10	209.13	13.8049	18.16	a.	13.769
25	25 oct. 9e	210.47	210.5	14.1001	18.55	p. max.	14.0634
26	28 oct. 9e	215.07	215.3	15.5407	20.44	a.	15.4995
27	28 oct. 10e	217.23	217.5	16.1948	21.31	a.	16.1528
28	28 oct. 11e	218.3	218.4	16.4226	21.6	p. max.	16.3816
29	30 oct. 8e	220.4	220.8	17.2248	22.66	a.	17.1826
30	30 oct. 11e	223.88	224.15	18.2343	23.994	max.	18.1894

(1) Les lettres a et a. l. signifient température ascendante ou lentement ascendante, p. presque.

La table précédente renferme les trente observations faites dans les conditions les plus favorables.

Les deux thermomètres s'accordent, en général, aussi parfaitement qu'on peut l'espérer dans des expériences de cette nature. Le plus grand écart est de 0°,7, et encore ne se fait-il remarquer que dans le bas de l'échelle, ce qui tient, sans doute, aux conditions spéciales de l'appareil. En effet, en supposant que le maximum de température fût rigoureusement le même dans la vapeur et dans l'eau, les deux thérmomètres n'auraient pas dû marquer exactement le même degré; le réservoir du plus petit, surmonté d'une colonne de mercure beaucoup plus courte et plongé dans un milieu dont la faible densité retardait la communication de la chaleur, devait ressentir plus fortement l'influence du refroidissement qui s'opérait près du couvercle de la chaudière. Cette cause s'affaiblissait à mesure que la température s'élevait, parce que la quantité de chaleur que la vapeur pouvait céder, dans un même temps, à l'enveloppe du thermomètre, croissait à peu-près dans le même rapport que sa densité. Aussi la différence des indications diminue-t-elle à mesure que les tensions deviennent plus fortes. Ceci s'applique aux observations dans lesquelles il s'est établi un maximum; pour celles qui ont été faites pendant un mouvement ascendant de la température, on remarque que les deux instruments s'accordent beaucoup mieux; mais cela tient à ce que le grand thermomètre surmonté d'une colonne de mercure beaucoup plus longue exigeait plus de temps que l'autre pour se mettre en équilibre, et qu'au même moment il devait être plus éloigné que le petit de la température du milieu environnant.

D'après ces considérations, nous regardons comme plus exacts les nombres fournis par le thermomètre plongé dans l'eau pour toutes les observations faites au maximum de température.

Pour qu'on n'ait pas à craindre que la vapeur fût réellement à une température plus basse que l'eau, nous avons eu soin de constater d'ailleurs, comme nous l'avons déja dit, que le manomètre indiquait une diminution de tension au même moment où le grand thermomètre commençait à rétrograder; ce qui prouve que l'espace était saturé de vapeur pour la température marquée par l'instrument.

Nous avons construit la courbe de ces observations, elle offre une régularité parfaite. En choisissant deux termes quelconques, même très-rapprochés, il n'est jamais arrivé qu'une observation intermédiaire tombât de l'autre côté de la corde qui réunissait les deux extrêmes.

On avait déja entrepris de nombreuses recherches expérimentales sur le même sujet; mais elles ne s'étendaient, pour la plûpart, qu'à des pressions de 4 ou 5 atmosphères; quelques-unes seulement allaient jusqu'à huit.

En examinant, avec attention, les procédés mis en usage, lorsqu'ils ont été décrits avec soin, on peut y reconnaître les causes probables des différences que présentent leurs résultats comparés aux nôtres.

Les déterminations seules de Southern et de Taylor offrent avec celles-ci une conformité d'autant plus frappante, qu'elles ont été fournies par un mode d'observation totalement différent. A l'époque où nous avons calculé la table insérée au rapport provisoire cité plus haut, nous les considérions déjà comme les plus vraisemblables; aussi, ne trouvera-t-on, entre cette table et celle que nous allons donner, que des différences presque insignifiantes, dans la partie de l'échelle qui leur est commune.

Au-dessus de 8 asmosphères, nous ne connaissions qu'un seul nombre isolé que M. Perkins avait communiqué à M. Clément. D'après ce célèbre ingénieur, à la température de 215° cent., la force de la vapeur serait de 35 atmosphères, tandis que nous l'avons trouvée seulement de 20. N'ayant aucun renseignement sur le mode d'observation, nous ne pouvons nous expliquer comment l'auteur a pu se tromper de 15 atmosphères sur l'élasticité, ou de 30° sur la température; car la multiplicité et la progression régulière de nos résultats ne permettent pas de supposer que l'erreur soit de notre côté.

C'est depuis peu de temps seulement que nous avons découvert dans un ouvrage allemand (1) fort peu répandu en France: l'Annuaire de l'institution polytechnique de Vienne; une série d'observations faites avec beaucoup de soin par Arzberger, professeur dans cet établissement.

C'est encore en déterminant l'effort nécessaire pour s'opposer au soulèvement d'une soupape à levier, que l'élasticité de la vapeur est mesurée. Quoique ce procédé soit toujours

---

(1) Jahrbücher des k. k. polytechnisches Institutes in Wien, t. 1, p. 144. 1819.
Polytechnisches Journal von Dingler, t. 12, p. 17.
Bulletin des Sciences technologiques, t. 1, p. 123.

inférieur, pour l'exactitude, à celui que nous avons employé, on peut présumer que la précaution de prendre une soupape sphérique d'acier, reposant sur le contour d'un orifice circulaire pratiqué dans une autre pièce de même matière, et la perfection du travail de toutes les autres pièces de la machine, ont dû atténuer beaucoup les erreurs sur la mesure de l'élasticité; mais, selon toute apparence, c'est l'évaluation de la température qui a toujours été portée trop haut. L'enveloppe du thermomètre qui plongeait immédiatement dans l'eau, ayant été soumise à toute la pression intérieure, a dû éprouver une diminution de capacité et faire juger la température plus élevée qu'elle ne l'était réellement. Cette erreur, dont nous ne saurions apprécier au juste l'étendue et qui varierait avec l'épaisseur de chaque enveloppe, eût été sans doute beaucoup plus forte encore, s'il ne s'en fût produit en même temps une autre en sens contraire. La tige du même instrument, placée horizontalement en dehors de la chaudière, ne pouvait participer à l'échauffement du réservoir, et, pourtant, l'auteur n'indique aucune correction relative à cette circonstance. Il est donc très-probable que la plus grande élasticité observée par Arzberger était effectivement de 20 atmosphères environ; mais il attribue à cette tension la température de 222° qui correspond, selon nous, à 23 atmosphères. Tous les autres termes sont affectés, par les mêmes causes, d'une erreur semblable, mais moindre à mesure que les tensions décroissent.

La loi physique qui exprimerait exactement la force élastique de la vapeur en fonction de la température ne se manifeste pas plus sur nos observations que sur celles que l'on possédait déjà dans la partie inférieure de l'échelle thermométrique. On n'y parviendra, sans doute, que par des considérations théoriques, et lorsqu'on connaîtra les densités qui correspondent aux divers degrés d'élasticité. En attendant, on peut chercher une formule d'interpolation propre à faire connaître les forces élastiques pour un point quelconque de l'échelle thermométrique.

Nous allons passer en revue quelques-unes de celles que l'on a proposées jusqu'à ce jour.

La plupart n'ont été appliquées qu'à des pressions équivalentes à un petit nombre d'atmosphères, et, bien que dans cet intervalle, elles aient pu offrir une approximation suffisante pour les usages ordinaires, on ne sera pas étonné qu'elles ne puissent plus convenir au-delà de ces limites.

La première formule est celle de M. de Prony, qui avait été imaginée pour représenter les observations de Bétancourt. La longueur des calculs nécessaires pour déterminer les six constantes qui entrent dans cette formule; et même pour en faire usage lorsqu'elles sont connues, a fait renoncer à ce mode d'interpolation (1).

M. Laplace (2), se fondant sur la loi approximative annoncée par Dalton, savoir : que les forces élastiques de la vapeur croissent, à peu près, en progression géométrique

(1) Cette formule est $z = \mu_{,} \rho_{,}^{x} + \mu_{,,} \rho_{,,}^{x} + \mu_{,,,} \rho_{,,,}^{x}$, où z est la force élastique de la vapeur et x la température. *Archit. hydrauliq.* t. 2, p. 192.

(2) *Mécanique céleste,* t. 4, p. 233.

pour des températures en progression arithmétique, représente la force élastique par une exponentielle, dont l'exposant serait développé en série parabolique. Les deux premiers termes lui avaient paru suffisants, mais M. Biot (1) prouva la nécessité d'en prendre un troisième. On peut s'assurer que ce genre d'expression est un de ceux qui s'écartent le plus des observations, quand on sort des limites entre lesquelles les données ont été prises pour calculer la valeur des coëfficients indéterminés. Si l'on voulait embrasser, dans la même formule, l'ensemble des observations que l'on possède aujourd'hui, il faudrait prendre cinq ou six termes de la série, ce qui rendrait le calcul interminable. Nous pensons que cette méthode doit être entièrement abandonnée. La formule de M. Ivory, absolument de la même nature, quoique ces coefficients aient été calculés par un autre procédé, présenterait le même inconvénient. A la plus haute température de nos expériences, elle donnerait une force élastique plus que double de celle que l'on observe. (*Philosoph. Magazine new series*, vol. I, p. 1.)

Le docteur Ure a proposé une méthode facile dans son emploi et qui s'accorde assez bien avec l'expérience tant qu'on ne s'élève pas au-dessus de 5 ou 6 atmosphères. Il a remarqué qu'à partir de 210° Fahrenheit, où la force élastique est de $28^{p},9$ (mes. ang.), si l'on s'élève de 10° de la même échelle, la nouvelle force élastique s'obtient en multipliant la précédente par 1,23; pour 10° au-dessus, en

(3) *Traité de phys.*, t. 1, p. 277 et 350.

multipliant par 1,22, et ainsi de suite, en diminuant toujours le facteur d'une unité de l'ordre du dernier chiffre pour chaque accroissement de 10°. Indépendamment de ce que cette règle ne permettrait pas de résoudre la question inverse, on voit qu'à la température de 440° Far., qui est à peu près la limite supérieure de nos observations, une augmentation de 10° ne donnerait aucun accroissement de force expansive; et que, pour des températures un peu plus élevées, la force élastique diminuerait; ce qui est absurde.

M. Roche, professeur de mathématiques à l'École d'artillerie de la marine à Toulon, a envoyé à l'Académie, au commencement de l'année dernière, un mémoire sur la loi des forces élastiques des vapeurs. Ce n'est pas seulement une interpolation propre aux usages des arts que l'auteur se propose d'établir, il regarde la formule à laquelle il parvient, comme une loi physique déduite, par le calcul, des principes les plus généraux de la théorie des vapeurs.

Il serait trop long d'entrer ici dans l'examen détaillé des raisonnements sur lesquels M. Roche se fonde; nous ne croyons pas qu'ils puissent obtenir l'assentiment des physiciens. Nous reconnaissons, néanmoins, que la formule à laquelle il est conduit (1) est une de celles qui s'accordent le mieux avec

(1) Cette formule est $F = 760 \times 10^{\frac{mx}{1+0,03x}}$, où F exprime la force de la vapeur en millimètres de mercure et x la température en degrés centigrades, à partir de 100°, positivement en-dessus et négativement en-dessous. La valeur moyenne de m déduite de nos observations serait $m = 0,1644$.

nos observations. Cet accord ne serait cependant que très-imparfait si l'on employait le coëfficient déduit des observations faites au-dessous de 100°; mais, en le calculant d'après les données précédentes, et en prenant la moyenne des valeurs relatives à sept observations choisies dans l'intervalle de 1 à 24 atmosphères, la formule n'est en erreur que d'un degré à 24 atmosphères et d'un dixième seulement vers 2 atmosphères.

A peu près à la même époque, M. Auguste de Berlin (1) fit connaître une formule qui a cela de commun avec la précédente, que la force élastique y est représentée par une exponentielle, dont l'exposant fractionnaire renferme la température au numérateur et au dénominateur (2); mais l'auteur fait usage de considérations différentes pour l'établir, et, d'ailleurs, les températures n'y sont pas comptées sur le thermomètre à mercure; on les suppose ramenées aux indications du thermomètre à air. Nous avons calculé la température qui, d'après cette formule, correspondrait à une tension de 24 atmosphères; on la trouve égale à 214°,37. L'observation donne 224°,2 sur le thermomètre à mercure, qui se réduiraient à 220°,33, seulement, sur le thermomètre à

---

(1) Annalen der Physik und Chemie, 1828, n° 5, p. 128, et Bulletin universel, t. 10, p. 302.

(2) La formule est $e = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{(\omega+n)t}{n(\omega+t)}}$ où e est l'élasticité en mètres de mercure, a l'élasticité de la vapeur à 0°, $b = 0{,}76$, $n = 100$, $\omega = 266\frac{2}{3}$ et t la temp. cent. à partir de la glace fondante.

En la réduisant en nombres, $\log. e = \frac{23{,}945371\,t}{800+3t} - 2{,}2960383$.

air. La différence est donc de 6° environ; ou, si l'on recherchait l'élasticité pour la température de 220°,2 (th. à air), on trouverait un excès de plus de 2 mètres de mercure.

On trouve encore dans le n° 19 du *The Edinburgh journal of sciences*, p. 68, une autre formule proposée par M. Tregaskis, qui croit avoir vérifié, sur les anciennes observations, que les forces élastiques croissent en progression géométrique dont la raison est 2, lorsque les températures croissent aussi en progression géométrique dont la raison serait 1, 2. Cette formule ne satisfait point aux observations faites à des températures élevées. On voit que cela revient à supposer que les élasticités croissent comme une certaine puissance des températures. Pour savoir si telle est en effet la loi du phénomène, nous avons déterminé l'exposant de cette puissance d'après le terme le plus élevé du tableau précédent, qui, selon toute apparence, est affecté de la moindre erreur; la formule ainsi construite a ensuite été comparée aux autres termes. Les écarts de 2°, qui se sont alors manifestés, montrent bien que les variations de la force de la vapeur ne peuvent pas être représentées par le concours de deux progressions géométriques.

Presque toutes les autres formules proposées jusqu'ici reposent sur une même idée, et ne diffèrent que par les constantes qui y entrent. M. Young paraît être le premier qui ait employé ce mode d'interpolation, qui consiste à représenter les forces élastiques de la vapeur par une certaine puissance de la température augmentée d'un nombre constant. M. Young avait trouvé que l'exposant 7 satisfaisait aux expériences connues à l'époque de la publication de son ouvrage (1). Creighton (2) prit l'exposant 6 qui lui parut mieux s'accorder avec les résultats du docteur Ure. M. Southern (3) adopta le nombre 5,13 qu'il détermina sans doute par tâtonnement. M. Tredgold (4) rétablit l'exposant de Creighton, en changeant le coëfficient; enfin, M. Coriolis (5), dans l'intéressant ouvrage qu'il vient de publier, s'arrête à l'exposant 5,355, déduit des observations de Dalton au-dessous de 100°, et de la table que nous avons donnée dans le rapport provisoire adressé au Gouvernement (1). Cette formule diffère très-peu de celle que nous avions employée à cette époque pour calculer la table dont il vient d'être question ; elle satisfait très-bien aux observations extrêmes et ne s'écarte que de 2 ou 3 dixièmes de degré des nombres intermédiaires; mais nous préférons, comme étant d'un usage plus facile et d'une exactitude encore plus parfaite, la formule $e = (1 + 0{,}7153\,t)^5$, où e exprime l'élasticité en atmosphères de $0^m,76$ et t la température à partir du 100^e degré, positivement en-dessus et négativement en-dessous, en prénant pour unité l'intervalle de 100°. Le seul coëfficient qui

(1) Natural philos. t. 2, p. 400.

(2) Philosophical Magazine, t. 53, p. 266.

(3) Robison mecan. philosophy, t. 2, p. 172.

(4) Traité des machines à vapeur, 1828, in-4°, trad. de Mellet, p. 101.

(5) Du calcul de l'effet des machines, 1829, in-4°, p. 58. La formule est $e = \left(\frac{1 + 0{,}01878\,t}{2{,}878}\right)^{5{,}355}$ où e exprime l'élasticité en atmosphères de $0^m,76$ et t la température en dég. centig. à partir de 0°.

(1) Annales de Chimie et de physique, t. 27, p. 101.

entre dans cette expression a été déduit du terme le plus élevé de nos observations.

Nous avons réuni dans un même tableau les valeurs que donneraient, pour les principaux termes de la série, les quatre formules qui s'écartent le moins de l'expérience et qui ne sont pas d'un calcul trop pénible.

Nos des observations	ÉLASTICITÉ en mètres de mercure à 0°.	ÉLASTICITÉ en atmosph. de $0^m,76$.	TEMPÉRATURE observée.	TEMPÉRATURE calculée par la formule de Tredgold. (1)	TEMPÉRATURE calculée par la formule de Roche coeff. moyen. (2)	TEMPÉRATURE calculée par la formule de Coriolis. (3)	TEMPÉRATURE calculée par la formule adoptée. (4)
1	1.62916	2.14	123°,7	123°,54	123°,58	123°,45	122°,97
3	2.1816	2.8705	133 ,3	133 ,54	133 ,43	133 ,34	132 ,9
5	3.4759	4.5735	149 ,7	150 ,39	150 ,23	150 ,3	149 ,77
8	4.9383	6.4977	163 ,4	164 ,06	163 ,9	164 ,1	163 ,47
9	5.6054	7.3755	168 ,5	169 ,07	169 ,09	169 ,3	168 ,7
15	8.840	11.632	188 ,5	188 ,44	188 ,63	189 ,02	188 ,6
21	13.061	17.185	206 ,8	206 ,15	207 ,04	207 ,43	207 ,2
22	13.137	17.285	207 ,4	206 ,3	206 ,94	207 ,68	207 ,5
25	14.0634	18.504	210 ,5	209 ,55	210 ,3	211 ,06	210 ,8
28	16.3816	21.555	218 ,4	216 ,29	218 ,01	218 ,66	218 ,5
30	18.1894	23.934	224 ,15	222 ,09	233 ,4	224 ,0	224 ,02

(1) $t = 85\sqrt[6]{f} - 75$, t étant la température en degrés centigrades à partir de 0° et f l'élasticité en centimètres de mercure.

(2) $t = \dfrac{11\,(\log. f - \log. 760)}{0{,}1644 - 0{,}03\,(\log. f - \log. 760)}$, t étant la températ. en degrés centigrades au-dessus de 100° et f l'élasticité en millim. de mercure.

(3) $t = \dfrac{2{,}878\sqrt[5{,}355]{f} - 1}{0{,}01878}$, t est la température en degrés centigrades à partir de 0° et f l'élasticité en atmosphères de $0^m,76$.

(4) $t = \dfrac{\sqrt[5]{f} - 1}{0{,}7153}$, t est la température en degrés centigrades, à partir de 100° en prenant pour unité l'intervalle de 100°, et f l'élasticité en atmosphères de $0^m,76$.

En comparant les cinq dernières colonnes de ce tableau, on voit que, jusqu'à 3 ou 4 atmosphères, les trois premières colonnes représentent assez fidèlement les observations; mais à partir de là, la quatrième formule, qui est celle que nous avons adoptée, est constamment plus rapprochée des résultats de l'expérience. La plus grande différence est de 0°,4, presque toutes les autres ne sont que de 0°,1. L'écart plus considérable, qui se remarque dans les deux premiers termes, serait de peu de conséquence dans cette partie de l'échelle, pour les applications aux arts, et l'on pourrait se servir de la formule, même dans cet intervalle. Quoique, par la nature du procédé expérimental que nous avons employé, les erreurs doivent être proportionnellement plus fortes pour les basses pressions, il n'est pas probable que la formule soit en défaut par cette cause; car on s'aperçoit que, pour des pressions plus petites qu'une atmosphère, la divergence augmente de plus en plus à mesure que l'on descend plus bas. Il paraît donc que l'emploi de la formule doit être restreint aux tensions supérieures à une atmosphère. On pourra continuer de se servir de celle de Tredgold jusqu'à 100° ou même 140°.

Ayant ainsi trouvé une formule très-simple qui s'accorde aussi parfaitement avec l'expérience, on peut s'en servir pour dresser la table qui faisait l'objet principal de ces recherches, et, comme le seul coëfficient qui y entre a été déterminé à l'aide du dernier terme de la série, on ne peut douter, en voyant sa coïncidence avec les termes précédents, qu'elle ne s'étende beaucoup au-delà sans erreur notable; nous sommes persuadés qu'à 50 atmosphères l'erreur ne serait pas d'un degré.

La table suivante renferme les températures calculées pour des pressions qui croissent par demi-atmosphères, depuis 1 jusqu'à 8, et, par atmosphères, de 8 à 24, où s'arrête l'observation, et, enfin, par 5 atmosphères, de 25 à 50, en supposant que la formule s'étende jusque-là.

TABLE des forces élastiques de la vapeur d'eau et des températures correspondantes de 1 à 24 atmosphères d'après l'observation, de 24 à 50 atmosphères, par le calcul.

ÉLASTICITÉ de la vapeur en prenant la pression de l'atmosphère pour unité.	COLONNE de mercure à 0°, qui mesure l'élasticité.	TEMPÉRATURES correspondantes données par le thermomèt. centigrade à mercure.	PRESSION sur un centimètre carré.
1	0.76	100°	1.033
$1\frac{1}{2}$	1.14	112.2	1.549
2	1.52	121.4	2.066
$2\frac{1}{2}$	1.90	128.8	2.582
3	2.28	135.1	3.099
$3\frac{1}{2}$	2.66	140.6	3.615
4	3.04	145.4 (1)	4.132
$4\frac{1}{2}$	3.42	149.06	4.648
5	3.80	153.08	5.165
$5\frac{1}{2}$	4.18	156.8	5.681
6	4.56	160.2	6.198
$6\frac{1}{2}$	4.94	163.48	6.714
7	5.32	166.5	7.231
$7\frac{1}{2}$	5.70	169.37	7.747
8	6.08	172.1	8.264
9	6.84	177.1	9.297
10	7.60	181.6	10.330
11	8.36	186.03	11.363
12	9.12	190.0	12.396
13	9.88	193.7	13.429
14	10.64	197.19	14.462
15	11.40	200.48	15.495
16	12.16	203.60	16.528
17	12.92	206.57	17.561
18	13.68	209.4	18.594
19	14.44	212.1	19.627
20	15.20	214.7	20.660
21	15.96	217.2	21.693
22	16.72	219.6	22.726
23	17.48	221.9	23.759
24	18.24	224.2	24.792
25	19 00	226.3	25.825
30	22.80	236.2	30.990
35	26.60	244.85	36.155
40	30.40	252.55	41.320
45	34.20	259.52	46.485
50	38.00	265.89	51.650

(1) Les températures qui correspondent aux tensions de 1 à 4 atm. inclusivement, ont été calculées par la formule de Tredgold qui, dans cette partie de l'échelle, s'accorde mieux que l'autre avec nos observations.

En résumé, l'Académie peut voir qu'il résulte des expériences que nous avons faites, M. Arago et moi, 1° la vérification de la loi de Mariotte jusqu'à 27 atmosphères; 2° une table des températures correspondant aux tensions de la vapeur qui n'excèdent pas 24 atmosphères. C'est cette table que l'administration réclamait pour l'exécution de l'ordonnance précédemment citée.

Ces recherches toujours pénibles et souvent dangereuses, auraient demandé plusieurs années de travaux assidus. Les interruptions que d'autres devoirs et des circonstances indépendantes de notre volonté nous ont forcés d'y mettre, en ont encore prolongé la durée. On ne pourrait, sans injustice, attribuer ce retard à notre négligence. Les personnes habituées aux grandes expériences de physique peuvent seules apprécier l'énormité de la tâche qui nous était imposée, à laquelle on ne trouverait rien de comparable dans nos archives, et qui a nécessité de notre part un dévouement que l'Académie n'aurait peut-être pas le droit d'exiger de chacun de ses membres. Toutefois, nous ne regretterons point le temps que nous y avons consacré, si l'Académie juge que nous avons rempli dignement la mission qu'elle nous avait confiée, et si, tout en répondant aux vœux du Gouvernement, les résultats que nous présentons sont considérés par les physiciens comme une acquisition utile à la science.

La Commission, ayant pris connaissance de ce travail, a l'honneur de proposer à l'Académie d'adresser à Son Excellence le Ministre de l'Intérieur, la présente relation des recherches entreprises d'après son invitation.

Fait à l'Institut, le 30 novembre 1829.

BARON DE PRONY, ARAGO, GIRARD, DULONG, *rapporteur*.

N. B. On trouvera, à la fin de ce volume, les tableaux des observations originales qui ont servi à calculer les résultats contenus dans ces recherches.

MÉMOIRE

SUR

LE POUVOIR THERMO-ÉLECTRIQUE DES MÉTAUX.

PAR M. BECQUEREL.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 3 août 1829.

§ I.

Des effets électriques produits dans une lame ou un fil de métal, pendant que l'on chauffe l'une de ses extrémités.

LA chaleur et l'électricité sont deux effets que l'on observe dans tous les phénomènes de la nature; lorsque l'un se manifeste, l'autre paraît ordinairement avec plus ou moins d'énergie. Leurs rapports mutuels sont donc indispensables pour la connaissance des propriétés physiques de tous les corps.

La plupart des physiciens du siècle dernier croyaient à l'identité de la chaleur et du fluide électrique, qu'ils appelaient le feu élémentaire. L'abbé Nollet s'exprimait ainsi (Leçons de physique, t. VI, p. 252) : L'observation vient ici à l'appui de l'expérience, et nous porte à croire de plus en plus que le feu, la lumière et l'électricité dépendent du même principe et ne sont que trois modifications différentes du même être. Ce n'est là qu'une hypothèse vague, fondée sur quelques faits, que l'on a voulu trop généraliser. Winterl précisa davantage les rapports immédiats qui peuvent exister entre la chaleur et l'électricité; car il conçut le premier l'idée que la chaleur était formée des deux principes de l'électricité. Cette conjecture ne fut appuyée d'aucune expérience propre à établir une théorie.

MM. Thenard et Hachette découvrirent qu'en faisant passer la décharge d'une pile voltaïque dans un fil métallique suffisamment fin, ce fil devenait incandescent jusqu'à la fusion.

Davy vint ensuite, et montra qu'en répétant l'expérience dans le vide avec deux morceaux de charbon en contact, fixés à chacun des pôles d'une forte pile, les éloignant successivement, l'intervalle compris entre eux devenait également incandescent. Ce fait important donna un degré de plus de vraisemblance à la manière de voir de Winterl.

M. Seebeck, en découvrant les courants thermo-électriques, a établi de nouveaux rapports entre la chaleur et le fluide électrique, rapports qui jusqu'à présent n'ont conduit à aucune découverte importante sur l'identité présumée de ces deux principes. Néanmoins, les faits qu'il a observés sont de nature à donner plus d'extension à la théorie de l'électricité.

M. Nobili, auquel la physique doit un grand nombre d'expériences ingénieuses et délicates, a envisagé la question d'une manière plus générale qu'on ne l'avait fait jusqu'à lui : il a cherché à prouver que tous les phénomènes électro-dynamiques sont dus au mouvement de la chaleur dans les corps conducteurs. Cette théorie est accompagnée d'observations importantes sur la question à laquelle elle se rattache. Dans l'état actuel de la science, il est bien difficile de se prononcer sur la nature de la chaleur et du fluide électrique, considérés comme provenant du même principe. Ce qu'il y a de mieux à faire, je crois, est de rechercher avec soin tous les rapports qui existent entre eux. En effet, de leur comparaison pourront résulter des notions importantes sur la cause qui les produit souvent simultanément. C'est la marche qui m'a paru la plus analytique.

Pour fixer de suite les idées sur une des causes qui produisent les phénomènes thermo-électriques, je pose le principe suivant, auquel j'ai été conduit par les expériences que je rapporterai ci-après. Quand un fil de métal, ou une suite a a' a'' etc., de molécules métalliques, liées entre elles par la force d'agrégation, est en contact, par une de ses extrémités a, avec une source de chaleur b, d'une nature quelconque, à l'instant où la chaleur commence à se propager, cette extrémité prend l'électricité positive, tandis que l'électricité négative est chassée dans tous les sens ; mais a' recevant de la chaleur de a, a'' de a' etc., il s'ensuit que la seconde molécule, qui s'échauffe aux dépens de la première, prend à celle-ci de l'électricité positive et lui donne de l'électricité négative, ainsi de suite pour les autres molécules. Dans le premier instant, on a donc une distribution de l'électricité semblable à celle qui est indiquée dans la fig. 1 ; dans le second instant, on aura pareillement l'état que représente la fig. 2, et ainsi de suite. Les électricités positives et négatives qui s'accumulent autour de chaque molécule, se recombinent continuellement ; pendant tout le temps de la propagation de la chaleur, il se forme donc une suite de décompositions et de recompositions de fluide neutre. D'après cela, comme l'électricité est en mouvement, le fil ou le système ne manifestera aucune électricité libre, tant qu'il sera isolé, ou du moins ne pourra manifester qu'un faible excès d'électricité négative, propre aux molécules extrêmes. Mais si, par un moyen quelconque, on lui enlève une des deux électricités, l'autre pourra être recueillie avec un condensateur.

Voici maintenant les faits sur lesquels cette théorie est établie :

On introduit un fil de platine, dans un tube de verre fermé à la lampe par une de ses extrémités, et l'on fait communiquer le bout libre de ce fil avec l'un des plateaux d'un condensateur de Volta, en évitant le contact des métaux hétérogènes; puis, au moyen d'une lampe à alcool ou d'un autre foyer de chaleur, on chauffe jusqu'au rouge la partie du tube qui est fermée; en général, on n'obtient aucun effet électrique résultant de l'élévation de température : cela se conçoit d'après ce que j'ai exposé plus haut. Mais si l'on enroule autour du bout du fil qui a été formé, un fil de platine, dont l'une des extrémités communique avec le sol, et que l'on chauffe fortement ce bout, de manière à le faire rougir, le fil de platine qui est dans l'intérieur du tube, acquiert un excès assez fort d'électricité positive. Ce fait prouve que l'électricité négative du fil extérieur, qui est repoussée vers la partie non chauffée, s'écoule dans le globe, tandis que l'électricité positive de celle que l'on a fait rougir, pénètre le tube de verre, dont la température est également très-élevée, et se rend sur le condensateur en suivant le fil intérieur. J'ai vérifié, avec l'appareil de M. Rousseau, que le verre qui a été chauffé à 80 ou 90 degrés et même au-dessous, devient conducteur de l'électricité, même pour de très-faibles tensions.

On ne peut attribuer l'effet dont je viens de parler, à l'une des deux électricités dégagées pendant la combustion de l'alcool; car le résultat est encore le même quand, après avoir fait rougir fortement le tube, on retire le foyer de chaleur et l'on prend entre les doigts le bout libre du fil de platine extérieur; seulement l'effet est moins marqué. Il faut donc admettre le phénomène tel que je l'ai expliqué, c'est-à-dire une suite de décompositions et de recompositions de fluide électrique, pendant le mouvement de la chaleur dans une barre de métal; mais ce mouvement, comment dégage-t-il de l'électricité? Est-ce par la vitesse de propagation ou de toute autre manière? C'est une question à laquelle on ne peut encore répondre : on doit se borner à étudier les phénomènes qui en résultent.

De plus, j'ai prouvé, il y a quelques années, que lorsqu'on élève la température de l'un des bouts d'un fil de platine et que l'on pose l'autre dessus, il s'établit dans le circuit un courant tel que le bout qui s'échauffe, prend à l'autre l'électricité positive, et que ce courant continue jusqu'à ce que l'égalité de température se soit établie entre les deux bouts. Ce fait que l'on avait attribué à une solution de continuité dans le circuit, est évidemment dû à ce qui se passe pendant la propagation de la chaleur; car le bout qui est chaud doit donner à l'autre l'électricité positive et en recevoir l'électricité contraire.

L'expérience suivante vient encore à l'appui de cette théorie.

Soit un circuit fermé a, b, c (fig. 3), formé d'un fil de platine dont les deux bouts ont été soudés avec le plus grand soin; toutes les parties peuvent être considérées alors comme homogènes. Si l'on élève la température de l'une d'elles, l'état d'équilibre de l'électricité ne sera pas troublé ; cela se conçoit, puisque la propagation de la chaleur se fait également à droite et à gauche des points chauffés ; mais si l'on fait un nœud en o, et que l'on porte le foyer de chaleur à peu de distance en F, il se produit aussitôt un courant électrique dont la direction indique que l'électricité positive va à gauche du point o. Ce résultat s'explique aisément ; en effet, le circuit ne présente pas de solution de continuité ; ainsi le phénomène doit provenir d'une différence dans la propagation ou le mouvement de la chaleur : or, le foyer étant en F, cette propagation se fait inégalement à droite et à gauche ; la partie F o, dont la température est portée continuellement au rouge, se refroidit plus vite à cause de la présence de la petite masse o, laquelle, s'échauffant, prend l'électricité positive ; le courant doit donc suivre la direction $a\ b\ c$ indiquée par la figure.

D'après cet exposé, il est assez naturel de supposer que, dans un circuit fermé, composé de deux fils ou barres de métal différent, si l'on élève la température de l'une de soudures, et si le mouvement de la chaleur ne se fait pas de la même manière dans chaque métal, à droite et à gauche des points de jonction, il en résultera des effets électriques, qui étant inégaux et dirigés en sens inverse, produiront un courant électrique dont l'intensité sera égale à leur différence. C'est ce que je vais démontrer dans les phénomènes thermo-électriques découverts par M. Seebeck.

§ II.

De la cause des courants thermo-électriques dans les circuits formés de métaux différents.

Dans un circuit fermé $cac'b$ (fig. 4), formé de deux fils, l'un de fer, l'autre de cuivre, soudés en c et c', si l'on maintient le point c et les points adjacents, à droite et à gauche, à une température constante mais plus élevée que celle de c', en passant la partie oco', dans un tube de verre recourbé, qui plonge dans un bain de mercure, on a un courant qui suit la direction cab, et dont l'intensité est la même, tant qu'il n'y a pas de variations dans la température. Une différence de température dans les parties de chaque métal qui avoisinent les points de jonction, n'est pas la cause qui influe sur la production des phénomènes thermo-électriques; car si l'on porte le foyer de chaleur en o ou en o', la chaleur ne tarde pas à gagner le point c, et le courant va toujours dans le même sens, quoique ce soit, tantôt le fer, tantôt le cuivre qui ait la température la plus élevée. Il est probable que le rayonnement de la chaleur du cuivre au fer et du fer au cuivre au contact des deux fils, est une des causes qui agissent avec le plus d'efficacité pour produire le courant.

Il est facile, en outre, de démontrer que ce courant est dû au mouvement de la chaleur d'un métal dans l'autre, et non à des effets chimiques, résultant de l'action de l'oxigène sur les métaux. On prend une cloche de verre, dans laquelle on pratique deux ouvertures latérales; à chacune d'elles on fixe avec du mastic un double crochet en platine, lesquels communiquent intérieurement l'un et l'autre avec les bouts d'un fil formé de deux autres, platine et or, ou platine et fer, et extérieurement avec les extrémités du fil d'un multiplicateur; puis on fait le vide sous la cloche et l'on y introduit du gaz hydrogène bien sec. Ces dispositions faites, on élève la température des points de jonction platine et or ou platine et fer avec une lentille sur laquelle on fait tomber des rayons solaires. Il se développe aussitôt un courant électrique, absolument semblable à celui que l'on obtient dans l'air, et pour la direction, et pour l'intensité; ainsi les altérations produites dans les métaux par l'oxigène, n'ont aucune influence sur la manifestation des courants thermo-électriques qui sont dûs seulement à la différence des mouvements de la chaleur, quand elle passe d'une surface sur une autre. Pour prouver ce dernier point, il faut mesurer avec exactitude l'intensité de chaque courant, et voir si elle n'est pas soumise à une certaine loi. J'ai commencé par construire une table qui donne avec exactitude les rapports entre les déviations de l'aiguille aimantée dans un galvanomètre, et les intensités correspondantes du courant. La marche que j'ai suivie est la même que celle indiquée dans un de mes précédents Mémoires. Voici cette table. (Annales de chimie et de physique, T. XXXI, p. 371).

DÉVIATIONS de l'aiguille AIMANTÉE.	INTENSITÉS du courant ÉLECTRIQUE.	DÉVIATIONS de l'aiguille AIMANTÉE.	INTENSITÉS du courant ÉLECTRIQUE.
1.....	 0,50	28.....	20
2.....	 1	29.....	21
3.....	 1,50	30.....	22,65
4.....	 2	31.....	23,92
5.....	 2,50	32.....	25,20
6.....	 3	33.....	26,20
7.....	 3,50	34.....	27,20
8.....	 4	35.....	28,74
9.....	 4,5	36.....	30,28
10.....	 5	37.....	32,12
11.....	 5,55	38.....	34,14
12.....	 6,10	39.....	36,07
13.....	 6,62	40.....	38
14.....	 7,15	41.....	40,70
15.....	 7,85	42.....	43,40
16.....	 8,55	43.....	46,47
17.....	 9,27	44.....	49,55
18.....	10,00	45.....	51,59
19.....	10,85	46.....	53,63
20.....	11,70	47.....	56,77
21.....	12,50	48.....	59,92
22.....	13,30	49.....	63,96
23.....	14,22	50.....	68
24.....	15,14	51.....	72
25.....	16,35	52.....	
26.....	17,57	53.....	
27.....	18,78		

J'ai soudé, par un de leurs bouts, un fil de platine et un fil de fer, dont les deux autres communiquaient avec les extrémités du fil de cuivre du galvanomètre. Les soudures ayant été mises dans la glace fondante, excepté celle où le fer et le platine se réunissaient, on a élevé successivement la température de cette dernière; des circuits formés avec d'autres métaux ont été soumis à la même expérience, et l'on a obtenu les résultats suivants:

MÉTAUX qui composent LE CIRCUIT.	TEMPÉRATURE de l'une des SOUDURES.	DÉVIATIONS de l'aiguille AIMANTÉE.	INTENSITÉS du COURANT.	INTENSITÉS CALCULÉES.
Fer et argent...	40	52	76	76
	30	45	56,76	57
	20	40	38	38
	10	27	18,80	19
Fer et cuivre...	40	»	»	80
	30	48	59,92	60
	20	41	40,70	40
	10	28	20	20
Cuivre et platine.	40	41	40,40	40
	30	36	30,28	30
	20	28	20	20
	10	18	10	10
Argent et étain..	40	»	»	»
	30	48	59,92	60
	20	41	40,70	40
	10	28	20	20
Cuivre et étain..	40	34	27,20	26,84
	30	28	20	20,13
	20	22	13,30	13,42
	10	13	6,60	6,71

On voit que si, dans ces divers circuits, on élève successivement la température d'une des soudures depuis zéro jusqu'à

40°, tandis que les autres restent à zéro, l'intensité du courant électrique croît en raison de la température, c'est-à-dire que pour une température double, l'intensité du courant est double.

J'ai déja fait voir, dans un précédent Mémoire, que plusieurs métaux, ceux surtout dont le terme de fusion était très-éloigné, jouissaient de la même propriété; mais je n'avais pas démontré qu'elle s'appliquait à tous les métaux pour des températures au-dessous de 50°. Les appareils n'avaient pas alors le degré de sensibilité qu'on leur a donné depuis, et qui permet maintenant d'apercevoir des rapports qu'on ne pouvait trouver avant. Quant à ceux qui existent entre les intensités des courants produits par le contact de divers métaux pour la même température, les premières expériences que j'ai faites pour y parvenir ont été sans succès. Je me bornai à former des circuits et à déterminer rigoureusement l'intensité du courant, provenant de l'élévation de température à telle ou telle soudure. Toutes les fois que je changeais de circuit, les résultats cessaient d'être comparables; je ne tardai pas à en découvrir la cause : chaque circuit ne possédait pas le même pouvoir conducteur, à cause de la différence de grosseur et de longueur des fils métalliques, et de la nature de ces derniers. Je crus obvier à cet inconvénient en donnant aux fils les dimensions convenables; mais je n'atteignis pas encore le but; enfin, j'essayai si la perte que le courant éprouvait en passant d'un métal dans un autre, et qui variait suivant la nature de chacun d'eux, et par conséquent suivant chaque circuit, n'était pas un obstacle à la manifestation de la loi que je cherchais. Cette conjecture s'est vérifiée. Pour que la perte fût constamment la même dans toutes les expériences, je composai un circuit de tous les métaux dont je voulais déterminer le pouvoir thermo-électrique. En ne changeant pas de circuit, la conductibilité se trouvait être toujours la même, et les résultats devenaient comparables. Toutes les soudures étaient à la température de zéro, excepté une seule que je plaçais dans une source de chaleur, suivant la méthode que j'ai déja indiquée. Le tableau suivant renferme les divers résultats que j'ai obtenus.

Circuit N° 1.

DÉSIGNATIONS des SOUDURES.	TEMPÉRATURE de la soudure soumise à l'expérience.	DÉVIATIONS correspondantes de l'aiguille aimantée.	INTENSITÉS du courant électrique.
$\overset{+}{\text{Fer}}$ $\overset{-}{\text{étain}}$	20	36,50	31,24
$\overset{+}{\text{Cuivre}}$ $\overset{-}{\text{platine}}$	20	16,00	8,55
$\overset{+}{\text{Fer}}$ $\overset{-}{\text{cuivre}}$	20	34,50	27,96
$\overset{+}{\text{Argent}}$ $\overset{-}{\text{cuivre}}$	20	4,00	2
$\overset{+}{\text{Fer}}$ $\overset{-}{\text{argent}}$	20	33	16,20
$\overset{+}{\text{Fer}}$ $\overset{-}{\text{platine}}$	20	39	36,07
$\overset{+}{\text{Cuivre}}$ $\overset{-}{\text{étain}}$	20	7	3,50
$\overset{+}{\text{Zinc}}$ $\overset{-}{\text{cuivre}}$	20	2	1
$\overset{+}{\text{Argent}}$ $\overset{-}{\text{or}}$	20	1	0,50

A l'inspection de ce tableau, on voit sur-le-champ que pour une température donnée de 20°, par exemple, chaque métal acquiert une puissance ou action thermo-électrique, telle que l'intensité du courant électrique que l'on obtient par l'élévation de température d'une soudure, est égale à la différence des quantités qui représentent chacune de ces actions dans chaque métal. Par exemple, pour le fer et le cuivre, en désignant par P cette action ou cette puissance, on a P fer — P cuivre = 27, 96 pour l'intensité du courant, lorsqu'on élève la soudure fer, cuivre à 20°; de même pour le platine et le fer P fer — P platine = 36, 07. En retranchant la première de la seconde, on a P cuivre — P platine = 8, 11: or, l'expérience donne 8, 55, qui en diffère peu. La soudure fer, étain, donne 31,24; celle cuivre étain 3,50; la différence fer-cuivre est donc 27, 74 au lieu de 27,96 que donne l'expérience. Il est donc bien démontré que l'intensité d'un courant thermo-électrique est égale à la différence des actions thermo-électriques produites dans chaque métal par la même température : mais quel est ce genre d'action? quoiqu'il soit difficile d'y répondre, on entrevoit néanmoins la cause qui peut la produire. En effet, on a, en représentant la puissance ou action thermo-électrique du fer à 20° par x,

P. fer..........	x
P. argent........	$x - 26{,}20$
P. or...........	$x - 26{,}70$
P. zinc.........	$x - 26{,}96$
P. cuivre.......	$x - 27{,}96$
P. étain........	$x - 31{,}24$
P. platine......	$x - 36.$

Dans cet arrangement, chaque métal est positif, par rapport à ceux qui le suivent, et négatif par rapport à ceux qui le précèdent.

Si x était connu, le pouvoir thermo-électrique de chaque métal s'en déduirait, mais comme le fer est positif par rapport aux métaux ci-dessus mentionnés, on doit en conclure que sa valeur est supérieure à 36. De plus, on sait que l'or, l'argent, le zinc et même le cuivre ont des pouvoirs à peu-près égaux, puisqu'ils diffèrent de celui du fer de 28, 20; 26, 70; 26, 96; 27, 96. Or, quand on cherche, parmi les propriétés calorifiques, celles qui sont sensiblement les mêmes pour ces quatre métaux, on ne voit que le pouvoir rayonnant qui s'y rapporte. Il faudrait donc admettre que dans le contact de deux métaux différents, le rayonnement de chaque surface est le même que celui qui a lieu dans l'air, et que la différence des pouvoirs rayonnants détermine et le sens et l'intensité du courant; dans cette supposition rien n'est plus facile que de déterminer x, car alors on a, d'après la table formée par M. Leslie :

$$x : x - 26{,}70 :: 15 : 12.$$

15 et 12 sont les pouvoirs rayonnants du fer et de l'or. Il est facile ensuite de trouver les valeurs relatives aux métaux.

P. fer.......	133,50
P. argent....	107,30
P. or.......	106,80
zinc......	106,54
cuivre....	105,54
étain.....	102,26
platine...	97,50

Ces valeurs se rapportent à une conductibilité électrique donnée; car, si l'on changeait le circuit, les nombres ci-dessus ne seraient plus les mêmes; mais rien n'est plus aisé que d'obvier à cet inconvénient. La valeur P fer — P cuivre est proportionnelle à la température et au pouvoir conducteur du circuit ; si donc l'on représente cette différence par δ pour un circuit dont le pouvoir conducteur électrique est 1 et la température 1, on aura pour un pouvoir m et une température t.

$$\text{P.fer} - \text{P cuivre} = m t \delta ;$$

de même :

$$\text{P.fer} - \text{P platine} = m t \delta',$$

ainsi de suite, etc.

Il résulte de là que le rapport $\frac{m t \delta}{m t \delta'} = \frac{\delta}{\delta'}$ est indépendant du pouvoir conducteur du circuit et de la température. Il est encore de même pour un circuit quelconque, en employant une température t' et un pouvoir conducteur m', car le facteur m', t' disparaît. L'expérience vérifie complètement ce résultat théorique, comme on peut le voir ci-après.

Circuit 2.

DÉSIGNATIONS des SOUDURES.	TEMPÉRATURE de la soudure soumise à l'expérience.	DÉVIATIONS de l'aiguille aimantée.	INTENSITÉS du courant électrique.
$\overset{+}{\text{Fer}}$ $\overset{-}{\text{platine}}$	20	43	46,50
$\overset{+}{\text{Fer}}$ $\overset{-}{\text{cuivre}}$	20	39,50	35,18
$\overset{+}{\text{Cuivre}}$ $\overset{-}{\text{platine}}$	20	20	11,70
$\overset{+}{\text{Cuivre}}$ $\overset{-}{\text{plomb}}$	20	7,50	3,75

Circuit 3.

DÉSIGNATIONS des SOUDURES.	TEMPÉRATURE de la SOUDURE.	DÉVIATIONS de l'aiguille aimantée.	INTENSITÉS du COURANT.
$\overset{+}{\text{F}}$er $\overset{-}{\text{cuivre}}$.....	....20....	...40......	...38
$\overset{+}{\text{F}}$er $\overset{-}{\text{platine}}$.....	....20....	...44,75..	...51
$\overset{+}{\text{Cuivre}}$ $\overset{-}{\text{platine}}$..	....20....	...22......	...13,30

Dans le circuit n° 1, on trouve $\frac{\text{P. fer} - \text{P. platine}}{\text{P. fer} - \text{P. cuivre}} = \frac{36,07}{27,96} = 1,29$

Dans le circuit n° 2......... $\frac{\text{P}'.\text{fer} - \text{P}'.\text{platine}}{\text{P}'.\text{fer} - \text{P}'.\text{cuivre}} = \frac{46,50}{35,18} = 1,32$

Dans le circuit n° 3......... $\frac{\text{P}''.\text{fer} - \text{P}''.\text{platine}}{\text{P}''.\text{fer} - \text{P}''.\text{cuivre}} = \frac{51}{38} = 1,34$

Ces rapports sont sensiblement égaux, comme l'indique la théorie; car les légères différences qui existent entre eux sont dans la limite des erreurs que l'on peut commettre en mesurant des phénomènes aussi délicats que ceux qui font l'objet de ce mémoire.

La moyenne de ces trois nombres 1,32, est le rapport des différences fer-platine et fer-cuivre pour un pouvoir conducteur quelconque et une température aussi quelconque, mais inférieure à 50°. En faisant P. fer — P. cuivre = 1, et adoptant encore le rapport $\frac{\text{P fer}}{\text{P cuivre}} = \frac{15}{12}$, on aura

Métaux	Pouvoirs thermo-électriques.
P. fer	5
P. argent	4,07
P. or	4,052
P. zinc	4,035
P. cuivre	4
P. étain	3,89
P. platine	3,68

Ces valeurs seront les mêmes pour un circuit quelconque et pour tous les cas où les différences entre les pouvoirs thermo-électriques des métaux croissent comme les températures; ce qui a lieu pour celles qui sont au-dessous de 50°, et dans la supposition où ces pouvoirs seraient proportionnels aux pouvoirs rayonnants des métaux. C'est en faisant de nouvelles expériences qu'on pourra voir jusqu'à quel point est exacte cette hypothèse, basée sur un fait qui paraît fondamental. Dans le cas où elle ne le serait pas, on aurait toujours pour les pouvoirs thermo-électriques :

P. fer	$=x$
P. argent	$=x-0{,}93$
P. or	$=x-0{,}948$
P. zinc	$=x-0{,}965$
P. cuivre	$=x-1$
P. étain	$=x-1{,}11$
P. platine	$=x-1{,}32$

Toutes ces valeurs sont indépendantes du plus ou moins de chaleur, et du refroidissement dans l'air de la partie des fils ou barres située au dehors de la source de chaleur. Il suffit, pour le prouver, de former un circuit de plusieurs fils alternatifs de fer et de cuivre, n'ayant pas les mêmes dimensions en longueur et en grosseur, et d'élever successivement la température de chaque soudure au même degré, toutes les autres étant à zéro, et de voir quelles sont les intensités des courants. L'expérience montre que ces intensités sont égales Je me borne à rapporter les expériences faites avec un seul circuit.

DIMENSIONS DES FILS FORMANT UN MÊME CIRCUIT.	TEMPÉRATURES des SOUDURES.	DÉVIATIONS de l'aiguille AIMANTÉE.
Fer, long. 3 décim., diam. 3 mill....... Platine, long. 1 décim., diam. 3 mill....	....15....	14
Fer, long. 1 décim. diam. 3 mill........ Platine, long. 1 décim., diam. 1 mill....	....15....	14
Fer, long. 3 décim., diam. 1 mill....... Platine, long. 3 décim., diam. 1 mill....	....15....	14
Fer, long. 3 décim., diam. $\frac{1}{5}$ de mill..... Platine, long. 3 décim., diam. $\frac{1}{5}$ de mill..	....15....	14
Fer, long. 3 décim., diam. $\frac{1}{5}$ de mill..... Platine, long. 3 décim., diam. $\frac{1}{10}$ de mill.	....15....	14

On peut objecter à cette permanence dans l'égalité de l'intensité des courants, que la conductibilité du circuit étant diminuée par la présence de fils très-fins de platine et de fer, il ne passe plus alors qu'un courant d'une certaine intensité, et qu'au-delà aucun accroissement ne saurait être rendu sensible; à cela on répond que s'il en était ainsi, on devrait trouver une certaine température inférieure à 50°, passé laquelle le courant n'augmente plus, et comme cette circonstance ne se présente pas, puisque l'intensité augmente comme la température, il faut donc admettre que pour la même conductibilité électrique et la même température inférieure à 50°, l'intensité du courant est indépendante de la longueur et du diamètre des fils.

On peut vérifier, avec les résultats précédents, le fait bien connu, que lorsque la température est la même dans toutes les parties d'un circuit composé de fils de différents métaux, le courant est nul, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de développement d'électricité. Il faut, pour cela, que la somme des nombres qui représentent l'intensité des courants, pris chacun avec leurs signes, soit égale à zéro.

Je prends le circuit fer, platine, argent, cuivre, et j'affecte du signe + le nombre qui représente l'intensité du courant qui va à droite, et du signe — celui relatif au courant qui suit une direction opposée; on aura, en représentant les points de jonction des métaux par *a, b, c, d*, et par A, B, C, D, les intensités des courants dans les mêmes points.

$$B = +0,39 \quad A = -1,32$$
$$D = +1,00 \quad C = -0,07.$$

Or, comme la somme $A+B+C+D=0$, le courant doit être nul; dans tout autre circuit, on trouve la même chose. Cet accord entre les résultats de l'expérience justifie leur exactitude.

Dans un autre Mémoire, je ferai connaître les pouvoirs thermo-électriques des métaux pour des températures au-dessus de 50°. Les résultats que j'ai déja obtenus pour quelques uns, entre autres pour l'or et l'argent, et que je ne rapporte pas ici, dans la crainte d'abuser trop long-temps des moments de l'Académie, donneront plus d'extension encore à la théorie que j'ai exposée précédemment. Je ne terminerai pas sans tirer quelques conséquences des faits qui ont été l'objet de ce Mémoire.

Il est généralement admis que lorsqu'une barre métallique plonge, par un de ses bouts, dans un milieu plus chaud que l'air environnant, chaque point infiniment petit de cette barre reçoit de la chaleur par le contact du point qui précède, et en communique à celui qui le suit; qu'un même point est influencé, non-seulement par ceux qui le touchent, mais encore par ceux qui l'avoisinent à une petite distance, en avant et en arrière, de manière qu'il se produit, dans l'intérieur de la barre, un véritable rayonnement de molécule à molécule; d'où il résulte que chaque point intérieur du corps communique de la chaleur à tous ceux qui l'environnent à une petite distance, et en reçoit deux. L'excès de cette seconde quantité sur la première détermine la quantité dont sa température propre s'accroît à chaque instant.

Les actions électriques observées pendant la propagation de la chaleur dans une barre métallique, produisent des effets analogues. Si l'on considère, par exemple, une molécule de cette barre, recevant successivement de la chaleur et en communiquant aux molécules voisines, les électricités positives et négatives qui l'entourent exercent des actions attractives et répulsives sur les électricités des molécules situées à peu de distance. Ainsi, tant qu'il y a rayonnement de chaleur d'une molécule à une autre, il y a pareillement actions électriques à distance. deux effets qui ont de l'analogie ensemble et qui concourent à établir un nouveau rapport entre la chaleur et le fluide électrique. Les effets électriques qui ont lieu pendant l'échauffement et le refroidissement des corps, font naître plusieurs conjectures, que je ne dois pas passer sous silence. Une partie de l'électricité atmosphérique ne serait-elle pas due à une cause semblable ?

Considérons un instant une portion de l'atmosphère dans un calme parfait et ayant partout la même température, l'état d'équilibre de son électricité ne saurait être troublé ; mais si, par une cause quelconque, il survient un courant d'air plus froid, qui pénètre cette portion, celle-ci se refroidira, prendra l'électricité négative et l'autre l'électricité positive. Le contact des molécules étant de peu de durée en raison de la vitesse du courant, chacune d'elles devra conserver une partie de l'électricité qui s'est dégagée pendant le changement de température. Si les portions qui se sont refroidies renferment des vapeurs aqueuses, elles se condenseront, s'empareront de l'électricité, et formeront un nuage chargé d'électricité négative. Dans le cas où l'air froid contient aussi des vapeurs, on a un nuage possédant l'électricité positive.

On a observé qu'en général l'air qui est à une certaine distance des maisons et des arbres possède l'électricité positive dans les temps froids et sereins ; cela se conçoit, car l'air froid, qui se trouve en contact avec la terre, après s'être échauffé à ses dépens, s'élève en raison d'une pesanteur spécifique moindre, et emporte avec lui l'électricité positive qu'il a prise pendant son réchauffement.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les conséquences que l'on peut tirer des faits consignés dans ce Mémoire, lesquels faits sont de nature à établir de nouveaux rapports entre la chaleur et le fluide électrique. Des recherches ultérieures préciseront ces rapports, et fourniront probablement des éléments utiles à la théorie de la chaleur.

MÉMOIRE

SUR

LES SULFURES, IODURES, BROMURES, ETC., MÉTALLIQUES.

PAR M. BECQUEREL.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 26 octobre 1829.

L'OBSERVATEUR qui cherche à se rendre compte de quelle manière ont pu s'opérer la production et la cristallisation de la plupart des substances que renferment les filons et quelques-unes des formations dont se compose la couche superficielle de notre globe, reconnaît aisément que l'une et l'autre ont dû s'effectuer au moment où les masses se trouvaient dans un état pâteux, favorable à l'accroissement des cristaux, puisque les molécules ne pouvaient arriver que lentement vers les premiers rudiments de cristaux formés.

L'inspection seule des nombreuses géodes de quartz et de chaux carbonatée fermées de toutes parts, et renfermant dans leur intérieur des cristaux de diverses substances, dont les formes ont subi une dépression semblable à celle qui aurait eu lieu si elles avaient été comprimées par le poids des masses environnantes, porte à croire que des infiltrations lentes de composés différents, à travers des masses dans un état pâteux, ont pu produire des réactions particulières et des grouppements réguliers de molécules, que l'on n'obtient pas toujours par les opérations ordinaires de la chimie, dans lesquelles on ne dispose pas du temps comme dans la nature. Telle est l'idée qu'on peut se faire du mode de production de quelques-unes des substances que l'on trouve dans le sein de la terre. J'ai pensé que des recherches propres à appuyer cette théorie de faits positifs, devaient fournir des documents utiles à la géologie. En général, dans tous les phénomènes les causes n'excitent pas moins d'intérêt que les effets qui en découlent. Les causes premières nous seront à jamais inconnues, mais les causes secondaires, celles qui naissent de forces physiques, dont nous pouvons calculer les actions, rentrent dans le domaine de la philosophie, et sont livrées par conséquent à nos investigations.

Dans l'un de mes précédents Mémoires, j'ai montré l'usage que l'on peut faire de l'emploi de forces électriques à petites tensions, pour obtenir cristallisés des oxides métalliques et diverses espèces de combinaisons chimiques. Je vais prouver maintenant, par des faits incontestables, que les mêmes forces servent à produire d'autres composés analogues à ceux que l'on trouve dans la terre, et, en raison de la simplicité et de la généralité du principe employé, je rendrai probable la conjecture que la nature a pu employer un moyen semblable pour former les mêmes substances.

La première question à résoudre est celle-ci : Les substances minérales qui existent dans les filons ont-elles été dissoutes primitivement dans un liquide qui, en disparaissant lentement, a permis aux molécules de s'arranger suivant les lois de la cristallisation, ou bien proviennent-elles de la décomposition lente de certaines combinaisons peu solubles, dans lesquelles elles entraient comme parties constituantes? Les résultats consignés dans ce Mémoire contribueront, je crois, à jeter quelque jour sur cette question. Avant de les exposer, il est nécessaire d'indiquer les moyens de les obtenir : il suffit pour cela de faire quelques modifications aux appareils que j'ai déja fait connaître. Soient (fig.5) $a\,b$, $a'\,b'$ deux petits tubes ouverts, chacun par les deux bouts, et remplis dans leur partie inférieure, jusqu'en c et c', d'argile très-fine, légèrement humectée d'un liquide conducteur de l'électricité; dans leur partie supérieure, on verse jusqu'en d et d' les liquides dont la réaction l'un sur l'autre et sur la lame $m\,l\,m'$, formée d'un seul métal ou de deux métaux, suivant le cas, donne naissance aux effets électriques qui produisent le composé que l'on cherche. Les deux tubes sont placés dans un autre P Q, contenant un liquide ss', qui est destiné à établir la communication électrique dans l'appareil.

L'argile sert ici à retarder, autant que possible, le mélange des liquides renfermés dans les deux petits tubes, et comme chacun de ces liquides se mêle préalablement avec celui du grand tube, il est facile de constater par l'expérience, que ces différents mélanges ne s'opèrent pas dans le temps qui est nécessaire pour que la formation des composés puisse avoir lieu; c'est là le point essentiel. L'appareil ainsi disposé, suffit dans un grand nombre de cas, comme on va le voir.

Des sulfures métalliques cristallisés.

On trouve dans la terre treize sulfures métalliques qui souvent sont cristallisés, tandis que l'art ne peut les obtenir qu'amorphes, soit en décomposant les sulfates par le charbon à une haute température, soit par l'action du soufre sur les métaux à l'aide de la chaleur, soit par celle des hydrosulfates alcalins sur les dissolutions métalliques, modes de formation trop prompts pour que les molécules aient le temps de se grouper suivant les lois de la cristallisation. D'après cela, pour obtenir ces composés cristallisés, il faut suivre une autre marche.

Les sulfures naturels sont, les sulfures de zinc, de fer, de manganèse, d'étain, d'arsenic, de molybdène, d'antimoine, de bismuth, de cuivre, de plomb, d'argent et de cobalt. Les sulfures n'ont aucune espèce d'action à froid sur le gaz oxigène bien sec; mais ceux dont les métaux sont très-oxidables en ont une sur le gaz humide, ils l'absorbent très-lentement et se changent en sulfates ou en sulfites. De plus, lorsqu'un métal est capable de décomposer l'eau à la température ordinaire, son sulfure la décompose également à cette même température.

Les métaux attaqués par l'acide nitrique lorsqu'ils sont isolés, le sont presque tous lorsqu'ils sont unis au soufre. Il en résulte un oxide métallique, de l'oxide d'azote et de l'acide sulfurique, qui se combine en tout ou en partie avec l'oxide métallique. Telles sont les principales propriétés des sulfures qui vont servir, avec l'action des forces électro-chimiques, à obtenir cristallisés ces composés.

Sulfure d'argent.

Voici le procédé que j'ai suivi pour obtenir ce sulfure : on verse dans le tube *a* une dissolution saturée de nitrate d'argent, et dans le tube *a'* une dissolution d'hypo-sulfite de potasse, obtenue par la décomposition à l'air du sulfure de potassium; puis l'on plonge, dans chacune d'elles, l'un des bouts d'un fil ou d'une lame d'argent pur. Peu à peu le nitrate d'argent est décomposé en raison d'actions électriques connues; le bout de fil qui plonge dans la dissolution du nitrate d'argent étant le pôle négatif, se recouvre d'argent à l'état métallique, tandis que l'oxigène et l'acide nitrique se portent de l'autre côté, où ils concourent à la formation d'un double hypo-sulfite d'argent et de potasse, qui cristallise en beaux prismes; mais l'oxigène et l'acide continuant à arriver, cette combinaison ne tarde pas à être décomposée : il se forme du sulfate de potasse et du sulfure d'argent qui reste intact, tant que l'acide nitrique n'est pas en quantité suffisante pour réagir sur lui. Pendant cette action, une partie du liquide s'évapore, et il ne reste plus au fond du tube, au-dessus de l'argile, qu'une matière pâteuse, au milieu de laquelle le sulfure d'argent cristallise en jolis petits cristaux octaèdres, non-seulement sur la lame d'argent, mais encore sur la parois du tube.

Ces cristaux ont le même aspect que ceux de la même substance que l'on trouve dans les mines d'argent : comme eux, ils s'étendent légèrement sous le marteau; leur couleur est gris de plomb, et leur surface extérieure est terne. La ressemblance est telle, que les cristaux artificiels ne peuvent être en rien distingués des cristaux naturels. L'action de l'air concourt à la décomposition du double sulfure, en fournissant de l'oxigène au soufre et au potassium.

La cristallisation du sulfure d'argent est due à ce que l'action étant très-lente, les molécules ont le temps d'effectuer le mouvement d'oscillation nécessaire pour que les faces similaires puissent réagir les unes sur les autres en vertu des lois de la cristallisation. Il semblerait qu'on eût dû obtenir un sulfite au lieu du sulfure d'argent; mais il paraît que le pôle positif, dans cette circonstance, exerce sa faculté réductive sur l'oxide d'argent et l'acide hypo-sulfureux, comme j'ai eu occasion de le remarquer dans des cas à peu près semblables. On n'obtient rien de semblable avec une dissolution de sulfure de potassium. Dans ce cas les résultats de l'expérience sont du sulfate de potasse et du sulfate d'argent.

Sulfure de cuivre.

Si le principe à l'aide duquel on parvient à former le sulfure d'argent est général, on doit l'appliquer aux autres sulfures métalliques. Effectivement, si l'on remplace la dissolution de nitrate d'argent dans le tube *a*, par celle de nitrate de cuivre, et la lame d'argent par une lame de cuivre, il ne tarde pas à se former, dans le tube *a'*, un double hypo-sulfite de cuivre et de potassium qui cristallise en aiguilles soyeuses très-fines. Peu à peu ce double sulfure se décompose, et l'on finit par obtenir sur la lame de cuivre des cristaux aplatis à faces triangulaires de deux millimètres de longueur.

Ces cristaux sont d'un gris métallique et quelques-uns nuancés de bleuâtre; leur poussière est noirâtre. Ils se dissolvent dans l'ammoniaque qu'ils colorent en bleu, et il est facile de reconnaître qu'ils ne sont composés que de soufre et de cuivre. Ces caractères sont les mêmes que ceux qui conviennent au sulfure de cuivre naturel. L'analyse fera connaître les quantités relatives de métal et de soufre qui entrent dans ce composé.

De l'oxi-sulfure d'antimoine ou kermès.

On trouve dans la nature un antimoine hydro-sulfuré d'un rouge sombre, qui se présente en masses granuleuses ou sous la forme aciculaire. Pour préparer le kermès par la méthode électro-chimique exposée précédemment, on se sert des mêmes liquides que dans l'expérience précédente et l'on établit la communication entre les deux tubes, au moyen d'un arc composé de deux lames cuivre et antimoine. Le bout-cuivre qui plonge dans le nitrate, étant le pôle négatif, attire le cuivre à l'état métallique, tandis que le bout antimoine, ainsi que les parois du tube se recouvrent d'un précipité brun rouge. Quelque temps après, il se forme sur l'antimoine des petits cristaux octaèdres rouges et des lames cristallisées de même nature que le précipité. Ces cristaux sont solubles dans l'hydro-sulfate neutre de potasse, et laissent dégager de l'hydrogène sulfuré par l'action de l'acide hydro-chlorique dans lequel ils se dissolvent : les alcalis les rendent jaunes. Tous ces caractères conviennent au kermès proprement dit : c'est la première fois qu'on a obtenu cette substance dans un état cristallisé. Comme la théorie de sa formation est la même que celle du sulfure d'argent, je n'en parlerai pas ; l'analyse fera connaître au juste sa composition.

Des sulfures d'étain, de plomb et de mercure.

En suivant la même marche que précédemment, on peut obtenir le sulfure d'étain en très-petits cristaux cubiques d'un blanc brillant métallique ; jusqu'à présent cette substance ne s'est présentée dans la nature que dans un état amorphe.

Les expériences relatives à la production des sulfures de plomb et de mercure n'étant pas encore terminées, je ne puis dire quel en sera le résultat; mais il est probable qu'il sera conforme à la théorie que j'ai exposée, si l'on prend les précautions convenables, pour ne pas opérer trop rapidement la décomposition des doubles hypo-sulfites.

Des sulfures de fer et de zinc.

Ces sulfures, qui sont facilement décomposables par le contact simultané de l'eau et de l'air, doivent être plus difficiles à former que les précédents: aussi ne peut-on espérer de réussir qu'en fermant hermétiquement le bout du tube qui contient l'hypo-sulfite alcalin; encore ce moyen ne suffit-il pas toujours. Je suis parvenu, cependant, deux fois à obtenir, sur la lame de fer qui se trouvait dans l'hypo-sulfite de potasse, une multitude de petits cristaux cubiques de fer sulfuré, d'une couleur jaune, semblables à ceux des pyrites que l'on trouve dans la nature. Quant au sulfure de zinc, je ne l'ai pas encore obtenu; mais tout porte à croire qu'en modifiant convenablement les appareils, on pourra le former. Par un autre procédé que je ne décrits pas ici, je suis parvenu à former un grand nombre de pyrites dodécaëdres, dont plusieurs ont des faces de un à deux millimètres.

D'après l'exposé que je viens de présenter, il est permis de croire que la nature a pu suivre quelquefois une marche semblable pour produire les sulfures que nous trouvons dans certains filons.

Le sulfure d'argent, par exemple, s'y rencontre combiné, tantôt avec le sulfure d'antimoine, tantôt avec celui d'arsenic ou de plomb, c'est-à-dire avec les sulfures des métaux électro-positifs qui ne décomposent pas l'eau. Ces combinaisons n'ont dû éprouver, par conséquent, aucune action de la part de l'air, et sont restées dans l'état où elles étaient à l'époque de leur formation; mais il n'en a pas été de même des doubles sulfures d'argent et de potassium ou de sodium, qui se sont formés, sans doute, à l'époque de la consolidation des grandes masses; les alcalis ne faisant pas alors partie des végétaux qui n'existaient pas, durent entrer dans un grand nombre de composés où se trouvait également le soufre, comme eux répandu très-abondamment dans la nature. Une décomposition lente a dû commencer, et il en sera résulté de l'argent sulfuré cristallisé.

Les mêmes réflexions s'appliquent aux autres sulfures métalliques, même à ceux de zinc et de fer qui auront pu être formés hors du contact de l'air, et sous l'influence de forces analogues à celles que l'on développe dans les appareils électro-chimiques.

Le facies des sulfures métalliques, formés par le procédé que j'ai décrit, est tellement semblable à celui des sulfures naturels, tant sous le rapport des formes, du groupement des cristaux, de la couleur et de l'aspect général, que tout porte à croire que les forces dont j'ai fait usage sont au nombre de celles dont la nature s'est servie quelque fois pour les produire.

On doit conclure des faits précédents que, pour obtenir cristallisée une substance insoluble, il suffit de la faire entrer en combinaison avec une autre qui soit soluble, et d'opérer ensuite une décomposition très-lente, analogue à celle qui se produit dans les appareils électro-chimiques. Je citerai à l'appui de cette opinion l'expérience suivante. De l'argile très-divisée et humectée d'une solution d'arséniate de potasse a été mise dans un tube de verre, puis on a versé dessus une solution de nitrate de cuivre; la réaction des deux solutions a eu lieu, dans les premiers instants, seulement à la surface du contact de l'argile et de la solution de nitrate, mais peu à peu celle-ci a pénétré dans la masse de l'argile; la réaction a eu lieu alors très-lentement, circonstance favorable à la cristallisation, et l'on a aperçu dans quelques parties vides de l'argile, des cristaux semblables à ceux d'arséniate de cuivre. Il est probable que les substances cristallisées qui tapissent les géodes dans les formations secondaires et tertiaires, ont pu avoir une origine semblable.

La formation des doubles sulfures et des sulfures simples étant soumise à certaines lois, il ne faut pas donner aux tubes des dimensions quelconques, et employer des liquides dont la conductibilité électrique serait trop considérable: s'il se formait, par exemple, une trop grande quantité de double hypo-sulfite pour être décomposée complètement par l'acide qui vient du tube où se trouve le nitrate de cuivre ou le nitrate d'argent, l'opération serait incomplète. D'un autre côté, si le liquide du grand tube et celui de l'argile étaient trop bons conducteurs, l'oxigène et l'acide seraient peut-être transportés en même temps au pôle positif, et l'on n'aurait pas alors les réactions nécessaires pour la production des composés que l'on veut former. Ainsi, suivant que les circonstances auront été plus ou moins favorables, on aura une cristallisation, parfaite, une cristallisation confuse, ou absence de cristallisation et même de production de double sulfure. Je répète encore, que si l'acide arrivait en trop grande quantité dans le tube où se trouve la double combinaison; il réagirait sur chacun des composants, et l'on n'aurait pas le résultat attendu. Il ne faut pas oublier que l'hypo-sulfite alcalin, dont j'ai fait usage, provenait de la décomposition à l'air d'un sulfure de potassium.

Des Iodures métalliques.

On sait que les iodures métalliques sont soumis à la même loi de composition que les sulfures : on doit donc se procurer les iodures insolubles par le même procédé que celui qui a servi pour les sulfures : ce n'est là qu'nne généralisation du principe.

On substitue, dans l'appareil électro-chimique, l'hydriodate de potasse ou de soude à l'hypo-sulfite alcalin. Avec le plomb, on obtient d'abord un double iodure de plomb et de potassium, qui cristallise en aiguilles blanches soyeuses très-fines; peu à peu cette combinaison se décompose, en commençant par la partie inférieure contiguë à l'aiguille, puis l'on aperçoit un grand nombre de cristaux dérivant de l'octaëdre régulier, d'un jaune d'or et d'un aspect brillant. Cette substance, qui est insoluble, est de l'iodure de plomb:

Le cuivre, soumis au même mode d'action, donne d'abord un double iodure en aiguilles blanches cristallisées, puis l'on obtient, après la décomposition, de jolis cristaux octaëdres d'iodure de cuivre.

Il est probable que les autres métaux, avec des précautions convenables, conduiraient à des résultats semblables. Les bromures, les séléniurés, peuvent sans doute être obtenus par le même procédé: je me borne à indiquer ces faits, parce qu'ils découlent d'un principe général dont l'application ne peut manquer d'intéresser la philosophie naturelle.

Dans un prochain Mémoire, je donnerai de plus grands détails sur le mode de formation des corps que je viens de faire connaître.

MÉMOIRE

SUR

De nouveaux effets électro-chimiques propres à produire des combinaisons, et sur leur application à la cristallisation du soufre et d'autres substances.

PAR M. BECQUEREL.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 25 janvier 1830.

§ I. *Exposé.*

La chimie se compose de deux parties distinctes : l'analyse et la synthèse. La première, qui apprend à séparer tous les éléments dont un corps est formé, a été portée dans ces derniers temps à un grand degré de perfection ; mais il n'en est pas de même de la seconde, qui montre comment on peut recomposer ce corps, au moyen de ses éléments, quand il appartient au règne minéral et à la nature organique ; car l'on est parvenu jusqu'à présent à ne former qu'un petit nombre de composés qui s'y rapportent.

C'est à Halle et à M. Berthier, notre collègue, que l'on doit les premiers essais qui aient été tentés pour reproduire des substances minérales cristallisées. Le premier a montré qu'en soumettant de la craie et des substances végétales à une haute température, sous une forte pression, on avait pour résultats du carbonate de chaux dans un état cristallin et de la houille; le second a obtenu, par l'action du feu et à l'aide d'un refroidissement très-lent, des silicates ayant seulement la structure cristalline, semblables à ceux que l'on trouve dans la nature, tels que des pyroxènes, des péridots, des grenats, des sulfures et autres; mais le nombre de ces produits est nécessairement limité, en raison du mode d'action employé, qui ne peut s'appliquer qu'aux substances fusibles; de plus, dans les fourneaux on trouve, soit sur les parois, soit dans les layetiers, divers produits cristallisés qui ont leurs analogues dans la nature, et qui ont été formés, les uns par sublimation, les autres par fusion. Je citerai entre autres des cristaux que M. Mitscherlitz a rapportés au mica. Quant à la formation des composés organiques, la science est encore moins avancée: la difficulté de recomposer les corps naturels tient aux procédés dont on fait usage ordinairement: en effet, comment opère-t-on des combinaisons? c'est en faisant réagir les uns sur les autres des corps dissous dans des liquides, ou en employant l'action du calorique et quelquefois celle de l'étincelle électrique, modes d'action trop rapides pour un grand nombre de composés, surtout pour ceux de nature organique, qui, formés des mêmes éléments, ne diffèrent souvent entre eux que par de faibles variations, dans les proportions et quelquefois même seulement par leur mode d'agrégation.

En outre, quand on fait réagir deux corps l'un sur l'autre pour déterminer une combinaison, toutes leurs parties constituantes concourent en même temps à l'effet général, et le chimiste n'a pas toujours la possibilité d'empêcher la réaction de l'une d'elles, ce qui doit restreindre le nombre des produits; souvent aussi il ne peut employer les éléments des corps à l'état naissant, circonstance si favorable aux actions chimiques : l'électro-chimie, au contraire, telle que je la considère, n'emploie que des corps à l'état naissant et des forces excessivement faibles, qui, produisant les molécules pour ainsi dire une à une, disposent par-là les composés à prendre des formes régulières, même quand ils sont insolubles, puisque le nombre des molécules ne peut apporter aucun trouble dans leur arrangement.

Rien n'est plus propre, je crois, à nous initier sur la cause des phénomènes de décomposition et de recomposition qui ont lieu dans les parties constituantes des liquides en mouvement dans les tissus des corps organisés, que les effets chimiques opérés avec les piles à petite tension. Quelle que soit la cause de ce mouvement, ces liquides, chargés de diverses substances, éprouvent, ainsi que ces dernières, des modifications de la part des parties avec lesquelles ils sont continuellement en contact. Ces effets sont probablement analogues à ceux que l'on observe dans les corps transportés par l'électricité à travers des dissolutions de diverse nature ; car, dans l'un et l'autre cas, la force d'impulsion est un obstacle à leur réaction chimique, laquelle ne s'effectue que lorsque la résistance qu'elle lui oppose est vaincue par les affinités.

Les faits consignés dans ce Mémoire serviront, je pense, à donner plus d'extension à l'électro-chimie, et montreront en même temps les avantages qu'on en peut retirer pour la chimie générale.

L'action chimique de la pile de Volta consiste, comme on sait, dans la faculté dont jouissent deux fils de métal en communication chacun avec l'une des extrémités de l'appareil, et plongeant tous les deux dans un même liquide, d'opérer la décomposition de ce liquide et des substances qu'il tient en dissolution, de manière que les acides et l'oxigène se rendent au pôle positif, les bases et l'hydrogène au pôle négatif. Quand le liquide est réparti dans deux capsules de porcelaine communiquant ensemble avec une mèche d'amiante, les effets sont encore les mêmes. On obtient encore un résultat semblable, lorsque chaque capsule ne renferme pas la même dissolution. Voilà ce qui se passe toutes les fois que la force de la pile est suffisante pour opérer la décomposition des deux dissolutions; mais si elle ne peut en décomposer qu'une seule, alors les éléments de celle-ci sont transportés dans l'autre capsule, où ils produisent ordinairement des modifications qui amènent la formation de nouveaux composés. C'est l'ensemble des faits relatifs à ce mode d'action que j'ai désigné sous le nom d'électro-chimie.

Davy a avancé que, dans les décompositions opérées avec la pile, si l'acide rencontre, en se rendant au pôle positif, une base avec laquelle il forme un sel insoluble, la combinaison a lieu et se précipite. Ce fait, qu'il a généralisé, prouve seulement que, dans les circonstances où il opérait, l'affinité de l'acide pour la base l'emportait sur l'intensité du courant électrique, qui tendait à transporter l'acide au pôle positif. Cet illustre chimiste nous a donné lui-même la preuve du fait que je viens d'avancer, quand il a décomposé avec une pile très-énergique des liquides contenus dans des vases de verre; l'intensité des forces électriques était alors suffisante pour retirer du verre la soude, qui formait avec la silice un composé insoluble. Ainsi, dans l'expérience où l'acide sulfurique, par exemple, en rencontrant la baryte, formait avec elle un précipité, si la tension de la pile eût été assez considérable, ce précipité n'aurait pas eu lieu, l'acide sulfurique se serait rendu au pôle positif, et la baryte au pôle négatif. Ce résultat n'aurait été qu'une conséquence de l'expérience dans laquelle le silicate de soude a été décomposé.

Cette lutte des affinités avec la force des courants va être mise en évidence dans l'analyse que je vais donner des phénomènes de décompositions et de recompositions, produits par la réaction des corps sur les parties constituantes des dissolutions, au travers desquelles ils sont transportés par de faibles courans électriques.

§ II.

Cas où le métal qui est au pôle positif concourt, par la réaction de son oxide, à la formation des composés.

I^er^ Exemple. Un tube de verre de plusieurs centimètres de diamètre, ouvert par ses deux bouts et contenant dans sa partie inférieure de l'argile très-fine, imprégnée d'une dissolution de nitrate de potasse, et dans sa partie supérieure, de l'alcool ordinaire est placé dans un autre tube rempli d'une dissolution de sulfate de cuivre; puis l'on établit extérieurement la communication entre les deux liquides, au moyen d'un arc composé de deux lames cuivre et plomb soudées bout à bout; le côté cuivre plongeant dans le sulfate, et le côté plomb dans l'alcool. Le sulfate de cuivre ne tarde pas à être décomposé par suite des effets électriques qui résultent, en grande partie, de l'action de ce sel sur le nitrate de potasse. Le cuivre se réduit sur la lame de même métal, qui est le pôle négatif; l'oxigène et l'acide sulfurique se transportent du côté de la lame de plomb, mais, au lieu d'obtenir du sulfate du même métal, il se forme en peu de jours une grande quantité de cristaux octaèdres de nitrate de plomb. Ce fait prouve évidemment que l'acide sulfurique, en traversant l'argile impregnée de nitrate de potasse, décompose ce sel, se combine avec la potasse en raison d'une plus grande affinité pour cette base; l'acide nitrique se rend alors au pôle positif, qui exerce aussi sur lui une action attractive; et se combine avec l'oxide de plomb formé avec l'oxigène de cuivre. Il en résulte du nitrate de plomb, qui cristallise, à mesure que l'alcool en est saturé. Un appareil voltaïque, formé d'un seul couple, possède le degré de force nécessaire pour produire les effets décrits plus haut. On voit, par ce premier exemple, qu'un acide transporté par un courant dans une dissolution est capable de décomposer un sel, quand les affinités sont supérieures à l'intensité de ce courant.

IIe Exemple. Le sulfo-carbonate de potasse, dont la dissolution, quand elle n'est pas très-concentrée, se décompose peu à peu à l'air, se trouve dans des circonstances favorables pour que des forces très-faibles apportent des changements dans l'état de combinaison des molécules. Voici comment on opère sur cette substance: on prend deux bocaux en verre, dans l'un on verse une dissolution de sulfate de cuivre, et dans l'autre, une dissolution alcoolique de sulfo-carbonate de potasse, puis l'on établit la communication extérieurement entre les deux liquides, d'une part, avec un tube de verre recourbé rempli d'argile imprégnée d'une dissolution de nitrate de potasse, et de l'autre, avec un arc formé de deux lames cuivre et plomb, le cuivre plongeant dans le sulfate et le plomb dans le sulfo-carbonate. D'après la nature des actions électriques produites dans cet appareil, le plomb se trouve être le pôle positif d'une petite pile dont l'intensité est suffisante pour décomposer le sulfate : le cuivre se réduit; l'oxigène et l'acide sulfurique se transportent vers le plomb; l'acide, dans son trajet, décompose le nitrate de potasse, comme dans l'expérience précédente, de sorte que l'oxigène et l'acide nitrique se rendent seuls dans le sulfo-carbonate; aussitôt qu'ils y pénètrent, ils commencent à réagir sur ses parties constituantes, et cette action persévère jusqu'à ce que la force du courant soit devenue supérieure aux affinités des divers corps qui sont en présence; alors le transport des molécules continue jusqu'à la lame de plomb où s'opère la dernière réaction. Il se forme successivement les produits suivants : du carbonate neutre de potasse qui cristallise sur les parois du vase; du carbonate de plomb en cristaux aciculaires, semblables à ceux que l'on trouve dans la nature, et probablement du sulfaté de potasse et du sulfate de plomb; enfin, une partie du soufre qui provient de la décomposition du sulfure de carbone et du sulfure de potasse, se porte sur la lame de plomb, qui est le pôle positif, et y cristallise en octaëdre à base rhombe, comme les cristaux naturels. Ces octaëdres avaient un millimètre de longueur après un mois d'expérience.

On obtient également du soufre cristallisé en abandonnant à l'air une dissolution de cette substance dans le carbure de soufre, ou en faisant fondre du soufre, laissant refroidir le liquide, jusqu'à ce qu'il se forme une croûte solide à la surface, que l'on brise pour décanter. Mais le procédé que j'ai fait connaître est différent des deux précédents, et a de l'analogie avec celui dont la nature fait usage dans quelques circonstances, par exemple, dans la décomposition lente du gaz hydrogène sulfuré et des matières fécales, qui déposent avec le temps des cristaux de soufre bien caractérisés. Dans l'un et l'autre cas, la cristallisation est le résultat d'une action excessivement faible.

Au lieu du sulfate de cuivre on peut se servir du nitrate, qui fournit immédiatement l'acide nitrique.

Les produits auxquels donne lieu la décomposition du sulfo-carbonate de potasse, varient suivant l'intimité des courants électriques et le degré de concentration de la dissolution. Avec une dissolution de sulfo-carbonate dans l'eau, on obtient peu de soufre et une grande quantité de carbonate de plomb. Ces différences, dans les résultats, tiennent aux rapports qui existent entre les affinités des divers corps et les intensités du courant, qui varient suivant la conductibilité des liquides et l'énergie de l'action chimique. Dans l'état actuel de la science, il est impossible de prévoir à priori ce qui doit arriver dans tel ou tel cas, c'est l'expérience seule qui peut l'apprendre.

Les sulfo-carbonates des autres bases, soumis au même mode d'expérience, m'ont donné des résultats analogues ; c'est par leur décomposition lente, et en employant des métaux convenables au pôle positif, que je suis parvenu à obtenir en cristaux, dérivant de la forme primitive, le sulfate de chaux et celui de baryte, comme on les trouve dans diverses formations du globe. Je me borne à énoncer ici ce fait sur lequel je reviendrai dans un autre Mémoire, en traitant des sulfates insolubles et des circonstances de leur formation ; au surplus, j'aurai encore l'occasion ci-après de reparler du sulfate de baryte.

III^e EXEMPLE. On remplit d'une dissolution de bi-carbonate de soude un tube contenant dans sa partie inférieure, de l'argile imprégnée de la même dissolution, et on le place dans un autre où l'on verse une dissolution de sulfate de cuivre; puis l'on plonge dans chaque liquide l'une des extrémités d'une lame de cuivre. Voici ce qui arrive : le bout qui est dans la dissolution du sulfate étant le pôle négatif, décompose ce sel, attire le cuivre, tandis que l'oxigène et l'acide sulfurique se portent de l'autre côté; mais l'acide sulfurique trouvant sur son passage de l'acide carbonique, le chasse de la combinaison et prend sa place; alors l'acide carbonique forme avec l'oxide de cuivre un carbonate, lequel en se combinant avec celui de soude donne naissance à un double carbonate, qui cristallise en belles aiguilles d'un vert bleuâtre satiné. Cette substance qui n'est pas soluble dans l'eau, se décompose à l'aide de la chaleur, le carbonate de soude se dissout, celui de cuivre se précipite et devient brun comme le carbonate ordinaire traité par l'eau bouillante.

Dans les expériences précédentes, la propriété dont jouit l'acide sulfurique de chasser des acides qui ont moins d'affinité que lui pour les bases, n'a lieu qu'en raison du peu d'énergie de l'action de la pile, car si elle eût été plus considérable, tous les acides indistinctement auraient été transportés au pôle positif. Cette propriété est subordonnée néanmoins à certains phénomènes dont il sera question dans le chapitre suivant.

Le courant électrique dont je me suis servi pour déterminer des décompositions, peut provenir de deux causes, de la réaction chimique des deux liquides, qui sont en contact, et de l'action chimique du liquide du petit tube sur le métal qui plonge dedans; dans le premier cas, si la réaction est suffisamment énergique, on peut se passer de la seconde, de même si celle-ci a une intensité convenable, la première devient inutile; mais quand l'une et l'autre sont faibles et que les courants qui en résultent sont dirigés dans le même sens, alors leur somme devient indispensable à la production des effets électro-chimiques. En général toutes les fois que les deux courants cheminent dans le même sens, leur somme ne peut que favoriser les décompositions et la formation des produits. Il arrive souvent que ces deux courants sont si faibles que la réduction dans le grand tube ne saurait avoir lieu; dès-lors il n'y a aucun effet de produit. Si donc l'on n'aperçoit dans les appareils, au bout de quelques jours, aucune précipitation de cuivre sur la lame du même métal, qui plonge dans la dissolution du nitrate ou du sulfate, il devient inutile de pousser plus loin l'expérience; il faut alors changer l'appareil. Dans l'expérience, où le grand tube renferme du sulfate de cuivre et le second de l'argile imprégnée d'une dissolution de nitrate de potasse, puis de l'alcool, la réaction chimique du nitrate sur le sulfate suffit pour produire un courant électrique, capable de décomposer complètement le sulfate de cuivre et de former le nitrate de plomb dans le petit tube; car on ne peut supposer que l'alcool ait exercé sur le plomb une action assez forte pour qu'il en résulte un courant électrique sensible. Il serait à désirer qu'on pût toujours opérer sur des dissolutions, qui exerçassent les unes sur les autres des actions chimiques suffisamment énergiques pour développer des courants convenables, quand la lame qui plonge dans le liquide du petit tube est d'or ou de platine, afin de pouvoir étudier facilement les phénomènes de décompositions et de recompositions indépendamment de la réaction des oxides. Ce serait la seule marche à suivre pour découvrir ce qui se passe dans les composés organiques liquides, lorsqu'on y transporte au moyen de l'électricité, des corps capables d'enlever quelques-unes de leurs parties constituantes. On peut suppléer à ce défaut de réaction suffisante des liquides, en opérant avec l'appareil dont je vais donner la description, lequel permet d'éviter, quand on le veut, l'action des oxides métalliques qui se forment au pôle positif. Comme cet appareil est de nature à donner de nombreuses applications, j'entrerai dans quelques détails sur sa construction.

§ III.

Description d'un appareil électro-chimique, qui permet d'éviter ou d'employer à volonté au pôle positif la réaction des oxides métalliques.

On prend trois bocaux A, A', A'' (fig. 6e) rangés sur la même ligne, à peu de distance les uns des autres : le premier est rempli d'une dissolution de sulfate ou de nitrate de cuivre, le second, d'une dissolution de la substance, sur les parties constituantes de laquelle on veut opérer des changements, et le troisième, d'eau rendue légèrement conductrice de l'électricité par l'addition d'un acide ou de sel marin. A communique avec A' au moyen d'un tube recourbé *a b c* rempli d'argile humectée d'une dissolution saline, dont la nature dépend de l'effet que l'on désire produire dans A'; A' et A″ communiquent ensemble par l'intermédiaire d'une lame de platine ou d'or *a′ b′ c′*, et enfin A et A″ avec un couple voltaïque C M Z composé de deux lames M C et M Z, cuivre et zinc; enfin, un tube de sûreté *tt* est placé dans le bocal A′ pour indiquer les pressions intérieures résultant des dégagements de gaz. D'après cette disposition, l'extrémité *a′* de la lame de platine est le pôle positif d'une petite pile dont l'action est lente et continue quand le liquide contenu dans A′ est bon conducteur; l'intensité des forces électriques est suffisante pour décomposer le sulfate de cuivre qui se trouve dans A; dès lors l'oxigène se rend vers *a′*, ainsi que l'acide sulfurique, qui, en passant dans le tube *a b c*, chasse quelquefois les acides qui ont moins d'affinité que lui pour les bases. Tous les éléments se rendent dans le liquide A′, où leurs réactions lentes déterminent divers changements. Cet appareil ainsi disposé a un grand avantage sur tous ceux dont j'ai fait usage jusqu'ici; il permet d'opérer sur de plus grandes dimensions et d'éviter la réaction de l'oxide, qui se formait en *a′* quand on employait un métal oxidable pour faire naître le courant.

On est forcé souvent de placer un quatrième bocal entre A et A′, dans lequel on met une quantité suffisante de la dissolution saline, qui doit être décomposée par l'acide sulfurique, pour que les effets produits dans le liquide A′ ne soient pas interrompus quand tout le liquide de l'argile a été décomposé. Ainsi, quand on voudra porter un gaz électro-négatif ou un acide à l'état naissant dans le liquide du bocal A′, il suffira de placer dans l'argile une dissolution qui, par sa réaction sur l'acide sulfurique provenant de la décomposition du sulfate de cuivre, laisse dégager ce gaz ou cet acide. S'il s'agit, au contraire, d'y porter de l'hydrogène ou un gaz électro-positif, il faut renverser les moyens de communication, et mettre $a' b' c'$ à la place de $a b c$, et réciproquement. Enfin, si l'on remplace la lame de platine par une lame d'un métal oxidable, l'on introduit dans la dissolution la réaction d'un oxide qui, se trouvant à l'état naissant, concourt à la formation des produits. L'inspection seule des appareils précédents donne une idée des résultats qu'ils peuvent donner en variant convenablement les dissolutions; je vais en faire connaître plusieurs :

I[re] Expérience. On verse dans le bocal A' une dissolution alcoolique de sulfo-carbonate de potasse, dans le bocal A une dissolution de sulfate de cuivre, et dans l'argile du tube $a b c$ une autre de nitrate de potasse; après 24 heures d'expérience, la réaction de l'oxigène et de l'acide nitrique sur la dissolution du sulfo-carbonate est déja sensible; car l'on aperçoit sur le bout a' de la lame de platine les produits que j'ai indiqués plus haut, en opérant avec une lame de plomb, c'est-à-dire des cristaux de soufre, de carbonate neutre, de potasse, etc., mais non du carbonate de plomb, puisqu'il n'y a pas d'oxide de ce métal.

II[e] Expérience. On substitue dans l'appareil précédent au sulfo-carbonate de potasse une dissolution dans l'eau de sulfo-carbonate de baryte; des réactions analogues ne tardent pas à se manifester : précipitation de soufre en petits cristaux, et formation de sulfate de baryte en aiguilles prismatiques. On obtiendrait sans doute par ce procédé des cristaux d'une certaine dimension, si l'on courbait la lame de platine de manière à en faire une cuiller, pour empêcher que ceux qui se forment sur la surface de la lame ne tombassent au fond du vase.

III^{e} Expérience. Moyen de constater la présence de l'acide nitrique et celle de l'acide hydrochlorique dans une dissolution quelconque, même lorsqu'ils s'y trouvent en très-petite quantité : on remplace la lame de platine $a' b' c'$ par une lame d'or, puis l'on verse dans le bocal A une dissolution de sulfate de cuivre; dans le bocal A' et l'argile du tube $a b c$, une dissolution du composé qui est censé renfermer les deux acides en combinaison avec des bases; aussitôt que l'appareil commence à fonctionner, l'acide sulfurique chasse les deux acides de leurs combinaisons; lesquels se portent, avec l'oxigène qui provient de la réduction de l'oxide de cuivre, sur le bout a' de la lame d'or; la couleur jaune, qui se manifeste sur-le-champ, indique la présence de l'acide nitrique et de l'acide hydro-chlorique. Cette réaction s'obtient également en substituant aux bocaux des tubes de petites dimensions; par ce procédé aucunes parties des acides ne sont perdues, toutes sont transportées au pôle positif, et concourent à la production de l'hydro-chlorate d'or.

IV^{e} Expérience. On remplit le bocal A d'une dissolution de sulfite de potasse, et l'on remplace la lame de platine a b c par une lame de cuivre. L'extrémité a étant toujours le pôle positif, attire l'oxigène et l'acide nitrique; ce dernier décompose le sulfite et s'empare de la base; l'acide sulfureux se porte sur l'oxide de cuivre qui se forme en même temps et se combine avec lui; le sulfite de cuivre se combine lui-même avec le sulfite de potasse; il en résulte un composé qui cristallise en beaux octaëdres; mais l'acide nitrique continuant toujours à arriver, finit par décomposer ce double sulfite, il se dégage alors du gaz acide sulfureux; le sulfite de potasse est transformé en bisulfite et en nitrate de potasse. Quant au sulfite de cuivre, il se précipite en cristaux, octaëdres transparents, d'un rouge vif, avec l'éclat du grenat pyrope. M. Chevreul a obtenu, il y a long-temps, ce sulfite de cuivre par les moyens ordinaires de la chimie.

Je pourrais étendre encore davantage le nombre des résultats, mais je crois avoir rempli le but que je me suis proposé dans ce Mémoire, celui de faire connaître à l'Académie des principes et des appareils nouveaux, à l'aide desquels on pourra découvrir, dans l'électro-chimie, des vérités qui contribueront à donner plus d'extension à cette science, dont les applications paraissent avoir des rapports directs avec tous les phénomènes de la nature.

MÉMOIRE

SUR

Un procédé électro-chimique pour retirer le manganèse et le plomb des dissolutions dans lesquelles ils se trouvent.

PAR M. BECQUEREL.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 3 mai 1830.

AUSSITÔT que l'on eut découvert la propriété dont jouit la pile, de décomposer les acides et les dissolutions salines, au moyen de deux lames de platine, qui plongent dedans et en communication chacune avec l'une des extrémités de l'appareil, on reconnut que l'oxigène et les acides étaient toujours transportés au pôle positif, l'hydrogène et les bases au pôle négatif. Dans le cas où la dissolution renferme plusieurs combinaisons, il y a donc, de chaque côté, mélange de corps de même nature, et il reste à l'analyse chimique à en faire la séparation. Si l'on veut faire de suite cette analyse avec la pile, il faut disposer les appareils de manière à changer la nature de quelques-uns des éléments, sans modifier celle des autres avec lesquels ils sont combinés ou mélangés.

Les recherches nombreuses auxquelles je me suis livré, sur les rapports qui existent entre les affinités et les forces électriques, m'ont mis à même de résoudre cette question à l'égard du manganèse et du plomb; et je suppose que l'on peut obtenir des résultats semblables pour d'autres métaux, en étudiant convenablement leurs propriétés électro-chimiques. L'électricité, comme on va le voir, peut donc servir de réactif très-sensible, non-seulement pour découvrir la présence du manganèse et du plomb dans les dissolutions; mais encore pour les en retirer avec facilité, au point de n'en laisser aucune trace, et sans craindre qu'ils n'entraînent avec eux d'autres métaux. Je pense que ces résultats pourront être utiles à la chimie. Avant d'exposer les principes sur lesquels repose la méthode d'analyse électro-chimique dont je viens de parler, je vais donner l'appareil et le procédé dont j'ai fait usage.

On prend un bocal A, A,′ (fig. 7e) dans lequel on verse une dissolution de nitrate de cuivre, puis on plonge dedans un tube *b b′*, rempli, dans sa partie inférieure, d'argile légèrement humectée d'une dissolution d'acétate de soude, et l'on verse, dans sa partie supérieure, une dissolution d'acétate de fer. Une lame de platine *c c′*, qui communique avec le pôle, positif d'une pile à petite tension (formée, par exemple d'un seul couple), plonge dans l'acétate, et un autre de cuivre *dd′*, est en communication avec le pôle négatif dans le nitrate. Dès l'instant que l'appareil commence à fonctionner, comme le nitrate de cuivre se décompose avec facilité, sous l'influence de forces électriques très-faibles, le cuivre se réduit sur la lame de même métal, tandis que l'oxigène et l'acide nitrique sont transportés dans l'autre tube, où l'oxigène se dégage et l'acide nitrique décompose l'acétate de fer en se combinant avec le métal, et chassant l'acide acétique. L'action de cette pile étant trop faible pour décomposer par elle-même l'acétate et déterminer le transport de l'oxide de fer au pôle négatif, il en résulte que tous les produits qui se forment restent dans le tube, et la surface de la lame de platine conserve le brillant qu'elle avait avant l'expérience. Vient-on à ajouter, à la dissolution de l'acétate de fer, une seule goutte d'acétate de manganèse qui ne renferme qu'un millième de gramme de ce sel, et même moins, la lame de platine, qui est le pôle positif, prend peu après une teinte légère de couleur de bistre. Augmente-t-on la quantité d'acétate de manganèse, la couleur devient de plus en plus foncée, puis tout-à-fait noire. Cette réaction se produit tant qu'il y a du manganèse dans l'acétate de fer; la substance qui colore ainsi la lame de platine est le peroxide de maganèse. Voici ce qui se passe dans cette expérience : la lame de platine exerce sur la dissolution des acétates une action décomposante, sans pouvoir cependant opérer leur décomposition, à cause de la petite tension de la pile; mais l'oxigène et l'acide nitrique qui arrivent dans la dissolution, complètent la décomposition, l'oxigène en suroxidant le manganèse, et probablement le fer, et l'acide nitrique en chassant l'acide acétique qui devient libre; le peroxide de manganèse étant insoluble dans ce dernier, se dépose sur la lame de platine comme une pellicule dont les parties ont un aspect métallique, tandis que le peroxide de fer, s'il se forme, reste dissous dans les acides.

Je me suis servi d'une pile à petite tension, pour mieux faire connaître ce qui se passe pendant l'expérience; mais on parvient au même résultat avec une pile ordinaire : on verse dans une capsule de porcelaine la dissolution d'acétate de fer et de manganèse, et l'on plonge dedans deux lames de platine, en communication chacune avec l'un des pôles de la pile. Il y a aussitôt décomposition de l'eau, et dégagement de gaz; l'oxigène, en se rendant au pôle positif, suroxide le manganèse, qui abandonne alors l'acide acétique, et se dépose comme précédemment sur la lame positive de platine. On voit maintenant pourquoi le nitrate de cuivre était nécessaire quand on a employé la pile à petite tension; l'eau n'étant pas décomposée, il fallait se procurer de l'oxigène et un acide plus fort que l'acide acétique; la décomposition facile du nitrate de cuivre a fourni l'un et l'autre. Le sulfate et le nitrate de manganèse conduisent au même résultat que l'acétate, parce que le peroxide de manganèse est insoluble dans les acides sulfurique et nitrique; mais les expériences rapportées dans ce mémoire ont été faites particulièrement sur l'acétate. Rien n'est plus simple que de séparer, par ce procédé, le manganèse du fer; il suffit de former une dissolution de ces métaux dans l'acide acétique, et de prendre des lames de platine assez grandes et une pile suffisamment énergique, pour que l'expérience puisse marcher promptement; quand on opère sur une petite quantité, quelques heures suffisent quelquefois, surtout si l'on a la précaution d'enlever de temps à autre le peroxide qui se dépose sur la lame positive de platine. Quand la dissolution renferme un gramme d'acétate de manganèse, il faut 24 heures et plus; mais, je le répète, le temps dépend de la dimension des lames et de la tension de la pile. Quand la lame cesse de se colorer, on est assuré alors que la dissolution ne renferme plus de maganèse, ou du moins en renferme une quantité inappréciable, puisqu'un millième de gramme et encore moins dans un gramme d'eau, est rendu sensible par ce procédé. A mesure que la décomposition s'effectue, la liqueur devient de plus en plus acide; c'est par ce motif qu'il se dépose peu d'oxide de fer sur la lame négative, parce qu'il est redissout en partie aussitôt. Quand l'opération est terminée, on lave cette lame avec de l'acide, pour dissoudre la petite quantité d'oxide de fer qui s'y trouve, et recueillir le peroxide de manganèse qui a pu s'y attacher.

Quels que soient les métaux combinés avec le manganèse, on parvient à en séparer aisément ce dernier : je citerai entre autres le manganèse et le zinc, dont la séparation est difficile par les voies ordinaires de la chimie.

La liqueur se colore souvent en rose vers la fin de l'opération, et redevient incolore quelque temps après, lorsque l'action de la pile a cessé; cela tient à ce que celle-ci, exerçant une action réductive sur le tritoxide, tend à reformer une petite quantité de sel au minimum d'oxidation : mais en continuant l'expérience on finit par décomposer ce dernier, au point qu'il n'en reste plus dans la dissolution. Je me suis servi, pour ces expériences, d'une pile à auge, de trente paires de disques, de 8 centimètres de hauteur sur 6 de largeur, chargée avec une dissolution légère de sel marin, pour qu'elle puisse fonctionner long-temps. Des piles plus énergiques, en décomposant l'acide acétique, produiraient peut-être des effets qui contrarieraient ceux dont on a besoin pour former le peroxide de manganèse. La séparation du plomb des autres métaux exige quelque modification au procédé que j'ai indiqué précédemment, et qui consiste à remplir une capsule de la dissolution des acétates et à plonger dedans deux lames de platine, en communication chacune avec les pôles d'une pile ordinaire : quand il s'agit du plomb, cette disposition ne peut être adoptée, attendu que l'oxide se réduisant facilement, le métal se porte aussitôt sur la lame négative de platine, ainsi que les autres bases qui se trouvent dans la dissolution. Avec les piles à petite tension, on n'éprouve pas le même inconvénient; le plomb se comporte alors comme le manganèse, c'est-à-dire qu'il se suroxide et se dépose sur la lame positive de platine. Souvent la pellicule de peroxide est noire et cristalline; en la broyant, la couleur puce reparaît. Mais comme les piles à petite tension n'agissent que lentement, si l'on veut se servir d'une pile ordinaire, il faut disposer les choses de manière à ce que l'oxide de plomb ne puisse être transporté au pôle négatif, où la réduction du métal s'opérerait: on y parvient en se servant de l'appareil (fig. 7[e]) que l'on fait fonctionner avec une pile voltaïque ordinaire. Par ce moyen, on rend sensibles, non-seulement les plus petites parties du plomb qui se trouvent dans la dissolution; mais encore on les en retire toutes, sans que les réactifs chimiques les plus sensibles, l'hydro-sulfate d'ammoniaque, par exemple, puissent en reconnaître des traces, quand l'opération est terminée. Pour distinguer ce peroxide de celui de manganèse, la chimie donne les moyens de le faire; il est inutile par conséquent d'en parler.

L'acétate d'argent, préparé avec l'argent de coupelle, donne assez promptement la réaction du plomb; ainsi que le nitrate du même métal. On peut donc employer avec succès ce procédé pour retirer le plomb de toutes les dissolutions où il se trouve. L'avantage qu'on y trouve, ainsi que pour le manganèse, est d'éviter les manipulations, qui occasionnent souvent des pertes plus ou moins sensibles dans les produits de l'analyse.

L'exposé que je viens de présenter montre le parti que l'on pourrait tirer de l'action de la pile voltaïque pour l'analyse chimique, si l'on connaissait mieux les propriétés électro-chimiques de tous les corps simples; car il est probable que l'on parviendrait à les isoler les uns des autres, comme le plomb et le manganèse. De nouveaux résultats mettront peut-être à même de donner plus d'extension à ces recherches, dont les applications seront utiles à la chimie.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DE LA LUMIÈRE.

PAR M. A. L. CAUCHY.

PREMIÈRE PARTIE,

Présentée et lue à l'Académie royale des Sciences, les 31 mai et 7 juin 1830.

J'AI donné le premier, dans les Exercices de Mathématiques (troisième et quatrième volumes), les équations générales d'équilibre ou de mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, en admettant que ces forces fussent représentées par des fonctions des distances entre les molécules; et j'ai prouvé que ces équations, qui renferment un grand nombre de coefficients dépendants de la nature du système, se réduisaient, dans le cas où l'élasticité redevenait la même en tous sens, à d'autres formules qui ne renferment qu'un seul coefficient, et qui avaient été primitivement obtenues par M. Navier. J'ai de plus déduit de ces équations celles qui déterminent les mouvements des plaques et des verges élastiques, quand on suppose que l'élasticité n'est pas la même en tous sens; et j'ai ainsi obtenu des formules qui comprennent, comme cas particuliers, celles que M. Poisson et d'autres géomètres avaient trouvées dans la supposition contraire. L'accord remarquable de ces diverses formules, et des lois qui s'en déduisent, avec les observations des physiciens, et spécialement avec les belles expériences de M. Savart, devait m'encourager à suivre les conseils de quelques personnes qui m'engageaient à faire des équations générales que j'avais données, une application nouvelle à la théorie de la lumière. Ayant suivi ce conseil, j'ai été assez heureux pour arriver aux résultats que je vais exposer dans ce Mémoire, et qui me paraissent dignes de fixer un moment l'attention des physiciens et des géomètres.

Les trois équations aux différences partielles qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, renferment, avec le temps t, et les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de l'espace, les déplacements ξ, η, ζ de la molécule $\mathfrak{M}$ qui coïncide au bout du temps t, avec le point dont il s'agit; ces déplacements étant mesurés parallèlement aux axes des x, y, z. Les mêmes équations offriront vingt et un coefficients dépendants de la nature du système, si l'on fait abstraction des coefficients qui s'évanouissent, lorsque les masses m, m', m'', des diverses molécules sont deux à deux égales entre elles et distribuées symétriquement de part et d'autre de la molécule $\mathfrak{M}$ sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide. Enfin ces équations seront du second ordre, c'est-à-dire qu'elles ne contiendront que des dérivées du second ordre des variables principales ξ, η, ζ; et l'on pourra, en considérant chaque coefficient comme une quantité constante, ramener leur intégration à celle d'une équation du sixième ordre, qui ne renfermera plus qu'une seule variable principale. Or, cette dernière pourra être facilement intégrée à l'aide des méthodes générales que j'ai données dans le 19e cahier du journal de l'École Polytechnique, et dans le mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique. En appliquant ces méthodes au cas où l'élasticité du système reste la même en tous sens, et réduisant la valeur de la variable principale à la forme la plus simple, à l'aide d'un théorème établi depuis long-temps par M. Poisson, on obtient précisément les intégrales qu'a données ce géomètre dans les Mémoires de l'Académie. Mais dans le cas général, la variable principale étant représentée par une intégrale définie sextuple, il fallait, pour découvrir les lois des phénomènes, réduire cette intégrale sextuple à une intégrale d'un ordre moins élevé. Cette réduction m'a long-temps arrêté : mais je suis enfin parvenu à l'effectuer, pour l'équation aux différences partielles ci-dessus mentionnée, et même généralement pour toutes les équations aux différences partielles dans lesquelles les diverses dérivées de la variable principale, prises par rapport aux variables indépendantes x, y, z, t, sont des dérivées de même ordre. Alors j'ai obtenu, pour représenter la variable principale, une intégrale définie quadruple, et j'ai pu rechercher les lois des phénomènes dont la connaissance devait résulter de l'intégration des équations proposées. Cette recherche a été l'objet du dernier mémoire que j'ai eu l'honneur d'offrir à l'Académie, et qui renferme entre autres la proposition suivante.

Étant donnée une équation aux différences partielles dans laquelle toutes les dérivées de la variable principale relatives aux variables indépendantes x, y, z, t, sont de même ordre, si les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées prises par rapport au temps sont sensiblement nulles dans tous les points situés à une distance finie de l'origine des coordonnées, cette variable et ses dérivées n'auront plus de valeurs sensibles au bout du temps t, dans l'intérieur d'une certaine surface, et par conséquent les vibrations sonores, lumineuses, etc., qui peuvent être déterminées à l'aide de l'équation aux différences partielles, se propageront dans l'espace, de manière à produire une onde sonore, lumineuse, etc......., dont la surface sera précisément celle que nous venons d'indiquer. De plus on obtiendra facilement l'équation de la surface de l'onde, en suivant la règle que je vais tracer.

Concevons que, dans l'équation aux différences partielles, on remplace une dérivée quelconque de la variable principale prise par rapport aux variables indépendantes x, y, z, t, par le produit de ces variables élevées à des puissances dont les degrés soient marqués, pour chaque variable indépendante, par le nombre des différenciations qui lui sont relatives. La nouvelle équation que l'on obtiendra sera de la forme

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

et représentera une certaine surface courbe. Considérez maintenant le rayon vecteur mené de l'origine à un point quelconque de cette surface courbe; portez sur ce rayon vecteur, à partir de l'origine, une longueur égale au carré du temps divisé par ce même rayon; menez ensuite par l'extrémité de cette longueur un plan perpendiculaire à sa direction. Ce plan sera le plan tangent à la surface de l'onde, et par conséquent cette surface sera l'enveloppe de l'espace que traverseront les divers plans qu'on peut construire en opérant comme on vient de le dire. Au reste, on arrive encore aux mêmes conclusions, en suivant une autre méthode que je vais exposer en peu de mots, et que j'ai développée dans mes dernières leçons au collége de France.

Supposons que les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivés prises par rapport au temps ne soient sensibles que pour les points situés à des distances très-petites d'un certain plan mené par l'origine des coordonnées, et dépendent uniquement de ces distances. Cette même variable et ces dérivées ne seront sensibles, au bout du temps t, que dans le voisinage de l'un des plans parallèles, construits à l'aide de la règle que nous avons précédemment indiquée. Par conséquent, si les vibrations sonores, lumineuses, etc., sont primitivement renfermées dans une onde plane, cette onde, que nous nommerons élémentaire, se divisera en plusieurs autres dont chacune se propagera dans l'espace, en restant parallèle à elle-même, avec une vitesse constante. Mais ces diverses ondes auront des vitesses de propagation différentes. Si maintenant on conçoit qu'au premier instant plusieurs ondes élémentaires soient renfermées dans des plans divers menés par l'origine des coordonnées, mais peu inclinés les uns sur les autres, et que les vibrations sonores, lumineuses, etc., soient assez petites pour rester insensibles dans chaque onde élémentaire prise séparément; alors, ces vibrations ne pouvant devenir sensibles que par la superposition d'un grand nombre d'ondes élémentaires, il est clair que les phénomènes relatifs à la propagation du son, de la lumière, etc. ne pourront être observés, au premier moment, que dans une très-petite étendue autour de l'origine des coordonnées, et au bout du temps t, que dans le voisinage des diverses nappes de la surface qui sera touchée par toutes les ondes élémentaires. Or, cette dernière surface sera précisément la surface courbe dont nous avons parlé ci-dessus, et que l'on nomme généralement surface des ondes.

Cela posé, si l'on considère le mouvement de propagation des ondes planes, dans un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, on pourra prendre successivement pour variables principales trois déplacements rectangulaires d'une molécule $\mathfrak{M}$ mesurés parallèlement aux trois axes d'un certain ellipsoïde qui aura pour centre l'origine des coordonnées, et que l'on construira facilement dès que l'on connaîtra les coefficients dépendants de la nature du système proposé, et la direction du plan A B C, qui renfermait une onde plane au premier instant. Alors cette onde se divisera en six autres qui auront constamment la même épaisseur que la première, et se propageront avec des vitesses constantes, dans des plans parallèles à A B C. Ces ondes, prises deux à deux, auront des vitesses de propagation égales, mais dirigées en sens contraires. De plus ces vitesses, mesurées suivant une droite perpendiculaire au plan A B C, pour les trois ondes qui se mouvront dans un même sens, seront constantes, et respectivement égales aux quotients qu'on obtient en divisant l'unité par les trois demi-axes de l'ellipsoïde ci-dessus mentionné. Les points situés hors de ces ondes seront en repos, et si les trois demi-axes de l'ellipsoïde sont inégaux, le déplacement absolu et la vitesse absolue des molécules, dans une onde plane, resteront toujours parallèles à celui des trois axes de l'ellipsoïde qui sera réciproquement proportionnel à la vitesse de propagation de cette onde. Mais si deux ou trois axes de l'ellipsoïde deviennent égaux, les ondes planes qui se propageront dans le même sens avec des vitesses réciproquement proportionnelles à ces axes, coïncideront, et la vitesse absolue de chaque molécule renfermée dans une onde plane sera, au bout d'un temps quelconque, parallèle aux droites suivant lesquelles les vitesses initiales se projetaient sur le plan mené par les deux axes égaux de l'ellipsoïde, ou même, si l'ellipsoïde se change en une sphère, aux directions de ces vitesses initiales.

Concevons maintenant qu'au premier instant plusieurs ondes planes, peu inclinées les unes sur les autres et sur un certain plan A B C, se rencontrent et se superposent en un certain point A. Le temps venant à croître, chacune de ces ondes se propagera dans l'espace, en donnant naissance, de chaque côté du plan qui la renfermait primitivement, à trois ondes semblables renfermées dans des plans parallèles, mais douées de vitesses de propagation différentes; par conséquent le système d'ondes planes que l'on considérait d'abord se subdivisera en trois autres systèmes, et le point de rencontre des ondes qui feront partie d'un même système se déplacera suivant une certaine droite avec une vitesse de propagation distincte de celle des ondes planes. Donc, au bout d'un temps quelconque t, le point A se trouvera remplacé par trois autres points, dont les positions dans l'espace pourront être calculées pour une direction donnée du plan A B C, et les diverses positions que pourront prendre les trois points dont il s'agit pour diverses directions primitivement attribuées au plan ABC, détermineront une surface courbe à trois nappes, dans laquelle chaque nappe sera constamment touchée par les ondes planes qui feront partie d'un même système. Or cette surface courbe sera précisément celle dont nous avons déja parlé ci-dessus, et que nous avons nommée surface des ondes.

Au reste, pour que la propagation des ondes planes puisse s'effectuer dans un corps élastique, il est nécessaire que les coefficients, ou du moins certaines fonctions des coefficients renfermés dans les équations aux différences partielles qui représentent le mouvement du corps élastique, restent positives. Dans le cas contraire, les ondes planes ne pourraient plus se propager, et l'on en serait averti par le calcul qui donnerait pour les vitesses de propagation des valeurs imaginaires.

Dans la théorie de la lumière, on désigne sous le nom d'éther le fluide impondérable que l'on considère comme étant le milieu élastique dans lequel se propagent les ondes lumineuses. Le point de rencontre d'un grand nombre d'ondes planes dont les plans sont peu inclinés les uns aux autres, est celui dans lequel on suppose que la lumière peut être perçue par l'œil. La série des positions que ce point de rencontre prend dans l'espace, tandis que les ondes se déplacent, constitue ce qu'on nomme un rayon lumineux; et la vitesse de la lumière mesurée dans le sens de ce rayon doit être soigneusement distinguée, 1° de la vitesse de propagation des ondes planes, 2° de la vitesse propre des molécules éthérées. Enfin l'on appelle rayons polarisés ceux qui correspondent à des ondes planes dans lesquelles les vibrations des molécules restent constamment parallèles à une droite donnée, quelles que soient les directions des vibrations initiales.

Pour plus de généralité, nous dirons que, dans un rayon lumineux, la lumière est polarisée parallèlement à une droite ou à un plan donné, lorsque les vibrations des molécules lumineuses seront parallèles à cette droite ou à ce plan, sans être parallèles dans tous les cas aux directions des vibrations initiales; et nous appellerons plan de polarisation le plan qui renfermera la direction du rayon lumineux, et celle de vitesses propres de molécules éthérées. Ces définitions s'accordent, comme on le verra plus tard, avec les dénominations reçues.

Cela posé, il résulte des principes ci-dessus établis, qu'en partant d'un point donné de l'espace, un rayon de lumière dans lequel les vitesses propres des molécules ont des directions quelconques, se subdivisera généralement en trois rayons de lumières polarisées parallèlement aux trois axes d'un certain ellipsoïde. Mais chacun de ces rayons polarisés ne pourra plus être divisé par l'action du fluide élastique dans lequel la lumière se propage. De plus, le mode de polarisation dépendra de la constitution de ce fluide, c'est-à-dire de la distribution de ses molécules dans l'espace ou dans un corps transparent, et du plan qui renfermait primitivement les molécules vibrantes. Si la constitution du fluide élastique est telle que les vitesses de propagation des ondes planes deviennent imaginaires, cette propagation ne pourra plus s'effectuer, et le corps dans lequel le fluide éthéré se trouve compris, deviendra ce qu'on nomme un corps opaque. Si le corps reste transparent, et si dans ce corps le fluide éthéré se trouve distribué de telle sorte que son élasticité demeure la même en tous sens autour d'un point quelconque, les trois rayons polarisés dans lesquels se subdivise généralement un rayon de lumière, seront dirigés suivant la même droite ; et, comme la vitesse de la lumière sera la même dans les deux premiers rayons, ceux-ci se confondront l'un avec l'autre. Il ne restera donc alors que deux rayons polarisés, l'un double, l'autre simple, ayant la même direction. Or, le calcul fait voir que dans le rayon simple la lumière sera polarisée suivant la direction dont il s'agit ; tandis que dans le rayon double la lumière sera polarisée perpendiculairement à cette direction. Si les vibrations initiales des molécules lumineuses sont renfermées dans un plan perpendiculaire à la direction dont il s'agit, le rayon simple disparaîtra, et les vitesses propres des molécules dans le rayon double resteront constamment dirigées suivant des droites parallèles aux directions des vitesses initiales ; de sorte qu'à proprement parler, il n'y aura plus de polarisation. Alors aussi la vitesse de propagation de la lumière sera équivalente à la vitesse de propagation d'une onde plane, et la même en tous sens autour de chaque point. Or, la réduction de tous les rayons à un seul, et l'absence de toute polarisation dans les milieux où la lumière se propage en tous sens avec la même vitesse, étant des faits constatés par l'expérience, nous devons conclure de ce qui précède que dans ces milieux les vitesses propres des molécules éthérées sont perpendiculaires aux directions des rayons lumineux, et comprises dans les ondes planes. Ainsi l'hypothèse admise par Fresnel devient une réalité. Cet habile physicien, malheureusement enlevé aux sciences par une mort prématurée, a donc eu raison de dire que dans la lumière ordinaire les vibrations sont transversales, c'est-à-dire perpendiculaires aux directions des rayons. A la vérité, les idées de Fresnel sur cet objet ont été vivement combattues par un illustre académicien dans plusieurs articles que renferment les Annales de physique et de chimie, et dont l'un est relatif au mouvement de deux fluides superposés. Suivant l'auteur de ces articles, les vibrations des molécules dans l'éther finiraient par être toujours sensiblement perpendiculaires aux surfaces des ondes que le mouvement produit en se propageant; et dès lors la polarisation, telle qu'elle a été précédemment définie, deviendrait impossible et disparaîtrait complètement. Alors aussi la surface des ondes serait toujours un ellipsoïde, et n'offrirait qu'une seule nappe, en sorte que, pour expliquer la double réfraction, on serait obligé de supposer deux fluides éthérés simultanément renfermés dans le même milieu. Mais on doit remarquer que l'auteur, comme il le dit lui-même, avait déduit ces diverses conséquences de l'intégration de l'équation connue aux différences partielles qui représente les mouvements des fluides élastiques, et de celle qu'on en déduit lorsqu'on suppose inégaux les trois coefficients des dérivées partielles de la variable principale. Or, ces équations ne paraissent point applicables à la propagation des ondes lumineuses dans un fluide éthéré, et l'accord remarquable de la théorie que je propose avec l'expérience me semble devoir confirmer l'assertion que j'ai déja émise dans un précédent mémoire sur le mouvement de la lumière : savoir, que les équations différentielles de ce mouvement sont comprises dans celles que renferment les 31 et 32^e livraisons des *Exercices de mathématiques*.

Dans la seconde partie de ce mémoire que je me propose de lire à la séance prochaine, j'appliquerai les principes que je viens d'établir à la détermination des lois suivant lesquelles la lumière se propage dans les cristaux à un seul axe ou à deux axes optiques, et je montrerai comment on peut déduire de mes formules des règles propres à faire connaître les vitesses de propagation des ondes élémentaires, et les plans de polarisation des rayons lumineux. Lorsqu'on s'arrête à un premier degré d'approximation, ces règles s'accordent d'une manière digne de remarque avec celles que plusieurs savants ont déduites de l'expérience ou de l'hypothèse des ondulations, et en particulier avec celles que Fresnel a données dans son beau mémoire sur la double réfraction. Seulement il s'est trompé en admettant que les vibrations des molécules éthérées dans un rayon lumineux étaient sensiblement perpendiculaires au plan généralement nommé plan de polarisation. Dans la réalité, le plan de polarisation renferme la direction du rayon et celle des vibrations de l'éther. Un jeune géomètre, M. Blanchet, avait, de son côté, et même avant moi, déduit cette conséquence et les lois de la polarisation pour les cristaux à un seul axe optique des premières formules que j'avais données. Mais la nouvelle analyse dont j'ai fait usage ne laisse rien à désirer à cet égard, et s'étend à tous les cas possibles.

Je ferai voir encore dans la seconde partie du mémoire que la pression est nulle dans le fluide éthéré qui propage les vibrations lumineuses; et je montrerai les conditions auxquelles doivent satisfaire les coëfficients renfermés dans les équations différentielles du mouvement des corps élastiques, pour que la surface de l'onde lumineuse acquière la forme indiquée par l'expérience. Enfin, dans une troisième partie, je dirai comment on peut établir les lois de la réflexion et de la réfraction à la première ou à la seconde surface d'un corps transparent, et déterminer la proportion de lumière réfléchie ou réfractée. Ici encore, la théorie s'accorde parfaitement avec l'observation, et l'analyse me ramène aux lois que plusieurs physiciens ont déduites de l'expérience. Ainsi, en particulier, le calcul me fournit la loi de M. Brewster sur l'angle de la polarisation complète par réflexion, et la loi de M. Arago sur la quantité de lumière réfléchie à la première ou à la seconde surface d'un milieu transparent. J'obtiens aussi les formules que Fresnel a insérées dans le 17^e^ numéro des *Annales de physique et de chimie*, et qui suffiraient à elles seules pour constater la sagacité vraiment extraordinaire de cet illustre physicien.

Enfin je rechercherai les moyens à l'aide desquels les physiciens pourront constater la réalité de la triple réfraction, ou, ce qui revient au même, l'existence du troisième rayon polarisé, traversant un milieu dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens.

DEUXIÈME PARTIE.

Présentée à l'Académie, le 14 juin 1830.

Ainsi qu'on l'a vu dans la première partie de ce mémoire, l'intégration des équations aux différences partielles que j'ai données dans les exercices, comme propres à représenter le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, conduit directement à l'explication des divers phénomènes que présente la théorie de la lumière. Il y a plus : pour établir cette théorie, il n'est pas nécessaire de recourir aux intégrales générales des équations dont il s'agit. Il suffit de discuter les intégrales particulières qui expriment le mouvement de propagation d'une onde plane dans un milieu élastique. En effet, la sensation de lumière étant supposée produite par les vibrations des molécules d'un fluide éthéré, pour déterminer la direction et les lois suivant lesquelles de semblables vibrations, d'abord circonscrites dans des limites très-resserrées, autour d'un certain point O, se propageraient à travers ce fluide, il suffit de considérer au premier instant un grand nombre d'ondes planes qui se superposent dans le voisinage du point O, et d'admettre que, les plans de ces ondes étant peu inclinés les uns sur les autres, les vibrations des molécules sont assez petites pour rester insensibles dans chaque onde prise séparément, mais deviennent sensibles par la superposition indiquée. Or, le calcul nous a fait voir que dans un fluide éthéré, dont l'élasticité n'est pas la même en tous sens, chaque onde plane se subdivise généralement en trois autres de même épaisseur, comprises dans des plans parallèles, mais propagées avec des vitesses différentes, de chaque côté du plan qui renfermait l'onde initiale. Nous en avons conclu qu'un système d'ondes planes superposées d'abord dans le voisinage d'un point donné O, se subdivise en trois systèmes d'ondes qui viennent successivement se superposer en différents points de l'espace, et nous avons nommé rayon lumineux la droite qui renferme, pour l'un des systèmes, tous les points de superposition. Nous avons ainsi montré que trois rayons lumineux résultent généralement de vibrations moléculaires qui ne s'étendaient d'abord qu'à une très-petite distance autour du point O. Nous avons d'ailleurs reconnu que, dans chacun de ces rayons lumineux, les vibrations des molécules éthérées demeuraient constamment parallèles à l'un des trois axes d'un certain ellipsoïde, et qu'en conséquence dans les trois rayons la lumière était polarisée suivant trois directions perpendiculaires l'une à l'autre, et parallèles aux trois axes de l'ellipsoïde, quelles que fussent, d'ailleurs, les directions des vibrations initiales. Nous avons vu les trois rayons se réduire à deux, ou même à un seul, lorsque les vibrations initiales étaient parallèles à l'un des plans principaux de l'ellipsoïde ou à l'un de ses axes, et dès lors il a été facile de comprendre pourquoi les rayons polarisés ne se subdivisent pas à l'infini. Nous avons prouvé que dans le cas ou l'élasticité de l'éther est la même en tous sens, les trois rayons se réduisaient à deux; savoir : un rayon simple et un rayon double, dirigés suivant la même droite, et polarisés, le premier parallèlement, le second perpendiculairement à cette droite. Enfin nous avons vu le rayon simple disparaître, lorsque les vibrations initiales des mélécules de l'éther étaient supposées perpendiculaires aux directions des rayons, et alors il n'y avait plus, à proprement parler, de polarisation. Or, la réduction de tous les rayons à un seul, et l'absence de toute polarisation dans les milieux où la lumière reste la même en tous sens, étant constatées par l'expérience, nous avons tiré de notre analyse cette conclusion définitive que, dans la lumière ordinaire, les vibrations sont transversales, c'est-à-dire perpendiculaires aux directions des rayons; et ainsi l'hypothèse que Fresnel avait admise, malgré les arguments et les calculs d'un illustre adversaire, s'est transformée en une réalité.

Nous allons maintenant appliquer la théorie que nous venons de reproduire en peu de mots à la propagation de la lumière dans les cristaux à un axe ou à deux axes optiques. Pour y parvenir, il ne sera pas nécessaire d'employer les équations générales que nous avons données dans la 31e livraison des *Exercices* comme propres à représenter le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, et l'on pourra réduire ces équations aux formules (68) de la page 208 du troisième volume, c'est-à-dire, aux formules qui expriment le mouvement d'un système qui offre trois axes d'élasticité perpendiculaires entre eux. On pourra d'ailleurs supposer qu'aucune force intérieure n'est appliquée au système, et alors les formules dont il s'agit renfermeront seulement le temps t, les coordonnées x, y, z d'une molécule quelconque m, ses déplacements ξ, η, ζ, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et neuf coefficients G, H, I, L, M, N, P, Q, R, dont les trois premiers sont proportionnels aux pressions supportées, dans l'état naturel du fluide éthéré, par trois plans respectivement perpendiculaires à ces mêmes axes. Les coefficients dont il est ici question étant regardés comme constants, on construira sans peine l'ellipsoïde dont les trois axes sont réciproquement proportionnels aux trois vitesses de propagation des ondes planes parallèles à un plan donné, et dirigés parallèlement aux droites suivant lesquelles se mesurent les vitesses propres des molécules éthérées dans ces ondes planes. On pourra aussi déterminer, 1° les directions des trois rayons polarisés produits par la subdivision d'un rayon lumineux dans lequel les vibrations des molécules auraient des directions quelconques; 2° la vitesse de la lumière dans chacun de ces trois rayons; 3° les diverses valeurs que prendrait cette vitesse, dans les rayons polarisés produits par la subdivision de plusieurs rayons lumineux qui partiraient simultanément d'un même point. Enfin l'on pourra construire la surface à trois nappes, qui, au bout du temps t, passerait par les extrémités de ces rayons, et que l'on nomme la surface des ondes. Quant à l'intensité de la lumière, elle sera mesurée, dans chaque rayon, par le carré de la vitesse des molécules. Cela posé, si l'élasticité du fluide éthéré reste la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z, on aura,

$$(1) \qquad G=H,\ L=M=3R,\ P=Q;$$

et par conséquent les neuf coefficients dépendants de la distribution des molécules dans l'espace se réduiront à cinq, savoir : H, I, N, Q, R. Il y a plus : deux nappes de la surface ci-dessus mentionnée pourront se réduire au système de deux ellipsoïdes de révolution circonscrits l'un à l'autre; et, pour que cette dernière réduction ait lieu, il suffira que la condition

$$(2) \qquad (3R-Q)(N-Q)=4Q^2$$

soit remplie. Enfin l'un des deux ellipsoïdes deviendra une sphère qui aura pour diamètre l'axe de révolution de l'autre ellipsoïde, si l'on suppose

$$(3) \qquad H=I;$$

et alors la marche des deux rayons polarisés sera précisément celle qu'indique le théorème d'Huyghens, relatif aux cristaux qui offrent un seul axe optique. Or, l'exactitude de ce théorème ayant été mise hors de doute par les nombreuses expériences des physiciens les plus habiles, il résulte de notre analyse que, dans les cristaux à un axe optique, les coefficients H, I, N, Q, R, vérifient les conditions (2) et (3). D'ailleurs l'élasticité du fluide éthéré n'étant, par hypothèse, la même en tous sens qu'autour de l'axe des z, il n'est pas naturel d'admettre que l'on ait $G=H=I$, à moins que l'on ne suppose les trois coefficients G, H, I, généralement nuls. Il est donc très-probable que dans l'éther ces trois coefficients s'évanouissent, et avec eux les pressions supportées par un plan quelconque dans l'état naturel. Cette hypothèse étant admise, l'ellipsoïde et la sphère ci-dessus mentionnés seront représentés par les équations

$$(4) \qquad \frac{x^2+y^2}{R}+\frac{z^2}{Q}=t^2, \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{Q}=t^2;$$

en sorte que $\sqrt{Q}$ sera le demi-diamètre de la sphère, et $\sqrt{R}$ le demi-diamètre de l'équateur dans l'ellipsoïde. Il importe d'observer que dans les cristaux doués d'un seul axe optique, ces deux demi-diamètres, ou leurs carrés Q, R, sont toujours très-peu différents l'un de l'autre, et qu'en conséquence l'ellipse génératrice de l'ellipsoïde offre une excentricité très-petite. Il en résulte aussi que la condition (2) se réduit sensiblement à la suivante

$$N=3R,$$

c'est-à-dire, à une condition qui est remplie, toutes les fois que l'élasticité d'un milieu reste la même en tous sens autour d'un point quelconque. Ajoutons que l'intensité de la lumière déterminée par le calcul pour chacun des deux rayons polarisés que nous considérons ici, est précisément celle que fournit l'observation. Quant au troisième rayon polarisé, le calcul montre qu'il est très-difficile de l'apercevoir, attendu que l'intensité de la lumière y demeure toujours très-petite quand elle n'est pas rigoureusement nulle. Nous rechercherons plus tard les moyens d'en constater l'existence.

Concevons à présent que, dans le fluide éthéré, l'élasticité cesse d'être la même en tous sens autour d'un axe parallèle à l'axe des z. Si l'on coupe la surface des ondes lumineuses par les plans coordonnés, les sections faites dans deux nappes de cette surface pourront se réduire aux trois cercles et aux trois ellipses représentées par les équations

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{y^2}{R} + \dfrac{z^2}{Q} = t^2, & \dfrac{y^2 + z^2}{P} = t^2; \\ \dfrac{z^2}{P} + \dfrac{x^2}{R} = t^2, & \dfrac{z^2 + x^2}{Q} = t^2; \\ \dfrac{x^2}{Q} + \dfrac{y^2}{P} = t^2, & \dfrac{x^2 + y^2}{R} = t^2; \end{array} \right.$$

et, pour que cette réduction ait lieu, il suffira que, les coefficients G, H, I étant nuls, les trois conditions

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{c} (M-P)(N-P) = 4P^2, \quad (N-Q)(L-Q) = 4Q^2, \\ (L-R)(M-R) = 4R^2, \end{array} \right.$$

toutes trois semblables à la condition (2), soient vérifiées. Il y a plus, si les excentricités des trois ellipses sont assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés, les conditions

(6) entraîneront la suivante

$$(M-P)(N-Q)(L-R)=(N-P)(L-Q)(M-R)$$
$$=8PQR,$$

et l'équation de la surface des ondes pourra être réduite à

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(Px^2+Qy^2+Rz^2) \\ &-[P(Q+R)x^2+Q(R+P)y^2+R(P+Q)z^2]t^2+t^4=0. \end{aligned}\right.$$

Or, les trois cercles, les trois ellipses, et la surface du 4^e degré représentées par les équations (5), (7), sont précisément celles que Fresnel a données comme propres à indiquer la marche des deux rayons polarisés, aperçus jusqu'à ce jour dans les cristaux à deux axes optiques ; et l'on sait d'ailleurs que, dans ces cristaux, les excentricités des ellipses sont fort petites Donc les conditions (6) doivent y être sensiblement vérifiées. Au reste, il est bon d'observer que si les excentricités devenaient nulles, ou, en d'autres termes, si l'on avait

$$(8)\qquad P=Q=R,$$

les conditions (6) donneraient

$$(9)\qquad L=M=N=3R,$$

et que les conditions (8), (9) sont précisément celles qui doivent être remplies pour que l'élasticité d'un milieu reste la même dans tous les sens.

Quant au troisième rayon polarisé, comme l'intensité de sa lumière est fort petite, il sera généralement très-difficile de l'apercevoir, ainsi que nous l'avons déja remarqué.

En résumant ce qu'on vient de dire, on voit que, les conditions (6) étant supposées rigoureusement remplies, les sections faites dans la surface des ondes lumineuses par les plans coordonnés, coincideront exactement avec celles que Fresnel a données. Quant à la surface même, elle sera peu différente de la surface du 4e degré que cet illustre physicien a obtenue, et par conséquent cette dernière est dans la théorie de la lumière ce qu'est le mouvement elliptique des planètes dans le système du monde.

Les excentricités des ellipses suivant lesquelles la surface des ondes se trouve coupée par les plans coordonnés étant généralement fort petites pour les cristaux à un ou à deux axes optiques, il en résulte qu'on peut déterminer avec une grande approximation, dans ces cristaux, les vitesses de propagation des ondes planes, et les plans de polarisation des rayons lumineux à l'aide de la règle que je vais indiquer.

Pour obtenir les vitesses de propagation des ondes planes parallèles à un plan donné ABC, et correspondantes aux deux rayons polarisés que transmet un cristal à un ou à deux axes optiques, il suffit de couper l'ellipsoïde que représente l'équation

$$\frac{x^2}{P}+\frac{y^2}{Q}+\frac{z^2}{R}=1 \tag{10}$$

par un plan diamétral parallèle au plan donné. La section ainsi obtenue sera une ellipse dont les deux axes seront numériquement égaux aux vitesses de propagation des ondes planes dans les deux rayons. De plus, celui de ces deux rayons dans lequel les ondes planes se propageront avec une vitesse représentée par le grand axe de l'ellipse, sera polarisé parallèlement au petit axe, et réciproquement le rayon dans lequel les ondes planes se propageront avec une vitesse représentée par le petit axe de l'ellipse, sera polarisé parallèlement au grand axe. Si l'on fait coincider le plan *ABC* avec l'un des plans principaux de l'ellipsoïde, les deux rayons polarisés suivront la même route, et les deux vitesses de la lumière dans ces rayons seront précisément les vitesses de propagation des ondes planes. Par suite, les vitesses de la lumière dans les six rayons polarisés, dont les directions coincident avec les trois axes de l'ellipsoïde, sont deux à deux égales entre elles et à l'un des nombres $\sqrt{P}$, $\sqrt{Q}$, $\sqrt{R}$. Ajoutons que les deux rayons dont la vitesse est $\sqrt{P}$ sont polarisés perpendicurement à l'axe des x, ceux dont la vitesse est $\sqrt{Q}$ perpendiculairement à l'axe des y, et ceux dont la vitesse est $\sqrt{R}$ perpendiculairement à l'axe des z. Dans le cas particulier où les quantités P, Q deviennent égales entre elles, la surface représentée par l'équation (10), ou

$$(11) \qquad \frac{x^2+y^2}{Q}+\frac{z^2}{R}=1,$$

devient un ellipsoïde de révolution dont l'axe est ce qu'on appelle l'axe optique du cristal. Alors, l'un des demi-axes de la section faite par un plan diamétral quelconque est constamment égal à $\sqrt{Q}$, ainsi que la vitesse de la lumière dans l'un des deux rayons polarisés. Le rayon dont il s'agit est celui qu'on nomme rayon ordinaire, et il se trouve polarisé parallèlement à la droite, qui dans le plan *ABC* forme le plus petit et le plus grand angle avec l'axe optique, tandis que l'autre rayon, appelé rayon extraordinaire, est polarisé parallèlement à la droite d'intersection du plan *ABC* et d'un plan perpendiculaire à l'axe optique. Alors aussi les deux rayons ordinaire et extraordinaire se superposent, quand ils sont dirigés suivant l'axe optique, et se réduisent à un rayon unique qui n'offre plus aucune trace de polarisation.

Lorsque les trois quantités P, Q, R, sont inégales, l'ellipsoïde représenté par l'équation (10) peut être coupé suivant des cercles par deux plans diamétraux qui renferment tous deux l'axe moyen. Donc les deux rayons polarisés se superposent lorsque les ondes planes deviennent parallèles à l'un de ces plans. Alors la direction commune des deux rayons est ce qu'on appelle un axe optique. Donc, pour les cristaux dans lesquels l'élacticité de l'éther n'est pas la même en tous sens autour d'un axe, il existe deux axes optiques suivant lesquels se dirigent les rayons qui n'offrent plus aucune trace de polarisation.

Toutes ces conséquences de notre analyse sont conformes à l'expérience, et même, dans des leçons données au collége royal de France, M. Ampère avait déja remarqué que la construction de l'ellipsoïde représenté par l'équation (10) fournit le moyen de déterminer les vitesses de propagation des ondes planes et des plans de polarisation des rayons lumineux. Seulement ces plans, que l'on croyait perpendiculaires aux directions des vitesses propres des molécules éthérées, renferment au contraire ces mêmes directions.

Nous ajouterons qu'à l'équation (10) on pourrait substituer la suivante

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{P}x^2 + \mathrm{Q}y^2 + \mathrm{R}z^2 = 1.$$

En effet, les deux sections faites par un même plan dans les deux ellipsoïdes que représentent les équations (10) et (12) ont leurs axes parallèles, et ceux de la seconde section sont respectivement égaux aux quotients qu'on obtient en divisant l'unité par les axes de la première.

P. S. Pour faire mieux saisir les principes ci-dessus exposés, je développerai, dans un second mémoire, les diverses formules que j'ai seulement indiquées dans celui-ci. Je ferai encore, au sujet des mêmes principes, deux remarques importantes; et d'abord, lorsqu'on parle de l'attraction ou de la répulsion mutuelle des molécules d'un fluide éthéré, on doit seulement entendre que, dans la théorie de la lumière, tout se passe comme si les molécules de l'éther s'attiraient ou se repoussaient effectivement. Ainsi la recherche des lois que présentent les phénomènes si variés de la propagation, de la réflexion, de la réfraction, etc., de la lumière, se réduit au développement d'une loi plus générale qui renferme toutes les autres. C'est ainsi que, dans le système du monde, on ramène la détermination des lois suivant lesquelles se meuvent les corps célestes, à l'hypothèse unique de la gravitation universelle.

Je remarquerai en second lieu que, pour établir les propositions énoncées dans ce mémoire, nous avons eu recours aux formules (68) de la page 208 des Exercices de mathématiques, et que, pour réduire les équations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle aux formules dont il s'agit, on est obligé de négliger plusieurs termes, par exemple ceux qui renferment les puissances supérieures des déplacemens ξ, η, ζ, et de leurs dérivés prises par rapport aux variables indépendantes x, y, z. Lorsqu'on cesse de négliger ces mêmes termes, on obtient, comme je le montrerai dans un nouveau Mémoire déja présenté à l'Académie, des formules à l'aide desquelles on peut non-seulement assigner la cause de la dispersion des couleurs par le prisme, mais encore découvrir les lois de ce phénomène qui, malgré les nombreux et importants travaux des physiciens sur cette matière, étaient restées inconnues jusqu'à ce jour.

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT DE DEUX FLUIDES ÉLASTIQUES SUPERPOSÉS (*).

PAR M. POISSON.

LA propagation du mouvement, dans un milieu de nature quelconque, présente deux problèmes essentiellement différents : on peut supposer qu'à une époque déterminée, le mouvement a été imprimé d'une manière quelconque à une partie du système; et l'on doit alors conclure de ce mouvement initial, l'état futur de tous les points du système à un instant quelconque ; ou bien le mouvement est produit et entretenu par une cause constante, telle que les vibrations d'un corps solide; auquel cas il s'agit de déterminer les vibrations correspondantes du milieu environnant. Mon Mémoire sur le mouvement des fluides élastiques dans des tuyaux

(*) Ce Mémoire est une partie de celui que j'ai lu à l'Académie le 24 mars 1823, sous le titre de *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques*.

cylindriques et sur la théorie des instruments à vent, renferme des exemples de ces deux problèmes. Dans celui-ci, je ne m'occuperai que du premier; et mon objet principal sera de déterminer les modifications que le mouvement éprouve, soit dans sa direction, soit dans son intensité, en passant d'un fluide à un autre; question importante en elle-même, et indépendamment de ses applications à la physique, que j'ai déja traitée dans le Mémoire cité, mais seulement sous le rapport des changements d'intensité (*). La méthode que j'emploierai pour la résoudre est celle dont j'ai fait usage pour la première fois à la fin de mon second Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides, et que j'ai appliquée, dans ces derniers temps, à un grand nombre d'autres questions de physique ou de mécanique, dépendantes des équations linéaires aux différences partielles. Elle consiste en un procédé uniforme pour déterminer, d'après l'état initial du système, les coefficients des séries de sinus ou d'exponentielles qui expriment leurs intégrales complètes; et l'on peut également l'employer, soit que ces équations ne contiennent que deux variables indépendantes, ou qu'elles en renferment un plus grand nombre, et soit aussi que leurs coefficients soient constants, ou qu'ils soient des fonctions de ces variables.

(*) Nouveaux Mémoires de l'Académie, tom. II, page 372.

§ I.

Formules générales.

(1) Considérons deux fluides homogènes et partout à la même température. Faisons abstraction de la pesanteur, de sorte que, dans l'état d'équilibre, la densité soit constante pour chaque fluide, et la force élastique aussi constante et la même pour les deux fluides. Dans ce même état, leur surface de séparation sera un plan qui se prolongera indéfiniment en tous sens et que nous supposerons horizontal, pour fixer les idées. Pendant le mouvement, les vitesses et les dilatations seront très-petites, et l'on négligera, comme dans la théorie du son, leurs carrés et leurs produits.

Soit M un point quelconque du système. Désignons par x, y, z, ses trois coordonnées rectangulaires qui auront pour origine un point O du fluide supérieur : l'axe des x sera vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur; les axes des y et des z seront horizontaux. Représentons le temps par t, et supposons que $t = 0$ réponde à l'origine du mouvement. Les composantes de la vitesse du point M à un instant quelconque, seront, comme on sait, les trois différences partielles relatives à x, y, z, d'une même fonction de ces variables et de t, en admettant toutefois que cette condition soit remplie quand $t = 0$, c'est-à-dire, dans l'état initial du système. Nous désignerons cette fonction par φ pour le fluide supérieur et par φ' pour le fluide inférieur; et, cela étant, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \\ \frac{d^2\varphi'}{dt^2} &= a'^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + \frac{d^2\varphi'}{dz^2}\right); \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

a et a' étant des constantes positives, qui exprimeront les vitesses de propagation du mouvement dans le premier et dans le second fluide. Nous supposerons qu'on a $a > a'$, en sorte que le fluide supérieur est celui pour lequel la vitesse de propagation est la plus grande. Dans le cas de $a = a'$, les deux fluides n'en forment plus qu'un seul, du moins quant aux lois de leur mouvement. Dans le cas général, leurs dilatations seront représentées par $\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt}$, c'est-à-dire que si l'on suppose qu'au point M et au bout du temps t, la densité du fluide soit à sa densité naturelle comme $1 - s$ est à l'unité, pour le fluide supérieur, et comme $1 - s'$ est à l'unité, pour le fluide inférieur, on aura

$$s = \frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}, \qquad s' = \frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt}.$$

Appelons h la hauteur du point O au-dessus du plan de contact des deux fluides, de sorte qu'on ait $x = h$ pour tous les points de ce plan, avant que le mouvement ait commencé. En tous ses points, la vitesse verticale sera constamment la même pour les deux fluides; on aura donc

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi'}{dx},$$

pour $x = h$ et quel que soit t. Les forces élastiques des deux fluides y seront aussi égales pendant toute la durée du mouvement; car si l'on considère une portion m de matière, qui s'étende dans chaque fluide jusqu'à une distance insensible de leur plan de contact, cette petite masse sera poussée verticalement par la différence de leurs forces élastiques : elle prendrait donc une vitesse extrêmement grande, si cette différence avait une grandeur sensible; ce qui serait contraire à la supposition que les vitesses sont très-petites dans toute l'étendue des deux fluides. Les forces élastiques relatives à leurs points de contact, étant égales dans l'équilibre et pendant le mouvement, les dilatations s et s' le seront aussi (*), et l'on aura

$$\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt},$$

pour $x=h$ et pour toutes les valeurs de t.

Je supposerai les deux fluides terminés horizontalement par des plans fixes, et je désignerai par k l'épaisseur du fluide supérieur et par l celle du fluide inférieur. Pour tous les points adjacents à ces deux plans fixes, la vitesse verticale sera constamment nulle; on aura donc

$$\frac{d\varphi}{dx}=0,\quad \frac{d\varphi'}{dx}=0;$$

la première équation ayant lieu pour $x=h-k$, la seconde pour $x=h+l$, et toutes deux pour toutes les valeurs de t.

Telles sont les équations différentielles du problème dont il s'agira de déduire les expressions de φ et φ' en fonctions de x, y, z, t, en y joignant les données relatives à l'état initial du système. Or, nous supposerons qu'on a

$$\varphi=f(x,y,z),\qquad \varphi'=f'(x,y,z),$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=\mathrm{F}(x,y,z),\quad \frac{d\varphi'}{dt}=\mathrm{F}'(x,y,z),$$

(*) Si l'on avait égard à ce que la force élastique ne croît pas exactement dans le même rapport que la densité pendant le mouvement, il faudrait employer dans l'équation suivante, des constantes b et b' différentes de a et a' qui entrent dans les équations (1).

quand $t = 0$: ces quatre fonctions f, f', F, F', seront données pour toutes les valeurs de y et z, positives ou négatives; les deux premières depuis $x = h - k$ jusqu'à $x = h$, et les deux dernières depuis $x = h$ jusqu'à $x = h + l$: elles pourront avoir une forme quelconque, continue ou discontinue, pourvu seulement qu'elles satisfassent aux équations précédentes, relatives aux valeurs extrêmes de x.

(2) Quelles que soient les inconnues φ et φ', on pourra, d'après un théorème connu (*), les représenter pour toutes les valeurs de y et z, par les formules :

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\pi^2}\iiiint u \cos.\,\beta(y - y')\cos.\,\gamma(z - z')\,d\beta\, d\gamma\, dy'\, dz', \\ \varphi' &= \frac{1}{\pi^2}\iiiint v \cos.\,\beta(y - y')\cos.\,\gamma(z - z')\,d\beta\, d\gamma\, dy'\, dz'; \end{aligned}\right\} (2)$$

u et v étant ce que deviennent φ et φ' quand on y met y' et z' à la place de y et z; π désignant le rapport de la circonférence au diamètre; les intégrales relatives à y' et z' ayant $\pm \infty$ pour limites, et les autres étant prises depuis $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ jusqu'à $\beta = \infty$ et $\gamma = \infty$. A cause que les équations du numéro précédent doivent subsister pour toutes les valeurs de y et z, si l'on y substitue ces expressions de φ et φ', il faudra qu'elles aient lieu entre les coefficients du produit $\cos.\,\beta(y - y')\cos.\,\gamma(z - z')$ sous les intégrales quadruples.

(*) M. Fourier a donné le premier cet important théorème pour des fonctions d'une seule variable, qui sont égales et de même signe, ou égales et de signe contraire, quand on y change le signe de la variable. Il était facile de l'étendre à des fonctions quelconques, de deux ou d'un plus grand nombre de variables. On en peut voir la démonstration dans mes précédents Mémoires.

D'après cela, les équations (1) donneront

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}&=a^2\frac{d^2u}{dx^2}-a^2(6^2+\gamma^2),\\ \frac{d^2v}{dt^2}&=a'^2\frac{d^2v}{dx^2}-a'^2(6^2+\gamma^2).\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

On aura, en outre,

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dx},\quad \frac{1}{a^2}\frac{du}{dt}=\frac{1}{a'^2}\frac{dv}{dt},\qquad(4)$$

pour $x=h$, et les équations

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{dv}{dx}=0,\qquad(5)$$

la première pour $x=h-k$ et la seconde pour $x=h+l$.

De cette manière, nous n'aurons plus à considérer les variables y et z; mais on aurait pu également les conserver, et appliquer directement l'analyse suivante aux inconnues φ et φ'. Nous aurions pu aussi, sans nouvelle difficulté et en rendant seulement les formules plus longues à écrire, supposer que les deux fluides fussent limités latéralement au lieu de les considérer comme indéfinis parallèlement à leur surface de séparation, ce qui suffit pour l'objet principal de ce Mémoire.

(3) On satisfait de la manière la plus générale aux équations (3) et (5), en prenant

$$\begin{aligned}u&=\Sigma(\mathrm{C}\cos.\lambda t+\mathrm{D}\sin.\lambda t)\cos.\alpha(x+k-h),\\ v&=\Sigma(\mathrm{C}'\cos.\lambda t+\mathrm{D}'\sin.\lambda t)\cos.\alpha'(x-l-h),\end{aligned}$$

où l'on représente par $\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{C}', \mathrm{D}', \lambda$, des constantes arbitraires, et par α et α' d'autres constantes qui se déduiront de λ, au moyen des équations

$$\lambda^2 = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a'^2(\alpha'^2 + \beta^2 + \gamma^2). \qquad (6)$$

Elles donneront pour chaque valeur de λ, deux valeurs de α ou de α', égales et de signe contraire; mais d'après la forme des expressions de u et de v, il suffira d'y employer une seule de ces valeurs, soit pour α, soit pour α'. Les sommes Σ devront s'étendre à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de C, D, C′, D′, λ; toutefois, nous supposerons qu'on a réuni en un seul, les termes de ces sommes qui ne diffèrent que par le signe de λ, et, cela étant, nous n'étendrons plus les sommes Σ qu'aux valeurs de λ dont les carrés sont différents.

Si l'on substitue les expressions de u et v dans les équations (4) relatives à $x=h$ et qui doivent avoir lieu quel que soit t, on en conclura

$$\mathrm{C}\alpha \sin. k\alpha + \mathrm{C}'\alpha' \sin. l\alpha' = 0, \quad \mathrm{D}\alpha \sin. k\alpha + \mathrm{D}'\alpha' \sin. l\alpha' = 0.$$
$$\mathrm{C}a'^2 \cos. k\alpha - \mathrm{C}'a^2 \cos. l\alpha' = 0, \quad \mathrm{D}a'^2 \cos. k\alpha - \mathrm{D}'a^2 \cos. l\alpha' = 0.$$

On tire de là

$$\mathrm{C} = \mathrm{A}a^2 \cos. l\alpha', \quad \mathrm{D} = \mathrm{B}a^2 \cos. l\alpha',$$
$$\mathrm{C}' = \mathrm{A}a'^2 \cos. k\alpha, \quad \mathrm{D} = \mathrm{B}a'^2 \cos. k\alpha,$$

et, en outre,

$$a^2\alpha \cos. l\alpha' \sin. k\alpha + a'^2\alpha' \sin. l\alpha' \cos. k\alpha = 0; \qquad (7)$$

A et B étant deux constantes qui ne sont pas encore déterminées. Cette équation (7), jointe aux équations (6), servira à déterminer λ, α, α'. Au moyen des valeurs de C, D, C′, D′, celles de u et v deviendront

$$\left.\begin{aligned} u &= a^2\Sigma(\mathrm{A}\cos.\lambda t + \mathrm{B}\sin.\lambda t)\mathrm{U}, \\ v &= a'^2\Sigma(\mathrm{A}\cos.\lambda t + \mathrm{B}\sin.\lambda t)\mathrm{V}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{U} = \cos. l\alpha' \cos.\alpha(x+k-h), \quad \mathrm{V} = \cos. k\alpha \cos.\alpha'(x-l-h);$$

et il ne restera plus qu'à déterminer les coefficients A et B en fonctions de λ, d'après les données initiales du système.

(4) Pour y parvenir, observons qu'on a identiquement

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2} - (6^2+\gamma^2)\mathrm{U} &= -\frac{\lambda^2}{a^2}\mathrm{U}, \\ \frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} - (6^2+\gamma^2)\mathrm{V} &= -\frac{\lambda^2}{a'^2}\mathrm{V}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et, en particulier,

$$a^2\frac{d\mathrm{U}}{dx} = a'^2\frac{d\mathrm{V}}{dx}, \quad \mathrm{U}=\mathrm{V}, \text{ pour } x=h;$$

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = 0, \text{ pour } x=h-k;$$

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} = 0, \text{ pour } x=h+l.$$

Cela posé, multiplions la première équation (3) par $\mathrm{U}\,dx$, puis intégrons ses deux membres dans toute la hauteur du fluide supérieur; nous aurons

$$\frac{d^2.}{dt^2}\int_{h-k}^{h} u\mathrm{U}\,dx = a^2\int_{h-k}^{h}\left[\frac{d^2u}{dx^2} - (6^2+\gamma^2)u\right]\mathrm{U}\,dx.$$

En intégrant par partie et ayant égard aux conditions relatives à la première limite $x=h-k$, on aura

$$\int_{h-k}^{h}\frac{d^2u}{dx^2}\mathrm{U}\,dx = \left(\frac{du}{dx}\mathrm{U}\right) - \left(u\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right) + \int_{h-k}^{h}\frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2}u\,dx;$$

les parenthèses indiquant que les quantités qu'elles renferment, répondent à $x=h$. Si l'on a aussi égard à la première équation (9), on aura donc

$$\frac{d^2.}{dt^2}\int_{h-k}^{h} u\,\mathrm{U}\,dx = a^2\left(\frac{du}{dx}\mathrm{U}\right) - a^2\left(u\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right) - \lambda^2\int_{h-k}^{h} u\,\mathrm{U}\,dx.$$

On déduira de même, de la seconde équation (3),

$$\frac{d^2.}{dt^2}\int_{h}^{h+l} v\mathrm{V}\,dx = -a'^2\left(\frac{dv}{dx}\mathrm{V}\right) + a'^2\left(v\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) - \lambda^2\int_{h}^{h+l} v\mathrm{V}\,dx.$$

J'ajoute ces deux équations, après avoir divisé la première par a^2 et la seconde par a'^2. Les termes compris hors du signe $\int$ et qui répondent à $x=h$, se détruisent, en sorte que l'on a simplement

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left(\frac{1}{a^2}\int_{h-k}^{h} u\,\mathrm{U}\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_{h}^{h+l} v\mathrm{V}\,dx\right)$$
$$+\lambda^2\left(\frac{1}{a^2}\int_{h-k}^{h} u\,\mathrm{U}\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_{h}^{h+l} v\mathrm{V}\,dx\right) = 0;$$

équation différentielle du second ordre dont l'intégrale complète est

$$\frac{1}{a^2}\int_{h-k}^{h} u\,\mathrm{U}\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_{h}^{h+l} v\mathrm{V}\,dx = \mathrm{E}\cos.\lambda t + \mathrm{F}\sin.\lambda t, \qquad (10)$$

en désignant par E et F les deux constantes arbitraires. On les déterminera immédiatement au moyen des valeurs de $u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$, relatives à $t=0$, qui se déduisent des valeurs initiales de $\varphi, \varphi', \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi'}{dt}$, en y mettant y' et z' au lieu de y

et z : on aura, en effet,

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{1}{a^2}\int_{h-k}^{h} Uf(x,y',z')dx + \frac{1}{a'^2}\int_{h}^{h+l} Vf'(x,y',z')dx, \\ \lambda F &= \frac{1}{a^2}\int_{h-k}^{h} UF(x,y',z')dx + \frac{1}{a'^2}\int_{h}^{h+l} VF'(x,y',z')dx, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

en faisant $t=0$ dans l'équation (10) et dans sa différentielle première.

Maintenant, je substitue les formules (3) à la place de u et v dans cette équation (10). Comme elle doit subsister pour toutes les valeurs de t, il faudra que le coefficient de $A\cos.\lambda t + B\sin.\lambda t$ dans son premier membre, soit égal à zéro, toutes les fois que la quantité λ ne sera pas la même, abstraction faite du signe, que dans son second membre. Si donc on désigne par U' et V' et par U_1 et V_1, ce que deviennent U et V, lorsqu'on y met successivement deux valeurs de λ dont les carrés sont différents, on aura nécessairement

$$\frac{1}{a^2}\int_{h-k}^{h} U'U_1 dx + \frac{1}{a'^2}\int_{h}^{h+l} V'V_1 dx = 0; \quad (12)$$

ce qu'on pourrait d'ailleurs vérifier en ayant égard aux équations (6) et (7) et aux expressions de U et V. Mais cette équation (12) ne subsistera plus dans le cas de deux valeurs égales de λ, abstraction faite du signe ; et, en vertu de l'équation (10), on aura alors

$$A\left(\int_{h-k}^{h} U^2 dx + \int_{h}^{h+l} V^2 dx\right) = E,$$

$$B\left(\int_{h-k}^{h} U^2 dx + \int_{h}^{h+l} V^2 dx\right) = F;$$

résultat qui fera connaître les valeurs de A et B, d'après celles de E et F qu'on vient de trouver. En effectuant les intégrations indiquées, on a

$$\int_{h-k}^{h} \mathrm{U}^2 dx = (2k\alpha + \sin.2k\alpha)\frac{\cos.^2 l\alpha'}{4\alpha},$$

$$\int_{h}^{h+l} \mathrm{V}^2 dx = (2l\alpha' + \sin.2l\alpha')\frac{\cos.^2 k\alpha}{4\alpha'};$$

et si nous faisons, pour abréger,

$$\Delta = (2k\alpha + \sin.2k\alpha)\frac{\cos.^2 l\alpha'}{4\alpha} + (2l\alpha' + \sin.2l\alpha')\frac{\cos.^2 k\alpha}{4\alpha'},$$

nous aurons finalement

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{E}}{\Delta}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{F}}{\Delta}.$$

Au moyen de ces valeurs de A et B, les formules (8) deviendront

$$\left.\begin{aligned} u &= a^2\Sigma(\mathrm{E}\cos.\lambda t + \mathrm{F}\sin.\lambda t)\frac{\mathrm{U}}{\Delta}, \\ v &= a'^2\Sigma(\mathrm{E}\cos.\lambda t + \mathrm{F}\sin.\lambda t)\frac{\mathrm{V}}{\Delta}; \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

et jointes aux équations (2), elles renfermeront la solution complète du problème, puisqu'elles ne contiennent plus rien d'inconnu.

(5) Il est évident, par la nature de la question, que la quantité λ ne peut avoir que des valeurs réelles; car l'équilibre de deux fluides superposés étant un état *stable*, leurs différents points ne peuvent faire que de petites oscillations, lorsque cet état est un tant soit peu troublé; et cela exige que

la quantité $E\cos.\lambda t + F\sin.\lambda t$ soit une fonction périodique pour toutes les valeurs de λ, ce qui n'aurait pas lieu si λ avait des valeurs imaginaires, pour lesquelles cette quantité se changerait en une fonction exponentielle. Mais au moyen de l'équation (12), on peut prouver que les valeurs de α^2 et α'^2 sont aussi toutes réelles.

En effet, les équations (5) donnent

$$\alpha'^2 = \frac{a^2\alpha^2}{a'^2} + \frac{a^2 - a'^2}{a'^2}(6^2 + \gamma^2).$$

A cause de $a > a'$, la quantité α' sera réelle pour toutes les valeurs réelles de α. En substituant pour α', la racine carrée de cette formule dans les expressions de U et V, elles ne contiendront plus d'autre inconnue que α, et ne renfermeront explicitement aucune quantité imaginaire. Si α a des valeurs imaginaires dont la partie réelle ne soit pas nulle, on pourra représenter deux d'entre elles par $p \pm q\sqrt{-1}$; p et q étant des quantités réelles qui ne sont zéro, ni l'une, ni l'autre. Or, on pourra aussi supposer, dans l'équation (12), que les quantités U' et V' répondent à l'une de ces valeurs de α, à $\alpha = p + q\sqrt{-1}$, par exemple, et que U_1 et V_1 répondent à l'autre valeur $\alpha = p - q\sqrt{-1}$; alors ces quatre quantités seront de la forme :

$$U' = P + Q\sqrt{-1}, \qquad V' = R + S\sqrt{-1},$$
$$U_1 = P - Q\sqrt{-1}, \qquad V_1 = R - S\sqrt{-1},$$

P, Q, R, S, étant des fonctions réelles de la variable x; et, cela étant, l'équation (12) deviendra

$$\frac{1}{a^2}\int_{h-k}^{h}(P^2 + Q^2)dx + \frac{1}{a'^2}\int_{h}^{h+l}(R^2 + S^2)dx = 0.$$

Mais tous les éléments de ces intégrales étant réels et positifs, cette équation ne pourra pas subsister à moins qu'on n'ait $P = 0$ et $Q = 0$ dans toute la hauteur du fluide supérieur, et $R = 0$ et $S = 0$ dans toute celle du fluide inférieur; ce qu'on peut regarder comme impossible; donc aussi, il est impossible que l'inconnue α ait des valeurs en partie réelles et en partie imaginaires, ou dont le carré ne soit pas une quantité réelle (*).

Il en sera de même à l'égard de α', en vertu de la liaison qui existe entre cette quantité et α; mais comme on a supposé (nº 3) qu'on ne pendrait pour α et α', qu'une seule des deux valeurs égales et de signe contraire dont chacune de ces quantités est susceptible, et que l'équation (12) n'a lieu que dans cette hypothèse, il s'en suit qu'elle ne pourrait pas servir à prouver que α et α' n'ont pas de valeurs imaginaires de la

---

(*) Cette démonstration a été ajoutée depuis la lecture de ce Mémoire. Nous ferons observer, à cette occasion, que dans une question différente de celle-ci, on pourrait craindre que les quantités P, Q, R, S, ne fussent de la nature des fonctions de x qui sont nulles dans un intervalle déterminé des valeurs de la variable, savoir, P et Q depuis $x = h - k$ jusqu'à $x = h$, et R et S depuis $x = h$ jusqu'à $x = h + l$. Alors il ne serait plus suffisamment prouvé que l'inconnue n'eût que des valeurs réelles; mais si elle en avait d'imaginaires, les termes correspondants n'entreraient pas dans les sommes Σ, puisque leurs coefficients U et V seraient nuls en même temps que P, Q, R, S. Cette remarque est nécessaire pour prévenir un objection qu'on pourrait élever contre l'usage de la démonstration précédente, dans tous les problèmes de physique ou de mécanique, où l'on exprime les intégrales par des séries d'exponentielles ou de sinus dont les exposants ou les arcs sont proportionnels au temps et ont des coefficients donnés par une équation transcendante qui est souvent très-compliquée.

forme $\pm q\sqrt{-1}$, ou dont le carré soit réel. L'une ou l'autre de ces quantités admet effectivement de semblables valeurs; mais il importe de remarquer que dans le cas ou les hauteurs k et l des deux fluides sont très-grandes, et, à plus forte raison, quand elles deviennent infinies, on ne peut pas avoir, à la fois, $\alpha = \pm \alpha_1 \sqrt{-1}$ et $\alpha' = \pm \alpha'_1 \sqrt{-1}$; α_1 et α'_1 étant des quantités réelles qu'on pourraient supposer positives. Cela résulte, en effet, de la forme même de l'équation (7); car si l'on y substitue ces valeurs de α et α', si l'on change ensuite les *sinus* et *cosinus* en exponentielles, et que l'on ne conserve que celles dont les exposants sont positifs, il vient

$$(a^2\alpha_1 + a'^2\alpha'_1)e^{k\alpha_1}e^{l\alpha'_1} = 0;$$

ce qui est impossible. Ajoutons encore que α étant imaginaire en même temps que α', à raison de $a > a'$, on en peut conclure que la seconde inconnue sera réelle et que la première seule pourra être imaginaire, dans le cas de $k = \infty$ et $l = \infty$ dont nous allons nous occuper spécialement.

Au moyen des équations (6), on pourra éliminer α' et λ dans les équations (7) et (13). On se servira ensuite de l'équation (7) pour déterminer les valeurs de α; et les sommes Σ des formules (13) s'étendront à toutes celles de ces valeurs dont les carrés sont différents.

(6) Supposons infinie, la hauteur k du fluide supérieur, et considérons successivement les valeurs réelles et positives de α, et ses valeurs de la forme $\alpha_1\sqrt{-1}$, que donnera, dans ce cas, l'équation (7); α_1 étant une quantité réelle et positive.

Quelle que soit la valeur positive de $k\alpha$, on pourra la représenter par

$$k\alpha = i\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon;$$

i étant un nombre entier et positif, et ε une quantité positive ou négative, mais moindre que $\frac{1}{2}\pi$, qui sera déterminée en fonction de i par l'équation (7). Chaque somme Σ relative aux valeurs réelles de α, se changera en autant de sommes relatives à i, qu'il y aura de valeurs différentes de ε; mais il est facile de prouver que cette inconnue ne sera susceptible que d'une seule valeur.

En effet, pour des valeurs infiniment petites de α, l'équation (7) se réduit à $\cos. k\alpha = 0$; d'où l'on tire

$$k\alpha = i\pi + \tfrac{1}{2}\pi, \quad \varepsilon = 0.$$

Si, au contraire, α est une quantité finie, il faudra que i soit infini; on pourra alors négliger ε par rapport à $i\pi$ en dehors de $\sin. k\alpha$ et $\cos. k\alpha$; et l'équation (7) deviendra

$$a^2 i\pi \cos. l\alpha' \cos. \varepsilon - a'^2 k\alpha' \sin. l\alpha' \sin. \varepsilon = 0,$$

où l'on fera

$$a' k\alpha' = \sqrt{i^2\pi^2 a^2 + (a^2 - a'^2)(\beta^2 + \gamma^2)}.$$

Or, il est évident que cette équation ne donnera qu'une seule valeur de ε, plus petite que $\frac{1}{2}\pi$, abstraction faite du signe.

Il résulte de là que dans le cas de $k = \infty$ et relativement aux valeurs réelles de α, on devra mettre dans les formules (13), $i\pi + \frac{1}{2}\pi$ à la place de $k\alpha$, en dehors de $\sin. k\alpha$ et $\cos. k\alpha$, soit que i soit un nombre fini, ou qu'il soit infini, et changer ensuite chaque somme Σ en une somme relative à i, qui s'étendra depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$. Quant aux valeurs de $\sin. k\alpha$ et $\cos. k\alpha$, l'équation (7) donnera

$$\sin. k\alpha = -\frac{a'^2 \alpha' \sin. l\alpha'}{H}, \quad \cos. k\alpha = \frac{a^2 \alpha \cos. l\alpha'}{H},$$

en faisant, pour abréger,

$$H^2 = a^4\alpha^2 \cos.^2 l\alpha' + a'^4\alpha'^2 \sin.^2 l\alpha'.$$

Après avoir substitué ces valeurs dans les quantités U et V que contiennent les formules (13), on pourra donc considérer α comme une variable continue dont la différentielle sera $\frac{\pi}{k}$, et changer, en conséquence, les sommes relatives à i ou α, en intégrales dont les limites seront $\alpha = \frac{\pi}{2k}$ et $\alpha = \infty$, ou, sans aucune erreur, zéro et l'infini.

Les expressions de U et V du n° 3 deviendront, par cette substitution,

$$\left.\begin{aligned} U &= [a^2\alpha \cos. l\alpha' \cos. \alpha(x-h) + a'^2\alpha' \sin. l\alpha' \sin. \alpha(x-h)]\frac{\cos. l\alpha'}{H}, \\ V &= [\cos. l\alpha' \cos. \alpha'(x-h) + \sin. l\alpha' \sin. \alpha'(x-h)]\frac{a^2\alpha \cos. l\alpha'}{H}. \end{aligned}\right\} (14)$$

D'ailleurs, à cause de $k = \infty$ et la variable α étant réelle, la quantité Δ du n° 4 se réduit à

$$\Delta = \tfrac{1}{2} k \cos.^2 l\alpha';$$

les parties des formules (13) qui répondent aux valeurs réelles de α, deviendront donc, dans le cas que nous examinons,

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2a^2}{\pi}\int_0^\infty \left(E \cos. \lambda t + F \sin. \lambda t\right)\frac{U\,d\alpha}{\cos.^2 l\alpha'}, \\ v &= \frac{2a'^2}{\pi}\int_0^\infty \left(E \cos. \lambda t + F \sin. \lambda t\right)\frac{V\,d\alpha}{\cos.^2 t\alpha'}. \end{aligned}\right\} (15)$$

On y mettra pour E, F, U, V, leurs valeurs données par les formules (11) et (14); on fera, en outre,

$$\lambda = a\sqrt{\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2},$$

$$\alpha' = \frac{1}{a'}\sqrt{a^2\alpha^2 + (a^2 - a'^2)(6^2 + \gamma^2)};$$

et, pour fixer les idées, on regardera ces quantités comme positives.

(7) Relativement aux valeurs de la forme $\alpha = \alpha_1\sqrt{-1}$, et en supposant toujours $k = \infty$, on aura

$$\sin. k\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}e^{k\alpha_1}, \quad \cos. k\alpha = \tfrac{1}{2}e^{k\alpha_1},$$

en désignant par e la base des logarithmes népériens. L'équation (7) deviendra donc

$$a'^2\alpha' \sin. l\alpha' - a^2\alpha_1 \cos. l\alpha' = 0. \qquad (16)$$

On aura en même temps

$$U = \tfrac{1}{2}\cos. l\alpha'\, e^{\alpha_1(x-h)}e^{k\alpha_1},$$

$$V = \tfrac{1}{2}\cos. \alpha'(x - l - h)\, e^{k\alpha_1},$$

$$\Delta = \left(\frac{2l\alpha' + \sin. 2l\alpha'}{16\alpha'} + \frac{\cos.^2 l\alpha'}{8\alpha_1}\right)e^{2k\alpha_1}.$$

L'exponentielle $e^{k\alpha_1}$ disparaîtra des formules (13), après la substitution des valeurs de E, F, U, V, Δ; et si nous faisons

$$E = E_1 e^{k\alpha_1},\ F = F_1 e^{k\alpha_1},\ U = U_1 e^{k\alpha_1},\ V = V_1 e^{k\alpha_1},\ \Delta = \Delta_1 e^{k\alpha_1},$$

ces formules deviendront

$$\left.\begin{aligned} u &= a^2\Sigma\left(E_1 \cos.\lambda t + F_1 \sin.\lambda t\right)\frac{U_1}{\Delta_1}, \\ v &= a'^2\Sigma\left(E_1 \cos.\lambda t + F_1 \sin.\lambda t\right)\frac{V_1}{\Delta_1}; \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

le sommes Σ s'étendant à toutes les valeurs réelles et positives de α_1, qui seront données par l'équation (16), et les valeurs de λ et α' étant

$$\lambda = a\sqrt{6^2+\gamma^2-\alpha_1^2},$$

$$\alpha' = \frac{1}{a'}\sqrt{(a^2-a'^2)(6^2+\gamma^2)-a^2\alpha_1^2}.$$

En ajoutant les formules (15) et (17), on aura les expressions complètes de u et v, qui répondent au cas où la hauteur du fluide supérieur est infinie; le fluide inférieur ayant encore une hauteur quelconque l. Chacune de ces expressions se trouvera ainsi composée d'une somme Σ et d'une intégrale, qui ne contiendront, l'une et l'autre, que des quantités réelles.

(8) Passons actuellement au cas où la hauteur l du fluide inférieur est aussi infinie.

Si l'on substitue dans les formules (15), à la place de E, F, U, V, leurs valeurs résultantes des équations (11) et (14), le facteur $\cos.^2 l\alpha'$ disparaîtra au dénominateur qui se réduira à H^2. Or, on aura

$$2H^2 = (a^2\alpha - a'^2\alpha')^2 + 2(a^2\alpha - a'^2\alpha)(a^2\alpha + a'^2\alpha')\cos. 2l\alpha' + (a^2\alpha + a'^2\alpha')^2;$$

les quantités α et α' étant réelles et positives, la fraction

$$\frac{a^2\alpha - a'^2\alpha'}{\alpha^2\alpha + a'^2}$$

sera toujours plus petite que l'unité; par conséquent on obtiendra une série convergente en développant H^{-2} suivant les puissances de cette fraction. D'ailleurs, ce développement sera de la forme :

$$H^{-2} = A_0 + A_1\cos. 2l\alpha' + A^2\cos. 4l\alpha' + \text{etc.};$$

A_0, A_1, A_2, etc., désignant des coefficients indépendants de $2l\alpha'$. De là, il résulte que les quantités soumises à l'intégration dans les formules (15), seront des séries de *sinus* et de *cosinus* de $2l\alpha'$, comprenant un terme indépendant de cet angle. Or, dans le cas de $l=\infty$, il est évident que l'intégration fera évanouir tous les termes périodiques ou dépendants de $2l\alpha'$, et ne laissera subsister que les termes non-périodiques. Il suffira donc de réduire à ces derniers, les quantités comprises sous les signes $\int$.

Les termes de cette nature s'obtiennent facilement par des intégrations relatives à $l\alpha'$; et si l'on fait $l\alpha'=\omega$, on aura, de cette manière,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos.^2\omega\, d\omega}{a^4\alpha^2\cos.^2\omega+a'^4\alpha'^2\sin.^2\omega}=\frac{1}{a^2\alpha(a^2\alpha+a'^2\alpha')},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin.^2\omega\, d\omega}{a^4\alpha^2\cos.^2\omega+a'^4\alpha'^2\sin.^2\omega}=\frac{1}{a'^2\alpha'(a^2\alpha+a'^2\alpha')},$$

pour les parties non-périodiques de $H^{-2}\cos.^2 l\alpha'$ et $H^{-2}\sin.^2 l\alpha'$, seules quantités comprises sous les signes $\int$, dont les développements puissent renfermer de semblables termes.

Avant de substituer les formules (11) à la place de E et F dans les formules (15), nous mettrons x' au lieu de x sous les signes $\int$ que les premières renferment. Ensuite, nous ferons, pour abréger,

$$p = a^2 \alpha \cos.\alpha(x-h)\int_{-\infty}^{h} f(x',y',z')\cos.\alpha(x'-h)\,dx'$$
$$+ a'^2\alpha' \sin.\alpha(x-h)\int_{-\infty}^{h} f(x',y',z')\sin.\alpha(x'-h)\,dx'$$
$$+ \frac{a^4\alpha}{a'^2}\cos.\alpha(x-h)\int_{h}^{\infty} f'(x',y',z')\cos.\alpha'(x'-h)\,dx'$$
$$+ \frac{a^4\alpha}{a'^2}\sin.\alpha(x-h)\int_{h}^{\infty} f'(x',y',z')\sin.\alpha'(x'-h)\,dx',$$

$$q = a'^2\alpha\cos.\alpha'(x-h)\int_{-\infty}^{h} f(x',y',z')\cos.\alpha(x'-h)\,dx'$$
$$+ a'^2\alpha\sin.\alpha'(x-h)\int_{-\infty}^{h} f(x',y',z')\sin.\alpha(x'-h)\,dx'$$
$$+ a^2\alpha\cos.\alpha'(x-h)\int_{h}^{\infty} f'(x',y',z')\cos.\alpha'(x'-h)\,dx'$$
$$+ \frac{a^4\alpha^2}{a'^2\alpha'}\sin.\alpha'(x-h)\int_{h}^{\infty} f'(x',y',z')\sin.\alpha'(x'-h)\,dx';$$

nous désignerons par P et Q, ce que deviennent ces quantités p et q, lorsqu'on y met les fonctions F et F′ à la place de f et f'; et dans le cas de $l=\infty$, les formules (15) deviendront, d'après tout ce qui précède,

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(p\cos.\lambda t + \mathrm{P}\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\frac{d\alpha}{a^2\alpha + a'^2\alpha'}, \\ v &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(q\cos.\lambda t + \mathrm{Q}\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\frac{d\alpha}{a^2\alpha + a'^2\alpha'}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

(9) Dans ce même cas de $l=\infty$, l'inconnue α' qui entre

dans les formules (17), n'aura que des valeurs réelles (n° 5) que l'on pourra supposer positives. L'autre inconnue α_1 est aussi réelle et positive; et d'après la liaison existante entre ces deux quantités, on a

$$\alpha_1 = \frac{a'}{a}\sqrt{\delta^2 - \alpha'^2},$$

en prenant ce radical avec le signe +, et faisant

$$\delta = \frac{1}{a'}\sqrt{(a^2 - a'^2)(\beta^2 + \gamma^2)}.$$

Si l'on substitue cette valeur de α_1, dans l'équation (16), il vient

$$a'\alpha' \sin. l\alpha' - a\sqrt{\delta^2 - \alpha'^2}\cos. l\alpha' = 0;$$

et si l'on se sert de cette équation pour déterminer α', les sommes Σ des formules (17) s'étendront à toutes les valeurs réelles et positives de cette inconnue qui ne rendront pas α_1 imaginaire, ou qui seront moindre que δ. Or, l étant infini, on verra par un raisonnement semblable à celui du n° 6, que ces sommes Σ se changeront en des intégrales qui s'étendront depuis $\alpha' = 0$ jusqu'à $\alpha' = \delta$, en prenant $\frac{\pi}{l}$ pour la différentielle de α', et mettant préalablement dans U_1 et V_1, à la place de $\sin. l\alpha'$ et $\cos. l\alpha'$, leurs valeurs tirées de l'équation précédente, savoir :

$$\sin. l\alpha' = \frac{a\sqrt{\delta^2 - \alpha'^2}}{\sqrt{a^2(\delta^2 - \alpha'^2) + a'^2\alpha'^2}},$$

$$\sin. l\alpha' = \frac{a'\alpha'}{\sqrt{a^2(\delta^2 - \alpha'^2) + a'^2\alpha'^2}}.$$

Nous aurons, de cette manière,

$$U_1 = \frac{a'\alpha'}{2\sqrt{a^2(\delta^2-\alpha'^2)+a'^2\alpha'^2}}\, e^{\frac{a'}{a}(x-h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}$$

$$V_1 = \frac{1}{2\sqrt{a^2(\delta^2-\alpha'^2)+a'^2\alpha'^2}}\left[a'\alpha'\cos.\alpha'(x-h) + a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.\alpha'(x-h)\right].$$

Le radical qui se trouve au dénominateur de ces expressions est la même chose que

$$\frac{1}{a'}\sqrt{a^2-a'^2}\sqrt{a^2(6^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2};$$

à cause de $l=\infty$, la quantité Δ_1 se réduit à $\Delta_1=\frac{1}{8}l$; cela étant, les formules (17) se changeront en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2}{\pi(a^2-a'^2)}\int_0^\delta\left(p_1\cos.\lambda t + P_1\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\frac{d\alpha'}{a^2(6^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2},\\ v &= \frac{2}{\pi(a^2-a'^2)}\int_0^\delta\left(q_1\cos.\lambda t + Q_1\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\frac{d\alpha'}{a^2(6^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2},\end{aligned}\right\}(19)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} p_1 = {} & a'^4\alpha'^2 e^{\frac{a'}{a}(x-h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}\int_{-\infty}^{h} f(x',y',z')\, e^{\frac{a'}{a}(x'-h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}dx' \\ & + a^2a'\alpha' e^{\frac{a'}{a}(x-h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}\int_h^\infty f'(x',y',z')\left[a'\alpha'\cos.\alpha'(x'-h)\right. \\ & \left. + a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.\alpha'(x'-h)\right]dx', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 = {} & \frac{a'^5\alpha'}{a^2}\left[a'\alpha'\cos.\alpha'(x-h)\right. \\ & \left. + a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.\alpha'(x-h)\right]\int_{-\infty}^{h} f'(x',y',z')\, e^{\frac{a'}{a}(x'-h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}dx' \\ & + a'^2\left[a'\alpha'\cos.\alpha'(x-h)\right. \\ & \left. + a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.\alpha'(x-h)\right]\int_h^\infty f'(x',y',z')\left[a'\alpha'\cos.\alpha'(x'-h)\right. \\ & \left. + a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.\alpha'(x'-h)\right]dx', \end{aligned}$$

et désigné par P_1 et Q_1, ce que deviennent p_1 et q_1, quand on y remplace f et f' par F et F'.

(10) Les sommes des formules (18) et (19) seront les expressions complètes de u et v qu'il s'agissait d'obtenir. Il ne restera donc plus qu'à les substituer dans les équations (2), pour avoir les valeurs de φ et φ' qui répondent au cas où les deux fluides superposés s'étendent indéfiniment en tous sens. Ces valeurs se trouveront exprimées par des intégrales sextuples dont chaque élément satisfera isolément aux équations (1). Pour la valeur particulière $x=h$, on a

$$\frac{1}{a^2}p=\frac{1}{a'^2}q,\quad \frac{1}{a^2}p_1=\frac{1}{a'^2}q_1,\quad \frac{dp}{dx}=\frac{dq}{dx},\quad \frac{dp_1}{dx}=\frac{dq_1}{dx},$$

et de même à l'égard de P, Q, P_1, Q_1; au moyen de quoi les équations relatives à la surface de contact des deux fluides, sont aussi vérifiées. Quant aux équations qui répondent à $x=h-k$ et $x=h+l$, elles disparaissent dans le cas de $k=\infty$ et $l=\infty$; par conséquent les expressions de φ et φ' dont il s'agit, satisfont effectivement à toutes les équations différentielles du problème.

Dans le cas de $a'=a$, les formules (19) s'évanouissent. En effet, supposons que la différence $a-a'$ ne soit qu'infiniment petite; faisons

$$a^2-a'^2=c^2,\quad \delta=c\delta',\quad \alpha'=c\omega,\quad d\alpha'=c\,d\omega;$$

δ' sera une quantité finie, et l'intégrale relative à ω aura $\omega=0$ et $\omega=\delta'$ pour limites; mais, en même temps, c^2 sera facteur de P_1, P_1, Q_1, Q_1, et c facteur de u et v qui s'évanouiront conséquemment avec cette quantité. De plus on aura $\alpha'=\alpha$, et par suite

$$p = q = a^2\alpha\left(\int_{-\infty}^{h} f(x', y', z')\cos.\alpha(x' - x)\,dx'\right.$$
$$\left. + \int_{h}^{\infty} f'(x', y', z')\cos.\alpha(x' - x)\,dx'\right),$$
$$\mathrm{P} = \mathrm{Q} = a^2\alpha\left(\int_{-\infty}^{h} \mathrm{F}(x', y', z')\cos.\alpha(x' - x)\,dx'\right.$$
$$\left. + \int_{h}^{\infty} \mathrm{F}(x', y', z')\cos.\alpha(x' - x)\,dx'\right).$$

On pourra regarder f et f' comme les deux parties d'une seule fonction qui sera donnée depuis $x' = -\infty$ jusqu'à $x' = \infty$, et de même à l'égard de F et F'. La constante h disparaîtra, comme cela devait être, des valeurs de p, P, q, Q, et des formules (18). Il suffira de considérer l'une de ces deux formules, la première, par exemple, dans laquelle on fera

$$\frac{2}{a^2\alpha + a'^2\alpha'}p = \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y', z')\cos.\alpha(x' - x)\,dx',$$
$$\frac{2}{a^2\alpha + a'^2\alpha'}\mathrm{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x', y', z')\cos.\alpha(x' - x)\,dx'.$$

La valeur correspondante de φ sera

$$\varphi = \frac{1}{\pi^3}\iiiint\!\!\iint\Big[f(x', y', z')\cos.\lambda t$$
$$+ \mathrm{F}(x', y', z')\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\Big]\cos.\alpha(x' - x)\cos.6(y' - y)\cos.\gamma(z' - z)\,d\alpha\,d6\,d\gamma\,dx'\,dy'\,dz'; \quad (20)$$

ce qui est, en effet, l'expression de cette quantité qui répond au cas de $a' = a$, où les deux fluides n'en font plus qu'un seul. Les intégrales relatives à x', y', z', ont $\pm\infty$ pour limites, et celles qui répondent à $\alpha, \text{ϐ}, \gamma$, ne s'étendent que depuis zéro jusqu'à l'infini.

Si l'on remplace le fluide inférieur par un corps solide qui ne transmette pas le mouvement d'une manière sensible, les formules précédentes seront celles du mouvement d'un fluide terminé par un plan fixe. On devra alors supprimer les termes dépendants de $f'(x', y', z')$ et $F'(x', y', z')$, et faire $a' = 0$ dans les autres, ce qui rendra nulles les quantités p_1 et P_1, ainsi que la valeur de u donnée par la première formule (19). On aura, en même temps,

$$p = \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{-\infty}^{h} f(x', y', z') \cos. \alpha(x' - x)\, dx'$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{-\infty}^{h} f'(x', y', z') \cos. \alpha(x' + x - 2h)\, dx',$$

$$P = \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{-\infty}^{h} F(x', y', z') \cos. \alpha(x' - x)\, dx'$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{-\infty}^{h} F(x', y', z') \cos. \alpha(x' + x - 2h)\, dx',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$p = \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{-\infty}^{h} f(x', y', z') \cos. \alpha(x' - x)\, dx'$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{h}^{\infty} f(2h - x', y', z') \cos. \alpha(x' - x)\, dx',$$

$$P = \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{-\infty}^{h} F(x', y', z') \cos. \alpha(x' - x)\, dx'$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{h}^{\infty} F(2h - x', y', z') \cos. \alpha(x' - x)\, dx'.$$

Or, les fonctions $f(x', y', z')$ et $F(x', y', z')$ n'étant données que pour les valeurs de x' moindres que h ou négatives, et ces deux fonctions étant entièrement indéterminées, pour les valeurs de x' positives et plus grandes que h, nous pouvons supposer qu'on a

$$\left.\begin{array}{l} f(2h - x', y', z') = f(x', y', z), \\ F(2h - x', y', z') = F(x', y', z'); \end{array}\right\} (21)$$

car les valeurs de $2h - x'$ qui répondent à $x' < h$ sont toutes $> h$, et pour $x' = h$, ces équations sont identiques. De cette manière les valeurs de p et P prendront la forme :

$$p = \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y', z') \cos. \alpha (x' - x)\, dx',$$

$$P = \tfrac{1}{2} a^2 \alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(x', y', z') \cos. \alpha (x' - x)\, dx';$$

en faisant $a' = 0$ dans la première formule (18), nous aurons

$$u = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x', y', z') + F(x', y', z') \frac{\sin. \lambda t}{\lambda} \right] \cos. \alpha (x' - x)\, d\alpha\, dx';$$

et la valeur de φ donnée par la première équation (2), coïncidera avec la formule (20). Delà et des équations (21), on conclut que le mouvement d'un fluide appuyé contre un plan fixe, est le même que celui d'un fluide qui s'étendrait indéfiniment des deux côtés de ce plan, et dont les deux parties auraient été symétriquement ébranlées, de sorte qu'à l'origine du mouvement, les dilatations et les vitesses horizontales soient les mêmes, et les vitesses verticales, égales et contraires, pour les points situés à distance égale d'un côté et de l'autre de ce plan. C'est effectivement ce que j'ai trouvé d'une autre manière, dans mon ancien Mémoire sur la théorie du son, en considérant la réflexion du mouvement de l'air par un plan indéfiniment prolongé.

Après avoir ainsi vérifié les formules générales que nous avons obtenues dans ce paragraphe, nous allons les réduire à une forme plus simple; ce qui est indispensable pour pouvoir énoncer les lois de la communication du mouvement entre deux fluides superposés, qui y sont renfermées.

§ II.

Simplication des formules précédentes.

(11) Nous supposerons que le mouvement a été imprimé à un seul des deux fluides et que l'ébranlement primitif était circonscrit dans une étendue limitée. Les résultats étant différents selon que ce fluide sera celui qui répond à la plus grande ou à la plus petite vitesse de propagation, nous examinerons ces deux cas successivement en commençant par le premier, c'est-à-dire, en supposant, en premier lieu, que ce soit le fluide supérieur qui a été mis en mouvement, et qu'à l'origine le fluide inférieur était dans son état naturel. Les fonctions f' et F' qui répondent à ce second fluide, seront donc nulles; les deux autres fonctions f et F n'auront de valeurs que dans l'étendue de l'ébranlement primitif; et si l'on suppose qu'il n'atteignait pas la surface de séparation des deux fluides, ces fonctions seront aussi nulles pour $x'=h$ et $x'>h$; par conséquent, on pourra étendre au-delà de $x'=h$, et, si l'on veut, jusqu'à $x'=\infty$, les intégrales comprises dans les expressions de p, q, p_1, q_1. De cette manière, nous aurons

$$p = \tfrac{1}{2}(a^2\alpha + a'^2\alpha')\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y',z')\cos.\alpha(x'-x)dx'$$

$$+\tfrac{1}{2}(a^2\alpha - a'^2\alpha')\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y',z')\cos.\alpha(x'+x-2h)\,dx',$$

$$q = a'^2\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y',z')\cos.\left[\alpha(x'-h)-\alpha'(x-h)\right]dx',$$

$$p_1 = a'^4\alpha'^2\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y',z')\,e^{\frac{a'}{a}(x'+x-2h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}dx',$$

$$q_1 = \frac{a'^5\alpha'}{a^2}\big[a'\alpha'\cos.\alpha'(x-h)$$

$$+a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.\alpha'(x-h)\big]\int_{-\infty}^{\infty} f(x',y',z')\,e^{\frac{a'}{a}(x'-h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}dx';$$

et nous pourrons ne nous occuper que des valeurs de φ et φ' relatives à ces quatre quantités, dependantes de la fonction f ou des vitesses initiales du système; car les valeurs de φ et φ' qui répondent aux quantités P, Q, P_1, Q_1, dépendantes des dilatations, se déduiront des premières en y mettant F au lieu de f, et intégrant par rapport à t, de manière que les intégrales s'évanouissent avec cette variable.

Appelons Φ la partie de φ correspondante à la première des deux parties dont p se compose; Φ étant la valeur complète de φ dans le cas de $a'=a$, son expression sera donnée par la formule (20); mais on pourra la mettre sous une forme beaucoup plus simple, en faisant usage de l'intégrale complète de l'équation (1) à laquelle je suis parvenu dans un autre Mémoire (*). Au moyen de cette intégrale et en ayant égard aux deux fonctions f et F, on aura

(*) Nouveaux Mémoires de l'Académie, tome III.

$$\Phi = \frac{d.}{4\pi\, dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + at\cos.\theta,\ y + at\sin.\theta\sin.\omega,$$
$$z + at\sin.\theta\cos.\omega)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + at\cos.\theta,\ y + at\sin.\theta\sin.\omega,$$
$$z + at\sin.\theta\cos.\omega)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega.$$

Lorsque l'ébranlement primitif aura été le même en tous sens autour du point O, origine des coordonnées x, y, z, cette formule générale se réduira à

$$\Phi = \frac{1}{2r}[(r + at) + f(r + at) + (r - at) f(r - at)$$
$$+ \frac{1}{a}\mathrm{F}_1(r + at) - \frac{1}{a}\mathrm{F}_1(r - at)], \qquad (a)$$

comme on peut le voir dans le Mémoire cité : on représente ici par r le rayon vecteur OM du point quelconque M. ou la racine carrée positive de $x^2 + y^2 + z^2$; et l'on suppose que $f(x, y, z)$ et $\mathrm{F}(x, y, z)$, ont été remplacées par des fonctions fr et $\mathrm{F}r$ de la seule variable r, et qu'on a fait ensuite $r\mathrm{F}r = \frac{d\mathrm{F}_1 r}{dr}$.

Désignons par Π et Π' les parties de φ et φ' qui répondent à la seconde partie de p et à q. En représentant par r' le rayon vecteur d'un point quelconque du fluide supérieur, et mettant fr' au lieu de $f(x', y', z')$, il est aisé de voir, que nous aurons, d'après les équations (2);

$$\left.\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{4\pi^3}\iiiint\!\!\iint f r' \cos.\lambda t \cos.\left[\alpha(x'+x-2h)\right. \\
&\quad \left.+ 6(y'-y)+\gamma(z'-z)\right]\frac{a^2\alpha - a'^2\alpha'}{a^2\alpha+a'^2\alpha'}\,d\alpha\, d6\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz', \\
\Pi' &= \frac{1}{2\pi^3}\iiiint\!\!\iint f r' \cos.\lambda t \cos.\left[\alpha(x'-h)-\alpha'(x-h)\right. \\
&\quad \left.+ 6(y'-y)+\gamma(z'-z)\right]\frac{a'^2\alpha}{a^2\alpha+a'^2\alpha'}\,d\alpha\, d6\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz';
\end{aligned}\right\}(b)$$

les intégrales relatives à 6 et γ ayant maintenant $\pm\infty$ pour limites, comme celles qui répondent à x', y', z', et les intégrales relatives à α étant les seules qui sont prises depuis zéro jusqu'à l'infini.

Soient enfin Ω et Ω' les parties de φ et φ' qui répondent à p, et q,. En vertu des équations (2) et (19), on aura

$$\left.\begin{aligned}
\Omega &= \frac{a'^2}{2\pi^3(a^2-a'^2)}\iiiint\!\!\iint f r' \cos.\lambda t\, e^{\frac{a'}{a}(x'+x-2h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}} \cos.(6(y'-y) \\
&\quad +\gamma(z'-z))\frac{a'^2\alpha'^2}{a^2(6^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2}\,d\alpha'\, d6\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz', \\
\Omega' &= \frac{a'^4}{2\pi^3 a^2(a^2-a'^2)}\iiiint\!\!\iint f r' \cos.\lambda t\, e^{\frac{a'}{a}(x'-h)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}} [a'\alpha' \cos.(6(y'-y) \\
&\quad +\gamma(z'-z)+\alpha'(x-h)) + a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.(6(y'-y)+\gamma(z'-z) \\
&\quad +\alpha'(x-h))]\frac{a'\alpha'}{a^2(6^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2}\,d\alpha'\, d6\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz';
\end{aligned}\right\}(c)$$

les intégrales relatives à α' étant prises depuis $\alpha'=0$ jusqu'à $\alpha'=\delta$, et les autres ayant les mêmes limites $\pm\infty$ que dans les formules (*b*).

La valeur complète de φ' se composera de celles de $\Pi'+\Omega'$ qui répondent à f et F, et la valeur de φ s'obtiendra en ajoutant celles de $\Pi+\Omega$ à la formule (*a*). Les expressions de Π, Π', Ω, Ω', supposent, comme cette dernière formule, que l'ébranlement primitif a été semblable en tous sens autour du point O; hypothèse que nous ferons pour toute la suite de ce Mémoire, et qui permettra d'effectuer en partie les intégrations indiquées et de réduire les équations (*b*) et (*c*) à une forme beaucoup plus simple.

(12) Pour y parvenir, je change les coordonnées rectangulaires x', y', z', en coordonnées polaires, et je fais, en conséquence,

$$x' = r' \cos.\theta', \quad y' = r' \sin.\theta' \sin.\omega', \quad z' = r' \sin.\theta' \cos.\omega'.$$

On aura, en même temps,

$$dx'\,dy'\,dz' = r'^2 \sin.\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\omega';$$

et les intégrales relatives à ces nouvelles coordonnées devront être prises depuis $r'=0$, $\theta'=0$, $\omega'=0$, jusqu'à $r'=\infty$, $\theta'=\pi$, $\omega'=2\pi$. Je fais de même

$$\alpha = \rho \cos.\theta, \quad \beta = \rho \sin.\theta \sin.\omega, \quad \gamma = \rho \sin.\theta \cos.\omega;$$

il en résultera

$$d\alpha\,d\beta\,d\gamma = \rho^2 \sin.\theta\,d\rho\,d\theta\,d\omega;$$

les intégrales s'étendront depuis $\rho=0$, $\theta=0$, $\omega=0$, jusqu'à $\rho=\infty$, $\theta=\frac{1}{2}\pi$, $\omega=2\pi$; et nous aurons (nº 6),

$$\lambda = a\rho, \quad \alpha' = \frac{a}{a'}\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2\theta}.$$

La double intégration relative à θ' et ω' se changera d'abord en une intégrale simple et s'effectuera ensuite entièrement dans chacune des formules (*b*), d'après une remarque que j'ai faite autrefois, et suivant laquelle on a

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(\cos.\theta'\cos.\theta + \sin.\theta'\sin.\theta\cos.(\omega'-\omega))\sin.\theta' d\theta' d\omega' = 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{F}(\cos. u)\sin. u\, du,$$

quelle que soit la fonction F. Il en résulte qu'on aura

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos.[\rho r'(\cos.\theta'\cos.\theta + \sin.\theta'\sin.\theta\cos.(\omega-\omega'))$$
$$+\rho(x-2h)\cos.\theta - \rho y\sin.\theta\sin.\omega - \rho z\sin.\theta\cos.\omega]\sin.\theta' d\theta' d\omega'$$
$$=\frac{4\pi}{\rho r'}\sin.\rho r'\cos.\rho((x-2h)\cos.\theta - y\sin.\theta\sin.\omega - z\sin.\theta\cos.\omega),$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos.[\rho r'(\cos.\theta'\cos.\theta + \sin.\theta'\sin.\theta\cos.(\omega-\omega'))$$
$$-\frac{\rho}{a'}(x-h)\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta} - \rho h\cos.\theta - \rho y\sin.\theta\sin.\omega$$
$$-\rho z\sin.\theta\cos.\omega]\sin.\theta' d\theta' d\omega' = \frac{4\pi}{\rho r'}\sin.\rho r'\cos.\rho\Big(\frac{x-h}{a'}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta}$$
$$+h\cos.\theta + y\sin.\theta\sin.\omega + z\sin.\theta\cos.\omega\Big).$$

Cela étant, si nous faisons, pour abréger,

$$(2h-x)\cos.\theta + y\sin.\theta\sin.\omega + z\sin.\theta\cos.\omega \pm at = \varpi,$$
$$\frac{x-h}{a'}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta} + h\cos.\theta + y\sin.\theta\sin.\omega + z\sin.\theta\cos.\omega \pm at = \varpi',$$

les formules (b) deviendront

$$\left.\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2\cos.\theta - a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta})\sin.\theta}{a^2\cos.\theta + a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta}}\rho r'\sin.\rho r'\cos.\rho\varpi f r' dr' d\rho d\theta d\omega,\\ \Pi' &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a'^2\cos.\theta\sin.\theta}{a^2\cos.\theta + a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta}}\rho r'\sin.\rho r'\cos.\rho\varpi' f r' dr' d\rho d\theta d\omega.\end{aligned}\right\}(d)$$

J'ai mis $\pm$ devant at dans les quantités que ϖ et ϖ' représentent; mais il faudra se rappeler qu'on doit prendre successivement le signe supérieur et le signe inférieur, puis ajouter les résultats pour former les expressions complètes de Π et Π'.

Afin d'éviter l'indétermination des intégrales relatives à ρ, qui aurait lieu à la limite $\rho=\infty$, je multiplie sous les signes $\int$, par $e^{-g\rho}$; e désignant la base des logarithmes népériens, et g étant une constante positive et infiniment petite que l'on fera tout-à-fait nulle à la fin du calcul. On aura alors

$$\int_0^\infty e^{-g\rho}\rho \sin.\rho r' \cos.\rho\varpi d\rho$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{d.}{dr'}\left(\frac{g}{g^2+(r'-\varpi)^2}+\frac{g}{g^2+(r'+\varpi)^2}\right).$$

J'intègre les deux membres de cette équation depuis $r'=0$ jusqu'à $r'=\infty$, après les avoir multipliés par $r'fr'dr'$. Je suppose que pour de très-grandes valeurs de r', la fonction fr' décroisse plus rapidement que $\frac{1}{r'}$, en sorte que le produit $r'fr'$ s'évanouisse à la limite $r'=\infty$, aussi bien que pour $r'=0$. D'après cela, si l'on effectue l'intégration par partie dans le second membre, on aura

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-g\rho}\rho r' \sin.\rho r' \cos.\rho\varpi fr' dr' d\rho$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{g}{g^2+(r'-\varpi)^2}+\frac{g}{g^2+(r'+\varpi)^2}\right)d.r'fr'.$$

Mais la fonction fr' n'étant donnée que pour les valeurs positives de r' et restant indéterminée pour ses valeurs négatives, on peut supposer qu'on ait $f(-r')=fr'$. On aura, en même temps, $\frac{df(-r')}{dr'}=-\frac{dfr'}{dr'}$; et si l'on fait

$$\frac{d.r'fr'}{dr'}=\psi r',$$

on aura aussi $\psi(-r')=\psi r'$, et l'équation précédente prendra la forme :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-g\rho}\rho r'\sin.\rho r'\cos.\rho\varpi fr'dr'd\rho=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{g\psi r'dr'}{g^2+(r'-\varpi)^2}.$$

A cause que la constante g est infiniment petite, cette dernière intégrale s'évanouira pour toutes les valeurs de r' qui ne rendront pas aussi infiniment petit, le dénominateur sous le signe $\int$. En faisant donc

$$r'=\varpi+u,\quad dr'=du,$$

on pourra considérer la nouvelle variable u comme infiniment petite, positive ou négative; et quelles que soient les limites relatives à r', nous aurons simplement

$$\int\frac{g\psi r'dr'}{g^2+(r'-\varpi)^2}=\psi\varpi\int\frac{g\,du}{g^2+u^2}=\pi\psi\varpi;$$

en intégrant entre deux limites arbitraires, l'une positive et l'autre négative, et faisant, après l'intégration, $g=0$ ou seulement g infiniment petit par rapport à ces limites. Il en résultera donc

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-g\rho}\rho r'\sin.\rho r'\cos.\rho\varpi fr'dr'd\rho=\frac{\pi}{2}\psi\varpi;$$

ce qui fait connaître l'intégrale relative ρ et r' que renferme la première équation (d): en y mettant ϖ' au lieu de ϖ, on aura la valeur de celle qui est contenue dans la seconde équation (d); et, de cette manière, ces deux équations deviendront

$$\left.\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2\cos.\theta - a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta})\sin.\theta}{a^2\cos.\theta + a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta}}\psi\varpi\, d\theta\, d\omega,\\ \Pi' &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a'^2\cos.\theta\sin.\theta}{a^2\cos.\theta + a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2\theta}}\psi\varpi'\, d\theta\, d\omega.\end{aligned}\right\} (e)$$

Ainsi les quantités Π et Π' qui étaient d'abord exprimées par des intégrales sextuples, le sont maintenant par des intégrales doubles. On ne peut pas les simplifier davantage, si ce n'est dans le cas où le point M auquel elles répondent est très-éloigné du centre de l'ébranlement primitif. C'est ce que nous allons faire, en commençant par l'expression de Π, relative au fluide supérieur.

(13) Transportons l'origine des coordonnées en un point O′ du fluide inférieur, situé à une distance h au-dessous de la surface de séparation des deux fluides, et sur la même verticale que le point O. Soit r' le rayon vecteur O′M du point M appartenant au fluide supérieur. Désignons par u l'angle compris entre O′M et la verticale passant par le point O′ et dirigée en sens contraire de la pesanteur, et par v l'angle que fait le plan de ces deux droites avec le plan vertical des x et z; nous aurons

$$2h - x = r'\cos.u,\quad y = r'\sin.u\sin.v,\quad z = r'\sin.u\cos.v,$$

et, par conséquent,

$$\varpi = r'(\cos.\theta\cos.u + \sin.\theta\sin.u\cos.(\omega - v)) \pm at.$$

Menons par le point O′ un plan horizontal; au-dessus de ce plan, du point O′ comme centre et d'un rayon égal à l'unité, traçons la surface d'une demi-sphère; soit N le point de cette surface dont le rayon O′N fait l'angle θ avec la verticale et pour lequel la projection horizontale de ce rayon fait l'angle ω avec une parallèle à l'axe des z, menée par O′, ou, autrement dit, soit O′N le rayon dont la direction coïncide avec O′M, pour les valeurs particulières $\theta = u$ et $\omega = v$: l'intégrale relative à θ et ω s'étendra à tous les points de la demi-surface sphérique, et l'élément de cette surface sera $\sin.\theta \, d\theta \, d\omega$. Menons par le point O′, un autre plan perpendiculaire à O′M. Soit θ', l'angle compris entre O′M et O′N, et ω' l'angle que fait la projection de O′N sur ce second plan, avec une droite fixe, tirée dans ce même plan, par le point O′. On pourra substituer les variables θ' et ω' à θ et ω; l'élément de la surface sphérique sera alors $\sin.\theta' \, d\theta' \, d\omega'$, en sorte que l'on aura

$$\sin.\theta \, d\theta \, d\omega = \sin.\theta' \, d\theta' \, d\omega';$$

on aura aussi

$$\cos.\theta \cos.u + \sin.\theta \sin.u \cos.(\omega - v) = \cos.\theta';$$

et par les règles de la trigonométrie sphérique, on trouvera

$$\cos.\theta = \cos.u \cos.\theta' + \sin.u \sin.\theta' \cos.\omega',$$
$$\sin.\theta' \sin.(\omega - v) = \sin.\omega' \sin.\theta,$$

en supposant que le zéro de l'angle ω' réponde à $\omega = v$. De plus, si l'on appelle μ l'angle que fait la droite O′M avec une position horizontale de O′N correspondante à l'angle ω', les intégrales relatives à θ' et ω', étendues à tous les points N de la demi-surface sphérique, devront être prises, d'abord depuis $\theta' = 0$ jusqu'à $\theta' = \mu$, et ensuite depuis $\omega' = 0$ jusqu'à

$\omega' = 2\pi$; et comme $\theta' = \mu$ répond à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\cos.\mu = \sin.u \cos.(\omega - v),$$

pour déterminer la limite μ.

Cela posé, la première équation (e) deviendra

$$\Pi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\mu} \Theta\psi(r'\cos.\theta' \pm at)\sin.\theta' d\theta'\right) d\omega', \qquad (f)$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{a^2\cos.\theta - a'\sqrt{a^2 - a'^2\sin.^2\theta}}{a^2\cos.\theta + a'\sqrt{a^2 - a'^2\sin.^2\theta}} = \Theta,$$

et considérant Θ comme une fonction de θ' et ω'. Pour $\theta' = 0$, on aura $\cos.\theta = \cos.u$ et $\Theta = \mathrm{U}$, en désignant par U ce que devient Θ quand on y met u au lieu de θ; pour $\theta' = \mu$, qui répond à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on aura $\Theta = -1$; si donc on intègre par partie, et si l'on observe que $\psi r' = \frac{d.r'fr'}{dr'}$, il en résultera

$$\int_0^{\mu} \Theta\psi(r'\cos.\theta' \pm at)\sin.\theta' d\theta' = \frac{\mathrm{U}}{r'}(r' \pm at)f(r' \pm at)$$
$$+ \frac{1}{r'}(r'\cos.\mu \pm at)f(r'\cos.\mu \pm at)$$
$$+ \frac{1}{r'}\int_0^{\mu}(r'\cos.\theta' \pm at)f(r'\cos.\theta' \pm at)\frac{d\Theta}{d\theta'}d\theta'.$$

Je représenterai par ε le rayon de l'ébranlement primitif autour du point O, de sorte que la fonction f soit nulle pour toutes les valeurs de la variable, positives et $> \varepsilon$. Comme on a supposé qu'elle restait la même, lorsque la variable change de signe, elle sera aussi nulle pour toutes les valeurs de la variable $<-\varepsilon$, et n'aura des valeurs différentes de zéro, que quand la variable sera comprise entre $\pm\varepsilon$. Or, si l'on suppose la distance r' du point M au point O', extrêmement grande par rapport à ε, il est évident que les valeurs de θ' pour lesquelles $r'\cos.\theta' \pm a't$ tombera entre ces limites, auront une très-petite étendue; d'où l'on conclut que l'intégrale relative à cette variable, contenue dans le second membre de l'équation précédente, sera très-petite par rapport aux termes compris hors du signe $\int$. Nous la négligerons, en conséquence; et de cette manière l'équation (f) deviendra

$$\Pi = \frac{1}{2r'}\mathrm{U}(r' \pm at) f(r' \pm at) + \frac{1}{4\pi r'}\int_0^{2\pi} (r'\cos.\mu \pm at) f(r'\cos.\mu \pm at)\, d\omega'.$$

L'étendue des valeurs de ω' pour lequelles $r'\cos.\mu \pm at$ tombera entre les limites $\pm\varepsilon$, sera aussi très-petite; ce qui suffit pour que nous négligions cette dernière intégrale relative à ω; mais on peut en outre s'assurer que cette intégrale disparaît exactement de la valeur de Π. En effet, on y doit prendre successivement le signe + et le signe — devant at, et faire la somme des résultats; de plus, l'angle ω augmente de π en même temps que ω'; les valeurs de $\cos.\mu$ ou de $\sin.u\cos.(\omega - v)$, relatives à ω' et $\omega' + \pi$, sont donc égales et de signes contraires; donc, à cause de $f(r'\cos.\mu \pm at) = f(-r'\cos.\mu \mp at)$, la somme des deux éléments de l'intégrale qui répondent à ω' et $\omega' + \pi$ sera égale à zéro, et, par conséquent aussi, l'intégrale entière dont les limites sont $\omega' = 0$ et $\omega' = 2\pi$. Nous aurons donc finalement

$$\Pi = \frac{a^2 \cos. u - a'\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u}}{2r'(a^2 \cos. u + a'\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u})} [(r' + at) f(r' + at) + (r' - at) f(r' - at)], \qquad (g)$$

en remettant pour U sa valeur et ayant égard au double signe de at. On se rappellera que l'expression complète de Π, doit comprendre une autre partie correspondante à la fonction F et qui se déduira de la précédente, comme il a été dit plus haut.

(14) Pour réduire de même la seconde formule (e), je fais

$$h = r_1 \cos. u, \quad y = r_1 \sin. u \sin. v, \quad z = r_1 \sin. u \cos. v;$$

c'est-à-dire, que je désigne par r_1 le rayon vecteur du point de la surface de séparation des deux fluides, dont y et z sont les coordonnées horizontales; par u, l'angle que ce rayon fait avec la verticale abaissée du point O, et par v, l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x et z. Il en résultera

$$\varpi' = \frac{x-h}{a'} \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 \theta} + r_1 (\cos. \theta \cos. u + \sin. \theta \sin. u \cos. (\omega - v)) \pm at;$$

et par le moyen d'une transformation semblable à celle qui a donné l'équation (f), on changera la seconde équation (e), en celle-ci :

$$\Pi' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\mu} \Theta' \psi \left(\frac{x-h}{a'} \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 \theta} + r_1 \cos. \theta' \pm at \right) \sin. \theta' d\theta' \right) d\omega',$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{a'^2 \cos. \theta}{a^2 \cos. \theta + a' \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 \theta}} = \Theta',$$

et désigné par μ la valeur de θ' qui répond à $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

Si l'on remet ϖ' à la place de sa valeur sous la fonction ψ, et si l'on observe qu'on a

$$\sin.\theta' d\theta' = -\frac{1}{r_1}\frac{d\varpi'}{d\theta'}d\theta' - \frac{x-h}{a' r_1}\frac{d.\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2\theta}}{d\theta'}d\theta',$$

il en résultera

$$\int_0^{\mu} \Theta' \psi \varpi' \sin.\theta' d\theta' = -\frac{1}{r_1}\int_0^{\mu'} \Theta' \psi \varpi' \frac{d\varpi'}{d\theta'} d\theta'$$
$$- \frac{x-h}{a' r_1}\int_0^{\mu} \Theta' \psi \varpi' \frac{d.\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2\theta}}{d\theta'} d\theta'.$$

Nous supposerons que r_1 est très-grand, non-seulement à l'égard du rayon ε de l'ébranlement primitif, mais encore par rapport à la distance $x-h$ du point M au-dessous de la surface de séparation des deux fluides; nous négligerons, en conséquence, le second terme de la formule précédente à raison de son facteur $\frac{x-h}{r_1}$; et, à cause de $\psi\varpi' = \frac{d.\varpi' f\varpi'}{d\varpi'}$, nous aurons

$$\int_0^{\mu} \Theta \psi \varpi' \sin.\theta' d\theta' = -\frac{1}{r_1}\int_0^{\mu} \Theta \frac{d.\varpi' f\varpi'}{d\theta'} d\theta'.$$

A la limite $\theta' = \mu$, ou $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on a $\Theta' = 0$; si donc on désigne par U' la valeur de Θ' qui répond à $\theta' = 0$ et pour laquelle on a $\cos.\theta = \cos.u$; si l'on fait, en outre,

$$u' = \frac{x-h}{a'}\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u} + r_1 \pm at,$$

et que l'on intègre par partie, on aura

$$\int_0^{\mu} \Theta' \psi \varpi' \sin.\theta' d\theta' = \frac{1}{r_1}\mathrm{U}' u' f u' + \frac{1}{r_1}\int_0^{\mu} \varpi' f \varpi' \frac{d\Theta'}{d\theta'} d\theta',$$

ou simplement

$$\int_0^{\mu} \Theta' \psi \varpi' \sin.\theta' d\theta' = \frac{1}{r_1} U' u' f u',$$

en s'arrêtant au même degré d'approximation et par la même raison que dans le numéro précédent. Cela étant, en prenant successivement le signe + et le signe — devant at, et faisant la somme des résultats, l'expression de Π' deviendra

$$\Pi' = \frac{a'^2 \cos. u}{r_1 (a^2 \cos. u + a' \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u})} \Big[\Big(\frac{x-h}{a'} \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u}$$
$$+ r_1 + at\Big) f\Big(\frac{x-h}{a'} \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u} + r_1 + at\Big) + \Big(\frac{x-h}{a'} \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u} \quad (h)$$
$$+ r_1 - at\Big) f\Big(\frac{x-h}{a'} \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u} + r_1 - at\Big)\Big].$$

On y ajoutera la partie correspondante à la fonction F qui se déduira de celle-ci par la substitution de F à f et l'intégration par rapport à t.

(15) Occupons-nous actuellement de la réduction des formules (c). Si l'on y considère $\alpha', \mathcal{E}, \gamma$, comme les trois coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, les intégrales relatives à ces variables s'étendront d'après leurs limites, à tous les points compris entre le plan des $\mathcal{E}$ et γ et la surface dont l'équation est

$$\alpha' = \delta = \frac{1}{a'} \sqrt{(a^2 - a'^2)(\mathcal{E}^2 + \gamma^2)},$$

c'est-à-dire, entre le plan des $\mathcal{E}$ et γ et une surface conique qui a son sommet à l'origine des coordonnées et dont la génératrice fait avec ce plan, un angle constant c, moindre que $\frac{1}{2}\pi$, et tel que l'on a

$$\text{tang.}\, c = \frac{1}{a'} \sqrt{a^2 - a'^2}.$$

Il en résulte que si l'on transforme $\alpha', 6, \gamma$, en coordonnées polaires, et qu'on fasse pour cela

$$\alpha' = \rho \sin.\theta, \quad 6 = \rho \cos.\theta \sin.\omega, \quad \gamma = \rho \cos.\theta \cos.\omega,$$

les intégrales relatives à ρ, θ, ω, devront s'étendre depuis $\rho = 0$, $\theta = 0$, $\omega = 0$, jusqu'à $\rho = \infty$, $\theta = c$, $\omega = 2\pi$. On aura, en même temps,

$$d\alpha' d6 d\gamma = \rho \cos.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega;$$

on aura, de plus,

$$\lambda = a'\rho, \quad \sqrt{\delta^2 - \alpha'^2} = \rho\, \delta' \cos.\theta,$$

en faisant, pour abréger,

$$\delta' = \sqrt{\text{tang.}^2 c - \text{tang.}^2 \theta};$$

et si l'on fait aussi

$$\mathrm{T} = \iiiint\!\!\iint f r' e^{\frac{a'}{a}(x' + x - 2h)\rho\delta'\cos.\theta} \cos.\rho((y' - y)\cos.\theta \sin.\omega + (z' - z)\cos.\theta\cos.\omega \pm a't) \frac{a'^2 \sin.^2\theta \cos.\theta}{a^2 \cos.^2\theta - a'^2 \sin.^2\theta} d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz',$$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}' = \iiiint\!\!\iint f r' e^{\frac{a'}{a}(x' - h)\rho\delta'\cos.\theta} [&a' \sin.\theta \cos.\rho((y' - y)\cos.\theta \sin.\omega \\ &+ (z' - z)\cos.\theta\cos.\omega + (x - h)\sin.\theta \pm a't) \\ &+ a\delta' \cos.\theta \sin.\rho((y' - y)\cos.\theta\sin.\omega + (z' - z)\cos.\theta\cos.\omega \\ &+ (x - h)\sin.\theta \pm a't)] \frac{a' \sin.\theta \cos.\theta}{a^2\cos.^2\theta - a'^2 \sin.^2\theta} d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz',\end{aligned}$$

les équations (c) pourront être remplacées par celles-ci :

$$'\Omega = \frac{1}{4\pi^3(a'^2 - a^2)} \frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2}, \quad \Omega = \frac{1}{4\pi^3(a'^2 - a^2)} \frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2}.$$

On a mis le signe $\pm$ devant $a't$, et l'on prendra successivement le signe supérieur et le signe inférieur, puis on fera les sommes des résultats pour avoir les valeurs totales de T et T'. Les limites des intégrales relatives à x', y', z', sont $\pm\infty$, et par rapport à ρ, θ, ω, celles que l'on vient de déterminer.

Les produits

$$fr'\, e^{\frac{a'}{a}(x'+x-2h)\rho\,\delta'\cos.\theta}, \quad fr'\, e^{\frac{a'}{a}(x'-h)\rho\,\delta'\cos.\theta},$$

s'évanouissent à la limite $\rho=\infty$; car les valeurs de x' pour lesquelles fr' n'est pas nulle, sont, par hypothèse, moindres que h, et d'un autre côté, dans T où entre le premier produit et qui répond au fluide supérieur, on a aussi $x<h$; d'où il résulte que les coefficients de ρ sont négatifs pour les deux exposants. Cela étant, les deux intégrations relatives à ρ s'effectueront sans difficulté, et, par suite, les expressions de T et T' deviendront

$$T=\frac{1}{2}\iiiint\!\!\!\int \frac{a'^2\sin.^2\theta\cos.\theta}{a^2\cos.^2\theta-a'^2\sin.^2\theta}\,\frac{fr'\,d\theta\,d\omega\,dx'\,dy'\,dz'}{\mu-\left(\frac{a'}{a}x'\delta'+(y'\sin.\omega+z'\cos.\omega)\sqrt{-1}\right)\cos.\theta},$$

$$T'=\frac{1}{2}\iiiint\!\!\!\int \frac{a'\sin.\theta\cos.\theta(a'\sin.\theta-a\delta'\cos.\theta\sqrt{-1})}{a^2\cos.^2\theta-a'^2\sin.^2\theta}\,\frac{fr'\,d\theta\,d\omega\,dx'\,dy'\,dz'}{\mu'-\left(\frac{a'}{a}x'\delta'+(y'\sin.\omega+z'\cos.\omega)\sqrt{-1}\right)\cos.\theta},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mu=\frac{a'}{a}(2h-x)\delta'\cos.\theta+[(y\sin.\omega+z\cos.\omega)\cos.\theta+(h-x)\sin.\theta\pm a't]\sqrt{-1},$$

$$\mu'=\frac{a'}{a}h\,\delta'\cos.\theta+[(y\sin.\omega+z\cos.\omega)\cos.\theta+(h-x)\sin.\theta\pm a't]\sqrt{-1}.$$

On prendra successivement le radical $\sqrt{-1}$ en plus et en moins, puis on fera les sommes des résultats pour avoir les valeurs complètes de T et T', dans lesquelles ce radical disparaîtra.

Je transforme maintenant les coordonnées x', y', z', en coordonnées polaires r', θ', ω', comme dans le nº 12; je faits ensuite

$$m=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin.\theta' d\theta' d\omega'}{\mu-\left(\frac{a'}{a}\delta'\cos.\theta'+\cos.(\omega'-\omega)\sin.\theta'\sqrt{-1}\right)r'\cos.\theta},$$

et je désigne par m' ce que m devient quand on y change μ en μ'. Il en résultera

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{c}\int_0^{2\pi}\frac{a'^2\sin.^2\theta\cos.\theta}{a^2\cos.^2\theta-a'^2\sin.^2\theta}m\,r'^2 fr'dr'd\theta\,d\omega,$$

$$T'=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{c}\int_0^{2\pi}\frac{a'\sin.\theta\cos.\theta\,(a'\sin.\theta-a\delta'\cos.\theta\sqrt{-1})}{a^2\cos.^2\theta-a'^2\sin.^2\theta}m'r'^2 fr'dr'd\theta\,d\omega;$$

et les intégrales m et m' que ces formules renferment s'obtiendront par les règles ordinaires.

En effet, on peut d'abord mettre dans m, $\omega'+\omega$ à la place de ω', sans changer les limites relatives à cette variable. On aura ensuite

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega'}{\mu-\left(\frac{a'}{a}\delta'\cos.\theta'+\cos.\omega'\sin.\theta'\sqrt{-1}\right)r'\cos.\theta}=$$

$$\int_0^{\pi}\frac{d\omega'}{\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta\cos.\theta'-r'\cos.\theta\sin.\theta'\cos.\omega'\sqrt{-1}}$$

$$+\int_0^{\pi}\frac{d\omega'}{\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta\cos.\theta'+r'\cos.\theta\sin.\theta'\cos.\omega'\sqrt{-1}}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{2\left(\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta\cos.\theta'\right)d\omega'}{\left(\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta\cos.\theta'\right)^2+r'^2\cos.^2\theta\sin.^2\theta'\cos.^2\omega'}.$$

On peut n'étendre cette dernière intégrale que depuis $\omega'=0$

jusqu'à $\omega'=\frac{1}{2}\pi$, pourvu que l'on double le résultat. Si l'on fait alors

$$\text{tang.}\,\omega'=u,\quad d\omega'=\frac{du}{1+u^2},$$

les limites relatives à u seront zéro et l'infini, et l'intégrale dont il s'agit se changera en celle-ci :

$$\int_0^\infty \frac{4\left(\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta\cos.\theta'\right)^2 du}{\left(\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta\cos.\theta'\right)^2+r'^2\cos.^2\theta\sin.^2\theta'+\left(\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta\cos.\theta'\right)u^2},$$

dont la valeur est

$$2\pi\left[\left(\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta\cos.\theta'\right)^2+r'^2\cos.^2\theta\sin.^2\theta'\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et, en particulier,

$$\frac{2\pi}{\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta},\quad \frac{2\pi}{\mu+\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta};$$

pour $\theta'=0$ et $\theta'=\pi$. La valeur de m s'en déduit immédiatement; mais celle de $\frac{dm}{dt}$ a une expression plus simple, savoir :

$$\frac{dm}{dt}=\pm\frac{2\pi a'\sqrt{-1}}{\mu}\left(\frac{1}{\mu+\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta}-\frac{1}{\mu-\frac{a'}{a}r'\delta'\cos.\theta}\right);$$

le signe ambigu répondant à celui de $\pm at$ que μ renferme. La valeur de $\frac{dm'}{dt}$ s'obtiendra par la substitution de μ' au lieu de μ.

On conclut de là

$$\frac{dT}{dt} = \mp \frac{2\pi a'^2}{a} \int_0^\infty \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{a'^2 \delta' \sin.^2\theta \cos.^2\theta \sqrt{-1}}{a^2 \cos.^2\theta - a'^2 \sin.^2\theta} \frac{r'^3 fr' \, dr' \, d\theta \, d\omega}{\mu\left(\mu^2 - \frac{a'^2}{a^2} r'^2 \delta'^2 \cos.^2\theta\right)^2},$$

$$\frac{dT'}{dt} = \mp \frac{2\pi a'^2}{a} \int_0^\infty \int_0^c \int_0^{2\pi} \frac{a' \delta' \sin.\theta \cos.^2\theta (a' \sin.\theta \sqrt{-1} + a \cos.\theta)}{a^2 \cos.^2\theta - a'^2 \sin.^2\theta} \frac{r'^3 fr' \, dr' \, d\theta \, d\omega}{\mu'\left(\mu'^2 - \frac{a'^2}{a^2} r'^2 \delta'^2 \cos.^2\theta\right)^2}.$$

L'intégration relative à ω s'effectue, dans chacune de ces formules, comme celle qui répondait à ω', en sorte que ces expressions et par suite celles de Ω et Ω' peuvent se réduire à des intégrales doubles, de même que les valeurs de Π et Π' données par les équations (e). Mais sans aller plus loin, on voit que les valeurs de $\frac{d^2 T}{dt^2}$ et $\frac{d^2 T'}{dt^2}$ seront du même ordre de grandeur que la quatrième puissance du rapport de ε à la distance du point M, soit au point O', soit au point O; on pourra donc les négliger dans le cas des points très-éloignés du centre de l'ébranlement; par conséquent l'expression de φ' se réduira alors à celle de Π' du numéro précédent, et celle de φ, à l'expression de Π du n° 13, augmentée de la valeur de φ donnée par la formule (a).

(16) Ces résultats se rapportent au cas où l'ébranlement primitif a eu lieu dans le fluide supérieur pour lequel la vitesse de propagation est la plus grande. Pour obtenir ceux qui répondent au cas où c'est le fluide inférieur qui a été primitivement ébranlé, je transporte l'origine des coordonnées en un point O' de ce fluide, situé à la distance h au dessous de la surface de séparation des deux fluides : les axes des y et z seront toujours horizontaux ; l'axe des x sera vertical et dirigé en sens contraire de la pesanteur. Il faudra alors mettre $2h - x$ et $2h - x'$ à la place de x et x' dans les expressions de p, q, p_1, q_1, des n°s 8 et 9. On y supprimera la

fonction f, et l'on y remplacera $f'(2h-x', y', z')$ par $f'r'$, en désignant par r' la distance d'un point quelconque du fluide inférieur au point O', et supposant que l'ébranlement primitif a eu lieu autour de ce point et qu'il a été semblable en tous sens. On supposera aussi, comme précédemment, qu'il n'atteignait pas la surface de séparation, ce qui permettra d'étendre les intégrales relatives à x', depuis $x'=-\infty$ jusqu'à $x'=\infty$. De cette manière, on aura

$$p=\frac{a^4\alpha}{a'^2}\int_{-\infty}^{\infty} f'r'\cos.[\alpha'(x'-h)-\alpha(x-h)]\,dx',$$

$$q=\frac{a^2\alpha(a'^2\alpha'+a^2\alpha)}{2a'^2\alpha'}\int_{-\infty}^{\infty} f'r'\cos.\alpha'(x'+x-2h)\,dx',$$

$$p_1=a^2a'\alpha'e^{\frac{a'}{a}(h-x)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}\int_{-\infty}^{\infty} f'r'[a'\alpha'\cos.\alpha'(x'-h)$$
$$-a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.\alpha'(x'-h)]\,dx',$$

$$q_1=\tfrac{1}{2}(a^2-a'^2)(a^2(6^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2)\int_{-\infty}^{\infty} f'r'\cos.\alpha'(x'-x)\,dx'$$
$$+\tfrac{1}{2}[a'^2(a^2+a'^2)\alpha'^2-a^2(a^2-a'^2)(6^2+\gamma^2)]\int_{-\infty}^{\infty} f'r'\cos.\alpha'(x'-x-2h)\,dx'$$
$$-a'^3a\alpha'\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\int_{-\infty}^{\infty} f'r'\sin.\alpha'(x'+x-2h)\,dx';$$

et si l'on désigne par $F'r'$ la fonction relative aux dilatations initiales, par laquelle il faudra remplacer $F'(2h-x', y', z')$, on aura les expressions de P, Q, P_1, Q_1, en mettant $F'r'$ au lieu de $f'r'$ dans celles de p, q, p_1, q_1.

Je substitue dans les secondes formules (18) et (19), à la place de q et q_1, les premières parties de leurs valeurs, et à la place de Q et Q_1, les parties correspondantes; puis je désigne par v' la somme des résultats, en sorte qu'on ait

$$v' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(f'r'\cos.\lambda t + F'r'\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\cos.\alpha'(x'-x)\frac{a^2\alpha}{a'^2\alpha'}d\alpha\, dx'$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\int_{-\infty}^\infty\left(f'r'\cos.\lambda t + F'r'\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\cos.\alpha'(x'-x)\,d\alpha' dx'.$$

Dans la première de ces deux intégrales, je substitue α' à la variable α; en vertu de l'équation

$$a^2(\alpha^2+6^2+\gamma^2) = a'^2(\alpha'^2+6^2+\gamma^2),$$

qui lie ces variables l'une à l'autre, on aura

$$\alpha\, d\alpha = \frac{a'^2}{a^2}\alpha' d\alpha';$$

et les limites relatives à α', qui répondent à $\alpha = 0$ et $\alpha = \infty$, seront $\alpha' = \delta$ et $\alpha' = \infty$. Il en résultera donc

$$v' = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\Big[\int_\delta^\infty\left(f'r'\cos.\lambda t + F'r'\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\cos.\alpha'(x'-x)\,d\alpha'$$

$$+\int_0^\delta\left(f'r'\cos.\lambda t + F'r'\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\cos.\alpha'(x'-x)\,d\alpha'\Big]dx',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$v' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(f'r'\cos.\lambda t + F'r'\frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\cos.\alpha'(x'-x)\,d\alpha' dx',$$

en réunissant en une seule les deux intégrales relatives à α'. Si donc on appelle Φ' la partie de φ' qui répond à cette partie v' de v, on aura, d'après la seconde équation (2),

$$\Phi' = \frac{1}{\pi^3}\iiiint\!\!\iint\left(f' r' \cos.\lambda t\right.$$
$$\left. + F' r' \frac{\sin.\lambda t}{\lambda}\right)\cos.\alpha'(x'-x)\cos.\beta(y'-y)\cos.\gamma(z'-z)\,d\alpha' d\beta\, d\gamma\, dx' dy' dz'.$$

Les intégrales relatives à α', β, γ, seront prises depuis zéro jusqu'à l'infini ; celles qui répondent à x', y', z', auront $\pm\infty$ pour limites, et l'on prendra la racine carrée de $a'^2(\alpha'^2+\beta^2+\gamma^2)$ pour la valeur de λ. Or, en comparant cette expression de Φ' à la formule (20), on verra, comme dans le n° 11, qu'on peut la remplacer par une autre beaucoup plus simple, et représenter Φ' par la formule (a) dans laquelle on mettra f', F', a', au lieu de f, F, a, et l'on regardera r comme le rayon vecteur $O'M$ d'un point quelconque M du fluide inférieur. C'est d'ailleurs ce que l'on peut vérifier en effectuant les intégrations indiquées dans la valeur précédente de Φ' ; ce qui est possible par les transformations du n° 12.

Représentons par Π et Π' les parties de φ et φ' qui répondent à p et à la seconde partie de q. En vertu des équations (2) et (18), et en substituant α' à la variable α dans les intégrations, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2\pi^3}\iiiint\!\!\iint f' r' \cos.\lambda t \cos.\left[\alpha'(x'-h) - \alpha(x-h)\right. \\
&\quad \left. + \beta(y'-y) + \gamma(z'-z)\right]\frac{a^2\alpha'}{a^2\alpha + a'^2\alpha'}\,d\alpha' d\beta\, d\gamma\, dx' dy' dz', \\
\Pi' &= \frac{1}{4\pi^3}\iiiint\!\!\iint f' r' \cos.\lambda t \cos.\left[\alpha'(x'+x-2h)\right. \\
&\quad \left. + \beta(y'-y) + \gamma(z'-z)\right]\frac{a'^2\alpha' - a^2\alpha}{a'^2\alpha' + a^2\alpha}\,d\alpha' d\beta\, d\gamma\, dx' dy' dz';
\end{aligned}\right\} \quad (i)$$

les intégrales relatives à β et γ ayant maintenant $\pm\infty$ pour limites, comme celles qui répondent à x', y', z', et les intégrales relatives à α' étant prises depuis $\alpha' = \delta$ jusqu'à $\alpha' = \infty$.

Désignons enfin par Ω la partie de φ et par Ω' et Ω'' les deux parties de φ' qui répondent à p_1 et aux deux dernières parties de q_1, la première ayant déja été employée pour former Φ'; au moyen des équations (2) et (19), nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\Omega=&\frac{a^2}{2\pi^3(a^2-a'^2)}\iiiint\!\!\iint f'r'\cos.\lambda t\, e^{\frac{a'}{a}(h-x)\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}\big[a'\alpha'\cos.(\alpha'(x'-h)\\
&+\beta(y'-y)+\gamma(z'-z))-a\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}\sin.(\alpha'(x'-h)\\
&+\beta(y'-y)+\gamma(z'-z))\big]\frac{a'\alpha'}{a^2(\beta^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2}d\alpha' d\beta\, d\gamma\, dx' dy' dz',\\
\Omega'=&\frac{1}{4\pi^3(a^2-a'^2)}\iiiint\!\!\iint f'r'\cos.\lambda t\cos.\big[\alpha'(x'+x-2h)\\
&+\beta(y'-y)+\gamma(z'-z)\big]\frac{a'^2(a^2+a'^2)\alpha'^2-a^2(a^2-a'^2)(\beta^2+\gamma^2)}{a^2(\beta^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2}d\alpha' d\beta\, d\gamma\, dx' dy' dz',\\
\Omega''=&\frac{a'^2}{2\pi^3(a'^2-a^2)}\iiiint\!\!\iint fr'\cos.\lambda t\sin.\big[\alpha'(x'+x-2h)\\
&+\beta(y'-y)+\gamma(z'-z)\big]\frac{aa'\alpha'\sqrt{\delta^2-\alpha'^2}}{a^2(\beta^2+\gamma^2)-a'^2\alpha'^2}d\alpha' d\beta\, d\gamma\, dx' dy' dz';
\end{aligned}\right\}(k)$$

les intégrales relatives à $x', y', z', \beta, \gamma$, ayant toujours $\pm\infty$ pour limites, et celles qui répondent à α' étant prises depuis $\alpha'=0$ jusqu'à $\alpha'=\delta$.

Dans ces équations (i) et (k), on prendra

$$\lambda=a'\sqrt{\alpha'^2+\beta^2+\gamma^2},$$

$$\alpha=\frac{1}{a}\sqrt{a'^2\alpha'^2-(a^2-a'^2)(\beta^2+\gamma^2)},$$

$$\delta=\frac{1}{a'}\sqrt{(a^2-a'^2)(\beta^2+\gamma^2)}.$$

Pour avoir les parties de φ et φ' relatives à la fonction F', on changera $f'r'$ en $\mathrm{F}'r'$, on multipliera par dt, puis on intégrera par rapport à t de manière que les intégrales s'évanouissent avec cette variable. Cela fait, la valeur complète de φ

sera la somme des valeurs de $\Pi+\Omega$ qui répondent à f' et F', et celle de φ', la somme des valeurs de $\Pi'+\Omega'+\Omega''$, augmentée de Φ'

(17). Je transforme x', y', z', en coordonnées polaires. Je faits aussi

$$\alpha'=\rho\cos.\theta,\quad \beta=\rho\sin.\theta\sin.\omega,\quad \gamma=\rho\sin.\theta\cos.\omega;$$

puis je substitue ρ, θ, ω, aux variables α', β, γ : les limites des intégrales par rapport à ρ et ω seront les mêmes dans les équations (i) et (k), savoir, $\rho=0$ et $\rho=\infty$, $\omega=0$ et $\omega=2\pi$; mais relativement à θ, les intégrales devront s'étendre depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\frac{1}{2}\pi$, dans les formules (i), et depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=b$, dans les formules (k); b étant un angle aigu, déterminé par l'équation

$$\cot.b=\frac{1}{a'}\sqrt{a^2-a'^2}.$$

Cela posé, par une analyse semblable à celle du n° 12, on transformera les équations (i) et la seconde équation (k), en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
\Pi&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2\sin.\theta\cos.\theta}{a'^2\cos.\theta+a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2\theta}}\,\psi'\varpi'\,d\theta\,d\omega,\\
\Pi'&=\frac{1}{4\pi}\int_b^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(a'^2\cos.\theta-a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2\theta}\right)\sin.\theta}{a'^2\cos.\theta+a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2\theta}}\,\psi'\varpi'\,d\theta\,d\omega,\\
\Omega'&=\frac{1}{4\pi(a^2-a'^2)}\int_0^{b}\int_0^{2\pi}\frac{[a'^2(a^2+a'^2)\cos.^2\theta-a^2(a^2-a'^2)\sin.^2\theta]\sin.\theta}{a^2\sin.^2\theta-a'^2\cos.^2\theta}\,\psi'\varpi'\,d\theta\,d\omega;
\end{aligned}\right\}(l)$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{x-h}{a}\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2\theta}+h\cos.\theta+y\sin.\theta\sin.\omega+z\sin.\theta\cos.\omega\pm a't=\varpi,$$

$$(2h-x)\cos.\theta+y\sin.\theta\sin.\omega+z\sin.\theta\cos.\omega\pm a't=\varpi'.$$

On suppose, en outre,

$$f'(-r')=f'r',\quad \frac{d.r'f'r'}{dr'}=\psi'r';$$

et dans chacune des formules précédentes, il faudra prendre le signe supérieur et le signe inférieur devant $a't$, et faire ensuite la somme des résultats pour avoir les valeurs totales de Π, Π' et Ω'.

Quant à celle de Ω, par le même calcul que dans le n° 15, on pourra réduire la première formule (k) qui la représente, à une intégrale double; et sans effectuer entièrement cette réduction, on prouvera que cette quantité doit être négligée, lorsqu'il s'agit des points très-éloignées du centre de l'ébranlement primitif et que l'on s'arrête au même degré d'approximation que dans le n° 13. Il en sera de même; mais par une raison différente, à l'égard de la quantité Ω''.

En effet la transformation du n° 12 par laquelle on a d'abord changé les équations (b) dans les formules (d), étant appliquée à la troisième équation (k), elle devient

$$\Omega''=\frac{a'^2}{2\pi^2(a^2-a'^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{b}\int_0^{2\pi}\frac{aa'\sin.^2\theta\cos.\theta\sqrt{\cot.^2b-\cot.^2\theta}}{a^2\sin.^2\theta-a'^2\cos.^2\theta}\rho\, r'\sin.\rho r'\sin.\rho\varpi' f'r'\,dr'\,d\rho\,d\theta\,d\omega,$$

en observant qu'on a, par hypothèse, $f'(-r')=f'r'$, ce qui permet d'étendre l'intégrale relative à r' depuis $r'=-\infty$ jusqu'à $r'=\infty$, pourvu qu'on réduise le résultat à moitié. Si l'on désigne par g, une constante positive, on aura

$$\int_0^{\infty}e^{-g\rho}\rho\sin.\rho r'\sin.\rho\varpi'd\rho=-\frac{1}{2}\frac{d.}{dr'}\left(\frac{r'+\varpi'}{g^2+(r'+\varpi')^2}-\frac{r'-\varpi'}{g^2+(r'-\varpi')^2}\right).$$

En multipliant par $r'f'r'dr'$, intégrant par partie, et observons que le produit $r'fr'$ peut être regardé comme nul aux deux limites $r' = \pm\infty$, il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-g\rho}\rho r' \sin.\rho r' \sin.\rho\varpi' f' r' dr' d\rho$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(r'+\varpi')\psi' r' dr'}{g^2+(r'+\varpi')^2} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(r'-\varpi')\psi' r' dr'}{g^2+(r'-\varpi')^2}\right).$$

A la place de r', je mets $\zeta - \varpi'$ dans la première de ces deux dernières intégrales, et $\zeta + \varpi'$ dans la seconde; les limites relatives à la nouvelle variable ζ seront encore $\pm\infty$; et si l'on fait la constante g infiniment petite, il en résultera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \rho r' \sin.\rho r' \sin.\rho\varpi' f' r' dr' d\rho$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi'(\zeta-\varpi') - \psi'(\zeta+\varpi')}{\zeta} d\zeta.$$

Nous aurons, par conséquent,

$$\Omega'' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{b}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\psi'(\zeta-\varpi') - \psi'(\zeta+\varpi')}{\zeta}\Theta \sin.\theta\, d\zeta\, d\theta\, d\omega,$$

en faisant, pour abréger,

$$\Theta = \frac{a a'^3 \sin.\theta \cos.\theta \sqrt{\cot.^2 b - \cot.^2\theta}}{4\pi^2(a^2 - a'^2)(a^2 \sin.^2\theta - a'^2 \cos.^2\theta)}.$$

Or, en remplaçant θ et ω par les mêmes variables θ' et ω' que dans le n° 13, et désignant par r_1 la distance du point M au point O situé à la distance h au-dessus de la surface de séparation des deux fluides et dans la même verticale que O', cette valeur de Ω'' deviendra

$$\Omega'' = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\iint\left[\psi'(\zeta - r_1 \cos.\theta' \mp at)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \psi'(\zeta + r_1 \cos.\theta' \pm at)\right]\Theta \sin.\theta'\, d\theta'\, d\omega'\right)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

pourvu que l'on détermine convenablement les limites relatives à θ' et ω'. Mais quelles que soient ces limites, que nous fixerons dans le numéro suivant, il nous suffit maintenant d'observer qu'elles répondront à $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et $\theta = b$, et que, par conséquent, la quantité Θ y sera égale à zéro. En intégrant par partie, relativement à θ', on aura donc

$$\iint \psi'(\zeta + r_1 \cos.\theta' \pm at)\Theta \sin.\theta' d\theta'$$
$$= \frac{1}{r_1}\int(\zeta + r_1\cos.\theta' \pm at) f'(\zeta + r_1\cos.\theta' \pm at)\frac{d\Theta}{d\theta'}d\theta',$$

et l'on verra, comme dans le n° 13 que cette dernière intégrale peut être négligée, dans le cas des points très-éloignées de O'. On pourra donc aussi négliger la quantité Ω''; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Ainsi relativement à ces points, nous aurons seulement à considérer les formules (l), et à leur faire subir des réductions semblables à celles des n^{os} 13 et 14.

(18) A l'égard des deux dernières formules (l), qui répondent aux points du fluide inférieur, nous ferons

$$2h - x = r'\cos.u, \quad y = r'\sin.u\sin.v, \quad z = r'\sin.u\cos.v,$$

et nous aurons

$$\varpi' = r'(\cos.\theta\cos.u + \sin.\theta\sin.u\cos.(\omega - v)) \pm a't.$$

La variable r' sera le rayon vecteur d'un point quelconque M de ce fluide, qui aura son origine en un point O du fluide supérieur, situé à la hauteur h au-dessus de la surface de séparation et sur la même verticale que O'; u désignera l'angle compris entre ce rayon OM et la verticale OO', et v l'angle que fait le plan de ces deux droites avec le plan vertical passant par l'axe des z. Par le point O, faisons passer un plan horisontal, et traçons au-dessous de ce plan, du point O comme centre et d'un rayon égal à l'unité, une demi-surface sphérique; traçons aussi, au-dessous du même plan, une surface conique dont le sommet sera en O et dont les génératrices feront toutes l'angle b avec la verticale OO': cette seconde surface partagera la première en deux portions, l'une intérieure et que j'appellerai S, l'autre extérieure et que je nommerai S'. L'élément de la surface sphérique aura $\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$ pour expression; l'intégrale relative à θ et ω s'étendra à toutes les éléments de S dans la deuxième équation (l), et à tous ceux de S' dans la troisième; mais pour effectuer ces intégrations, nous substituerons à θ et ω, les variables θ' et ω' du nº 13: l'élément de la surface sphérique sera alors exprimé par $\sin.\theta' d\theta' d\omega'$; on aura, en même temps, $\varpi' = r' \cos.\theta' \mp a' t$; et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{a'^2 \cos.\theta - a\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2\theta}}{a'^2 \cos.\theta + a\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2\theta}} = \Theta,$$

$$\frac{a'^2(a^2 + a'^2)\cos.^2\theta - a^2(a^2 - a'^2)\sin.^2\theta}{(a^2 - a'^2)(a^2\sin.^2\theta - a'^2\cos.^2\theta)} = \Theta',$$

les deux dernières équations (l) deviendront

$$\Pi' = \frac{1}{4\pi}\iint \Theta\psi'(r'\cos.\theta' \pm a't)\sin.\theta' d\theta' d\omega',$$

$$\Omega' = \frac{1}{4\pi}\iint \Theta'\psi'(r'\cos.\theta' \pm a't)\sin.\theta' d\theta' d\omega';$$

les intégrales s'étendant, comme on vient de le dire, à tous les points de S dans Π' et à tous ceux de S' dans Ω'. Or, une intégrale qui répond à S' peut être remplacée par l'intégrale relative à la demi-surface sphérique toute entière, moins l'intégrale relative à S; par rapport à la demi-surface sphérique, les limites sont $\theta' = 0$ et $\theta' = \mu$, $\omega' = 0$ et $\omega' = 2\pi$; μ désignant le même angle que dans le n° 13 : la valeur de Ω' est donc la même chose que

$$\Omega' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\mu}\int_0^{2\pi} \Theta'\psi'(r'\cos.\theta' \pm a't)\sin.\theta' d\theta' d\omega'$$
$$- \frac{1}{4\pi}\iint \Theta'\psi'(r'\cos.\theta' \pm a't)\sin.\theta' d\theta' d\omega';$$

la seconde intégrale répondant à S comme dans l'expression de Π'.

Ses limites seront différentes selon que le rayon vecteur OM du point auquel ces formules appartiennent traversera S ou tombera en dehors, c'est-à-dire, selon que l'on aura $u < b$ ou $u > b$. Pour les déterminer dans ces deux cas, on se rappelera que θ' représente l'angle que fait un rayon quelconque de S avec O M, et ω', l'angle compris entre le plan de ces deux droites et un plan fixe passant par O M. Cela posé,

1° Lorsque O M traverse S, chaque plan mené par O M et correspondant à un angle ω', rencontre la surface conique qui limite S suivant une seule génératrice ; celle qui se trouvera dans le prolongement de ce plan, de l'autre côté de la verticale, devant être regardée comme répondant à $\omega' + \pi$. Donc, en désignant par m l'angle que fait cette génératrice unique avec O M, l'intégrale étendue à tous les points de S devra être prise, d'abord depuis $\theta' = 0$ jusqu'à $\theta' = m$, et ensuite depuis $\omega' = 0$ jusqu'à $\omega' = 2\pi$. Par conséquent, dans ce premier cas, les expressions de Π' et Ω' seront

$$\left.\begin{aligned} \Pi' &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{m} \Theta\psi'(r'\cos.\theta' \pm a't)\sin.\theta' d\theta'\right)d\omega', \\ \Omega' &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_m^{\mu} \Theta'\psi'(r'\cos.\theta' \pm a't)\sin.\theta' d\theta'\right)d\omega', \end{aligned}\right\} (m)$$

en réduisant à une seule, dans Ω', les deux intégrales relatives à θ'. D'après les formules du n°13, à la limite $\theta'=0$, on aura $\cos.\theta=\cos.u$, et à la limite $\theta'=m$, qui répond à $\theta=b$, on aura

$$\cos.b=\cos.u\cos.m+\sin.u\sin.m\cos.\omega', \qquad (n)$$

pour déterminer m en fonction de ω'. L'angle μ appartenant à une direction horisontale du rayon de S, on aura $\theta'=\mu$. Si la droite OM se trouvait exactement sur la surface conique par laquelle S est terminée, il ne faudrait étendre les intégrales relatives à ω', que depuis $\omega'=0$ jusqu'à $\omega'=\pi$

2° Quand le rayon OM tombera en dehors de S, on menera par cette droite, deux plans tangens à la surface conique, lesquels répondront à deux valeurs de ω' que je représenterai par ω_1 et ω_2. Pour chacune des valeurs de ω' comprises entre ces limites, le plan passant par OM rencontrera la surface conique suivant deux génératrices. Je désignerai par m_1 et m_2 les angles qu'elles feront avec OM; et cela étant, on intégrera, d'abord depuis $\theta'=m_1$ jusqu'à $\theta'=m_2$, et ensuite depuis $\omega'=\omega_1$ jusqu'à $\omega'=\omega_2$. Les expressions de Π' et Ω' relatives à ce second cas seront donc

$$\left.\begin{aligned}
\Pi' &= \frac{1}{4\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\int_{m_1}^{m_2}\Theta\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta'd\theta'\right)d\omega',\\
\Omega' &= \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{\mu}\Theta'\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta'd\theta'\right)d\omega'\\
&\quad -\frac{1}{4\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\int_{m_1}^{m_2}\Theta'\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta'd\theta'\right)d\omega'.
\end{aligned}\right\}(o)$$

Dans ce même cas, l'équation (n) donnera deux valeurs de m, moindres que π, qui seront celles de m_1 et m_2. Si la droite OM fait partie de la surface conique qui termine S, l'une de ces deux valeurs sera égale à zéro; les deux plans tangents menés par OM, se réduiront à un seul plan, à partir duquel on comptera l'angle ω'; et alors l'intégrale relative à cette variable s'étendra depuis $\omega'=0$ jusqu'à $\omega'=\pi$.

(19) Je désigne par U, ce que devient Θ pour $\theta'=0$ ou $\theta=u$; à cause de

$$\cos.^2 b=\frac{a^2-a'^2}{a^2}, \qquad \sin.^2 b=\frac{a'^2}{a^2},$$

on aura $\Theta=\Theta'=1$, pour $\theta'=m$ ou $\theta=b$; on aura aussi $\Theta=\Theta'=-1$, pour $\theta'=\mu$ ou $\theta=\frac{1}{2}\pi$; par conséquent, en intégrant par partie et observant que $\psi' r'=\frac{d.r'f'r'}{dr'}$, il en résultera

$$\int_0^m \Theta\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta' d\theta'=\frac{U}{r'}(r'\pm a't)f(r'\pm a't)$$
$$-\frac{1}{r'}(r'\cos.m\pm a't)f'(r'\cos.m\pm a't)$$
$$+\frac{1}{r'}\int_0^m (r'\cos.\theta'\pm a't)f'(r'\cos.\theta'\pm a't)\frac{d\Theta}{d\theta'}d\theta',$$

$$\int_m^\mu \Theta'\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta' d\theta'=\frac{1}{r'}(r'\cos.m\pm a't)f'(r'\cos.m\pm a't)$$
$$-\frac{1}{r'}(r'\cos.\mu\pm a't)f'(r'\cos.\mu\pm a't)$$
$$+\frac{1}{r'}\int_0^\mu (r'\cos.\theta'\pm a't)f'(r'\cos.\theta'\pm a't)\frac{d\Theta'}{d\theta'}d\theta'.$$

La distance r' du point M au point O étant supposée extrêmement grande par rapport au rayon de l'ébranlement primitif, on verra, par la même raison que dans le n° 13, qu'on peut négliger le dernier terme de chacune de ces deux formules. En les ajoutant ensuite, nous aurons

$$\int_{o}^{m}\Theta\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta' d\theta' + \int_{m}^{\mu}\Theta'\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta' d\theta'$$
$$=\frac{U}{r'}(r'\pm a't)f'(r'\pm a't)-\frac{1}{r'}(r'\cos.\mu\pm a't)f(r'\cos.\mu\pm a't),$$

et, d'après les équations (m),

$$\Pi'+\Omega'=\frac{U}{2r'}(r'\pm a't)f'(r'\pm a't)$$
$$-\frac{1}{4\pi r'}\int_{o}^{2\pi}(r'\cos.\mu\pm a't)f'(r'\cos.\mu\pm a't)d\omega'.$$

Je négligerai aussi, comme dans le n° cité, cette dernière intégrale relative à ω': en mettant pour U sa valeur et ayant égard au double signe de $a't$, il en résultera

$$\Pi'+\Omega'=\frac{a'^2\cos.u-a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u}}{a'^2\cos.u+a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u}}[(r'+a't)f'(r'+a't) \qquad (p)$$
$$+(r'-a't)f'(r'-a't)],$$

depuis $u=o$ jusqu'à $u=b$, c'est-à-dire depuis $\sin.u=o$ jusqu'à $\sin.u=\frac{a'}{a}$. Nous n'avons pas besoin de connaître séparément les quantités Π' et Ω'; car c'est leur somme qui entre dans la valeur de l'inconnue φ'.

Comme les deux limites m_1 et m_2 répondent à $\theta=b$, valeur de θ pour laquelle on a $\Theta=\Theta'=1$, il s'ensuit qu'en intégrant par partie, nous aurons

$$\int_{m_1}^{m_2} \Theta\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta' d\theta' = \frac{1}{r'}(r'\cos.m_1\pm a't)f'(r'\cos.m_1\pm a't)$$
$$-\frac{1}{r'}(r'\cos.m_2\pm a't)f'(r'\cos.m_2\pm a't)$$
$$+\frac{1}{r'}\int_{m_1}^{m_2}(r'\cos.\theta'\pm a't)f'(r'\cos.\theta'\pm a't)\frac{d\Theta}{d\theta'}d\theta',$$

$$\int_{m_1}^{m_2} \Theta'\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta' d\theta' = \frac{1}{r'}(r'\cos.m_1\pm a't)f'(r'\cos.m_1\pm a't)$$
$$-\frac{1}{r'}(r'\cos.m_2\pm a't)f'(r'\cos.m_2\pm a't)$$
$$+\frac{1}{r'}\int_{m_1}^{m_2}(r'\cos.\theta'\pm a't)f'(r'\cos.\theta'\pm a't)\frac{d\Theta'}{d\theta'}d\theta'.$$

Je négligerai, comme précédemment, le dernier terme de chacune de ces formules; en les retranchant ensuite l'une de l'autre, on aura

$$\int_{m_1}^{m_2} \Theta\psi'(r'\cos.m_2\pm a't)\sin.\theta' d\theta'$$
$$-\int_{m_1}^{m_2} \Theta'\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta' d\theta' = 0,$$

et, en ajoutant les formules (o),

$$\Pi' + \Omega' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\mu}\Theta'\psi'(r'\cos.\theta'\pm a't)\sin.\theta' d\theta'\right)d\omega';$$

équation que l'on changera en celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}\Pi' + \Omega' = \frac{a'^2(a^2+a'^2)\cos.^2 u - a^2(a^2-a'^2)\sin.^2 u}{2r'(a'^2(a^2+a'^2)\cos.^2 u + a^2(a^2+a'^2)\sin.^2 u)}&[(r'+a't)f'(r'+a't)\\ &+(r'-a't)f'(r'-a't)],\end{aligned}\right\}\ (q)$$

par les mêmes considérations que dans le n° 13, et qui aura lieu, comme les formules (o), depuis $u=b$ jusqu'à $u=\frac{1}{2}\pi$.

Nous voyons donc que la valeur de la partie $\Pi'+\Omega'$ de φ' sera donnée par la formule (p) ou par la formule (q), selon qu'on aura $\sin. u <$ ou $> \frac{a'}{a}$: dans le cas de $\sin. u = \frac{a'}{a}$, on emploiera indifféremment l'une ou l'autre de ces deux formules qui seront alors égales entre elles.

(20) Il ne nous reste plus qu'à transformer et réduire de même la première formule (l). Pour cela, je faits, comme dans le n° 14,

$$h=r_1 \cos. u, \quad y=r_1 \sin. u \sin. v, \quad z=r_1 \sin. u \cos. v;$$

c'est-à-dire, que je désigne par r_1 le rayon vecteur dont l'origine est O', du point de la surface de séparation des deux fluides qui a y et z pour coordonnées horisontales, par u l'angle que fait ce rayon avec la verticale élevée par le point O', et par v l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x et z. Je substitue, en outre, à θ et ω, les variables θ' et ω' du numéro cité. La quantité ϖ qui entre dans la première équation (l) aura pour valeur

$$\varpi = \frac{x-h}{a}\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2 \theta} + r_1 \cos. \theta' \pm a't;$$

et cette équation deviendra

$$\Pi = \frac{1}{2\pi}\iint \Theta \psi' \varpi \sin. \theta' d\theta' d\omega',$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{a^2 \cos. \theta}{a'^2 \cos. \theta + a\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2 \theta}} = \Theta,$$

mettant $\sin. \theta' d\theta' d\omega'$ au lieu de $\sin. \theta d\theta d\omega$, et considérant

Θ comme une fonction de θ' et ω'. Quant aux limites de l'intégrale relative à ces variables, elles seront les mêmes que pour la seconde équation (l), en sorte que si l'on fait passer par le point O', un plan horisontal et une surface conique qui ait son sommet en ce point et dont toutes les génératrices fassent l'angle b avec la verticale, et que du même point O' comme centre et d'un rayon égal à l'unité, on décrive au-dessus du plan horisontal, une demi-surface sphérique, l'intégrale dont il s'agit s'étendra à tous les points de la portion de cette demi-surface, terminée par la surface conique. On aura d'ailleurs

$$\sin.\theta' d\theta' = -\frac{1}{r_1}\frac{d\varpi}{d\theta'}d\theta' - \frac{x-h}{a}\frac{d.\sqrt{a'^2 - a^2\sin.^2\theta}}{d\theta'}d\theta',$$

et, par conséquent

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi r_1}\iint \Theta\psi'\varpi\frac{d\varpi}{d\theta'}d\theta' d\omega' \\ - \frac{x-h}{2\pi a r_1}\iint \Theta\psi'\varpi\frac{d.\sqrt{a'^2 - a^2\sin.^2\theta}}{d\theta'}d\theta'.$$

Nous supposerons le point du fluide supérieur auquel cette expression de Π appartient, situé à une distance $x-h$ au-dessus de la surface de séparation des deux fluides, très-petite par rapport à sa distance du centre de l'ébranlement O' au-dessous de cette surface, et, à plus forte raison, par rapport au rayon r_1; ce qui permettra de négliger le second terme de la valeur de Π, à cause de facteur $\frac{x-h}{r_1}$. Cela étant, nous aurons

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi r_1}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^m \Theta\psi'\varpi\frac{d\varpi}{d\theta'}d\theta'\right)d\omega',$$

dans le cas de $u < b$, et

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi r_1}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\int_{m_1}^{m_2}\Theta\psi'\varpi\frac{d\varpi}{d\theta'}d\theta'\right)d\omega',$$

dans le cas de $u > b$, les angles ω_1, ω_2, m, m_1, m_2, étant les mêmes que dans le n° 18.

Puisque $\theta' = m$ répond à $\theta = b$ ou $\sin.\theta = \frac{a'}{a}$, il en résulte qu'on aura en même temps

$$\Theta = \frac{a^2}{a'^2},\quad \varpi = r_1 m \pm a't,$$

et de même pour $\theta' = m_1$ et $\theta' = m_2$ qui répondent aussi à $\theta = b$. Je désigne par U et ζ, les valeurs de Θ et ϖ relatives à $\theta' = 0$ ou $\cos.\theta = \cos.u$, de sorte qu'on ait

$$\mathrm{U} = \frac{a^2\cos.u}{a'^2\cos.u + a\sqrt{a'^2 - a^2\sin.^2 u}},$$

$$\zeta = \frac{x-h}{h}\sqrt{a'^2 - a^2\sin.^2 u} + r_1 \pm a't.$$

En intégrant par partie, on aura alors

$$\int_0^m \Theta\psi'\varpi\frac{d\varpi}{d\theta'}d\theta' = \frac{a^2}{a'^2}(r_1\cos.m \pm a't)f'(r_1\cos.m \pm a't)$$
$$-\mathrm{U}\zeta f'\zeta - \int_0^m \varpi f'\varpi\frac{d\Theta}{d\theta'}d\theta',$$

$$\int_{m_1}^{m_2} \Theta\psi'\varpi\frac{d\varpi}{d\theta'}d\theta' = \frac{a^2}{a'^2}(r_1\cos.m_2 \pm a't)f'(r_1\cos.m_2 \pm a't)$$
$$-\frac{a^2}{a'^2}(r_1\cos.m_1 \pm a't)f'(r_1\cos.m_1 \pm a't) - \int_{m_1}^{m_2}\varpi f'\varpi\frac{d\Theta}{d\theta'}d\theta'.$$

On négligera, comme précédemment, les intégrales relatives à θ' que renferment les seconds membres de ces équations, au moyen de quoi, les deux valeurs différentes de Π deviendront

$$\left.\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{r_1} U\zeta f'\zeta \\
&\quad - \frac{a^2}{2\pi r_1 a'^2}\int_0^{2\pi} (r_1 \cos. m \pm a' t) f'(r_1 \cos. m \pm a' t)\, d\omega', \\
\Pi &= \frac{a^2}{2\pi r_1 a'^2}\left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} (r_1 \cos. m_1 \pm a' t) f'(r_1 \cos. m_1 \pm a' t)\, d\omega' \right. \\
&\quad \left. - \int_{\omega_1}^{\omega_2} (r_1 \cos. m_2 \pm a' t) f'(r_1 \cos. m_2 \pm a' t)\, d\omega'\right].
\end{aligned}\right\} (r)$$

Généralement, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs de m, m_1, m_2, qui ne différeront pas très-peu de zéro, on verra, comme dans le n° 13, qu'on peut aussi négliger ces dernières intégrales relatives à ω'. De cette manière, la seconde valeur de Π, qui répond à $u > b$, devra être regardée comme nulle, et la première, qui a lieu pour $u < b$, aura pour expression:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi = \frac{a^2 \cos. u}{r_1 (a'^2 \cos. u + a\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2 u})} & \left[\left(\frac{x-h}{h}\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2 a}\right.\right. \\
+ r_1 + a' t\Big) f'\left(\frac{x-h}{a}\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2 u} + r_1 + a' t\right) & + \left(\frac{x-h}{a}\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2 u}\right. \\
+ r_1 - a' t\Big) f'\left(\frac{x-h}{a}\sqrt{a'^2 - a^2 \sin.^2 u} + r_1 - a' t\right)\Bigg]. &
\end{aligned}\right\} (s)$$

Mais il est important d'observer que cette quantité Π ne passera pas brusquement de cette dernière valeur à zéro, pour les valeurs de u très-peu différentes de b en plus ou en moins.

En effet, l'angle u étant moindre que b, lorsque la différence $b - u$ est très-petite, ce qui a lieu quand le rayon r_1 s'écarte très-peu de la surface conique qui termine S, l'angle m est très-petit pour la moitié des valeurs de ω'; ce n'est donc que pour l'autre moitié de ces valeurs qu'on peut négliger l'intégrale contenue dans la première formule (r) : dans la moitié que l'on devra conserver, et qui s'étendra, par exemple, depuis $\omega' = 0$ jusqu'à $\omega' = \pi$, on pourra faire, à très-peu près, $\cos. m = 1$, ainsi que dans le terme compris sous le signe $\int$; et, de cette manière, on aura, aussi à très-peu près,

$$\Pi = \frac{a^2}{2r_1 a'^2}[(r_1 + a't)f'(r_1 + a't) + (r_1 - a't)f'(r_1 - a't)], \quad (t)$$

pour les valeurs de u moindres que b et qui en diffèrent très-peu. De même si u surpasse b d'une très-petite quantité, la première des deux limites m_1 et m_2 sera à très-peu près zéro; on ne pourra plus négliger la première intégrale contenue dans la seconde formule (r); ses limites ω_1 et ω_2 pourront être remplacées par zéro et π; et en y faisant $\cos. m_1 = 1$, et négligeant toujours la seconde intégrale, la valeur de Π coïncidera avec la formule (t), laquelle aura lieu à très-peu près, pour toutes les valeurs de u qui différeront très-peu de b, en plus ou en moins. Cette valeur intermédiaire de Π est la moitié de celle que donne la formule (s) pour $u = b$ ou $\sin. u = \frac{a'}{a}$; et c'est effectivement ce que l'on aurait trouvé, en ayant égard aux limites des intégrales relatives à ω' qui doivent avoir lieu dans ce cas particulier (n° 18). Lors donc que la différence $b - u$ passe du positif au négatif, la quantité Π passe graduellement de sa valeur donnée par la formule (s) à zéro, et se réduit à la moitié de cette formule, ou à la demi-somme de ses valeurs extrêmes, quand cette différence $b - u$ est tout-à-fait nulle. L'intervalle des valeurs de u dans lequel a lieu cette réduction de Π, d'abord à moitié, puis à zéro, est d'autant plus petit que la distance du point que l'on considère au centre de l'ébranlement primitif, sera plus grande, eu égard au rayon de cet l'ébranlement, et il serait insensible si le rapport de cette distance à ce rayon, était extrêmement grand et comme infini; supposition qui rendrait rigoureuses, toutes les formules approchées que nous avons obtenues pour le cas où ce rapport est seulement un très-grand nombre.

§ III.

Lois du mouvement à de grandes distances du centre de l'ébranlement primitif.

(21) L'analyse du paragraphe précédent est sans doute très-compliquée; mais il paraîtra difficile de la rendre plus simple, si l'on fait attention que les formules générales qui renferment la solution du problème, sont exprimées par des intégrales sextuples; qu'on en a d'abord réduit les différentes parties a des intégrales doubles, sans en altérer l'exactitude, et en supposant seulement que l'ébranlement primitif était circonscrit dans une portion limitée de l'un des deux fluides, et symétrique en tous sens autour d'un point donné; et qu'ensuite on a ramené ces mêmes formules à des expressions dans lesquelles toutes les intégrations sont effectuées, en considérant des points très-éloignés du centre du mouvement, et s'arrêtant alors à un degré d'approximation qui sera d'autant plus grand que leurs distances seront de plus grands multiples du rayon de l'ébranlement initial.

Rappelons d'abord les notations qu'on a employées, les suppositions qui ont été faites, et les formules auxquelles on est parvenu.

Le plan qui sépare les deux fluides dans leur état d'équilibre est horisontal. La vitesse de propagation est représentée par a dans le fluide supérieur, par a' dans le fluide inférieur, et l'on suppose $a > a'$. Les vitesses propres des molécules sont très-petites par rapport à ces deux constantes, et les dilatations ou condensations qui les accompagnent sont aussi de très-petites fractions. On suppose qu'à l'origine et, par suite, pendant toute la durée du mouvement, les composantes de la vitesse d'un point quelconque, sont exprimées par les trois différences partielles relatives à ses coordonnées, d'une même fonction dans chaque fluide. Cette foction a été représentée par φ pour le fluide supérieur et par φ' pour le fluide inférieur. Le temps est désigné par t et compté à partir de l'origine du mouvement, en sorte que φ et φ', et leurs différences partielles $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\varphi'}{dt}$ sont données quand $t = 0$, d'après l'état initial du système. L'ébranlement primitif est circonscrit dans une portion de l'un ou de l'autre fluide, le même en tous sens autour d'un de leurs points, et son rayon est représenté par ε. On appelle M le point du système dont on considère le mouvement à un instant quelconque; O le centre de l'ébranlement primitif, quand il a eu lieu dans le fluide supérieur, et O' dans le fluide inférieur: O et O' sont situés sur une même verticale, à une même distance h au-dessus et au-dessous du plan qui sépare les deux fluides; enfin les distances de M à ces deux points sont supposées extrêmement grandes par rapport à ε, et la distance h est plus grande que ce rayon.

Cela posé, lorsque l'ébranlement primitif a eu lieu dans le fluide supérieur, on a

$$\begin{aligned}\varphi = &\frac{1}{2r}[(r+at)f(r+at)+(r-at)f(r-at)+\mathrm{F}(r+at)-\mathrm{F}(r-at)]\\ &+\frac{a^2\cos.u - a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u}}{2r'(a^2\cos.u+a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u})}[(r'+at)f(r'+at)+(r'-at)f(r'-at)\\ &\qquad +\mathrm{F}(r'+at)-\mathrm{F}(r'-at)];\end{aligned} \quad (1)$$

r et r' étant les distances de M aux points O et O', et u l'angle que fait la droite O'M avec la verticale O'O. Les valeurs initiales de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ sont des fonctions de r qu'on a supposées égales pour des valeurs égales et contraires de la variable, nulles quand la variable sort des limites $\pm\varepsilon$, et qui sont représentées, dans cette formule, par fr et $\frac{a}{r}\frac{d\mathrm{F}r}{dr}$.

Dans le même cas, l'expression de φ' est

$$\begin{aligned}\varphi' = &\frac{a'^2\cos.u_1}{r_1(a^2\cos.u_1+a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1})}\Big[\Big(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1}\\ &+r_1+at\Big)f\Big(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1}+r_1+at\Big)+\Big(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1}\\ &+r_1-at\Big)f\Big(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1}+r_1-at\Big)+\mathrm{F}\Big(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1}\\ &\qquad +r_1+at\Big)-\mathrm{F}\Big(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1}+r_1-at\Big)\Big].\end{aligned} \quad (2)$$

Les fonctions f et F sont ici les mêmes que dans l'équation (1); r_1 est la distance au centre O, d'un point de la surface de séparation des deux fluides, qu'on appellera H et qui est situé sur la verticale passant par M; u_1 désigne l'angle que fait la droite OH avec la verticale OO', et x la distance MH, laquelle est supposée très-petite par rapport à h.

Si l'ébranlement primitif a eu lieu dans le fluide inférieur, et que l'on désigne par r la distance du point M à son centre O', par r' la distance OM, et par u l'angle que fait la droite OM avec la verticale OO', on aura

$$\begin{aligned}\varphi' = \frac{1}{2r}[(r+a't)f'(r+a't)+(r-a't)f'(r-a't)+F'(r+a't)\\ -F'(r-at)] + \frac{a'^2\cos.u - a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u}}{2r'(a'^2\cos.u+a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u})}[(r'+a't)f'(r'+a't)\\ +(r'-a't)f'(r'-a't)+F'(r'+a't)-F'(r'-a't)],\end{aligned} \quad (3)$$

pour toutes les valeurs de $\sin.u$ qui ne sont pas plus grandes que $\frac{a'}{a}$, et

$$\begin{aligned}\varphi' = \frac{1}{2r}[(r+a't)f'(r+a't)+(r+a't)f'(r-a't)\\ +F'(r+a't)-F'(r-a't)]\\ +\frac{a'^2(a^2+a'^2)\cos.^2u - a^2(a^2-a'^2)\sin.^2u}{2r'(a'^2(a^2+a'^2)\cos.^2u+a^2(a^2-a'^2)\sin.^2u)}[(r'+a't)f'(r'+a't)\\ +(r'-a't)f'(r'-a't)+F'(r'+a't)-F'(r'-a't)],\end{aligned} \quad (4)$$

pour les valeurs de $\sin.u$ qui ne sont pas moindres que $\frac{a'}{a}$: pour $\sin.u = \frac{a'}{a}$, on emploiera indifféremment l'une ou l'autre de ces deux formules qui seront alors égales entre elles. Les valeurs de φ' et $\frac{d\varphi'}{dt}$ qui répondent à $t=0$, sont représentées par $f'r$ et $\frac{a'}{a}\frac{dF'r}{dr}$, et assujéties aux mêmes conditions que les valeurs initiales de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$.

Dans le même cas, et en désignant par r_1 la distance au centre O', du point H appartenant à la surface de séparation des deux fluides et à la même verticale que M; par u_1 l'angle que fait la droite O'H avec la verticale O'O; par x la distance HM; et supposant cette distance x très-petite par rapport à h, on aura $\varphi=0$, lorsque $\sin. u_1$ est sensiblement plus grand que $\frac{a'}{a}$, et

$$\varphi=\frac{a^2\cos. u_1}{r_1\left(a'^2\cos. u_1+a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2 u_1}\right)}\Big[\left(\frac{x}{a}\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2 u_1}\right.$$
$$\left.+r_1+a't\right)f'\left(\frac{x}{a}\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2 u_1}+r_1+a't\right)+\left(\frac{x}{a}\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2 u_1}\right.$$
$$\left.+r_1+a't\right)f'\left(\frac{x}{a}\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2 u_1}+r_1-a't\right)$$
$$+F'\left(\frac{x}{a}\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2 u_1}+r_1+at\right)-F'\left(\frac{x}{a}\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2 u_1}+r_1-a't\right)\Big], \qquad (5)$$

lorsque $\sin. u_1$ est sensiblement moindre que $\frac{a'}{a}$: quand $\sin. u_1$ diffère très-peu de $\frac{a'}{a}$, la valeur de φ est à très-peu près la moitié de cette formule (5). Les fonctions f' et F' qu'elle renferme sont les mêmes que dans les formules (3) et (4).

Ces diverses formules et généralement toutes celles de ce Mémoire conviennent, non-seulement aux fluides aëriformes, mais aussi aux autres milieux, tels que les liquides et les corps solides, dans lesquels le mouvement se propage en vertu de leur élasticité et abstraction faite de la pesanteur : elles supposent seulement que les composantes de la vitesse en un point quelconque de ces différents milieux, peuvent s'exprimer par les différences partielles, relatives aux coordonnées de ce point, d'une même quantité dont la valeur en fonction de ces coordonnées et du temps, dépend de l'une des équations (1) du n° 1, comme dans le cas des fluides aëriformes (*). Voici maintenant les conséquences qui s'en déduisent.

(*) Cette supposition satisfait, en effet, aux équations d'où dépendent

(22) Supposons d'abord qu'on ait $a'=a$, en sorte que les deux fluides n'en forment plus qu'un seul qui s'étend indéfiniment en tous sens. En vertu de la formule (1), nous aurons

$$\varphi=\frac{1}{2r}[(r+at)f(r+at)+(r-at)f(r+at) \\ +F(r+at)-F(r-at)]; \tag{6}$$

équation qui ne sera plus restreinte aux très-grandes valeurs de r, et qui subsistera, au contraire, pour tous les points de ce fluide.

Si l'on appelle v la vitesse du point M suivant le prolongement de son rayon vecteur r, et s la dilatation du fluide qui a lieu au même point, on aura, à un instant quelconque,

$$v=\frac{d\varphi}{dt}, \qquad s=\frac{1}{a^2}\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Par hypothèse, les fonctions f et F sont égales pour des valeurs de la variable égales et de signes contraire, et nulles quand la variable est $<-\varepsilon$ ou $>\varepsilon$. Il s'ensuit qu'on a $f(-at)=f(at)$ et $F(-at)=F(at)$; ce qui rend nulle pour $r=0$, la valeur de v déduite de l'équation (6); et cela doit être, en effet, à cause que le mouvement étant semblable en tous sens autour du point O, ce point ne peut se mouvoir

---

les petits mouvements des corps élastiques, qui sont connues depuis la lecture de ce Mémoire; et comme les formules précédentes satisfont aussi a l'état initial du système, il s'ensuit que, dans le cas où l'ébranlement primitif a été semblable en tous sens autour d'un point donné, elles résolvent complètement le problème qui, par sa nature, n'est susceptible que d'une seule solution.

suivant aucune direction. Si le point M est hors de l'ébranlement primitif, ou si l'on a $r > \varepsilon$, les quantités $f(r+at)$ et $F(r+at)$ seront constamment nulles; $f(r-at)$ et $F(r-at)$ seront aussi zéro, tant qu'on aura $at < r-\varepsilon$, et le redeviendront dès que at surpassera $r+\varepsilon$; d'où l'on conclut en vertu de l'équation (6), que l'ébranlement du point M commencera au bout de $t = \frac{r-\varepsilon}{a}$, qu'il durera pendant un temps $\frac{2\varepsilon}{a}$, que le mouvement se propagera dans le fluide avec la vitesse constante a, et que l'épaisseur de l'onde mobile sera 2ε. Si, de plus, la distance r est très-grande par rapport à ε, et qu'on néglige les termes qui ont r^2 pour diviseur, on aura

$$v = \frac{1}{2r}\left[\frac{d.(r-at)f(r-at)}{dr} - \frac{dF(r-at)}{dr}\right],$$

$$s = -\frac{1}{2ar}\left[\frac{d.(r-at)f(r-at)}{dr} - \frac{dF(r-at)}{dr}\right],$$

et, par conséquent,

$$s = -\frac{v}{a};$$

ce qui montre qu'à l'égard des points très-éloignés du centre du mouvement, la dilatation est proportionnelle et de signe contraire à la vitesse, laquelle varie suivant la raison inverse de la distance.

Nous prendrons pour mesure de l'intensité de l'ébranlement, la somme des forces vives dans toute l'épaisseur de l'onde mobile; en la désignant par I, et par D, la densité naturelle du fluide, nous aurons donc

$$I = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D(1-s)v^2 dr,$$

c'est-à-dire,

$$I=\frac{1}{r^2}DE,$$

en négligeant les termes divisés par r^3 et faisant, pour abréger,

$$r-at=\varepsilon', \quad \frac{1}{4}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{d(\varepsilon' f\varepsilon' - F\varepsilon')}{d\varepsilon'}\right)^2 d\varepsilon' = E.$$

Si l'on veut déterminer les deux fonctions f et F, on aura

$$\frac{dfr}{dr}=\psi r, \quad \frac{a}{r}\frac{dFr}{dr}=a^2\Psi r,$$

et, par conséquent,

$$fr=\int\psi r dr + C, \quad Fr=a\int r\Psi r dr + C';$$

ψr et Ψr désignant les valeurs initiales de v et s; C et C' étant des constantes arbitraires. Les fonctions ψr et Ψr étant données seulement pour les valeurs positives de r, et indéterminées pour les valeurs négatives, on satisfera aux conditions $f(-r)=fr$, $F(-r)=Fr$, en prenant $\psi(-r)=-\psi r$, $\Psi(-r)=\Psi r$. Ces mêmes fonctions ψr et Ψr étant nulles pour $r>\varepsilon$, fr et Fr seront constantes pour $r=\varepsilon$ et $r>\varepsilon$; on les rendra nulles, au moyen des deux constantes C et C'; et l'on aura alors

$$fr=\int\psi r dr-\int_0^{\varepsilon}\psi r dr, \quad Fr=a\int r\Psi r dr - a\int_0^{\varepsilon} r\Psi r dr;$$

les premières intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent avec r. La valeur précédente de v, deviendra

$$v=\frac{1}{2r}\left(\varepsilon'\psi\varepsilon'-\int_r^{\varepsilon}\psi\varepsilon' d\varepsilon' - a\varepsilon'\Psi\varepsilon'\right);$$

pour qu'elle fût nulle, il suffirait qu'on eût

$$\Psi r = \frac{1}{a}\psi r - \frac{1}{ar}\int_r^{\varepsilon} \psi \varepsilon' d\varepsilon'; \qquad (7)$$

ce qui exige que l'intégrale $\int_0^{\varepsilon} \psi \varepsilon' d\varepsilon'$ soit nulle, afin que Ψr ne devienne pas infinie pour $r = 0$. Dans ce cas, il faudra conserver les termes divisés par r^2 dans l'expression de v, qui variera alors suivant la raison inverse du carré des distances au centre du mouvement, et deviendra beaucoup plutôt insensible.

Lorsque l'ébranlement primitif n'a pas été le même en tous autour du point O, les vitesses et les dilatations sont différentes sur les différents rayons partant de ce point; mais cela n'empêche pas que la vitesse de propagation ne soit constante, indépendante de l'ébranlement primitif et la même dans toutes les directions, et qu'à une grande distance de cet ébranlement, la vitesse propre des points du fluide, ne soit sensiblement dirigée suivant leurs rayons respectifs. C'est ce qui résulte de l'intégrale générale, citée dans le nº 11, ainsi qu'on peut le voir dans le Mémoire où cette intégrale a été donnée; et c'est aussi ce que j'avais démontré d'une autre manière, dans mon Mémoire sur la théorie du son (*).

(23) Nous pouvons maintenant faire abstraction de la première partie de la formule (1). L'autre partie

$$\varphi = \frac{a^2 \cos. u - a'\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u}}{2r'(a^2 \cos. u + a'\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u})}[(r' + at)f(r' + at)$$
$$+ (r' - at)f(r' - at) + \mathrm{F}(r' + at) - \mathrm{F}(r' - at)],$$

(*) Journal de l'École Polytechnique, 14ᵉ cahier.

renfermera les lois du mouvement du fluide supérieur, réfléchi à la surface de séparation des deux fluides. En la comparant à la formule (6), on en concluera que l'onde réfléchie a son centre au point O′ du fluide inférieur; et comme O′ et O sont situés à la même distance, l'un au-dessus et l'autre au-dessous de la surface de séparation, il en résulte que le rayon de l'onde primitive et le prolongement du rayon de l'onde réfléchie, qui se croisent en un même point de cette surface, font des angles égaux avec la normale; ce qui constitue la loi de l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion. L'épaisseur de l'onde réfléchie et sa vitesse de propagation seront constantes et égales à 2ε et a, comme celles de l'onde directe. Mais dans l'onde réfléchie, la vitesse propre de chaque point M du fluide, dépendra de l'angle u que fait son rayon O′M avec la verticale O′O. En appelant $v_{,}$ la composante de cette vitesse suivant le prolongement de O′M, et δ sa composante perpendiculaire à O′M et comprise dans le plan de O′M et de O′O, nous aurons

$$v_{,}=\frac{d\varphi}{dr'}, \qquad \delta=\frac{d\varphi}{r'du}.$$

Or, la valeur précédente de φ supposant r' très-grand par rapport à ε, et les valeurs de δ et de $v_{,}$ qui s'en déduisent, étant divisées, la première par le carré de r', et la seconde par r' seulement, on pourra, en général, négliger δ par rapport à $v_{,}$, et considérer la vitesse du point M comme étant dirigée suivant son rayon r' et égale à $v_{,}$. Il n'y aurait d'exception que si l'équation (7) avait lieu; ce qui ferait disparaître la partie principale de $v_{,}$, et réduirait sa valeur au même ordre de grandeur que celle de δ. Nous exclurons ce cas particulier qui se distinguerait du cas général, en ce que, dans l'onde réfléchie comme dans l'onde directe, la vitesse des molécules varierait suivant la raison inverse du carré des distances, et l'intensité de l'ébranlement, en raison inverse de la quatrième puissance.

En désignant par s_1 la dilatation du fluide qui accompagne la vitesse v_1, on aura

$$s_1 = -\frac{v_1}{a},$$

comme dans l'onde directe.

Soit I_1 l'intensité de l'ébranlement dans l'onde réfléchie; en la comparant à l'intensité I qui a lieu au même point M dans l'onde directe, nous aurons

$$I_1 = \frac{r^2}{r'^2} I \left(\frac{a^2 \cos. u - a' \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u}}{a^2 \cos. u + a' \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u}} \right)^2.$$

Cette quantité sera nulle, quand on aura

$$a^2 \cos. u - a' \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}\, u = \frac{a}{a'};$$

par conséquent le mouvement réfléchi sera nul ou insensible, suivant les directions qui font avec la normale à la surface réfléchissante, l'angle dont la tangente est égal au rapport $\frac{a}{a'}$. C'est, effectivement, ce qui a lieu, d'après l'observation, dans le cas de la lumière polarisée suivant le plan de réfléxion, mais non pas dans le cas de la lumière ordinaire. Si la distance du point M à cette surface est très-petite par rapport à celle de O à O', on aura à très-peu près $r' = r$. Sous l'incidence perpendiculaire, ou dans le cas de $u=0$, on aura alors (*)

$$\mathrm{I}_1=\mathrm{I}\left(\frac{a-a'}{a+a'}\right)^2.$$

A l'autre limite $u=\frac{1}{2}\pi$, les intensités I_1 et I seront égales, quelque soit le rapport de a à a'; résultat qui s'accorde avec l'observation, a l'égard des rayons de lumière réfléchis sous de très-petits angles.

(24) Les formules (3) et (4), comparées à l'équation (1), montrent que dans le fluide supérieur, les lois du mouvement direct seront les mêmes que dans le fluide supérieur, et que celles du mouvement réfléchi ne différeront que par la manière dont l'intensité de l'ébranlement dépendra de l'angle u. Si l'on appelle, comme dans le numéro précédent, I et I_1 les mesures de cette intensité, relatives à l'onde directe et à l'onde réfléchie, et au même point M du fluide inférieur, on aura

$$\mathrm{I}_1=\frac{r^2}{r'^2}\mathrm{I}\left(\frac{a'^2\cos.u-a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u}}{a'^2\cos.u+a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u}}\right)^2,$$

depuis $\sin.u=0$ jusqu'à $\sin.u=\frac{a'}{a}$, et

$$\mathrm{I}_1=\frac{r^2}{r'^2}\mathrm{I}\left(\frac{a'^2(a^2+a'^2)\cos.^2u-a^2(a^2-a'^2)\sin.^2u}{a'^2(a^2+a'^2)\cos.^2u+a^2(a^2-a'^2)\sin.^2u}\right)^2,$$

depuis $\sin.u=\frac{a'}{a}$ jusqu'à $\sin.u=1$; u représentant, dans les deux cas, l'angle de réflexion O′OM.

(*) On peut voir dans mon Mémoire sur le mouvement des fluides élastiques dans des tuyaux cylindriques, un examen détaillé de tout ce qui concerne le mouvement réfléchi ou transmis sous l'incidence perpendiculaire.

La première valeur de I_1 sera nulle dans le cas de

$$\text{tang.}\, u = \frac{a'}{a},$$

et la seconde, lorsqu'on aura

$$\text{tang.}\, u = \frac{a'\sqrt{a^2 + a'^2}}{a\sqrt{a^2 - a'^2}};$$

valeurs admissibles, puisque la première suppose $\sin.\, u < \frac{a'}{a}$, et qu'on a, pour la seconde, $\sin.\, u > \frac{a'}{a}$, comme il est aisé de le vérifier en observant que l'on suppose $a > a'$. Il résulte de là que quand le mouvement est produit dans le fluide qui répond à la moindre vitesse de propagation, et réfléchi par le fluide où elle est la plus grande, il y a deux angles de réflexion différents, pour lesquels l'intensité de l'ébranlement est nul ou insensible. Ainsi, par exemple, la vitesse du son dans l'eau étant à peu près quatre fois et demie celle qui a lieu dans l'air, il s'ensuit que si le son est produit dans l'air et réfléchi à la surface de l'eau, il y aura deux directions suivant lesquelles son intensité sera nulle, et où l'on n'entendra rien, quelque grande que soit l'intensité du son directe : en prenant $a' = \frac{2}{9}a$, on aura, d'après les deux valeurs précédentes de tang. u, à peu près 12° 32′ et 12° 50′, pour les angles que font ces deux directions singulières avec la normale à la surface de l'eau. Entre ces angles, est compris celui dont le sinus est $\frac{a'}{a}$ et pour lequel l'intensité du mouvement réfléchi est égal à celle du mouvement direct, lorsque les distances r' et r du point M à O et O′ sont regardées comme égales. L'égalité $I_1 = I$, a aussi lieu à la limite $u = \frac{1}{2}\pi$ des angles de réflexion ; à l'autre limite $u=0$ et en supposant toujours $r'=r$, on a

$$\mathrm{I}_1=\mathrm{I}\left(\frac{a'-a}{a'+a}\right)^2;$$

en sorte que, pour ces deux valeurs extrêmes de u, le rapport de I_1 à I est le même que dans le numéro précédent.

(25) Considérons actuellement les formules relatives au mouvement transmis d'un fluide à l'autre.

Si l'on appelle ζ la projection horizontale du rayon vecteur r_1 appartenant au point H de la surface de séparation des deux fluides et faisant l'angle u_1 avec la verticale, on aura

$$r_1^2=h^2+\zeta^2,\quad \sin.u_1=\frac{\zeta}{r_1},\quad \cos.u_1=\frac{h}{r_1},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dr_1}{d\zeta}=\sin.u_1,\quad \frac{d.\sin.u_1}{d\zeta}=\frac{\cos.^2 u_1}{r_1},\quad \frac{d.\cos.u_1}{d\zeta}=-\frac{\sin.u_1\cos.u_1}{r_1}.$$

Dans la formule (2), les termes où at est précédé du signe $+$, sont nuls par la nature des fonctions f et F ; de plus, au degré d'approximation ou l'on s'est arrêté, il faudra négliger dans les différences partielles de φ', les termes qui auront le carré de r_1 pour diviseur; d'après cela, nous aurons

$$\frac{d\varphi'}{dx}=\frac{\mathrm{R}a'\cos.u_1\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1}}{r_1(a^2\cos.u_1+a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1})},$$

$$\frac{d\varphi'}{d\zeta}=\frac{\mathrm{R}a'^2\cos.u_1\sin.u_1}{r_1(a^2\cos.u_1+a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1})},$$

$$\frac{d\varphi'}{dt}=-\frac{\mathrm{R}aa'^2\cos.u_1}{r_1(a^2\cos.u_1+a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u_1})},$$

en faisant, pour abréger,

$$R = \frac{d.}{dr_1}\left[\left(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u_1} + r_1 - at\right) f\left(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u_1} + r_1 - at\right)\right.$$
$$\left. - F\left(\frac{x}{a'}\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u_1} + r_1 - at\right)\right].$$

La vitesse verticale du point M et sa vitesse horisontale, dirigée suivant le prolongement de ζ, seront respectivement $\frac{d\varphi'}{dx}$ et $\frac{d\varphi'}{d\zeta}$; la dilatation du fluide inférieur, qui répond à ce même point M, aura pour expression $\frac{1}{a'^2}\frac{d\varphi'}{dt}$; en appelant donc v' la résultante de ces deux vitesses, u' l'angle qu'elle fait avec la verticale, et s' la dilatation dont il s'agit, on aura, d'après les formules précédentes,

$$\left.\begin{aligned} v' &= \frac{R\,a\,a' \cos. u_1}{r_1(a^2 \cos. u_1 + a'\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u_1})}, \\ \text{tang. } u' &= \frac{a' \sin. u_1}{\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u_1}}, \\ s' &= -\frac{v'}{a'}; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ce qui montre déja que la vitesse propre de chaque molécule est indépendante de l'ébranlement primitif, et qu'il y a, entre cette vitesse et la dilation correspondante, la même relation que dans le cas du mouvement direct ou du mouvement réfléchi.

Menons par le point M, dans la direction de sa vitesse v', une droite qui rencontre la surface de séparation des deux fluides, en un point que nous appellerons K et qui tombera entre les projections de O et M sur cette surface. Appelons η la distance HK comprise entre la projection H de M et ce point K, et ρ la longueur de la droite MK; nous aurons

$$\eta = \rho \sin. u', \quad x = \rho \cos. u'.$$

Soit aussi r le rayon vecteur OK du point K, et, par conséquent,

$$r^2 = h^2 + (\zeta - \eta)^2.$$

A cause de $\zeta = r_1 \sin. u_1$, $h^2 + \zeta^2 = r_1^2$, $\eta = \rho \sin. u'$, cette équation est la même chose que

$$r^2 = r_1^2 - 2 r_1 \rho \sin. u_1 \sin. u' + \rho^2 \sin.^2 u';$$

et, comme par hypothèse, ρ est très-petit par rapport à r_1, on en conclura, à très-peu près,

$$r = r_1 - \rho \sin. u_1 \sin. u'.$$

Si l'on appelle u l'angle que fait le rayon r avec la verticale OO', la différence $u - u_1$ sera du même ordre de grandeur que $\frac{\rho}{r_1}$; dans les formules (8), on pourra faire $u_1 = u$; la seconde donnera alors

$$\sin. u' = \frac{a'}{a} \sin. u; \qquad (9)$$

on aura, en même temps,

$$r_1 = r + \frac{a'}{a} \rho \sin.^2 u, \quad x = \frac{1}{a} \rho \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u};$$

et si l'on fait

$$t = \frac{r}{a} + t',$$

il en résultera

$$\frac{x}{a'} \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u_1} + r_1 - at = \frac{a}{a'} (\rho - a' t').$$

Donc, en faisant

$$\rho - a' t' = \frac{a'}{a} \varepsilon',$$

la quantité R deviendra

$$R = \frac{d.(\varepsilon' f \varepsilon' - F \varepsilon')}{d\varepsilon'};$$

et elle sera nulle, ainsi que la vitesse v', pour toutes les valeurs de ε' qui tomberont hors des limites $\pm \varepsilon$.

On conclut de là que le point M du fluide inférieur commencera à s'ébranler, quand on aura $t' = \frac{\rho}{a'} - \frac{\varepsilon}{a}$, et que son mouvement cessera, lorsqu'on aura $t' = \frac{\rho}{a'} + \frac{\varepsilon}{a}$, en sorte qu'il durera pendant le même temps $\frac{2\varepsilon}{a}$ que le mouvement de chacun des points du fluide supérieur. Suivant chaque droite KM tirée dans le fluide inférieur et dont la direction est déterminée par l'équation (9), ce mouvement se propagera uniformément avec la vitesse a', et l'épaisseur de l'onde mobile, ou l'intervalle des valeurs de ρ pour lesquelles la vitesse v' n'est pas nulle, sera égale à $\frac{2a'\varepsilon}{a}$, c'est-à-dire, que cette épaisseur sera constante, comme dans le fluide supérieur, mais diminuée dans le rapport de a' à a. On voit aussi que tous les points du fluide inférieur qui se mouvront en même temps, ou, pour plus de précision, ceux qui atteindront ensemble le milieu de leur mouvement correspondant à $t' = \frac{\rho}{a'}$, formeront une surface qui aura pour équation

$$\frac{r}{a} + \frac{\rho}{a'} = t,$$

en y considérant le temps t comme une quantité constante. Or, on peut faire voir que la droite KM est la normale à cette surface, menée par la point M.

En effet, si l'on met dans cette équation, à la place de r

sa valeur $r_1 - \frac{a'}{a}\rho \sin.^2 u$, elle devient

$$\frac{r_1}{a} + \frac{\rho}{a^2 a'}(a^2 - a'^2 \sin.^2 u) = t.$$

Mais d'après l'équation (9), on a

$$\cos. u' = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u};$$

donc, à cause de $x = \rho \cos. u'$, on aura

$$\frac{r_1}{a} + \frac{x \cos. u'}{a'} = t.$$

Je différentie cette équation par rapport à x et ζ; en observant que dans le terme dont x est facteur, on peut regarder l'angle u' comme constant, nous aurons

$$\frac{1}{a}\frac{dr_1}{d\zeta}d\zeta + \frac{\cos. u'}{a'}dx = 0;$$

on a d'ailleurs $\frac{dr_1}{d\zeta} = \sin. u_1$, ou, à très-peu près $\frac{dr_1}{d\zeta} = \sin. u = \frac{a}{a'}\sin. u'$; on aura donc

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\cot. u',$$

pour la tangente de l'angle que la tangente à la section verticale de la surface fait avec l'axe des x; et comme la droite MK fait l'angle u' avec le même axe, il s'ensuit que ces deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Puisque KM est la direction de la vitesse v' du point M, nous voyons que dans le mouvement transmis, comme dans le mouvement direct et dans le mouvement réfléchi, la vitesse propre des points du fluide est normale à la surface de l'onde mobile. En considérant KM comme le rayon de l'onde transmise, nous voyons aussi, par l'équation (9), que ce rayon et le rayon OK de l'onde directe qui se croisent au même point K de la surface de séparation des deux fluides, font avec sa normale, des angles u et u' dont les sinus sont entre eux dans un rapport constant, égal à celui des vitesses a et a' dans les deux fluides; résultat qui s'accorde avec la loi de la réfraction ordinaire de la lumière.

(26) Je représente par I' l'intensité de l'ébranlement qui a lieu au point M de l'onde transmise et qui sera mesurée, comme précédemment, par la somme des forces vives prise dans toute l'épaisseur de l'onde. En désignant par D' la densité naturelle du fluide inférieur, et observant qu'on a $d\rho = \frac{a'}{a} d\varepsilon'$, nous aurons

$$I' = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{a'}{a} D' (1 - s') v'^2 d\varepsilon'.$$

Je néglige la dilatation s' et je mets dans l'expression de v' donnée par la première équation (8), u et r à la place de u_1 et r_1, et pour R sa valeur précédente; il en résulte

$$I' = \frac{4aa'^3 D' E \cos.^2 u}{r^2 (a^2 \cos. u + a' \sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u})^2};$$

E étant la même quantité que dans le n° 22. Comme on a fait abstraction des variations de température qui accompagnent les dilatations s et s' des deux fluides (n° 1), leurs densités D et D' sont en raison inverse des carrés des vitesses de propagation a et a'; on a donc

$$D' = \frac{D a^2}{a'^2},$$

et à cause de $DE = Ir^2$ (nº 22), on en conclut

$$I' = \frac{4a^3 a' I \cos.^2 u}{(a^2 \cos. u + a'\sqrt{a^2 - a'^2 \sin.^2 u})^2},$$

pour le rapport de l'intensité de l'onde transmise, qui a lieu au point quelconque M de la droite KM, à celle de l'onde directe, qui répond au point K appartenant à la surface de séparation des deux fluides. On voit par là que, le long d'une même droite KM, perpendiculaire à l'onde transmise, l'intensité I' est constante, et qu'elle ne varie d'un point K à un autre, qu'à raison de l'intensité I relative à ce point; ce qui tient à ce que nous avons supposé la distance KM très-petite par rapport à l'éloignement du centre O de l'ébranlement primitif.

Si l'on considère autour du point K, une portion très-petite ω de la surface de séparation des deux fluides, l'aire de sa projection sur la surface de l'onde transmise, sera $\omega \cos. u'$; car les normales à ces deux surfaces font entre elles l'angle u', d'après la valeur de $\frac{d\zeta}{dx}$ qu'on a trouvée dans le numéro précédent. La projection de ω, soit sur la surface de l'onde incidente au point K, soit sur celle de l'onde réfléchie au même point, a pour valeur $\omega \cos u$; la portion de l'onde directe qui répond à cette petite surface ω, et qui a pour intensité $I\omega \cos. u$, se partage donc en deux parties, l'une transmise, dont l'intensité est $I'\omega \cos. u'$, l'autre réfléchie, ayant $I_1 \omega \cos. u$ pour intensité; par conséquent on doit avoir

$$I\omega \cos. u = I'\omega \cos. u' + I_1 \omega \cos. u.$$

Or, en faisant $r' = r$ dans la valeur de I_1 du nº 23, substituant cette valeur et celle de I' dans cette équation, et supprimant le facteur $I\omega\cos.u$, commun à ses deux membres, il vient

$$\frac{4a^3a'\cos.u\cos.u'+(a^2\cos.u-a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u})^2}{(a^2\cos.u+a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u})^2}=1;$$

ce qui est effectivement vrai, à cause que l'on a $a\cos.u'=\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u}$, en vertu de l'équation (9).

(27) Supposons que l'on place au-dessous du fluide inférieur, un troisième fluide de la même nature que le fluide supérieur et dont la surface soit horisontale.

La normale KM à l'onde transmise dans le fluide intermédiaire, rencontrera la surface de ce nouveau fluide, en un point que j'appellerai K'; en ce point, l'angle d'incidence sera u'; et comme on a $\sin.u'=\frac{a'}{a}\sin.u$, et par conséquent $\sin.u'<\frac{a'}{a}$, il faudra faire usage de la première formule du nº 24 pour exprimer l'intensité de l'ébranlement dans l'onde qui sera réfléchie à cette surface. En désignant cette intensité par I_1', faisant $r'=r$ dans la formule dont il s'agit, et y mettant u' et I' à la place de u et I, on aura

$$I_1'=I'\left(\frac{a'^2\cos.u'-a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u'}}{a'^2\cos.u'+a\sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u'}}\right)^2.$$

Mais d'après l'équation (9), on a

$$\cos.u'=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u},\quad \sqrt{a'^2-a^2\sin.^2u'}=a'\cos.u;$$

l'équation précédente est donc la même chose que

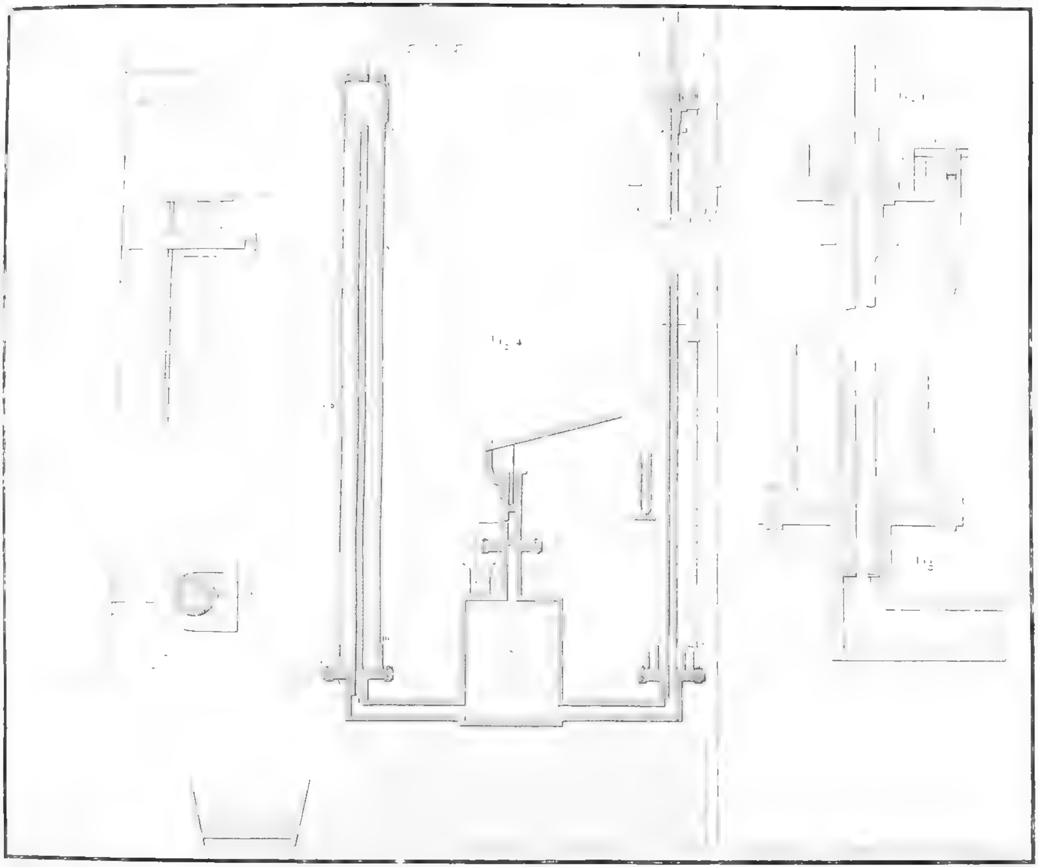
$$I'_1=I'\left(\frac{a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u}-a^2\cos.u}{a'\sqrt{a^2-a'^2\sin.^2u}+a^2\cos.u}\right)^2;$$

et en la comparant à la valeur de I' du nº 23, dans laquelle on fera aussi $r' = r$, nous voyons que quel que soit l'angle d'incidence u à la surface supérieure du fluide intermédiaire, et quoiqu'il diffère de l'angle d'incidence qui lui correspond à la surface inférieure, il y a, cependant, à ces deux surfaces parallèles, le même rapport entre les intensités de l'ébranlement dans l'onde incidente et dans l'onde directe, c'est-à-dire, entre I et I', à la surface supérieure, et entre I' et $I_{,}'$, à la surface inférieure.

Ce résultat coïncide avec celui que M. Arago a trouvé par l'expérience, et d'après lequel la lumière se réfléchit, sous tous les angles, en proportion égale aux deux surfaces parallèles d'une lame de verre.

(28) Lorsque le mouvement sera produit dans le fluide inférieur et transmis dans le fluide supérieur, on déduira de la formule (5), toutes les conséquences relatives à la propagation de l'onde transmise et à la direction des vitesses propres des molécules, auxquelles nous sommes parvenus dans le n° 25 d'après la formule (2). Quant à l'intensité de l'ébranlement relative à l'onde transmise, elle sera nulle, lorsque le sinus de l'angle d'incidence sera sensiblement moindre que $\frac{a'}{a}$; et lorsqu'il surpassera sensiblement $\frac{a'}{a}$, elle s'exprimera par la formule du n° 26, dans laquelle on échangera entre elles les vitesses a et a'.

A.Dulong del.



Adeu

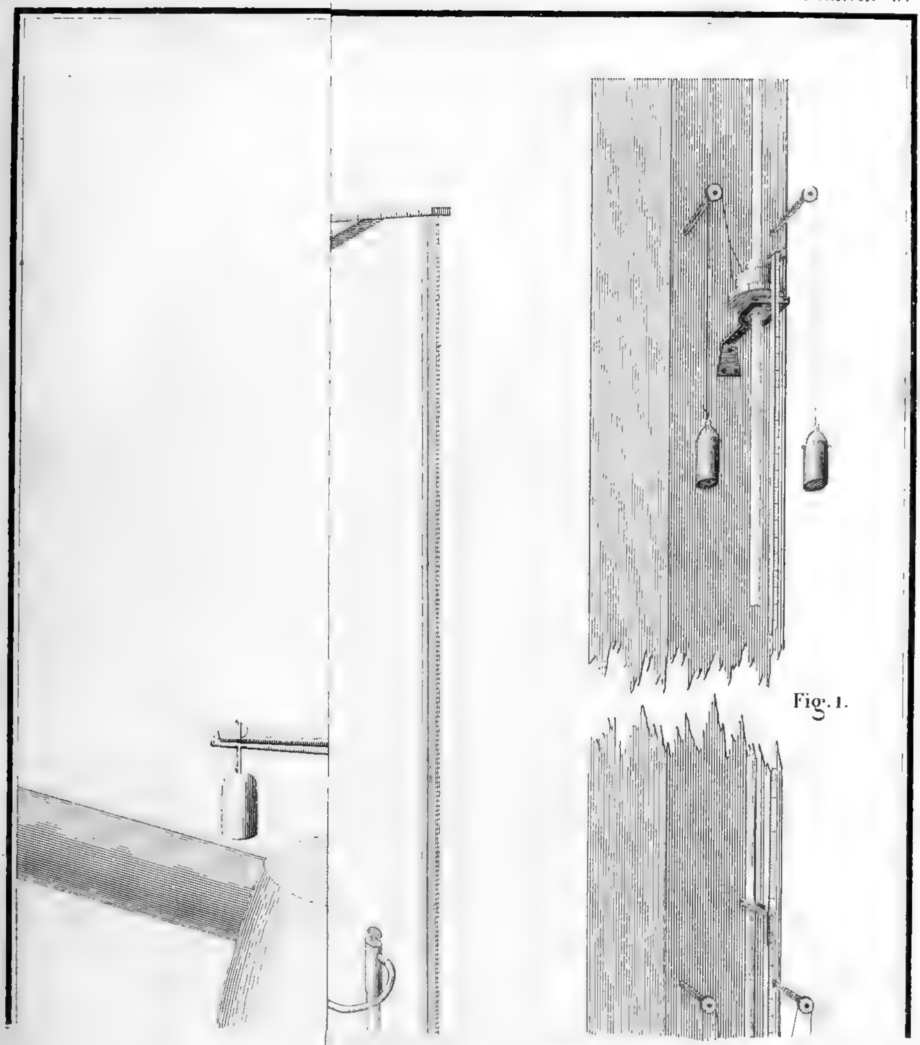


Fig. 1.

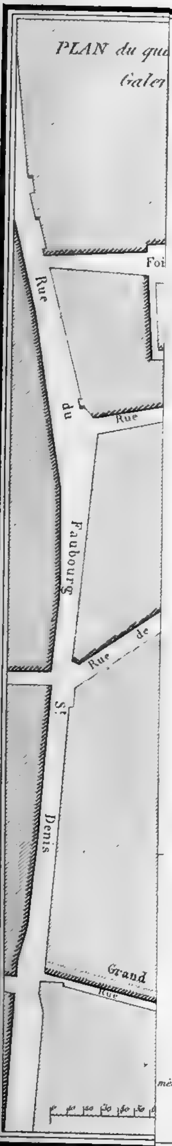


Fig. 4. *Coupe sur* A B.

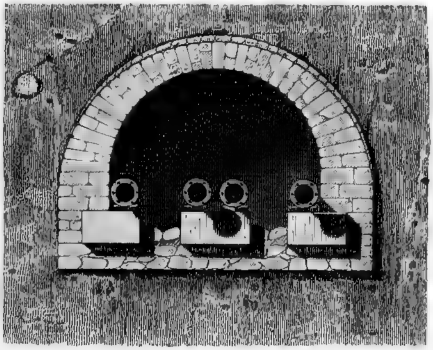


Fig. 5. *Coupe d'un compensateur.*

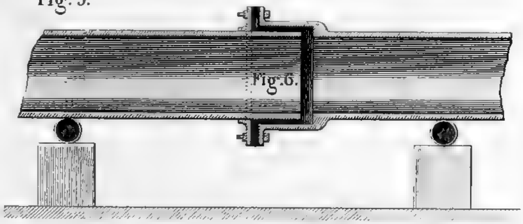
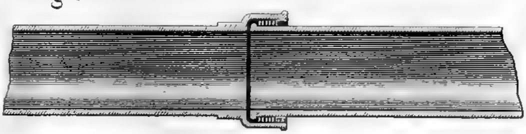


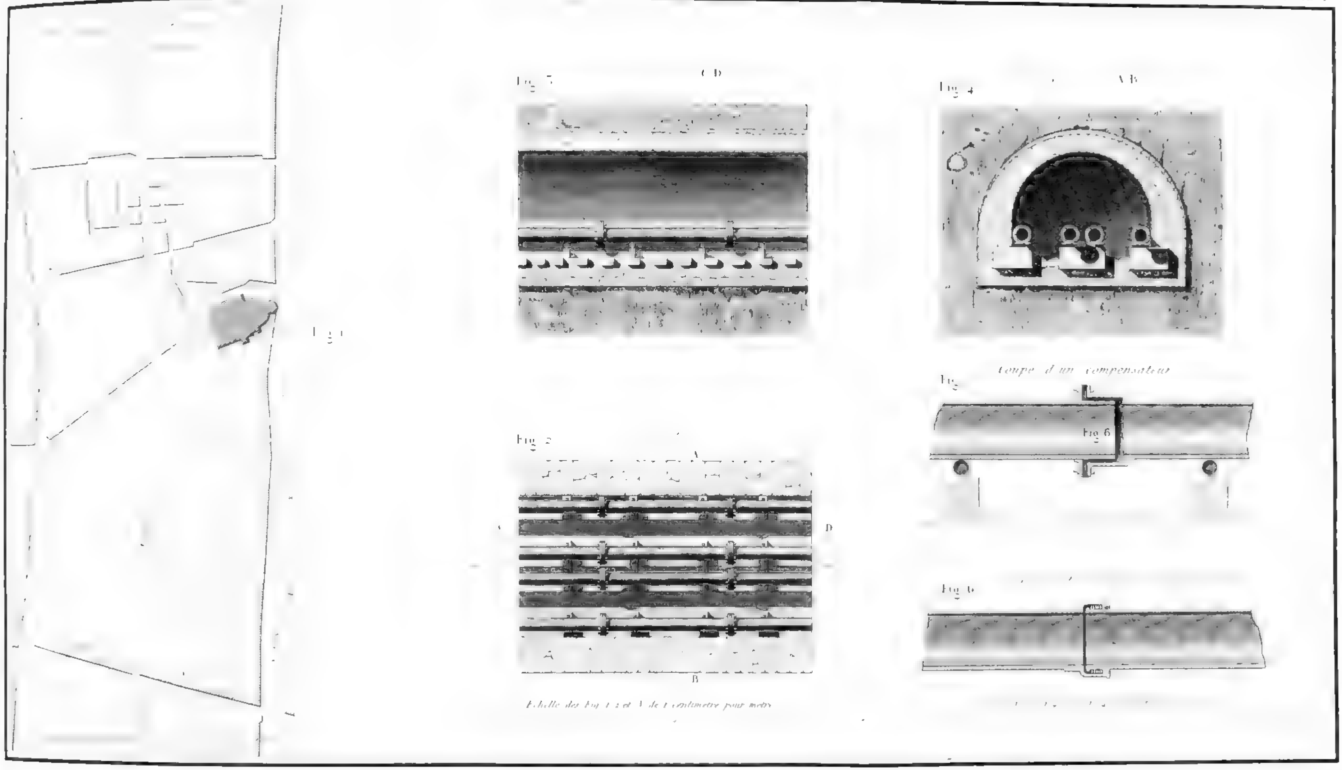
Fig. 6.bis *Coupe d'un Tuyau à Emboitement.*



Echelle des Fig. 4 et 5. de 4 centimètres pour mètre.

0 — 0.50 — 1 — 2 mètres

Gravé par Adam



Echelle des Fig. 1, 2 et 3 de 1 centimetre pour metre

MÉMOIRE

SUR

La pose des conduites d'eau dans la ville de Paris, tableaux et discussions d'expériences entreprises à ce sujet sur la dilatabilité de la fonte de fer.

PAR M. P. S. GIRARD.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 25 janvier 1829.

LORSQUE les conduites qui servent à la distribution des eaux dans les différents quartiers d'une ville sont composées de tuyaux de plomb ou de fonte de fer, soudés, ou liés solidement entre eux bout à bout, chacune de ces conduites peut être considérée comme une verge métallique d'une seule pièce, laquelle exposée aux variations successives de la température en subit l'influence et s'allonge ou se racourcit suivant les saisons.

Cette verge métallique ayant ordinairement ses deux extrémités appuyées contre des obstacles inébranlables, on conçoit que les tuyaux qui la composent doivent, par l'effet de leur dilatation ou de leur condensation, s'étendre ou se comprimer entre ces obstacles, mais la tenacité spécifique de ces métaux, et la résistance du sol dans lequel ils sont enfouis et qui les comprime de tous les côtés ne leur permettent pas toujours d'obéir, par l'altération plus ou moins sensibles de leurs dimensions ou de leurs formes, à l'action que la chaleur exerce sur eux, leur rupture devient alors inévitable : une partie des eaux qu'ils contenaient se perd, et ce n'est souvent qu'après de longues recherches et beaucoup de dépenses, que l'on parvient à remettre la conduite en bon état et à restituer le volume entier de ses eaux à leur destination utile.

Les chances de rupture de semblables conduites deviennent bien plus nombreuses lorsqu'elles sont posées sur un sol factice composé comme celui des rues de la plupart des grandes villes, de terres rapportées et de décombres pour l'affermissement desquelles il n'a été pris aucune précaution. En cas pareil l'eau qui s'échappe d'une conduite fracturée entraîne les parties les plus tenues des remblais qui l'enveloppent dans les intervalles vides que les parties les plus grossières de ces remblais laissent entre elles ; à la vérité le sol devient ainsi plus dense et plus compact, mais en s'affaissant sous une certaine portion de la conduite, il la laisse sans appui, ce qui provoque de nouvelles ruptures et de nouvelles fuites d'eau.

Ces accidents ont en général ces deux causes : la dilatabilité du métal dont les conduites sont formées, et le peu de consistance et la perméabilité du sol dans lequel elles sont posées.

Les effets de la première de ces causes se manifestent d'autant plus que la matière des conduites est plus dilatable au même degré de température. Ainsi de deux conduites de mêmes dimensions, l'une en plomb et l'autre en fer fondu, la première sera plus exposée à se rompre que la seconde, parce que les dilatabilités de ces deux métaux sont entre elles, à peu près comme les nombres 28 et 11. Ainsi, par ce motif, l'emploi de la fonte est plus avantageux que celui du plomb; à quoi il faut ajouter que le prix ordinaire du plomb étant à celui de la fonte de fer dans le rapport de 5 à 2, il est beaucoup plus économique d'employer ce dernier métal.

Aussi en fait-on depuis long-temps en Angleterre un emploi exclusif pour les conduites d'eau, et a t-on commencé depuis quelques années à Paris à remplacer par des tuyaux de fonte les anciens tuyaux de plomb dont les grosses conduites de cette ville étaient originairement formées.

Quoique cette substitution de la fonte de fer au plomb contribue à assurer le service de la distribution des eaux, elle ne fait pas disparaître toutes les chances de rupture des conduites, et il en reste un assez grand nombre pour qu'il importe de les atténuer.

Ce fut pour y parvenir que je proposai, en 1808 de poser sous des galeries voutées les conduites principales qui devaient servir à la distribution des eaux du canal de l'Ourcq dans les différents quartiers de Paris.

Ces galeries, ainsi que les procédés suivis pour la pose des grosses conduites qu'on y a renfermées sont l'objet d'une description spéciale qui a été publiée en 1812, et à laquelle nous renvoyons. Il nous suffira pour l'objet de ce mémoire d'indiquer l'emplacement et les dimensions de celle de ces galeries dans laquelle sont posées les conduites qui ont été soumises aux observations dont nous nous proposons de rendre compte.

Cette galerie que l'on distingue sous le nom de *galerie Saint-Laurent*, parce qu'elle passe sous les terrains où se tenait autrefois la foire de ce nom, est construite entre les deux chaussées du faubourg Saint-Denis et du faubourg Saint-Martin à peu près à égale distance de chacune d'elles, elle a trois mètres de largeur, et 15 mètres de pente depuis son origine jusqu'à la rue Neuve-Saint-Jean, où elle se termine. Voyez la planche *fig.* 1re.

On a placé dans cette galerie quatre conduites en fonte de fer de 25 centim. de diamètre intérieur; elles sont posées parallèlement entre elles sur des blocs de pierre de taille solidement établis. Ces blocs ou tasseaux élevés de 30 centimètres au-dessus du plafond de la galerie sont placés parallèlement à son axe, à 1^{m} 15 de distance les uns des autres, de manière que chaque bout de tuyaux de 2^{m},50 de longueur se trouve toujours soutenu sur deux appuis. (Plan. *fig.* 2, 3 *et* 4.) On conçoit qu'au moyen de ces précautions il n'y a à craindre aucun affaissement ou tassement vertical de ces conduites, et que si elles se rompaient, cela ne pourrait avoir lieu que par l'effet de leur dilation, ou de leur condensation dans le sens de leur axe.

Les seules précautions qui restaient à prendre pour prévenir cet effet se réduisaient donc à faire en sorte que l'allongement et le raccourcissement de la conduite ne portassnt aucune atteinte à l'assemblage et à la liaison des tuyaux partiels dont elle est composée.

Ces tuyaux sont assemblés les uns aux autres bout à bout au moyen de six boulons qui traversent les collets ou brides par lesquelles ces tuyaux sont terminés. Afin de rendre étanches toutes ces sutures on a placé entre les brides contiguës une rondelle en plomb, qui est elle-même garnie sur ses deux faces d'une double flanelle goudronnée. Chacun de ces joints, qui peut avoir 25 à 30 millimètres d'épaisseur, est doué d'un certain degré d'élasticité. Mais cette élasticité ne peut altérer en rien l'effet naturel de la dilatation ou de la condensation des tuyaux à cause de la rigidité des boulons très-courts qui compriment ce joint, et qui, proportionnellement à leur longueur, sont susceptibles de s'allonger et de se raccourcir comme les tuyaux qu'ils servent à assembler.

Dans cet état d'une conduite en fonte, et en supposant inébranlables les appuis contre lesquels ses extrémités sont appuyées, il est évident, à cause de la rigidité dont elle est douée dans toute son étendue, qu'elle est exposée aux mêmes chances de rupture auxquelles des variations de température exposeraient une verge métallique de même matière, de même longueur, et qui serait formée d'une seule pièce.

Pour la soustraire à ces chances d'accident, il fallait donc articuler cette verge en certains points de sa longueur, de manière qu'elle pût librement s'allonger ou se raccourcir entre ces articulations.

Ces articulations sont composées de deux tuyaux de mêmes dimensions que tous ceux de la conduite; mais au lieu d'être liés entre eux par un joint fixe semblable à ceux que nous venons de décrire ils s'emboîtent l'un dans l'autre, au moyen d'un renflement pratiqué dans le premier pour recevoir le bout du second qui est dégarni de sa bride, et qui peut ainsi glisser librement dans l'espèce de manchon qui le reçoit. (Voyez la planche *fig.* 5.)

Ce tuyau *décolleté* dépourvu de bride fixe, est garni d'une bride mobile en forme d'anneau qui peut glisser sur sa surface. (*fig.* 6.)

On a désigné sous le nom de compensateurs chaque système des deux tuyaux articulés dont il s'agit. Ils ont été placés de cent mètres en cent mètres environ sur chacune des quatre conduites de la galerie Saint-Laurent, et comme la longueur de chacune d'elles est de 578 mètres, cette longueur totale se trouve divisée en cinq parties par autant de compensateurs.

L'assemblage des deux tuyaux de chaque compensateur n'est point à frottement. Cela eût exigé une perfection d'exécution inutile, et dont les gros ouvrages de cette espèce ne sont point susceptibles. Il faut, au contraire, qu'il y ait un certain jeu entre les surfaces intérieures et extérieures des deux extrémités du compensateur qui s'emboîtent; il ne s'agit que d'empêcher l'écoulement de l'eau de la conduite par l'intervalle vide qui peut rester entre ces deux extrémités; or il est aisé d'y parvenir au moyen d'une garniture de plomb et de flanelle goudronnée que l'on place entre la bride fixe du manchon et la fausse bride, de manière qu'en serrant fortement cette garniture à l'aide de boulons, entre les deux brides du compensateur, elle s'applique exactement en tous les points de son pourtour sur la surface extérieure du tuyau *décolleté*. On voit par cette disposition, que les deux parties du compensateur sont réunies l'une à l'autre par un joint mobile, que le manchon à bride attire ou repousse avec lui sur la surface du tuyau emboîté, selon que la portion de conduite à laquelle appartient ce compensateur, se raccourcit ou s'alonge par l'effet de la température.

Les deux extrémités de la conduite étant inébranlablement fixées dans des massifs de maçonnerie, il est évident que la somme des allongements ou raccourcissements observés sur chacun des compensateurs de la même conduite en représente l'allongement ou le raccourcissement total: il ne s'agit donc que d'observer, à chaque variation de température, la position de la bride mobile de chaque compensateur, par rapport à une ligne de repère tracée parallèlement à cette bride sur la surface extérieure du tuyau.

Cette ligne de repère fut tracée à 250 millimètres de distance de chacune des brides de nos compensateurs ; cette première opération fut faite le même jour sur les quatre conduites à la fin de décembre 1811 ; la somme des distances des brides mobiles aux lignes de repère correspondantes sur chaque conduite, se trouva, par conséquent, de 1250 millimètres.

Deux des conduite de la galerie Saint-Laurent sont appliquées près de ses parois, les deux autres occupent l'espace intermédiaire.

La première à droite en descendant que nous désignerons sous le *n*° 1, porte les eaux du bassin de la Villette à la fontaine des Innocents.

La conduite suivante, *n*° 2, devait les porter à la fontaine de l'École de médecine.

La conduite *n*° 3 alimente le château d'eau du boulevard Bondi.

Enfin la conduite *n*° 4 se rend au milieu de la place Royale.

Il était aisé de prévoir que les alongements ou raccourcissements qu'il s'agissait d'observer sur ces quatre conduites, se manifesteraient d'autant plus facilement et avec d'autant plus de promptitude, que les tuyaux compris entre deux compensateurs consécutifs éprouveraient moins de difficultés à se mouvoir dans le sens de leur axe; et comme il importait d'apprécier, autant que possible, l'influence que pourraient exercer sur ce mouvement divers obstacles disséminés le long des conduites, elles ont été posées avec des précautions différentes.

Ainsi la conduite *n*° 1, au lieu d'être posée horizontalement sur la surface plane des blocs de pierre de taille destinés à la recevoir, était soutenue par de petits rouleaux de fonte interposés entre elles et la surface de ces blocs. Ces rouleaux, dont l'axe était perpendiculaire à celui de la conduite avaient à peu près trois centimètres de rayon.

Les trois autres conduites ont été posées sur leurs appuis de pierre, soit à nu, soit sur des cales de bois en forme de coin servant à racheter les inégalités qui pouvaient se trouver sur la face supérieure de ces appuis.

Ces dispositions étant faites, on a commencé les observations le 13 janvier 1812, et on les a continuées, en suivant toujours la même marche jusqu'au 17 décembre 1815.

On observait d'abord la température de l'eau à son entrée dans les conduites, et celle de l'air dans la galerie Saint-Laurent; on mesurait ensuite les distances comprises entre les faces antérieures des brides mobiles des compensateurs et les lignes de repères qui avaient été tracées sur le tuyau emboîté de chacun d'eux.

Dès le 3 mars 1812, j'avais déja recueilli un assez grand nombre d'observations entre 0 et 5 degrés du thermomètre de Réaumur, pour être assuré du mouvement longitudinal imprimé aux conduites par les variations de la température: j'en rendis compte à l'Institut dans un Mémoire, où je supposai que la température effective des conduites était la température moyenne arithmétique entre celle de l'eau qu'elles contenaient et celle de la galerie où elles étaient renfermées, je trouvai en comparant entre elles les observations recueillies jusqu'alors,

1° Que les variations de la température produisaient des effets bien plus prompts sur la conduite *n°* 1, qui était supportée par de petits rouleaux de fonte que sur les trois autres conduites *n°s* 2, 3 *et* 4, que soutenaient immédiatement leurs appuis de pierre de taille, ou des cales intermédiaires plus ou moins compressibles de bois de chêne.

2° Que moins les températures différaient entre elles d'une observation à l'autre, plus les effets de la dilatation et de la condensation des conduites s'éloignaient d'être exactement proportionnels à ces différences de température; ce qui semble provenir, de ce que le défaut d'homogénéité du métal, et les courants d'air extérieur qui s'introduisent accidentellement dans la galerie, et, en général, les causes diverses capables d'exercer quelque légère influence que ce soit sur les variations de température d'une conduite en fonte, exercent cette influence d'une manière plus sensible dans un petit intervalle de l'échelle thermométrique que dans un intervalle plus grand.

Je concluais de ces remarques que les résultats des observations devaient être d'autant plus certains, 1° que ces observations seraient faites dans un état de température stationnaire depuis un temps plus long, parce qu'alors la température de la conduite aurait pu s'établir par suite de toutes les circonstances capables de la modifier; 2° que la comparaison de plusieurs observations faites à des températures différentes, servirait à déterminer la dilatabilité du métal avec d'autant plus de certitude que ces températures seraient plus éloignées l'une de l'autre.

D'après ces considérations, je choisis pour en comparer les résultats les observations faites le 13 janvier 1812 et le 24 février suivant.

Lors de la première, la température de l'eau dans la conduite, était à 1 degré et celle de l'air de la galerie à 3 degrés au-dessus de zéro.

Lors de la seconde observation, la température de l'eau était à 5 degrés $\frac{3}{4}$, et celle de la galerie à 6 degrés.

En prenant pour la température réelle de la conduite la moyenne arithmétique, entre la température de l'eau qu'elle contient et celle de l'air dont elle est environnée, on trouve que cette température réelle était le 13 janvier de 2 degrés, et le 24 février de 5 degrés $\frac{7}{8}$, ainsi la différence entre les températures correspondantes aux observations comparées, était de 3 degrés $\frac{7}{8}$.

Le 13 janvier, les distances mesurées sur les cinq compensateurs de la conduite *n*° 1, donnaient en somme 1256 millimètres.

Le 24 février, la somme de ces distances était de 1224 millimètres; ainsi par une élévation de température de 3 degrés $\frac{7}{8}$ du thermomètre de Réaumur, la conduite n° 1 s'était allongée de 32 millimètres, ce qui équivaut à 8 millimètres $\frac{26}{100}$ d'allongement par degré de température.

La longueur de nos conduites étant de 578 mètres, on voit que l'alongement du *n*° 1 par degré de Réaumur et par mètre serait de $0^{m},0000141$ ou par degré centésimal de $0^{m},0000 1128$.

La conduite *n*° 2, destinée à porter les eaux du bassin de la Villette à la fontaine monumentale de l'École de médecine, n'était remplie d'eau que dans sa partie supérieure sur 210 mètres de développement; elle était vide sur le reste de sa longueur. Par l'effet de cette circonstance, les observations dont elle a été l'objet ne sont point comparables à celles qui ont été faites sur les trois autres conduites, ainsi nous les passerons sous silence.

Le *n*° 3 indiquait, le 13 janvier 1812, pour la somme des distances de la bride mobile à la ligne de repère mesurées sur chacun des cinq compensateurs 1259 millimètres, et le 24 février 1232 millimètres; on a donc eu un alongement de 27 millimètres pour une variation de température de 3 degrés $\frac{7}{8}$; ce qui donne 6 millimètres $\frac{96}{100}$ par degré du thèrmomètre de Réaumur, ou 0^{m},0000118 par degré et par mètre, ou bien enfin, par degré centésimal, 0^{m},00000944.

La conduite *n*° 4 indiquait, le 13 janvier, 1259 millimètres, et le 24 février suivant 1233 millimètres; ce qui donne un alongement total de 26 millimètres pour une variation de 3 degrés $\frac{7}{8}$ de température, et par mètre et par degré centigrade de 0^{m},00000909.

On voit que le résultat des expériences faites sur les conduites *n*^{os} 3 *et* 4 sont très-peu différents entre eux; mais l'alongement moyen qu'on en conclut est à l'alongement déduit des observations faites sur la conduite *n*° 1, comme 926 à 1128.

Ainsi sous la même variation de température, la conduite *n*° 1 s'est alongée d'environ 1/6 de plus que les conduites *n*^{os} 3 *et* 4, ce qui provient évidemment de la plus grande mobilité de la première qui, étant posée sur des rouleaux de fonte, peut s'alonger ou se raccourcir sans avoir à vaincre les obstacles que le frottement oppose au mouvement longitudinal des deux autres, lesquels reposent à nu sur des appuis de pierre couverts d'aspérités ou sur des calles de bois plus ou moins élastiques.

J'ai supposé dans les évaluations qui précèdent, que la température réelle des conduites mises en expérience, était la température moyenne arithmétique entre celle de l'eau qu'elles contenaient, et celle de l'air de la galerie dans laquelle elles étaient placées.

Cette supposition qui pourrait être rigoureusement exacte si les surfaces intérieure et extérieure de nos conduites se trouvaient baignées par des liquides de même densité et de températures différentes, cesse d'être admissible ici à cause de l'extrême différence de densité de l'eau et de l'air. Les commissaires de l'Institut qui rendirent compte de mon Mémoire, pensaient même que les tuyaux de fonte devaient prendre la température de l'eau dont ils étaient remplis, et que, par conséquent, c'était d'après les variations de cette température, sans aucun égard à celle de l'air ambiant qu'il fallait évaluer la dilatation du métal. C'était au surplus, de la suite d'observations que je me proposais de continuer, qu'on devait attendre des résultats plus certains et la confirmation de l'une ou de l'autre hypothèse.

Je n'ai terminé ces observations qu'au mois de décembre 1815. Les tables que j'en ai dressées en contiennent plus de seize cents, faites en différentes saisons, sur les compensateurs de nos quatre conduites, entre zéro et 17 degrés $\frac{1}{2}$ de température du thermomètre de Réaumur.

On n'a aucun moyen de mesurer la température de l'eau contenue dans une conduite quelconque; on ne peut l'observer qu'immédiatement avant son entrée, et immédiatement à sa sortie de cette conduite. Or, je me suis assuré, le 27 février 1812, que la température de l'eau qui était à 4 degrés $\frac{2}{3}$ à son entrée dans la conduite *n*° 1, était encore exactement à 4 degrés $\frac{2}{3}$ à son arrivée à la fontaine des Innocents : d'où il suit que la température de l'eau dans nos conduites demeure exactement la même que la température de l'eau observée dans le réservoir commun, où elles prennent leur origine.

Nous avons dressé nos tableaux d'observations, en comprenant dans une première série toutes celles qui ont été faites entre zéro et 1 degré de température de l'eau.

La 2e série d'observations comprend toutes celles faites entre 1 et 2 degrés; la 3e, toutes celles faites entre 2 et 3 degrés, et ainsi de suite.

Nous avons pris les températures moyennes de l'eau et de l'air, entre toutes celles correspondantes aux observations de la même série.

Enfin, après avoir formé la somme des distances mesurées sur les cinq compensateurs d'une même conduite, pour toutes les observations d'une même série, nous avons divisé cette somme par le nombre des observations faites sur cette conduite; ce qui nous a donné la somme moyenne des distances, ou l'indice moyen des compensateurs correspondants à cette série.

Ainsi, du tableau suivant qui comprend la première série des observations faites sur la conduite *n*° 1

DATES des OBSERVATIONS.	TEMPÉRATURE de L'EAU.	TEMPÉRATURE de L'AIR.	INDICES des compensateurs.
	degrés	degrés	
12 janvier 1813.	0 ,75	2 ,50	1261,50
16 janvier 1815.	0 ,00	2 , »	1261,25
23 janvier 1815.	0 ,75	1 , »	1263,00
	1 ,50	5 ,50	3787,55

je déduis, en divisant par 3 qui est le nombre des observations de cette série les sommes portées au pied de chaque colonne, je trouve les quantités moyennes qui entreront dans la composition du type suivant de nos tableaux par séries :

	Nombre d'observations.	Température moyenne de l'eau.	Température moyenne de l'air.	Indice moyen des compensateurs.	Différence de température de l'air et de l'eau.
1re série du 12 janvier 1813 au 23 janvier 1815.	3	0,50	1,833	1261,91	1,333

et de même pour la formation des séries suivantes.

Nos tableaux d'observations ramenées à une observation unique par série, se trouveront ainsi composés de cinq colonnes.

La première indiquant le n° de la série et l'intervalle de temps compris entre la première et la dernière observation.

La seconde, le nombre d'observations dont cette série est composée.

La troisième, la température moyenne de l'eau.

La quatrième, la température moyenne de l'air dans la galerie, l'une et l'autre mesurées sur le thermomètre de Réaumur.

La cinquième l'indice moyen des cinq compensateurs, en millimètres.

Nous porterons, en outre, dans une sixième et dernière colonne, la différence des températures moyennes de l'air et de l'eau, correspondante à chaque série.

Nous allons présenter et discuter successivement les tableaux de nos séries d'observations sur les conduites n° 1, n° 3 et n° 4, qui alimentent la fontaine des Innocents, le Château d'eau du boulevard Bondy, et les bassins de la place Royale.

TABLEAU I. *Conduite de la fontaine des Innocents.*

	NOMBRE d'observations.	TEMPÉRATURE moyenne de l'eau.	TEMPÉRATURE moyenne de l'air.	INDICE moyen des compensateurs.	DIFFÉRENCE de température de l'air et de l'eau.
2e série du 13 janvier 1812 au 9 janvier 1815.	4	degrés 1,1875	degrés 3,1875	1256,12	2
3e série du 17 mars 1812 au 5 déc. 1812.	4	2,270	4,625	1248,50	2,355
4e série du 12 février 1812 au 31 déc. 1814.	6	3,236	4,791	1241,91	1,555
5e série du 27 février 1812 au 14 févr. 1815.	10	4,266	5,6875	1235,85	1,421
6e série du 19 février 1812 au 10 mars 1815.	4	5,187	5,9375	1228,81	0,750
7e série du 7 nov. 1812 au 28 mars 1815.	5	6,150	7,700	1222,25	1,550
8e série du 30 mars 1812 au 22 avril 1815.	6	7,125	8,555	1215,16	1,430
9e série du 3 avril 1812 au 6 octobre 1814.	4	8,3125	9,3125	1207,18	1

	Nombre d'observations.	Température moyenne de l'eau.	Température moyenne de l'air.	Indice moyen des compensateurs.	Différence de température de l'air et de l'eau.
10e série du 1 avril 1812 au 10 octob. 1815.	2	degrés 9 ,333	degrés 9 ,833	1201,37	0,500
11e série du 15 octobre 1812 au 18 octob. 1815.	5	10 ,150	11 ,700	1195,55	1,550
12e série du 16 avril 1813 au 21 mai 1814.	2	11 ,625	12 ,625	1187,37	1,0
13e série du 4 mai 1812 au 8 mai 1815.	4	12 ,4375	12 ,125	1179,43	0,312
14e série du 25 mai 1812 au 26 mai 1815.	6	13 ,430	14 ,305	1172,16	0,875
15e série du 21 mars 1812 au 2 août 1815.	18	14 ,472	15 ,722	1165,06	1,250
16e série du 1 juin 1812 au 19 août 1815.	14	15 ,398	15 ,642	1158,69	0,244
17e série du 28 mai 1812 au 28 août 1815.	9	16 ,305	15 ,916	1153,80	0,389
18e série du 18 août 1812 au 24 août 1812.	4	17 ,441	17 ,625	1146,37	0,184

Supposant que la température de la conduite soit la même que celle de l'eau qu'elle contient, et comparant entre elles les deux séries extrêmes d'observations, on voit que pendant la première la température moyenne a été de $0^{ds},50$, et pendant la dernière de $17^{ds},441$; il y a par conséquent entre ces deux séries une différence de température de $17^{ds},441 - 0,500 = 16^{ds},941$.

L'indice moyen des compensateurs a été pendant la première série de $1261^{mil.},91$, et pendant la dernière de $1146,37$. C'est un allongement de $1261,91 - 1146,37 = 115^{mil.},54$ pour un intervalle de $16^{ds},941$. Cet alongement équivaut par degré à $\frac{115^{mil.},54}{16^{ds},94} = 6^{mil.},812$.

La longueur de la conduite étant de 578 mètres, l'allongement par mètre et par degré de Réaumur, est donc exprimé par

$$\frac{0^{mil.},006812}{578} = 0^{mil.},00001178,$$

ou, pour un degré du thermomètre centigrade, par

$$0^{m},00000942.$$

TABLEAU II. *Conduite du boulevard Bondy.*

	NOMBRE d'observations.	TEMPÉRATURE moyenne de l'eau.	TEMPÉRATURE moyenne de l'air.	INDICE moyen des compensateurs.	DIFFÉRENCE de température de l'air et de l'eau.
1re série du 12 janvier 1812 au 17 déc. 1815.	4	degrés 0 ,500	degrés 1 ,812	1265,31	1,312
2e série du 13 janvier 1812 au 9 janvier 1815.	5	1 ,150	3 ,050	1260,60	1,900
3e série du 20 mars 1812 au 5 déc. 1812.	3	2 ,361	4 ,750	1251,91	2,389

	Nombre d'observations.	Température moyenne de l'eau.	Température moyenne de l'air.	Indice moyen des compensateurs.	Différence de température de l'air et de l'eau.
4^e^ série du 12 février 1812 au 31 déc. 1814.	6	degrés 3 ,236	degrés 4 ,791	1245,95	1,555
5^e^ série du 27 février 1812 au 1 déc. 1814.	8	4 ,302	5 ,984	1238,87	1,682
6^e^ série du 19 février 1812 au 10 mars 1825.	4	5 ,354	6 ,187	1232,87	0,833
7^e^ série du 16 avril 1812 au 28 mars 1815.	4	6 ,208	8 ,062	1226,50	1,854
8^e^ série du 13 avril 1812 au 22 avril 1815.	6	7 ,125	8 ,750	1220,45	1,625
9^e^ série du 3 avril 1812 au 6 octob. 1814.	4	8 ,312	9 ,312	1215,12	1
10^e^ série du 1 avril 1812 au 10 octob. 1815.	3	9 ,472	9 ,888	1210,16	0,416
11^e^ série du 19 octob. 1812 au 18 octob. 1815.	5	10 ,300	11 ,300	1204,70	1
12^e^ série du 28 mai 1813 au 21 mai 1814.	2	11 ,375	13 ,500	1197,37	2,125
13^e^ série du 4 mai 1812 au 12 septemb. 1814.	5	12 ,316	12 ,600	1191,70	0,284

	Nombre d'observations.	Température moyenne de l'eau.	Température moyenne de l'air.	Indice moyen des compensateurs.	Différence de température de l'air et de l'eau.
14e série du 19 mai 1812 au 26 mai 1815.	7	degrés 13 ,369	degrés 14 ,404	1186,00	1,035
15e série du 21 mai 1812 au 2 août 1815.	19	14 ,438	15 ,438	1179,02	1
16e série du 1 juin 1812 au 13 août 1814.	10	15 ,433	15 ,716	1174,20	0,2
17e série du 18 mai 1812 au 23 juillet 1814.	7	16 ,321	15 ,892	1170,71	0,429
18e série du 18 août 1812 au 24 août 1812.	4	17 ,395	17 ,625	1164,50	0,230

On voit, en comparant les séries extrêmes de ce tableau, que depuis $0^{ds},50$ jusqu'à $17^{ds},40$ de température, c'est-à-dire pour une différence de $16^{ds},90$, l'alongement total de la conduite n° 2 a été de $1265,31 - 1164,50 = 100^{ds},81$.

L'allongement total par degré de Réaumur a donc été $\frac{100\,81}{16,90} = 5^{mil.},965$.

L'allongement de cette conduite par mètre et par degré $= \frac{0^m,005965}{578} = 0^m,00001032$, et par degré centigrade $0^m,00000825$.

TABLEAU III. *Conduite de la Place Royale.*

	Nombre d'observations.	Température moyenne de l'eau.	Température moyenne de l'air.	Indice moyen des compensateurs.	Différence de température de l'air et de l'eau.
1re série du 12 janvier 1813 au 17 déc. 1815.	4	degrés 0,500	degrés 1,812	1274,87	1,312
2e série du 23 déc. 1812 au 9 janvier 1815.	5	1,150	2,900	1268,75	1,750
3e série du 30 nov. 1812 au 5 déc. 1812.	2	2,416	5,0	1259,50	2,584
4e série du 10 mars 1812 au 31 déc. 1814.	2	3,166	4,541	1251,50	1,375
5e série du 7 mars 1812 au 12 nov. 1814.	5	4,216	6,075	1243,30	1,859
6e série du 19 février 1812 au 10 mars 1815.	3	5,250	5,916	1238,41	0,666
7e série du 7 nov. 1812 au 28 mars 1815.	3	6,166	8,166	1232,41	2
8e série du 30 mars 1812 au 27 oct. 1814.	4	7,187	8,833	1226,375	1,146
9e série du 6 avril 1812 au 6 octob. 1814.	3	8,250	9,666	1218,75	1,416
10e série du 1 avril 1812 au 10 octob. 1815.	3	9,472	9,888	1211,08	0,416

	Nombre d'observations.	Température moyenne de l'eau.	Température moyenne de l'air.	Indice moyen des compensateurs.	Différence de température de l'air et de l'eau.
11e série du 15 octob. 1812 au 28 mai 1814.	3	degrés 10 ,250	degrés 13 ,750	1106,41	2,500
12e série du 28 mai 1813 au 21 mai 1814.	2	11 ,375	13 ,500	1200,125	2,125
13e série du 4 mai 2812 au 12 septemb. 1814.	4	12 ,250	12 ,916	1194,37	0,666
14e série du 25 mai 1812 au 4 juin 1814.	5	13 ,366	14 ,816	1187,70	1,550
15e série du 6 mai 1812 au 27 août 1814.	17	14 ,431	15 ,431	1180,80	1
16e série du 1 juin 1812 au 13 août 1814.	10	15 ,433	15 ,716	1175,32	0,283
17e série du 28 mai 1812 au 17 août 1812.	4	16 ,437	15 ,937	1169,43	0,500
18e série du 18 août 1812 au 24 août 1812.	4	17 ,395	17 ,625	1164,75	0,230

Les expériences de la première série de ce tableau ont été faites à $0^{ds},50$ de température moyenne ; celles de la dernière série ont été faites à $17^{ds},395$, ce qui donne une différence de tempétarure de $16^{ds},895$.

L'alongement de la conduite pendant cet intervalle a été de $1274,87 - 1164,75 = 110^{mil.},12$.

L'alongement par degré a donc été de $\frac{110^{\text{mil.}},12}{16,895} = 6^{\text{mil.}},518$.

Par mètre et par degré c'est un alongement de $\frac{0^{\text{m}},006518}{578} =$ $0^{\text{m}},00001127$ et par degré du thermomètre centigrade $0^{\text{m}},00000902$.

Comparaison des résultats obtenus sur la dilatation des trois conduites qui ont été soumises à l'expérience.

En comparant entre eux les indices des compensateurs correspondants aux températures les plus basses et les plus élevées, c'est-à-dire les plus distantes entre elles, nous avons obtenu pour l'alongement par mètre, et par degré du thermomètre centésimal, savoir :

Sur la conduite *n°* 1, de $0^{\text{m}},00000942$;
Sur la conduite *n°* 2, de 0 ,00000825 ;
Sur la conduite *n°* 3, de 0 ,00000902.

Nous allons maintenant déduire cet alongement de la comparaison des températures, correspondantes aux indices des compensateurs qui laissent entre eux le plus grand intervalle.

Le 23 janvier 1815, le thermomètre de Réaumur marquant $0^{\text{ds}},75$, les compensateurs de la conduite *n°* 1 indiquaient 1263 millimètres.

Ils marquaient $1145^{\text{mil.}},75$, le 24 août 1812, la température étant à $17^{\text{ds}},33$; c'est par conséquent pour un intervalle de $17^{\text{ds}},33 - 0^{\text{ds}},75 = 16^{\text{ds}},58$ un alongement de $1263^{\text{mil.}} - 1145^{\text{mil.}} = 117^{\text{mil.}},25$, ou par degré de $\frac{0^{\text{m}},011725}{16,58} = 0^{\text{m}},0070717$. L'alongement par mètre et par degré de Réaumur est donc

$=\frac{0^m,0070717}{578}=0^m,0001223$, et par degré du thermomètre centésimal $0^m,0000978$.

Le 16 janvier 1815, les compensateurs de la conduite *n*° 2 marquaient $1264^{mil.},75$ le thermomètre étant alors zéro.

Le 24 août, les compensateurs de la même conduite indiquaient $1164^{mil.}$ à $17^{ds.},33$ de température.

Ainsi, pour un intervalle de $17^{ds.},33$, il y a eu un alongement total de $100^{mil.},75$, ce qui équivaut à un alongement par degré de $\frac{5^m,010075}{17,33}=0^m,00581$. C'est par degré et par mètre $\frac{0^m,00581}{578}=0,00001053$, et par degré du thermomètre centésimal $0^m,000008042$.

Enfin, le 16 janvier 1813, les compensateurs de la conduite n° 3 indiquaient $1276^{mil.},25$ à zéro de température, ils indiquaient $1164^{mil.}50$ le 24 août 1815 à la température de $17^{ds},33$. C'est par conséquent, pour un intervalle de $17^{ds},33$, un alongement de $1276^{mil.},25 - 1164^{mil.},50 = 111^{mil.},75$.

L'alongement total par degré de Réaumur a donc été $=\frac{0^m,011175}{17,33}=0,006448$.

Il a donc été par mètre et par degré $=\frac{0^m,006448}{578}=$ $0^m,00001115$, et par degré du thermomètre centésimal, de $0^m,00000892$.

Les alongements de nos trois conduites par mètre et par degré centésimal, tels que nous venons de les déduire de la comparaison des indices extrêmes de leurs compensateurs, sont, savoir :

Sur la conduite *n*° 1, de $0^m,00000978$.
Sur la conduite *n*° 2, de $0\ \ ,000008042$.
Sur la conduite *n*° 3, de $0\ \ ,00000892$.

On ne remarque qu'une légère différence entre ces alongements, et ceux que nous avons déduits précédemment des observations faites aux températures les plus distantes.

On voit aussi que, dans les deux modes d'évaluations de ces alongements, les conduites *n*os 2 *et* 3, se sont moins dilatées que la conduite *n*° 1.

Ces faits confirment ceux que nous avions déja observés au commencement de 1812; ils s'expliquent par la plus grande mobilité de la conduite *n*° 1, elle peut, en effet, se contracter ou s'étendre facilement en faisant rouler les petits cylindres de fonte qui la supportent, tandis que les conduites *n*os 2 *et* 3 éprouvent d'autant plus de résistance à glisser sur leurs appuis que les obstacles qui naissent de leur compressibilité, des aspérités de leur surface et de leur élasticité sont plus nombreux et plus intenses.

Recherche de la loi de dilatabilité de la fonte de fer d'après les tableaux d'expériences précédentes.

L'alongement des conduites s'opère-t-il uniformément de degré en degré à partir de zéro jusqu'à 17 degrés du thermomètre de Reaumur, limites de température entre lesquelles nous l'avons observé? Pour résoudre cette question, il suffira de comparer l'alongement qui s'est opéré dans l'intervalle thermométrique d'un certain nombre de degrés de température inférieurs, à l'alongement qui s'est opéré dans l'intervalle d'un certain nombre de degrés immédiatement supérieurs. Voici le résultat de cette comparaison :

L'alongement de la conduite *n*° 1, de la première à la 11^e série d'observations inclusivement $= 1261^{mil.},91 - 1195^{mil.},55 = 66^{mil.},36$.

La différence moyenne de température entre ces deux séries d'observations $= 10^{ds},15 - 0^{ds},50 = 9^{ds},65$.

L'alongement total de la conduite par degré est par conséquent $= \frac{66^{mil.},36}{9^{ds},65} = 6^{mil.},876$, par degré de Réaumur et par mètre, il est de $\frac{6^{mil.},876}{578} = 0,00001189$.

Enfin, par mètre et par degré du thermomètre centésimal, il est de $0^m,00000951$.

L'alongement de cette même conduite pour les sept dernières séries $= 1187,37 - 1146,37 = 41^{mil.}$.

La différence de température de la 12^e série à la 18^e $= 17^{ds},441 - 11^{ds},625 = 5^{ds},816$.

L'alongement total de la conduite par degré $= \frac{41^{mil.},000}{5,816} = 7^{mil.},049$.

C'est par degré de Réaumur, et par mètre, $0^m,000001219$.

Et par degré du thermomètre centésimal, $0^m,00000975$.

On voit que sur cette conduite les alongements par degré sont plus considérables lorsque la température est plus élevée que lorsqu'elle est plus basse.

Prenons de même sur la conduite *n*° 2, les onze premières séries d'observations, nous aurons, pour l'alongement de la première à la 11^e, $1265^{mil.},31 - 1204,70 = 60^{mil.},61$.

La différence de température entre ces deux séries $= 10^{ds},300 - 0^{ds},50 = 9^{ds},80$.

L'alongement total de la conduite est en conséquence par degré de Réaumur $\frac{60^{\text{mil.}},61}{9^{\text{ds}},80} = 6^{\text{mil.}},184$; et par mètre, cet alongement $= \frac{6^{\text{mil.}},184}{578} = 0^{\text{m}},000001070$, ou par degré du thermomètre centigrade $= 0^{\text{m}},00000856$.

Pour les 7 dernières séries, l'alongement total de la conduite a été $1197^{\text{mil.}},37 - 1164^{\text{mil.}},50 = 32^{\text{mil.}},87$.

La différence de température a été $17^{\text{ds}},395 - 11^{\text{ds}},375 = 6^{\text{ds}},020$.

L'alongement total de la conduite a donc été $= \frac{32^{\text{mil.}},87}{6,020} = 5^{\text{mil.}},460$.

Il a été par degré et par mètre $= \frac{5^{\text{mil.}},46}{578} = 0^{\text{m}},000009446$, et par degré du thermomètre centigrade $0^{\text{m}},00000755$.

On voit que sur cette conduite, les alongements ont été moindres à mesure que la température s'est élevée.

L'alongement de la conduite *n°* 3, sur les 11 premières séries d'observations a été $= 1274^{\text{mil.}},87 - 1206^{\text{mil.}},41 = 68^{\text{mil.}},46$.

La différence de température moyenne entre la première et l'onzième série $= 10^{\text{ds}},250 - 0^{\text{ds}},500 = 9^{\text{ds}},750$.

L'alongement total de la conduite a donc été par degré $\frac{68^{\text{mil.}},46}{9,75} = 7^{\text{m}},021$.

C'est par degré de Réaumur et par mètre $\frac{0^{\text{m}},007021}{578} = 0^{\text{m}},00001214$, et par degré du thermomètre centigrade $0^{\text{m}},00000971$.

L'alongement de la conduite, pendant les 7 dernières séries d'observations a été $= 1200^{\text{mil.}},125 - 1164^{\text{mil.}},750 = 35^{\text{mil.}},375$.

La différence de température a été $17^{\text{ds}},395 - 11^{\text{ds}},375 = 6^{\text{ds}},20$.

Par conséquent l'alongement total pour un degré $=\frac{35^{\text{mil.}}375}{6,20}$ $=5^{\text{mil.}},704$.

C'est par mètre, et par degré de Réaumur $0^{\text{m}},00009872$.

Et par degré du thermomètre centigrade $0^{\text{m}},000007898$.

Le même phénomène se manifeste ici sur la conduite *n*° 3 que sur la conduite *n*° 2, c'est-à-dire que l'alongement par degré est moindre à mesure que la température s'élève. Or, ceci s'explique aisément, si l'on fait attention que les deux dernières conduites qui sont posés à nu sur leurs appuis ou sur des coins de bois, les compriment plus ou moins, et que la difficulté de glisser sur leur surface qui est douée d'un certain degré d'élasticité s'accroît à mesure que l'espace parcouru sur elle est devenu plus grand.

En effet, les fibres des cales de bois qui se trouvent perpendiculaires à la direction du mouvement de la conduite étant poussées dans cette direction, sont amenées à un certain état de courbure, comme autant de petites verges élastiques dont les extrémités seraient fixes, et dont une force extérieure agissant entre ces extrémités tendrait à produire l'inflexion. Or, on sait, que de semblables ressorts présentent d'autant plus de résistance à leur flexion, que leur courbure est déja plus grande.

Si la ligne de repère qui a été tracée sur les compensateurs au commencement des observations, lorsque la température de l'eau était à 2 ou à 3 degrés, y avait été tracée pendant l'été, l'eau étant à 17 ou 18 degrés de température, il se serait manifesté un effet contraire, c'est-à-dire que les alongements des conduites *n*os 2 *et* 3 auraient été moindres à mesure que la température se serait abaissée d'un même nombre de degrés, parce que les obstacles au glissement de la conduite auraient acquis plus d'intensité à mesure que les fibres du bois auraient acquis une plus grande courbure.

La conduite *n°* 1, qui est supportée sur des rouleaux de fonte de fer, n'ayant à vaincre aucun obstacle de cette nature, doit manifester plus sensiblement les effets naturels de la condensation et de la dilatation. Les observations recueillies sur elles doivent, par conséquent, donner une mesure plus exacte de la dilatabilité spécifique de la fonte.

Recherche de la dilatabilité de la fonte de fer déduite des observations faites sur la conduite n° 1.

Jusqu'à présent nous n'avons eu aucun égard à l'influence que peut exercer la température de l'air de la galerie Saint-Laurent, pour modifier celle de nos conduites que nous avons supposée être la même que celle de l'eau qu'elles contiennent; mais un corps dont les surfaces parallèles opposées sont en contact avec des fluides incompressibles ou élastiques maintenus à des températures diverses, doit évidemment acquérir une température permanente qui soit elle même une certaine fonction des températures respectives des deux fluides entre lesquels il est placé: si donc l'air de la galerie Saint-Laurent n'est point au même degré que l'eau de nos conduites, il n'est pas rigoureusement permis de supposer que celles-ci acquiereront la même température permanente que celle-là.

Pour éclaircir par un exemple simple ce que nous disons ici, supposons qu'au lieu d'être renfermées dans une galerie pleine d'air, nos conduites toujours remplies d'eau à la température observée soient plongées dans une masse d'eau à la même température que l'air de la galerie. Concevons maintenant une bande annulaire de tuyau comprise entre deux plans perpendiculaires à son axe; il est clair que les deux surfaces circulaires intérieure et extérieure de cette bande pourront être considérées comme deux surfaces parallèles d'une longueur infinie, car la couronne circulaire qu'elles forment étant une surface rentrante en elle-même, ne présente aucune extrémité sur laquelle puisse agir quelque source de chaleur extérieure capable d'altérer la température due à l'action de l'eau qui coule dans la conduite et à celle de l'eau dans laquelle nous la supposons plongée; la bande circulaire que nous considérons, est donc précisément dans le même cas où se trouverait un prisme rectangulaire d'une longueur infinie, d'une épaisseur égale à celle de cette bande et dont les faces parallèles comprenant cette épaisseur seraient inégalement échauffées par les deux liquides de températures différentes qui seraient respectivement en contact avec elles.

Or, la Théorie de la chaleur (*Théorie analytique de la chaleur,* par M. Fourier, pag. 46 et 47), nous apprend qu'un pareil prisme rectangulaire d'une longueur infinie, ayant deux de ses faces opposées échauffées différemment par deux sources de chaleur permanentes, si l'on fait : la température du fluide qui touche l'une de ces faces $=a$, celle du fluide qui touche l'autre face $=b$.

La distance des deux faces ou l'épaisseur du prisme $=e$, la température permanente d'un plan intermédiaire quelconque parallèle à ces faces $=v$;

Enfin la distance de ce plan intermédiaire à l'une des faces limites $=z$.

On aura entre v et z cette équation linéaire,

$$v = a + \frac{(b-a)z}{e},$$

qui s'applique également à un prisme rectangulaire d'une longueur infinie, et à une bande circulaire comprise entre deux sections transversales de nos conduites.

Appelant V la somme des produits de chacun des éléments concentriques de cette bande par la température permanente de cet élément, on aura

$$V = \int dz \left[a + \left(\frac{b-a}{e}\right)z\right] = az + \left(\frac{b-a}{e}\right)\frac{z^2}{2} + c.$$

La constante c est évidemment nulle, puisque cette expression disparaît lorsque $z=0$.

Si l'on complète cette expression en faisant $z=e$, elle devient

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)e = V,$$

donc la température moyenne permanente de la bande circulaire que nous considérons $=\frac{V}{e}=\frac{a+b}{2}$, c'est-à-dire qu'elle est précisément moyenne proportionnelle arithmétique entre les températures des surfaces intérieure et extérieure du tuyau.

En supposant $b>a$, et en faisant $b-a=d$, on trouve encore $\frac{V}{e}=a+\frac{d}{2}$, d'où l'on voit que la température moyenne dont il s'agit, est égale à la température de celui des deux fluides qui est le moins échauffé, augmentée de la demie différence de leurs températures.

Au surplus, ces expressions de la température moyenne d'un tuyau de conduite dans les circonstances que nous avons admises, ne sont rigoureusement exactes qu'en supposant l'épaisseur de ce tuyau très-petite en comparaison de ce rayon.

Les deux faces opposées du prisme rectangulaire infini, ou de la couronne circulaire que nous avons considérées sont baignées par deux liquides homogènes qui ont à peu près la même densité; mais lorsque leurs densités spécifiques sont très-différentes, comme, par exemple, lorsque le tuyau de conduite, toujours supposé plein d'eau, est plongé lui-même dans de l'air atmosphérique plus chaud ou plus froid que cette eau, on conçoit que l'air atmosphérique en raison de sa moindre densité, doit exercer, pour échauffer ou pour refroidir la conduite, beaucoup moins d'influence que l'eau beaucoup plus dense qui y est contenue n'en exerce pour l'amener à sa propre température.

Il suit de là que la température permanente à laquelle cette conduite doit arriver, ne peut plus être moyenne proportionnelle arithmétique entre les températures de l'eau et de l'air qui baignent ses faces intérieure et extérieure, mais qu'elle se rapprochera d'autant plus de celle de l'eau, que la densité de ce liquide est plus grande que celle de l'air atmosphérique.

Pour parvenir à l'expression de la température moyenne de la conduite, en ayant égard à l'influence que l'air extérieur de la galerie exerce sur le métal, nous remarquerons;

1° Qu'il est généralement prouvé par les observations recueillies sur la dilatabilité des métaux, qu'ils se dilatent de quantités égales par des accroissements égaux de température;

2° Que la dilatation d'une conduite pleine d'eau à une certaine température, et qui est plongée dans une masse d'air atmosphérique élevé à une température différente, doit être une certaine fonction de la différence de ces températures.

Si donc on appelle a l'alongement de la conduite par mètre, et par degré de température de l'eau tel qu'on l'a observé; d la différence de cette température à celle de l'air au moment de l'observation; enfin si l'on appelle x l'alongement par mètre dû à l'augmentation réelle de température du tuyau telle que la produisent par leurs actions combinées, les sources de chaleur auxquelles ses deux surfaces sont exposées, on pourra toujours supposer :

$$x = a + \mathrm{A}d + \mathrm{B}d^2 + \mathrm{C}d^3 + \text{etc.}$$

Les quantités A, B, C, etc. étant des coefficients à déterminer par l'expérience. On y parviendra aisément en substituant pour a et d leurs valeurs numériques correspondantes à autant d'observations, plus une que l'on voudra déterminer de coefficients A, B, C, etc.

Or, pour les onze premières séries du tableau I, nous avons trouvé $a = 0^{\mathrm{m}},0000951$.

Quant à la valeur de d, elle doit être représentée par la différence de la température de l'eau dans la conduite à la température de l'air de la galerie pendant ces 11 premières séries d'expériences.

Nous obtiendrons par approximation cette différence moyenne en divisant par le nombre de séries d'expériences, la somme des différences de température de l'eau et de l'air observées pendant leur durée.

La somme de ces différences $= 15^{\mathrm{d}},444$, par conséquent la différence moyenne cherchée $= \frac{15^{\mathrm{ds}},444}{11} = 1^{\mathrm{d}},404$; on a, par conséquent, pour les 11 premières séries cette équation :

$$x = 0^m,0000095\text{I} + A(\text{I}^d,404) + B(\text{I}^d,404)^2 + \text{etc.}$$

Nous avons trouvé pour les 7 dernières séries d'observations du même tableau $a = 0^m,00000975$.

La somme des différences de température de l'eau et de l'air observées pendant ces sept dernières séries $= \frac{3^d,553 - 0^d,70\text{I}}{7}$ $= \frac{2^{ds},852}{7} = 0^d,407$.

Les 7 dernières séries d'expériences sur la conduite n° 1, fournissent donc cette deuxième équation :

$$x = 0^m,00000975 + A(0^d,407) + B(0^d,407)^2 + \text{etc.}$$

Admettons ce qui est très-vraisemblable que l'alongement par degré x ne soit fonction que de la première puissance des différences de température de l'eau dans la conduite et de l'air dans la galerie, comme cela a lieu lorsque la conduite se trouve intérieurement et extérieurement en contact avec des liquides de même nature inégalement échauffés, on aura ces deux équations,

$$x = 0^m,0000095\text{I} + A(\text{I}^d,404)$$
$$x = 0^m,00000975 + A(0^d,407),$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{0^m,00000975 - 0^m,0000095\text{I}}{\text{I}^d,404 - 0^d,407} = \frac{0^m,00000024}{0^d,997} = 0^m,0000002407.$$

Substituant cette valeur de A dans les deux équations précédentes, elles deviennent :

$$x = 0^m,0000095\text{I} + 0^m,000000338 = 0^m,000009848$$
$$x = 0^m,00000975 + 0^m,000000098 = 0^m,000009848.$$

Appliquons maintenant la formule générale $x = a + \mathrm{A}d$;

1° Aux dix-huit séries d'expériences faites sur la conduite n° 2, en prenant pour le coefficient A la valeur $0^{m},0000002407$ que nous venons de trouver.

Nous avons $a = 0^{m},00000825$ et $d = 1^{d},164$.

Ces valeurs numériques substituées dans la formule donnent :

$$x = 0^{m},00000825 + 0^{m},000000247\,(1^{d},164) = 0,00008537.$$

2° Aux dix-huit séries d'expériences faites sur la conduite n° 3, en prenant la même valeur pour le coefficient A.

Nous avons ici $a = 0^{m},000009020$ et $d = 1^{d},243$.

Par la substitution de ces valeurs numériques dans la formule, elle devient :

$$x = 0^{m},000009020 = 0^{m},000002407\,(1^{d},243) = 0^{m},000009327.$$

Recherche de la dilatation des conduites mises en expérience lorsqu'elles sont vides d'eau.

Nous venons de voir que la véritable température des conduites mises en expérience, température en vertu de laquelle elles se dilataient et se condensaient, n'était ni la température de l'eau qui y était contenue, ni la température de l'air de la galerie dans laquelle elles étaient renfermées, mais une certaine fonction de la différence de ces températures.

Pendant les quatre années que nos expériences ont été suivies, on s'est trouvé plusieurs fois dans l'obligation de vider les conduites : elles étaient alors remplies d'air atmosphérique qui se trouvait à la même température que l'air extérieur qui les environnait; on a observé la température de cet air, ainsi que les variations correspondantes de la longueur de ces conduites.

Nous allons rendre compte de ces observations et discuter leurs résultats.

Conduite n° 1. TABLEAU *des expériences.*

DATES des observations.	TEMPÉRATURE.	INDICE des compensateurs
	degrés	millim.
11 décembre 1812.	4 ,25	1243 ,25
16 mai 1814......	10,625	1198
Moyenne des 16 et 19 juin 1812.....	14 ,41	1171 ,37

Comparant ces trois observations deux à deux pour en déduire l'alongement par degré, on obtient les résultats suivants :

OBSERVATIONS comparées.	ALONGEMENT.	DIFFÉRENCE de température.	ALONGEMENT total par degré.	ALONGEMENT par mètre et par degré.	ALONGEMENT par mètre et par degré centigrade.
1 à 2	0m,04525	6ds,375	0m,007098	0m,00001228	0m,000000982
1 à 3	0 ,07188	10 ,160	0 ,007074	0 ,00001223	0 ,000000978
2 à 3	0 ,02663	3 ,785	0 ,007035	0 ,00001217	0 ,000000974
					0m,000002934
				Moyenne..	0 ,000000978

Conduite n° 2. TABLEAU *des expériences.*

DATES des observations.	TEMPÉRATURE.	INDICE des compensateurs.
11 décembre 1812	degrés 4 ,25	metres 1248
21 mai 1813.....	10 ,25	1205
24 octobre 1812..	11	1199 ,75
16 juin 1812.....	14	1178 ,25

Si l'on compare ces quatre observations deux à deux pour en déduire l'alongement par degré, on obtient les six résultats dont suit le tableau.

OBSERVATIONS comparées.	ALONGEMENT.	DIFFÉRENCE de température.	ALONGEMENT total par degré.	ALONGEMENT par mètre et par degré.	ALONGEMENT par mètre et par degré centigrade.
1 à 2	0m,04300	6ds	0m,00716	0m,00001239	0m,00000991
1 à 3	0 ,04825	6 ,75	0 ,007148	0 ,00001233	0 ,00000986
1 à 4	0 ,06975	9 ,75	0 ,007153	0 ,00001237	0 ,00000989
2 à 3	0 ,00525	0 ,75	0 ,007000	0 ,00001211	0 ,00000969
2 à 4	0 ,02675	3 ,75	0 ,007133	0 ,00001234	0 ,00000987
3 à 4	0 ,02150	3	0 ,007166	0 ,00001239	0 ,00000991
					0m,00005913
				Moyenne..	0 ,00000985

Conduite n° 3. TABLEAU *des expériences.*

DATES des observations.	TEMPÉRATURE.	INDICE des compensateurs.
	degrés	metres
11 décembre 1812.	4 ,25	1255
21 mars 1813 et 16 mai 1814......	10 ,05	1210
16 et 19 juin 1812 et 9 septemb. 1815.	14 ,25	1125

Si l'on compare ces trois observations deux à deux pour en déduire l'alongement par degré, on obtient les quatre résultats dont voici le tableau :

OBSERVATIONS comparées.	ALONGEMENT observé.	DIFFÉRENCE des températures	ALONGEMENT par degré.	ALONGEMENT par mètre et par degré.	ALONGEMENT par mètre et par degré centigrade.
1 à 2	0m,04500	6ds,25	0m,007200	0m,00001245	0m,00000996
1 à 3	0 ,07000	10	0 ,007000	0 ,00001211	0 ,00000969
2 à 3	0 ,02500	3 ,75	0 ,006933	0 ,00001199	0 ,00000959
					0m,00002924
				Moyenne..	0 ,00000975

Les alongements moyens par mètre et par degré centésimal, sont donc, savoir :

Conduite *n*° 1.............	0^m,00000978
Conduite *n*° 2.............	0 ,00000985
Conduite *n*° 3.............	0 ,00000975
	0^m,00002938
Alongement moyen........	0 ,00000979

Nous avons trouvé l'alongement par degré centigrade et par mètre pour la conduite *n*° 1, en ayant égard aux températures de l'eau contenue dans la conduite, et de l'air de la galerie 0^m,000009848 : ainsi, il n'y a qu'une différence de 0^m,000000068 entre cet alongement et celui de la conduite vide, par degré et par mètre, ce qui permet de regarder ces résultats comme à très-peu près identiques.

Si nous comparons entre eux les alongements de chaque conduite, quand elle est pleine et quand elle est vide; nous formerons le tableau suivant :

INDICATIONS.	VUIDES.	PLEINES D'EAU.	DIFFERENCES.
Conduite n° 1.	0^m,000009780	0^m,000009848	0^m,000000068
Conduite n° 2.	0 ,000009850	0 ,000008537	— 0 ,000001313
Conduite n° 3.	0 ,000009750	0 ,000009327	— 0 ,000000423

En jetant les yeux sur ce tableau, on remarque d'abord que les alongements par degré de la conduite *n*° 1, qu'elle soit vide ou pleine d'eau, sont à très-peu près identiques, tandis que les alongements par degré des conduites *n*os 2 *et* 3 sont beaucoup plus considérables quand elles sont vides que quand elles sont pleines.

Ceci s'explique encore en considérant que les conduites, telles qu'elles sont posées sur leurs appuis, éprouvent à s'y mouvoir, c'est-à-dire à s'alonger et à se raccourcir, certaines résistances de la nature du frottement ordinaire, et par conséquent proportionnelles au poids de ces conduites.

Nous avons dit que leur diamètre intérieur était de 25 centimètres, et que le poids de chaque bout de tuyau de $2^{m},50$ de longueur était de 340 kilogr., ce qui revient à 136 kilogr. le mètre courant.

Chaque conduite de 578 mètres de longueur pèse donc, étant vide, 78608 kilogrammes.

On trouve aisément que le poids de l'eau contenue dans la conduite est de 49 kil. 106 par mètre courant.

Le poids de l'eau sur toute la longueur des tuyaux est par conséquent de 28383 kilog.

Chaque conduite pleine pèse donc 106991 kilogr., tandis qu'étant vide elle n'en pèse plus que 78608.

Le frottement que les conduites pleines ou vides éprouvent sur leurs appuis, ou, ce qui revient au même, les obstacles qui s'opposent à leur mouvement étant, dans les deux cas, à peu près comme les nombres 107 et 78, il s'ensuit que leur alongement par degré d'accroissement de température, doit être plus sensible quand elles sont vides que quand elles sont pleines, ce qui est entièrement conforme à l'observation.

Si les alongements de la conduite *n°* 1 ne diffèrent point sensiblement entre eux lorsqu'elle est pleine ou vide d'eau, c'est-à-dire, lorsque son poids est de 107 milliers ou seulement de 78 milliers de kilogrammes, cela tient à ce qu'elle n'éprouve pas, sur les rouleaux de fonte qui la supportent, un frottement qui soit proportionnel à la pression, comme cela a lieu pour les conduites *n*os 2 *et* 3.

Nous remarquerons, en second lieu, que la conduite *n*° 2 est celle dont les alongements par degré ont présenté la plus grande différence lorsqu'elle était pleine et lorsqu'elle était vide.

Nous avons trouvé en effet que, dans le premier cas, l'alongement pour un degré n'était que de $0^m,00008537$, tandis qu'il était de $0^m,00009850$ dans le deuxième.

Cette particularité s'explique en considérant que, dans le mouvement longitudinal d'une conduite posée sur des coins de bois, les fibres transversales de ces coins subissent une certaine inflexion analogue à celle que subiraient des faisceaux de ressorts sur lesquels elle serait posée. Ce n'est donc pas seulement à cause du frottement proprement dit que la conduite éprouve de la résistance à se mouvoir, elle en éprouve encore à cause de l'élasticité des éléments de la surface de ces appuis; car elle ne peut glisser sur eux sans les courber plus ou moins, effet auquel ils résistent avec plus ou moins d'énergie.

Plus leur résistance est grande, plus les mouvements de la conduite dans le sens de sa longueur s'exécutent difficilement; et voilà pourquoi, ainsi que l'expérience l'a constaté, la conduite *n*° 2 étant pleine ne s'alonge que de $0^m,00008537$.

Maintenant, que l'on diminue le poids de cette conduite en la vidant de l'eau qu'elle contient, il est évident que sa pression, et par conséquent son frottement sur ses appuis, deviendra d'autant moindre; d'où il suit, en vertu de ce frottement moindre, qu'elle agira avec moins de force pour courber les fibres transversales du bois. Donc, l'élasticité propre de ces fibres opposera moins de résistance aux alongements et aux raccourcissements de la conduite, et ceci explique pourquoi l'alongement de la conduite *n*° 2 étant vide, a pu s'élever jusqu'à 0^{m},00000985o par degré centésimal.

Les quantités de dilatation de la conduite *n*° 3, lorsqu'elle est pleine et lorsqu'elle est vide, présentent entre elles des différences bien moindres que les quantités de dilatation de la conduite *n*° 2 dans les mêmes circonstances.

Des effets que nous avons observés sur nos trois conduites de la galerie Saint-Laurent, et des explications naturelles que nous avons données de ces effets, il faut conclure que la conduite *n*° 1, plus libre que les deux autres de s'alonger et de se raccourcir par l'action de la température, a sur les autres l'avantage de fournir une mesure de la dilatabilité de la fonte de fer plus approchante de l'exactitude; c'est en conséquence les résultats de nos expériences sur cette conduite qu'il faut comparer à ceux des expériences faites précédemment sur des barres de la même matière.

La seule expérience que je connaisse sur la dilatabilité linéaire de la fonte de fer a été faite en Angleterre au mois d'avril 1785, à l'aide d'un pyromètre microscopique de Ramsden ; elle est rapportée dans la Description des opérations entreprises pour déterminer les positions respectives des observatoires de Greenwich et de Paris, dont la traduction a été publiée par M. de Prony en 1791. Cette expérience est aussi la seule qu'on trouve rapportée dans les différents traités de physique récemment publiés; car, ni Smeaton, qui mesura la dilatabilité du verre et de plusieurs métaux en 1754, ni MM. Lavoisier et de Laplace, qui se livrèrent depuis à la même recherche sur différentes substances, ne soumirent la fonte de fer à l'épreuve.

D'après cette expérience de 1785, dont les résultats ont été traduits en mesures françaises par M. de Prony, une verge prismatique de fer fondu d'une toise de long s'alonge, pour un degré du thermomètre de Réaumur, de $0^{lig.}$,011988, ou par mètre, de 0^{m},00001389, et, pour un degré centésimal, de 0^{m},00001111.

La dilatation par mètre et par degré centésimal a été trouvée, sur notre conduite *n*° 1, de 0^{m},000009848.

Il y a, comme on voit, une différence de 0^{m},0000001263, équivalente à peu près à $\frac{1}{10}$ de l'alongement libre, et cette différence très-légère est due aux obstacles qu'éprouve la conduite à se mouvoir sur les rouleaux qui la soutiennent.

Ainsi, une conduite en fonte qui, remplie d'eau, pèse plus de 106991 kilogrammes, n'éprouve à se dilater, comme elle se dilaterait si elle était absolument libre, qu'une résistance capable d'atténuer d'un dixième environ sa dilatation libre.

Comparant à la dilatation libre de la fonte, qui est de 0^{m},00001111 par mètre et par degré centésimal, la dilatation de la conduite *n*° 2, que nous avons trouvée de 0^{m},00000854, on voit que la différence de ces dilatations, due aux résistances de diverse nature qu'éprouve la conduite *n*° 2 à se mouvoir dans le sens de sa longueur, est exprimée par 0^{m},00000257.

Si notre conduite *n*° 2, au lieu d'être posée dans une galerie voûtée, eût été enterrée sous le sol à un mètre de profondeur, elle aurait été chargée par mètre courant d'environ 300 kilog. de plus, à cause du poids de la terre et des pavés, et sur toute sa longueur, de 173400 kilog.; à quoi ajoutant le poids de la conduite elle-même et celui de l'eau qu'elle contient, montant ensemble à 106991 kilog., on aura, pour la charge totale du sol inférieur sur lequel elle aurait été posée, 280391 kilogrammes.

Si l'on supposait la résistance à l'alongement proportionnelle au frottement, c'est-à-dire à la pression, on aurait pour déterminer cette résistance la proportion suivante : $106991^{\text{kilog.}} : 280391^{\text{kilog.}} :: 0^{\text{m}},00000257 : 0^{\text{m}},00000673$, et ce dernier nombre représenterait la diminution de dilatation due au frottement. Ainsi, au lieu de s'alonger par degré du thermomètre centésimal de $0^{\text{m}},00001111$, comme elle s'alongerait si elle était parfaitement libre, l'alongement de cette conduite ne serait que de $0^{\text{m}},00000438$, mais il est évident que cette hypothèse n'est point admissible.

En général, quelle que soit la quantité dont une conduite d'eau enfouie sous le sol puisse s'alonger ou se raccourcir, suivant les variations de la température, il arrivera toujours, par l'influence de la chaleur sur le métal, que les joints des tuyaux dont la conduite est formée se comprimeront avec l'élévation de la température et se dilateront avec son abaissement.

Les rondelles de plomb, de cuir ou de flanelle goudronnée dont les joints sont ordinairement composés, n'étant point parfaitement élastiques, on conçoit que lorsque ces joints ont été comprimés par l'alongement de la conduite pendant l'été, la matière qui les remplit ne se restitue pas à mesure que les tuyaux se raccourcissent pendant l'hiver ; les joints restant ainsi plus ou moins ouverts, il se manifeste des pertes d'eau qu'il faut réparer après avoir souvent passé beaucoup de temps à en faire la recherche.

Lorsque les tuyaux sont terminés par des collets ou brides entre lesquels on a placé des rondelles de plomb, de cuir ou de flanelle, et que les joints ainsi composés sont serrés par des boulons, leur contraction ou leur dilatation devient en quelque sorte impossible, mais alors, les boulons qui retiennent entre elles les brides des tuyaux contigus ou ces brides elles-mêmes, se brisent, et leur rupture entraîne encore des pertes d'eau comme si le joint compris entre elles s'était ouvert dans son épaisseur.

Voilà pourquoi quand on relève d'anciennes conduites qui avaient été posées de cette manière, on en trouve les collets brisés de distance en distance. Les anciennes conduites de Marly, que nous avons eu occasion d'examiner, présentaient beaucoup d'exemples de ces ruptures.

Une multitude de fractures semblables eurent lieu sur la conduite des eaux de Chaillot, que l'ancienne compagnie Perrier fit poser sur le boulevard, depuis la porte St.-Honoré jusqu'à la place de la Bastille; quand au bout de quelques années et par suite du mauvais succès des spéculations de cette compagnie, cette conduite eut passé dans le domaine de la ville de Paris, on attribua les ruptures fréquentes qu'elle éprouvait à la seule influence des variations de la température auxquelles elle était soumise, et comme c'était presque toujours aux joints de ces tuyaux que ces ruptures avaient lieu, on se proposa de les prévenir en abattant leurs collets, et en emboîtant leurs extrémités dans des espèces de manchons de bois formés de douves d'un décimètre ou deux d'épaisseur, entourées de plusieurs cercles de fer. Les extrémités des tuyaux consécutifs reçues dans chaque manchon, pouvaient ainsi s'y mouvoir en avançant et en reculant, et si la dilatation et la condensation du métal eussent été les seules causes des ruptures auxquelles on voulait remédier, il est probable que le procédé auquel on avait eu recours les aurait prévenues, mais les variations de température n'étaient qu'une cause secondaire des accidents auxquels cette conduite était sujette. Le sol du boulevard dans lequel elle était enterrée, est, comme on sait, un sol factice de peu de consistance, susceptible de s'affaisser subitement en différents endroits, par des causes qui ne se manifestent pas toujours à l'extérieur. Par suite de ces affaissements accidentels, des portions plus ou moins considérables de la conduite se trouvant porter à faux, fléchissaient et se rompaient enfin sous leur propre poids, et sous celui des terres dont elles étaient chargées.

En Angleterre les conduites d'eau sont aussi enterrées sous le sol, et pour les mettre à l'abri des ruptures auxquelles elles seraient exposées par l'influence de la température, on s'est borné à supprimer les collets qui terminent les tuyaux à chaque bout, ainsi que les boulons destinés à comprimer les joints formés entre ces collets. Chaque tuyau porte à l'une de ses extrémités un renflement dans lequel s'emboîte le bout du tuyau suivant qui est décolleté à cet effet. Tous les tuyaux dont la conduite est composée forment ainsi, deux à deux, autant de compensateurs semblables à ceux que nous avons décrits, avec cette différence néanmoins, que la matière du joint n'est point retenue contre la bride fixe du manchon de l'un des tuyaux, par une bride annulaire de fonte mobile sur le tuyau décolleté qui s'y emboîte. (*Voyez la planche fig.* 6.)

L'intervalle compris entre le pourtour de la partie emboîtée de celui-ci, et les parois intérieures du manchon qui la reçoit est ordinairement rempli d'étoupes ou de vieux cordages que l'on y maintient en fermant cet intervalle par une bague de plomb fondu sur place, et chassée de force pour en boucher exactement l'entrée. On conçoit que si ces matières étaient parfaitement élastiques et pouvaient former un joint parfaitement étanche, les tuyaux dont la conduite est composée pourraient se mouvoir librement dans le sens de leur longueur en cédant aux influences diverses de la température, les ruptures de joint et les pertes d'eau qui en sont la suite se trouveraient ainsi prévenues ; mais il n'en est point ainsi : quelques précautions qu'on prenne pour remplir exactement par la matière du joint l'espace compris dans l'emboîture de deux tuyaux contigus, il est extrêmement difficile d'y parvenir ; ainsi quelque petite que soit l'amplitude du mouvement d'un tuyau dans l'autre, il suffit que ce mouvement ait lieu pour qu'il y ait désunion dans le joint, et qu'il se manifeste une fuite d'eau par l'espèce de scissure ainsi produite.

En adoptant ce mode de poser les conduites d'eau, les associations de particuliers qui entreprennent ordinairement à leurs frais et risques ces sortes d'opérations en Angleterre, ont eu spécialement en vue d'économiser le poids de la fonte employée à la fabrication des brides, et la valeur des boulons destinés à les réunir. Ces procédés n'ont été envisagés que secondairement, comme moyen de prévenir les accidents dus à la dilatation et à la condensation du métal, et dont il est vrai de dire qu'ils ne les préviennent qu'imparfaitement comme il est aisé de le reconnaître.

En effet, supposons que l'abaissement de la température raccourcisse les tuyaux, il pourra arriver que le tuyau décolleté, en sortant de son emboîture, entraîne avec lui en dehors la garniture du joint, et qu'il ne l'y fasse pas rentrer lorsqu'il se ralongera, la température venant à s'élever. Or, on conçoit que le déplacement de la garniture du joint pourrait laisser, entre cette garniture déplacée et les parois de ce joint, quelque espace vide qui livrerait passage à l'eau de la conduite.

Il n'en serait pas ainsi si la garniture du joint semblable à celle des compensateurs que nous avons employés se trouvait comprimée extérieurement par une bride annulaire mobile, qui serait boulonnée à la bride fixe du manchon; car alors si, par l'effet du raccourcissement de la conduite la garniture du joint se trouvait entraînée en dehors par la bride mobile, la même bride la refoulerait en dedans lors du ralongement, et lui ferait reprendre précisément la même place qu'elle occupait auparavant; il devient même alors superflu de garnir le joint dans toute ou partie de sa longueur; il suffit de former avec un peu plus de précaution un joint ordinaire entre les deux brides fixe et mobile du manchon et du tuyau *décolleté*, lesquels pris ensemble se transforment ainsi en tuyaux compensateurs tout-à-fait semblables à ceux que nous avons employés.

Au surplus, on parviendrait peut-être à se dispenser de cette transformation en choisissant pour la pose des conduites un état de température tel que l'on n'ait jamais à craindre la dislocation du joint par l'entraînement de sa garniture au dehors.

Si, par exemple, on pose, suivant la méthode anglaise, une conduite pendant l'hiver lorsque la température est la plus basse, et que par conséquent les tuyaux de fonte se sont raccourcis le plus possible, il est clair qu'en s'alongeant pendant l'été les tuyaux contigus s'emboîteront davantage en s'enfonçant l'un dans l'autre, ce qui tendra à rendre leurs joints plus étanches. La température s'abaissant de nouveau au retour de l'hiver suivant, les tuyaux pourront se raccourcir sans entraîner à l'extérieur la garniture de leurs joints qui se retrouveront respectivement dans leurs positions primitives.

Nous ne doutons point qu'en ayant égard à ces considétions et en procédant à la pose des conduites en fonte dans la saison la plus convenable, on ne perfectionne d'une manière notable les procédés de pose que nous avons empruntés aux Anglais. Mais, pour en assurer le succès, il ne faut pas seulement perfectionner la façon du joint de manière à le garantir des effets de la condensation et de la dilatation, il faut encore rendre solide le terrain dans lequel la conduite sera placée; et c'est en cela que gît presque toujours à Paris la plus grande difficulté; car le sol de la plupart des rues de cette ville est formé de remblais de toute espèce, qui ne présentent aucun appui solide. Pour peu qu'un pareil terrain subisse quelque tassement sous une certaine longueur de conduite, elle portera à faux dans toute cette partie, et l'inflexion qu'elle éprouvera, tant par son propre poids que par celui de la terre dont elle est couverte, comprimera la partie supérieure des joints et ouvrira d'autant leur partie inférieure: ce sera par cette ouverture que les fuites d'eau se manifesteront.

Celles auxquelles donnera lieu le tassement du sol pourront devenir d'autant plus considérables, que l'épaisseur des joints sera plus grande et que leur longueur sera moindre; car les quantités de compression de ces joints seront nécessairement proportionnelles à leur épaisseur, et, d'un autre côté, l'inflexion de la conduite sera d'autant plus facile, que l'emboîture sera plus courte. C'est à ces deux causes réunies qu'il faut attribuer les accidents survenus à une conduite de trente centimètres de diamètre, qui a été posée il y a quelques années dans la rue du Faubourg-Poissonnière, accidents tellement nombreux, qu'il a fallu relever cette conduite pour la poser avec plus de précautions, et notamment en emboîtant les tuyaux qui la composent plus profondément les uns dans les autres.

Lorsqu'on pose dans des galeries voûtées les conduites principales d'une grande distribution d'eau, on se met tout-à-fait à l'abri d'accidents de cette nature; car, d'un côté, des compensateurs placés à des distances convenables préviennent les accidents que les variations de température pourraient occasionner; tandis que, d'un autre côté, les conduites posées sur des appuis solides suffisamment rapprochés les uns des autres, et n'ayant aucun poids étranger à soutenir, ne sont exposées à aucune inflexion.

La pose des grosses conduites de distribution d'eau dans des galeries voûtées entraînerait sans doute des dépenses de construction considérables, notamment à Paris, s'il n'existait pas déja une multitude d'égoûts souterrains, dont le nombre augmentera de plus en plus, et dans lesquels on pourra sans nouvelles dépenses ajouter à la première destination de ces égoûts celle de recevoir de grosses conduites d'eau qui pourront y être facilement visitées chaque jour et replacées au besoin.

Les grosses conduites qui amènent les eaux du bassin de la Villette à la fontaine des Innocents, au boulevard Bondy, à la Place des Vosges et au Palais Royal, sont, comme nous l'avons dit, posées dans des galeries construites exprès depuis peu d'années, et dans quelques anciens égoûts de capacité suffisante. On peut ainsi les visiter chaque jour, et depuis vingt ans il en a moins coûté pour les entretenir en bon état sur un développement de plus de 10 mille mètres, que n'ont coûté en six mois avant son remaniement les réparations et l'entretien de la nouvelle conduite du faubourg Poissonnière sur moins de 1,200 mètres de longueur.

Nous conclurons des faits rapportés dans ce Mémoire :

1° Que par l'effet de la dilatation et de la condensation de la fonte, dues aux changements de saison et aux variations de la température, les conduites de ce métal, posées dans des galeries souterraines, s'alongent ou se raccourcissent par mètre et par degré de température du thermomètre centésimal, de $0^{m},00000985$; quantité moindre d'environ $\frac{1}{9}$ de l'alongement ou du raccourcissement qui aurait lieu si, au lieu d'être retenue sur leurs appuis par le frottement, ces conduites étaient absolument libres de se mouvoir, comme les barres de fer et de fonte que les physiciens ont soumises à l'expérience pour en assigner la dilatabilité.

2° Que l'effet de cette dilatation et de cette condensation de la fonte devenant moins sensible quand les conduites sont enterrées sous le sol, n'en opère pas moins la rupture des conduites, d'où proviennent des fuites d'eau et par suite des tassements qui occasionnent des inondations souterraines, et des dépenses plus ou moins considérables, tant en réparations qu'en frais de recherches souvent infructueuses.

3° Que si, pour compenser les effets dus aux variations de la température, on emboîte les bouts de tuyau les uns dans les autres au lieu de les assembler au moyen de collets et de boulons, il faut que l'épaisseur du joint, c'est-à-dire, l'intervalle compris entre la surface extérieure du tuyau décolleté et la surface intérieure du manchon, soit formé d'une substance élastique qui présente la moindre épaisseur possible, et qui soit susceptible de se renfler lorsqu'elle est pénétrée d'eau.

4° Que la longueur de l'emboîture des tuyaux contigus soit assez considérable, non-seulement pour que leur déboîtement soit impossible par l'effet de la condensation, mais encore afin de rendre difficile l'inflexion de la conduite, laquelle ne peut avoir lieu que par la compression du joint en dessus et son ouverture en dessous.

5° Que, pour assurer la stabilité du joint dans son état primitif et le rendre constamment étanche, il est convenable d'en resserrer la matière entre une bride fixe ajustée au manchon, et une autre bride mobile susceptible de glisser sur le tuyau décolleté qui s'y emboîte.

6° Que l'on pourra jusqu'à un certain point s'affranchir de cette précaution en posant les tuyaux de conduite assemblés à l'*anglaise*, dans la saison de l'année pendant laquelle la température est la plus basse.

7° Que des conduites enterrées sous le sol, quel que soit le mode d'assemblage de leurs tuyaux, doivent être posées de distance en distance sur des appuis solides formés de massifs de maçonnerie, dont la résistance prévienne autant que possible les inflexions de cette conduite qui en entraîneraient la rupture.

8° Que dans les grandes villes dont le pavé des rues est ordinairement établi sur des remblais et des terres rapportées, il est extrêmement avantageux de poser les conduites principales des distributions d'eau dans des galeries voûtées construites sous ces rues, soit pour cet usage spécial, soit, ce qui arrive plus ordinairement et ce qui est plus économique, que ces galeries remplissent en outre la destination d'égoûts pour l'écoulement des eaux pluviales et ménagères, et concourent ainsi au maintien de la salubrité publique.

9° Enfin, que l'avantage des galeries voûtées pour recevoir les conduites principales de distribution d'eau étant aujourd'hui constaté par vingt ans d'épreuve, il est à propos de profiter de cette expérience, et de ne point s'exposer à des bouleversements de pavé plus ou moins fréquents, à des recherches de fuites d'eau plus ou moins infructueuses en enterrant les conduites sur un sol susceptible de tassements, comme celui des boulevards et de la plupart des rues de la capitale.

NOUVEL ESSAI

DE

TRIGONOMÉTRIE SPHÉROIDIQUE,

PAR M. PUISSANT.

Lu à l'Académie royale des sciences, le 7 décembre 1829.

§ I.

Notice historique.

LES triangles que l'on considère dans les opérations géodésiques sont formés de lignes de plus courte distance sur la surface d'un ellipsoïde de révolution. Ces lignes sont toutes très-petites par rapport au rayon de cet ellipsoïde lorsque les triangles sont destinés à mesurer, soit un arc de méridien, soit un arc de parallèle, soit enfin l'étendue superficielle d'une grande contrée; ou bien les trois côtés sont d'une grandeur quelconque, et il en est deux qui représentent des arcs de méridiens. Les formules fondamentales d'où dérive la résolution des triangles de cette seconde espèce ont été données, par plusieurs géomètres, avec plus ou moins de simplicité : elles résultent nécessairement de la propriété qu'a cette ligne géodésique d'être la plus courte parmi toutes celles qu'on peut mener sur la terre entre deux points.

Les premières recherches les plus importantes en ce genre sont dues à Euler et remontent à l'année 1753. Ce grand géomètre parvint, à l'aide de sa théorie *de maximis et minimis* aux trois équations qui expriment les relations qu'ont entre eux les six éléments d'un triangle sphéroïdique. Toutefois Clairaut, vingt ans auparavant, avait déja signalé les principales propriétés du triangle sphéroïdique rectangle.

Des trois équations obtenues par Euler, la première est donnée en termes finis, et contient le rapport entre les azimuts de la ligne géodésique et les latitudes de ses extrémités; la seconde exprime le rapport entre la différentielle de la plus courte distance et celle de l'une des latitudes données : la troisième fait connaître le rapport entre la différentielle de cette même latitude et celle de l'angle au pôle formé par les deux méridiens des extrémités de la ligne géodésique. Pour appliquer ces équations aux questions de pratique, il est donc indispensable d'intégrer les deux dernières; mais c'est une opération que Euler regarda comme très-difficile et même comme impossible dans certains cas. Il était réservé à Dionis-du-Séjour d'aplanir cette difficulté d'analyse en faisant subir aux deux équations différentielles de la ligne la plus courte des transformations qui en simplifient la forme, et dans lesquelles les latitudes vraies sont remplacées par les latitudes réduites qui leur correspondent sur la sphère inscrite à l'ellipsoïde de révolution. On peut voir à ce sujet son *Traité analytique du mouvement apparent des corps célestes*, t. II, pag. 3.

Depuis lors d'autres géomètres mettant à profit cette heureuse idée, parvinrent à perfectionner et étendre la théorie des triangles sphéroïdiques obliquangles. C'est surtout à l'occasion de la mesure de la méridienne de France, par Délambre et Méchain, que MM. Legendre et Oriani établirent, chacun de leur côté, les véritables principes de la résolution de ces triangles, l'un dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, année 1806, l'autre dans les Mémoires de physique et de mathématiques de Milan, même année. Les formules principales de ces deux savants célèbres, ont cela de remarquable que leur exactitude a lieu pour toute grandeur de la ligne géodésique; ainsi la convergence des séries qui en proviennent dépend uniquement de la petitesse de l'excentricité des méridiens.

Dans le présent Mémoire où se trouve refondu celui que je lus dans le sein de cette société, le 17 mai 1813, je me suis proposé d'établir la résolution de tous les cas des triangles sphéroïdiques quelconques sur les formules mêmes de M. Legendre, que j'ai démontrées au livre VI de la Géodésie, et d'obtenir les valeurs analytiques des éléments cherchés à l'aide du théorème de Maclaurin relatif à une fonction d'une ou de deux variables, au lieu de les faire dériver de plus hautes considérations. Sous ce rapport mon travail est tout-à-fait distinct de celui que M. Oriani a publié sur le même sujet. J'ai pensé qu'en ramenant la résolution des triangles dont il s'agit, à une méthode uniforme, directe, et pour ainsi dire élémentaire, il serait plus facile, dans la pratique, de traiter les questions les plus importantes de la Géodésie avec toute la rigueur convenable, et d'assigner, au besoin, le degré de précision des formules approximatives et beaucoup plus simples qu'on jugerait à propos d'employer dans la recherche de la figure de la terre. Il est vrai, cependant, que des dix-neuf problèmes résolus dans ce Mémoire, quelques-uns seulement sont susceptibles de recevoir une pareille application; mais comme ils forment dans leur ensemble une doctrine complète, j'ai cru devoir les réunir afin de ne laisser rien à désirer sur cette partie intéressante de la science.

§ II.

Formules fondamentales.

On sait qu'à tout triangle sphéroïdique formé par deux arcs de méridiens et une ligne de plus courte distance correspond un triangle sphérique de même espèce, et que les angles azimutaux comptés, par exemple, du nord à l'est, sont les mêmes de part et d'autre. Si, en pareille circonstance, $H'H''$ sont les latitudes vraies des sommets $M'M''$ du triangle sphéroïdique $M'PM''$ ou des extrémités de la ligne géodésique $M'M''$, et $\varphi'\varphi''$ leurs longitudes $M'PM, M''PM$; que les latitudes réduites des points $m'm''$ sur la sphère inscrite soient $\lambda'\lambda''$, et leurs longitudes $m'pm = \omega', m''pm = \omega''$, il existera entre les latitudes $H'\lambda'$ et $H''\lambda''$ la relation suivante :

$$(1) \qquad \text{tang.}\lambda' = \frac{b}{a}\text{tang.}H', \quad \text{tang.}\lambda'' = \frac{b}{a}\text{tang.}H'',$$

$a\,b$ désignant respectivement le demi-grand axe et le rayon du pôle de l'ellipsoïde de révolution auquel se rapporte le triangle $M'PM''$.

D'un autre côté si $V'V''$ sont les angles azimutaux de la ligne $M'M''$ de plus courte distance, les angles en m' et m'' du triangle sphérique $m'm''p$ seront les mêmes; et si l'on suppose la ligne géodésique $M''M'M$ perpendiculaire en M au méridien PM, il existera également entre la latitude H

du pied de cette perpendiculaire et sa latitude réduite λ correspondante à celle de m la relation

$$\text{tang.}\,\lambda = \frac{b}{a}\,\text{tang. H}.$$

On aura de plus cette autre relation

$$\left.\begin{array}{l}\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.\text{V}' \\ \cos.\lambda = \cos.\lambda'' \sin.\text{V}''\end{array}\right\}\ (2)$$

et si l'on fait $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \varepsilon$, qu'on désigne par s la ligne géodésique M′ M″, et par $\sigma'\ \sigma''$ les arcs $m'\,m$, $m''\,m$ sur la sphère inscrite; enfin par $s'\ s''$ les lignes géodésiques correspondantes sur l'ellipsoïde, on aura rigoureusement dans les triangles sphériques $m'p\,m$, $m''p\,m$, $m'p\,m''$ les relations suivantes qui ramènent à ces mêmes triangles la résolution des triangles sphéroïdiques correspondants :

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.\sigma' = \dfrac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda}, \quad \cos.\sigma'' = \dfrac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda}, \\
\text{tang.}\,\omega' = \dfrac{\text{tang.}\,\sigma'}{\cos.\lambda}, \quad \text{tang.}\,\omega'' = \dfrac{\text{tang.}\,\sigma''}{\cos.\lambda}, \\
\sin.\sigma' = \sin.\omega' \cos.\lambda', \quad \sin.\sigma'' = \sin.\omega'' \cos.\lambda'', \\
\cos.\omega' = \cos.\sigma' \sin.\text{V}', \quad \cos.\omega'' = \cos.\sigma'' \sin.\text{V}'', \\
\sin.\lambda' = \sin.\lambda \cos.\sigma', \quad \sin.\lambda'' = \sin.\lambda \cos.\sigma'', \\
\sin.(\omega'' - \omega') = \dfrac{\sin.(\sigma'' - \sigma')\sin.\text{V}'}{\cos.\lambda''}, \quad \dfrac{\sin.\text{V}'}{\sin.\text{V}''} = \dfrac{\cos.\lambda''}{\cos.\lambda'}.
\end{array}\right\}(3)$$

Relativement au triangle sphéroïdique rectangle M′PM, on aura ces deux séries,

$$(A)\qquad \frac{s}{b}=\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda-\frac{3}{64}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\sigma$$
$$+\left(\frac{1}{8}\varepsilon\sin.^2\lambda-\frac{1}{32}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\sin.2\sigma$$
$$-\frac{1}{256}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\sin.4\sigma$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(B)\qquad \varphi=\omega-\left(\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{3}{8}\varepsilon^2-\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\sigma\cos.\lambda$$
$$+\frac{1}{32}\varepsilon^2\sin.^2\lambda\cos.\lambda\sin.2\sigma$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

écrivant ici, pour abréger, σ, s et φ au lieu de σ' s' et φ'.

Relativement au triangle sphéroïdique obliquangle M'PM", on aura de même, en faisant $s=s''-s'$, et $\varphi=\varphi''-\varphi'$,

$$(A')\qquad \frac{s}{b}=(\sigma''-\sigma')\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda-\frac{3}{64}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)$$
$$+(\sin.2\sigma''-\sin 2\sigma')\left(\frac{1}{8}\varepsilon\sin.^2\lambda-\frac{1}{32}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)$$
$$-(\sin.4\sigma''-\sin.4\sigma')\left(\frac{1}{256}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(B')\qquad \varphi=\omega''-\omega'-(\sigma''-\sigma')\left(\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{3}{8}\varepsilon^2\right)\cos.\lambda$$
$$+\left(\sigma''-\sigma'+\frac{1}{2}\sin.2\sigma''-\frac{1}{2}\sin.2\sigma'\right)\left(\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^2\lambda\cos.\lambda\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces quatre séries démontrées au chapitre I^er du livre VI de la Géodésie, sont d'autant plus convergentes que la quantité ε est plus petite, quelle que soit d'ailleurs la grandeur de l'arc s. Or e^2 désignant le carré de l'excentricité de l'ellipsoïde de révolution, on a $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$, et par conséquent

$$\varepsilon = \frac{e^2}{1-e^2} = e^2 + e^4 + e^6 + \ldots\ldots.$$

ou bien

$$\varepsilon = e^2 \frac{a^2}{b^2}.$$

D'un autre côté si α désigne l'aplatissement du même ellipsoïde, auquel cas $\alpha = \frac{a-b}{a}$, on aura exactement

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2,$$

ou

$$\varepsilon = (2\alpha - \alpha^2)\frac{a^2}{b^2},$$

ou enfin en série,

$$\varepsilon = 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4 + \ldots\ldots.$$

On voit donc que e^2 et ε sont de l'ordre de l'aplatissement, et que les séries précédentes sont exactes aux quantités près du troisième ordre.

Les mesures les plus précises donnant au sphéroïde terrestre un aplatissement de $\frac{1}{305}$, il est entièrement inutile, dans les applications, de prolonger davantage ces séries; on peut même, dans bien des cas, y supprimer les termes du second ordre.

Après avoir rappelé les formules qui servent de base à la résolution des triangles sphéroïdiques, examinons chaque cas en particulier.

§ III.

Résolution des triangles sphéroïdiques rectangles.

I^er cas. *Étant données la latitude* H *du pied de la perpendiculaire* s *et cette ligne elle-même, déterminer la latitude* H′ *de son sommet, ainsi que la différence en longitude* φ *de ces mêmes points.*

Solution. D'abord la latitude réduite λ s'obtiendra au moyen de la relation (1) du paragraphe précédent; ensuite si l'on retourne la série (A), c'est-à-dire si l'on cherche σ en fonction de $\frac{s}{b}$, on trouvera facilement, par la méthode des coefficients indéterminés employée à l'art 363 de la Géodésie,

$$\left.\begin{aligned}
\sigma = {} & \frac{s}{b}\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda+\frac{7}{64}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\\
& -\sin.2\frac{s}{b}\left[\frac{1}{8}\varepsilon\sin.^2\lambda-\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right]\\
& +\frac{s}{b}\cos.2\frac{s}{b}\left(\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\\
& +\frac{5}{256}\varepsilon^2\sin.4\frac{s}{b}\sin.^4\lambda\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{C})$$

Connaissant σ on tirera la latitude réduite λ' de $\sin.\lambda'=\sin.\lambda\cos.\sigma$, puis l'angle ω de $\cos.\omega=\frac{\text{tang.}\lambda'}{\text{tang.}\lambda}$; et l'on aura la longitude φ, comptée du méridien PM, au moyen de la série (B). Enfin l'azimut V′ sera donné par l'équation

$$\sin.V'=\frac{\cos.\lambda}{\cos.\lambda'}.$$

Si l'on voulait obtenir directement la latitude réduite λ' on opérerait ainsi qu'il suit.

De ce que $\sin.\lambda' = \sin.\lambda \cos.\sigma$, on a évidemment

$$(4) \qquad \sin.\lambda' = \sin.\lambda \cos.\left(\frac{s}{b} + \tau\right),$$

en désignant dans la série (C) tous les termes en ε et ε^2 par τ. Il n'est pas moins évident que si λ'_0 exprime la valeur de λ' lorsque τ ou $\varepsilon = 0$, on aura

$$\sin.\lambda'_0 = \sin.\lambda \cos.\frac{s}{b},$$

et, par la série de Maclaurin,

$$\lambda' = \lambda'_0 + \left(\frac{d\lambda'}{d\tau}\right)\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda'}{d\tau^2}\right)\tau^2 + \ldots\ldots$$

ayant soin de faire $\tau = 0$ après les différenciations. Or la relation (4), donne

$$\left(\frac{d\lambda'}{d\tau}\right) = -\frac{\sin.\lambda \sin.\frac{s}{b}}{\cos.\lambda'_0} = -\operatorname{tang}.\lambda'_0 \operatorname{tang}.\frac{s}{b} = \mathrm{M}$$

$$\left(\frac{d^2\lambda'}{d\tau^2}\right) = \operatorname{tang}.\lambda'_0\left(\frac{d\lambda'}{d\tau}\right)^2 - \operatorname{tang}.\lambda'_0 = \mathrm{N},$$

et l'on a, aux termes près du troisième ordre,

$$\tau^2 = \frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right]^2;$$

partant

$$\begin{aligned}\lambda' = \lambda'_0 &- \frac{1}{4}\mathrm{M}\varepsilon \sin.^2\lambda\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right]\\ &+ \frac{1}{16}\mathrm{M}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda\left[\frac{7}{4}\frac{s}{b} + \sin.2\frac{s}{b} + \frac{s}{b}\cos.2\frac{s}{b} + \frac{5}{16}\sin.4\frac{s}{b}\right]\\ &+ \frac{1}{32}\mathrm{N}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right]^2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Telle est l'expression analytique de la latitude réduite λ' : en y négligeant les termes du second ordre en ε^2 on retombe sur la valeur que nous avions obtenue dans notre premier Mémoire, par un procédé élémentaire, mais moins général que le précédent. Il est inutile d'avertir qu'il faudra recourir à la relation (1) pour avoir la latitude vraie H' cherchée.

II^e cas. *Étant connues la longueur* s *d'un arc de plus courte distance perpendiculaire au méridien* PM *et la différence en longitude* φ *des extrémités de cet arc, trouver les autres parties du triangle sphéroïdique rectangle.*

Solution. Le triangle sphérique correspondant au triangle sphéroïdique donné offre cette relation,

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{\text{tang.}\,\sigma}{\cos.\lambda};$$

ainsi en faisant $\omega = \varphi + \mu$ et $\sigma = \frac{s}{b} + \tau$, on aura

$$\cos.\lambda = \cot.(\varphi + \mu)\,\text{tang.}\left(\frac{s}{b} + \tau\right). \tag{5}$$

Supposons maintenant que λ_0 soit la valeur de λ lorsque μ et τ sont nuls à la fois, alors λ sera une fonction des deux variables μ et et τ, et par le théorème connu, on aura généralement

$$\lambda = \lambda_0 + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)\mu + \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\tau + \ldots\ldots$$

Nous négligeons ici les termes du second ordre pour simplifier. Différentiant l'équation (5) successivement par rapport à μ et τ, il viendra, après avoir fait nulles ces variables,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right) = \frac{\text{tang.}\frac{s}{b}}{\sin.\lambda_0 \sin.^2\varphi}, \quad \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) = -\frac{\cot.\varphi}{\sin.\lambda_0 \cos.^2\frac{s}{b}}.$$

D'un autre côté l'on a, par ce qui précède, aux termes près du deuxième ordre,

$$\omega = \varphi + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma\cos.\lambda,\quad \sigma = \frac{s}{b} - \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right],$$

ou

$$\omega = \varphi + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{s}{b}\cos.\lambda;$$

partant, au même degré de précision,

$$\mu = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{s}{b}\cos.\lambda_0$$

$$\tau = -\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right].$$

Concluons de là que

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\frac{s}{b}\frac{\cot.\lambda_0\cos.\lambda_0}{\sin.2\varphi} + \frac{1}{4}\varepsilon\frac{\sin.\lambda_0\cot.\varphi}{\cos.^2\frac{s}{b}}\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right],$$

série dans laquelle $\cos.\lambda_0 = \cot.\varphi\,\mathrm{tang}.\frac{s}{b}$.

Le moyen d'avoir λ avec plus d'exactitude serait de pousser la série précédente jusqu'aux termes du second ordre inclusivement; mais il est plus simple de déterminer, à l'aide de cette valeur approchée, le côté σ et l'angle opposé ω par les formules entières (C) (B), en négligeant toutefois les termes du troisième ordre; ensuite d'évaluer cette latitude réduite par la relation

$$\cos.\lambda = \frac{\mathrm{tang}.\sigma}{\mathrm{tang}.\omega},$$

dans laquelle les angles σ et ω seront alors connus et exacts aux quantités près du troisième ordre.

Quand on aura ainsi la valeur de λ on passera à celle de λ' ou de la latitude réduite du sommet de la perpendiculaire, laquelle sera donnée par une des relations (3), savoir :

$$\sin.\lambda' = \sin.\lambda \cos.\sigma.$$

Enfin, l'on tirera l'azimut V' de l'équation (2).

Lorsqu'on ne veut avoir égard qu'aux termes du premier ordre en ε, on peut obtenir directement l'azimut V' par le procédé qui vient de donner la valeur approchée de λ. En effet le triangle sphérique rectangle, destiné à remplacer le triangle sphéroïdique, donnant

$$\sin.V' = \frac{\cos.\omega}{\cos.\sigma},$$

on a, conformément à la notation ci-dessus,

$$\sin.V' = \frac{\cos.(\varphi+\mu)}{\cos.\left(\frac{s}{b}+\tau\right)},$$

et par conséquent

$$V' = V_0' + \left(\frac{dV'}{d\mu}\right)\mu + \left(\frac{dV'}{d\tau}\right)\tau + \ldots\ldots$$

en nommant V_0' la valeur de V' correspondante à la fois à μ et $\tau = 0$. Mais alors

$$\sin.V_0' = \frac{\cos.\varphi}{\cos.\frac{s}{b}},$$

et les coefficients différentiels du premier ordre sont

$$\left(\frac{dV'}{d\mu}\right) = -\tang.\varphi \tang.V_0', \quad \left(\frac{dV'}{d\tau}\right) = \tang.\frac{s}{b}\tang.V_0' :$$

mettant donc ces valeurs dans la série précédente, ainsi que celles de μ et τ citées plus haut, on aura définitivement

$$V' = V_0' - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{s}{b}\,\text{tang.}\frac{s}{b}\,\text{tang.}\,V_0'$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon\frac{\sin.\left(\varphi+\frac{s}{b}\right)\sin.\left(\varphi-\frac{s}{b}\right)}{\sin.^2\varphi\cos.^2\frac{s}{b}}\,\text{tang.}\frac{s}{b}\,\text{tang.}\,V_0'\left[\frac{s}{b}+\frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right].$$

On voit, par ce résultat, la correction qu'il faudra faire à l'azimut V_0' calculé dans l'hypothèse sphérique, pour qu'il satisfît à la condition d'ellipticité du sphéroïde. Dans la recherche de la figure de la terre, on détermine de préférence la longitude φ par l'azimut V' : tel est le cas suivant.

III^e CAS. *Connaissant la longueur* s *d'un arc perpendiculaire au méridien et l'azimut* V′ *de cette ligne de plus courte distance sur l'horizon de son sommet, trouver les latitudes* H′ H″ *de ses extrémités et leur différence* φ *en longitude.*

SOLUTION. Le triangle sphérique correspondant au triangle donné procure évidemment la relation

$$\text{tang.}\,\lambda = \frac{\cot.\,V'}{\sin.\,\sigma};$$

ainsi, en faisant comme ci-dessus, $\sigma = \frac{s}{b} + \tau$, l'on a

$$\text{tang.}\,\lambda = \frac{\cot.\,V'}{\sin.\left(\frac{s}{b}+\tau\right)}.$$

Si donc λ_0 est la valeur qu'acquiert λ lorsque $\tau = 0$, on a

$$\text{tang.}\,\lambda_0 = \frac{\cot.\,V'}{\sin.\frac{s}{b}},$$

et, en vertu du théorème de Maclaurin,

$$\lambda = \lambda_0 + \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda}{d\tau^2}\right)\tau^2 + \ldots\ldots$$

Reste à déterminer les termes de cette série. Or on a, en n'évaluant que le coefficient différentiel du premier ordre,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) = -\text{tang.}\,\lambda_0\,\text{cot.}\,\frac{s}{b}\,\text{cos.}^2\lambda_0,$$

et l'on sait, par ce qui précède, que

$$\tau = -\frac{1}{4}\varepsilon\,\text{sin.}^2\lambda_0\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\text{sin.}\,2\,\frac{s}{b}\right],$$

quantité exacte aux termes près du second ordre; ainsi au même degré de précision,

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{4}\varepsilon\,\text{sin.}^3\lambda_0\,\text{cos.}\,\lambda_0\,\text{cot.}\,\frac{s}{b}\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\,\text{sin.}\,2\,\frac{s}{b}\right];$$

mais $\text{sin.}\,\frac{s}{b} = \frac{\text{cot.}\,V'}{\text{tang.}\,\lambda_0}$, donc

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{4}\varepsilon\,\text{sin.}^4\lambda_0\,\text{tang.}\,V'\,\text{cos.}\,\frac{s}{b}\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\,\text{sin.}\,2\,\frac{s}{b}\right].$$

Sans prolonger davantage cette série, on pourra avoir une valeur plus exacte de λ en introduisant celle-ci dans la série (C), sauf à rejetter les termes supérieurs au deuxième ordre; puis en calculant la formule rigoureuse

$$\text{tang.}\,\lambda = \frac{\text{cot.}\,V'}{\text{sin.}\,\sigma};$$

ensuite on aura

$$\text{sin.}\,\lambda' = \text{sin.}\,\lambda\,\text{cos.}\,\sigma$$
$$\text{cos.}\,\omega = \text{cos.}\,\sigma\,\text{sin.}\,V',$$

et la longitude φ s'obtiendra au moyen de la série (B). Enfin des latitudes réduites $\lambda\lambda'$ on passera sans difficulté aux latitudes vraies HH′ auxquelles elles se trouvent liées par la relation (1).

Cherchons directement la longitude φ, mais bornons le degré de précision aux termes du premier ordre; on aura d'abord

$$\cos.\omega = \sin.V'\cos.\left(\frac{s}{b}+\tau\right);$$

ensuite appelant ω_0 ce que devient ω lorsque $\tau=0$, on pourra écrire

$$\omega=\omega_0+\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)\tau+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\omega}{d\tau^2}\right)\tau^2+\ldots\ldots$$

et ω_0 se tirera de la relation $\cos.\omega_0=\sin.V'\cos.\frac{s}{b}$. D'un autre côté

$$\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)=\frac{\sin.V'\sin.\frac{s}{b}}{\sin.\omega_0}=\cot.\omega_0\operatorname{tang}.\frac{s}{b},$$

$$\tau=-\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0\left[\frac{s}{b}+\frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right];$$

de plus

$$\omega=\varphi+\mu=\varphi+\frac{1}{2}\varepsilon\frac{s}{b}\cos.\lambda_0;$$

on aura donc, toutes substitutions faites,

$$\varphi=\omega_0-\frac{1}{2}\varepsilon\frac{s}{b}\cos.\lambda_0-\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0\frac{\sin.V'\sin.\frac{s}{b}}{\sin.\omega_0}\left[\frac{s}{b}+\frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right];$$

formule dans laquelle λ_0 se déduira de la relation $\operatorname{tang}.\lambda_0=\dfrac{\cot.V'}{\sin.\frac{s}{b}}$.

Si l'on voulait avoir l'angle ω exact jusqu'aux termes du second ordre inclusivement, il serait nécessaire de substituer dans tous les termes de τ pour λ sa valeur approchée précédente, et d'évaluer le coefficient différentiel

$$\left(\frac{d^2\omega}{d\tau^2}\right)=\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)\cot.\frac{s}{b}-\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2\cot.\omega_o=\left[1-\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2\right]\cot.\omega_o.$$

Cette opération n'ayant rien de difficile, nous nous bornerons à l'indiquer.

IV^e cas. *Étant données la perpendiculaire* s *et la latitude* H' *de son sommet, trouver tant l'azimut* V' *de cette ligne sur l'horizon de ce point que la latitude* H *de son pied, et la longitude* φ.

Solution. Après avoir déterminé λ', on aura recours à la relation

$$\sin.\lambda=\frac{\sin.\lambda'}{\cos.\sigma}=\frac{\sin.\lambda'}{\cos.\left(\frac{s}{b}+\tau\right)},$$

pour obtenir, comme dans le problème précédent, la valeur de λ exacte seulement jusqu'aux termes du premier ordre inclusivement. D'abord on aura

$$\sin.\lambda_o=\frac{\sin.\lambda'}{\cos.\frac{s}{b}};$$

ensuite à cause de

$$\lambda=\lambda_o+\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\tau+\ldots\ldots$$

et de

$$\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)=\text{tang.}\lambda_o\,\text{tang.}\frac{s}{b},$$

il viendra définitivement

$$\lambda=\lambda_o-\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_o\,\text{tang.}\lambda_o\,\text{tang.}\frac{s}{b}\left[\frac{s}{b}+\frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right].$$

Cette valeur approchée servira à calculer la série (C) dont on conservera tous les termes, et l'on aura, avec l'exactitude requise,

$$\sin.\lambda = \frac{\sin.\lambda'}{\cos.\sigma}, \quad \sin.V' = \frac{\cos.\lambda}{\cos.\lambda'};$$

enfin la solution du premier cas fera connaître la longitude φ; ou bien l'on cherchera directement l'angle ω, comme dans le problème précédent, lequel sera donné par la relation

$$\sin.\omega = \frac{\sin.\left(\frac{s}{b}+\tau\right)}{\cos.\lambda'} = \frac{\sin.\sigma}{\cos.\lambda'};$$

et l'on déduira ensuite l'angle φ de la série (B) dont les éléments σ et λ seront connus par ce qui précède.

V^e Cas. *Connaissant l'azimut V' de la perpendiculaire et la différence φ en longitude de ses extrémités, trouver les latitudes de ces points et la longueur de cette ligne de plus courte distance.*

Solution. Comme dans le triangle sphérique $m'pm$, substitué au triangle sphéroïdique donné, on a la relation

$$\sin.\lambda' = \cot.V'\cot.(\varphi+\mu),$$

lorsqu'on désigne par μ tous les termes en ε dans la série (B), ou ce qui est de même lorsqu'on fait $\omega = \varphi + \mu$, il s'ensuit que si λ_0' est la valeur de λ' correspondante à $\mu = 0$, on aura

$$\sin.\lambda_0' = \cot.V'\cot.\varphi,$$

et

$$\lambda' = \lambda_0' + \left(\frac{d\lambda'}{d\mu}\right)\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda'}{d\mu^2}\right)\mu^2 + \ldots\ldots;$$

mais d'une part

$$\left(\frac{d\lambda'}{d\mu}\right)=-\frac{\cot. V'}{\sin.^2 \varphi \cos. \lambda_0'}=-2\frac{\operatorname{tang}.\lambda_0'}{\sin. 2\varphi};$$

d'autre part la série (B) donne, en ne conservant que le terme du premier ordre,

$$\mu=\tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma\cos.\lambda,$$

ou bien assez exactement

$$\mu=\tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma_0\cos.\lambda_0;$$

partant,

$$\lambda'=\lambda_0'-\varepsilon\sigma_0\cos.\lambda_0\frac{\operatorname{tang}.\lambda_0'}{\sin. 2\varphi}.$$

On a d'ailleurs rigoureusement

$$\cos.\omega=\cos.\sigma\sin. V',$$

ou, aux quantités près du premier ordre,

$$\cos.\sigma_0=\frac{\cos.\varphi}{\sin. V'},\quad \text{et de plus}\quad \operatorname{tang}.\lambda_0=\frac{\cot. V'}{\sin.\sigma_0}:$$

donc enfin tout est connu dans l'expression précédente de λ'. Cette latitude réduite n'étant donnée qu'approximativement, les valeurs de λ et σ du même ordre se tireront des relations

$$\cos.\lambda=\cos.\lambda'\sin. V',\quad \cos.\sigma=\frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda};$$

alors en substituant celles-ci dans la série (B) on obtiendra ω aux quantités près du troisième ordre. Ensuite on aura σ au même degré d'exactitude, à l'aide de cette formule rigoureuse

$$\cos.\sigma=\frac{\cos.\omega}{\sin. V'},$$

et la ligne géodésique s sera donnée par la série (A); enfin les latitudes réduites λ', λ seront exactement données par ces relations

$$\sin.\lambda' = \cot.V' \cot.\omega$$
$$\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.V'.$$

Si l'on était curieux d'avoir immédiatement la ligne géodésique, on partirait de la formule rigoureuse

$$\cos.\sigma = \frac{\cos.(\varphi+\mu)}{\sin.V'},$$

laquelle servirait à procurer les valeurs des coefficients différentiels de la série

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{d\sigma}{d\mu}\right)\mu + \ldots\ldots$$

En effet on aurait

$$\cos.\sigma_0 = \frac{\cos.\varphi}{\sin.V'}, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\mu}\right) = \operatorname{tang}.\varphi \cot.\sigma_0;$$

de plus à cause de $\mu = \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_0 \cos.\lambda_0$, il viendrait

$$\sigma = \sigma_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma_0 \cos.\lambda_0 \operatorname{tang}.\varphi \cot.\sigma_0.$$

on sait d'ailleurs que

$$\sigma = \frac{s}{b} + \tau = \frac{s}{b} - \frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda_0 \left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right],$$

aux termes près du second ordre; ainsi donc

$$\frac{s}{b} = \sigma_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_0 \cos.\lambda_0 \operatorname{tang}.\varphi \cot.\sigma_0 + \frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda_0 \left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\frac{s}{b}\right];$$

mais cette formule n'est suffisamment exacte qu'autant que ε est fort petit, comme dans le cas du sphéroïde terrestre. On fera attention que λ_0 se déduit de $\operatorname{tang}.\lambda_0 = \frac{\cot.V'}{\sin.\sigma_0}$.

Il est évident qu'en introduisant dans la série (B), et dans la relation $\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.V'$, les valeurs approximatives de λ' et σ que nous venons de trouver, on aurait μ ou la somme de tous les termes en ε, exacte aux quantités près du troisième ordre : alors en évaluant le second terme de la série qui donne λ', et ayant égard pour cela à ce que

$$\left(\frac{d^2\lambda'}{d\mu^2}\right) = \left(\frac{d\lambda'}{d\mu}\right)^2 \tang.\lambda_0' - 2\left(\frac{d\lambda'}{d\mu}\right)\cot.\varphi,$$

on obtiendrait directement cette latitude réduite au même degré d'exactitude que par le procédé ci-dessus.

VI^e cas. *La latitude* H' *et la différence en longitude* φ *étant données, trouver l'autre latitude* H *et la ligne géodésique* s.

Solution. Pour résoudre cette question, partons de la relation

$$\tang.\lambda = \frac{\tang.\lambda'}{\cos.\omega} = \frac{\tang.\lambda'}{\cos.(\varphi+\mu)},$$

et appelons comme à l'ordinaire λ_0 la valeur de λ correspondante à $\mu = 0$; on aura

$$\tang.\lambda_0 = \frac{\tang.\lambda'}{\cos.\varphi};$$

expression toute connue, puisque λ' est la latitude réduite du sommet de la perpendiculaire s dont la latitude vraie donnée est représentée par H'.

On a d'ailleurs, par la série de Maclaurin,

$$\lambda = \lambda_0 + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)\mu + \ldots\ldots$$

et comme

$$\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right) = \sin.\lambda_0 \cos.\lambda_0 \tang.\varphi,$$

que de plus

$$\mu = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma\cos.\lambda_0,$$

on a par conséquent

$$\lambda = \lambda_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma\sin.\lambda_0\cos.^2\lambda_0\,\mathrm{tang}.\varphi.$$

Mais il s'agit, pour calculer λ, d'avoir σ aux termes près du premier ordre : or à cause de

$$\sin.\sigma = \sin.(\varphi + \mu)\cos.\lambda',$$

on a, à ce degré de précision,

$$\sin.\sigma_0 = \sin.\varphi\cos.\lambda;$$

par suite

$$\lambda = \lambda_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma_0\sin.\lambda_0\cos.^2\lambda_0\,\mathrm{tang}.\varphi$$

$$\sigma = \sigma_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma_0\cos.\lambda_0\cos.\lambda'\frac{\cos.\varphi}{\cos.\sigma_0}.$$

Maintenant l'on aura l'angle ω exactement en substituant ces valeurs approximatives dans la série (B); puis au même degré de précision, la valeur de λ se déduira de la relation ci-dessus, qui sert de base à notre solution, et celle de σ s'obtiendra en évaluant $\mathrm{tang}.\sigma = \cos.\lambda\,\mathrm{tang}.\omega$; enfin la longueur de la ligne géodésique s se tirera de la série (A) dans laquelle λ et σ seront connus au degré d'exactitude requis.

VII^e cas. *Étant données la latitude* H *du pied de la perpendiculaire et la longitude* φ *de son sommet, trouver les autres parties du triangle.*

Solution. Une des relations (3) donnant

$$\mathrm{tang}.\sigma = \cos.\lambda\,\mathrm{tang}.(\varphi + \mu),$$

en faisant, comme dans la solution du deuxième problème,

$\omega = \varphi + \mu$, il est évident que l'on a

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{d\sigma}{d\mu}\right)\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\sigma}{d\mu^2}\right)\mu^2 + \ldots\ldots$$

et que la valeur de σ_0 se tire de la relation

$$\text{tang.}\,\sigma_0 = \cos.\lambda\,\text{tang.}\,\varphi.$$

Mais d'une part

$$\left(\frac{d\sigma}{d\mu}\right) = \frac{\sin.\,2\,\sigma_0}{\sin.\,2\,\varphi};$$

d'autre part

$$\mu = \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\sigma\cos.\lambda = \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\sigma_0\cos.\lambda,$$

en négligeant les termes du second ordre; partant

$$\sigma = \sigma_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\sigma_0\cos.\lambda\,\frac{\sin.\,2\,\sigma_0}{\sin.\,2\,\varphi}.$$

Maintenant, si l'on introduit cette valeur dans la série (B), il viendra

$$\omega = \varphi + \left(\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^2\lambda\right)\sigma_0\cos.\lambda$$
$$+ \frac{1}{4}\varepsilon^2\sigma_0\cos.^2\lambda\,\frac{\sin.\,2\,\sigma_0}{\sin.\,2\,\varphi} - \frac{1}{32}\varepsilon^2\sin.^2\lambda\cos.\lambda\sin.\,2\,\sigma_0.$$

Connaissant par ce moyen l'angle au pôle sur la sphère inscrite, on aura

$$\text{tang.}\,\lambda' = \text{tang.}\,\lambda\cos.\,\omega, \text{ et } \sin.\mathrm{V}' = \frac{\cos.\lambda}{\cos.\lambda'};$$

puis déterminant σ à l'aide de

$$\text{tang.}\,\sigma = \cos.\lambda\,\text{tang.}\,\omega,$$

on pourra enfin évaluer la ligne géodésique par la série (A).

Indépendamment des sept cas précédents, il en est encore trois qui se résolvent immédiatement par les formules fondamentales du § II : ce sont ceux où l'on connaît dans un triangle sphéroïdique rectangle, 1° H et H'; 2° H et V'; 3° H' et V' : c'est ce que l'on reconnaîtra à la seule inspection de ces formules. Occupons-nous maintenant des problèmes suivants.

§ IV.

Résolution des triangles sphéroïdiques obliquangles.

1^er^ cas. *Étant donnés l'azimut* V' *et les latitudes* H'H'' *des extrémités* M'M'' *de la ligne géodésique* s, *trouver les autres parties du triangle sphéroïdique* M'PM''.

Solution. Après avoir évalué les latitudes réduites $\lambda'\lambda''$ au moyen des relations (1), on calculera la latitude réduite λ du pied M de la perpendiculaire M''M'M à l'aide de cette autre relation

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.V',$$

et les triangles sphériques rectangles $m'pm$, $m''pm$, donneront

$$\cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda}, \quad \cos.\sigma'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda};$$

puis le triangle obliquangle $m'm''p$, donnera

$$\sin.(\omega'' - \omega') = \frac{\sin.(\sigma'' - \sigma')}{\cos.\lambda''} \sin.V'.$$

On connaîtra donc tout ce qu'il faut pour tirer définitivement des séries (A') (B') la valeur de la ligne géodésique s et la différence en longitude φ, et d'une des relations (3) l'azimut V''.

II^e^ cas. *Connaissant la latitude* H′, *l'azimut* V′ *et la longueur* s *de la ligne géodésique; déterminer la latitude* H″, *l'azimut* V″ *et la différence de longitude* φ.

Solution. On commencera par évaluer λ, σ' et ω' au moyen des relations

$$\cos.\lambda=\cos.\lambda'\sin.V',\ \cos.\sigma'=\frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda},\ \tang.\omega'=\frac{\tang.\sigma'}{\cos.\lambda},$$

dans lesquelles λ' est donné par la formule

$$\tang.\lambda'=\frac{b}{a}\tang.H';$$

ensuite on déterminera σ'' en retournant la série (A′) par le procédé suivant déja employé à l'art. 362 du tom. II de la Géodésie.

On tire d'abord de cette série, en n'ayant égard qu'aux quantités du premier et du deuxième ordre,

$$\begin{aligned}\sigma''-\sigma'=&\frac{s}{b}\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda+\frac{7}{64}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\\ &-(\sin.2\sigma''-\sin.2\sigma')\left(\frac{1}{8}\varepsilon\sin.^2\lambda-\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\\ &+(\sin.4\sigma''-\sin.4\sigma')\left(\frac{1}{256}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right),\end{aligned}$$

ou, ordonnant, on a

$$\left.\begin{aligned}\sigma''-\sigma'=&\frac{s}{b}-\varepsilon\left[\frac{1}{4}\frac{s}{b}\sin.^2\lambda+\frac{1}{8}\sin.^2\lambda(\sin.2\sigma''-\sin.2\sigma')\right]\\ &+\varepsilon^2\left[\frac{7}{64}\frac{s}{b}\sin.^4\lambda+\frac{1}{16}\sin.^4\lambda(\sin.2\sigma''-\sin.2\sigma')\right.\\ &\left.+\frac{1}{256}\sin.^4\lambda(\sin.4\sigma''-\sin.4\sigma').\right]\end{aligned}\right\}\ (A'')$$

résultat déja donné par M. Legendre.

On voit donc qu'en général

$$\sigma'' - \sigma' = \frac{s}{b} + P\varepsilon + Q\varepsilon^2 + \ldots\ldots; \qquad (A''')$$

ainsi on aura à fort peu près

$$\sin. 2\sigma'' = \sin. 2\left(\sigma' + \frac{s}{b}\right) + 2P\varepsilon\cos. 2\left(\sigma' + \frac{s}{b}\right)$$

$$\sin. 4\sigma'' = \sin. 4\left(\sigma' + \frac{s}{b}\right);$$

de là

$$\sin. 2\sigma'' - \sin. 2\sigma' = \sin. 2\left(\sigma' + \frac{s}{b}\right) - \sin. 2\sigma' + 2P\varepsilon\cos. 2\left(\sigma' + \frac{s}{b}\right)$$

et

$$\sin. 4\sigma'' - \sin. 4\sigma' = \sin. 4\left(\sigma' + \frac{s}{b}\right) - \sin. 4\sigma',$$

ou bien

$$\sin. 2\sigma'' - \sin. 2\sigma' = 2\cos.\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right)\sin.\frac{s}{b} + 2P\varepsilon\cos. 2\left(\sigma' + \frac{s}{b}\right)$$

$$\sin. 4\sigma'' - \sin. 4\sigma' = 2\cos.\left(4\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\sin. 2\frac{s}{b}.$$

Substituant ces valeurs dans (A'') et comparant la série résultante, terme à terme, à celle hypothétique (A'''), on trouvera

$$P = -\frac{1}{4}\frac{s}{b}\sin.^2\lambda - \frac{1}{4}\sin.^2\lambda\sin.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right);$$

alors éliminant ce coefficient P de la série (A''), il viendra définitivement

$$\left.\begin{aligned}
\sigma'' = \sigma' &+ \frac{s}{b}\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda + \frac{7}{64}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\\
&- \sin.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda - \frac{1}{8}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\\
&+ \frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\\
&+ \sin.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right)\cos.\left(2\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right)\\
&+ \sin. 2\frac{s}{b}\cos.\left(4\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{128}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\right);
\end{aligned}\right\}(A^{\text{IV}})$$

Il s'agit maintenant de passer de cette valeur de σ'' à celles de λ'', ω'', V'', lesquelles seront données par les relations

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.V', \quad \sin.\lambda'' = \sin.\lambda \cos.\sigma'',$$

$$\text{tang}.\omega'' = \frac{\text{tang}.\sigma''}{\cos.\lambda}, \quad \sin.V'' = \frac{\cos.\lambda'}{\cos.\lambda''} \sin.V';$$

et de déduire la différence de longitude φ de la série (B'). De cette manière le problème sera complètement résolu.

Au lieu de passer par la latitude réduite λ'' pour avoir l'azimut V'' on peut obtenir cet angle plus directement ainsi qu'il suit.

Après avoir déterminé λ et σ' au moyen des relations

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.V', \quad \cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda},$$

on évaluera $\sigma'' - \sigma'$ par la série (A^{iv}), et l'on connaîtra de cette manière les quantités dont se compose le second membre de cette formule

$$\cot.V'' = \frac{\text{tang}.\lambda' \sin.(\sigma'' - \sigma') + \cos.V' \cos.(\sigma'' - \sigma')}{\sin.V'}.$$

Si l'on veut au contraire déterminer V'' par la série de Maclaurin, on fera dans la formule actuelle, $\sigma'' - \sigma' = \frac{s}{b} + \tau$, et l'on aura généralement, à cause de la petitesse de τ,

$$V'' = Z + \left(\frac{dV''}{d\tau}\right)\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 V''}{d\tau^2}\right)\tau^2 + \ldots\ldots;$$

alors Z sera la valeur que reçoit V'' lorsque $\tau = 0$. Effectuan les différentiations indiquées, on obtiendra

$$\left(\frac{dV''}{d\tau}\right) = \frac{\sin.^2 Z \left[\cos.V' \sin.\frac{s}{b} - \text{tang}.\lambda' \cos.\frac{s}{b}\right]}{\sin.V'} = M$$

$$\left(\frac{d^2 V''}{d\tau^2}\right) = 2M \cot.Z + \sin.Z \cos.Z = N;$$

et à cause de la série (A^{iv}) dont tous les termes en ε et ε^2 représentent la valeur de τ exacte jusqu'aux quantités du deuxième ordre inclusivement, on aura

$$\begin{aligned} V'' = Z - M.\frac{s}{b}\left(\frac{1}{4}\varepsilon - \frac{7}{64}\varepsilon^2 \sin.^2\lambda\right)\sin^2\lambda \\ - M.\sin.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda\right) \\ + M.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda\right) \\ + M.\sin.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right)\cos.\left(2\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda\right) \\ + M.\sin.2\frac{s}{b}\cos.\left(4\sigma' + 2\frac{s}{b}\right)\left(\frac{1}{128}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda\right) \\ + \frac{1}{32}N.\varepsilon^2 \sin.^4\lambda\left[\frac{s}{b} + \sin.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma' + \frac{s}{b}\right)\right]^2; \end{aligned}$$

série dans laquelle Z a une valeur déduite de la relation

$$\cot. Z = \frac{\tang.\lambda' \sin.\frac{s}{b} + \cos. V' \cos.\frac{s}{b}}{\sin. V'}.$$

III^e cas. *Étant données la ligne géodésique* s *et les latitudes* H′ H″ *de ses extrémités, trouver les azimuts* V″ V′ *et la différence en longitude* φ.

Solution. On déterminera en premier lieu les latitudes réduites $\lambda'\lambda''$, ensuite on aura dans le triangle sphérique obliquangle correspondant au triangle sphéroïdique donné cette relation

$$\sin.\lambda' = \sin.\lambda'' \cos.(\sigma'' - \sigma') + \cos.\lambda'' \sin.(\sigma'' - \sigma') \cos. V'',$$

de laquelle, en faisant $\sigma'' - \sigma' = \sigma$, on tire

$$\cos. V'' = \frac{\sin.\lambda' - \sin.\lambda'' \cos.\sigma}{\cos.\lambda'' \sin.\sigma}.$$

Maintenant soit $\sigma = \frac{s}{b} + \tau$; on aura, en vertu de la série (A″),

$$(D) \quad \tau = -\frac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}\sin.^2\lambda - \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda\left[\frac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.2\sigma'\right]$$
$$+ \frac{1}{128}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\left[14\frac{s}{b} + 16\left(\frac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.2\sigma'\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin.4\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.4\sigma'\right],$$

ou

$$(D) \quad \tau = -\frac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}\sin.^2\lambda - \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda\left[A^{(1)}\right]$$
$$+ \frac{1}{128}\varepsilon^2\sin.^4\lambda\left[14\frac{s}{b} + 16\,A^{(1)} + A^{(2)}\right],$$

lorsque, pour abréger, l'on fait

$$\frac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.2\sigma' = A^{(1)}, \quad \frac{1}{2}\sin.4\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.4\sigma' = A^{(2)}.$$

D'un autre côté la série de Maclaurin donne généralement, en appelant Z la valeur de V″ correspondante à $\tau = 0$,

$$V'' = Z + \left(\frac{dV''}{d\tau}\right)\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V''}{d\tau^2}\right)\tau^2 + \ldots\ldots$$

et en différenciant la relation ci-dessus, il vient, après avoir fait $\tau = 0$, ainsi que l'exige la série précédente,

$$\left(\frac{dV''}{d\tau}\right) = \frac{\cot.Z\cot.\frac{s}{b} - \tang.\lambda''}{\sin.Z} = M,$$

puisqu'alors σ se change en $\frac{s}{b}$ et V″ en Z. Dans ce cas Z est donné par l'équation

$$\cos.Z = \frac{\sin.\lambda' - \sin.\lambda''\cos.\frac{s}{b}}{\cos.\lambda''\sin.\frac{s}{b}};$$

ainsi l'on a, en ne conservant que les termes du premier ordre,

$$V'' = Z + M\tau.$$

Mais cet angle azimutal ne pourra réellement être évalué qu'autant que les éléments qui entrent dans l'expression de τ seront déterminés avec une exactitude convenable. Cherchons donc λ et remarquons qu'à cause de

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda'' \sin.V'' = \cos.\lambda'' \sin.(Z + M\tau),$$

on a, en désignant par λ_0 ce que devient λ lorsque $\tau = 0$,

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda_0 + M\tau \cos.\lambda_0 \cot.Z;$$

expression dans laquelle $\cos.\lambda_0 = \cos.\lambda'' \sin.Z$. De là

$$\lambda = \lambda_0 - M\tau \cot.\lambda_0 \cot.Z = \lambda_0 - u.$$

D'un autre côté

$$\cos.\sigma'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda} = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.(\lambda_0 - u)};$$

ainsi faisant $\cos.\sigma_0'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda_0}$, on aura

$$\cos.\sigma'' = \cos.\sigma_0'' + M\tau \cot.^2\lambda_0 \cos.\sigma_0'' \cot.Z$$

et

$$\sigma'' = \sigma_0'' - M\tau \cot.^2\lambda_0 \cot.\sigma_0'' \cot.Z.$$

Il est évident qu'on a pareillement $\cos.\sigma_0' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda_0}$, et

$$\sigma' = \sigma_0' - M\tau \cot.^2\lambda_0 \cot.\sigma_0' \cot.Z;$$

ainsi, d'une part,

$$\sin.\lambda = \sin.\lambda_0 - M\tau \cot.\lambda_0 \cos.\lambda_0 \cot.Z$$
$$\sin.^2\lambda = \sin.^2\lambda_0 - 2M\tau \cos.^2\lambda_0 \cot.Z.$$

D'autre part

$$\sin.2\sigma' = \sin.2\sigma_0' - 2M\tau \cot.^2\lambda_0 \cot.Z \cot.\sigma_0' \cos.2\sigma_0'$$
$$\sin.2\sigma'' = \sin.2\sigma_0'' - 2M\tau \cot.^2\lambda_0 \cot.Z \cot.\sigma_0'' \cos.2\sigma_0'';$$

par suite, et en vertu de la notation adoptée dans le problème précédent,

$$\tfrac{1}{2}(\sin. 2\sigma'' - \sin. 2\sigma') = A_0^{(1)}$$
$$- M\tau \cot.^2\lambda_0 \cot. Z[\cot. \sigma''_0 \cos. 2\sigma_0'' - \cot. \sigma_0' \cos. 2\sigma_0'].$$

Telles sont les valeurs à substituer dans la série (D); mais il faudra de plus mettre dans le second membre pour τ sa valeur approchée $\tau = -\frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda_0 \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]$, dans laquelle $A_0^{(1)}$ exprime, par abréviation, le binome $\frac{1}{2}\sin. 2\sigma_0'' - \frac{1}{2}\sin. 2\sigma_0'$. On trouvera définitivement, en n'ayant toujours égard qu'aux termes du premier et du second ordre en ε,

$$\begin{aligned}\sigma = \sigma'' - \sigma' = \frac{s}{b} - \frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda_0 \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right] \\ - \frac{1}{16}\varepsilon^2 M \sin.^2\lambda_0 \cos.^2\lambda_0 \cot. Z \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right] \times \\ \left[2\left(\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right) + \cot. \sigma_0'' \cos. 2\sigma_0'' - \cot. \sigma_0' \cos. 2\sigma_0'\right] \\ + \frac{1}{128}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda_0 \left[14\frac{s}{b} + 16 A_0^{(1)} + A_0^{(2)}\right]:\end{aligned}$$

alors $\sigma'' - \sigma'$ étant connu par cette série, il ne s'agira plus que d'évaluer V'' au moyen de la relation

$$\cos. V'' = \frac{\sin. \lambda' - \sin. \lambda'' \cos. \sigma}{\cos. \lambda'' \sin. \sigma},$$

c'est-à-dire de trouver un angle d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés.

Mais l'on peut avoir directement V'' en évaluant le coefficient différentiel $\left(\frac{d^2 V''}{d\tau^2}\right)$ de la série ci-dessus, et poussant le développement jusqu'aux quantités du second ordre. D'abord on obtient

$$\left(\frac{d^2 V''}{d\tau^2}\right) = -\cot. Z\left[\operatorname{cosec.}^2\frac{s}{b} + \left(\frac{dV''}{d\tau}\right)\operatorname{tang.} Z \cot.\frac{s}{b} + \left(\frac{dV''}{d\tau}\right)^2\right];$$

Puis si l'on substitue dans la série (D) pour $\sin.^2\lambda$, $\sin. 2\sigma''$, $\sin. 2\sigma'$ et τ leurs valeurs données plus haut, on aura

$$\begin{aligned}\tau = &-\frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda_0\left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]\\ &-\frac{1}{16}\varepsilon^2 M \sin.^2\lambda_0 \cos.^2\lambda_0 \cot. Z\left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right] \times\\ &\qquad\left[2\left(\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right) + \cot.\sigma_0''\cos. 2\sigma_0'' - \cot.\sigma_0'\cos. 2\sigma_0'\right]\\ &+\frac{1}{128}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda_0\left[14\frac{s}{b} + 16 A_0^{(1)} + A_0^{(2)}\right];\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\tau^2 = \frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda_0\left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]^2.$$

Les trois premiers termes de V'' sont donc connus maintenant. Quant à l'azimut V', il se déduira de

$$\frac{\sin. V'}{\sin. V''} = \frac{\cos.\lambda''}{\cos.\lambda'},$$

et l'angle φ s'obtiendra par le moyen des équations (2) (3) du § II, et de la série (B').

Occupons-nous de la recherche plus immédiate de l'angle φ, et dans ce but déterminons d'abord l'angle correspondant sur la sphère inscrite, savoir l'angle $\omega = \omega'' - \omega'$.

De la relation

$$\cos.\left(\frac{s}{b} + \tau\right) = \sin.\lambda' \sin.\lambda'' + \cos.\lambda' \cos.\lambda'' \cos.\omega,$$

on tire, en faisant $\tau = 0$,

$$\cos.\omega_0 = \frac{\cos.\frac{s}{b} - \sin.\lambda' \sin.\lambda''}{\cos.\lambda' \cos.\lambda''} ;$$

et l'on a en outre, dans la même circonstance,

$$\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right) = \frac{\sin.\frac{s}{b}}{\cos.\lambda' \cos.\lambda'' \sin.\omega_0} = \mathrm{P},$$

$$\left(\frac{d^2\omega}{d\tau^2}\right) = \cot.\frac{s}{b}\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right) - \cot.\omega_0\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2 = \mathrm{Q}.$$

Maintenant si l'on fait attention à la valeur précédente de τ prolongée jusqu'aux termes du deuxième ordre inclusivement, et à ce que généralement

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)\tau + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\omega}{d\tau^2}\right)\tau^2 + \ldots\ldots$$

on aura, en quantités connues,

$$\begin{aligned}\omega = \omega_0 &- \frac{1}{4}\mathrm{P}\varepsilon \sin.^2\lambda_0 \left[\frac{s}{b} + \mathrm{A}_0^{(1)}\right] \\ &- \frac{1}{16}\varepsilon^2 \mathrm{MP} \sin.^2\lambda_0 \cos.^2\lambda_0 \cot.\mathrm{Z}\left[\frac{s}{b} + \mathrm{A}_0^{(1)}\right] \times \\ &\left[2\left(\frac{s}{b} + \mathrm{A}_0^{(1)}\right) + \cot.\sigma_0'' \cos.2\sigma_0'' - \cot.\sigma_0' \cos.2\sigma_0'\right] \\ &+ \frac{1}{128}\mathrm{P}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda_0\left[14\frac{s}{b} + 16\,\mathrm{A}_0^{(1)} + \mathrm{A}_0^{(2)}\right] \\ &+ \frac{1}{32}\mathrm{Q}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda_0\left[\frac{s}{b} + \mathrm{A}_0^{(1)}\right]^2.\end{aligned}$$

Après avoir trouvé ω on déduira φ de la série (B') dans laquelle on aura mis pour λ, σ', σ'' leurs valeurs approximatives obtenues ci-dessus.

IV^e^ CAS. *Les quantités connues sont* H′ V″ *et* s, *trouver* H″ V′ *et* φ; *c'est-à-dire étant donnés deux côtés et l'angle opposé à l'un deux, trouver les autres parties du triangle.*

SOLUTION. De la latitude vraie H′ on passera à la latitude réduite λ'; et si, pour abréger, l'on fait, comme ci-dessus, $\sigma = \frac{s}{b} + \tau$, le triangle sphérique correspondant au triangle sphéroïdique donnera

$$\sin.\lambda' = \sin.\lambda''\cos.\left(\frac{s}{b}+\tau\right) + \cos.\lambda''\sin.\left(\frac{s}{b}+\tau\right)\cos.\mathrm{V}''.$$

Différenciant en faisant varier λ'' et τ, puis représentant par L″ ce que devient λ'' lorsque $\tau = 0$, on aura

$$\left(\frac{d\lambda''}{d\tau}\right) = \frac{\operatorname{tang.}\mathrm{L}''\operatorname{tang.}\frac{s}{b} - \cos.\mathrm{V}''}{1 - \operatorname{tang.}\mathrm{L}''\cos.\mathrm{V}''\operatorname{tang.}\frac{s}{b}} = \mathrm{M}.$$

Quant à la valeur de L″ elle se tirera évidemment de la relation

$$\sin.\lambda' = \sin.\mathrm{L}''\cos.\frac{s}{b} + \cos.\mathrm{L}''\sin.\frac{s}{b}\cos.\mathrm{V}'',$$

qui fournira nécessairement deux valeurs. On voit donc qu'en général

$$\lambda'' = \mathrm{L}'' + \left(\frac{d\lambda''}{d\tau}\right)\tau + \ldots\ldots = \mathrm{L}'' + \mathrm{M}\tau + \ldots\ldots$$

D'un autre côté, à cause de $\cos.\lambda = \cos.\lambda''\sin.\mathrm{V}''$, on a

$$\cos.\lambda = \cos.(\mathrm{L}'' + \mathrm{M}\tau)\sin.\mathrm{V}'':$$

ainsi en appelant λ_0 la valeur de λ correspondante à $\tau = 0$, on trouve, aux quantités près du second ordre, et parce que $\cos.\lambda_0 = \cos.\mathrm{L}''\sin.\mathrm{V}''$, on trouve, disons-nous

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda_0 - \mathrm{M}\tau\cos.\lambda_0\operatorname{tang.}\mathrm{L}'',$$

par suite

$$\lambda = \lambda_0 + M\tau \cot.\lambda_0 \operatorname{tang}.L'';$$

et comme $\cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda}$, il s'ensuit qu'en éliminant λ au moyen de sa valeur on a, au même degré de précision,

$$\cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda_0}(1 - M\tau \cot.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L'').$$

Désignant également par σ_0' ce que devient σ' lorsque $\tau = 0$, on aura $\cos.\sigma_0' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda_0}$, et

$$\cos.\sigma' = \cos.\sigma_0' - M\tau \cos.\sigma_0' \cot.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L'',$$

de là

$$\sigma' = \sigma_0' + M\tau \cot.^2\lambda_0 \cot.\sigma_0' \operatorname{tang}.L''.$$

D'un autre côté, à cause de $\sin.\sigma'' = \cot.\lambda \cot.V''$, on trouve, en substituant pour λ sa valeur ci-dessus,

$$\sin.\sigma'' = \frac{\cot.V''}{\operatorname{tang}.\lambda_0}(1 - M\tau \operatorname{cosec}.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L'');$$

et si σ_0'' représente σ'' lorsque $\tau = 0$, on aura

$$\sin.\sigma_0'' = \cot.V'' \cot.\lambda_0$$
$$\sin.\sigma'' = \sin.\sigma_0'' - M\tau \operatorname{tang}.L'' \operatorname{cosec}.^2\lambda_0 \sin.\sigma_0'';$$

par suite

$$\sigma'' = \sigma_0'' - M\tau \operatorname{tang}.L'' \operatorname{cosec}.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.\sigma_0''.$$

Concluons de là que

$$\sin.2\sigma' = \sin.2\sigma_0' + 2M\tau \cot.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L'' \cot.\sigma_0' \cos.2\sigma_0'$$
$$\sin.2\sigma'' = \sin.2\sigma_0'' - 2M\tau \operatorname{cosec}.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L'' \operatorname{tang}.\sigma_0'' \cos.2\sigma_0'',$$
$$A^{(1)} = A_0^{(1)} - 2M\tau \operatorname{cosec}.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L''[\operatorname{tang}.\sigma_0'' \cos.2\sigma_0'' + \cos.^2\lambda_0 \cot.\sigma_0' \cos.2\sigma_0'],$$

en vertu de la notation employée dans le problème précédent. De plus

$$\sin.\lambda = \sin.\lambda_0 + M\tau \cot.\lambda_0 \cos.\lambda_0 \,\text{tang.}\, L''$$
$$\sin.^2\lambda = \sin.^2\lambda_0 + 2M\tau \cos.^2\lambda_0 \,\text{tang.}\, L''.$$

Introduisant ces valeurs dans la série (A″), il viendra d'abord

$$\sigma = \frac{s}{b} - \frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda \left[\frac{s}{b} + A^{(1)}\right] + \frac{1}{128}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda \left[14\frac{s}{b} + 16A^{(1)} + A^{(2)}\right],$$

puis faisant attention que $\tau = -\frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda_0 \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]$, aux quantités près du second ordre; on aura définitivement

$$\sigma = \frac{s}{b} - \frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda_0 \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right] + \frac{1}{8}\varepsilon^2 M \sin.^2\lambda_0 \cos.^2\lambda_0 \,\text{tang.}L'' \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]^2$$
$$- \frac{1}{16}\varepsilon^2 M \sin.^2\lambda_0 \,\text{tang.}\, L'' \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right] \times$$
$$\left[\text{tang.}\,\sigma_0'' \cos.2\sigma_0'' + \cos.^2\lambda_0 \cot.\sigma' \cos.2\sigma_0'\right]$$
$$+ \frac{1}{128}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda_0 \left[14\frac{s}{b} + 16A_0^{(1)} + A_0^{(2)}\right].$$

Cette valeur étant trouvée, on déterminera celle de λ à l'aide de la relation d'où nous sommes partis; enfin les formules (2) (3) et (B′) du § II feront connaître la latitude réduite λ'' et la longitude φ.

La valeur exacte de τ étant représentée dans la série précédente, par tous les termes en ε et ε^2, il suffirait de l'introduire dans celle de λ'' donnée elle-même en série qu'on prolongerait alors jusqu'aux termes du second ordre. Dans ce cas l'on aurait

$$\left(\frac{d^2\lambda''}{d\tau^2}\right) = \left\{\left(\frac{d\lambda''}{d\tau}\right)\frac{\text{tang.}\frac{s}{b}}{\cos.^2 L''} + \frac{\text{tang.}\, L''}{\cos.^2\frac{s}{b}}\right\}\left\{\frac{1 + \cos.V''\left(\frac{d\lambda''}{d\tau}\right)}{1 - \text{tang.}\, L'' \cos.V'' \,\text{tang.}\frac{s}{b}}\right\},$$

et

$$\tau^2 = \frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin.^4 \lambda_0 \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]^2.$$

Mais vu la forme compliquée du coefficient différentiel du second ordre, il est préférable, dans la pratique, de déterminer λ'' ainsi que nous venons de l'indiquer.

Pour avoir directement sur la sphère inscrite l'angle au pôle $\omega = \omega'' - \omega'$, on partirait de l'équation

$$\sin.\omega = \frac{\sin.\left(\frac{s}{b} + \tau\right)\sin.V''}{\cos.\lambda'},$$

qui donneront pour valeurs correspondantes à $\tau = 0$,

$$\sin.\omega_0 = \frac{\sin.\frac{s}{b}\sin.V''}{\cos.\lambda'}$$

$$\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right) = \frac{\cos.\frac{s}{b}\sin.V''}{\cos.\omega_0\cos.\lambda'} = \text{tang.}\,\omega_0 \cot.\frac{s}{b} = P$$

$$\left(\frac{d^2\omega}{d\tau^2}\right) = \left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2 \text{tang.}\,\omega_0 - \text{tang.}\,\omega_0 = Q,$$

et l'on aurait

$$\omega = \omega_0 + P\tau + \tfrac{1}{2}Q\tau^2.$$

Cet angle ω étant trouvé on aura l'angle φ qui lui correspond sur l'ellipsoïde, par la série (B′) dans laquelle tous les éléments seront connus, puisque λ, σ', σ'' viennent d'être calculés approximativement.

V^e^ CAS. *Étant donnés la ligne géodésique* s *et ses deux azimuts* V′ V″, *trouver les autres parties du triangle.*

SOLUTION. Supposons qu'on veuille d'abord déterminer la latitude réduite λ', on aura dans le triangle sphérique substitué au triangle sphéroïdique donné,

$$\text{tang.}\,\lambda' = \frac{\text{cot. V}''\,\text{sin. V}' - \text{cos.}\,\sigma\,\text{cos. V}'}{\text{sin.}\,\sigma},$$

en faisant, comme ci-dessus $\sigma'' - \sigma' = \sigma$. D'un autre côté on sait, par le théorème précédent, que $\sigma = \frac{s}{b} + \tau$, et que

$$\tau = -\frac{1}{4}\varepsilon\,\text{sin.}^2\lambda\left[\frac{s}{b} + A^{(1)}\right] + \frac{1}{128}\varepsilon^2\,\text{sin.}^4\lambda\left[14\frac{s}{b} + 16A^{(1)} + A^{(2)}\right];$$

par conséquent

$$\text{tang.}\,\lambda' = \frac{\text{cot. V}''\,\text{sin. V}' - \text{cos. V}'\,\text{cos.}\left(\frac{s}{b} + \tau\right)}{\text{sin.}\left(\frac{s}{b} + \tau\right)}.$$

Il est donc évident que si L' est ce devient λ' lorsque $\tau = 0$, on a, en général,

$$\lambda' = \text{L}' + \left(\frac{d\lambda'}{d\tau}\right)\tau + \ldots\ldots$$

Pour trouver le coefficient différentiel $\left(\frac{d\lambda'}{d\tau}\right)$, le seul qu'il soit nécessaire d'évaluer quand on ne veut pas prolonger la série qui doit donner σ, au-delà des termes du second ordre, on opérera sur la relation

$$\text{cot. V}'' = \frac{\text{tang.}\,\lambda'\,\text{sin.}\left(\frac{s}{b} + \tau\right) + \text{cos. V}'\,\text{cos.}\left(\frac{s}{b} + \tau\right)}{\text{sin. V}'},$$

en faisant varier λ' et τ, et l'on trouvera

$$\left(\frac{d\lambda'}{d\tau}\right) = \text{cos.}^2\text{L}'\,\text{cos. V}' - \text{sin. L}'\,\text{cos. L}'\,\text{cot.}\frac{s}{b} = \text{M};$$

expression dans laquelle

$$\text{tang.}\,L' = \frac{\cot.\,V''\sin.\,V' - \cos.\,V'\cos.\frac{s}{b}}{\sin.\frac{s}{b}}.$$

Ayant maintenant recours à la relation $\cos.\lambda = \cos.\lambda'\sin.V'$, on aura, à cause de $\lambda' = L' + M\tau$ et de $\cos.\lambda_0 = \cos.L'\sin.V'$, cette valeur approchée

$$\lambda = \lambda_0 + M\tau\cot.\lambda_0\,\text{tang.}\,L',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin.\lambda = \sin.\lambda_0 + M\tau\cos.\lambda_0\cot.\lambda_0\,\text{tang.}\,L';$$

par suite

$$\sin.^2\lambda = \sin.^2\lambda_0 + 2M\tau\cos.^2\lambda_0\,\text{tang.}\,L'.$$

On sait en outre que

$$\sin.\sigma' = \cot.\lambda\cot.\,V', \quad \sin.\sigma'' = \cot.\lambda\cot.\,V'';$$

ainsi en remplaçant λ par sa valeur ci-dessus, et remarquant que

$$\sin.\sigma_0' = \cot.\,V'\cot.\lambda_0, \quad \sin.\sigma_0'' = \cot.\,V''\cot.\lambda_0,$$

on obtiendra aisément

$$\sigma' = \sigma_0' - M\tau\,\text{cosec.}^2\lambda_0\,\text{tang.}\sigma_0'\,\text{tang.}\,L'$$
$$\sigma'' = \sigma_0'' - M\tau\,\text{cosec.}^2\lambda_0\,\text{tang.}\sigma_0''\,\text{tang.}\,L';$$

par suite

$$A^{(1)} = A_0^{(1)} - M\tau\,\text{cosec.}^2\lambda_0\,\text{tang.}\,L'\left[\text{tang.}\sigma_0''\cos.2\sigma_0'' - \text{tang.}\sigma_0'\cos.2\sigma_0'\right].$$

Il reste à substituer dans la série σ du problème précédent, pour $\sin.^2\lambda$ et $\frac{1}{2}(\sin.2\sigma'' - \sin.2\sigma') = A^{(1)}$, etc. leurs valeurs, à éliminer ensuite $\tau = -\frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0\left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]$, et à développer en ne retenant, comme à l'ordinaire, que les termes en ε et ε^2. Effectuant ces opérations, on aura pour résultat,

$$\sigma = \frac{s}{b} - \frac{1}{4}\varepsilon \sin.^2\lambda_0\left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right] - \frac{1}{8}\varepsilon^2 M \sin.^2\lambda_0 \cos.^2\lambda_0 \operatorname{tang.} L'\left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]^2$$
$$+ \frac{1}{16}\varepsilon^2 M \sin.^2\lambda_0 \operatorname{tang.} L'\left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]\left[\operatorname{tang.}\sigma_0'' \cos.2\sigma_0'' - \operatorname{tang.}\sigma_0' \cos.2\sigma_0'\right]$$
$$+ \frac{1}{128}\varepsilon^2 \sin.^4\lambda_0\left[14\frac{s}{b} + 16 A_0^{(1)} + A_0^{(2)}\right].$$

Enfin de cette valeur on passera à celle de tang. λ' que donnera la relation ci-dessus; après quoi les autres parties du triangle s'obtiendront sans difficulté.

Il est évident qu'on prolongerait la série qui donne λ' comme on l'a fait dans le problème précédent pour avoir directement λ''.

VI^e cas. *Connaissant la latitude* H'', *l'azimut* V'' *en ce point et la différence* φ *de longitude des extrémités de la ligne géodésique* s *inconnue, résoudre le triangle.*

Solution. Faisons pour abréger $\omega'' - \omega' = \omega$, et désignons par μ tous les termes en ε dans la série (B') du § II; on aura

$$\mu = (\sigma'' - \sigma')\left[\left(\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{8}\varepsilon^2\right)\cos.\lambda - \frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin.^2\lambda \cos.\lambda\right]$$
$$- \frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin.^2\lambda \cos.\lambda\left[\frac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.2\sigma'\right],$$

et

$$\omega = \varphi + \mu.$$

On sait d'ailleurs que le triangle sphérique, correspondant au triangle sphéroïdique, donne

$$\cos.V''\sin.\omega + \sin.V''\sin.\lambda''\cos.\omega = \sin.V''\cos.\lambda''\operatorname{tang.}\lambda',$$

d'où

$$\text{tang.}\,\lambda' = \frac{\sin.(\varphi+\mu) + \text{tang.}\,V''\sin.\lambda''\cos.(\varphi+\mu)}{\text{tang.}\,V''\cos.\lambda''}.$$

Si donc L' est ce que devient λ' lorsque $\mu = 0$, on aura

$$\text{tang.}\,L' = \frac{\sin.\varphi + \text{tang.}\,V''\sin.\lambda''\cos.\varphi}{\text{tang.}\,V''\cos.\lambda''};$$

et comme en général

$$\lambda' = L' + \left(\frac{d\lambda'}{d\mu}\right)\mu + \ldots\ldots,$$

que d'ailleurs

$$\left(\frac{d\lambda'}{d\mu}\right) = \frac{\cos.^2 L'[\cos.\varphi - \text{tang.}\,V''\sin.\lambda''\sin.\varphi]}{\text{tang.}\,V''\cos.\lambda''} = M,$$

il s'ensuit qu'on a

$$\lambda' = L' + M\mu + \ldots\ldots$$

Remarquons en outre que $\cos.\lambda = \cos.\lambda''\sin.V''$, et qu'à cause de $\cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda}$, on a

$$\cos.\sigma' = \cos.\sigma_0' + M\mu\cot.L'\cos.\sigma_0',$$

en faisant $\cos.\sigma_0' = \frac{\sin.L'}{\sin.\lambda}$; partant

$$\sigma' = \sigma'_0 - M\mu\cot.L'\cot.\sigma_0'.$$

D'un autre côté σ'' se tire de la relation $\cos.\sigma'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda}$; de là

$$\sigma'' - \sigma' = \sigma'' - \sigma_0' + M\mu\cot.L'\cot.\sigma_0'.$$

Substituant cette valeur dans celle de ω, il vient

$$\begin{aligned}\omega = \varphi &+ \left[\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{1}{16}\varepsilon^2(6+\sin.^2\lambda)\right](\sigma''-\sigma_0')\cos.\lambda \\ &+ \tfrac{1}{4}\varepsilon M\cos.^2\lambda\cot.L'\cot.\sigma_0'.(\sigma''-\sigma_0') \\ &- \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^2\cos.\lambda\sin.(\sigma''-\sigma_0')\cos.(\sigma''+\sigma_0').\end{aligned}$$

Ayant de cette manière la valeur de ω développée jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement, on passera à celle de λ' qui se tirera de la relation

$$\text{tang.}\,\lambda' = \frac{\sin.\omega + \text{tang.}\,V''\sin.\lambda''\cos.\omega}{\text{tang.}\,V''\cos.\lambda''};$$

plus l'on aura

$$\text{tang.}\,H' = \frac{a}{b}\,\text{tang.}\,\lambda'.$$

Quant à la ligne géodésique s, à l'azimut V' et à la latitude λ'', on en obtiendra les valeurs à l'aide des formules (2), (3), (A') du § II.

Si l'on veut maintenant prolonger la série qui donne λ', rien n'est plus facile; car la valeur exacte de μ est donnée par l'ensemble des termes en ε et ε^2 dans celle de ω, et l'on a d'ailleurs

$$\left(\frac{d^2\lambda'}{d\mu^2}\right) = -2\left(\frac{d\lambda'}{d\mu}\right)^2 \text{tang.}\,L' - \sin.L'\cos.L'$$
$$\mu^2 = \tfrac{1}{4}\varepsilon^2(\sigma'' - \sigma_0')^2\cos.^2\lambda.$$

VII^e^ CAS. *Étant données les latitudes* H' H'' *des extrémités de la ligne de plus courte distance* s *et la différence en longitude* φ, *trouver cette ligne et les angles qu'elle fait avec les deux autres côtés du triangle sphéroïdique.*

SOLUTION. Soit, comme dans le problème précédent, $\omega'' - \omega' = \omega$ la différence de longitude sur la sphère inscrite; la série (B') donnera, en désignant par μ tous les termes en ε et ε^2

$$\omega = \varphi + \mu;$$

et si l'on considère le triangle sphérique correspondant au triangle à résoudre, on aura, en appelant z' l'angle intérieur formé par le côté s et le méridien de λ',

$$(\mathrm{E}) \qquad \text{tang.}\, z' = \frac{\sin.(\varphi + \mu)}{\cos.\lambda' \,\text{tang.}\,\lambda'' - \sin.\lambda' \cos.(\varphi + \mu)}.$$

Il est donc évident que si Z est la valeur de z' lorsque $\mu = 0$, on aura

$$z' = \mathrm{Z} + \left(\frac{dz'}{d\mu}\right)\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z'}{d\mu^2}\right)\mu^2 + \ldots\ldots$$

Pour tirer de la relation précédente la valeur des coefficients différentiels, on prendra d'abord celle de tang. λ'', ensuite on la différenciera par rapport à z' et μ, et après avoir fait $\mu = 0$, on trouvera

$$\left(\frac{dz'}{d\mu}\right) = \cot.\varphi \sin.\mathrm{Z} \cos.\mathrm{Z} - \sin.\lambda' \sin.^2 \mathrm{Z} = \mathrm{M},$$

puisque z' se change en Z; et alors on aura

$$(\mathrm{E}') \qquad \text{tang.}\,\mathrm{Z} = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\lambda' \,\text{tang.}\,\lambda'' - \sin.\lambda' \cos.\varphi}:$$

ainsi donc

$$z' = \mathrm{Z} + \mathrm{M}\mu.$$

Nous négligeons, comme de coutume, les autres termes de la série qui sont inutiles, vu que, dans le résultat cherché, nous bornons le degré d'approximation aux termes du second ordre en ε^2.

Si nous prenons maintenant la relation $\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.z'$, on aura

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.(\mathrm{Z} + \mathrm{M}\mu),$$

d'où il est facile de conclure que

$$\lambda = \lambda_0 - \mathrm{M}\mu \cot.\lambda_0 \cot.\mathrm{Z} = \lambda_0 - u',$$

et

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda_0 + M\mu\cos.\lambda_0\cot.Z,$$

lorsque $\cos.\lambda_0 = \cos.\lambda'\sin.Z$.

De plus, à cause de la relation

$$\cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda} = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.(\lambda_0 - u')},$$

on trouve, par le même procédé,

$$\sigma' = \sigma_0' - M\mu\cot.\sigma_0'\cot.^2\lambda_0\cot.Z,$$

lorsqu'on fait $\cos.\sigma_0' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda_0}$. On a pareillement

$$\sigma'' = \sigma_0'' - M\mu\cot.\sigma_0''\cot.^2\lambda_0\cot.Z$$

et par suite

$$\sigma'' - \sigma' = \sigma_0'' - \sigma_0' + M\mu\cot.^2\lambda_0\cot.Z\frac{\sin.(\sigma_0'' - \sigma_0')}{\sin.\sigma_0''\sin.\sigma_0'}.$$

Il ne reste plus qu'à mettre dans (B') pour $\cos.\lambda$ et $\sigma'' - \sigma'$ les valeurs qu'on vient de trouver, puis à remplacer μ par sa valeur approchée $\mu = (\sigma_0'' - \sigma_0')(\frac{1}{2}\varepsilon\cos.\lambda_0)$, et ensuite à développer en ne conservant que les deux premières puissances de ε : on obtiendra en définitive

$$(F)\quad \begin{aligned} \omega = \varphi &+ (\sigma_0'' - \sigma_0')\left[\frac{1}{2}\varepsilon\cos.\lambda_0 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\cos.\lambda_0(6 + \sin.^2\lambda_0)\right] \\ &- \frac{1}{32}\varepsilon^2\sin.^2\lambda_0\cos.\lambda_0(\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0') \\ &+ \frac{1}{4}\varepsilon^2 M(\sigma_0'' - \sigma_0')\cos.^2\lambda_0\cot.^2\lambda_0\cot.Z\frac{\sin.(\sigma_0'' - \sigma_0')}{\sin.\sigma_0''\sin.\sigma_0'} \\ &+ \frac{1}{4}\varepsilon^2 M(\sigma_0'' - \sigma_0')^2\cos.^2\lambda_0\cot.Z. \end{aligned}$$

Dans cette série, les quatre quantités $Z, \lambda_0, \sigma_0', \sigma_0''$ sont connues par ce qui précède.

63.

Ayant obtenu ainsi la valeur de $\omega = \omega'' - \omega'$, on calculera celle de z' au moyen de cette relation

$$\text{tang.} z' = \frac{\sin.\omega}{\cos.\lambda' \text{tang.}\lambda'' - \sin.\lambda' \cos.\omega};$$

puis l'on aura exactement

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin.z', \quad \cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda}, \quad \cos.\sigma'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda}.$$

Enfin la plus courte distance s cherchée se tirera de la formule (A') dans laquelle tous les termes du second membre seront connus au degré d'exactitude requis, et l'azimut V'' sera donné par cette relation

$$\sin.V'' = \frac{\cos.\lambda'}{\cos.\lambda''} \sin.V' = \frac{\cos.\lambda'}{\cos.\lambda''} \sin.z',$$

puisque $V' = 180° - z'$.

En prolongeant jusqu'aux termes du second ordre inclusivement la série qui représente la valeur de z', on trouverait pour celle du coefficient différentiel $\left(\frac{d^2 z'}{d\mu^2}\right)$ la suivante :

$$\left(\frac{d^2 z'}{d\mu^2}\right) = \left(\frac{dz'}{d\mu}\right)(\cot.\varphi \cos.2Z - \sin.2Z \sin.\lambda') - \frac{1}{2} \frac{\sin.2Z}{\sin.^2\varphi} = N;$$

ainsi

$$z' = Z + M\mu + \tfrac{1}{2} N \mu^2,$$

ayant soin ici de mettre pour μ sa valeur exacte

$$\mu = (\sigma'' - \sigma')\left[\frac{1}{2}\varepsilon \cos.\lambda - \frac{1}{16}\varepsilon^2 \cos.\lambda (6 + \sin.^2\lambda)\right]$$
$$- \frac{1}{16}\varepsilon^2 \sin.^2\lambda \cos.\lambda \left[\frac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.2\sigma'\right],$$

laquelle s'obtiendra, en quantités connues, en y substituant pour $\sigma'' - \sigma'$ et $\cos.\lambda$ leurs valeurs approchées données ci-dessus. Toute opération faite on trouvera directement

$$z' = Z + M(\sigma_0'' - \sigma_0')\left[\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon^2(6 + \sin.^2\lambda_0)\right]\cos.\lambda_0$$

$$- \frac{1}{32}\varepsilon^2 M \sin.^2\lambda_0 \cos.\lambda_0 (\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0')$$

$$+ \frac{1}{4}\varepsilon^2 M^2(\sigma_0'' - \sigma_0')\cos.^2\lambda_0 \cot.Z\left[\sigma_0'' - \sigma_0' + \cot.^2\lambda_0 \frac{\sin.(\sigma_0'' - \sigma_0')}{\sin.\sigma_0''\sin.\sigma_0'}\right]$$

$$+ \frac{1}{8}\varepsilon^2 N \cos.^2\lambda_0(\sigma_0'' - \sigma_0')^2.$$

Soit qu'on procède de la sorte pour calculer exactement z', soit qu'on emploie la méthode trigonométrique ci-dessus, on parviendra au même résultat numérique.

Si l'on voulait déterminer la ligne géodésique s indépendamment de la valeur exacte de z', on déduirait d'abord l'arc $\sigma = \sigma'' - \sigma'$ de la relation

$$\cos.\sigma = \sin.\lambda''\sin.\lambda' + \cos.\lambda''\cos.\lambda'\cos.\omega,$$

dans laquelle on prendrait pour ω sa valeur trouvée ci-dessus; puis l'on aurait recours aux valeurs approchées de $\lambda, \sigma', \sigma''$ obtenues plus haut, lesquelles donnent

$$\sin.^2\lambda = \sin.^2\lambda_0 - 2M\mu\cos.^2\lambda_0\cot.Z$$
$$\sin.2\sigma' = \sin.2\sigma_0' - 2M\mu\cot.\sigma_0'\cos.2\sigma_0'\cot.Z\cot.^2\lambda_0$$
$$\sin.2\sigma'' = \sin.2\sigma_0'' - 2M\mu\cot.\sigma_0''\cos.2\sigma_0''\cot.Z\cot.^2\lambda_0,$$

et où l'on a

$$\mu = (\sigma_0'' - \sigma_0')\left[\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos.\lambda_0\right];$$

enfin l'on introduirait le tout dans la série (A') qui donnerait alors la ligne cherchée. Si l'on effectue cette opération, et qu'on ne retienne, comme de coutume, que les termes du premier et du second ordre; que de plus on fasse pour abréger

$\frac{1}{2}(\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0') = A_0^{(1)}$, et $\frac{1}{2}(\sin.4\sigma_0'' - \sin.4\sigma_0') = A_0^{(2)}$, on trouvera en dernière analyse

$$\begin{aligned}\frac{s}{b} = \sigma'' - \sigma' + \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0[\sigma'' - \sigma' + A_0^{(1)}] \\ - \frac{1}{4}M\varepsilon^2(\sigma'' - \sigma')\cos.^3\lambda_0\cot.Z[\sigma'' - \sigma' + A_0^{(1)} \\ + \tfrac{1}{2}(\cot.\sigma_0''\cos.2\sigma_0'' - \cot.\sigma_0''\cos.2\sigma_0')] \\ - \frac{1}{16}\varepsilon^2\sin.^4\lambda_0\left[\frac{3}{4}(\sigma'' - \sigma') + A_0^{(1)} + \frac{1}{8}A_0^{(2)}\right].\end{aligned}$$

Nous avons donné à la fin de ce Mémoire une application numérique de la première solution de ce problème.

VIII^{e} CAS. *Les éléments connus du triangle sphéroïdique sont* H′V″ *et* φ, *on demande la latitude* H″ *et les autres parties de ce triangle.*

SOLUTION. Après avoir calculé la latitude réduite λ' et fait, comme ci-dessus $\omega = \varphi + \mu = \omega'' - \omega'$, on déduira de la relation

$$\cot.V''\sin.(\varphi + \mu) = \text{tang}.\lambda'\cos.\lambda'' - \cos.(\varphi + \mu)\sin.\lambda'',$$

qui a lieu sur la sphère inscrite, la valeur du coefficient différentiel $\left(\frac{d\lambda''}{d\mu}\right)$ correspondante à $\mu = 0$, et l'on y désignera par L″ celle que prend alors λ''. On trouvera

$$\left(\frac{d\lambda''}{d\mu}\right) = \frac{\text{tang}.L'' - \cos.\varphi\,\text{tang}.\lambda'}{\sin.\varphi(\text{tang}.\lambda'\text{tang}.L'' + \cos.\varphi)} = M,$$

et les deux valeurs de L″ se tireront de la formule

$$\cot.V''\sin.\varphi = \text{tang}.\lambda'\cos.L'' - \cos.\varphi\sin.L''.$$

Cela fait on aura

$$\lambda'' = L'' + M\mu + \ldots\ldots$$

et si l'on a égard à ce que $\mu = (\sigma'' - \sigma')(\frac{1}{2}\varepsilon \cos.\lambda)$, aux quantités près du second ordre, on verra que la valeur de λ'' sera exacte au même degré. Cette valeur étant introduite dans la relation $\cos.\lambda = \cos.\lambda'' \sin. V''$, il viendra

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda_0 - M\mu \cos.\lambda_0 \operatorname{tang}. L'',$$

et par suite

$$\lambda = \lambda_0 + M\mu \cot.\lambda_0 \operatorname{tang}. L'',$$

en faisant

$$\cos.\lambda_0 = \sin. V'' \cos. L''.$$

D'un autre côté, à cause de

$$\cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda}, \text{ et de } \cos.\sigma_0' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda_0},$$

on aura

$$\sigma' = \sigma_0' + M\mu \cot.^2\lambda_0 \cot.\sigma_0' \operatorname{tang}. L''.$$

De même, à cause de

$$\sin.\sigma'' = \cot.\lambda \cot. V'', \text{ et de } \sin.\sigma_0'' = \cot.\lambda_0 \cot. V'',$$

on aura

$$\sigma'' = \sigma_0'' - M\mu \operatorname{cosec}.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.\sigma_0'' \operatorname{tang}. L'';$$

partant

$$\begin{aligned}\sigma'' - \sigma' &= \sigma_0'' - \sigma_0' - M\mu \operatorname{tang}. L''[\operatorname{cosec}.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.\sigma_0'' + \cot.^2\lambda_0 \cot.\sigma_0'] \\ &= \sigma_0'' - \sigma_0' - M\mu \operatorname{cosec}.^2\lambda_0 \operatorname{tang}. L''[\operatorname{tang}.\sigma_0'' + \cos.^2\lambda_0 \cot.\sigma_0'];\end{aligned}$$

et puisque $\mu = (\sigma_0'' - \sigma_0')(\frac{1}{2}\varepsilon \cos.\lambda_0)$ aux quantités près du second ordre, on aura, après avoir introduit ces valeurs dans la série (B'),

$$\omega = \varphi + (\sigma_0'' - \sigma_0')\left[\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos.\lambda_0 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\cos.\lambda_0(6 + \sin.^2\lambda_0)\right]$$
$$+ \frac{1}{32}\varepsilon^2\sin.^2\lambda_0\cos.\lambda_0(\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0')$$
$$- \frac{1}{4}\varepsilon^2 M(\sigma_0'' - \sigma_0')^2\cos.^2\lambda_0\,\text{tang.}\,L''$$
$$- \frac{1}{4}\varepsilon^2 M(\sigma_0'' - \sigma_0')\cot.^2\lambda_0\,\text{tang.}\,L''(\text{tang.}\,\sigma_0'' + \cos.^2\lambda_0\cot.\sigma_0').$$

Arrivé ainsi à cette valeur de ω on tirera celles de λ'' de la relation

$$\cot.V''\sin.\omega = \text{tang.}\,\lambda'\cos.\lambda'' - \cos.\omega\sin.\lambda''.$$

Au surplus on a en série

$$\lambda'' = L'' + \left(\frac{d\lambda''}{d\mu}\right)\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda''}{d\mu^2}\right)\mu^2 + \ldots\ldots$$

et à cause de

$$\left(\frac{d\lambda''}{d\mu}\right) = \frac{\text{tang.}\,L'' - \cos.\varphi\,\text{tang.}\,\lambda'}{\sin.\varphi(\text{tang.}\,L''\,\text{tang.}\,\lambda' + \cos.\varphi)} = M,$$
$$\left(\frac{d^2\lambda''}{d\mu^2}\right) = \frac{\text{tang.}\,\lambda' + 2M\sin.\varphi - M^2(\text{tang.}\,\lambda' + \text{tang.}\,L''\cos.\varphi)}{\text{tang.}\,L''\,\text{tang.}\,\lambda' + \cos.\varphi} = N,$$

il vient définitivement

$$\lambda'' = L'' + M(\sigma_0'' - \sigma_0')\left[\frac{1}{2}\varepsilon\cos.\lambda_0 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\cos.\lambda_0(6 + \sin.^2\lambda_0)\right]$$
$$+ \frac{1}{32}M\varepsilon^2\sin.^2\lambda_1\cos.\lambda_0(\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0')$$
$$- \frac{1}{4}M\varepsilon^2(\sigma_0'' - \sigma_0')\cot.^2\lambda_0\,\text{tang.}\,L''[\text{tang.}\,\sigma_0'' + \cos.^2\lambda_0\cot.\sigma_0']$$
$$+ \frac{1}{8}\varepsilon^2(\sigma_0'' - \sigma_0')^2\cos.^2\lambda_0[N - 2M^2\,\text{tang.}\,L'').$$

Il reste à trouver V' et s: or on a rigoureusement

$$\sin.V' = \sin.V''\frac{\cos.\lambda''}{\cos.\lambda'},$$

et les relations (2) (3) feront connaître λ, σ', σ''; on sera donc en état d'évaluer le second membre de la série (A'), et par conséquent de conclure la valeur de la ligne géodésique.

IX^e CAS. *Étant donnés les angles azimutaux* $V'V''$ *et la différence en longitude* φ, *résoudre le triangle.*

SOLUTION. Adoptons en tout point la notation précédente et faisons $\omega=\varphi+\mu$; le triangle sur la sphère inscrite donnera

$$\cos. V'=\cos. V''\cos.(\varphi+\mu)-\sin. V''\sin.\lambda''\sin.(\varphi+\mu),$$

ainsi

$$\lambda''=L''+\left(\frac{d\lambda''}{d\mu}\right)\mu+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda''}{d\mu^2}\right)\mu^2+\ldots\ldots,$$

série dans laquelle L'' désigne la valeur de λ'' correspondante à $\mu=0$. Opérant la différenciation dans cette hypothèse, il vient

$$\left(\frac{d\lambda''}{d\mu}\right)=\frac{-(\cot. V''+\cot.\varphi\sin. L'')}{\cos. L''}=M,$$

et en s'arrêtant aux termes du premier ordre, on a

$$\lambda''=L''+M\mu.$$

Bien entendu que L'' se tirera de

$$\sin. L''=\frac{\cos. V''\cos.\varphi-\cos. V'}{\sin. V''\sin.\varphi}.$$

On sait d'ailleurs que

$$\cos.\lambda=\cos.\lambda''\sin. V''=\sin. V''\cos.(L''+M\mu),$$

ainsi on aura, en faisant $\cos.\lambda_0=\sin. V''\cos. L''$,

$$\cos.\lambda=\cos.\lambda_0-M\mu\cos.\lambda_0\tang. L'',$$

et

$$\lambda = \lambda_0 + M\mu \cot.\lambda_0 \operatorname{tang}.L''.$$

D'un autre côté la relation $\sin.\sigma' = \cot.V' \cot.\lambda$, donnera, en y mettant pour λ sa valeur actuelle,

$$\sigma' = \sigma_0' - M\mu \operatorname{cosec.}^2\lambda_0 \operatorname{tang}.\sigma_0' \operatorname{tang}.L'',$$

en faisant

$$\sin.\sigma_0' = \cot.V' \cot.\lambda_0.$$

Par la même raison

$$\sigma'' = \sigma_0'' - M\mu \operatorname{cosec.}^2\lambda_0 \operatorname{tang}.\sigma_0'' \operatorname{tang}.L'',$$

lorsque $\sin.\sigma_0'' = \cot.V'' \cot.\lambda_0$; ainsi

$$\sigma'' - \sigma' = \sigma_0'' - \sigma_0' - M\mu \operatorname{cosec.}^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L'' \frac{\sin.(\sigma_0'' - \sigma_0')}{\cos.\sigma_0'' \cos.\sigma_0'}.$$

Substituant cette valeur et celle de $\cos.\lambda$ dans la série (B') du § II; puis développant, on aura

$$\begin{aligned}\omega = \varphi &+ (\sigma_0'' - \sigma_0')\left[\frac{1}{2}\varepsilon \cos.\lambda_0 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 \cos.\lambda_0 (6 + \sin.^2\lambda_0)\right] \\ &+ \frac{1}{32}\varepsilon^2 \sin.^2\lambda_0 \cos.\lambda_0 [\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0'] \\ &- \frac{1}{4}\varepsilon^2 M(\sigma_0'' - \sigma_0') \cos.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L'' \left[\sigma_0'' - \sigma_0' + \frac{\sin.(\sigma_0'' - \sigma_0')}{\sin.^2\lambda_0 \cos.\sigma_0'' \cos.\sigma_0'}\right];\end{aligned}$$

après quoi l'on déterminera

$$\sin.\lambda'' = \frac{\cos.V'' \cos.\omega - \cos.V'}{\sin.V'' \sin.\omega}.$$

Mais pour avoir directement λ'' par la série de Maclaurin, il faudrait évaluer le coefficient différentiel du second ordre; ce qui donnerait

$$\left(\frac{d^2\lambda''}{d\mu^2}\right) = -M \cot.\varphi + \operatorname{tang}.L''(1 + \cot.^2\varphi + M^2) = N;$$

alors cette série deviendrait

$$\lambda'' = L'' + M(\sigma_0'' - \sigma_0')\cos.\lambda_0\left[\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon^2(6 + \sin.^2\lambda_0)\right]$$
$$+ \frac{1}{32}\varepsilon^2 M \sin.^2\lambda_0 \cos.\lambda_0(\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0')$$
$$- \frac{1}{4}\varepsilon^2 M(\sigma_0'' - \sigma_0')\,\text{tang.}\,L''\cot.^2\lambda_0\frac{\sin.(\sigma_0'' - \sigma_0')}{\cos.\sigma_0''\cos.\sigma_0'}$$
$$+ \frac{1}{8}\varepsilon^2\cos.^2\lambda_0(\sigma_0'' - \sigma_0')[N - 2M\,\text{tang.}\,L''].$$

La latitude réduite λ'' étant trouvée, on aura λ' par cette relation

$$\cos.\lambda' = \cos.\lambda''\frac{\sin.V''}{\sin.V'}.$$

Recourant ensuite à celles (2) et (3), on obtiendra $\lambda, \sigma', \sigma''$; enfin l'on aura s par la série (A').

Les solutions précédentes dérivent toutes d'une application fort simple du théorème de Maclaurin relatif à une fonction d'une variable; voici maintenant deux autres problèmes qui se résolvent aussi facilement à l'aide d'une série applicable à une fonction de deux variables, et dont les solutions méritent, ce nous semble, la préférence sur celles que M. Oriani a données d'une manière très-compliquée dans ses éléments cités de trigonométrie sphéroïdique.

X^{e} CAS. *Étant donnés l'azimut* V'', *la ligne géodésique* s *et la différence en longitude* φ, *trouver les latitudes* H'' H' *et l'autre azimut* V'.

I^{re} SOLUTION. D'après la notation précédente $\omega = \omega'' - \omega' = \varphi + \mu$; et si en outre on fait $\sigma = \sigma'' - \sigma' = \frac{s}{b} + \tau$, on aura, en vertu de la propriété du triangle sphérique correspondant au triangle donné,

$$\cot.(\varphi+\mu)=\frac{\cot.\left(\frac{s}{b}+\tau\right)\cos.\lambda''-\cos.V''\sin.\lambda''}{\sin.V''};$$

Ainsi lorsque μ et τ sont nuls à la fois la latitude réduite λ'' devient L'', et l'on a

$$(m)\qquad \cot.\varphi=\frac{\cot.\frac{s}{b}\cos.L''-\cos.V''\sin.L''}{\sin.V''};$$

relation qui fournira deux valeurs pour L''.

De plus, le théorème de Maclaurin, appliqué à une fonction de deux variables, donne

$$\lambda''=L''+\left(\frac{d\lambda''}{d\mu}\right)\mu+\left(\frac{d\lambda''}{d\tau}\right)\tau+\ldots\ldots$$

Les autres termes étant inutiles à cause du degré d'approximation fixé aux termes du premier et du second ordre, dans le résultat que nous nous proposons de trouver.

D'abord si l'on différencie successivement la relation ci-dessus par rapport à μ et τ, et qu'on fasse ensuite nulles ces variables, on aura

$$\left(\frac{d\lambda''}{d\mu}\right)=\frac{\sin.V''\operatorname{tang}.\frac{s}{b}}{\sin.^2\varphi\left[\sin.L''+\cos.L''\cos.V''\operatorname{tang}.\frac{s}{b}\right]}=M,$$

$$\left(\frac{d\lambda''}{d\tau}\right)=\frac{-\cos.L''\operatorname{tang}.\frac{s}{b}}{\sin.^2\frac{s}{b}\left[\sin.L''+\cos.L''\cos.V''\operatorname{tang}.\frac{s}{b}\right]}=N,$$

ou bien

$$N=-\frac{\sin.^2\varphi\cos.L''}{\sin.^2\frac{s}{b}\sin.V''}M;$$

et par suite

$$\lambda''=L''+M\mu+N\tau.$$

D'un autre côté, on a à très-peu près

$$\mu = (\sigma'' - \sigma')(\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos.\lambda)$$
$$\tau = -\frac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}\sin.^2\lambda - \frac{1}{8}\varepsilon \sin.^2\lambda[\sin.2\sigma'' - \sin.2\sigma'];$$

Il faut donc obtenir $\lambda, \sigma', \sigma''$, et leurs valeurs doivent seulement être exactes aux quantités près du premier ordre, puisqu'elles sont multipliées par ε. Or on a

$$\cos.\lambda = \sin.V''\cos.\lambda'' = \sin.V''\cos.(L'' + M\mu + N\tau)$$
$$= \sin.V''\cos.(L'' + \theta),$$

en faisant, pour abréger, $M\mu + N\tau = \theta$; et si λ_0 exprime ce que devient λ lorsque θ est nul, on aura

$$\cos.\lambda_0 = \sin.V''\cos.L'',$$

et

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda_0 - \theta\cos.\lambda_0\,\mathrm{tang}.L'';$$

par suite

$$\lambda = \lambda_0 + \theta\cot.\lambda_0\,\mathrm{tang}.L'',$$

et de là

$$\sin.\lambda = \sin.\lambda_0 + \theta\cot.\lambda_0\cos.\lambda_0\,\mathrm{tang}.L''$$
$$\sin.^2\lambda = \sin.^2\lambda_0 + 2\theta\cos.^2\lambda_0\,\mathrm{tang}.L''.$$

On a en outre

$$\sin.\sigma'' = \cot.V''\cot.\lambda = \cot.V''\cot.(\lambda_0 + \theta\cot.\lambda_0\,\mathrm{tang}.L'');$$

partant

$$\sin.\sigma_0'' = \cot.V''\cot.\lambda_0,$$

et

$$\sigma'' = \sigma_0'' - \theta\,\mathrm{tang}.\sigma_0''\,\mathrm{cosec}.^2\lambda_0\,\mathrm{tang}.L''.$$

Concluons de là que

$$\sin.2\sigma'' = \sin.2\sigma_0'' - 2\theta\,\mathrm{tang}.\sigma_0''\,\mathrm{cosec}.^2\lambda_0\cos.2\sigma_0''\,\mathrm{tang}.L''.$$

Quant à σ' on en tirera la valeur approchée de la série (A''), et l'on aura

$$\sigma' = \sigma'' - \frac{s}{b} + \tfrac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}\sin.^2\lambda_0 + \tfrac{1}{8}\varepsilon\sin.^2\lambda_0(\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0');$$

expression dans le second membre de laquelle il suffira de faire $\sigma_0' = \sigma_0'' - \frac{s}{b}$, et où l'on voit que

$$\tau = -\tfrac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}\sin.^2\lambda_0 - \tfrac{1}{8}\varepsilon\sin.^2\lambda_0(\sin.2\sigma_0'' - \sin.2\sigma_0'),$$

en s'arrêtant toutefois aux termes du premier ordre : ainsi on aura

$$\sin.2\sigma' = \sin.\left(2\sigma'' - 2\frac{s}{b}\right) - 2\tau\cos.\left(2\sigma'' + 2\frac{s}{b}\right).$$

Pareillement, l'on a, au même degré de précision,

$$\mu = (\sigma_0'' - \sigma_0')(\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos.\lambda_0) = \tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{s}{b}\cos.\lambda_0.$$

Introduisant ces valeurs approchées de $\cos.\lambda$ et de $\sigma'' - \sigma'$ dans la série (B'), on aura finalement

$$\begin{aligned}\omega = \varphi + \tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{s}{b}\cos.\lambda_0[1 - \theta\,\text{tang.}\,L''] - \tfrac{3}{8}\varepsilon^2\frac{s}{b}\cos.\lambda_0 \\ - \frac{3}{16}\varepsilon^2\sin.^2\lambda_0\cos.\lambda_0\left[\frac{s}{b} + \tfrac{1}{2}\sin.2\sigma_0'' - \tfrac{1}{2}\sin.2\sigma_0'\right];\end{aligned}$$

résultat dans lequel tout est connu, et dont le degré d'approximation est poussé jusqu'aux termes du second ordre inclusivement.

Maintenant il faut avoir la valeur de σ avec la même précision, et c'est à quoi l'on parviendra en faisant les mêmes substitutions dans la série (A''). Tout calcul fait on a

$$\sigma = \sigma'' - \sigma' = \frac{s}{b} - \tfrac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}[\sin.^2\lambda_0 + 2\theta\cos.^2\lambda_0 \operatorname{tang}.L'']$$
$$- \tfrac{1}{4}\varepsilon[\sin.^2\lambda_0 + 2\theta\cos.^2\lambda_0\operatorname{tang}.L''][\tfrac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \tfrac{1}{2}\sin.2\sigma']$$
$$+ \tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin.^4\lambda_0\left[\frac{7}{8}\frac{s}{b} + \tfrac{1}{2}\sin.2\sigma_0'' - \tfrac{1}{2}\sin.2\sigma_0'\right]$$
$$+ \frac{1}{128}\varepsilon^2\sin.^4\lambda_0[\tfrac{1}{2}\sin.4\sigma_0'' - \tfrac{1}{2}\sin.4\sigma_0'],$$

en remarquant que, dans cette expression,

$$\tfrac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \tfrac{1}{2}\sin.2\sigma' = \sin.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma_0'' - \frac{s}{b}\right)$$
$$+ 2\theta\operatorname{cosec}.^2\lambda_0\operatorname{tang}.\sigma_0''\sin.\frac{s}{b}\sin.\left(2\sigma_0'' - \frac{s}{b}\right)\operatorname{tang}.L''$$
$$+ \tau\cos.\left(2\sigma_0'' - 2\frac{s}{b}\right).$$

ω et σ étant connus de la sorte, on tirera la valeur de λ'' de la relation

$$\cot.\omega = \frac{\cot.\sigma\cos.\lambda'' - \sin.\lambda''\cos.V''}{\sin.V''},$$

et cela au moyen du procédé expliqué dans la trigonométrie sphérique.

La question est ramenée actuellement à celle où il s'agit de résoudre un triangle sphéroïdique, connaissant deux côtés et l'angle compris; c'est le cas traité précédemment.

Nous ferons remarquer en passant, que si l'azimut V'' était de 90°, les formules ci-dessus se simplifieraient considérablement et se réduiraient à celles du second cas des triangles sphéroïdiques rectangles.

II[e] SOLUTION. Notre but maintenant est de ne faire dépendre la latitude réduite λ'' que d'une seule variable, de manière à ce qu'on ait $\lambda'' = F(\psi)$, F étant le signe d'une fonction. Dans ce cas nous opèrerons ainsi qu'il suit pour déterminer cette fonction.

D'abord de $\omega = \omega'' - \omega'$, l'on tire

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{\text{tang.}\,\omega'' - \text{tang.}\,\omega'}{1 + \text{tang.}\,\omega''\,\text{tang.}\,\omega'};$$

expression qui, à cause de $\text{tang.}\,\omega'' = \frac{\text{tang.}\,\sigma''}{\cos.\lambda}$, $\text{tang.}\,\omega' = \frac{\text{tang.}\,\sigma'}{\cos.\lambda}$, deviendra

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{\cos.\lambda\,[\text{tang.}\,\sigma'' - \text{tang.}\,\sigma']}{\cos.^2\lambda + \text{tang.}\,\sigma''\,\text{tang.}\,\sigma'}.$$

On reconnaît ensuite que

$$\text{tang.}\,\omega' = \sec.\lambda\,\text{tang.}\left(\sigma'' - \frac{s}{b} - \tau\right);$$

si donc y désigne la valeur de ω' lorsque $\tau = 0$, on aura en faisant d'ailleurs $\sigma'' - \frac{s}{b} = x$,

$$\text{(a)} \qquad \text{tang.}\,y = \sec.\lambda\,\text{tang.}\,x,$$

et de plus en série

$$\omega' = y - \left(\frac{dy}{dx}\right)\tau + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{\tau^2}{2} - \ldots\ldots;$$

les coefficients différentiels étant tirés de l'équation (a), on trouvera, avec un peu d'attention,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos.\lambda}{1 - \sin.^2\lambda\,\cos.^2 x} = \text{P}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{tang.}\,\lambda\,\sin.\lambda\,\sin.\,2\,x = \text{Q}.$$

Posant ensuite

$$\tfrac{1}{2}\sin.\,2\,\sigma'' - \tfrac{1}{2}\sin.\,2\,\sigma' = \text{A}^{(1)}, \quad \tfrac{1}{2}\sin.\,4\,\sigma'' - \tfrac{1}{2}\sin.\,4\,\sigma' = \text{A}^{(2)},$$

il viendra, à cause de l'expression (D), IIIe cas,

$$\omega' = y + \tfrac{1}{4}\varepsilon P \sin.^2\lambda \left[\tfrac{s}{b} + A^{(1)}\right]$$
$$- \tfrac{1}{128}\varepsilon^2 P \sin.^4\lambda \left[14\tfrac{s}{b} + 16 A^{(1)} + A^{(2)}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{32}\varepsilon^2 Q \sin.^4\lambda \left[\tfrac{s}{b} + A^{(1)}\right]^2$$

ou désignant par R tous les termes en ε, on aura

$$\omega'' - \omega' = \omega'' - y - R = \varphi + \mu;$$

de là

$$\omega'' - y = \varphi + \mu + R,$$

et

$$\text{tang.}(\varphi + \mu + R) = \frac{\text{tang.}\,\omega'' - \text{tang.}\,y}{1 + \text{tang.}\,\omega''\,\text{tang.}\,y};$$

ou bien soit $\mu + R = \psi$, et mettant pour tang. y sa valeur, on trouvera

$$\text{tang.}(\varphi + \psi) = \frac{\cos.\lambda \sec.^2\sigma'' \,\text{tang.}\frac{s}{b}}{\cos.^2\lambda + \text{tang.}^2\sigma'' - \sin.\lambda\,\text{tang.}\,\sigma''\,\text{tang.}\frac{s}{b}}:$$

enfin introduisant ici les valeurs suivantes :

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda'' \sin. V'', \quad \cos.\sigma'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda}, \quad \sin.\sigma'' = \frac{\cos.\lambda'' \cos. V''}{\sin.\lambda},$$

on obtiendra, après les réductions,

(b) $$\text{tang.}(\varphi + \psi) = \frac{\sin. V''\,\text{tang.}\frac{s}{b}}{\cos.\lambda'' - \sin.\lambda'' \cos. V''\,\text{tang.}\frac{s}{b}}.$$

Il est évident, par ce résultat semblable à celui que M. Oriani a obtenu dans la même circonstance (*Éphémérides de Milan*, 1808), que λ'' n'est plus fonction que de la seule variable ψ;

et il n'est pas difficile de s'assurer, qu'à cause de $\mu + R = \psi$, l'on a

$$(c)\qquad \begin{aligned}\psi = {} & \tfrac{1}{4}\varepsilon\left[2\tfrac{s}{b}\cos.\lambda + P\sin.^2\lambda\left(\tfrac{s}{b} + A^{(1)}\right)\right] \\ & -\tfrac{3}{16}\varepsilon^2\cos.\lambda\left[2\tfrac{s}{b} + \sin.^2\lambda\left(\tfrac{s}{b} + A^{(1)}\right)\right] \\ & -\tfrac{1}{128}\varepsilon^2 P\sin.^4\lambda\left[14\tfrac{s}{b} + 16A^{(1)} + A^{(2)}\right] \\ & +\tfrac{1}{32}\varepsilon^2 Q\sin.^4\lambda\left[\tfrac{s}{b} + A^{(1)}\right]^2.\end{aligned}$$

Il n'est pas moins évident que

$$(d)\qquad \lambda'' = L'' + \left(\frac{d\lambda''}{d\psi}\right)\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda''}{d\psi^2}\right)\psi^2 + \ldots\ldots$$

série dans laquelle L'' qui répond à $\psi = 0$, se déduira comme ci-dessus de la relation (m), et dont on évaluera les termes en quantités connues de la manière suivante.

Premièrement si l'on différencie (b) et qu'ensuite on fasse $\psi = 0$, on aura

$$\left(\frac{d\lambda''}{d\psi}\right) = \frac{\sin.V''\tang.\frac{s}{b}}{\sin.^2\varphi\left[\sin.L'' + \cos.L''\cos.V''\tang.\frac{s}{b}\right]} = M.$$

En second lieu si l'on met simplement $\lambda'' = L'' + M\psi$ dans la relation $\cos.\lambda = \sin.V''\cos.\lambda''$, on trouvera

$$\begin{aligned}\cos.\lambda_0 &= \sin.V''\cos.L'' \\ \cos.\lambda &= \cos.\lambda_0 - M\psi\cos.\lambda_0\tang.L'' \\ \lambda &= \lambda_0 + M\psi\cot.\lambda_0\tang.L'' \\ \sin.^2\lambda &= \sin.^2\lambda_0 + 2M\psi\cos.^2\lambda_0\tang.L'';\end{aligned}$$

expressions dans lesquelles il suffira de faire

$$\psi = \tfrac{1}{4}\varepsilon\left[2\tfrac{s}{b}\cos.\lambda_0 + P\sin.^2\lambda_0\left(\tfrac{s}{b} + A_0^{(1)}\right)\right],$$

et

$$A_0^{(1)} = \tfrac{1}{2}\sin.2\sigma_0'' - \tfrac{1}{2}\sin.2\sigma_0'.$$

On remarquera en outre que de

$$\sin.\sigma'' = \cot.V''\cot.\lambda = \cot.V''\cot.(\lambda_0 + M\psi\cot.\lambda_0\,\mathrm{tang}.L''),$$

on tire

$$\sin.\sigma_0'' = \cot.V''\cot.\lambda_0$$

et

$$\sigma'' = \sigma_0'' - M\psi\,\mathrm{cosec}.^2\lambda_0\,\mathrm{tang}.\sigma_0''\,\mathrm{tang}.L'';$$

et comme d'ailleurs on a, par ce qui précède,

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sigma'' - \frac{s}{b} + \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0\left[\frac{s}{b} + \frac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.2\left(\sigma'' - \frac{s}{b}\right)\right]\\ &= \sigma'' - \frac{s}{b} - \tau,\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.2\sigma' = \sin.\frac{s}{b}\cos.\left(2\sigma'' - \frac{s}{b}\right)&\\ + \tau\cos.2\left(\sigma'' - \frac{s}{b}\right) = A^{(1)};&\end{aligned}$$

enfin l'on a

$$P = \frac{\cos.\lambda_0}{1 - \sin.^2\lambda_0\cos.^2\left(\sigma_0'' - \frac{s}{b}\right)}$$

$$Q = -P^2\,\mathrm{tang}.\lambda_0\sin.\lambda_0\sin.2\left(\sigma_0'' - \frac{s}{b}\right).$$

Telles sont les valeurs à substituer dans la série (c) pour avoir exactement ψ; ayant soin toutefois de ne conserver que les termes du premier et du second ordre en ε, et par conséquent de changer dans ceux en ε^2 les facteurs $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ en $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, c'est-à-dire σ' et σ'' en σ_0' et σ_0''.

Si l'on fait $2\frac{s}{b}\frac{\cos.\lambda_0}{P} + \sin.^2\lambda_0\left(\frac{s}{b} + A^{(1)}\right) = E$, et qu'on effectue les substitutions qui viennent d'être indiquées, on trouvera en définitive,

$$\psi = \frac{1}{4}\varepsilon P E - \frac{1}{16}\varepsilon^2 M P E \cos.\lambda_0 \text{tang.} L'' \left[1 - 2\cos.\lambda_0\left(\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right)\right]$$
$$- \frac{3}{16}\varepsilon^2 \cos.\lambda_0 \left[2\frac{s}{b} + \sin.^2\lambda_0\left(\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{128}\varepsilon^2 P \sin.^4\lambda_0 \left[14\frac{s}{b} + 16 A_0^{(1)} + A_0^{(2)}\right]$$
$$+ \frac{1}{32}\varepsilon^2 Q \sin.^4\lambda_0 \left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right]^2.$$

Cette valeur étant obtenue, on déterminera aisément λ'' en résolvant l'équation (b); ou bien l'on aura cette latitude réduite en prolongeant la série (d) qui en est l'expression. Dans ce cas l'on y mettra pour ψ sa valeur ci-dessus, et le coefficient différentiel du second ordre sera

$$\left(\frac{d^2\lambda''}{d\psi^2}\right) = -M \cot.\varphi\,(2 + M^2 \sin.^2\varphi).$$

On voit donc que par l'une ou l'autre de ces deux solutions, la question donne lieu à une assez longue série de calculs. Il en est de même du cas suivant dont nous nous contenterons de donner une solution.

XI cas. *Étant données la ligne géodésique* s, *la latitude* H'' *de l'une de ses extrémités, et la différence en longitude* φ *de ces mêmes points; trouver l'azimut* V''.

Solution. Si, comme dans le problème précédent,

$$\omega = \omega'' - \omega' = \varphi + \mu, \quad \sigma = \sigma'' - \sigma' = \frac{s}{b} + \tau,$$

le triangle sphérique correspondant au triangle donné offrira cette relation

$$\cos. V'' \sin.\lambda'' + \cot.(\varphi+\mu)\sin. V'' = \cot.\left(\frac{s}{b}+\tau\right)\cos.\lambda''.$$

Il est donc évident, qu'en appelant Z la valeur que prend V'' lorsque μ et τ sont nuls en même temps, on a

$$V'' = Z + \left(\frac{dV''}{d\mu}\right)\mu + \left(\frac{dV''}{d\tau}\right)\tau + \ldots\ldots,$$

et que Z sera donné par la formule

$$\cos. Z \sin.\lambda'' + \sin. Z \cot.\varphi = \cot.\frac{s}{b}\cos.\lambda''.$$

La précédente étant différenciée successivement par rapport aux variables V'', μ et τ, on aura

$$\left(\frac{dV''}{d\mu}\right) = \frac{\sin. Z \,\text{tang.}\,\varphi}{\sin.^2\varphi\,[\cos. Z - \sin. Z \sin.\lambda''\,\text{tang.}\,\varphi]} = M,$$

$$\left(\frac{dV''}{d\tau}\right) = \frac{-\cos.\lambda''\,\text{tang.}\,\varphi}{\sin.^2\frac{s}{b}\,[\cos. Z - \sin. Z \sin.\lambda''\,\text{tang.}\,\varphi]} = N,$$

d'où

$$N = \frac{-\sin.^2\varphi\cos.\lambda''}{\sin.^2\frac{s}{b}\sin. Z}M.$$

On a donc, en s'arrêtant aux termes du premier ordre,

$$V'' = Z + M\mu + N\tau = Z + \theta,$$

expression dans laquelle on a fait $M\mu + N\tau = \theta$, pour abréger.

Comme il s'agit maintenant d'avoir μ et τ en quantités toutes connues, prenons d'abord la relation $\cos.\lambda = \cos.\lambda''\sin. V''$, et mettons-y pour V'' sa valeur approchée; on aura, conformément à la notation adoptée,

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda_0 + \theta\cos.\lambda_0\cot. Z,$$

ou

$$\lambda = \lambda_0 - \theta \cot.\lambda_0 \cot.Z,$$

expressions dans lesquelles $\cos.\lambda_0' = \cos.\lambda'' \sin.Z$.

De même à cause de

$$\cos.\sigma'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda} = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.(\lambda_0 - \theta \cot.\lambda_0 \cot.Z)},$$

il vient, en développant,

$$\sigma'' = \sigma_0'' - \theta \cot.Z \cot.^2\lambda_0 \cot.\sigma_0'',$$

et alors $\cos.\sigma_0'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda_0}$.

Pour déterminer σ' aux quantités près du deuxième ordre, on remarquera qu'à cause de

$$\sigma' = \sigma'' - \frac{s}{b} + \frac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}\sin.^2\lambda + \frac{1}{8}\varepsilon\sin.^2\lambda(\sin.2\sigma'' - \sin.2\sigma'),$$

on a, à ce degré de précision,

$$\sigma' = \sigma'' - \frac{s}{b} - \tau$$

$$\sin.2\sigma' = \sin.\left(2\sigma'' - 2\frac{s}{b}\right) - 2\tau\cos.\left(2\sigma'' - 2\frac{s}{b}\right),$$

et

$$\sigma'' - \sigma' = \frac{s}{b} - \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0 - \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0[A_0^{(1)}],$$

en faisant dans le second membre $\sigma_0' = \sigma_0'' - \frac{s}{b}$, et donnant à $A_0^{(1)}$ la même signification qu'au troisième cas. On a donc

$$\sin.2\sigma'' = \sin.2\sigma_0'' - 2\cos.2\sigma_0''(\theta\cot.Z\cot.^2\lambda_0\cot.\sigma_0'')$$

$$\sin.2\sigma' = \sin.\left(2\sigma'' - 2\frac{s}{b}\right)$$
$$+ \cos.\left(2\sigma'' - 2\frac{s}{b}\right)\left[\frac{1}{2}\varepsilon\sin.^2\lambda_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\sin.^2\lambda_0(A_0^{(1)})\right],$$

et, dans la même circonstance,

$$\tau = -\frac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}\sin.^2\lambda_0 - \frac{1}{4}\varepsilon\sin.^2\lambda_0[A_0^{(1)}],$$

$$\mu = (\sigma'' - \sigma')(\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos.\lambda) = \tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{s}{b}\cos.\lambda_0.$$

On a, en outre,

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda_0 + \theta\cot.Z\cos.\lambda_0$$

$$\sin.\lambda = \sin.\lambda_0 - \theta\cot.Z\cot.\lambda_0\cos.\lambda_0$$

$$\sin.^2\lambda = \sin.^2\lambda_0 - 2\theta\cot.Z\cos.^2\lambda_0.$$

Telles sont les valeurs de $\sigma'' - \sigma'$, de $\cos.\lambda$, etc. à substituer dans la série (B'). Effectuant cette opération et s'arrêtant au degré d'approximation fixé, on trouvera définitivement

$$\omega = \varphi + \frac{1}{2}\varepsilon\cos.\lambda_0[1 + \theta\cot.Z] - \frac{3}{8}\varepsilon^2\frac{s}{b}\cos.\lambda_0$$

$$-\frac{3}{16}\varepsilon^2\sin.^2\lambda_0\cos.\lambda_0\left[\frac{s}{b} + A_0^{(1)}\right].$$

Faisant les mêmes substitutions dans la valeur de $\sigma = \frac{s}{b} + \tau$, il viendra

$$\sigma = \sigma'' - \sigma' = \frac{s}{b} - \frac{1}{4}\varepsilon\frac{s}{b}(\sin.^2\lambda_0 - 2\theta\cot.Z\cos.^2\lambda_0)$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon(\sin.^2\lambda_0 - 2\theta\cot.Z\cos.^2\lambda_0)[A^{(1)}]$$

$$+\frac{1}{8}\varepsilon^2\sin.^4\lambda_0\left[\frac{7}{8}\frac{s}{b} + A_0^{(1)} + \frac{1}{16}A_0^{(2)}\right];$$

ayant soin de mettre ici pour $A^{(1)}$ ou $\frac{1}{2}\sin.2\sigma'' - \frac{1}{2}\sin.2\sigma'$ sa valeur approchée ci-dessus.

Enfin des valeurs de ω et σ on passera à celle de V'' au moyen de la formule

$$\cos.V''\sin.\lambda'' + \cot.\omega\sin.V'' = \cot.\sigma\cos.\lambda'',$$

qui donnera nécessairement deux solutions.

Pour trouver les autres parties du triangle sphéroïdique on aura à résoudre le deuxième cas.

XII[e] CAS. *Connaissant les azimuts* V′ V″ *de la ligne géodésique et la latitude* H″ *de l'une de ses extrémités, trouver l'autre latitude* H′.

SOLUTION. Après avoir calculé la latitude réduite λ'' par la relation (1), on déterminera l'autre latitude réduite à l'aide de la relation

$$\cos.\lambda' = \frac{\cos.\lambda''\sin.V''}{\sin.V'};$$

ensuite on aura

$$\text{tang}.H' = \frac{a}{b}\,\text{tang}.\lambda'.$$

Maintenant si l'on veut connaître la ligne s et la différence de longitude φ ou l'angle des deux méridiens qui passent par extrémités de cette ligne, on cherchera d'abord la latitude réduite λ du pied de la perpendiculaire dont s fait partie, laquelle sera donnée par la relation

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda'\sin.V', \text{ ou } \cos.\lambda = \cos.\lambda''\sin.V''.$$

Ensuite on aura sur la sphère inscrite les côtés σ', σ'', ou les distances des points λ', λ'' au pied de la perpendiculaire, au moyen des formules

$$\cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda}, \quad \cos.\sigma'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda};$$

Puis l'on calculera la valeur de $\frac{s}{b}$ à l'aide de la série primitive (A′), celle de $\omega'' - \omega' = \omega$ par la formule

$$\sin.\omega = \frac{\sin.(\sigma'' - \sigma')\sin.V'}{\sin.V''};$$

Enfin l'on aura φ par la série fondamentale (B').

Il n'est pas difficile de voir que, parmi les vingt cas qui se présentent dans la trigonométrie sphéroïdique, il en est nécessairement huit qui rentrent dans les douze que nous venons d'analyser. Au surplus voici un tableau où se trouvent énoncés tous les problèmes concernant la résolution des triangles sphéroïdiques en général.

QUANTITÉS		SOLUTION.	QUANTITÉS		SOLUTION.
DONNÉES.	CHERCHÉES.		DONNÉES.	CHERCHÉES.	
$H'\ H''\ V'$	$s\ \varphi\ V''$	1er cas.	$H''\ \varphi\ s$	$V''\ H'\ V'$	11e cas.
$H'\ V'\ s$	$H''\ V''\ \varphi$	2e	$V'\ V''\ H''$	$H'\ s\ \varphi$	12e
$H'\ H''\ s$	$V''\ V'\ \varphi$	3e	$H'\ H''\ V''$	$s\ \varphi\ V'$	1er
$H'\ V''\ s$	$H'\ V'\ \varphi$	4e	$H''\ s\ V''$	$H'\ V'\ \varphi$	2e
$V'\ V''\ s$	$H'\ H''\ \varphi$	5e	$H''\ V'\ s$	$H'\ V''\ \varphi$	4e
$H''\ V''\ \varphi$	$H'\ V'\ s$	6e	$H'\ V'\ \varphi$	$H''\ V''\ s$	6e
$H'\ H''\ \varphi$	$V'\ V''\ s$	7e	$H''\ V'\ \varphi$	$H'\ V''\ s$	8e
$H'\ V''\ \varphi$	$H''\ V'\ s$	8e	$V'\ \varphi\ s$	$H'\ H''\ V''$	10e
$V'\ V''\ \varphi$	$H''\ H'\ s$	9e	$H'\ s\ \varphi$	$V'\ H''\ V''$	11e
$V''\ \varphi\ s$	$H''\ H'\ V'$	10e	$H'\ V'\ V''$	$H''\ s\ \varphi$	12e

Il est important de remarquer qu'il est nécessaire d'établir l'homogénéité dans tous les termes des séries telles que (A) (B), etc., avant de les soumettre au calcul numérique;

ce qui ne présentera aucune difficulté si l'on fait attention que toutes les quantités désignées par σ', σ'', ω', ω'' sont censées des arcs dont le rayon a été pris pour unité. Si donc ces arcs sont exprimés en secondes de degré et qu'il faille les ramener à leur définition primitive, on les multipliera par sin. 1''. Réciproquement si certains termes sont donnés en parties du rayon et qu'il soit nécessaire de les avoir en secondes, on les divisera par sin. 1''. Par exemple $\frac{s}{b}$ est le rapport de l'arc s au rayon b du pôle, et $\frac{s}{b}r'' = \frac{s}{b \sin. 1''}$ est ce même arc réduit en secondes de degré; r'' désignant par conséquent le nombre de secondes contenues dans un arc égal au rayon.

On remarquera en outre qu'a cause de $\text{tang.}\,\lambda = \frac{b}{a}\text{tang.}\,\text{H}$, et de $\frac{b}{a} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$, on a, à peu de chose près,

$$\begin{aligned}\lambda &= \text{H} - \frac{1}{4}\varepsilon\frac{\sin. 2\,\text{H}}{\sin. 1''}\\ &= \text{H} - \frac{1}{4}e^2\frac{\sin. 2\,\text{H}}{\sin. 1''}.\end{aligned}$$

C'est d'après cette expression, et en ne conservant dans les séries désignées que les termes du premier ordre, que l'on parviendrait à résoudre différents cas des triangles sphéroïdiques indépendamment des latitudes réduites ou de la considération de la sphère inscrite. La recherche de ces nouvelles formules approximatives faisant partie du mémoire de M. Oriani, nous renverrons le lecteur à cet ouvrage.

Les triangles sphéroïdiques traités d'une manière aussi générale que celle dont nous venons faire usage se présentant très-rarement dans la pratique, M. Legendre a résolu le cas où la ligne géodésique est de l'ordre de l'aplatissement de la terre, et à donné à ce sujet des formules indépendantes de la latitude réduite du point où cette ligne rencontre perpendiculairement un méridien; ce qui simplifie beaucoup les calculs : comme elles sont également démontrées au livre VI de notre Géodésie nous ne nous en occuperons point ici.

L'analyse des triangles formés par trois lignes de plus courte distance d'une longueur quelconque, et dont aucune ne représenterait un méridien, serait une conséquence immédiate de celle qui fait objet de ce Mémoire; mais l'on conçoit que la position de pareils triangles sur l'ellipsoïde de révolution ne pouvant être arbitraire, il est indispensable de connaître alors la latitude de l'un des trois sommets et l'azimut d'un de leurs côtés.

§ V.

Exemple de la résolution du VII^e cas.

Les ingénieurs géographes français ont lié l'île de Corse au canevas trigonométrique de la nouvelle carte de France, en relevant de deux points du continent deux sommets de montagnes de cette île. L'un nommé le *Monte-Cinto*, a été observé de la station A du Cheiron la plus boréale, dont voici la position géographique calculée géodésiquement dans l'hypothèse de $\frac{1}{308,65}$ d'aplatissement terrestre :

$$\begin{aligned} &\text{latitude } H' = 48^{g},0831'',50 \\ &\text{longitude } P' = -5,1478,28. \end{aligned}$$

Le même sommet a ensuite été observé de la station B de

66.

la Sauvette, dont les ingénieurs-géographes ont trouvé

$$\text{la latitude}\quad H''=48^g,8841'',40$$
$$\text{la longitude}\quad P''=-4,4444,79;$$

(le signe — indique que les longitudes comptées à partir du méridien de Paris sont orientales.)

Il s'agit de déduire de ces seules données la plus courte distance $AB=s$ qui sert de base au grand triangle ABC : or si l'on suppose que

$$\log. a=6.8046154 \qquad \log. b=6.8032060$$
$$\log. \varepsilon=7.8136902 \qquad \log. e^2=7.8108714,$$

on aura, par la relation (1) du § II,

$$\log.\frac{b}{a}=9.9985906 \qquad \log.\frac{b}{a}=9.9985906$$
$$\text{l. tang. } H'=9.9820282 \qquad \text{l. tang. } H''=9.9738447$$
$$\text{l. tang. } \lambda'=9.9806188 \qquad \text{l. tang. } \lambda''=9.9724353$$
$$\lambda'=48^g,5799'',52 \qquad \lambda''=47^g,9810'',36$$

La relation (E′) donnera, à cause de $\varphi=P'-P''=0^g,7033'',49$.

$$\text{l.cos. } \lambda'=9.9589595+ \qquad \text{l. sin. } \lambda'=9.8395782-$$
$$\text{l. tang. } \lambda''=9.9724353 \qquad \text{l. cos. } \varphi=9.9999735$$
$$9.8313948=0,6782577 \qquad 9.8395517-=-0,6911171$$
$$+0,6782577$$
$$\text{l. sin. } \varphi=8.0432820$$
$$\text{c. log. dénom.}=1.8907793- \qquad \text{dénomin.}=-0,0128594$$
$$\text{l. tang. } Z=9.9340613-45^g,1855'',8$$
$$\text{ainsi } Z=154,8144,2$$

On passera de là au calcul du coefficient différentiel $\left(\frac{dz'}{d\mu}\right)=M$, et l'on aura

$\text{l. sin. } Z = 9.8140223$	
$\text{l. cos. } Z = 9.8799610 -$	$\text{l. sin.}^2 Z = 9.6280446 -$
$\text{l. cot. } \varphi = 1.9566915$	$\text{l. sin. } \lambda' = 9.8395782$
$1.6506748 -$	$9.4676228 -$
$= -44{,}737810$	$= -0{,}293509$
$-\ 0{,}293509$	
$M = -45{,}031319$	$\text{log. } M = 1.6535147 -$

Évaluant ensuite

$$\cos.\lambda_0 = \cos.\lambda' \sin. Z,\quad \cos.\sigma_0' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda_0},\quad \cos.\sigma_0'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda_0},$$

on trouvera

$$\lambda_0 = 68^g{,}7816''{,}95;\quad \sigma_0' = 42^g{,}6875''{,}92,\quad \sigma_0'' = 43^g{,}4746''{,}31.$$

Au moyen de ces valeurs la série (F) donnera, à cause de $\sigma_0'' - \sigma_0' = 7870''{,}39$ centésimales,

$\text{log.}(\sigma_0'' - \sigma_0') = 3.8959963$	3.89600
$\text{log.} \tfrac{1}{2}\varepsilon = 7.5126590$	$\text{log.} \tfrac{1}{16}\varepsilon^2 = 4.42326 -$ (Σ)
$\text{l. cos. } \lambda_0 = 9.6729818$	9.67298
1.0816371	$\text{l. sin.}^2 \lambda_0 = 9.89109$
$= 12''{,}068$	$7.88333 -$
	$= -0''{,}0076$
$(\Sigma) = 7.99224 -$	$-0\ {,}0589$
$\text{log. } 6 = 0.77815$	
$8.77039 - = -0''{,}0589$	$-0\ {,}0665$
$\text{log.} \tfrac{1}{16}\varepsilon^2 \cos.\lambda_0 \sin.^2\lambda_0 = 3.98733$	$+12{,}068$
$\text{c. log. sin. } 1'' = 5.80388$	2^e terme $= +12{,}002$
$\text{log.} \tfrac{1}{2} = 9.69897$	
9.49018	9.49018
$\text{log. } 2\sigma_0' = 9.98843;$	$\text{l. sin. } 2\sigma_0'' = 9.99081 -$
$9.47861 +$	$9.48099 -$
$= +0''{,}30103$	$= -0''{,}30269$
	$+0\ {,}30103$
	3^e terme $= -0\ {,}00166$

$$
\begin{array}{rlcr}
\log.\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 = & 5.02532 & & \\
\log. M = & 1.65351- & & \\
\log.(\sigma_o''-\sigma_o') = & 3.89600 & & \\
\text{l.}\cos.^2\lambda_o = & 9.34596 & & \\
\hline
 & 9.92079- & \ldots\ldots\ldots & 9.92079- \\
\text{l.}\cot. Z = & 0.06594- & \log.(\sigma_o''-\sigma_o') = & 3.89600 \\
\text{l.}\cot.^2\lambda_o = & 9.45492 & \text{l.}\sin. 1'' = & 4.19612 \\
\text{l.}\sin.(\sigma_o''-\sigma_o') = & 8.08909 & \text{l.}\cot. Z = & 0.06594- \\
\text{c.}\log.\sin.\sigma_o'' = & 0.20662 & & 8.07885+ \\
\text{c.}\log.\sin.\sigma_o' = & 0.19994 & & =+0'',01199 \\
 & 7.93730+ & & +0\ ,00866 \\
 & =+0'',008656 & \text{4}^e \text{ et } 5^e \text{ termes} = & +0\ ,02065
\end{array}
$$

RÉCAPITULATION.

$$
\begin{array}{rl}
\varphi = & 0^g,7033'',490 \\
+ & 12\ ,002 \\
- & 0\ ,002 \\
+ & 0\ ,021 \\
\hline
\omega = & 0,7045'',511 = \omega''-\omega'.
\end{array}
$$

La valeur de ω étant trouvée, on aura celle de z' au moyen de l'équation (E); c'est-à-dire que

$$
\begin{array}{rl}
\log.\sin.\omega = & 8.0440228 \\
\text{c.}\log.\text{dénomin.} = & 1.8907827- \\
\hline
\text{l.}\,\text{tang.}\,z' = & 9.9348055- = -45^g,2395'',07 \\
 & z' = 154,7604,93
\end{array}
$$

Partant

$$V' = 200^g - z' = 45^g,2395'',07.$$

Ensuite on trouvera, à l'aide des relations

$$\cos.\lambda = \cos.\lambda' \sin. z'; \quad \cos.\sigma' = \frac{\sin.\lambda'}{\sin.\lambda}; \quad \cos.\sigma'' = \frac{\sin.\lambda''}{\sin.\lambda};$$

les valeurs suivantes :

$$\lambda = 68^g{,}7481'',87\,;\quad \sigma' = 42^g{,}6650'',37\,;\quad \sigma'' = 43^g{,}4526'',12\,;$$

et la formule (A′) du § II donnera, à cause de $\sigma'' - \sigma' = 7875'',75$,

$$\begin{aligned}
\log.(\sigma''-\sigma') &= 3.8962926\\
\log.\tfrac{1}{4}\varepsilon &= 7.2116290\\
\text{l. sin.}^2\lambda &= 9.8908462\\
\hline
&\ 0.9987678\\
2^e \text{ terme} &= +9'',9716
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ldots\ldots\ldots\ldots &\ 3.89629-\\
\text{l. } \tfrac{3}{64} &= 8.67095\\
\log.\varepsilon^2 &= 5.62738\\
\text{l. sin.}^4\lambda &= 9.78169\\
\hline
&\ 7.97631-\\
3^e \text{ terme} &= -0'',00946
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\sin.2\sigma'' &= 9.9907468 = +0{,}978919\\
\log.\sin.2\sigma' &= 9.9881730 = -0{,}973135\\
\hline
\sin.2\sigma'' - \sin.2\sigma' &= 0{,}005784
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\tfrac{1}{8}\varepsilon &= 6.91060\\
\text{l. sin.}^2\lambda &= 9.89085\\
\text{dont le log.} &= 7.76223+\\
\hline
&\ 0.36756+\\
4^e \text{ terme} &= +2'',3311
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{l. }(\sin.2\sigma''-\sin.2\sigma') &= 7.76223-\\
\text{l. }\tfrac{1}{8}\varepsilon^2 &= 4.72429\\
\text{l. }\tfrac{1}{4} &= 9.39794\\
\text{l. sin.}^4\lambda &= 9.78169\\
\text{c. log. sin. }1'' &= 5.80388\\
\hline
&\ 7.47003-\\
5^e \text{ terme} &= -0'',00295
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{l. sin}^4\sigma'' &= 9.9621634 = +0{,}916565\\
\text{l. sin.}4\sigma' &= 9.9513289 = -0{,}893982\\
\hline
\sin.4\sigma'' - \sin.4\sigma' &= 0{,}022583
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\tfrac{1}{256} &= 7.59176-\\
\log.\varepsilon^2 &= 5.62738\\
\text{l. sin.}^4\lambda &= 9.78169\\
\text{l. }(\sin.4\sigma''-\sin.4\sigma') &= 8.35378\\
\text{c. log. sin. }1'' &= 5.80388\\
\hline
&\ 7.15849-\\
6^e \text{ terme} &= -0'',00144
\end{aligned}$$

RÉCAPITULATION.

$$\begin{aligned}
\sigma''-\sigma' &= 0^g,7875'',750\\
&\quad + 9,972\\
&\quad - 0,009\\
&\quad + 2,331\\
&\quad - 0,003\\
&\quad - 0,001\\
\hline
\frac{s}{b} &= 7888'',04 = \mathrm{U}.
\end{aligned}$$

Enfin l'on aura la ligne cherchée $s=\mathrm{AB}$, ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}
\log.\,\mathrm{U} &= 3.8969691\\
\mathrm{l.\,sin.}\,1'' &= 4.1961199\\
\log.\,b &= 6.8032060\\
\hline
\log.\,s &= 4.8962950\\
\text{et } s &= 78758^{\mathrm{m}},053.
\end{aligned}$$

Quant à l'azimut V″ on l'obtiendra par la dernière des équations (3), laquelle donnera $\mathrm{V}''=44^g,7541''62$.

La ligne géodésique que nous venons de déterminer, par le procédé le plus rigoureux qu'on puisse employer, se déduirait un peu plus aisément de la solution rapportée à l'art. 367 de la Géodésie, et due à M. Legendre. Par exemple on aurait $s=78757^{\mathrm{m}},5$; résultat seulement plus faible que le précédent de $0^{\mathrm{m}},6$. Une autre solution d'une extrême simplicité nous a donné $s=78756^{\mathrm{m}},9$; dans la supposition que la ligne géodésique est non-seulement de l'ordre de l'aplatissement de l'ellipsoïde, mais encore une courbe plane (voyez les additions à la *Connaissance des temps pour* 1832). On est donc porté, en comparant ces résultats, à conclure que les formules approximatives, fondées sur cette dernière hypothèse, ont encore assez d'exactitude, lors même que les longueurs des côtés des triangles seraient de plus de 80000 mètres; et l'on voit que l'analyse précédente possède, outre l'avantage de mettre en évidence un pareil fait, celui d'être applicable aux plus grandes lignes qu'on puisse jamais mesurer et faire servir à la recherche de la figure de la terre : aussi c'est ce qui nous a engagé à lui donner de la publicité.

NOTE

Sur l'aire d'un triangle sphéroïdique dont les côtés sont des lignes de plus courte distance généralement à double courbure.

Tout triangle $M_1 M_2 M_3$ terminé par des lignes de plus courte distance quelconques, se confond sensiblement avec celui qui en représente la projection sur une sphère dont le rayon serait moyen proportionnel entre ceux de plus grande et de plus petite courbure au point dont la latitude ψ serait la moyenne arithmétique entre les latitudes des trois sommets : alors l'aire Σ de ce triangle s'évaluera très-simplement par la formule suivante due à M. Lhuilier de Genève,

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}\Sigma = \sqrt{\text{tang.}\,\tfrac{s}{2}\,\text{tang.}\left(\frac{s-A}{2}\right)\text{tang.}\left(\frac{s-B}{2}\right)\text{tang.}\left(\frac{s-C}{2}\right)},$$

A, B, C étant les trois côtés et s désignant leur demi-somme ; puis l'on aura en mesures métriques carrées,

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\sin.^2\psi)^2}\cdot\frac{\Sigma}{100^g},$$

l'angle droit étant de 100 grades ou degrés centésimaux. (Voyez le tom. I de la *Géodésie*, p. 94 et suivantes).

On pourrait encore obtenir l'aire T du triangle dont il s'agit en menant par les trois sommets M_1 M_2 M_3 des méridiens elliptiques M_1P, M_2P, M_3P; car on aurait

$$M_1M_2M_3 = M_1PM_2 + M_2PM_3 - M_1PM_3.$$

Reste à savoir déterminer l'aire d'une triangle sphéroïdique dont deux côtés sont des arcs de méridiens : or on y parviendra ainsi qu'il suit.

Supposons qu'un tel triangle $M_1PM_{n+1} = T_n$ soit partagé en un assez grand nombre d'autres M_1PM_2, M_2PM_3, M_3PM_4.... M_nPM_{n+1}, n étant leur nombre; et que, pour plus de simplicité, les méridiens PM_2, PM_3......PM_n divisent l'angle $M_1PM_{n+1} = \varphi_n$ en parties égales; on aura alors

$$\varphi_n = n\varphi,$$

φ désignant un de ces angles partiels, et n étant pris de manière que φ soit d'un demi-degré au plus. Cela posé chaque aire partielle T_1 T_2.....T_n sera à très-peu près équivalente à celle de la portion de fuseau ellipsoïdique dont φ désigne l'angle, et dont l'arc de parallèle intercepté a pour latitude la moyenne ψ entre celles des points M_1M_2, M_2M_3, etc.

Soient de plus $H_1H_2H_3$.....H_{n+1} les latitudes respectives des points $M_1M_2M_3$.....M_{n+1}, qu'on déterminera en résolvant par le VI^e cas un triangle sphéroïdique dont on connaîtra deux angles et un côté; et l'on aura pour l'expression différentielle de l'un de ces fuseaux

$$dT = \frac{\varphi\pi b^2 d.\sin.\psi}{200^g.(1 - e^2\sin.^2\psi)^2},$$

(*Géodésie*, p. 335.)

Développant le second membre en série, et intégrant entre les limites ψ et 100^g, on obtiendra définitivement

$$T = \frac{\varphi \pi b^2}{200^6}\left[(1 - \sin.\psi) + \tfrac{2}{3}e^2(1 - \sin.^3\psi) + \tfrac{3}{5}e^4(1 - \sin.^5\psi) + \ldots\right],$$

formule générale dont la loi des termes est manifeste, et dans laquelle on fera successivement

$$\psi = \frac{H_1 + H_2}{2}, \quad \psi = \frac{H_2 + H_3}{2}, \quad \psi = \frac{H_3 + H_4}{2}, \text{ etc.},$$

pour avoir les aires partielles T_1 $T_2 \ldots . T_n$, et par suite l'aire entière

$$T_n = T_1 + T_3 + \ldots . . T_n.$$

L'application numérique de ce second procédé serait sans doute fort longue; mais il n'est pas probable qu'on puisse arriver à une solution rigoureuse du problème actuel par des considérations plus élémentaires.

APPLICATION

DU CALCUL DES PROBABILITÉS

A LA MESURE DE LA PRÉCISION D'UN GRAND NIVELLEMENT TRIGONOMÉTRIQUE.

Par M. PUISSANT.

Lu à l'Académie royale des sciences, le 8 mars 1830.

Les travaux géodésiques relatifs à la nouvelle carte de la France offrent plusieurs chaînes de triangles du premier ordre qui sont très-propres à faire connaître exactement les hauteurs de toutes les stations au-dessus du niveau des mers; mais pour avoir une juste idée de la précision de pareilles mesures déduites d'un grand nombre d'observations angulaires, il ne suffit pas de remarquer leur accord plus ou moins parfait, il faut de plus évaluer par l'analyse des probabilités l'étendue des erreurs dont elles sont susceptibles: or c'est ce que M. Coraboeuf et moi venons d'entreprendre, en appliquant une formule qui m'a paru propre pour cet objet; parce que je l'ai fait dépendre, tant des erreurs qui affectent les grandes distances comprises entre les stations, que des erreurs accidentelles dues à la mesure des angles verticaux et de celles provenant de la variabilité des réfractions terrestres; enfin parce qu'elle est fondée sur l'analyse des probabilités. Voici, en peu de mots, sur quelles considérations je me suis appuyé.

Supposons qu'une quantité X soit déterminée par l'ensemble d'un grand nombre d'observations sujettes à diverses sources d'erreurs indépendantes, et que l'erreur s de cette quantité soit de la forme :

$$\begin{aligned} s = {} & A x + B y + C z + \ldots\ldots \\ & + A' x' + B' y' + C' z' + \ldots\ldots \\ & + A'' x'' + B'' y'' + C'' z'' + \ldots\ldots \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

$x, y, z, \ldots$ étant ces erreurs indépendantes multipliées respectivement par un coefficient donné, et dont la loi de probabilité soit la même pour chacune; on aura plus simplement,

$$s = \Sigma A x + \Sigma B y + \Sigma C z + \ldots\ldots$$

en désignant par Σ la somme de tous les termes en x, en y, en z, etc. Or d'après l'analyse exposée au troisième *Supplément à la théorie analytique des probabilités* de Laplace, p. 26, la probabilité de s est proportionnelle à l'exponentielle

$$e^{\frac{-s^2}{g^2 \Sigma (A)^2 + g_1^2 \Sigma (B)^2 + g_2^2 \Sigma (C)^2 + \ldots\ldots}}.$$

e représentant la base de logarithmes népériens, et $g\, g_1\, g_2 \ldots$ étant des facteurs à déterminer en fonction des erreurs des observations : ainsi la probabilité que l'erreur s est comprise entre les limites

$$X - r\sqrt{g^2 \Sigma (A)^2 + g_1^2 \Sigma (B)^2 + g_2^2 \Sigma (C)^2 + \ldots}$$
$$X + r\sqrt{g^2 \Sigma (A)^2 + g_1^2 \Sigma (B)^2 + g_2^2 \Sigma (C)^2 + \ldots}$$

est

$$p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}dr,$$

l'intégrale commençant depuis $r=0$. (Voyez aussi sur ce sujet un Mémoire de M. Poisson inséré dans la *Connaissance des temps pour* 1827, p. 273.)

Si l'on suppose le nombre des observations très-grand, et que dans chacun des systèmes d'erreurs $x, y, z\ldots\ldots$ ce nombre soit respectivement respectivement représenté par $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots\ldots$ on pourra, en se conformant à la théorie relative à la probabilité des erreurs des résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations, faire $g^2=\frac{2(m'-m^2)}{\sigma}$; expression dans laquelle m représente la somme des σ erreurs qui s'écartent de la valeur moyenne, et par m' la somme des carrés de ces mêmes erreurs. En raisonnant pareillement pour les autres systèmes d'erreur, et appelant G le module ou la mesure de la précision de X, on aura, d'après cela

$$G=\sqrt{g^2\Sigma(A)^2+g_1{}^2\Sigma(B)^2+g_2{}^2\Sigma(C)^2+\ldots\ldots},$$

et en multipliant successivement ce module par $r=0{,}47708$ et $r=3$, on obtiendra l'erreur moyenne de X et la limite de cette erreur. Telle est la règle générale qui dérive de la Théorie de l'illustre Laplace, et que M. Fourier a énoncée dans un des Mémoires qu'il a publiés en 1826 et 1829 en faveur des personnes occupées de recherches statistiques mais étrangères à l'analyse mathématique.

Procédons maintenant à la détermination de la fonction X, dans le cas particulier qui nous occupe.

On sait d'abord que la différence de niveau de deux points éloignés entre eux et liés par un réseau de triangles, se déduit d'une suite de nivellements partiels à chacun desquels on applique la formule

$$(A) \qquad x = \frac{K}{\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{K}{R}\right)}.\,\text{tang}.\tfrac{1}{2}(z'-z),$$

z et z' étant les distances zénitales moyennes apparentes, observées réciproquement aux extrémités de la base K, R désignant le rayon de la terre, et x la différence de niveau de ces deux extrémités. (*Voyez* p. 6 du *Supplément au Traité de Géodésie*). On sait de plus que les distances zénitales qui sont données par plusieurs séries prises avec le cercle répétiteur, et qui diffèrent peu de l'angle droit, sont en général affectées d'erreurs fortuites provenant des défauts de l'instrument ou d'autres causes accidentelles; nous désignerons donc ces erreurs respectivement par dz et dz'. Enfin il est évident que les observations n'ayant pas été faites simultanément aux extrémités de la base, la réfraction, supposée la même dans la formule précédente, a pu cependant être différente en passant d'une station à l'autre; ainsi nous aurons égard à cette circonstance en appelant $r\ r'$ les réfractions relatives à z et z'.

Cela posé, on aura, en désignant par Z et Z' les distances zénitales moyennes rigoureuses

$$Z = z + dz + r = z + dz + \frac{nK}{R}$$

$$Z' = z' + dz' + r' = z' + dz' + \frac{n'K}{R},$$

n, n' étant les coefficients variables de la réfraction.

De là

$$\frac{Z'-Z}{2}=\frac{z'-z}{2}+\frac{dz'-dz}{2}+\frac{n'-n}{2}\cdot\frac{K}{R},$$

et pour véritable différence de niveau partielle

$$x+dx=\frac{K}{\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{K}{R}\right)}.\tang.\tfrac{1}{2}(z'-z)+\frac{K}{2}(dz'-dz)+\frac{K^2}{2R}(n'-n),$$

dans la supposition toutefois que la base K est exactement connue. Si au contraire elle est entachée d'une erreur dk, on aura alors, en faisant $\frac{1}{2}(z'-z)=v$ et $n'-n=dn$, pour abréger, et prenant pour K sa longueur k au niveau de la mer,

$$dx=v\,dk-\frac{k}{2}dz+\frac{k}{2}dz'+\frac{k^2}{2R}dn.$$

Chaque nivellement partiel donnera évidemment une équation semblable; ainsi lorsque X est la différence de niveau des deux points extrêmes de la chaîne de triangles, on a, en supposant $\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{k}{R}\right)=1$,

$$X=k_1\tang.v_1+k_2\tang.v_2+k_3\tang.v_3\ldots+k_{(i)}\tang.v_{(i)},$$

i étant le nombre de ces nivellements partiels; et sa différentielle dX a généralement pour expression

$$dX=\Sigma(v\,dk)-\Sigma\left(\frac{k}{2}dz\right)+\Sigma\left(\frac{k}{2}dz'\right)+\Sigma\left(\frac{k^2}{2R}dn\right),$$

Σ désignant la somme de tous les termes pareils à celui que cette caractéristique précède. Il résulte delà et de la règle générale énoncée ci-dessus pour déterminer l'erreur probable de X, que cette erreur est

$$(1)\quad dX=\sqrt{\Sigma(v\,dk)^2+\Sigma\left(\frac{k}{2}dz\right)^2+\Sigma\left(\frac{k}{2}dz'\right)^2+\Sigma\left(\frac{k^2}{2R}dn\right)^2}.$$

Or si à chacune des quantités moyennes k, z, z', n, on applique la méthode exposée au n° 13 du *Supplément à la Géodésie*, pour déterminer tant leurs plus grandes erreurs probables Δk, , Δz, $\Delta z'$, Δn que leurs valeurs moyennes δk, δz, $\delta z'$, δn, et qu'on substitue successivement ces erreurs dans la formule (1), la limite de l'erreur de X sera

$$(2)\quad \Delta X = \sqrt{\Sigma(v\Delta k)^2 + \Sigma\left(\frac{k}{2}\Delta z\right)^2 + \Sigma\left(\frac{k}{2}\Delta z'\right)^2 + \Sigma\left(\frac{k^2}{2R}\Delta n\right)^2},$$

et l'erreur moyenne dont cette même différence de niveau pourra être affectée, sera représentée par

$$(3)\quad \delta X = \sqrt{\Sigma(v\delta k)^2 + \Sigma\left(\frac{k}{2}\delta z\right)^2 + \Sigma\left(\frac{k}{2}\delta z'\right)^2 + \Sigma\left(\frac{k^2}{2R}\delta n\right)^2}.$$

On aura donc de la sorte la mesure de la précision du nivellement trigonométrique.

Un grand nombre de comparaisons et de vérifications de bases mettent hors de doute que les côtés d'un réseau de triangles sont connus en général à un trente millième près; ainsi on pourra évaluer dk en faisant $\Delta k = \delta k = \frac{k}{30000}$. On pourra en outre supposer que dans $n' - n = dn$, la valeur de n est la moyenne entre toutes celles $n_1\, n_2\, n_3 \ldots\ldots n_{(i)}$ qui auront été conclues des distances zénitales réciproques.

Quant aux limites entre lesquelles chacune des valeurs moyennes z, z', n est comprise, elles se trouveront ainsi qu'il suit, d'après la méthode dont on vient de parler.

Soient par exemple $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots$ les différences des distances zénitales observées à la distance zénitale moyenne z, et $\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3 \ldots$ les nombres de répétitions qui leur correspondent; on aura, en appelant σ le nombre total de ces répétitions, 1° Pour la valeur moyenne de ces différences

$$\frac{\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2+\sigma_3\alpha_3+\ldots}{\sigma}=m,$$

2° Pour la valeur moyenne des carrés de ces mêmes différences

$$\frac{\sigma_1\alpha_1{}^2+\sigma_2\alpha_2{}^2+\sigma_3\alpha_3{}^2+\ldots}{\sigma}=m'.$$

Prenant ensuite

$$g=\sqrt{\frac{2(m'-m^2)}{\sigma}},$$

le nombre g sera la mesure de la précision de la distance zénitale moyenne z, ou, en d'autres termes, $3g$ sera la limite Δz de l'erreur positive ou négative dont la valeur de z peut être affectée, et $\frac{1}{2}g$ ou plus exactement $(0,47708)g$ exprimera l'erreur moyenne δz de cette même distance zénitale, c'est-à-dire celle dont la probabilité est $\frac{1}{2}$.

C'est ainsi qu'on déterminera les autres limites $\Delta z'$, Δn et les valeurs moyennes correspondantes $\delta z'$, δn à introduire dans les formules (2) et (3); mais il sera suffisamment exact de faire l'erreur moyenne $\delta z=\frac{1}{2}g$, et la plus grande erreur $\Delta z=6\delta z$; de cette manière on aura dans la formule (2),

$$\begin{aligned}&\Sigma\left(\frac{k}{2}\Delta z\right)^2+\Sigma\left(\frac{k}{2}\Delta z'\right)^2+\Sigma\left(\frac{k^2}{2\mathrm{R}}\Delta n\right)^2\\&=36\left[\Sigma\left(\frac{k}{2}\delta z\right)^2+\Sigma\left(\frac{k}{2}\delta' z'\right)^2+\Sigma\left(\frac{k^2}{2\mathrm{R}}\delta n\right)^2\right].\end{aligned}$$

En ayant donc égard à cette remarque, le calcul des formules (2) et (3) s'effectuera très-promptement.

On aura soin, bien attendu, pour satisfaire au principe de l'homogénéité, de réduire en parties du rayon les quantités angulaires v, Δz, $\Delta z'$, δz, $\delta z'$, c'est-à-dire d'écrire $v \sin. 1''$, $\Delta z \sin. 1''$, etc. si ces quantités sont exprimées en secondes : alors les valeurs de ΔX et δX seront données en mêmes unités que les bases $k_1\, k_2\, k_3 \ldots\ldots$

Exemple numérique.

Le triple nivellement que MM. le lieutenant-colonel Coraboeuf et le capitaine Peytier ont effectué depuis l'Océan jusqu'à la Méditerranée, me paraît réunir toutes les conditions nécessaires pour faire reconnaître si effectivement ces deux mers, considérées dans un état de repos absolu, présentent une différence de niveau, ainsi qu'on l'admet assez généralement. Ces habiles ingénieurs obligés de déterminer les différences de hauteurs de leurs stations par des distances zénitales non simultanées, mais réciproques, se sont imposé la loi de n'observer que dans les circonstances atmosphériques les plus favorables, et de prendre à chaque station, à des jours différents, au moins trois séries d'un même angle, et quelque fois six séries de dix répétitions chacune; afin que le résultat définitif répondît, autant que possible, à l'état moyen de l'atmosphère : aussi remarque-t-on dans les registres de calculs de M. Coraboeuf, que les écarts des séries comparables entre elles sont le plus souvent renfermés dans des limites fort étroites, et que les plus grandes oscillations du coefficient de la réfraction autour de sa valeur moyenne ne dépassent pas le quart de cette valeur. (Voyez les tableaux I et II qui accompagnent ce Mémoire.)

Ce nivellement important sur lequel leurs auteurs fourniront eux-mêmes plus de détails par la suite, a été opéré

sur trois lignes différentes : celle passant par les sommets de triangles, situés au sud de la zône trigonométrique, forme un développement d'environ 400000 mètres, et comprend dix-huit stations très-bien liées entre elles. M. Coraboeuf a trouvé au moyen de cette ligne et par un calcul rigoureux, que la hauteur du point géodésique du fort de Socoa au-dessus de la Méditerranée, est de. . . . . 8^{m},85
C'est ce que fait voir le tableau II ci-annexé.

La seconde ligne de nivellement, dirigée par les sommets de triangles, situés le plus au nord, a donné pour la même hauteur. . . . . 10^{m},40

Enfin la troisième ligne passant alternativement par les sommets nord et les sommets sud, a donné. 8 ,69

En prenant une moyenne entre ces trois résultats, on a. . . . . 9 ,31

Par une mesure immédiate, la hauteur du même point au-dessus de l'Océan (mer moyenne), a été trouvée de . . . . 8 ,43

Ainsi la différence entre ces deux mesures est de. . 0 ,88

Doit-on conclure, d'une si petite différence, que la Méditerranée est plus basse que l'Océan d'un mètre environ, ou est-il plus exact de dire que cette différence est due en grande partie aux erreurs inévitables des observations? C'est une question sur laquelle le calcul des probabilités peut seul jeter quelques lumières.

En effet en appliquant la méthode précédente à la première ligne de nivellement que présentent nos deux tableaux ci-joints, on trouve pour l'erreur moyenne du résultat. . . . . 0^{m},32 et pour la plus grande erreur positive ou négative.. $1^m,86$

Par la seconde ligne de nivellement, on trouve l'erreur moyenne de.......................... $0\ ,26$

et par conséquent la limite de cette erreur de.... $1\ ,42$

Ainsi il est évident que ces deux nivellements ont le même degré de précision, et qu'en faisant concourir tous les trois à la recherche de la différence de niveau des deux mers, on peut assurer avec une probabilité suffisante, que cette différence, si elle existe, est inférieure à la limite de l'erreur possible des mesures trigonométriques. Il y aurait beaucoup plus de cinquante mille à parier contre un que cette erreur n'est pas d'un mètre et demi, si les observations de distances zénitales eussent été multipliées davantage, toutes choses égales d'ailleurs.

Les conséquences déduites du calcul des probabilités n'étant relatives qu'aux erreurs fortuites de mesures, il est essentiel d'employer les meilleurs instruments, de multiplier le nombre des observations et d'en varier les circonstances, afin d'atténuer l'effet des erreurs accidentelles, d'éviter les causes constantes d'erreur, et d'obtenir des résultats très-précis. On remarquera cependant que l'erreur constante dont le cercle répétiteur peut être affecté, n'a aucune influence sur la différence de niveau conclue des distances zénitales réciproques, puisqu'elle disparaît nécessairement de la formule (A).

Les résultats numériques qui viennent d'être énoncés m'ont paru assez intéressants pour que je crusse devoir en faire l'objet d'une communication à l'Académie des sciences. Ils prouveraient seuls que les travaux trigonométriques de la nouvelle carte du royaume, exécutés d'après les procédés mêmes qui ont été employés dans la mémorable opération de la méridienne, méritent une entière confiance. Ces travaux réunis à ceux dont le corps royal des ingénieurs-géographes a également enrichi le dépôt de la guerre pendant plus de trente ans, formeront sans contredit la plus riche et la plus précieuse collection géodésique qui ait jamais existé. Qui le croirait cependant ! il n'est bruit que de la fusion prochaine de ce corps spécial dans celui d'état-major, et que d'ôter par conséquent à l'École polytechnique le privilège exclusif dont elle jouit depuis 1809, de fournir des élèves pour le service de la géodésie.

Observons, en finissant, que si l'on était curieux de vérifier les différences de niveau calculées au moyen de la formule (A), il serait nécessaire de les évaluer d'abord approximativement en prenant pour bases $k\,k_1 \ldots .$ celles qui proviennent immédiatement de la résolution des triangles et qui représentent, à la surface de l'Océan, les plus courtes distances des stations. Ensuite on les diminuerait de leurs excès sur les cordes correspondantes, puis on les augmenterait d'une quantité dépendante de la hauteur absolue de la station la plus basse des deux que l'on compare. Cette double correction est essentielle ici, à cause de l'éloignement et de la hauteur considérable des montagnes aux sommets desquelles les signaux ont été placés. Enfin l'on déterminerait de rechef les différences de niveau en faisant usage des bases ainsi corrigées, et cette fois les résultats seraient exacts.

Il résulte de cette remarque qu'en désignant par k un arc terrestre au niveau des mers, et par K la corde d'un arc semblable à la hauteur absolue h, on a

$$K = k\left(1 - \frac{k^2}{24\rho^2}\right)\left(1 + \frac{h}{\rho}\right),$$

ρ étant le rayon de la terre ou mieux la normale dans le lieu du nivellement. On trouvera, pour simplifier les calculs, une table du log. K à la fin du supplément au Traité de Géodésie.

N. B. Les valeurs des constantes $g g_1 g_2$ que nous avons adoptées dans ce Mémoire ne sont pas celles qui résulteraient de l'hypothèse de Laplace, (p. 28 du *Supplément à la Théorie analytique des probabilités*). Nous nous sommes, à cet égard, écartés de la méthode de ce savant célèbre, parce que les constantes dont il s'agit ne nous paraissent pas devoir dépendre des erreurs de la somme des trois angles horizontaux des triangles qui représentent la ligne de nivellement.

ERRATA.

Pag. 469, lign. 3, qu'il faudra, *lisez:* qu'il faudrait.

Pag. 522, lign. 2, en remontant, venons faire, *lisez :* venons de faire.

TABLEAU I.

STATIONS COMPARÉES.	Répétitions.	Écarts des distances zénitales autour de la moyenne z.						Répétitions.	Écarts des distances zénitales autour de la moyenne z'.					
		en +			en —				en +			en —		
			centésim.							centésim.				
Vigie St-Ange-St-Laurent.......	36	12",1			11",7	0",4		22	0",3			0",3		
St-Laurent-terme austr. de la base.	46	39,2	7,0		33 ,8	12,3		44	10 ,5	6,5	6,0	23 ,1		
Terme austral-Forceral.......	50	22,1	6,5		16 ,0	12,7		52	12 ,5	5,3	4,4	22 ,2		
Forceral-Canigou..............	70	10,6	8,1	6,5	14 ,0	7,6	3,5	50	6 ,2	4,7	0,9	7 ,8	4,1	
Canigou-Liouses...............	56	12,4	9,7		12 ,2	6,6	3,2	36	29 ,0	2,5		31 ,4		
Liouses-Colrouge..............	34	3,5			2 ,2	1,2		44	8 ,1	3,9		10 ,6	1,4	
Camigou-Modrès...............	44	6,8	6,7		13 ,3	0,2		58	4 ,4	4,3		4 ,8	2,1	1,8
Modrès-Colrouge..............	60	14,9	4,5	0,5	12 ,8	7,1		46	6 ,7	6,7	2,2	15 ,5		
Colrouge-Montcal..............	42	11,2	7,7		11 ,5	7,3		34	2 ,6			1 ,4	1,2	
Montcal-Crabère...............	30	37,5	23,5		61 ,0			42	12 ,0	6,0		11 ,8	6,2	
Crabère-Maupas...............	36	8,0	1,5		9 ,5			32	22 ,0			16 .	6.	
Maupas-Troumouse.............	32	21,7	15,7		37 ,4			32	10 ,3			8 ,7	1,6	
Troumouse-Baletous...........	30	14,8			9 ,6	4,7		32	27 .			22 ,5	5.	
Baletous-Pic d'anie...........	30	3,3			2 ,7	0,6		30	27 .			20 .	7.	
Pic d'anie-Orhi...............	30	5.			3 .	2.		30	22 ,7	11,7		34 ,3		
Orhi-Lissératéca..............	30	7,3	2,3		9 ,7			34	12 .			12 .		
Lissératéca-Larhune...........	32	10.	7.		17 .			30	3 ,3	2,4		5 ,7		
Larhune-Fort Socoa...........	30	4,7			3 ,3	1,4		42	15 ,5	10,5		24 ,5	1,5	

TABLEAU

STATIONS COMPARÉES.	BASES au niveau de la mer.	Distances zénitales réduites aux sommets des signaux. z	z'	DIFFÉRENCES de niveau.	HAUTEURS au-dessus de la Méditerranée
Vigie du fort St-Ange	....	....	....	....	17m,11
Vigie-St-Laurent de Salanque	....	99g,89281	100g,15921	+ 12m,99	
St-Laurent-terme austr. de la base	....	99 ,98174	100 ,10652	+ 10 ,01	+2770 ,67
Terme austral-Forceral	....	98 ,09274	102 ,03472	+ 472 ,38	
Forceral-Canigou	....	95 ,39719	104 ,86302	+2275 ,29	2787 ,78
Canigou-Liouses	....	100 ,01612	100 ,22087	+ 44 ,98	+ 20 ,36
Liouses-Colrouge	....	100 ,16713	100 ,02870	— 24 ,62	2808 ,14
Canigou-Modrès	....	100 ,87366	99 ,35180	— 313 ,63	2787 ,78
Modrès-Colrouge	....	99 ,24335	100 ,97186	+ 334 ,53	+ 20 ,90 2808 ,68
Colrouge-Montcal	....	99 ,80369	100 ,58572	+ 273 ,05	2808 ,14
Montcal-Crabère	....	100 ,80433	99 ,61628	— 448 ,09	2808 ,41
Crabère-Maupas	....	99 ,0757	101 ,1770	+ 480 ,58	
Maupas-Troumouse	....	100 ,1944	100 ,1017	— 24 ,48	
Troumouse-Baletous	....	100 ,0648	100 ,2686	+ 59 ,67	
Baletous-Pic d'anie	....	101 ,2638	99 ,0614	— 641 ,41	—2799 ,56
Pic d'anie-Orhi	....	101 ,4085	98 ,8004	— 487 ,74	
Orhi-Lissératéca	....	101 ,8375	98 ,3521	— 607 ,51	
Lissératéca-Larhune	....	100 ,9576	99 ,4040	— 507 ,82	
Larhune-Fort Socoa	....	105 ,5811	94 ,5094	— 895 ,81	
					8m,85

II.

BASES		Répétitions.	Erreurs moyennes des distances zénitales.			Quantités dépendantes de la réfraction.			
niveau la mer.	erreurs moyennes		dz	Répétit.	dz'	Répétit.	Coefficient n.	Écart de la moyenne.	Erreur moyenne.
			centésim.		centésim.				
210m,66	0m,2070	36	1″,1447	22	0″,0000	29	+0,0812	+0,0169	
212 ,65	0 ,3404	46	2 ,7532	44	0 ,9224	45	0,0678	+0,0035	
252 ,20	0 ,5084	50	1 ,5386	52	1 ,2940	51	0,0813	+0,0170	
540 ,44	1 ,0180	70	0 ,7600	50	0 ,8355	60	0,0688	+0,0045	
125 ,63	0 ,9042	56	0 ,8970	36	2 ,9135	46	0,0628	—0,0015	
636 ,04	0 ,7545	34	0 ,3015	44	0 ,7445	39	0,0676	+0,0033	
227 ,81	0 ,8742	44	0 ,8725	58	0 ,3435	51	0,0690	+0,0047	
629 ,32	0 ,8209	60	0 ,8725	46	1 ,2010	53	0,0615	—0,0028	$dn = 0,00023219$
434 ,50	1 ,4811	42	1 ,0495	34	0 ,2230	38	0,0614	—0,0029	
98 ,40	1 ,5999	30	5 ,6170	42	1 ,0310	36	0,0624	—0,0019	
102 ,68	0 ,9701	36	0 ,8510	32	2 ,0100	34	0,0675	+0,0032	
570 ,72	1 ,1190	32	3 ,3200	32	1 ,6970	32	0,0588	—0,0055	
62 ,37	1 ,2420	30	1 ,3600	32	2 ,5190	31	0,0527	—0,0016	
60 ,30	1 ,2353	30	0 ,3210	30	2 ,5360	30	0,0598	—0,0045	
798 ,10	0 ,7933	30	0 ,4600	30	3 ,1880	30	0,0588	—0,0055	
181 ,80	0 ,7394	30	0 ,9210	34	1 ,1880	32	0,0703	+0,0060	
07 ,80	1 ,3869	32	1 ,5100	30	0 ,5520	31	0,0650	+0,0007	
174 ,95	0 ,3425	30	0 ,4400	42	1 ,6840	36	0,0399	—0,0244	
						704	0,0643		

MÉMOIRE

SUR

LA PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS LES MILIEUX ÉLASTIQUES.

Par M. POISSON.

Lu à l'Académie, le 11 octobre 1830.

Tous les corps, solides, liquides, aëriformes sont susceptibles de compression. Dans les solides et les liquides, la compressibilité est très-faible, et il faut employer de très-grandes forces pour la rendre sensible. Dès qu'on enlève ces forces, les liquides reprennent leur volume primitif. Il n'en est pas de même à l'égard de tous les corps solides : les uns conservent la forme et le volume que ces forces leur avaient fait prendre ; les autres reviennent exactement à leur volume et à leur forme propres, aussitôt que ces forces ont cessé d'agir, en sorte que ces corps sont parfaitement élastiques, aussi bien que les liquides et les gaz. Un milieu élastique peut donc être un gaz, un liquide ou un solide ; et le mouvement ayant été imprimé d'une manière quelconque, à une portion limitée d'un semblable milieu, l'objet de ce Mémoire est de déterminer les lois suivant lesquelles il doit s'y propager. Pour former les équations différentielles de ce mouvement, il est nécessaire d'avoir égard à la nature intime du système, aux forces d'attraction ou de répulsion qui ont lieu entre ses molécules, et à la propriété essentielle qui distingue les fluides des corps solides. C'est ce que j'ai fait dans un autre Mémoire; dans celui-ci, il s'agira d'intégrer ces équations, de déterminer, d'après l'état initial du système, les fonctions arbitraires qui complètent leurs intégrales, puis de déduire de ces intégrales, les lois de la propagation du mouvement et la constitution des ondes mobiles, à une grande distance de l'ébranlement primitif, c'est-à-dire, leurs propriétés indépendantes du mode particulier de cet ébranlement.

Nous supposerons très-petites, les vitesses de tous les points du système, ainsi que les dilatations ou condensations qui les accompagnent, et nous négligerons, en conséquence, les carrés et les produits de ces quantités, ce qui rendra linéaires, les équations différentielles dont elles dépendent. Nous supposerons aussi le milieu homogène et partout à la même température, afin que les coefficients relatifs à la nature du système, que ces équations renferment, soient des quantités constantes, et que les intégrales puissent s'obtenir sous une forme qui ne soit pas trop compliquée.

§ I.

Propagation du mouvement dans un fluide.

(1) Soit M un point quelconque d'un fluide, dont la position, au bout du temps t, est déterminée par les trois coordonnées rectangulaires x, y, z, et qui est sollicité suivant

leurs prolongements, par les forces X, Y, Z, accélératrices ou rapportées à l'unité de masse. Représentons, au même instant par u, v, w, les trois composantes de la vitesse de M, en sorte qu'on ait

$$u=\frac{dx}{dt},\quad v=\frac{dy}{dt},\quad w=\frac{dz}{dt}.$$

Soient aussi p et ρ deux fonctions de x, y, z, t, qui représentent, au point M et au bout du temps t, la pression rapportée à l'unité de surface et la densité du fluide. Les équations du mouvement seront celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
\rho\left(X-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-v\frac{du}{dy}-w\frac{du}{dz}\right)&=\frac{dp}{dx},\\
\rho\left(Y-\frac{dv}{dt}-u\frac{dv}{dx}-v\frac{dv}{dy}-w\frac{dv}{dz}\right)&=\frac{dp}{dy},\\
\rho\left(Z-\frac{dw}{dt}-u\frac{dw}{dx}-v\frac{dw}{dy}-w\frac{dw}{dz}\right)&=\frac{dp}{dz},
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

qui sont fournies par le principe de d'Alembert, et celle-ci

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}=0,\qquad(2)$$

qui exprime que la masse de chaque petite partie du fluide ne varie pas pendant son mouvement.

Les équations (1) supposent la pression p égale en tous sens autour du point M et normale à la surface sur laquelle elle s'exerce. C'est, en effet, ce que l'on admet ordinairement; mais, en examinant avec attention la cause de cette égalité de pression, j'ai fait voir, dans un autre Mémoire, qu'elle peut s'observer dans l'état d'équilibre d'un fluide et n'avoir plus lieu pendant son mouvement. Les équations (1) devraient alors être remplacées par d'autres, que l'on trouvera dans le

Mémoire cité et dont nous ne nous occuperons pas dans celui-ci.

(2) Les équations (1) et (2) sont communes aux gaz et aux liquides. S'il s'agit d'un fluide aëriforme, et si l'on veut que sa densité soit constante dans son état d'équilibre, il faudra que les forces X, Y, Z, soient nulles. Désignons alors par D, la densité naturelle de ce fluide, et par gh la mesure de sa force élastique; g étant la gravité et h la hauteur d'un liquide déterminé dont la densité est prise pour unité. Dans l'état d'équilibre, on aura

$$\rho = \mathrm{D}, \quad p = gh.$$

Au bout du temps t, soit s la dilatation du fluide qui a lieu au point M, en sorte que sa densité y soit diminuée dans le rapport de $1-s$ à l'unité. Suivant la loi de Mariotte, la pression p varierait dans le même rapport; mais on sait que pendant le mouvement, elle suit une loi différente, et qu'on aura, en même temps,

$$\rho = \mathrm{D}(1-s), \quad p = gh(1-\gamma s); \qquad (3)$$

γ étant une constante positive et plus grande que l'unité, qui représente le rapport de la chaleur spécifique du gaz sous une pression constante, à sa chaleur spécifique sous un volume constant. En négligeant les quantités du second ordre par rapport à s, u, v, w, et faisant, pour abréger,

$$\frac{gh\gamma}{\mathrm{D}} = a^2,$$

les équations (1) deviendront

$$\frac{du}{dt} = a^2\frac{ds}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = a^2\frac{ds}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = a^2\frac{ds}{dz}, \qquad (4)$$

et l'équation (2) se réduira à

$$\frac{ds}{dt}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}. \qquad (5)$$

Dans le cas d'un liquide, nous représenterons encore par D sa densité naturelle correspondante à une pression gh. La densité de ce liquide, au point M et au bout du temps t, devenant $D(1-s)$, par l'effet des forces X, Y, Z, et de l'état de mouvement, les équations (3) subsisteront toujours; mais γ y représentera une constante qui dépendra de la dilatation du liquide, correspondante à une diminution de pression donnée. Ainsi, par conséquent, en supposant que la pression et la densité deviennent en même temps, $g(h-k)$ et $D(1-\varepsilon)$, on aura

$$g(h-k)=gh(1-\gamma\varepsilon);$$

d'où l'on tire

$$\gamma=\frac{k}{h\varepsilon}, \qquad a^2=\frac{gk}{D\varepsilon}.$$

Si donc on suppose les forces X, Y, Z, nulles, et que l'on néglige les quantités du second ordre par rapport à u, v, w, s, les équations (1) et (2) se changeront encore dans les équations (4) et (5); par conséquent, les lois du mouvement qui en dépendent, ne différeront, dans les deux cas d'un liquide et d'un fluide aëriforme, que par la valeur de la constante a et par les données de l'expérience qui serviront à la déterminer.

Mais il ne faut pas confondre le mouvement qui se propage dans un liquide, en vertu de son élasticité et des petites dilatations ou condensations dont il est susceptible, avec le mouvement produit par la pesanteur de ses parties, lorsqu'on l'écarte un tant soit peu de son état d'équilibre. C'est ce second cas que j'ai traité dans mon Mémoire sur la propagation des ondes à la surface et suivant la profondeur de l'eau : j'ai alors négligé la dilatation s et considéré la densité ρ comme constante; mais je me propose de reprendre bientôt cette question, et de considérer le mouvement de l'eau en ayant égard, à la fois, à sa pesanteur et à son élasticité.

Dans tous les cas, si le fluide, gaz ou liquide, est contenu dans un vase, on joindra aux équations précédentes, celles qui expriment que la vitesse normale aux parois est nulle en chacun de leurs points. S'il s'agit d'un liquide et qu'une partie de sa surface soit libre et soumise à une pression constante, on aura, en tous les points de cette surface, l'équation $dp = 0$ qui servira à la déterminer à chaque instant. Mais dans ce Mémoire, on ne s'occupera que de la propagation du mouvement dans un fluide qui se prolonge indéfiniment en tous sens et dont on ne considère pas la pesanteur, mais seulement l'élasticité, ce qui réduit la question à l'intégration des équations (4) et (5), et à la discussion des valeurs de u, v, w, s, qui en résulteront.

(3) Pour intégrer ces équations (4) et (5), je désigne par φ une fonction inconnue de x, y, z, t, et je fais

$$s = \frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (6)$$

Les équations (4) donneront

$$u = \frac{d\varphi}{dx} + \mathrm{U}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy} + \mathrm{V}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz} + \mathrm{W}; \qquad (7)$$

U, V, W, étant des fonctions arbitraires de x, y, z. On a coutume de supposer, d'après la *Mécanique analytique*, que dans les petits mouvements des fluides, les trois composantes u, v, w, de la vitesse de chaque molécule, sont les différences partielles relatives à x, y, z, d'une fonction de x, y, z, t. Cela revient à faire égales à zéro, les trois quantités U, V, W; hypothèse qui ne conduirait qu'à une solution particulière des équations (4) et (5); et, en effet, il est évident que la formule $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ ne peut être une différentielle exacte à trois variables indépendantes, pendant toute la durée du mouvement, à moins que cette condition ne soit remplie à l'origine; ce qui n'a pas lieu nécessairement. Nous supposerons qu'on a $\varphi = 0$ quand $t = 0$; les trois fonctions U, V, W, arbitraires et indépendantes l'une de l'autre, seront alors les valeurs initiales de u, v, w. La valeur de $\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$ qui répond à $t = 0$, sera une quatrième fonction arbitraire, qui représentera la dilatation initiale en un point quelconque du fluide; et dans chaque cas particulier, cette valeur et celles de U, V, W, seront données en fonctions de x, y, z.

Cela posé, si l'on substitue les formules (6) et (7) à la place de s, u, v, w, dans l'équation (5), et qu'on fasse, pour abréger,

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = \psi(x, y, z),$$

on aura

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \psi(x, y, z)\right). \qquad (8)$$

Mais quelle que soit la fonction ψ, on a, d'après la formule de Fourier étendue à trois variables,

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3}\iiiiiint \psi(x', y'\, z')\cos.[\alpha(x - x') + \beta(y - y') + \gamma(z - z')]\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz';$$

les limites de ces six intégrales étant $\pm\infty$. Si donc, nous faisons

$$\varphi=\varphi'+\frac{1}{8\pi^3}\iiiint\!\!\iint\psi(x',y',z')\cos.[\alpha(x-x')+6(y-y')+\gamma(z-z')]\frac{d\alpha\, d6\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz'}{\alpha^2+6^2+\gamma^2}, \quad (9)$$

l'équation (8) deviendra

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}+\frac{d^2\varphi'}{dy^2}+\frac{d^2\varphi'}{dz^2}\right).$$

Or, j'ai trouvé, dans un autre Mémoire,

$$\begin{aligned}\varphi'=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}&\mathrm{F}(x+at\cos.\theta,\, y+at\sin.\theta\sin.\omega,\\&\quad z+at\sin.\theta\cos.\omega)t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega\\+\frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}&\Pi(x+at\cos.\theta,\, y+at\sin.\theta\sin.\omega,\\&\quad z+at\sin.\theta\cos.\omega)t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega,\end{aligned} \quad (10)$$

pour l'intégrale complète de cette dernière équation; π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, et F et Π étant les deux fonctions arbitraires, lesquelles sont telles que l'on a

$$\varphi'=\Pi(x,y,z),\ \frac{d\varphi'}{dt}=\mathrm{F}(x,y,z),$$

quand $t=0$. Donc, à cause de $\varphi=0$ pour cette valeur de t, et, en vertu de l'équation (9), $\mathrm{F}(x,y,z)$ sera la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$, et l'on aura

$$\Pi(x,y,z)=-\frac{1}{8\pi^3}\iiiint\!\!\iint\psi(x',y',z')\cos.[\alpha(x-x')+6(y-y')+\gamma(z-z')]\frac{d\alpha\, d6\, d\gamma\, dx'\, dy'\, dz'}{\alpha^2+6^2+\gamma^2},$$

pour la valeur de $\Pi(x, y, z)$. Les deux fonctions F et Π étant ainsi déterminées, si l'on met la formule (10), à la place de φ', dans la formule (9), l'expression de φ qui en résultera, sera l'intégrale complète de l'équation (8); et en substituant cette expression de φ dans les équations (6) et (7), on aura les intégrales complètes des équations (4) et (5). Mais avant d'effectuer ces substitutions, nous réduirons à une forme plus simple, l'intégrale contenue dans la formule (9) et dans la valeur précédente de $\Pi(x, y, z)$.

(4) Considérons α, β, γ, comme les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'espace; remplaçons ces trois variables, par les coordonnées polaires du même point; et faisons, en conséquence,

$$\alpha = \rho \cos.\theta, \quad \beta = \rho \sin.\theta \sin.\omega, \quad \gamma = \rho \sin.\theta \cos.\omega;$$

ρ étant son rayon vecteur, et θ et ω les deux angles qui en déterminent la direction. Nous aurons

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma = \rho^2 \sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega;$$

les intégrales relatives à ρ, θ, ω, s'étendront depuis $\rho = 0$, $\theta = 0$, $\omega = 0$, jusqu'à $\rho = \infty$, $\theta = \pi$, $\omega = 2\pi$; et la formule (9) deviendra

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{8\pi^3}\iiiint\!\!\iint \psi(x', y', z') \cos.\rho\big[(x - x')\cos.\theta$$
$$+ (y - y')\sin.\theta \sin.\omega + (z - z')\sin.\theta\cos.\omega\big]\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Mais, d'après des formules connues, si l'on fait

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r'^2,$$

et que l'on regarde r' comme positif, on a

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos.\rho\left[(x-x')\cos.\theta+(y-y')\sin.\theta\sin.\omega\right.$$

$$\left.+(z-z')\sin.\theta\cos.\omega\right]\sin.\theta\, d\theta\, d\omega=\frac{4\pi\sin.\rho r'}{\rho r'},$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin.\rho r'}{\rho}d\rho=\tfrac{1}{2}\pi;$$

d'où il résultera

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=\varphi'+\frac{1}{4\pi}\iiint\psi(x',y',z')\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r'},\\&\Pi=-\frac{1}{4\pi}\iiint\psi(x',y',z')\frac{dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}};\end{aligned}\right\}(11)$$

ce qui réduit à une intégrale triple, l'intégrale sextuple dont il s'agissait.

(5) Pour réduire encore davantage, l'intégrale dépendante de celle-ci ou de la fonction Π, que renferme la formule (10), soit

$$\begin{aligned}\zeta=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}&[(x+at\cos.\theta-x')^2+(y+at\sin.\theta\sin.\omega-y')^2\\&+(z+at\sin.\theta\cos.\omega-z')^2]^{-\frac{1}{2}}at\sin.\theta\, d\theta\, d\omega.\end{aligned}\quad(12)$$

En faisant

$$\begin{aligned}x'-x&=r'\cos.\theta',\\y'-y&=r'\sin.\theta'\sin.\omega',\\z'-z&=r'\sin.\theta'\cos.\omega',\end{aligned}\qquad(13)$$

nous aurons d'abord

$$\begin{aligned}\zeta=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}&[r'^2-2r'at(\cos.\theta\cos.\theta'+\sin.\theta\sin.\theta'\cos.(\omega'-\omega))\\&+a^2t^2]^{-\frac{1}{2}}at\sin.\theta\, d\theta\, d\omega.\end{aligned}$$

Cette intégrale double est relative à tous les points d'une surface sphérique dont l'élément différentiel est $\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$. Or, si l'on fait

$$\cos.\theta \cos.\theta' + \sin.\theta \sin.\theta' \cos.(\omega' - \omega) = \cos.\mu,$$

on pourra considérer θ, θ' et μ, comme les trois côtés d'un triangle sphérique dans lequel $\omega' - \omega$ est l'angle opposé au côté μ; en appelant λ l'angle opposé à θ', on pourra substituer les variables μ et λ à θ et ω; l'élément différentiel de la surface s'exprimera alors par $\sin.\mu\, d\mu\, d\lambda$; et l'intégrale devra s'étendre depuis $\mu = 0$ et $\lambda = 0$ jusqu'à $\mu = 0$ et $\lambda = 2\pi$, en sorte que l'on aura

$$\zeta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{at \sin.\mu\, d\mu\, d\lambda}{\sqrt{r'^2 - 2r'at\cos.\mu + a^2t^2}}.$$

Aux deux limites $\mu = 0$ et $\mu = \pi$, les valeurs du radical $\sqrt{r'^2 - 2r'at\cos.\mu + a^2t^2}$ seront $\pm(r' - at)$ et $\pm(r' + at)$; et comme ce radical doit être une quantité positive dans toute l'étendue de l'intégration, il faudra prendre, à la première limite, $r' - at$ ou $at - r'$, pour sa valeur, selon qu'on aura $at < r'$ ou $at > r'$, et dans les deux cas, $r' + at$ à la seconde limite. Cela étant, on aura

$$\zeta = \frac{2\pi}{r'}[(r' + at) - (r' - at)] = \frac{4\pi at}{r'},$$

dans le cas de $r' > at$, et

$$\zeta = \frac{2\pi}{r'}[(r' + at) - (at - r')] = 4\pi,$$

dans le cas de $r' < at$.

En comparant la seconde formule (11) et la formule (12), on en conclura

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Pi(x+at\cos.\theta,\quad y+at\sin.\theta\sin.\omega,\\ z+at\sin.\theta\cos.\omega)at\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$$

$$=-\iiint\psi(x',y',z')\frac{at\,dx'\,dy'\,dz'}{r'},\ \text{ou}=-\iiint\psi(x',y',z')dx'dy'dz',$$

et, par conséquent

$$\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Pi(x+at\cos.\theta,\quad y+at\sin.\theta\sin.\omega,\\ z+at\sin.\theta\cos.\omega)t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$$

$$=-\iiint\psi(x',y',z')\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r'},\ \text{ou}\ =0,$$

selon qu'on aura $at<r'$, ou $at>r'$. Mais, d'après les équations (13), si l'on substitue r', θ', ω', à x', y', z', dans l'intégration relative à ces dernières variables, on aura

$$dx'dy'dz'=r'^2\sin.\theta'dr'd\theta'd\omega';$$

les limites relatives à x', y', z', étant $\pm\infty$, celles qui répondent à r', θ', ω', seront $r'=0$, $\theta'=0$, $\omega'=0$, et $r'=\infty$, $\theta'=\pi$, $\omega'=2\pi$; on aura donc

$$\iiint\psi(x',y',z')\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r'}=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+r'\cos.\theta',\\ y+r'\sin.\theta'\sin.\omega',\ z+r'\sin.\theta'\cos.\omega')r'\sin.\theta'dr'd\theta'd\omega',$$

et, par conséquent,

$$\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Pi(x+at\cos.\theta,\quad y+at\sin.\theta\sin.\omega,\\ z+at\sin.\theta\cos.\omega)t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$$

$$=-\int_{at}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+r'\cos.\theta',\ y+r'\sin.\theta'\sin.\omega',\\ z+r'\sin.\theta'\sin.\omega')r'\sin.\theta'dr'd\theta'd\omega'.$$

Or, en vertu de ces deux dernières équations, si l'on ajoute, membre à membre, l'équation (10) et la première équation (11), on aura finalement

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} & \mathrm{F}(x + at\cos.\theta,\ \ y + at\sin.\theta\sin.\omega, \\ & \qquad z + at\sin.\theta\cos.\omega)\,t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} & \psi(x + \rho\cos.\theta,\ \ y + \rho\sin.\theta\sin.\omega, \\ & \qquad z + at\sin.\theta\cos.\omega)\,\rho\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega,\end{aligned} \qquad (14)$$

en employant dans cette dernière intégrale, ρ, θ, ω, au lieu de r', θ', ω'.

Cette expression de φ est, sous la forme la plus simple, l'intégrale générale de l'équation (8). En la substituant, comme on l'a dit, dans les équations (6) et (7), on aura les intégrales des équations (4) et (5) qu'il s'agissait d'obtenir. On se souviendra que $\frac{1}{a^2}\mathrm{F}(x, y, z)$, U, V, W, sont les valeurs de s, u, v, w, qui répondent à $t=0$, et qu'on a fait, pour abréger,

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz} = \psi(x, y, z).$$

(6) Appliquons ce résultat au cas où les quantités U, V, W sont les différences partielles relatives à x, y, z, d'une fonction de ces trois variables, et supposons qu'on ait

$$\mathrm{U} = \frac{df(x,y,z)}{dx}, \quad \mathrm{V} = \frac{df(x,y,z)}{dy}, \quad \mathrm{W} = \frac{df(x,y,z)}{dz};$$

d'où il résultera

$$\begin{aligned}\psi(x + \rho\cos.\theta,\ y + \rho\sin.\omega,\ z + \rho\sin.\theta\cos.\omega) \\ = \frac{d^2\varpi}{dx^2} + \frac{d^2\varpi}{dy^2} + \frac{d^2\varpi}{dz^2},\end{aligned} \qquad (15)$$

en faisant, pour abréger,

$$f(x+\rho\cos.\theta,\quad y+\rho\sin.\theta\sin.\omega,\quad z+\rho\sin.\theta\cos.\omega)=\varpi.$$

D'après cette expression de ϖ, on aura

$$\frac{d\varpi}{d\rho}=\frac{d\varpi}{dx}\cos.\theta+\frac{d\varpi}{dy}\sin.\theta\sin.\omega+\frac{d\varpi}{dz}\sin.\theta\cos.\omega,$$
$$\frac{d\varpi}{d\theta}=-\frac{d\varpi}{dx}\rho\sin.\theta+\frac{d\varpi}{dy}\rho\cos.\theta\sin.\omega+\frac{d\varpi}{dz}\rho\cos.\theta\cos.\omega,$$
$$\frac{d\varpi}{d\omega}=\frac{d\varpi}{dy}\rho\sin.\theta\cos.\omega-\frac{d\varpi}{dz}\rho\sin.\theta\sin.\omega;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varpi}{dx}=\frac{d\varpi}{d\rho}\cos.\theta-\frac{d\varpi}{d\theta}\,\frac{\sin.\theta}{\rho},$$
$$\frac{d\varpi}{dy}=\frac{d\varpi}{d\rho}\sin.\theta\sin.\omega+\frac{d\varpi}{d\theta}\,\frac{\cos.\theta\sin.\omega}{\rho}+\frac{d\varpi}{d\omega}\,\frac{\cos.\omega}{\rho\sin.\theta},$$
$$\frac{d\varpi}{dz}=\frac{d\varpi}{d\rho}\sin.\theta\cos.\omega+\frac{d\varpi}{d\theta}\,\frac{\cos.\theta\cos.\omega}{\rho}-\frac{d\varpi}{d\omega}\,\frac{\sin.\omega}{\rho\sin.\theta}.$$

En mettant $\frac{d\varpi}{dx}$ au lieu de ϖ dans la première de ces trois dernières équations, on a

$$\frac{d^2\varpi}{dx^2}=\frac{d^2\varpi}{dx\,d\rho}\cos.\theta-\frac{d^2\varpi}{dx\,d\theta}\,\frac{\sin.\theta}{\rho};$$

et en différentiant successivement cette même équation par rapport à ρ et à θ, il vient

$$\frac{d^2\varpi}{dx\,d\rho}=\frac{d^2\varpi}{d\rho^2}\cos.\theta-\frac{d^2\varpi}{d\rho\,d\theta}\,\frac{\sin.\theta}{\rho}+\frac{d\varpi}{d\theta}\,\frac{\sin.\theta}{\rho^2},$$
$$\frac{d^2\varpi}{dx\,d\theta}=\frac{d^2\varpi}{d\rho\,d\theta}\cos.\theta-\frac{d\varpi}{d\rho}\sin.\theta-\frac{d^2\varpi}{d\theta^2}\,\frac{\sin.\theta}{\rho}-\frac{d\varpi}{d\theta}\,\frac{\cos.\theta}{\rho};$$

par conséquent, on aura

$$\frac{d^2\varpi}{dx^2}=\frac{d^2\varpi}{d\rho^2}-2\frac{d^2\varpi}{d\rho\, d\theta}\,\frac{\sin.\theta\cos.\theta}{\rho}+\frac{d^2\varpi}{d\theta^2}\,\frac{\sin.^2\theta}{\rho^2}$$
$$+2\frac{d\varpi}{d\theta}\,\frac{\sin.\theta\cos.\theta}{\rho}+\frac{d\varpi}{d\rho}\,\frac{\sin.^2\theta}{\rho}.$$

Par des combinaisons analogues, on obtiendra les valeurs de $\frac{d^2\varpi}{dy^2}$ et $\frac{d^2\varpi}{dz^2}$ en différences partielles relatives à ρ, θ, ω. En les ajoutant ensuite à la valeur de $\frac{d^2\varpi}{dx^2}$, on trouve, toutes réductions faites,

$$\frac{d^2\varpi}{dx^2}+\frac{d^2\varpi}{dy^2}+\frac{d^2\varpi}{dz^2}=\frac{1}{\rho}\,\frac{d^2.\rho\varpi}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho^2\sin.\theta}\,\frac{d.\frac{d\varpi}{d\theta}\sin.\theta}{d\theta}+\frac{1}{\rho^2\sin.^2\theta}\,\frac{d^2\varpi}{d\omega^2}.$$

On conclut delà

$$\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d^2\varpi}{dx^2}+\frac{d^2\varpi}{dy^2}+\frac{d^2\varpi}{dz^2}\right)\rho\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega$$
$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{at}\frac{d^2.\rho\varpi}{d\rho^2}d\rho\right)\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$+\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{d.\frac{d\varpi}{d\theta}\sin.\theta}{d\theta}d\theta\right)\frac{d\rho\, d\omega}{\rho}+\int_0^{at}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{d^2\varpi}{d\omega^2}d\omega\right)\frac{d\rho\, d\theta}{\rho\sin.\theta}.$$

On a évidemment

$$\int_0^{at}\frac{d^2.\rho\varpi}{d\rho^2}d\rho=\frac{d.at\varpi'}{a\,dt}-f(x,y,z),$$

en désignant par ϖ' la valeur de ϖ qui répond à $\rho=at$, et observant que $f(x,y,z)$ est la valeur de ϖ qui a lieu quand $t=0$. On a aussi

$$\int_0^{\pi}\frac{d.\frac{d\varpi}{d\theta}\sin.\theta}{d\theta}=0,$$

et de plus

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^2\varpi}{d\omega^2} d\omega = 0,$$

à cause que les valeurs de $\frac{d\varpi}{d\omega}$ qui répondent à $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$, sont égales entre elles. On aura donc simplement

$$\int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{d^2\varpi}{dx^2} + \frac{d^2\varpi}{dy^2} + \frac{d^2\varpi}{dz^2}\right) \rho \sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega$$
$$= \frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varpi' t \sin.\theta\, d\theta\, d\omega - 4\pi f(x, y, z).$$

Donc, en vertu de l'équation (15), et en faisant

$$\varphi + f(x, y, z) = \varphi_1,$$

la formule (14) deviendra

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} & \mathrm{F}(x + at\cos.\theta,\quad y + at\sin.\theta\sin.\omega, \\ & \qquad z + at\sin.\theta\cos.\omega) t \sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\ + \frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} & f(x + at\cos.\theta,\quad y + at\sin.\theta\sin.\omega, \\ & \qquad z + at\sin.\theta\cos.\omega) t \sin.\theta\, d\theta\, d\omega; \end{aligned} \tag{16}$$

ce qui est effectivement vrai, en observant qu'on a

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = f(x, y, z), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z),$$

quand $t = 0$, et que l'équation (8) se change en celle-ci :

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dz^2}\right),$$

dont l'intégrale complète est l'équation (16), d'après la formule (10) citée plus haut.

(7) Voici maintenant les conséquences relatives à la propagation du mouvement qui se déduisent des formules précédentes.

Soit r le rayon vecteur du point M, μ l'angle qu'il fait avec l'axe des x, λ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x et z; on aura

$$x = r\cos.\mu, \quad y = r\sin.\mu\sin.\lambda, \quad z = r\sin.\mu\cos.\lambda;$$

et les fonctions $\mathrm{F}(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $f(x, y, z)$, résultant de l'état initial du fluide, se changeront en trois autres fonctions de r, μ, λ, qui seront aussi données et que nous représenterons par $\mathrm{F}(r, \mu, \lambda)$, $\psi(r, \mu, \lambda)$, $f(r, \mu, \lambda)$. Soit ensuite

$$\left.\begin{aligned} r\cos.\mu + \rho\cos.\theta &= r'\cos.\mu', \\ r\sin.\mu\sin.\lambda + \rho\sin.\theta\sin.\omega &= r'\sin.\mu'\sin.\lambda', \\ r\sin.\mu\cos.\lambda + \rho\sin.\theta\cos.\omega &= r'\sin.\mu'\cos.\lambda'; \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

désignons par r_1, μ_1, λ_1, les valeurs de r', μ', λ', qui répondent à $\rho = at$; la formule (14) deviendra

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(r_1, \mu_1, \lambda_1)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{at}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi(r', \mu', \lambda')\,\rho\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega; \end{aligned} \quad (18)$$

et la formule (16) se changera en celle-ci :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(r_1, \mu_1, \lambda_1)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\ + \frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(r_1, \mu_1, \lambda_1)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega. \end{aligned} \quad (19)$$

Supposons que l'ébranlement primitif du fluide a été circonscrit dans une sphère décrite de l'origine des coordonnées comme centre et d'un rayon donné que nous représenterons par ε, ou, autrement dit, supposons que les vitesses et les dilatations initiales, et, par conséquent, les fonctions $F(r, \mu, \lambda)$, $\psi(r, \mu, \lambda)$, $f(r, \mu, \lambda)$, étaient nulles, quels que soient μ et λ, pour toutes les valeurs de r plus grandes que ε. Les fonctions $F(r_1, \mu_1, \lambda_1)$ et $f(r_1, \mu_1, \lambda_1)$ qui entrent dans la formule (19), seront donc aussi nulles, lorsqu'on aura $r_1 > \varepsilon$. Or, en mettant at et r_1 à la place de ρ et r' dans les équations (17), on en déduit

$$r_1^2 = r^2 + 2rat(\cos.\mu\cos.\theta + \sin.\mu\sin.\theta\cos.(\omega-\lambda)] + a^2t^2;$$

et si l'on fait

$$\cos.\mu\cos.\theta + \sin.\mu\sin.\theta\cos.(\omega-\lambda) = \cos.2m,$$

il en résultera

$$r_1^2 = (r-at)^2 + 4rat\cos.^2 m;$$

ce qui montre qu'on a $r_1 > \varepsilon$, toutes les fois que at est $> r-\varepsilon$ ou $< r+\varepsilon$. On aura donc

$$F(r_1, \mu_1, \lambda_1) = 0, \quad f(r_1, \mu_1, \lambda_1),$$

et par suite $\varphi_1 = 0$, pour toutes ces valeurs de at. Mais, dans le cas auquel répond la formule (19), on a, à un instant quelconque,

$$u = \frac{d\varphi_1}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi_1}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi_1}{dz}, \quad s = \frac{1}{a^2}\frac{d\varphi_1}{dt}; \tag{20}$$

ces trois vitesses et cette dilatation seront donc nulles, lorsque at tombera hors des limites $r \pm \varepsilon$; par conséquent, dans le cas dont il s'agit, le mouvement se propagera avec la même vitesse en tous sens autour de l'origine des coordonnées, cette vitesse sera constante et égale à a, le mouvement de chaque point du fluide durera pendant un temps égal à $\frac{2\varepsilon}{a}$, et l'onde mobile sera sphérique et d'une épaisseur constante et égale à 2ε.

Dans le cas général, où la formule $udx + vdy + wdz$ n'est pas une différentielle exacte à trois variables indépendantes, c'est-à-dire, dans le cas de la formule (18), la partie du mouvement qui dépend des dilatations initiales ou de la fonction F, suivra les mêmes lois que dans le cas précédent; mais il n'en sera pas tout-à-fait de même à l'égard de la partie dépendante des vitesses initiales ou de la fonction ψ. Pour toutes les valeurs de ρ qui tombent hors des limites $r \pm \varepsilon$, la valeur de r' déduite des équations (17), surpassera ε, et la fonction $\psi(r', \mu', \lambda')$ sera nulle, ce qui rendra aussi nulle la partie correspondante de l'intégrale relative à ρ qui entre dans la formule (18). Cette intégrale ne sera donc différente de zéro que pour les valeurs de ρ comprises entre les limites $r \pm \varepsilon$; et comme elle ne doit pas s'étendre au-delà de $\rho = at$, il s'ensuit qu'elle sera nulle, tant qu'on aura $at < r - \varepsilon$; mais on voit aussi qu'elle ne redeviendra pas nulle, et qu'elle sera seulement indépendante de t, quand on aura $at > r + \varepsilon$. Cela suffit pour qu'on en conclue que la partie du mouvement qui est due aux vitesses initiales du fluide, se propagera avec la vitesse a, mais que chaque molécule ne reviendra pas complètement à l'état de repos comme dans le cas précédent, après un intervalle de temps déterminé.

C'est surtout à de grandes distances du centre de l'ébranlement primitif, qu'il importe de connaître les lois du mouvement du fluide; nous allons donc examiner spécialement ce que deviennent les formules (18) et (19), lorsque le rayon r du point M auquel elles répondent, est un très-grand multiple de ε : il faudra, d'après ce qu'on vient de dire, que at soit aussi très-grand, pour que le mouvement de M ait commencé.

(8) Mettons $at, r_1, \mu_1, \lambda_1$, à la place de ρ, r', μ', λ', dans les équations (17). Soit ensuite

$$at = r - \zeta, \quad \theta = \pi - \mu + \eta, \quad \omega = \pi + \lambda + \eta'.$$

Si l'on considère r_1 et ζ comme des quantités très-petites par rapport à r, il est aisé de voir, d'après ces équations (17), que η et η' seront aussi très-petites; et en négligeant les carrés et les produits de ζ, η, η', on aura

$$\zeta \cos.\mu - \eta r \sin.\mu = r_1 \cos.\mu_1,$$
$$\zeta \sin.\mu \sin.\lambda + \eta r \cos.\mu \sin.\lambda - \eta' r \sin.\mu \cos.\lambda = r_1 \sin.\mu_1 \sin.\lambda_1,$$
$$\zeta \sin.\mu \cos.\lambda + \eta r \cos.\mu \cos.\lambda + \eta' r \sin.\mu \sin.\lambda = r_1 \sin.\mu_1 \cos.\lambda_1;$$

d'où l'on tire

$$r_1^2 = \zeta^2 + \eta^2 r^2 + \eta'^2 r^2 \sin.^2 \mu.$$

En même temps la formule (19) deviendra

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi a} \iint F(r_1, \mu_1, \lambda_1) r \sin.\mu \, d\eta \, d\eta'$$
$$- \frac{1}{4\pi} \frac{d.}{d\zeta} \iint f(r_1, \mu_1, \lambda_1) r \sin.\mu \, d\eta \, d\eta'.$$

On y considérera r_1, μ_1, λ_1, comme des fonctions de ζ, η, η', données par les équations précédentes, et l'on déterminera les limites des intégrales relatives à η et η', de manière que r_1

soit moindre que ε, condition nécessaire pour que les deux fonctions $F(r_1, \mu_1, \lambda_1)$ et $f(r_1, \mu_1, \lambda_1)$ ne soient pas nulles.

Les variables η et η' pouvant être positives ou négatives, et leur rapport n'étant aucunement limité, nous ferons

$$\eta r = s \sin.\sigma, \quad \eta' r \sin.\mu = s \cos.\sigma,$$

et nous regarderons les nouvelles variables s et σ, comme des quantités positives dont la seconde s'étendra depuis zéro jusqu'à 2π. En les substituant à η et η', on aura, d'après les règles connues de la transformation des intégrales multiples,

$$r^2 \sin.\mu \, d\eta \, d\eta' = s\, ds\, d\sigma.$$

A cause de $r_1^2 = \zeta^2 + s^2$, il faudra que la quantité ζ ou $r - at$, tombe entre les limites $\pm\varepsilon$, ainsi qu'on la déja vu dans le numéro précédent; et cette condition étant remplie, les limites de s seront zéro et $\sqrt{\varepsilon^2 - \zeta^2}$. Par conséquent, nous aurons

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi a r}\int_0^\delta\int_0^{2\pi} F(r_1, \mu_1, \lambda_1)\, s\, ds\, d\sigma$$
$$- \frac{1}{4\pi r}\frac{d.}{d\zeta}\int_0^\delta\int_0^{2\pi} f(r_1, \mu_1, \lambda_1)\, s\, ds\, d\sigma, \qquad (21)$$

en faisant, pour abréger,

$$\delta = \sqrt{\varepsilon^2 - \zeta^2},$$

et déterminant r_1, μ_1, λ_1, en fonctions de ζ, s, σ, au moyen des formules

$$r_1 = \sqrt{\zeta^2 + s^2},$$
$$\cos.\mu_1 = \frac{\zeta \cos.\mu - s \sin.\mu \sin.\sigma}{\sqrt{\zeta^2 + s^2}},$$
$$\tang.\lambda_1 = \frac{\zeta \sin.\mu \sin.\lambda + s \cos.\mu \sin.\lambda \sin.\sigma - s \cos.\lambda \cos.\sigma}{\zeta \sin.\mu \cos.\lambda + s \cos.\mu \cos.\lambda \sin.\sigma + s \sin.\lambda \cos.\sigma}.$$

(9) Les trois premières équations (20) feront connaître les composantes de la vitesses du point M suivant les axes des x, y, z; si l'on désigne par x_1, y_1, z_1, les coordonnées du même point par rapport à trois autres axes rectangulaires, et par u_1, v_1, w_1, les composantes de sa vitesse suivant ces nouveaux axes, on aura de même

$$u_1 = \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \quad v_1 = \frac{d\varphi_1}{dy_1}, \quad w_1 = \frac{d\varphi_1}{dz_1};$$

or, on peut rendre mobiles les axes x_1, y_1, z_1; et si l'on suppose que l'axe des x_1 coïncide, à un instant quelconque, avec le rayon vecteur r du point M, l'axe des y_1 avec la perpendiculaire à ce rayon comprise dans le même plan que l'axe des x, et l'axe des z_1 avec la perpendiculaire au plan de ce même rayon et de l'axe des x, on aura

$$dx_1 = dr, \quad dy_1 = r\,d\mu, \quad dz_1 = r \sin.\mu\, d\lambda,$$

d'après la signification des angles μ et λ, et, par conséquent,

$$u_1 = \frac{d\varphi_1}{dr}, \quad v_1 = \frac{1}{r}\frac{d\varphi_1}{d\mu}, \quad w_1 = \frac{1}{r\sin.\mu}\frac{d\varphi_1}{d\lambda}.$$

Cela posé, on voit par la formule (21) et les valeurs de r_1, μ_1, λ_1, qu'il y faut employer, que les rapports $\frac{v_1}{u_1}$ et $\frac{w_1}{u_1}$ sont des quantités très-petites, du même ordre de grandeur que la fraction $\frac{\varepsilon}{r}$; il en résulte donc qu'à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'ébranlement primitif, la vitesse du point M approche de plus en plus d'être dirigée suivant son rayon vecteur r, et qu'à une très-grande distance, où l'onde mobile peut être regardée comme sensiblement plane dans une grande étendue, on doit, en même temps, considérer le mouvement des molécules qui la composent, comme perpendiculaire à sa surface, quel qu'ait été l'ébranlement primitif.

Observons aussi que l'expression de φ_1 résultant de l'équation (21), est de la forme

$$\varphi_1 = \frac{1}{r}\Psi(\zeta, \mu, \lambda);$$

Ψ désignant une fonction qui n'est différente de zéro, quels que soient les angles μ et λ, que pour les valeurs de ζ comprises entre les limites $\pm\varepsilon$. A cause de $\zeta = at - r$, et en négligeant le terme divisé par r^2, on aura donc

$$u_1 = -\frac{d\Psi(\zeta, \mu, \lambda)}{d\zeta}, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = -a u_1;$$

ce qui montre qu'à une grande distance du centre de l'ébranlement primitif, la vitesse varie à très-peu près suivant la raison inverse de cette distance, et que la dilatation correspondante, déterminée par la quatrième équation (20), est égale et contraire au rapport de cette vitesse à celle de la propagation, c'est-à-dire, égale à $-\frac{u_1}{a}$. En négligeant cette dilatation, désignant par D la densité naturelle du fluide, et prenant pour mesure de l'intensité de l'ébranlement, la somme des forces vives dans toute l'épaisseur de l'onde mobile, son expression sera

$$\frac{D}{r^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{d.\Psi(\zeta, \mu, \lambda)}{d\zeta}\right)^2 d\zeta.$$

Elle variera pour les différentes ondes, en raison inverse du carré de leurs rayons, et, d'un point à un autre d'une même onde, suivant une loi dépendante de l'ébranlement primitif.

72.

(10) Relativement à la formule (18), il nous suffira d'en considérer le second terme, puisque le premier est le même que dans la formule (19) dont nous venons de nous occuper. Or, l'angle m étant le même que précédemment, les équations (17) donnent

$$r'^2 = (r-\rho)^2 + 4r\rho\cos.^2 m;$$

de plus la variable r' devant être très-petite, pour que la valeur de φ dont il s'agit, ne soit pas nulle, il faudra que la différence $r-\rho$ soit aussi très-petite; et par ces considérations, on transformera d'abord l'intégrale double

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi(r', \mu', \lambda')\rho\sin.\theta\, d\theta\, d\omega,$$

en celle-ci :

$$\frac{1}{r}\int_0^\delta\int_0^{2\pi} \psi(r', \mu', \lambda')\, s\, ds\, d\sigma,$$

dans laquelle on a

$$\delta = \sqrt{\varepsilon^2-(r-\rho)^2}, \quad r' = \sqrt{s^2+(r-\rho)^2},$$

et où les valeurs de μ' et λ' seront données par les formules:

$$\cos.\mu' = \frac{r-\rho}{r'}\cos.\mu - \frac{1}{r'}\sqrt{r'^2-(r-\rho)^2}\sin.\mu\sin.\sigma,$$

$$\text{tang.}\lambda' = \frac{(r-\rho)\sin.\mu\sin.\lambda + \sqrt{r'^2-(r-\rho)^2}(\sin.\mu\sin.\lambda\sin.\sigma - \cos.\lambda\cos.\sigma)}{(r-\rho)\sin.\mu\cos.\lambda + \sqrt{r'^2-(r-\rho)^2}(\sin.\mu\cos.\lambda\sin.\sigma + \sin.\lambda\cos.\sigma)}.$$

Si l'on substitue ensuite r' à s dans l'intégration relative à cette dernière variable, on aura $s\,ds = r'\,dr'$; et comme r' est une quantité positive, les limites qui répondent à $s=\delta$ et $s=0$, seront $r'=\varepsilon$ et $r'=\pm(r-\rho)$, en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur selon que ρ sera $<$ ou $>r$.

De cette manière, la formule (18) réduite à son second terme, deviendra

$$\varphi = \frac{1}{4\pi r}\int_0^{at}\left(\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\psi(r',\mu',\lambda')r'dr'd\sigma\right)d\rho, \qquad (22)$$

en désignant par ε' une quantité positive, égale à $r-\rho$, abstraction faite du signe.

Le point M étant situé en dehors de l'ébranlement primitif, les quantités U, V, W, sont nulles (n° 3); et si nous représentons par u_1, v_1, w_1, les composantes de sa vitesse suivant les mêmes directions que dans le numéro précédent, nous aurons

$$u_1 = \frac{d\varphi}{dr}, \quad v_1 = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\mu}, \quad w_1 = \frac{1}{r\sin.\mu}\frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad s = \frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt},$$

pour déterminer cette vitesse et la dilatation correspondante.

Maintenant, tant qu'on aura $at < r-\varepsilon$, il en sera de même à l'égard de la variable ρ: la quantité ε' surpassera ε; et l'on aura $r' > \varepsilon$, dans toute l'étendue de l'intégration relative à r'; ce qui rendra nulle, la fonction $\psi(r',\mu',\lambda')$, et conséquemment la valeur précédente de φ. Le mouvement du point M ne commencera donc pas avant qu'on n'ait $at = r-\varepsilon$. Lorsque at sera devenu $> r-\varepsilon$, la partie de φ relative aux valeurs de ρ moindres que $r-\varepsilon$, sera encore nulle, et l'on pourra ne faire commencer l'intégrale relative à cette variable qu'à partir de $\rho = r-\varepsilon$; en faisant donc,

$$\rho = r - \varepsilon + \rho', \quad d\rho = d\rho',$$

l'intégrale relative à ρ' s'étendra depuis $\rho' = 0$ jusqu'à $\rho' = at - r + \varepsilon$; le rayon r disparaîtra des valeurs de μ' et λ' qui ne sont fonctions que de la différence $r-\rho$; et l'on aura

$\varepsilon'=\varepsilon-\rho'$ ou $\varepsilon'=\rho'-\varepsilon$, selon que ρ' sera $<\varepsilon$ ou $>\varepsilon$. Pendant que at sera compris entre $r-\varepsilon$ et $r+\varepsilon$, toutes les valeurs de ρ' seront positives et moindres que 2ε; pour toutes ces valeurs, ε' sera donc moindre que ε; et les intégrations relatives à σ, r', ρ', étant effectuées, la valeur de φ qui en résultera, sera de la forme :

$$\varphi=\frac{1}{r}\Psi(r-at,\mu,\lambda).$$

Elle substituera depuis $t=\frac{r}{a}-\frac{\varepsilon}{a}$ jusqu'à $t=\frac{r}{a}+\frac{\varepsilon}{a}$, c'est-à-dire, pendant un intervalle de temps égal à $\frac{2\varepsilon}{a}$ pour chaque molécule. On en déduira les mêmes conséquences que dans le numéro précédent, relativement à la direction des vitesses propres des molécules, à la dilatation du fluide, et à l'intensité de l'ébranlement. Enfin, quand on aura $at>r+\varepsilon$, une partie des valeurs de ρ' surpasseront 2ε; pour ces valeurs, on aura $\varepsilon'>\varepsilon$, et par suite $\varphi=0$. Il suffira donc d'étendre l'intégrale relative à ρ', depuis $\rho'=0$ jusqu'à $\rho'=2\varepsilon$: il est aisé de voir que la valeur de l'intégrale triple, relative à σ, r', ρ', se trouvera indépendante de r et de t, et que l'expression de φ sera de la forme :

$$\varphi=\frac{1}{r}\Phi(\mu,\lambda).$$

On aura donc $s=0$. La vitesse perpendiculaire au rayon r, ou la résultante de v_1 et w_1, sera du même ordre de grandeur que la vitesse u_1 dirigée suivant ce rayon. Mais l'une et l'autre varieront en raison inverse du carré de r, et à de grandes distances du centre de l'ébranlement, on pourra les regarder comme insensibles, eu égard à la vitesse qui avait lieu auparavant, et considérer en conséquence l'épaisseur de l'onde mobile comme étant limitée et égale à 2ε.

Il résulte de cette discussion que dans le cas où la formule $udx + vdy + wdz$ ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, les lois de la propagation du mouvement, à une grande distance de l'ébranlement, ne diffèrent pas essentiellement de celles qui ont lieu, lorsque cette condition est remplie, ainsi que je l'avais supposé dans mon ancien Mémoire sur la *Théorie du son*.

(11) Le mouvement imprimé arbitrairement à une portion limitée d'un fluide homogène, se propage toujours en ondes sphériques autour du lieu de cet ébranlement. A une grande distance, ces ondes sont sensiblement planes dans chaque partie, d'une petite étendue par rapport à leur surface entière; et alors, la vitesse propre des molécules est, dans tous les cas, sensiblement normale à leur plan tangent. Mais on peut aussi considérer directement la propagation du mouvement par des ondes infinies et planes dans toute leur étendue. Or, on va voir que la vitesse des molécules sera encore perpendiculaire à ces sortes d'ondes en mouvement.

En effet, soient $\alpha, \beta, \gamma, \omega$, quatre quantités constantes; X, Y, Z, T, quatre autres quantités dont chacune peut être une fonction de x, y, z, t; faisons pour abréger,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \omega t = q;$$

désignons par φq une fonction arbitraire de q, et prenons

$$u = X\varphi q, \quad v = Y\varphi q, \quad w = Z\varphi q, \quad s = T\varphi q.$$

Si l'on suppose que φq ne diffère de zéro que pour les valeurs de q comprises entre les limites $\pm \varepsilon$, en représentant par ε une constante donnée, il est facile de voir qu'en vertu de ces expressions de u, v, w, s, la partie du fluide en mouvement à chaque instant sera limitée par deux surfaces planes et parallèles, dont les distances à l'origine des coordonnées sont $\omega t \pm \varepsilon$, et dont la normale fait avec les axes de x, y, z, les angles qui ont α, β, γ, pour cosinus; ces trois constantes étant liées entre elles par l'équation :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Ce mouvement sera donc celui qui se propage par des ondes planes, parallèles et d'une épaisseur constante. Mais pour qu'il puisse avoir lieu dans le fluide que l'on considère, il faut que les valeurs précédentes de u, v, w, s, satisfassent aux équations (4) et (5). Or, en les y substituant et égalant les coefficient de φq et $\frac{d\varphi q}{dq}$, dans les deux membres de chaque équation, afin que φq reste une fonction arbitraire, il vient

$$\frac{dX}{dt} = a^2 \frac{dT}{dx}, \quad \frac{dY}{dt} = a^2 \frac{dT}{dy}, \quad \frac{dZ}{dt} = a^2 \frac{dT}{dz},$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz},$$
$$X\omega = a^2 T\alpha, \quad Y\omega = a^2 T\beta, \quad Z\omega = a^2 T\gamma,$$
$$T\omega = X\alpha + Y\beta + Z\gamma.$$

Si l'on élimine X, Y, Z, de la quatrième ou de la dernière équation, au moyen des trois équations intermédiaires, on a

$$\omega^2 = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^2.$$

Nous prendrons $\omega = a$, et, par conséquent,

$$X = aT\alpha, \quad Y = aT\beta, \quad Z = aT\gamma;$$

ce qui tiendra lieu des cinq dernières équations. Les trois premières deviendront ensuite

$$\alpha\frac{dT}{dt}=a\frac{dT}{dx},\ \beta\frac{dT}{dt}=a\frac{dT}{dy},\ \gamma\frac{dT}{dt}=a\frac{dT}{dz};$$

d'où l'on tire pour la valeur de T, une fonction arbitraire de $\alpha x+\beta y+\gamma z+at$, ou de q, que l'on pourra comprendre dans φq. Cela revient à prendre $T=1$. On aura alors

$$u=a\alpha\varphi q,\quad v=a\beta\varphi q,\quad w=a\gamma\varphi q,\quad s=\varphi q;$$

où l'on voit que la direction de la résultante de u, v, w, ou la vitesse propre de chaque molécule, coïncide avec la normale aux ondes planes que nous considérons; ce qu'il s'agissait de démontrer. A cause de $\omega=a$, ces ondes se propageront avec la vitesse a, indépendante de leur direction, et du côté où la normale à leur plan fait avec les axes des x, y, z, les angles donc les cosinus sont $-\alpha, -\beta, -\gamma$. En appelant u_1 la résultante de u, v, w, et la considérant comme positive ou comme négative, selon qu'elle sera dirigée dans le sens ou en sens contraire de la propagation, on aura $s=-\frac{u_1}{a}$, comme dans le cas des ondes sphériques.

Il n'était pas inutile de comparer les ondes planes aux ondes sphériques; mais les premières ne pourraient s'observer que dans un cylindre perpendiculaire à leur surface, et les ondes sphériques sont les seules qui aient lieu dans un fluide homogène et indéfiniment étendu en tous sens, en supposant toutefois que le mouvement a d'abord été circonscrit dans une portion limitée de ce milieu élastique.

§ II.

Propagation du mouvement dans un corps solide élastique.

(12) Nous représenterons par x, y, z, les trois cordonnées rectangulaires d'un point quelconque M de ce corps, dans son état naturel; par $x+u$, $y+v$, $z+w$, ce qu'elles sont devenues au bout du temps t, compté de l'origine du mouvement, et par ρ la densité du milieu élastique en ce même point. Nous ferons abstraction de la pesanteur et de toute autre force accélératrice, et nous supposerons que le mouvement soit produit par les déplacements qu'on a fait subir et les vitesses qu'on a imprimées arbitrairement aux différents points du corps que l'on considère. Les équations de ce mouvement seront alors

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{d^2 u}{dt^2}+\frac{dP_1}{dx}+\frac{dP_2}{dy}+\frac{dP_3}{dz}&=0,\\
\rho\frac{d^2 v}{dt^2}+\frac{dQ_1}{dx}+\frac{dQ_2}{dy}+\frac{dQ_3}{dz}&=0,\\
\rho\frac{d^2 w}{dt^2}+\frac{dR_1}{dx}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dz}&=0.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Si, de plus, on veut connaître les petites dilatations ou contractions dont les vibrations sont accompagnées, et qu'on appelle s la dilatation positive ou négative qui répond au point M, on aura

$$s=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz},$$

pour la déterminer quand les valeurs de u, v, w, seront connues en fonctions de x, y, z, t.

Les neuf quantités P_1, P_2, etc., expriment les composantes des pressions rapportées à l'union de surface, qui ont lieu au point M, sur trois plans parallèles à ceux des x, y, z. On a entre elles les égalités

$$P_1 = R_3, \quad Q_1 = R_2, \quad P_2 = Q_3,$$

qui les réduisent à six quantités distinctes, dont chacune est de la forme :

$$A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dy} + C\frac{dw}{dz} + D\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + E\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) + F\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

ainsi que je l'ai fait voir dans un autre Mémoire : A, B, C, D, E, F, sont des coefficients qui dépendent de la constitution du corps autour du point M, laquelle peut n'être pas la même en tous sens, et peut aussi varier d'un point à un autre. Il en résulte qu'indépendamment de la densité ρ, les équations (1) renferment trente-six quantités dépendantes de la nature du milieu que l'on considère, qui ne peuvent être réduites à un moindre nombre qu'en faisant des hypothèses particulières sur la disposition respective des molécules et sur les lois de leurs actions mutuelles. Dans le cas d'un corps homogène et partout à la même température, ces quantités et la densité du corps sont constantes ou indépendantes de x, y, z. Si, en outre, il s'agit d'un corps non-cristallisé, dont la constitution et l'élasticité soient les mêmes en tous sens autour de chaque point, ces constantes se réduiront à une seule qui dépendra de la matière du corps et de sa température. Cette quantité sera négative. En la désignant par $-a^2$, prenant la densité naturelle du corps pour unité, et négligeant la dilation s dans les premiers membres des équations (1), en sorte qu'on ait aussi $\rho = 1$, ces équations se changeront en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dt^2}&=a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{3}\frac{d^2v}{dx\,dy}+\frac{2}{3}\frac{d^2w}{dx\,dz}+\frac{1}{3}\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{1}{3}\frac{d^2u}{dz^2}\right),\\
\frac{d^2v}{dt^2}&=a^2\left(\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{2}{3}\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{2}{3}\frac{d^2w}{dy\,dz}+\frac{1}{3}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{3}\frac{d^2v}{dz^2}\right),\\
\frac{d^2w}{dt^2}&=a^2\left(\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{2}{3}\frac{d^2u}{dx\,dz}+\frac{2}{3}\frac{d^2w}{dy\,dz}+\frac{1}{3}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{3}\frac{d^2w}{dy^2}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

dont nous allons nous occuper spécialement.

Indépendamment des équations (1) ou (2), communes à tous les points du corps, il en existe d'autres qui n'ont lieu que pour les parties de sa surface, libres ou assujetties à des conditions données. Mais nous supposerons infini en tous sens, le milieu dans lequel il s'agit de considérer la propagation du mouvement; ce qui nous dispensera d'avoir égard à ces équations particulières.

(13) On satisfait aux équations (2), en faisant, pour abréger,

$$\alpha(x-x')+\beta(y-y')+\gamma(z-z')=\delta,$$

et prenant ensuite

$$\left.\begin{aligned}
u&=\left(\mathrm{A}\cos.\rho\lambda a t+\mathrm{A}'\frac{\sin.\rho\lambda a t}{\rho\lambda a}\right)\cos.\rho\delta,\\
v&=\left(\mathrm{B}\cos.\rho\lambda a t+\mathrm{B}'\frac{\sin.\rho\lambda a t}{\rho\lambda a}\right)\cos.\rho\delta,\\
w&=\left(\mathrm{C}\cos.\rho\lambda a t+\mathrm{C}'\frac{\sin.\rho\lambda a t}{\rho\lambda a}\right)\cos.\rho\delta;
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{B}, \mathrm{B}', \mathrm{C}, \mathrm{C}', \alpha, \beta, \gamma, \rho, x', y', z'$, étant des constantes dont les quatre dernières sont entièrement arbitraires, et les neuf autres sont liées entre elles par les équations :

$$\begin{aligned}
3\mathrm{A}\lambda^2&=\mathrm{A}(3\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2\mathrm{B}\alpha\beta+2\mathrm{C}\alpha\gamma,\\
3\mathrm{B}\lambda^2&=\mathrm{B}(3\beta^2+\alpha^2+\gamma^2)+2\mathrm{A}\alpha\beta+2\mathrm{C}\beta\gamma,\\
3\mathrm{C}\lambda^2&=\mathrm{C}(3\gamma^2+\alpha^2+\beta^2)+2\mathrm{A}\alpha\gamma+2\mathrm{B}\beta\gamma,
\end{aligned}$$

et par celles qui s'en déduisent en y remplaçant A, B, C, par A', B', C'. On obtient les unes et les autres en substituant les valeurs de u, v, w, dont il s'agit, dans les équations (2), et égalant les coefficients des termes semblables dans leurs deux membres.

Sans restreindre aucunement les formules (3), nous pouvons prendre à volonté l'une des trois constantes α, β, γ, ou, plus généralement, les réduire à deux quantités indépendantes. Soit donc

$$\alpha = \cos.\theta, \quad \beta = \sin.\theta \sin.\omega, \quad \gamma = \sin.\theta \cos.\omega,$$

de sorte qu'on ait $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Les équations précédentes se réduiront à celles-ci :

$$\begin{array}{ll} A(3\lambda^2 - 1) = 2\alpha D, & A'(3\lambda^2 - 1) = 2\alpha D', \\ B(3\lambda^2 - 1) = 2\beta D, & B'(3\lambda^2 - 1) = 2\beta D', \\ C(3\lambda^2 - 1) = 2\gamma D, & C'(3\lambda^2 - 1) = 2\gamma D', \end{array}$$

où l'on a mis D et D' au lieu de $A\alpha + B\beta + C\gamma$ et $A'\alpha + B'\beta + C'\gamma$, et auxquelles on satisfait de deux manières différentes : en prenant

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad A = -\frac{B\beta}{\alpha} - \frac{C\gamma}{\alpha}, \quad A' = -\frac{B'\beta}{\alpha} - \frac{C'\gamma}{\alpha},$$

ou bien, en prenant

$$\lambda = \pm 1, \quad B = \frac{A\beta}{\alpha}, \quad C = \frac{A\gamma}{\alpha}, \quad B' = \frac{A'\beta}{\alpha}, \quad C' = \frac{A'\gamma}{\alpha}.$$

Il en résultera deux solutions différentes des équations (2); et ces équations étant linéaires, on y satisfera encore en ajoutant les valeurs correspondantes des inconnues, c'est-à-dire, au moyen

$$\left.\begin{aligned}
u &= \left[A\cos.\rho at + A'\frac{\sin.\rho at}{\rho a} - \left(\frac{B\beta}{\alpha} + \frac{C\gamma}{\alpha}\right)\cos.\rho bt \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \left(\frac{B'\beta}{\alpha} + \frac{C'\gamma}{\alpha}\right)\frac{\sin.\rho bt}{\rho b}\right]\cos.\rho\delta,\\
v &= \left(\frac{A\beta}{\alpha}\cos.\rho at + \frac{A'\beta}{\alpha}\frac{\sin.\rho at}{\rho a} + B\cos.\rho bt + B'\frac{\sin.\rho bt}{\rho b}\right)\cos.\rho\delta,\\
w &= \left(\frac{A\gamma}{\alpha}\cos.\rho at + \frac{A'\gamma}{\alpha}\frac{\sin.\rho at}{\rho a} + C\cos.\rho bt + C'\frac{\sin.\rho bt}{\rho b}\right)\cos.\rho\delta,
\end{aligned}\right\} (4)$$

où l'on a mis b à la place de $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Les deux angles θ et ω, les quatre quantités ρ, x', y', z', et les six coefficients A, A', B, B', C, C', que renferment les formules (4), sont douze indéterminées auxquelles on pourra donner toutes les valeurs que l'on voudra ; et à raison de la forme linéaire des équations (2), on pourra prendre pour u, v, w, des sommes Σ de ces formules, étendues à toutes les valeurs de ces douze indéterminées. Nous pourrons aussi considérer une partie de ces quantités, par exemple, les six coefficients A, A', B, B', C, C', comme des fonctions arbitraires des six autres indéterminées; faire croître celles-ci par degrés infiniment petits; multiplier sous les signes Σ par leurs différentielles, et remplacer les signes Σ, par des intégrales sextuples, relatives à x', y', z', ρ, θ, ω. Cela étant, nous regarderons x', y', z', comme les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'espace; nous multiplierons par l'élément de volume $dx'dy'dz'$; puis nous étendrons l'intégrale relative à x', y', z', à tous les points de l'espace, en sorte qu'elle aura pour limites $\pm\infty$, pour chacune de ces variables. Nous regarderons aussi ρ, θ, ω, comme les trois coordonnées polaires d'un point de l'espace; ρ étant son rayon vecteur, θ et ω les deux angles qui en déterminent la direction. Après avoir multiplié par l'élément de volume $\rho^2 \sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega$ qui répond à cette sorte de coordonnées, nous étendrons à tous les points de l'espace, l'intégrale relative à ρ, θ, ω; ce qui exigera qu'on la prenne depuis $\rho=0$, $\theta=0$, $\omega=0$, jusqu'à $\rho=0$, $\theta=\pi$, $\omega=2\pi$. De cette manière, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
u=&\iiiint\!\!\iint\Big[\mathrm{A}\cos.\rho a t+\mathrm{A}'\frac{\sin.\rho a t}{\rho a}-\Big(\frac{\mathrm{B}6}{\alpha}+\frac{\mathrm{C}\gamma}{\alpha}\Big)\cos.\rho b t\\
&-\Big(\frac{\mathrm{B}'6}{\alpha}+\frac{\mathrm{C}'\gamma}{\alpha}\Big)\frac{\sin.\rho b t}{\rho b}\Big]\cos.\rho\delta.\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz',\\
v=&\iiiint\!\!\iint\Big[\frac{\mathrm{A}6}{\alpha}\cos.\rho a t+\frac{\mathrm{A}'6}{\alpha}\,\frac{\sin.\rho a t}{\rho a}+\mathrm{B}\cos.\rho b t\\
&+\mathrm{B}'\frac{\sin.\rho b t}{\rho b}\Big]\cos.\rho\delta.\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz',\\
w=&\iiiint\!\!\iint\Big[\frac{\mathrm{A}\gamma}{\alpha}\cos.\rho a t+\frac{\mathrm{A}'\gamma}{\alpha}\,\frac{\sin.\rho a t}{\rho a}+\mathrm{C}'\cos.\rho b t\\
&+\mathrm{C}'\frac{\sin.\rho b t}{\rho b}\Big]\cos.\rho\delta.\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz'.
\end{aligned}\right\}(5)$$

Ces formules satisferont aux équations (2) dont elles deviendront les intégrales complètes, lorsqu'on y aura déterminé les six fonctions arbitraires A, A′, B, B′, C, C′, d'après les valeurs initiales de $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$.

(14) Pour cela, soit

$$u=f(x,y,z),\quad v=f'(x,y,z),\quad w=f''(x,y,z),$$
$$\frac{du}{dt}=\mathrm{F}(x,y,z),\ \frac{dv}{dt}=\mathrm{F}'(x,y,z),\ \frac{dw}{dt}=\mathrm{F}''(x,y,z),$$

à l'origine du mouvement, ou quand $t=0$. Représentons par $\varphi(x,y,z)$, l'une de ces six fonctions de x, y, z; quelle qu'elle soit, nous aurons

$$\varphi(x,y,z)=$$
$$\frac{1}{\pi^3}\iiiiiint \varphi(x',y',z')\cos.\alpha'(x-x')\cos.6'(y-y')\cos.\gamma'(z-z')d\alpha'd6'd\gamma'dx'dy'dz';$$

les intégrales relatives à x',y',z', ayant $\pm\infty$ pour limites, et celles qui répondent à $\alpha',6',\gamma'$, étant prises depuis zéro jusqu'à $+\infty$. En donnant à celles-ci $\pm\infty$ pour limites, cette formule pourra s'écrire ainsi :

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{8\pi^3}\iiiiiint \varphi(x',y',z)\cos.(\alpha'(x'-x)$$
$$+6'(y'-y)+\gamma'(z'-z))d\alpha'd6'd\gamma'dx'dy'dz'.$$

Soit ensuite

$$\alpha'=\rho\cos.\theta,\quad 6'=\rho\sin.\theta\sin.\omega,\quad \gamma'=\rho\sin.\theta\cos.\omega;$$

on aura, en même temps,

$$d\alpha'd6'd\gamma'=\rho^2\sin.\theta d\rho d\theta d\omega;$$

les intégrales relatives à ρ,θ,ω, s'étendront depuis $\rho=0$, $\theta=0$, $\omega=0$, jusqu'à $\rho=\infty$, $\theta=\pi$, $\omega=2\pi$; et il en résultera

$$\varphi(x,y,z)=$$
$$\frac{1}{8\pi^3}\iiiiiint \varphi(x',y',z)\cos.\rho\delta.\rho^2\sin.\theta d\rho d\theta d\omega dx'dy'dz';$$

δ étant la même quantité que dans les formules (5). Si l'on fait $t=0$ dans ces formules, et qu'on les compare à cette dernière équation, on en conclura

$$\frac{1}{8\pi^3}f(x',y',z)=A-\frac{B6}{\alpha}-\frac{C\gamma}{\alpha},$$
$$\frac{1}{8\pi^3}f'(x',y',z')=\frac{A6}{\alpha}+B,$$
$$\frac{1}{8\pi^3}f''(x',y',z')=\frac{A\gamma}{\alpha}+C;$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{1}{8\pi^3}\left(\alpha f(x',y',z')+\beta f(x',y',z')+\gamma f''(x',y',z')\right),$$

$$B=\frac{1}{8\pi^3}f'(x',y',z')-\frac{\beta}{8\pi^3}\left(\alpha f(x',y',z')+\beta f'(x',y',z')\right.$$
$$\left.+\gamma f(x',y',z')\right),$$

$$C=\frac{1}{8\pi^3}f''(x',y',z')-\frac{\gamma}{8\pi^3}\left(\alpha f(x',y',z')+\beta f'(x',y',z')\right.$$
$$\left.+\gamma f''(x',y',z')\right).$$

Les valeurs de A', B', C', se déduiront de celles de A, B, C, en y remplaçant les fonctions f, f', f'', par F, F', F''. Ces six quantités étant ainsi déterminées, si l'on fait, pour abréger,

$$T=\frac{1}{8\pi^3}\left(\alpha f(x',y',z')+\beta f(x',y',z')+\gamma f''(x',y',z')\right)(\cos.\rho a t-\cos.\rho b t)$$
$$+\frac{1}{8\pi^3}\left(\alpha F(x',y',z')+\beta F'(x',y',z')+\gamma F''(x',y',z')\right)\left(\frac{\sin.\rho a t}{\rho a}-\frac{\sin.\rho b t}{\rho b}\right),$$

les formules (5) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
u=&\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int T\cos.\rho\delta.\alpha\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz'\\
&+\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\Big(f(x',y',z')\cos.\rho b t\\
&+F(x',y',z')\frac{\sin.\rho b t}{\rho b}\Big)\cos.\rho\delta.\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz',\\
v=&\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int T\cos.\rho\delta.\beta\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz'\\
&+\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\Big(f'(x',y',z')\cos.\rho b t\\
&+F'(x',y',z')\frac{\sin.\rho b t}{\rho b}\Big)\cos.\rho\delta.\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz',\\
w=&\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int T\cos.\rho\delta.\gamma\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz'\\
&+\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\Big(f''(x',y',z')\cos.\rho b t\\
&+F''(x',y',z')\frac{\sin.\rho b t}{\rho b}\Big)\cos.\rho\delta.\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz'.
\end{aligned}\right\}(6)$$

D'après ce qu'on a dit plus haut, ces expressions de u, v, w, seront les intégrales complètes des équations (2); mais on peut les réduire à une forme plus simple par l'analyse suivante.

(15) Considérons les intégrales sextuples

$$\zeta = \iiiint\!\!\iint \varphi(x', y', z') \cos.\rho\delta \cos.\rho a t . \alpha^2 \rho^2 \sin.\theta \, d\rho \, d\theta \, d\omega \, dx' \, dy' \, dz',$$
$$\zeta' = \iiiint\!\!\iint \varphi(x', y', z') \cos.\rho\delta \cos.\rho a t . \beta\gamma \rho^2 \sin.\theta \, d\rho \, d\theta \, d\omega \, dx' \, dy' \, dz',$$

dont les limites sont les mêmes que précédemment.

Si nous faisons

$$x' = x + \rho' \cos.\theta',$$
$$y' = y + \rho' \sin.\theta' \sin.\omega',$$
$$z' = z + \rho' \sin.\theta' \cos.\omega',$$

et que nous remplacions x', y', z', par les nouvelles variables ρ', θ', ω', nous aurons

$$dx' \, dy' \, dz' = \rho'^2 \sin.\theta' \, d\rho' \, d\theta' \, d\omega',$$

et les limites relatives à ρ', θ', ω', seront les mêmes que par rapport à ρ, θ, ω. Nous aurons aussi

$$\delta = \rho'(\cos.\theta \cos.\theta' + \sin.\theta \sin.\theta' \cos.(\omega - \omega'));$$

d'où il résultera

$$\zeta = \iiiint\!\!\iint \varphi(x', y', z') \cos.(\rho\rho' \cos.\theta_1) \cos.\rho a t . \alpha^2 \rho^2 \rho'^2 \sin.\theta \sin.\theta' \, d\rho \, d\theta \, d\omega \, d\rho' \, d\theta' \, d\omega',$$
$$\zeta' = \iiiint\!\!\iint \varphi(x', y', z') \cos.(\rho\rho' \cos.\theta_1) \cos.\rho a t . \beta\gamma \rho^2 \rho'^2 \sin.\theta \sin.\theta' \, d\rho \, d\theta \, d\omega \, d\rho' \, d\theta' \, d\omega',$$

en conservant x', y', z', à la place de leurs valeurs, et posant

$$\cos.\theta\cos.\theta' + \sin.\theta\sin.\theta'\cos.(\omega-\omega') = \cos.\theta_1.$$

D'après cette dernière équation, les angles θ, θ', θ_1, peuvent être regardés comme les trois côtés d'un triangle sphérique dans lequel l'angle opposé à θ_1 sera $\omega-\omega'$. Si l'on appelle ω_1 l'angle opposé à θ, on aura

$$\cos.\theta = \cos.\theta'\cos.\theta_1 + \sin.\theta'\sin.\theta_1\cos.\omega_1,$$
$$\sin.\theta\sin.(\omega-\omega') = \sin.\theta_1\sin.\omega_1;$$

en substituant la valeur de $\cos.\theta$ dans celle de $\cos.\theta_1$, on en déduit

$$\sin.\theta\cos.(\omega-\omega') = \sin.\theta'\cos.\theta_1 - \cos.\theta'\sin.\theta_1\cos.\omega_1;$$

et de ces trois dernières équations, on conclut

$$\alpha = \cos.\theta = \cos.\theta'\cos.\theta_1 + \sin.\theta'\sin.\theta_1\cos.\omega_1,$$
$$\beta = \sin.\theta\sin.\omega = \sin.\theta_1\sin.\omega_1\cos.\omega' + \sin.\theta'\cos.\theta_1\sin.\omega' - \cos.\theta'\sin.\theta_1\cos.\omega_1\sin.\omega',$$
$$\gamma = \sin.\theta\cos.\omega = \sin.\theta'\cos.\theta_1\cos.\omega' - \cos.\theta'\sin.\theta_1\cos.\omega_1\cos.\omega' - \sin.\theta_1\sin.\omega_1\sin.\omega'.$$

L'intégrale relative à θ et ω s'étend à tous les points de la surface d'une sphère décrite d'un rayon égal à l'unité et dont l'élément différentiel est $\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$. Si l'on y remplace les variables θ et ω par θ_1 et ω_1, cet élément deviendra $\sin.\theta_1 d\theta_1 d\omega_1$; les limites de l'intégrale seront $\theta_1=0$ et $\omega_1=0$, $\theta_1=\pi$ et $\omega_1=2\pi$; et d'après les valeurs précédentes de α, β, γ, on aura d'abord

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos.(\rho\rho'\cos.\theta_1)\alpha^2\sin.\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$= 2\pi\cos.^2\theta'\int_0^{\pi}\cos.^2\theta_1\cos.(\rho\rho'\cos.\theta_1)\sin.\theta_1 d\theta_1$$
$$+\pi\sin.^2\theta'\int_0^{\pi}\sin.^2\theta_1\cos.(\rho\rho'\cos.\theta_1)\sin.\theta_1 d\theta_1,$$

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos.(\rho\rho'\cos.\theta_{,})\,6\gamma\sin.\theta\,d\theta\,d\omega$$

$$=\pi\sin.^2\theta'\sin.\omega'\cos.\omega'\int_0^\pi(2\cos.^2\theta_{,}-\sin.^2\theta_{,})\cos.(\rho\rho'\cos.\theta_{,})\sin.\theta_{,}d\theta_{,},$$

en effectuant les intégrations relatives à $\omega_{,}$. Les intégrales qui répondent à $\theta_{,}$ s'obtiennent aussi par les règles ordinaires; il en résulte

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos.(\rho\rho'\cos.\theta_{,})\,\alpha^2\sin.\theta\,d\theta\,d\omega=4\pi\sin.^2\theta'\left(\frac{\sin.\rho\rho'}{\rho^3\rho'^3}-\frac{\cos.\rho\rho'}{\rho^2\rho'^2}\right)$$
$$+4\pi\cos.^2\theta'\left(\frac{\sin.\rho\rho'}{\rho\rho'}+\frac{2\cos.\rho\rho'}{\rho^2\rho'^2}-\frac{2\sin.\rho\rho'}{\rho^3\rho'^3}\right),$$

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos.(\rho\rho'\cos.\theta_{,})\,6\gamma\sin.\theta\,d\theta\,d\omega=4\pi\sin.\theta'\sin.^2\omega'\cos.\omega'\left(\frac{\sin.\rho\rho'}{\rho\rho'}\right.$$
$$\left.+\frac{3\cos.\rho\rho'}{\rho^2\rho'^2}-\frac{3\sin.\rho\rho'}{\rho^3\rho'^3}\right),$$

et, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\zeta=4\pi\iiint\varphi(x',y',z')\cos.\rho at\Big[\Big(\rho\rho'\sin.\rho\rho'+3\cos.\rho\rho'-\frac{3\sin.\rho\rho'}{\rho\rho'}\Big)\cos.^2\theta'\\-\cos.\rho\rho'+\frac{\sin.\rho\rho'}{\rho\rho'}\Big]\sin.\theta'd\rho\,d\rho'\,d\theta'\,d\omega',\\ \zeta'=4\pi\iiint\varphi(x',y',z')\cos.\rho at\Big(\rho\rho'\sin.\rho\rho'+3\cos.\rho\rho'\\-\frac{3\sin.\rho\rho'}{\rho\rho'}\Big)\sin.^3\theta'\sin.\omega'\cos.\omega'd\rho\,d\rho'\,d\theta'\,d\omega'.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Si l'on désigne par g une constante positive, et par e la base de logarithmes népériens, on aura

$$2\int_0^\infty e^{-g\rho}\cos.\rho at\cos.\rho\rho'd\rho=\frac{g}{g^2+(\rho'-at)^2}+\frac{g}{g^2+(\rho'+at)^2},$$

$$2\int_0^\infty e^{-g\rho}\sin.\rho at\sin.\rho\rho'd\rho=\frac{g}{g^2+(\rho'-at)^2}-\frac{g}{g^2+(\rho'+at)^2}.$$

En regardant g comme une quantité infiniment petite, qu'on fera tout-à-fait nulle à la fin du calcul, on en conclura

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x', y', z') \cos. \rho(\rho' + at) d\rho\, d\rho' = \int_0^\infty \frac{g\varphi(x', y', z')}{g^2 + (\rho' + at)^2} d\rho',$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x', y', z') \cos. \rho(\rho' - at) d\rho\, d\rho' = \int_0^\infty \frac{g\varphi(x', y', z')}{g^2 + (\rho' - at)^2} d\rho'.$$

Lorsque at aura une valeur finie, la première de ces intégrales simples s'évanouira avec g; la seconde n'aura de valeurs différentes de zéro, que pour des valeurs de ρ' infiniment peu différentes de at; en faisant donc

$$\rho' = at + \eta, \quad d\rho' = d\eta,$$

on y pourra considérer la variable η comme infiniment petite, positive ou négative. Ainsi, l'on aura

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x', y', z') \cos. \rho(\rho' + at) d\rho\, d\rho' = 0,$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x', y', z') \cos. \rho(\rho' - at) d\rho\, d\rho' =$$
$$\varphi(x + at\cos.\theta', y + at\sin.\theta'\sin.\omega', z + at\sin.\theta'\cos.\omega') \int \frac{g\, d\eta}{g^2 + \eta^2},$$

en ayant égard aux valeurs de x', y', z'. A cause de g infiniment petit, cette dernière intégrale est égale à π, quelles que soient ses limites, l'une positive et l'autre négative. En ajoutant les deux équations précédentes, on aura donc

$$2\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x', y', z') \cos. \rho at \cos. \rho\rho' d\rho\, d\rho' =$$
$$\pi\varphi(x + at\cos.\theta', y + at\sin.\theta'\sin.\omega', z + at\sin.\theta'\cos.\omega'). \qquad (8)$$

Si l'on retranche l'une de l'autre, après y avoir mis $\rho'\varphi(x', y', z')$ à la place de $\varphi(x', y', z')$, et que l'on différentie le résultat par rapport à t, il vient

$$2\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x', y', z') \cos.\rho a t \sin.\rho\rho' . \rho\rho' d\rho d\rho' = \tag{9}$$
$$\pi \frac{d.}{dt} t \varphi(x + at\cos.\theta', y + at\sin.\theta'\sin.\omega', z + at\sin.\theta'\cos.\omega').$$

On a en outre

$$\int_0^\infty \sin.\rho(\rho' + at)\frac{d\rho}{\rho} = \tfrac{1}{2}\pi, \int_0^\infty \sin.\rho(\rho' - at)\frac{d\rho}{\rho} = \pm\tfrac{1}{2}\pi,$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur selon que $\rho' - at$ est positif ou négatif. On conclut de là

$$2\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x', y', z')\cos.\rho a t \sin.\rho\rho' \frac{d\rho d\rho'}{\rho\rho'} = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^\infty \varphi(x', y', z')\frac{d\rho'}{\rho'}$$
$$- \tfrac{1}{2}\pi\int_0^{at} \varphi(x', y', z')\frac{d\rho'}{\rho'} + \tfrac{1}{2}\pi\int_{at}^\infty \varphi(x', y', z')\frac{d\rho'}{\rho'},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x', y', z')\cos.\rho a t \sin.\rho\rho' \frac{d\rho d\rho'}{\rho\rho'}$$
$$= \pi\int_{at}^\infty \varphi(x', y', z')\frac{d\rho'}{\rho'}. \tag{10}$$

Au moyen des équations (8), (9), (10), les formules (7) deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\zeta &= 2\pi^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+at\alpha, y+at\beta, z+at\gamma)(3\alpha^2-1)\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\
&+ 2\pi^2\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+at\alpha, y+at\beta, z+at\gamma)t\alpha^2\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\
&- 2\pi^2\int_{at}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+\rho\alpha, y+\rho\beta, z+\rho\gamma)(3\alpha^2-1)\frac{\sin.\theta}{\rho}\, d\rho\, d\theta\, d\omega, \\
\zeta' &= 6\pi^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+at\alpha, y+at\beta, z+at\gamma)\beta\gamma\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\
&+ 2\pi^2\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+at\alpha, y+at\beta, z+at\gamma)t\beta\gamma\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\
&- 6\pi^2\int_{at}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+\rho\alpha, y+\rho\beta, z+\rho\gamma)\beta\gamma\frac{\sin.\theta}{\rho}\, d\rho\, d\theta\, d\omega,
\end{aligned}\right\} (11)$$

en y mettant ρ, θ, ω, au lieu de ρ', θ', ω', et faisant toujours

$$\alpha = \cos.\theta, \quad \beta = \sin.\theta\sin.\omega, \quad \gamma = \sin.\theta\cos.\omega.$$

Soit encore

$$\zeta'' = \iiiint\!\!\iint\varphi(x', y', z')\cos.\rho\delta\cos.\rho at.\rho^2\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Si nous mettons successivement α^2, β^2, γ^2, à la place de α^2 sous l'intégrale sextuple que ζ représente, et que nous fassions la somme des trois résultats, nous obtiendrons l'intégrale représentée par ζ''; et d'après la première équation (11), sa valeur sera

$$\zeta'' = 2\pi^2\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+at\alpha, y+at\beta, z+at\gamma)t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega; \quad (12)$$

ce qu'on trouverait aussi en appliquant directement l'analyse précédente à la transformation de ζ''.

(16) Les formules (11) et (12) fournissent le moyen de réduire à des intégrales doubles ou triples, toutes les parties des formules (6) qui dépendent des fonctions f, f', f''. Quant aux parties dépendantes de F, F′, F″, on les déduira de celles qui répondent à f, f', f'', en y remplaçant ces dernières fonctions par F, F′, F″, multipliant pas dt, et intégrant par rapport à t, de manière que les intégrales s'évanouissent quand $t=0$, ce qui revient à mettre t' au lieu de t, puis à intégrer depuis $t'=0$ jusqu'à $t'=t$. De cette manière, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
u= & \mathrm{P}+\psi(at)-\psi(bt)+\int_0^t \Psi(at')\,dt'-\int_0^t \Psi(bt')\,dt' \\
& +\frac{d.t\varphi(at)}{dt}-\frac{d.t\varphi(bt)}{dt}+t\Phi(at)-t\Phi(bt) \\
& +\int_{bt}^{at}\psi\rho\frac{d\rho}{\rho}+\int_0^t\left(\int_{bt'}^{at'}\Psi\rho\frac{d\rho}{\rho}\right)dt', \\
v= & \mathrm{P}'+\psi'(at)-\psi'(bt)+\int_0^t \Psi'(at')\,dt'-\int_0^t \Psi'(bt')\,dt' \\
& +\frac{d.t\varphi'(at)}{at}-\frac{d.t\varphi'(bt)}{dt}+t\Phi'(at)-t\Phi'(bt) \\
& +\int_{bt}^{at}\psi'\rho\frac{d\rho}{\rho}+\int_0^t\left(\int_{bt'}^{at'}\Psi'\rho\frac{d\rho}{\rho}\right)dt', \\
w= & \mathrm{P}''+\psi''(at)-\psi''(bt)+\int_0^t \Psi''(at')\,dt'-\int_0^t \Psi''(bt')\,dt' \\
& +\frac{d.t\varphi''(at)}{dt}-\frac{d.t\varphi''(bt)}{dt}+t\Phi''(at)-t\Phi''(bt) \\
& +\int_{bt}^{at}\psi''\rho\frac{d\rho}{\rho}+\int_0^t\left(\int_{bt'}^{at'}\Psi''\rho\frac{d\rho}{\rho}\right)dt',
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

en faisant, pour abréger,

$$1^{\circ}.\ P = \frac{1}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+bt\alpha, y+bt\beta, z+bt\gamma)t\sin.\theta d\theta d\omega$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(x+bt\alpha, y+bt\beta, z+bt\gamma)t\sin.\theta d\theta d\omega,$$

et désignant par P′ et P″, ce que P devient, quand on y met successivement f' et F′, f'' et F″, à la place de f et F;

$$2^{\circ}.\ \alpha f(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)+\beta f'(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)$$
$$+\gamma f''(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho) = p,$$

$$\psi\rho = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3p\alpha - f(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)]\sin.\theta d\theta d\omega,$$

$$\psi'\rho = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3p\beta - f'(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)]\sin.\theta d\theta d\omega,$$

$$\psi''\rho = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3p\gamma - f''(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)]\sin.\theta d\theta d\omega,$$

et désignant par $\Psi\rho, \Psi'\rho, \Psi''\rho$, ce que deviennent $\psi\rho, \psi'\rho, \psi''\rho$, quand on y change f, f', f'', en F, F′, F″;

$$3^{\circ}.\ \varphi\rho = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p\alpha\sin.\theta d\theta d\omega,$$

$$\varphi'\rho = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p\beta\sin.\theta d\theta d\omega,$$

$$\varphi''\rho = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p\gamma\sin.\theta d\theta d\omega,$$

et désignant par $\Phi\rho, \Phi'\rho, \Phi''\rho$, ce que deviennent $\varphi\rho, \varphi'\rho, \varphi''\rho$, lorsqu'on y met F, F′, F″, au lieu de f, f', f''.

Telles sont donc les intégrales complètes des équations (2) qu'il s'agissait d'obtenir. Leur forme est moins simple que celle des intégrales que j'ai trouvées pour les mêmes équations, dans l'*Addition* à mon Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques (*); mais elles ont l'avantage d'être symétriques par rapport aux trois inconnues u, v, w, et aux variables x, y, z; et les fonctions arbitraires qu'elles renferment sont les valeurs initiales de $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ (**). En effet, on vérifie immédiatement que les valeurs

---

(*) Tome VIII de cette collection, page 623.

(**) Depuis que ce Mémoire est écrit, M. Ostrograski, de l'Académie de Saint-Pétersbourg, m'a communiqué d'autres intégrales des équations (2) qu'il a présentées à cette Académie. Ces intégrales sont:

$$4\pi u = \frac{d.}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(x+bt\cos.\theta,\ y+bt\sin.\theta\sin.\omega,\ z+bt\sin.\theta\cos.\omega)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega + \frac{dq}{dx},$$

$$4\pi v = \frac{d.}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f'(x+bt\cos.\theta,\ y+bt\sin.\theta\sin.\omega,\ z+bt\sin.\theta\cos.\omega)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega + \frac{dq}{dy},$$

$$4\pi w = \frac{d.}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f''(x+bt\cos.\theta,\ y+bt\sin.\theta\sin.\omega,\ z+bt\sin.\theta\cos.\omega)\, t\sin.\theta\, d\theta\, d\omega + \frac{dq}{dz},$$

en les réduisant à la partie dépendante des fonctions f, f', f'', et faisant, pour abréger,

$$q = \int_{bt}^{at}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big[\frac{d.}{dx}f(x+\rho\cos.\theta,\ y+\rho\sin.\theta\sin.\omega,\ z+\rho\sin.\theta\cos.\omega) + \frac{d.}{dy}f'(x+\rho\cos.\theta,\ y+\rho\sin.\theta\sin.\omega,\ z+\rho\sin.\theta\cos.\omega) + \frac{d.}{dz}f''(x+\rho\cos.\theta,\ y+\rho\sin.\theta\sin.\omega,\ z+\rho\sin.\theta\cos.\omega)\Big]\rho\sin.\theta\, d\rho\, d\theta\, d\omega.$$

de ces six quantités qui répondent à $t=0$, coïncident avec les fonctions données f, f', f'', F, F', F''.

(17) Lorsqu'il s'agit d'un corps homogène, on satisfait, au moyen des formules (3), non-seulement aux équations (2), mais aussi aux équations (1) qui sont alors linéaires et à coefficients constants. Dans le cas de ces dernières équations, c'est-à-dire, dans le cas d'un corps cristallisé dont la constitution et l'élasticité sont différentes suivant différentes directions autour de chaque point, on trouve que la quantité λ^2 est déterminée par une équation du troisième degré, renfermant les coefficients des équations (2) et les quantités α, β, γ; d'où il résulte pour λ, six valeurs dépendantes de ces quantités et, deux à deux, égales et de signes contraires. En les employant toutes, les expressions de u, v, w, contiennent six fonctions arbitraires de x, y, z, que l'on peut déterminer au moyen des valeurs initiales de $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$. Cela fait, les expressions dont il s'agit sont les intégrales complètes des équations (2). Elles renferment des intégrales sextuples relatives à des variables $\rho, \theta, \omega, x', y', z'$, et semblables à celles que contiennent les formules (6). On peut facilement transformer ces intégrales définies en intégrales quadruples; mais malgré cette réduction, les expressions générales de u, v, w, sont encore très-compliquées, et nous nous contenterons d'avoir indiqué le moyen de les obtenir.

(18) Appliquons maintenant les formules (13) au cas où l'ébranlement primitif a été circonscrit dans une portion peu étendue du corps solide non-cristallisé auquel elles répondent. On verra aisément que cet ébranlement donnera naissance à deux ondes sphériques qui se propageront uniformément,

l'une avec une vitesse a, l'autre avec une vitesse b ou $\frac{a}{\sqrt{3}}$; mais pour mieux connaître la nature de ces deux ondes différentes, nous allons examiner, d'une manière spéciale, ce que deviennent les formules (13) à une grande distance de l'ébranlement primitif et pour de grandes valeurs de at de bt.

L'expression de $\frac{du}{dt}$ déduite de la première formule (13), renfermera les quantités :

$$\frac{d.}{dt}\int_{bt}^{at}\psi\rho\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{t}[\psi(at)-\psi(bt)],$$

$$\frac{d..}{dt}\int_{0}^{t}\left(\int_{bt'}^{at'}\Psi\rho\frac{d\rho}{\rho}\right)dt'=\int_{bt}^{at}\Psi\rho\frac{d\rho}{\rho}.$$

Le temps t étant devenu très-grand, par hypothèse, on pourra négliger la première à raison de son facteur $\frac{1}{t}$. On négligera aussi la seconde à cause du dénominateur ρ contenu sous le signe $\int$ et de la grandeur des deux limites at et bt de cette intégrale. Parmi les autres termes de $\frac{du}{dt}$, nous ne conserverons que ceux qui ont t pour facteur, et par rapport auxquels les termes non-multipliés par t, sont insensibles et négligeables. En traitant de même les valeurs de $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{dw}{dt}$, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{t}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{d.}{dt}f(x+bt\alpha,\ y+bt6,\ z+bt\gamma) \\
&\quad + \mathrm{F}(x+bt\alpha, y+bt6, z+bt\gamma)\Big]\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\
&\quad + t\left(\frac{d^2\varphi(at)}{dt^2} - \frac{d^2\varphi(bt)}{dt^2}\right) + t\left(\frac{d\Phi(at)}{dt} - \frac{d\Phi(bt)}{dt}\right), \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{t}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{d.}{dt}f'(x+bt\alpha, y+bt6, z+bt\gamma) \\
&\quad + \mathrm{F}'(x+bt\alpha, y+bt6, z+bt\gamma)\Big]\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\
&\quad + t\left(\frac{d^2\varphi'(at)}{dt^2} - \frac{d^2\varphi'(bt)}{dt}\right) + t\left(\frac{d\Phi'(at)}{dt} - \frac{d\Phi'(bt)}{dt}\right), \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{t}{4\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{d.}{dt}f''(x+bt\alpha, y+bt6, z+bt\gamma) \\
&\quad + \mathrm{F}''(x+bt\alpha, y+bt6, z+bt\gamma)\Big]\sin.\theta\, d\theta\, d\omega \\
&\quad + t\left(\frac{d^2\varphi''(at)}{dt^2} - \frac{d^2\varphi''(bt)}{dt^2}\right) + t\left(\frac{d\Phi''(at)}{dt} - \frac{d\Phi''(bt)}{dt}\right);
\end{aligned}\right\}(14)$$

les fonctions $\varphi, \varphi', \varphi'', \Phi, \Phi', \Phi''$, étant les mêmes que précédemment.

Dans l'état naturel du corps, soit r le rayon vecteur du point M dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, z; appelons μ l'angle que fait ce rayon avec l'axe des x, et λ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x, z; nous aurons

$$x = r\cos.\mu, \quad y = r\sin.\mu\sin.\lambda, \quad z = r\sin.\mu\cos.\lambda.$$

Les six quantités $f(x, y, z)$, $f'(x, y, z)$, $f''(x, y, z)$, $\mathrm{F}(x, y, z)$, $\mathrm{F}'(x, y, z)$, $\mathrm{F}''(x, y, z)$, pourront être regardées comme de fonctions données de r, μ, λ; et si l'on suppose que l'ébranlement primitif était circonscrit dans une sphère décrite de l'origine des coordonnées comme centre et d'un rayon qu'on représentera par ε, ces fonctions ne seront différentes de zéro que pour des valeurs de r positives et moindres que ε. On conclura de là, comme dans le n° 7, que les fonctions comprises sous les signes $\int$ dans les formules (14), ne différeront de zéro que pour les valeurs de at ou de bt, comprises entre les limites $r \pm \varepsilon$; on verra de même que dans l'intervalle où ces fonctions ne seront pas nulles, les angles θ et ω différeront très-peu de $\pi - \mu$ et $\pi + \lambda$, en sorte que l'on aura, à très-peu près,

$$\alpha = -\cos.\mu = -\frac{x}{r},$$

$$\beta = -\sin.\mu \sin.\lambda = -\frac{y}{r},$$

$$\gamma = -\sin.\mu \cos.\lambda = -\frac{z}{r};$$

enfin, par un calcul semblable à celui du numéro cité, et en désignant par $\Pi(\zeta, \mu, \lambda)$, $\Pi'(\zeta, \mu, \lambda)$, $\Pi''(\zeta, \mu, \lambda)$, des fonctions qui s'évanouissent pour toutes les valeurs de la variable ζ, non-comprises entre les limites $\pm \varepsilon$, on transformera les formules (14) en celles-ci :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi(r - bt, \mu, \lambda) \\ &+ \frac{x^2}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi(r - at, \mu, \lambda) + \frac{xy}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi'(r - at, \mu, \lambda) \\ &+ \frac{xz}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi''(r - at, \mu, \lambda) - \frac{x^2}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi(r - bt, \mu, \lambda) \\ &- \frac{xy}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi'(r - bt, \mu, \lambda) - \frac{xz}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi''(r - bt, \mu, \lambda),\end{aligned}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi'(r-bt,\mu,\lambda)$$
$$+\frac{xy}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi(r-at,\mu,\lambda)+\frac{y^2}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi'(r-at,\mu,\lambda)$$
$$+\frac{yz}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi''(r-at,\mu,\lambda)-\frac{xy}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi(r-bt,\mu,\lambda)$$
$$-\frac{y^2}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi'(r-bt,\mu,\lambda)-\frac{yz}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi''(r-bt,\mu,\lambda),$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi''(r-bt,\mu,\lambda)$$
$$+\frac{xz}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi(r-at,\mu,\lambda)+\frac{yz}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi'(r-at,\mu,\lambda)$$
$$+\frac{z^2}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi''(r-at,\mu,\lambda)-\frac{xz}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi(r-bt,\mu,\lambda)$$
$$-\frac{yz}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi'(r-bt,\mu,\lambda)-\frac{z^2}{r^3}\frac{d.}{dt}\Pi''(r-bt,\mu,\lambda).$$

Il n'est pas nécessaire de donner ici les valeurs des fonctions Π, Π', Π'', exprimées au moyen des fonctions f, f', f'', F, F', F'', que contiennent les formules (14). Nous observerons seulement que Π ne dépend que du mouvement initial parallèle à l'axe des x, ou des fonctions f et F, et qu'il en est de même à l'égard de Π' par rapport à f' et F', et de Π'' par rapport à f'' et F''.

(19) Les dernières expressions de $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, mettent en évidence les deux ondes sphériques dont le centre commun est l'origine des coordonnées, et qui se propagent, l'une avec la vitesse a et l'autre avec la vitesse b. Dans la première, on aura

$$\frac{du}{dt}=\frac{x}{r^2}\frac{dA}{dt},\quad \frac{dv}{dt}=\frac{y}{r^2}\frac{dA}{dt},\quad \frac{dw}{dt}=\frac{z}{r^2}\frac{dA}{dt}, \qquad (15)$$

et, dans la seconde,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi(r-bt,\mu,\lambda)-\frac{x}{r^2}\frac{dB}{dt},\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi'(r-bt,\mu,\lambda)-\frac{y}{r^2}\frac{dB}{dt},\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi''(r-bt,\mu,\lambda)-\frac{z}{r^2}\frac{dB}{dt},
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

en faisant, pour abréger,

$$A=\frac{x}{r}\Pi(r-at,\mu,\lambda)+\frac{y}{r}\Pi'(r-at,\mu,\lambda)+\frac{z}{r}\Pi''(r-at,\mu,\lambda),$$

$$B=\frac{x}{r}\Pi(r-bt,\mu,\lambda)+\frac{y}{r}\Pi'(r-bt,\mu,\lambda)+\frac{z}{r}\Pi''(r-bt,\mu,\lambda).$$

L'épaisseur de chacune de ces deux ondes mobiles sera constante et égale à 2ε; le mouvement durera pendant un temps égal à $\frac{2\varepsilon}{a}$, pour la première, et à $\frac{2\varepsilon}{b}$ ou $\frac{2\varepsilon\sqrt{3}}{a}$, pour la seconde; l'intensité de l'ébranlement, mesurée comme dans le Ier § de ce Mémoire (n° 9), variera, pour les ondes d'une même série, en raison inverse du carré du rayon r, et, dans l'étendue d'une même onde, suivant une loi dépendante de l'ébranlement primitif.

D'après les formules (15), la vitesse du point M dont elles expriment les trois composantes, sera dirigée suivant son rayon r. Les déplacements de ce point qui répondent à ces trois composantes, auront pour valeurs :

$$u=\frac{x}{r^2}A,\quad v=\frac{y}{r^2}A,\quad w=\frac{z}{r^2}A.$$

Or, la dilatation correspondante du fluide est exprimée (n° 12), par

$$s=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\cdot \qquad (17)$$

D'ailleurs, on a

$$\frac{d.}{dx}\Pi(r-at,\mu,\lambda)=-\frac{x}{ar}\frac{d.}{dt}\Pi(r-at,\mu,\lambda),$$

en négligeant la partie qui serait de l'ordre de $\frac{\varepsilon}{r}$, comparativement à celle que l'on a conservée. Il en est de même par rapport aux fonctions Π' et Π''. A ce degré d'approximation, on aura

$$\frac{dA}{dx}=-\frac{x}{ar}\frac{dA}{dt}, \quad \frac{du}{dx}=-\frac{x^2}{ar^3}\frac{dA}{dt},$$

et de même à l'égard de $\frac{dv}{dy}$ et $\frac{dw}{dz}$. On aura donc

$$s=-\frac{x}{ar}\frac{dA}{dt}=-\frac{u_1}{a},$$

en appelant u_1 la vitesse du point M, déterminée par les formules (15). Par conséquent, l'onde mobile qui se propage avec la vitesse a, est constituée comme celle qui a lieu dans un fluide homogène, à une grande distance du centre de l'ébranlement, c'est-à-dire que la vitesse propre des molécules y est perpendiculaire à sa surface et en raison inverse de son rayon, et la dilatation du milieu, égale et contraire au rapport de cette vitesse à celle de la propagation.

Les formules (16) donnent

$$\frac{x}{r}\frac{du}{dx}+\frac{y}{r}\frac{dv}{dt}+\frac{z}{r}\frac{dw}{dt}=0;$$

et comme cette quantité est la composante de la vitesse du point M suivant son rayon r, il en résulte que sa vitesse est perpendiculaire à ce rayon. Ses déplacements suivant les prolongements des coordonnées x, y, z, sont

$$u=\frac{1}{r}\Pi(r-bt,\mu,\lambda)-\frac{x}{r^2}\mathrm{B},$$

$$v=\frac{1}{r}\Pi'(r-bt,\mu,\lambda)-\frac{y}{r^2}\mathrm{B},$$

$$w=\frac{1}{r}\Pi''(r-bt,\mu,\lambda)-\frac{z}{r^2}\mathrm{B}.$$

On aura, comme dans le cas précédent,

$$\frac{d\mathrm{B}}{dx}=-\frac{x}{br}\frac{d\mathrm{B}}{dt},\quad \frac{du}{dx}=-\frac{x}{br^2}\frac{d.}{dt}\Pi(r-bt,\mu,\lambda)+\frac{x^2}{br^3}\frac{d\mathrm{B}}{dt},$$

et de même par rapport à $\frac{dv}{dy}$ et $\frac{dw}{dz}$; d'où l'on conclura

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

c'est-à-dire, $s=0$ en vertu de l'équation (17). Ainsi, dans l'onde mobile qui se propage avec la vitesse b, les vitesses propres des molécules sont parallèles à sa surface, et le milieu que nous considérons n'éprouve ni augmentation, ni diminution de densité.

(20) Quelles qu'aient été les grandeurs et les vitesses des molécules d'un corps solide homogène, il résulte de cette analyse, qu'à une grande distance de l'ébranlement primitif, et lorsque les ondes mobiles sont devenues sensiblement planes dans chaque partie très-petite par rapport à leurs surfaces entières, il ne subsiste plus que des vitesses propres des molécules, normales ou parallèles à ces surfaces; les vitesses normales ayant lieu dans les ondes de la première espèce, où elles sont accompagnées de dilations qui leur sont proportionnelles, et les vitesses parallèles appartenant aux ondes de la seconde espèce, où elles ne sont accompagnées d'aucune dilatation ou condensation de volume, mais seulement de dilatations et de condensations linéaires.

Pour que ces dernières sortes d'ondes existent seules, il faudra que les formules (15) s'évanouissent par la nature de l'ébranlement primitif; ce qui exige qu'on ait

$$\frac{x}{r}\frac{d.}{dt}\Pi(\zeta,\mu,\lambda)+\frac{y}{r}\frac{d.}{dt}\Pi'(\zeta,\mu,\lambda)+\frac{z}{r}\frac{d.}{dt}\Pi''(\zeta,\mu,\lambda)=0,$$

pour toutes les valeurs de μ et λ, et pour toutes celles de ζ qui sont comprises entre les limites $\pm\varepsilon$; au moyen de quoi, les formules (16) se réduiront à

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi(r-bt,\mu,\lambda),$$
$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi'(r-bt,\mu,\lambda),$$
$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi''(r-bt,\mu,\lambda).$$

De même pour que les ondes de la première espèce soient seules produites, il faudra que les formules (16) s'évanouissent : en y mettant $\frac{at}{b}$ à la place de t, on en conclura

$$\frac{d.}{dt}\Pi(r-at,\mu,\lambda)=\frac{x}{r}\frac{dA}{dt},$$
$$\frac{d.}{dt}\Pi'(r-at,\mu,\lambda)=\frac{y}{r}\frac{dA}{dt},$$
$$\frac{d.}{dt}\Pi''(r-at,\mu,\lambda)=\frac{z}{r}\frac{dA}{dt};$$

et les formules (15) deviendront

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi(r-at,\mu,\lambda),$$
$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi'(r-at,\mu,\lambda),$$
$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\Pi''(r-at,\mu,\lambda).$$

Si l'on substitue à la place de A sa valeur dans les équations qui précédent celles-ci, et que l'on élimine ensuite entre elles, deux des trois fonctions Π, Π', Π'', on parvient à une équation identique, en sorte que ces trois équations de condition se réduisent à deux, et qu'il n'y a que deux des fonctions Π, Π', Π'', qui soient déterminées au moyen de la troisième qui reste arbitraire.

Ce dernier cas particulier est celui qui arrivera si l'on suppose qu'à l'origine du mouvement, la vitesse et le déplacement de chaque molécule avaient lieu suivant son rayon r, ou autrement dit, si l'on suppose qu'on ait eu

$$f(x,y,z)=\frac{x}{r}q,\ f'(x,y,z)=\frac{y}{r}q,\ f''(x,y,z)=\frac{z}{r}q,$$

$$F(x,y,z)=\frac{x}{r}Q,\ F'(x,y,z)=\frac{y}{r}Q,\ F''(x,y,z)=\frac{z}{r}Q;$$

q et Q étant des fonctions arbitraires de r, μ, λ. Les valeurs correspondantes de Π, Π', Π'', seront de la forme

$$\Pi(\zeta,\mu,\lambda)=\frac{x}{r}\Psi(\zeta,\mu,\lambda),$$

$$\Pi'(\zeta,\mu,\lambda)=\frac{y}{r}\Psi(\zeta,\mu,\lambda),$$

$$\Pi''(\zeta,\mu,\lambda)=\frac{z}{r}\Psi(\zeta,\mu,\lambda).$$

Elles feront évanouir les formules (16), et réduiront les formules (15) à celles-ci :

$$\frac{du}{dt}=\frac{x}{r^2}\frac{d.}{dt}\Psi(r-at,\mu,\lambda),$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{y}{r^2}\frac{d.}{dt}\Psi(r-at,\mu,\lambda),$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{z}{r^2}\frac{d.}{dt}\Psi(r-at,\mu,\lambda),$$

en s'arrêtant au même degré d'approximation que dans le n° 18. Lorsque l'ébranlement primitif aura été le même en tous sens autour de l'origine des coordonnées, les fonctions q et Q seront indépendantes de μ et λ et ne dépendront que de r; la fonction $\Psi(\zeta, \mu, \lambda)$ ne dépendra aussi que de ζ; et le mouvement produit sera le même, comme cela doit être, suivant toutes les directions.

OBSERVATIONS

SUR

QUELQUES MALADIES DES OISEAUX.

PAR M. FLOURENS.

(Lues à l'Académie royale des Sciences, le 18 novembre 1828.

§ I[er].

1. Les recherches sur les animaux, auxquelles je me livre depuis plusieurs années, m'ont fourni l'occasion d'observer quelques unes de leurs maladies singulières ou peu connues, et dont je me propose de publier successivement l'histoire. J'ai déja fait connaître, par plusieurs Mémoires précédents, le mode selon lequel s'opèrent, chez eux, la cicatrisation des plaïes cérébrales (1), la reproduction de la peau et des os (2), et la réunion des nerfs (3). Je continue par ces *Observations* sur les maladies des oiseaux.

(1) Voyez Recherches expérimentales sur les propriétés et les fonctions du système nerveux, etc., Paris, 1824, p. 101 et suiv.

(2) Voyez Expériences sur le système nerveux, Paris, 1825, p. 18 et suiv.

(3) Voyez expériences sur la réunion des plaies de la moelle épinière et des nerfs : *Annales des sc. nat.*, février 1828.

2. Le 12 avril 1823, on m'apporta, parmi les animaux qui devaient servir à mes expériences, une jeune poule dont les allures représentaient tout-à-fait les allures d'un animal ivre, au point que les gens mêmes qui la soignaient, frappés de cette similitude, l'avaient surnommée la *poule ivrogne*.

Cette poule, en effet, chancelait presque à chaque instant sur ses jambes, soit qu'elle se tînt simplement debout, soit qu'elle voulût marcher ou courir. Elle n'avançait que par zig-zags : souvent elle tournait à droite quand elle voulait aller à gauche, et à gauche quand elle voulait aller à droite : elle reculait au lieu d'avancer, elle avançait au lieu de reculer. Très-souvent aussi elle tombait sur ses jambes qui fléchissaient et pliaient tout-à-coup sous elle. Mais, c'était surtout quand elle s'élançait pour fuir, ou pour grimper sur un point élevé que, ne pouvant plus maîtriser et régulariser des mouvements devenus plus rapides, elle tombait et roulait quelquefois long-temps à terre, sans pouvoir réussir à se relever et à reprendre l'équilibre.

Ces singuliers phénomènes avaient trop d'analogie avec ceux que venaient de me montrer mes expériences, alors toutes récentes encore, sur le cervelet, pour que je ne fusse pas impatient de voir ce qui pouvait en être. Je procédai donc tout de suite à cet examen.

Je commençai par mettre le crane à nu : les os étaient parsemés de points noirâtres et cariés : j'enlevai les os, et j'ouvris la dure-mère; il s'écoula aussitôt une grande quantité de lymphe qui recouvrait l'encéphale et pénétrait dans toutes ses cavités.

Quant aux parties mêmes de l'encéphale, les lobes cérébraux et les tubercules quadrijumeaux étaient dans leur état naturel, et offraient leur couleur ordinaire; le cervelet, au contraire, avait un aspect jaunâtre qu'il devait à un nombre infini de points et de stries jaunes, ou plutôt couleur de rouille, qui en recouvraient toute la surface. Je l'ouvris, et je trouvai dans son centre un amas de matière purulente et coagulée, du volume à peu près d'un petit grain de vesce, et parfaitement isolé de l'organe qui le contenait dans une cavité, creusée dans son épaisseur et dont les parois étaient extrêmement fines et lisses.

3. Cette année-ci, 1828, peu après mon retour à Paris, M. Frédéric Cuvier voulut bien m'instruire qu'il y avait à la ménagerie du Jardin du Roi un coq atteint d'une maladie cérébrale dont tous les symptômes semblaient indiquer le siége dans le cervelet. Ce coq avait été beaucoup plus malade qu'il ne l'était dans le moment, le mal ayant en partie cédé à quelques applications de sangsues faites sur la nuque. Je fus voir ce coq.

Chez la poule qui précède, les mouvements avaient quelque chose de fougueux et d'impétueusement désordonné. Chez ce coq, au contraire, les mouvements étaient calmes et lents; ils se faisaient avec peine, comme avec paresse; mais leur trouble et leur défaut d'équilibration n'en paraissaient pas moins.

Ainsi, si l'animal se tenait debout, ses jambes fléchissaient à tout moment sous lui; s'il marchait, on apercevait une sorte d'hésitation et de disharmonie dans ses mouvements : on le voyait chanceler, et quelquefois, surtout si on le faisait marcher vite, perdre l'équilibre et tomber. Quand il becquetait, rarement son bec frappait-il juste, et rencontrait-il le grain : enfin, sa tête et son cou étaient dans un état d'instabilité ou d'oscillation presque continuelle.

Ce coq mourut dans les premiers jours du mois d'août. J'ouvris son crâne : les veines ou sinus de la dure-mère qui répondent au cervelet, tant le supérieur que les latéraux, étaient gonflés et gorgés de sang. Quant aux lobes cérébraux et aux tubercules quadrijumeaux, ils se trouvaient encore cette fois-ci dans leur état naturel, et offrant leur couleur ordinaire : mais le cervelet avait une couleur rosée, ou d'un rouge tendre, couleur qu'il tirait d'un nombre infini de points et de stries rouges dont était parsemée toute sa surface. Les points ressemblaient exactement à de petites ecchymoses qu'auraient produites des piqûres d'épingle, faites sur cette surface; et les stries ressemblaient à des veinules gorgées de sang, ou, mieux encore, à des filets de sang. Au reste, il n'y avait que la superficie de l'organe qui offrît de pareilles stries et de pareils points : tout l'intérieur, parfaitement sain, conservait sa couleur naturelle.

4. Le 9 du même mois, madame Rousseau voulut bien m'envoyer de sa riche basse-cour du Pecq, près St-Germain, un jeune coq qui venait de mourir d'une maladie qui lui avait paru singulière. Ce coq me fut apporté par M. le docteur Salla, qui me donna les détails suivants sur sa maladie.

L'animal ne pouvait se tenir quelque temps debout, sans chanceler sur ses jambes : il chancelait encore plus, quand il voulait marcher ou courir : son cou oscillait ou tremblait presque toujours, surtout quand il s'allongeait et s'éloignait du corps : cette oscillation cessait, si l'on offrait quelque appui au bec ou à la tête de l'animal.

On voit que ces symptômes se rapprochent tout-à-fait de ceux que je viens de décrire chez le coq précédent : aussi l'état des parties cérébrales fut-il entièrement le même.

La dure-mère m'offrit le même engorgement de ses veines ou de ses sinus dans la région du cervelet; le cervelet la même couleur rosée, et cette couleur également due à des points et à des stries rouges dont toute sa surface était parsemée. Je retrouvai enfin la même intégrité dans son intérieur, et le même état naturel du reste de l'encéphale.

5. Maintenant, si l'on compare ces trois observations entre elles, on voit : 1° Qu'il y a deux degrés distincts d'apoplexie: une *apoplexie profonde,* ou dont le siége pénètre jusque dans le centre même de l'organe; et une *apoplexie superficielle,* ou dont le siége n'atteint que la superficie de l'organe.

2° Qu'à chacun de ces degrés différents d'apoplexie correspondent des symptômes propres et déterminés : à l'*apoplexie profonde,* un trouble et un désordre complets des mouvements; à l'*apoplexie superficielle*, une simple *instabilité* ou défaut d'énergie musculaire, et de situation fixe et équilibrée.

3° Que l'*apoplexie profonde* s'accompagne de l'*apoplexie superficielle* (1), mais qu'il n'en est pas de même de celle-ci qui peut exister sans l'autre (2), et qui n'en paraît que le premier degré, un degré précurseur qui doit éveiller toute

---

(1) Dans la première observation, la superficie de l'organe offrait des traces de lésion comme l'intérieur.

(2) Dans les deux dernières observations, la surface de l'organe offrait seule des traces de lésion.

l'attention du médecin pour prévenir le passage de la maladie au second degré.

4° Enfin, que l'apoplexie, même l'apoplexie profonde, l'apoplexie la plus grave par conséquent, est susceptible de guérison naturelle : ce que montre bien la première observation par la couleur jaune des points et des stries, par l'isolement de la matière épanchée, surtout par la cicatrisation parfaite des points de l'organe qui entouraient l'épanchement; et ce dont, au reste, les belles observations de M. Serres sur les différents cas d'apoplexie chez l'homme, et mes nombreuses expériences sur toutes les parties de l'encéphale, chez les animaux, ont déja donné tant d'exemples.

§ II.

1. Au mois de juin 1824, il y avait au Jardin du Roi une grue dont la tête, par un mouvement horizontal plus ou moins rapide, se portait, presque continuellement, de droite à gauche et de gauche à droite. J'ai long-temps observé ce curieux animal avec M. Frédéric Cuvier, à qui je devais d'être instruit de sa maladie. Cette grue est morte durant mon absence; et je n'en rappelle ici le souvenir que pour signaler et constater un exemple naturel, et par cela seul précieux, des mouvements singuliers qui, comme l'ont montré mes nouvelles expériences, suivent la section des canaux sémicirculaires de l'oreille. D'après ces expériences, cette grue était évidemment atteinte d'une affection spéciale des canaux semi-circulaires horizontaux.

2. Je passe à un autre ordre de maladies.

§ III.

1. Au mois de mai 1826, me trouvant à la campagne, on m'apporta un petit canard d'une couvée nouvellement éclose, qui, disait-on, *venait sans doute d'avaler quelque chose de travers,* et qui était sur le point de suffoquer. Ce petit canard ouvrait un large bec, et ne respirait qu'avec une peine extrême. J'examinai le gosier, la trachée-artère, l'œsophage : je ne vis rien. Cependant les angoisses de l'animal continuaient et s'accroissaient, et, au bout d'une ou deux heures, il mourut.

Je l'ouvris aussitôt : je ne trouvai aucun corps étranger ni dans la trachée-artère, ni dans l'œsophage ; mais je trouvai les poumons d'un rouge foncé et gorgés de sang. C'était d'une violente inflammation aiguë de poitrine que ce canard était mort.

2. Je me rendis à la terrasse où se trouvaient les petits canards. On m'en montra aussitôt un autre qui venait de tomber dans le même état de suffocation que le précédent, et à qui cette suffocation, me dit-on, avait pris tout d'un coup. En effet, pendant que je l'examinais, un troisième fut subitement saisi, sous mes yeux, d'une oppression de poitrine si vive, qu'au moment même où il fut frappé, l'animal devint immobile, il ouvrit un large bec, il ne respira plus qu'avec une peine extrême; en touchant son cœur, on sentait une palpitation très-vive; il ne mangea plus, il ne but plus, et mourut au bout de deux ou trois heures. Celui que j'avais trouvé suffoquant, à mon arrivée à la terrasse, mourut aussi quelques heures après l'invasion de sa maladie.

Je les ouvris tous les deux, et je retrouvai, chez tous les deux, le même engorgement inflammatoire des poumons que j'avais observé chez le premier. C'était à la même espèce de pneumonie aiguë qu'ils avaient tous trois succombé.

3. La terrasse où l'on avait porté, de ce jour-là seulement, ces petits canards, et qui n'était d'ailleurs nullement destinée à élever de la volaille, était située au nord; le soleil y parvenait à peine, et conséquemment elle était fort froide. Or, c'était évidemment le froid, et le froid seul, qu'il fallait accuser de ces violentes inflammations pulmonaires auxquelles trois petits canards avaient déja succombé. Je fis donc tout de suite transporter ceux qui survivaient encore, et qui étaient au nombre de sept, dans une basse-cour située au midi, et parfaitement exposée au soleil. On réchauffa soigneusement ces petites bêtes, et, de ce moment, les inflammations de poitrine disparurent sans retour: les sept canetons, tous les sept, sans en excepter un seul, ont parfaitement réussi, et sont parvenus à l'âge adulte.

4. Cet effet si violent, et, si l'on peut ainsi dire, foudroyant, du froid sur ces jeunes oiseaux, me rappela ce que j'avais observé, quelques années auparavant, sur des poules et des canards privés de leurs lobes cérébraux. Ces poules et ces canards, opérés durant la belle saison, et complètement guéris d'ailleurs de leur plaie, étaient presque tous (1) morts

---

(1) Hors deux poules âgées de trois à quatre ans que je conservai vivantes, quoique privées de leurs lobes cérébraux, l'une durant dix mois, et l'autre durant six mois et demi. J'abandonnai la première de ces poules à mon retour d'alors (1823) à Paris; la seconde mourut d'un accident étranger et à

de phthisie pulmonaire, dès les premiers froids qui avaient succédé à leur opération.

5. En 1824, j'avais porté dans ma chambre, pour mieux la garantir du froid, l'une de ces poules que je conservais et étudiais avec soin, depuis plusieurs mois. Cette poule n'était tranquille que lorsque je la tenais près du feu : si je l'en éloignais, elle paraissait tout de suite inquiète, mal à son aise, souffrante; elle allait de côté et d'autre jusqu'à ce qu'elle se retrouvât encore près du feu, et alors elle s'en approchait jusqu'à se brûler, quelquefois même jusqu'à s'y jeter dedans : quand elle en était à une distance convenable, elle se couchait sur le côté, étendant une aile, et soulevant ses plumes, pour mieux se pénétrer de l'impression de la chaleur. Si le feu venait à s'éteindre, ce qui arrivait souvent, surtout quand je sortais, la poule s'en approchait de plus en plus à mesure qu'il s'éteignait; et enfin elle allait se coucher jusque sur les cendres et sur les tisons éteints. Elle mourut vers la fin de novembre : je trouvai ses poumons enflammés et gorgés de sang sur divers points, et, sur divers autres, en état de suppuration. En 1825, je perdis également, dès les premiers jours de décembre, une autre poule et un canard

---

son opération et au froid. (Voyez mes Rech. exp. sur les prop. et les fonct. du syst. nerv., etc., Paris, 1824, p. 87 et 124.) Les oiseaux (poules ou canards) privés de leurs lobes cérébraux, que j'ai perdus de phthisie pulmonaire, étaient tous des oiseaux de l'année : circonstance digne de remarque, en ce qu'elle montre bien, ce que montrent également d'ailleurs toutes ces *Observations*, que la phthisie est surtout une maladie du jeune âge, et que c'est surtout à cet âge que le froid est susceptible de la produire.

que je conservais, privés de leurs lobes cérébraux, depuis le mois de juillet. J'ouvris ces deux animaux; et je trouvai qu'ils avaient péri, comme le précédent, d'inflammation et de suppuration pulmonaires.

6. Le rapprochement de ces effets du froid sur ces différents animaux, son action si déterminée et si constante sur l'organe respiratoire, ces degrés divers d'inflammation chronique ou aiguë qui venaient de se produire sous mes yeux, tout cela me fit sentir que j'avais enfin, entre les mains, un moyen d'investigations et d'expériences directes sur l'une des maladies les plus cruelles qui affligent l'humanité, sur la phthisie pulmonaire. Je résolus d'en tirer tout le parti possible. Je voulus voir d'abord si, dans certains cas donnés, le froid seul suffit pour déterminer la phthisie pulmonaire. Je voulus voir ensuite si, dans ces mêmes cas, il suffit d'éviter le froid pour éviter cette maladie. Je voulus voir enfin si cette maladie, commencée sous l'effet d'une température froide, ne pourrait pas guérir par le seul effet d'une douce température.

7. J'eus bientôt à ma disposition une nouvelle couvée de onze canards, âgés de huit jours. Je fis trois parts de cette couvée. Trois petits canards furent portés, à dix heures du matin, sur la terrasse située au nord, où je les laissai, ou plutôt, où je m'étais proposé de les laisser jusqu'à 4 heures du soir. Mais deux de ces canards moururent de deux à trois heures; le troisième fut trouvé mort le lendemain matin, dans le panier où on l'avait couché; et c'est encore de pneumonie aiguë qu'ils étaient morts tous les trois. Trois autres furent constamment portés, durant le beau du jour, dans

la basse-cour située au midi : tous les trois sont parvenus à l'âge adulte. Enfin, les cinq autres furent alternativement portés de la basse-cour du midi à la terrasse du nord, de manière à passer à peu près une heure dans l'un de ces lieux, et une heure dans l'autre. J'avais pensé déterminer ainsi en eux, par l'action d'un froid non continu, une inflammation pulmonaire chronique : mais ils périrent tous d'inflammation aiguë, comme les trois précédents; ils périrent seulement un ou deux jours plus tard.

8. Il était évident que c'était au jeune âge de l'animal qu'il fallait attribuer cet effet si soudain du froid, même d'un froid interrompu ; aussi aurais-je vivement désiré alors des canards plus âgés, mais il n'y en avait pas : d'ailleurs, la saison chaude avançait : je renvoyai donc mes expériences au retour des froids.

9. Je me procurai, dans les premiers jours d'octobre 1826, une couvée de 23 poulets, âgés d'un mois à peu près. Dès que les premiers froids parurent, je mis six de ces poulets dans un local approprié que je maintenais tout le jour à une douce température : la nuit je couchais ces poulets dans des paniers où ils étaient chaudement couverts. Aucun de ces six poulets, parmi lesquels il y avait quatre femelles et deux mâles, n'a été atteint de phthisie pulmonaire : un seul est mort d'une maladie aux yeux, dont je parlerai tout à l'heure, et un autre en a perdu un œil.

10. De onze poulets que j'ai constamment tenus dans la basse-cour située au midi, tous, à l'exception de deux, une poule et un coq, sont morts, avant la fin de décembre, de

phthisie pulmonaire, après avoir passé par tous les degrés de l'étisie et de la consomption.

Ces poulets qui, à la fin d'octobre, étaient encore vifs et gais, perdirent peu à peu leur vivacité et leurs forces : ils traînaient leurs ailes; leurs plumes se hérissaient; leurs flancs se creusaient; ils gémissaient et piolaient presque continuellement; leur voix s'altérait, s'enrouait, s'éteignait progressivement; ils ne mangeaient presque plus; ils devinrent d'une maigreur extrême; leur peau sèche était collée sur les os : ils cherchaient à entrer dans les appartements pour s'y abriter, et, quand ils y étaient entrés, on les voyait s'approcher le plus qu'ils pouvaient du feu, et aller se coucher jusque sur les cendres, même sur les chiens ou les chats qui entouraient le feu.

11. A la mort de ces animaux, je trouvai leurs poumons dans différents états d'inflammation et de suppuration. Généralement, le larynx, toute la trachée-artère et les bronches, étaient pleins d'une humeur purulente d'un gris sale ou couleur de boue, et d'une odeur fétide : cette humeur était parsemée d'une infinité de très-petits points noirâtres; et quand on la mettait dans l'eau, elle allait au fond. Les poumons, sur certains points, étaient gorgés de sang; et là, leur tissu, ramolli et comme putréfié, avait une couleur lie de vin : sur d'autres points, ordinairement sur le bord externe et postérieur, les vésicules offraient des points noirs pareils à ceux dont l'humeur purulente était parsemée (1);

(1) Dans plusieurs de ces points noirs se trouvait un *très-petit corps* dur, crépitant, de couleur blanche, et d'une apparence osseuse ou comme cornée.

enfin, sur d'autres points, on voyait des vésicules rongées, et formant de petites poches remplies de ce pus sale dont les bronches, la trachée-artère et le larynx étaient pleins.

Quant aux deux poulets qui survécurent, ce qu'ils durent sans doute à ce qu'ils s'étaient trouvés mieux revêtus de plumes que les autres quand les froids survinrent, ils sont toujours demeurés petits et faibles.

12. Il reste six poulets encore pour compléter le nombre de vingt-trois sur lequel j'avais établi mes expériences : voici ce que je fis de ces six poulets. Je les laissai d'abord avec les onze de la basse-cour jusqu'à ce qu'ils m'offrissent des signes bien évidents de phthisie plus ou moins avancée. Alors je les portai dans le local à température douce où je les réunis, après les avoir marqués d'un morceau d'étoffe à la pate, aux six qui s'y trouvaient déja.

13. Deux de ces poulets qui seraient sûrement morts ou le jour même ou le lendemain, si je les eusse laissés dans la basse-cour, après avoir paru d'abord reprendre quelque force, périrent, l'un au bout de cinq jours, et l'autre au bout de neuf : je trouvai leurs poumons dans un état complet de suppuration ou d'inflammation.

14. Les quatre autres poulets reprirent peu à peu de la vivacité et de la vigueur : ils se remirent à manger avec appétit ; ils se rétablirent enfin complètement, et au mois d'avril 1827, époque où je leur donnai la liberté à tous, ils se portaient tout aussi bien que ceux qui n'avaient jamais quitté le local à température chaude.

15. Parmi les quatre poulets guéris, se trouvaient trois

coqs que je sacrifiai pour voir et quel pouvait être l'état actuel de leurs poumons, et quel pouvait avoir été celui par où ces organes avaient passé durant les signes évidents de phthisie que ces animaux m'avaient offerts : signes dont le plus immédiat et le plus direct est un pus sale qu'on voit sortir de la glotte, en tirant la langue au dehors du bec, et en comprimant le larynx, ou la trachée-artère. J'ouvris donc la poitrine de ces trois coqs : je trouvai, chez tous les trois, des traces d'une altération ancienne des poumons, plus ou moins profonde, et maintenant guérie. Je conserve, dans la liqueur, un de ces poumons guéris dont un lambeau entier n'offre plus que des vésicules affaissées et déprimées, et où se distinguent encore des traces des points noirs qu'elles avaient contenus durant le cours de la maladie (1).

16. J'ai déja dit que l'un des six poulets que j'avais enfermés dans un local approprié, pour les garantir du froid, était mort d'une maladie aux yeux, et qu'un autre en avait perdu un œil. Cette maladie consistait en de petits abcès qui se formaient sur divers points de la cornée, et qui contenaient un pus blanchâtre. Quelquefois l'inflammation s'étendait à tout le globe de l'œil : les paupières offraient alors une tuméfaction énorme ; il s'accumulait sous elles une matière albumineuse, coagulée, semblable à du blanc d'œuf : la cornée se détachait, tombait, et l'œil se vidait. C'est ce qui arriva au

(1) Je conservai la poule que je destinais à me donner des œufs au moyen desquels je me proposais d'étudier le mode d'action que peut exercer par la génération la phthisie pulmonaire guérie. Mon retour à Paris m'a empêché de mettre cette expérience à exécution.

poulet qui mourut, et à celui qui perdit un œil. Chez les autres, la maladie se borna à quelques abcès qui se guérirent d'eux-mêmes.

17. Au reste, cette maladie des yeux, due, dans ce cas, aux vapeurs concentrées du local où ces poulets étaient renfermés, est aussi très-souvent déterminée chez ces animaux, et d'une manière bien plus cruelle, par le froid, surtout par le froid humide.

18. Durant les pluies de l'hiver de 1826 à 1827, le volailler qui fournissait à mes observations, et dont le niveau du sol était très-bas, se trouva constamment inondé d'eau. La plupart des poules, surtout des poules jeunes, furent atteintes d'abcès à la cornée et d'inflammations du globe de l'œil, au point que plusieurs en perdirent les yeux : mais l'effet du froid humide ne se borna pas là. A ces abcès de la cornée se joignirent souvent des tumeurs énormes sur la tête. Ces tumeurs abcédaient; il s'en écoulait, avec abondance, un pus sanieux; et presque toujours l'animal succombait. Plusieurs poules furent aussi atteintes alors de rhumatisme aigu et de sciatique; ce qui me donna lieu de faire sur ces maladies quelques observations que je renvoie à un second Mémoire.

§ IV.

1° Des observations qui précèdent touchant les effets du froid sur les oiseaux, il suit : 1° Que, chez ces animaux, le froid exerce une action constante et déterminée sur les poumons;

2° Que l'effet de cette action est d'autant plus prompt et plus grave que l'animal est plus jeune;

3° Que, quand le froid ne détermine pas une inflammation pulmonaire aiguë et promptement mortelle, il produit une inflammation chronique, laquelle est la phthisie pulmonaire même;

4° Que la chaleur prévient constamment l'invasion de la phthisie pulmonaire; que constamment aussi, quand l'invasion a eu lieu, elle en suspend les progrès, et que quelquefois même elle les arrête et amène une guérison complète;

5° Que cette maladie, à quelque degré qu'elle soit parvenue, n'est jamais contagieuse : les poulets atteints de phthisie étaient non-seulement tout le jour avec les poulets sains, mais la nuit on les couchait dans les mêmes paniers, sans que jamais ceux-ci aient éprouvé la moindre influence d'une communication aussi intime et aussi prolongée;

6° Enfin, que l'action d'un air, trop long-temps renfermé, expose ces animaux à des abcès à la cornée, et à des inflammations du globe de l'œil; abcès et inflammations que détermine aussi chez eux, et d'une manière bien plus cruelle encore, le froid, et surtout le froid humide.

2. Une longue suite d'observations faites sur l'homme a sans doute bien appris que le froid est le fléau le plus redoutable pour les inflammations pulmonaires chroniques, et que la chaleur est, au contraire, leur remède le plus efficace. Les expériences qu'on vient de voir, confirment, d'une manière aussi directe que décisive, et l'effet pernicieux du froid et l'effet salutaire de la chaleur; et en montrant ainsi, avec la dernière évidence, et où est la source du mal et où est la source du bien, peut-être que leur résultat ne sera pas entièrement perdu pour l'humanité.

A la vérité, ces expériences ne portent encore que sur la phthisie pulmonaire accidentelle ou acquise; mais je me propose de les compléter par des expériences sur la phthisie tuberculeuse ou congéniale de certains mammifères, ruminants ou rongeurs, chez lesquels cette espèce de phthisie est très-commune.

3. Je termine ici ce Mémoire. Je renvoie à un second la suite de mes observations sur les maladies des animaux, oiseaux ou mammifères.

Ce qui précède, bien qu'il ne s'étende encore qu'aux oiseaux de nos basses-cours, suffit pour donner une idée du parti qu'on pourrait tirer de ces observations, même pour éclairer la pathologie humaine, et pour montrer combien on aurait tort de les négliger et de les dédaigner.

4. Réaumur se plaignait de ce que « les connaissances les « plus élémentaires sur les oiseaux de nos basses-cours nous « manquaient encore (1) ». Il ajoutait que l'étude de ces animaux pouvait néanmoins offrir des *amusements aussi doux qu'utiles*, et qu'il appelait des *amusements vraiment philosophiques* (2).

Mais si ce célèbre académicien eût vu sortir de cette étude des résultats directement et immédiatement applicables aux maladies de nos semblables, il l'eût sans doute

---

(1) Art de faire éclore et d'élever en toute saison des oiseaux domestiques, etc., t. II, p. 241.

(2) Ibid., p. 239.

regardée comme aussi sérieuse que féconde, et digne de toute l'attention de ceux qui se livrent au traitement des affections morbides de l'économie vivante, soit chez l'homme, soit chez les animaux.

EXPÉRIENCES

TOUCHANT

L'ACTION DE LA MOELLE ÉPINIÈRE

SUR LA CIRCULATION.

Lues à l'Académie royale des Sciences, le 20 juillet 1829.

Par M. FLOURENS.

1. Chacun connaît l'opinion de Le Gallois (1), opinion devenue si rapidement célèbre, et qui consiste à placer dans la moelle épinière le siége du principe des mouvements du cœur.

2. J'ai déja fait voir, en 1823, par des expériences que j'eus l'honneur de soumettre alors au jugement de l'Académie, 1° que la circulation qui, chez les animaux adultes, est abolie, sur-le-champ, par la destruction de la moelle épinière, survit, au contraire, un certain temps, à cette destruction, chez les animaux qui viennent à peine de naître (2); 2° que, chez les animaux adultes même (et M. Wilson Philipp

(1) Voir Expériences sur le principe de la vie, etc.

(2) Voyez mes *Recherches expérimentales sur les propriétés et les fonctions du système nerveux*, Paris, 1824.

avait déja constaté ce point(1)), la circulation survit à la destruction de la moelle épinière, pourvu qu'on supplée à propos la respiration par l'insuflation (2).

3. Ainsi, chez le jeune animal, où la respiration est moins nécessaire à la circulation, la moelle épinière l'est moins aussi; et, chez l'animal adulte, quand l'insuflation continue la respiration, la circulation survit à la moelle épinière. C'est donc surtout parce qu'elle concourt à la respiration que la moelle épinière concourt à la circulation.

4. D'où il suit que, s'il y avait un animal où la respiration pût se passer complètement, du moins pour un certain temps, de la moelle épinière, la circulation pourrait s'en passer complètement aussi.

5. Cet animal est le poisson. J'ai fait voir, par des expériences précédentes (3), qu'on peut détruire la moelle épinière tout entière chez les poissons, sans détruire la respiration; attendu que ce n'est plus de la moelle épinière, comme dans les autres classes, mais de la moelle alongée elle-même, et de la moelle alongée seule, que, chez ces animaux, les nerfs du mécanisme respiratoire ou des opercules tirent leur origine.

6. On peut également détruire la moelle épinière, chez les poissons, sans détruire la circulation.

---

(1) Voir M. Wilson Philipp. *Exp. inq.* etc.

(2) Voyez mes *Recherches exp. sur les propr. et les fonctions du système nerveux.*

(3) Voyez mes *Nouvelles expériences sur le système nerveux*, *Mémoires de l'Acad. roy. des sc., tome IX*, *an* 1830.

7. J'ai détruit successivement, sur plusieurs carpes et sur plusieurs barbeaux, la moelle épinière tout entière, sans toucher à la moelle allongée; chez tous ces poissons, la respiration et la circulation ont long-temps survécu à cette destruction : les mouvements du tronc et de ses appendices ont seuls disparu, mais la tête et la région des opercules ont continué à se mouvoir comme à l'ordinaire; et la circulation subsistait encore, même à l'extrémité du tronc, plus d'une demi-heure après la destruction totale de la moelle épinière.

8. D'un autre côté, j'ai constamment vu, dans les autres classes, la circulation survivre à la destruction de toutes les parties de la moelle épinière auxquelles survit la respiration: à la destruction de la moelle lombaire, par exemple, chez les oiseaux, à celle de la moelle lombaire et de la costale, chez les mammifères, etc. (1). Sur plusieurs oiseaux, pigeons, poules, etc., j'ai détruit la moëlle lombaire, et la circulation a survécu, même dans le train postérieur, pendant des journées entières; j'ai détruit la moëlle lombaire et la costale sur plusieurs lapins, et la circulation a survécu pendant plusieurs heures, même dans le train et dans les jambes de derrière; enfin, j'ai détruit, sur plusieurs grenouilles, toute la moëlle épinière, hors le seul point de la moëlle cervicale duquel naissent les nerfs de la gorge (c'est-à-dire de la partie mobile de l'appareil respiratoire de ces animaux), et la circulation, comme la respiration, a survécu pendant fort long-temps (2).

---

(1) Voyez mes *Nouvelles expériences sur le système nerveux*, *Memoires de l'Acad. des sc.*, t. IX, *an* 1830.

(2) Voyez mes *Recherches exp. sur les prop. et les fonct. du système nerveux*.

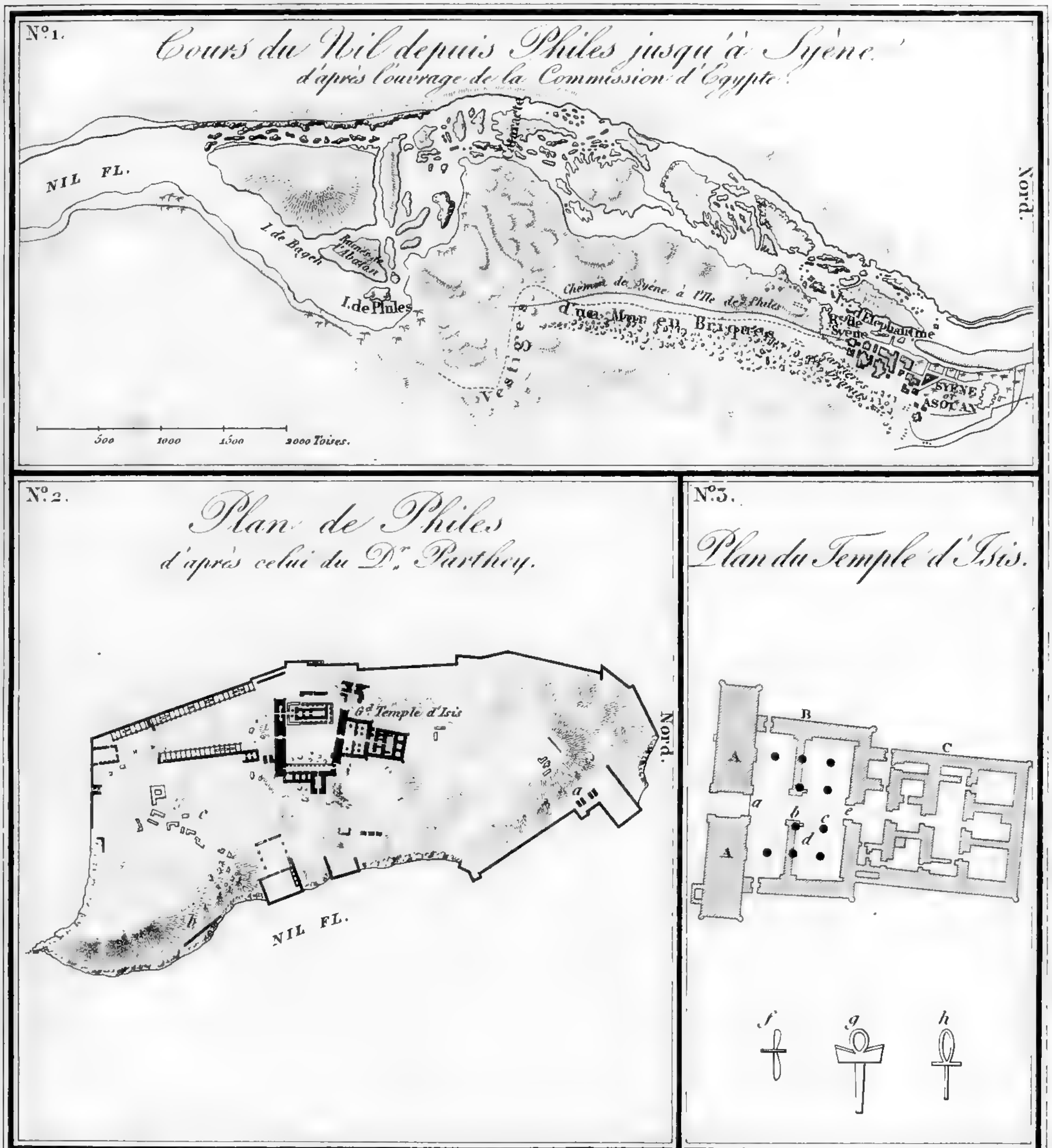
9. Ainsi donc, 1° on peut détruire *impunément* (1) pour la circulation tous les points de la moelle épinière qui peuvent l'être impunément pour la respiration, et quand la moelle épinière peut l'être tout entière pour celle-ci, comme chez les poissons, elle peut l'être tout entière aussi pour l'autre; 2° la moelle épinière n'a donc sur la circulation qu'une action relative et variable comme sur la respiration; 3° c'est donc surtout parce qu'elle influe, et par les points par lesquels elle influe sur la respiration, que la moelle épinière influe sur la circulation; et 4° enfin, ce n'est donc pas en elle que réside le principe essentiel, encore moins le principe exclusif, de cette circulation.

10. Mais où réside donc ce principe? On verra, dans un prochain mémoire, quelles sont les parties où mes expériences me conduisent à le placer, et quel est le mode selon lequel il s'y répartit.

---

(1) *Impunément:* relativement, du moins, à un principe d'action *absolu* ou *exclusif;* car la destruction de la moelle épinière 1° affaiblit toujours sur le champ la circulation; et 2° au bout d'un certain temps, détermine son abolition: mais c'est là, non une action *spéciale* et telle que je l'entends ici, mais une *simple action générale*, telle que je l'ai indiquée précédemment pour tous les centres nerveux. Voyez mes *Recherches expérimentales sur les proportions et les fonctions du système nerveux.*

FIN DU TOME DIXIÈME.



Gravé par Ambroise Tardieu.

XI. — COMITÉ DE COGNAC (Station viticole. Séance du 21 mars 1875). Expose des expériences faites à Cognac et des résultats obtenus par M. MAX. CORNU et M. MOUILLEFERT. In-4; 1875. 1 fr.

XII. — DUMAS, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Note sur la composition et les propriétés physiologiques des produits du goudron de houille.** In-4; 1875. . . . . 50 c.

XIII. — DUCLAUX, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. — **Études sur la nouvelle Maladie de la Vigne dans le sud-est de la France.** In-4, avec une planche représentant, coloriés en rouge, les pays vignobles atteints par le Phylloxera en 1874. . . . . 75 c.

XIV. — BOULEY, Membre de l'Institut. — **Rapport** sur les réclamations dont a été l'objet le décret relatif à l'importation en Algérie des plants d'arbres fruitiers ou forestiers venant de France. In-4; 1875. . . . . 75 c.

XV. — DUMAS, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et MAX. CORNU. — **Instruction pratique sur les moyens à employer pour combattre le Phylloxera, et spécialement pendant l'hiver.** In-4; 1876. . . . . 75 c.

XVI. — MILLARDET, *Délégué de l'Académie.* — **Études sur les Vignes d'origine américaine qui résistent au Phylloxera.** In-4; 1876. . . . . 2 fr.

XVII. — GIRARD (Maurice), *Délégué de l'Académie.* — **Indications générales sur les vignobles des Charentes**; avec 3 planches représentant, teintes en rouge, les portions du territoire des Charentes où le Phylloxera a été reconnu à la fin de chacune des années 1872, 1873 et 1874. In-4; 1876. 2 fr. 50 c.

XVIII. — CORNU (Maxime) et MOUILLEFERT, *Délégués de l'Académie.* — **Expériences faites à la station viticole de Cognac dans le but de trouver un procédé efficace pour combattre le Phylloxera.** In-4; 1876 . . . . 5 fr.

XIX. — AZAM, Docteur en Médecine. — **Le Phylloxera dans le département de la Gironde.** In-4, avec une grande planche représentant, au moyen de teintes noires, rouges et bleues, l'état du fléau en 1873 et son développement en 1874 et en 1875; 1876. . . . . 75 c.

XX. — BALBIANI. — **Sur l'éclosion de l'œuf d'hiver du Phylloxera de la Vigne.** In-4; 1876. (*Voir* n° XXIII.)

XXI. — **Extraits des Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.** (Séances des 2 novembre 1875 et 2 juillet 1876). . . . . 1 fr.

SOMMAIRE : Sur la parthénogénèse du Phylloxera comparée à celle des autres Pucerons; par M. BALBIANI. — Résultats obtenus, au moyen du sulfocarbonate de potassium, sur les vignes phylloxérées de Mézel, par M. AUBERGIER. — Observations sur la lettre de M. Aubergier; par M. DUMAS. — Sur le mode d'emploi des sulfocarbonates, par M. J.-B. JAUBERT. — Etat actuel des vignes soumises au traitement du sulfocarbonate de potassium depuis l'année dernière; par M. P. MOUILLEFERT. — Résultats obtenus à Cognac avec les sulfocarbonates de sodium et de baryum appliqués aux vignes phylloxérées; par M. P. MOUILLEFERT. — Expériences relatives à la destruction du Phylloxera; par M. MARION.

XXII. — BOUTIN (aîné), *Délégué de l'Académie.* — **Études d'analyses comparatives sur la vigne saine et sur la vigne phylloxérée.** In-4; 1877. . . . . 1 fr.

XXIII. — BALBIANI, Délégué de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France. — **Mémoires sur le Phylloxera,** présentés à l'Académie des Sciences, en 1876. In-4; 1876. . . . 2 fr.

SOMMAIRE : Sur l'éclosion prochaine des œufs d'hiver du Phylloxera (mars 1876). — Sur l'éclosion de l'œuf d'hiver du Phylloxera (avril 1876). — Sur la parthénogénèse du Phylloxera comparée à celle des autres Pucerons. — Nouvelles observations sur le Phylloxera du chêne comparé au Phylloxera de la vigne. — Remarques au sujet d'une Note récente de M. Lichtenstein sur la reproduction des Phylloxeras. — Recherches sur la structure et sur la vitalité des œufs du Phylloxera.

XXIV. — DUCLAUX, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon, délégué de l'Académie. — **Études sur la nouvelle Maladie de la Vigne dans le sud-est de la France.** Pays vignobles atteints par le Phylloxera en 1875 et 1876. In-4, avec 2 planches; 1876. . . . . 1 fr. 25 c.

XXV. — COMMISSION DU PHYLLOXERA. — **Avis sur les mesures à prendre pour s'opposer à l'extension des ravages du Phylloxera.** In-4; 1877. . . . . 75 c.

XXVI. — CORNU (Maxime), *Délégué de l'Académie.* — **Études sur le Phylloxera vastatrix.** In-4 de 358 pages, avec 24 planches en couleur. 1878 . . . . 10 fr.

INSTITUT DE FRANCE. — **Instruction sur les paratonnerres,** adoptée par l'Académie des Sciences (I^re Partie, 1823, par *Gay-Lussac.* — II^e Partie, 1854, par M. *Pouillet.* — III^e Partie, 1867, par M. *Pouillet*). In-18 jésus, avec 58 figures dans le texte et une planche; 1874. . . . . 2 fr. 50 c.

PRÉFECTURE DE LA SEINE. — **Assainissement de la Seine. Épuration et utilisation des eaux d'égoût,** 4 beaux volumes in-8 jésus; avec 17 pl., dont 10 en chromolithographie; 1876-1877. . 26 fr.

PRÉFECTURE DE LA SEINE. — **Assainissement de la Seine. Épuration et utilisation des eaux d'égoût.** — Rapport de la Commission d'études chargée d'étudier les procédés de culture horticole à l'aide des eaux d'égout. In-8 jésus avec pl.; 1878. . . . . 1 fr. 50

RAPPORT DE LA COMMISSION D'ÉTUDES chargée d'étudier l'influence exercée dans la presqu'île de Gennevilliers par l'irrigation en eau d'égoût, sur la valeur vénale et locative des terres de culture. In-8 jésus avec 3 planches en chromolithographie; 1878 . . . . 3 fr.