2. 10. 62.

[illegible]

[illegible]

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL

DE FRANCE.

TOME XXVIII.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES

DANS LE VINGT-HUITIÈME VOLUME.

THÉORIE

DU

MOUVEMENT DE LA LUNE,

Par M. DELAUNAY.

PREMIER VOLUME.

PRÉFACE.

Depuis que Newton a fait connaître la grande loi de la gravitation universelle, les géomètres se sont efforcés d'en déduire toutes les conséquences qui en résultent pour le mouvement des divers corps de notre système planétaire. Rien de plus facile que d'écrire les équations différentielles du mouvement de chacun de ces corps considérés comme de simples points matériels, en tenant compte des actions qu'ils exercent les uns sur les autres. Dès lors la recherche des particularités de leurs mouvements est ramenée à l'intégration de ces équations différentielles, et c'est là qu'est toute la difficulté de la question. On ne sait effectuer cette intégration d'une manière générale que lorsque le nombre des corps dont il s'agit est supposé se réduire à deux; et l'on trouve alors que chacun de ces deux corps se meut autour de l'autre suivant les lois du mouvement elliptique. Tel n'est pas le cas de notre système planétaire, puisque, outre le Soleil, il comprend un grand nombre de planètes, dont plusieurs sont accompagnées de satellites. Il s'ensuit qu'on ne peut tirer des équations différentielles du mouvement de tous ces corps les diverses conséquences qui s'y trouvent contenues implicitement, qu'en ayant recours aux méthodes d'intégration par approximation. Heureusement l'état de notre système planétaire se prête à merveille à l'emploi de ce mode d'intégration, en ce que, abstraction faite du Soleil, chacun des corps qu'il renferme est sous l'influence

16.

prédominante d'un corps principal qui produit à lui seul les circonstances les plus saillantes de son mouvement, les autres corps n'ayant pour effet que de modifier ce mouvement dans d'étroites limites. Pour les planètes, ce corps principal est le Soleil; pour les satellites, en tant que l'on considère leur mouvement par rapport à la planète dont chacun d'eux dépend, c'est cette planète même qui joue le rôle principal dont il est question. Il est naturel d'après cela de considérer d'abord uniquement le mouvement des planètes et de leurs satellites, tel qu'il résulte de la seule action du corps principal correspondant à chacun d'eux, mouvement qui n'est autre chose que le mouvement elliptique; puis de partir de là, comme d'une première approximation, pour arriver par une suite d'approximations successives à satisfaire de mieux en mieux aux équations différentielles du mouvement de ces divers corps. Telle est la marche que l'on suit en effet. Les approximations que l'on effectue ainsi les unes après les autres introduisent successivement, dans les expressions des coordonnées de chacun des mobiles, des parties nouvelles que l'on obtient sous forme de développements en séries de quantités périodiques; et l'on s'arrête lorsque l'on juge que les approximations suivantes ne fourniraient plus aucun terme d'une valeur sensible. Les divers termes périodiques qui se trouvent ainsi introduits dans les expressions des coordonnées d'une planète ou d'un satellite constituent ce qu'on nomme les *inégalités* de cette planète ou de ce satellite.

On comprend sans peine que le nombre des approximations successives que l'on a besoin d'effectuer, pour obtenir toutes les inégalités sensibles d'un des corps de notre système planétaire, n'est pas le même pour tous. Pour tel d'entre eux, les termes que l'on obtient ainsi vont en diminuant très-rapidement, et l'on peut se contenter des inégalités qu'une seule approximation introduit dans les formules du mouvement elliptique ; pour tel autre, au contraire, les approximations sont beaucoup moins convergentes, et l'on est obligé d'en faire un certain nombre à la suite les unes des autres, si l'on ne veut négliger aucune des parties sensibles qu'elles peuvent introduire dans les expressions de ses coordonnées. De là résulte une grande différence de difficultés entre les théories du mouvement de ces divers corps. De toutes ces théories, celle qui a pour objet le Mouvement de la Lune autour de la Terre est sans contredit la plus épineuse. La grandeur de la force perturbatrice qui émane du Soleil rend les approximations beaucoup moins convergentes que dans les théories relatives aux diverses planètes *, et par suite les inégalités qui en résultent sont beaucoup plus nombreuses. Mais, d'un autre côté, la connaissance des lois du mouvement de notre satellite est d'un très-grand intérêt pour la détermination des longitudes terrestres ; aussi est-ce vers la théorie de la Lune que se sont principalement tournés les efforts des géomètres qui se sont succédé depuis Newton. L'objet du travail dont je publie un premier volume est d'apporter une nouvelle pierre à l'édifice qu'ils ont si laborieusement construit. Je vais esquisser rapidement la série des travaux qui ont été effectués avant moi sur la théorie de la Lune, et montrer par quels moyens j'ai essayé de reculer les limites de nos connaissances sur ce sujet.

Newton n'a pas fait, à proprement parler, une théorie du Mouvement de la Lune. Il s'est borné, dans son immortel ouvrage des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle,* à montrer comment la loi d'attraction qu'il avait découverte pouvait

---

* La théorie du Soleil est comprise parmi les théories des planètes, puisque ce n'est autre autre chose que la théorie du mouvement de la Terre autour de cet astre.

expliquer quelques-unes des inégalités lunaires dont l'observation avait antérieurement dévoilé l'existence; et il est à remarquer qu'il ne dit rien de la plus grande de ces inégalités, celle qui a été désignée sous le nom d'*évection*. Quelque temps après, vers le milieu du XVIII^e siècle, la théorie du Mouvement de la Lune a été attaquée à peu près en même temps par Clairaut, d'Alembert et Euler. Ces trois grands géomètres ont établi d'abord les équations différentielles du Mouvement de la Lune autour de la Terre; puis, par l'intégration approximative de ces équations différentielles, ils ont retrouvé, chacun de leur côté, non-seulement toutes les inégalités connues jusque-là par l'observation, y compris l'évection dont Newton n'avait pas parlé, mais encore quelques inégalités nouvelles dont l'observation n'avait pas encore signalé l'existence. Ces premières tentatives ont amené un incident d'un grand intérêt. Clairaut, s'en tenant d'abord à une première approximation relativement à la force perturbatrice du Soleil, ne trouva pour le mouvement du périgée lunaire que la moitié de la valeur que l'observation lui assigne. Ce désaccord entre la théorie et l'observation le conduisit à émettre des doutes sur l'entière exactitude de la loi d'attraction trouvée par Newton, et à penser qu'elle devait être complétée par un terme qui, insensible aux distances du Soleil aux diverses planètes, pouvait produire des effets appréciables à la distance beaucoup plus petite de la Lune à la Terre. Mais bientôt il reconnut qu'en poussant l'approximation jusqu'aux quantités du second ordre par rapport à la force perturbatrice du Soleil, on obtient pour le mouvement du périgée lunaire une valeur beaucoup plus grande que celle qui résulte de la première approximation seule, et peu différente de celle que l'observation a fait connaître depuis longtemps. Il fut ainsi conduit à abandonner les idées qu'il avait émises sur la correction à faire à la loi de Newton, idées qui d'ailleurs avaient été vivement critiquées. Cet important résultat obtenu par Clairaut n'a pas tardé à être confirmé par d'Alembert, qui s'assura qu'en poussant les approximations encore plus loin, on trouve un accord de plus en plus satisfaisant entre l'observation et la théorie. Cette circonstance qu'avait présentée la détermination théorique du mouvement du périgée lunaire, pouvait faire prévoir les difficultés considérables que l'on rencontrerait pour pousser la recherche des diverses inégalités de la Lune jusqu'à un degré de précision comparable à celui que les observations avaient atteint elles-mêmes à cette époque.

Les résultats fournis par la théorie avaient déjà permis d'améliorer notablement les Tables du mouvement de la Lune. Elles acquirent bientôt une exactitude inespérée entre les mains de Tobie Mayer. Cet éminent astronome, prenant les recherches d'Euler pour base, porta la détermination théorique des inégalités lunaires beaucoup plus loin qu'on ne l'avait fait avant lui; puis, adoptant seulement la forme des inégalités auxquelles la théorie l'avait conduit, il en détermina les coefficients de manière à satisfaire le mieux possible aux observations. C'est ainsi qu'il parvint à construire les premières Tables qui aient pu servir à la détermination des longitudes en mer. Un si important résultat valut à la veuve de Tobie Mayer, enlevé prématurément aux sciences à l'âge de 39 ans (en 1762), une portion du prix de 20 000 livres sterling, que le gouvernement anglais avait proposé en 1714 pour la découverte d'une méthode propre à donner la longitude en mer à un demi-degré près.

Laplace fit faire de nouveaux progrès à la théorie de la Lune, non-seulement parce qu'il poussa les approximations plus loin que ses prédécesseurs, mais encore et surtout parce qu'il y fit plusieurs découvertes importantes, parmi lesquelles figure au premier rang celle de la cause de l'accélération séculaire du moyen mouvement de cet astre. Nous aurons l'occasion de parler en détail de ces découvertes dans le second volume.

Malgré tous ces pas que la théorie avait faits successivement, elle était encore loin d'avoir atteint la perfection qu'on voulait obtenir. Laplace caractérise lui-même nettement le degré de précision auquel il est parvenu. On lit, en effet, dans le préambule du livre septième de sa *Mécanique céleste :* « L'erreur des Tables » formées d'après la théorie que je présente dans ce livre ne » s'élèverait à cent secondes * que dans des cas fort rares. » Cependant, par l'application de la méthode de Mayer, les Tables lunaires s'étaient perfectionnées de plus en plus, soit par l'introduction de nouvelles inégalités indiquées par la théorie, soit par l'emploi d'observations plus nombreuses et plus exactes pour la détermination des coefficients de toutes les inégalités connues. C'est ainsi qu'on avait eu successivement les Tables de Mason, de Bürg et de Burckhardt. Celles de Burckhardt, à l'époque où elles ont paru (1812), présentaient une exactitude suffisante pour les besoins de l'astronomie ; elles ont été employées jusqu'à ces dernières années pour le calcul des éphémérides. La théorie restait donc en arrière, et de nouveaux efforts étaient nécessaires pour l'amener à un degré de précision comparable à celui qu'on avait pu donner aux Tables, au moins pour un certain temps, en employant la méthode empirique de Mayer. C'est ce qui fit que Laplace, « désirant de voir toute l'astronomie, fondée sur la seule » loi de l'attraction, n'emprunter des observations que les données

---

* Il s'agit ici de secondes centésimales. On sait que 100 secondes centésimales équivalent à 32",4 de la division sexagésimale.

» indispensables, obtint de l'Académie des Sciences qu'elle pro- » poserait pour le sujet du prix de Mathématiques qu'elle de- » vait décerner en 1820, la formation, par la seule théorie, de » Tables lunaires aussi exactes que celles qui ont été construites » par le concours de la théorie et des observations *. » Cet appel de l'Académie fut entendu, et le prix fut partagé entre deux pièces, l'une de Damoiseau, l'autre de MM. Plana et Carlini. Le travail de Damoiseau a été imprimé dans le tome III du *Recueil des Savants étrangers*. Celui de MM. Plana et Carlini n'a pas été publié; mais quelque temps après M. Plana fit paraître sous son nom seul un ouvrage considérable ayant pour titre : *Théorie du Mouvement de la Lune* (trois forts volumes in-4°), ouvrage qui n'est que le développement du Mémoire fait en commun par M. Carlini et par lui. Dans ces travaux remarquables de MM. Damoiseau et Plana, les calculs ont été poussés extrêmement loin, et les inégalités de la Lune ont été obtenues avec le degré d'approximation que demandait le programme de l'Académie, c'est-à-dire avec une précision comparable à celle que comportent les observations elles-mêmes. Damoiseau a même complété sa Théorie de la Lune par la construction de Tables lunaires qui ont été trouvées aussi exactes que celles de Burckhardt.

Devait-on dès lors considérer la question de la détermination théorique des inégalités lunaires comme résolue d'une manière définitive, et se contenter pour toujours des résultats obtenus, en renonçant à faire de nouvelles recherches sur le même sujet? Non, certainement non. On pouvait se demander d'abord si les calculs effectués par MM. Damoiseau et Plana étaient tout à fait exempts d'erreurs, et aussi s'ils avaient bien réellement tenu

---

* *Mécanique céleste,* livre XVI^e, chapitre I^{er}.

compte de toutes les quantités auxquelles ils devaient avoir égard d'après le degré d'approximation qu'ils avaient en vue. Les quelques légères différences qui existent entre les résultats obtenus par ces deux savants suffisent pour montrer que la révision de leurs calculs sous ce double rapport était loin d'être inutile. D'un autre côté, les limites de précision qu'ils ont atteintes, conformément au programme de l'Académie, ne sont pas telles, que l'on puisse s'en contenter pour toujours ; il suffit même que ces limites aient été atteintes, pour qu'aussitôt l'esprit humain, toujours insatiable de vérité, conçoive le désir d'aller au delà. Aussi les remarquables travaux dont il s'agit ont-ils été le signal d'une recrudescence dans les recherches ayant la théorie de la Lune pour objet. M. Lubbock, en suivant une marche toute différente de celle de M. Plana, se proposa de vérifier l'exactitude des formules de l'éminent géomètre de Turin; les résultats auxquels il est parvenu sont consignés dans une série d'opuscules qu'il a publiés successivement à partir de 1832. Poisson, dans un beau Mémoire, présenté à l'Académie le 17 juin 1833 *, proposa d'appliquer à la théorie de la Lune la célèbre méthode de la variation des constantes arbitraires qu'il avait contribué à établir, et s'en servit pour élucider diverses questions spéciales de cette théorie. M. Hansen refit complétement la théorie de la Lune en suivant une marche particulière, qu'il fit connaître dans l'ouvrage intitulé : *Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam Luna perlustrat* (Gotha, 1838); puis, à l'aide des formules qu'il avait obtenues pour les coordonnées de la Lune, il construisit des Tables de cet astre qui ont été trouvées supérieures à celles que l'on possédait avant lui. Ces Tables, publiées aux frais du gou-

---

* *Mémoires de l'Académie*, tome XIII.

vernement d'Angleterre (en 1857), sont maintenant adoptées pour le calcul des éphémérides. Enfin M. de Pontécoulant publia en 1846 une Théorie de la Lune qui forme le IV^e volume de son ouvrage intitulé : *Théorie analytique du Système du Monde*. Après avoir étudié les divers travaux dont je viens de parler, la matière m'ayant paru loin d'être épuisée, j'essayai d'apporter aussi mon contingent à la détermination théorique des inégalités lunaires ; en suivant une méthode entièrement différente de celles qui avaient été employées avant moi, je parvins à effectuer complétement le calcul de ces inégalités, avec une approximation notablement plus grande qu'on ne l'avait encore fait. Je vais tâcher de faire bien saisir les motifs qui m'ont guidé dans le choix de la marche à suivre pour exécuter ce long travail.

Clairaut, d'Alembert et Euler avaient établi les équations différentielles du mouvement de la Lune en prenant la longitude vraie de cet astre pour variable indépendante. Leur exemple a été suivi par Laplace, et depuis par MM. Damoiseau et Plana, qui n'ont fait qu'appliquer la méthode exposée dans le livre VII de la *Mécanique céleste*. En intégrant ces équations différentielles, on obtient la latitude de la Lune, son rayon vecteur et le temps (ou la longitude moyenne de l'astre, ce qui revient au même), exprimés au moyen de la longitude vraie ; puis en renversant la série qui donne le temps en fonction de la longitude vraie, on en conclut cette longitude exprimée en fonction du temps. Voici ce que Laplace dit à ce sujet dans le livre XVI^e de la *Mécanique céleste* : « La force perturbatrice du mouvement » lunaire dépend des sinus et cosinus de son mouvement vrai et » de son élongation au Soleil : leur réduction en sinus et cosinus » d'angles dépendants du moyen mouvement de la Lune est » pénible et peu convergente, à cause de la grandeur de son

» équation du centre et de ses principales inégalités. Il y a donc
» de l'avantage à éviter cette réduction et à déterminer d'abord
» la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie ; ce qui
» peut être utile dans le cas où l'on cherche le temps correspon-
» dant à la longitude vraie. On détermine ensuite, par le retour
» des séries, la longitude vraie en fonction de la longitude
» moyenne, et l'on n'a point à craindre, dans ce retour, le peu de
» convergence des approximations, que l'intégration des équa-
» tions différentielles laisse toujours incertaine. A la vérité, il
» faut, dans cette méthode, convertir le mouvement vrai du
» Soleil en fonction de la longitude vraie de la Lune. Mais dans
» cette conversion les grandes inégalités lunaires sont multipliées
» par le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la
» Lune, ou par un treizième environ, ce qui les rend fort petites. »
Les raisons mises en avant par Laplace, pour justifier la marche indirecte qu'il a adoptée d'après ses prédécesseurs, sont-elles suffisantes pour qu'on ne donne pas la préférence à la marche beaucoup plus naturelle qui consiste à chercher directement les expressions de la longitude de la Lune, de sa latitude et de son rayon vecteur en fonction du temps? C'est ce que n'ont pas pensé MM. Lubbock, Poisson, Hansen. On conçoit que les considérations mises en avant par Laplace aient prévalu tant qu'on n'avait pas encore poussé les calculs jusqu'au degré d'approximation que réclamaient les besoins de l'Astronomie. Tous les efforts devaient tendre vers un but unique : c'était d'atteindre ce degré d'approximation. Pour cela, il était naturel de suivre la méthode qui avait semblé tout d'abord apporter le moins possible de complication dans les calculs. Mais à partir du moment où ce but a été atteint par MM. Damoiseau et Plana, les idées se sont tournées d'un autre côté, et l'on a voulu arriver au même résultat par la

méthode directe et beaucoup plus rationnelle que l'on suit dans la théorie des planètes, et où le temps est pris pour variable indépendante. MM. Lubbock, Poisson, Hansen sont entrés tous trois dans cette voie nouvelle et ont proposé, chacun de leur côté, une méthode propre à atteindre le but qu'ils avaient en vue. Convaincu comme eux que l'emploi du temps comme variable indépendante dans la théorie de la Lune était un véritable progrès, je n'ai pas hésité à adopter leurs idées à ce sujet.

Après m'être complétement fixé sous ce rapport, j'ai dû faire un choix entre les deux manières de calculer les coefficients des inégalités lunaires dont on avait fait usage avant moi. Les valeurs des coordonnées de la Lune étant développées en séries de sinus ou de cosinus d'angles qui varient proportionnellement au temps, il est aisé de reconnaître que les coefficients de ces sinus ou cosinus dépendent des excentricités des orbites de la Lune et du Soleil, de l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'écliptique, du rapport des moyens mouvements des deux astres et du rapport de leurs moyennes distances à la Terre. Quand on détermine ces coefficients, on peut les obtenir sous deux formes différentes, suivant que l'on suppose connues à priori les valeurs numériques des diverses quantités qui viennent d'être énumérées, ou bien qu'on introduit ces quantités dans le calcul en les représentant par leurs symboles algébriques. Dans le premier cas, les coefficients des inégalités se réduisent à de simples nombres; dans le second cas, ce sont des fonctions complexes des petites quantités dont ils dépendent, fonctions que l'on ne peut guère considérer que sous la forme de développements en séries ordonnées suivant les puissances croissantes, entières et positives de ces petites quantités. Ces deux formes différentes ont été adoptées l'une et l'autre par les savants qui ont effectué le calcul des inégalités de la Lune. Damoiseau a pris la première, et M. Plana, au contraire, a choisi la seconde. Plus tard, M. Hansen a, comme Damoiseau, déterminé les coefficients des inégalités lunaires sous la forme numérique; et il a eu soin de donner dans ses *Fundamenta nova* les motifs qui l'ont décidé à agir ainsi. Ces motifs sont de deux sortes : d'une part, M. Hansen considère la détermination des coefficients des inégalités sous la forme analytique comme presque inabordable par la longueur des calculs qu'elle entraînerait pour aller jusqu'à un degré d'approximation suffisant; d'une autre part, il attaque vivement les développements en séries comme pouvant souvent induire en erreur sur le degré d'approximation qu'ils fournissent, et comme ne pouvant jamais donner avec certitude des valeurs suffisamment exactes pour les inégalités que l'on cherche. Après avoir bien pesé les raisons données par M. Hansen, il m'a été impossible de me ranger à son avis. L'exemple de M. Plana montre suffisamment que la détermination analytique des coefficients des inégalités de la Lune n'est pas inabordable; et ce qu'il a fait lui-même, on peut bien tenter de le faire de nouveau avec l'espoir de pousser les approximations encore plus loin, surtout si l'on parvient à modifier la marche des calculs de manière à en rendre l'exécution moins pénible. Quant au second reproche adressé par M. Hansen au développement des coefficients des inégalités sous forme de séries, il m'a paru dénué de fondement, et je ne m'y suis pas arrêté davantage; on peut voir dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie* (t. XLVI, p. 953) quelles sont les considérations sur lesquelles s'appuie mon opinion à ce sujet. Le développement analytique des coefficients des inégalités lunaires m'a semblé, au contraire, présenter des avantages inappréciables, avantages que M. Plana avait bien compris, et qui lui ont donné le courage nécessaire pour exécuter le monument scientifique dont nous lui sommes redevables. D'abord il est incontestable que cette détermination analytique des inégalités de la Lune présente une solution plus complète, plus satisfaisante pour l'esprit, que la recherche de ces inégalités sous forme numérique. Mais ce qu'on doit surtout considérer, c'est que les facteurs numériques qui entrent dans les divers termes du coefficient de chaque inégalité déterminée sous forme analytique, sont tous des fractions ordinaires dont la valeur s'obtient, non pas avec approximation, mais rigoureusement. Quelle que soit la méthode que l'on emploie pour obtenir les coefficients des diverses inégalités, on doit trouver une identité complète, absolue, entre les diverses déterminations de chacun de ces facteurs numériques. On comprend tout l'avantage qui en résulte pour la comparaison des valeurs trouvées par divers savants pour le coefficient d'une même inégalité. Les différentes valeurs obtenues pour ce coefficient doivent être identiquement les mêmes, terme à terme ; et s'il y a une différence pour l'un de ces termes, on est bien plus facilement mis sur la voie de l'erreur qu'on doit rechercher, que si l'on n'avait pu comparer que les valeurs numériques et approchées du coefficient tout entier [*]. Avec ce mode de développement sous forme analytique, le degré d'approximation du coefficient d'une inégalité dépend, non pas de l'exactitude plus ou moins grande avec laquelle on a calculé chacun des termes qui le composent, puisque ces termes peuvent être obtenus rigoureusement, mais bien du nombre plus ou moins grand de ces termes dont on a déterminé la valeur. Lorsque, par la comparaison des résultats obtenus par

---

[*] On en trouvera un exemple remarquable dans ce qui est arrivé relativement à la valeur de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, par la comparaison des formules que M. Adams et moi avions obtenues chacun de notre côté (*Comptes rendus de l'Académie*, tome XLVIII, page 817).

divers savants, un certain nombre des termes qui composent le coefficient d'une inégalité développé en série seront fixés dans leurs valeurs rigoureuses par l'identité des différentes déterminations qui en auront été faites, ces termes seront définitivement acquis à la science; et si l'on veut obtenir le coefficient de cette inégalité avec une plus grande approximation, on n'aura qu'à chercher la valeur de quelques-uns des termes suivants. Ces avantages considérables m'ont tellement frappé, que je n'ai pas hésité un seul instant à entrer dans la voie ouverte par M. Plana.

Ainsi, à l'exemple de MM. Lubbock, Poisson, Hansen, j'ai pris le temps pour variable indépendante dans les équations différentielles du mouvement de la Lune; et à l'exemple de M. Plana, j'ai adopté la forme analytique pour les coefficients des diverses inégalités fournies par l'intégration de ces équations différentielles. Mais je me suis écarté de tous mes devanciers par la manière dont j'ai effectué cette intégration. Dans tous les travaux antérieurs au mien, on cherche, par une première approximation, les inégalités qui sont du premier ordre par rapport à la force perturbatrice; par une deuxième approximation, celles qui sont du second ordre par rapport à cette force perturbatrice, et ainsi de suite. Il est aisé de voir que, à chaque nouvelle approximation, les inégalités précédemment obtenues se combinent les unes avec les autres pour produire d'autres inégalités; et que ces combinaisons conduisent bientôt à des calculs vraiment inextricables, ce qui empêche de pousser les approximations aussi loin qu'on le désirerait, sans cesser de conserver une entière sécurité sur l'exactitude des résultats obtenus. Aussi n'y a-t-il pas lieu d'être surpris de ce que, malgré tous les soins apportés par MM. Plana et Hansen dans leurs calculs, les coefficients qu'ils ont obtenus pour les inégalités de la Lune présentent des différences dont l'ensemble forme un total de plus de 50 secondes. Si j'avais adopté le même mode d'intégration par approximations successives, il m'eût été bien difficile de franchir les limites auxquelles M. Plana s'est arrêté, et mon travail se serait réduit à contrôler l'exactitude du sien. Mais je voulais atteindre une approximation plus grande que celle qu'il avait obtenue, et c'est dans ce but que j'ai imaginé une méthode spéciale pour intégrer les équations différentielles du mouvement de la Lune. L'idée fondamentale de cette méthode consiste à attaquer la difficulté par petites portions, et à remplacer ces quelques approximations successives qui se présentent avec un caractère de si grande complication, par un nombre beaucoup plus grand d'opérations distinctes, dont chacune est au contraire très-simple, et peut être effectuée avec toute l'exactitude désirable, sans que l'esprit cesse de pouvoir en embrasser très-facilement l'ensemble. Quelques mots d'explication suffiront pour faire comprendre la nature de cette méthode, que j'ai présentée à l'Académie dans les séances des 5 janvier et 16 novembre 1846.

D'après le beau Mémoire de Poisson de 1833, j'ai pris pour point de départ les équations différentielles fournies par la théorie de la variation des constantes arbitraires, et j'ai adopté un système d'éléments elliptiques tel, que ces équations aient la forme la plus simple dont elles soient susceptibles. La fonction perturbatrice, dont les dérivées partielles, relatives aux éléments elliptiques, fournissent précisément les valeurs des dérivées de ces mêmes éléments par rapport au temps, peut être facilement développée en une série de termes périodiques. Si l'on n'y prenait garde, l'introduction de cette série périodique dans les équations différentielles serait accompagnée d'un grave inconvénient : le temps sortirait des signes sinus ou cosinus, ce qui gênerait considérablement l'emploi de ces équations différentielles pour la détermination des inégalités lunaires. Je fais disparaître cet inconvénient par un moyen très-simple, qui diffère essentiellement de ceux employés avant moi pour atteindre le même but, et qui a le grand avantage de laisser aux équations différentielles la forme qu'elles avaient d'abord; quant à la fonction perturbatrice, elle se trouve par là modifiée de telle sorte, que le temps n'y entre plus explicitement qu'autant qu'il y est introduit par les valeurs des coordonnées des astres troublants, et qu'en outre elle renferme un terme non-périodique indépendant des actions perturbatrices de ces astres. Cela étant fait, je supprime de la fonction perturbatrice la totalité des termes périodiques qu'elle renferme, à l'exception d'un seul, que je choisis parmi ceux qui ont le plus d'influence pour produire des inégalités. En introduisant cette fonction ainsi simplifiée dans les équations différentielles, je trouve qu'elles s'intègrent complétement. Alors je profite de cette intégration pour en déduire des formules destinées à remplacer les six variables que j'avais par six autres de même nature. Lorsque, par l'emploi de ces formules de transformation, les nouvelles variables sont substituées aux anciennes dans la fonction perturbatrice et dans les expressions des coordonnées de la Lune, il en résulte que : 1° un des termes importants de la fonction perturbatrice disparaît (c'est le terme périodique que l'on avait conservé seul tout d'abord); 2° diverses inégalités correspondant à ce terme s'introduisent dans les valeurs des trois coordonnées de la Lune : de plus, les valeurs des six nouvelles variables en fonction du temps sont déterminées par des équations différentielles exactement de même forme que celles qui déterminaient les valeurs des six variables auxquelles elles ont été substituées. Dès lors, l'intégration des équations différentielles étant ramenée au même point que précédemment, sauf la disparition d'un terme périodique dans la fonction perturbatrice, une nouvelle opération analogue à celle qui vient d'être effectuée, fait de même disparaître un autre terme de cette fonction ; un troisième terme peut également lui être enlevé au moyen d'une troisième opération analogue, et ainsi de suite. De telle sorte qu'après que l'on a effectué successivement un nombre convenable d'opérations de ce genre, la fonction perturbatrice se trouve débarrassée de ses termes les plus importants, et que la question est ainsi rendue assez simple pour pouvoir être traitée de la même manière que s'il s'agissait des perturbations d'une planète ou du Soleil.

Ce qui fait toute la difficulté de la détermination des inégalités de la Lune, c'est la grandeur de la force perturbatrice qui émane du Soleil. En appliquant la méthode d'intégration que je viens d'esquisser rapidement, j'ai dû concentrer d'abord toute mon attention sur la recherche des inégalités produites par cette force perturbatrice. Ainsi, j'ai provisoirement laissé de côté les effets très-faibles dus à quelques causes secondaires, telles que l'attraction des planètes et la figure de la Terre, et en outre j'ai fait abstraction des inégalités du mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, me réservant de tenir compte ultérieurement des effets dus à ces diverses causes.

Dans le calcul des inégalités lunaires, on considère les excentricités des orbites de la Lune et du Soleil, l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'écliptique et le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, comme des quantités du premier ordre de petitesse ; le rapport des moyennes distances de la Lune et du Soleil à la Terre est une quantité du second ordre. Laplace, dans sa *Mécanique céleste*, a déterminé « toutes les inégalités du premier, du second et du troisième ordre, et les inégalités les plus » considérables du quatrième, en portant la précision jusqu'aux

» quantités du quatrième ordre inclusivement, et en conservant » celles du cinquième ordre, qui se sont présentées d'elles-» mêmes » (préambule du livre VII). M. Plana, par des calculs immenses qui lui ont demandé un temps considérable, a déterminé les valeurs des coefficients des inégalités lunaires jusqu'aux termes du cinquième ordre inclusivement; il n'a poussé plus loin le développement des coefficients que pour ceux où la lenteur de la convergence des séries lui a paru nécessiter la considération de quantités d'un ordre supérieur au cinquième. J'ai voulu, moi, aller jusqu'aux termes du septième ordre, sans en omettre aucun, sauf à pousser l'approximation plus loin encore, comme M. Plana, partout où j'en reconnaîtrais la nécessité. Ceux qui ont quelque peu l'habitude des calculs de ce genre comprendront combien j'ai agrandi la tâche en ajoutant deux ordres de plus à ceux que M. Plana a considérés.

Déterminer, sous forme analytique, toutes les inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre, jusqu'aux quantités du septième ordre inclusivement, en regardant ces deux corps comme de simples points matériels, et tenant compte uniquement de l'action perturbatrice du Soleil, dont le mouvement apparent autour de la Terre est supposé se faire suivant les lois du mouvement elliptique, telle est donc la question que je me suis proposé de résoudre, et que j'ai résolue en effet, à l'aide d'un travail assidu de plusieurs années. Dans l'accomplissement de cette tâche énorme, pour laquelle je n'ai pu me faire aider par personne, je n'ai négligé aucun des nombreux moyens de vérification que la théorie m'a indiqués. En outre, j'ai fait tous les calculs deux fois, sans aucune exception, en ayant soin de séparer chaque calcul de sa répétition, par un temps aussi long que possible, et par d'autres calculs tout différents, afin de rompre les habitudes de l'esprit, qui, sans cela, feraient facilement retomber dans une faute commise une première fois. Je m'estimerai très-heureux si mon travail peut contribuer à augmenter encore le degré de précision auquel on est parvenu dans la construction des Tables de la Lune.

Ce premier volume contient : 1° l'exposition de la méthode analytique que j'ai employée; 2° le développement complet de la fonction perturbatrice, avec les modifications qu'elle a subies successivement par suite des cinquante-sept opérations effectuées pour la débarrasser de ses termes les plus importants; 3° enfin le détail de l'établissement des formules de transformation relatives à ces cinquante-sept opérations. Le second volume comprendra : 1° les diverses formules destinées à tenir compte des termes qui restent dans la fonction perturbatrice, après que les cinquante-sept opérations précédentes ont été effectuées; 2° les expressions des trois coordonnées de la Lune, avec *toutes* leurs inégalités jusqu'au septième ordre inclusivement pour la longitude et la latitude, et jusqu'au cinquième ordre pour la valeur inverse du rayon vecteur; 3° enfin divers chapitres destinés à compléter ces expressions des coordonnées de la Lune, en tenant compte de tout ce qui avait été mis provisoirement de côté pour n'avoir à considérer que la partie capitale de la question.

Paris, le 17 Décembre 1860.

THÉORIE

DU

MOUVEMENT DE LA LUNE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE LA LUNE. — MOUVEMENT ELLIPTIQUE. — VARIATION DES CONSTANTES DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE.

1. Soient X, Y, Z les coordonnées de la Terre rapportées à des axes rectangulaires fixes dans l'espace ; ξ, η, ζ les coordonnées de la Lune, et ξ', η', ζ' celles du Soleil rapportées aux mêmes axes ; M la masse de la Terre, m celle de la Lune, et m' celle du Soleil.

Le Soleil, la Lune et la Terre étant supposés s'attirer mutuellement d'après la loi de Newton, les équations différentielles du mouvement de la Terre seront

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{m(\xi - X)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\xi' - X)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{m(\eta - Y)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\eta' - Y)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{m(\zeta - Z)}{[(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\zeta' - Z)}{[(\xi' - X)^2 + (\eta' - Y)^2 + (\zeta' - Z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Celles du mouvement de la Lune seront également

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\mathrm{M}(\xi-\mathrm{X})}{[(\xi-\mathrm{X})^2+(\eta-\mathrm{Y})^2+(\zeta-\mathrm{Z})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\xi'-\xi)}{[(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{\mathrm{M}(\eta-\mathrm{Y})}{[(\xi-\mathrm{X})^2+(\eta-\mathrm{Y})^2+(\zeta-\mathrm{Z})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\eta'-\eta)}{[(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{\mathrm{M}(\zeta-\mathrm{Z})}{[(\xi-\mathrm{X})^2+(\eta-\mathrm{Y})^2+(\zeta-\mathrm{Z})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'(\zeta'-\zeta)}{[(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si maintenant on imagine qu'on fasse passer par le centre de la Terre des axes coordonnés parallèles aux axes fixes, et qu'on désigne par x, y, z les coordonnées de la Lune, et x', y', z' celles du Soleil rapportées à ces axes mobiles, on aura

$$x = \xi - \mathrm{X}, \quad y = \eta - \mathrm{Y}, \quad z = \zeta - \mathrm{Z},$$
$$x' = \xi' - \mathrm{X}, \quad y' = \eta' - \mathrm{Y}, \quad z' = \zeta' - \mathrm{Z}.$$

Posons en outre

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r, \qquad \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = r';$$

r et r' seront les distances de la Lune et du Soleil à la Terre.

Au moyen des équations différentielles écrites précédemment, on trouvera facilement les suivantes, qui sont celles du mouvement relatif de la Lune autour de la Terre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(\mathrm{M}+m)x}{r^3} - \frac{m'x'}{r'^3} + \frac{m'(x'-x)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{(\mathrm{M}+m)y}{r^3} - \frac{m'y'}{r'^3} + \frac{m'(y'-y)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{(\mathrm{M}+m)z}{r^3} - \frac{m'z'}{r'^3} + \frac{m'(z'-z)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons enfin

$$M + m = \mu,$$

$$R = -\frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} + \frac{m'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}},$$

et ces équations deviendront

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{dR}{dx}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{dR}{dy}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{dR}{dz}. \end{aligned} \right.$$

2. Les seconds membres des équations (1) étant petits relativement aux seconds termes de leurs premiers membres, nous commencerons par intégrer ces équations en supposant les seconds membres nuls : nous obtiendrons ainsi les équations du mouvement relatif de la Lune autour de la Terre, tel qu'il aurait lieu si le Soleil n'avait pas d'influence sur ce mouvement relatif. Les équations dont nous devons nous occuper d'abord sont donc

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on multiplie la seconde de ces équations par z et la troisième par y, et qu'on retranche, on trouve

$$z\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 z}{dt^2} = 0;$$

on trouvera de même

$$x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Ces trois relations peuvent être intégrées et donnent

$$z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt} = k,$$

$$x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = k',$$

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = k''.$$

Si l'on ajoute enfin ces trois intégrales, après avoir multiplié la première par x, la seconde par y et la troisième par z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ disparaîtront, et le résultat se réduira simplement à

$$0 = kx + k'y + k''z.$$

On déduit de là immédiatement cette conséquence que, si le Soleil n'avait pas d'influence sur le mouvement relatif de la Lune autour de la Terre, la Lune ne sortirait pas d'un plan de direction constante passant par le centre de la Terre, et se transportant par conséquent parallèlement à lui-même, en même temps que la Terre se déplace.

Supposons que nous prenions pour plan fixe des XY le plan de l'écliptique à une époque particulière que nous considérerons comme étant l'origine du temps t. Soit h la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Lune sur le plan mobile des xy parallèle au premier, longitude qui sera comptée à partir de l'axe des x; soit en outre i l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur ce plan, et v l'angle compris entre la ligne des nœuds et le rayon vecteur qui joint la Lune à la Terre. On aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= r\cos v\cos h - r\sin v\cos i\sin h,\\ y &= r\cos v\sin h + r\sin v\cos i\cos h,\\ z &= r\sin v\sin i.\end{aligned}\right.$$

Pour avoir les intégrales complètes des équations (2), il suffira donc de trouver r et v en fonction de t et de quatre constantes arbitraires, puisque les formules (3) donnent x, y et z en fonction de r, v et des deux constantes arbitraires h et i.

3. Si l'on remplace x et y par leurs valeurs en r et v dans les deux premières équations (2), on obtiendra les équations suivantes, pour déterminer r et v :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} &= 0,\\ \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right) &= 0.\end{aligned}\right.$$

La seconde de ces équations donne immédiatement

$$r^2\frac{dv}{dt} = G,$$

G étant une constante arbitraire.

En multipliant la première des équations (4) par dr, la seconde par rdv, et ajoutant, on trouve une autre équation qui s'intègre aussi, et qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2+r^2\,dv^2}{dt^2}-\frac{\mu}{r}=\mathrm{C},$$

C étant une nouvelle constante arbitraire.

En éliminant dt entre les deux équations intégrales qu'on vient d'obtenir, on trouve

$$dv=\frac{\mathrm{G}\,dr}{r\sqrt{2\,\mathrm{C}r^2+2\mu r-\mathrm{G}^2}},$$

équation qui peut s'intégrer facilement. Pour mettre son intégrale sous une forme convenable, nous allons remplacer les constantes C et G par d'autres plus commodes. Pour cela, considérons l'équation

$$2\,\mathrm{C}r^2+2\mu r-\mathrm{G}^2=0,$$

qui détermine les valeurs maximum et minimum de r : cette équation a nécessairement ses racines réelles, puisque pour $r=0$ son premier membre est négatif, et que, pour d'autres valeurs de r, il doit être positif, sans quoi la valeur de dv serait imaginaire. Soient $a(1+e)$ et $a(1-e)$ les deux racines de cette équation; nous aurons entre les constantes C et G qui entrent dans l'équation, et les nouvelles constantes a et e, les relations

$$\mathrm{C}=-\frac{\mu}{2a},\qquad \mathrm{G}=\sqrt{a\mu(1-e^2)}.$$

Cela posé, la valeur de dv deviendra

$$dv=\frac{-d.\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{1}{r^2}+\frac{2}{ar(1-e^2)}-\frac{1}{a^2(1-e^2)}}};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-g)}, \tag{5}$$

g étant la constante arbitraire.

Cette équation, qui est celle de la courbe que la Lune décrit dans le plan dont nous avons parlé précédemment, représente une ellipse ayant pour un de ses foyers le centre de la Terre; a est le demi grand axe de cette ellipse; e est son excentricité, ou le rapport de la distance des foyers au grand axe; g est la valeur de v correspondante à la plus petite valeur de r, c'est-à-dire au périgée de la Lune.

La relation

$$r^2\frac{dv}{dt} = \mathrm{G}$$

donne d'ailleurs, en y remplaçant dv par sa valeur en fonction de r et dr,

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{-\frac{\mu}{a}r^2 + 2\mu r - a\mu(1-e^2)}};$$

d'où, en intégrant,

$$t + c = \int \frac{rdr}{\sqrt{-\frac{\mu}{a}r^2 + 2\mu r - a\mu(1-e^2)}}, \tag{6}$$

c étant une nouvelle constante arbitraire, et l'intégrale du second membre étant prise depuis la limite inférieure $r = a(1-e)$.

Les deux équations (5) et (6) déterminent r et v en fonction de t et des quatre constantes a, e, g, c ; ces équations, jointes aux relations (3), représentent donc les intégrales complètes des équations (2).

4. Revenons maintenant aux équations différentielles complètes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}&=\frac{d\mathrm{R}}{dx},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}&=\frac{d\mathrm{R}}{dy},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}&=\frac{d\mathrm{R}}{dz}.\end{aligned}\right.$$

Dans les deux numéros qui précèdent, nous avons intégré ces équations en supposant R nul, et nous avons trouvé ainsi pour x, y, z des valeurs fonctions du temps t et de six constantes arbitraires. Pour intégrer les mêmes équations, en ne supposant plus R nul, on pourra conserver les mêmes valeurs de x, y, z, pourvu que les six quantités supposées constantes précédemment deviennent variables. Seulement, comme on n'a que trois équations pour déterminer ces six nouvelles variables, on pourra les assujettir à satisfaire à trois conditions prises arbitrairement. Si l'on prend pour ces trois conditions arbitraires celles d'après lesquelles $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont exprimés de la même manière en fonction de t et des six constantes devenues variables que lorsque R était nul, on sait, d'après la célèbre théorie de la variation des constantes arbitraires, que, en supposant que x, y, z aient été remplacés par leurs valeurs en fonction de t et des six constantes dans R, les dérivées de ces constantes, prises par rapport au temps, sont égales à des fonctions linéaires des dérivées partielles de R relatives à ces six constantes, les coefficients de ces dérivées partielles ne renfermant pas le temps t explicitement.

Par là l'intégration des équations (1) sera ramenée à celle de six équations du premier ordre qui déterminent les constantes du mouvement elliptique en fonction du temps. Ces six équations sont plus ou moins simples, suivant qu'on adopte tel ou tel système de constantes pour le mouvement elliptique. Si des six constantes qui entrent dans les équations (3), (5) et (6) nous ne conservons que c, g, h, et que nous remplacions a, e, i par les deux constantes C et G du n° 3, et par la nouvelle constante H égale à $G\cos i$, nous aurons, pour déterminer ces six constantes, les équations suivantes :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dC}{dt}=\dfrac{dR}{dc}, & \dfrac{dG}{dt}=\dfrac{dR}{dg}, & \dfrac{dH}{dt}=\dfrac{dR}{dh}, \\ \dfrac{dc}{dt}=-\dfrac{dR}{dC}, & \dfrac{dg}{dt}=-\dfrac{dR}{dG}, & \dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{dR}{dH}. \end{array}\right.$$

(*Voir*, pour la démonstration de ces équations, le Mémoire de Binet, qui est inséré dans le XXVIII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*)

5. Ces équations ne sont pas encore celles que nous conserverons. Elles présentent pour l'intégration un grave inconvénient que nous ferons disparaître en remplaçant les deux variables C et c par deux autres.

Si, d'après les équations (5) et (6), on cherche les valeurs de r et v en fonction du temps t, la valeur de v se présente sous la forme suivante :

$$v = g + n(t + c) + \text{une série de termes periodiques.}$$

n étant égal à $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$, ou bien encore à $\frac{-2C\sqrt{-2C}}{\mu}$, et les termes périodiques renfermant les sinus des différents multiples de l'angle $n(t+c)$. De même la valeur de r se compose d'une partie constante suivie d'une série de termes périodiques qui contiennent les cosinus de ces multiples de $n(t+c)$. D'après cela, il est clair que, quand on aura mis dans la fonction R, à la place des coordonnées x, y, z de la Lune, les valeurs de ces coordonnées fournies par les équations (3), (5), (6), R prendra la forme d'une fonction périodique dans laquelle les divers multiples de $n(t+c)$ entreront sous les signes sinus et cosinus. Il s'ensuit que, quand on introduira cette valeur de la fonction R dans l'équation différentielle

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{dR}{dC},$$

qui fait partie du groupe des équations (7), le temps t sortira des signes sinus et cosinus, puisque son coefficient n est fonction de C. La présence de t comme facteur dans les coefficients des sinus et cosinus serait extrêmement gênante pour l'intégration des équations (7); c'est pour l'éviter que nous allons adopter deux nouvelles variables à la place de C et c.

Posons

$$n(t+c) = l.$$

Nous aurons d'abord

$$\frac{dR}{dc} = n\frac{dR}{dl},$$

et par suite

$$\frac{dC}{dt} = n\frac{dR}{dl}.$$

Nous aurons ensuite

$$\frac{dl}{dt} = n\left(1 + \frac{dc}{dt}\right) + (t + c)\frac{dn}{dC}\,\frac{dC}{dt};$$

or si nous désignons par $\left(\frac{dR}{dC}\right)$ la dérivée partielle de R prise par rapport à C, après qu'on aura remplacé $n(t+c)$ par l, on aura évidemment

$$\frac{dR}{dC} = \left(\frac{dR}{dC}\right) + \frac{dR}{dl}(t + c)\frac{dn}{dC},$$

et par conséquent

$$\frac{dc}{dt} = -\left(\frac{dR}{dC}\right) - \frac{dR}{dl}(t + c)\frac{dn}{dC}.$$

En mettant maintenant à la place de $\frac{dc}{dt}$ et $\frac{dC}{dt}$ les valeurs que nous venons de trouver, il viendra

$$\frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{dR}{dC}\right).$$

Posons encore

$$L = \sqrt{a\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{-2C}};$$

nous en déduirons

$$C = -\frac{\mu^2}{2L^2}, \qquad n = \frac{\mu^2}{L^3},$$

et aussi

$$\frac{dC}{dL} = \frac{\mu^2}{L^3} = n, \qquad \left(\frac{dR}{dC}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{dR}{dL}.$$

D'après cela, nous aurons

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{L}}{dt} &= \frac{d\mathrm{R}}{dl}, \\ \frac{dl}{dt} &= n - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations remplaceront celles des équations (7) qui donnent $\frac{d\mathrm{C}}{dt}$ et $\frac{dc}{dt}$; quant aux autres équations (7), elles ne sont évidemment pas changées par l'introduction des nouvelles variables L et l à la place de C et c. Il est aisé de voir d'ailleurs que l'inconvénient que nous avons signalé dans l'emploi des variables C et c, a complétement disparu par suite du changement de variables que nous venons d'effectuer.

6. La seconde des équations (8) est un peu moins simple que les cinq autres équations auxquelles elle doit être jointe; mais on peut la rendre aussi simple que les autres de la manière suivante. D'après la relation qui existe entre C et L, nous avons vu qu'on a

$$\frac{d\mathrm{C}}{d\mathrm{L}} = n;$$

d'ailleurs, C ne dépendant que de L, ses dérivées partielles relatives à G, H, l, g, h sont nulles. Il s'ensuit que, si nous posons

$$\mathrm{R} - \mathrm{C} = \mathrm{R}',$$

nous aurons

$$\frac{d\mathrm{R}'}{d\mathrm{L}} = \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - n, \qquad \frac{d\mathrm{R}'}{d\mathrm{G}} = \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}, \qquad \frac{d\mathrm{R}'}{d\mathrm{H}} = \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

$$\frac{d\mathrm{R}'}{dl} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}, \qquad \frac{d\mathrm{R}'}{dg} = \frac{d\mathrm{R}}{dg}, \qquad \frac{d\mathrm{R}'}{dh} = \frac{d\mathrm{R}}{dh}.$$

En introduisant donc cette quantité R′ à la place de R dans les équations (8) et dans celles des équations (7) qui donnent $\frac{dG}{dt}$, $\frac{dH}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, puis supprimant l'accent de R′ pour simplifier, nous trouverons les équations suivantes auxquelles nous nous arrêterons définitivement :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dL}{dt}=\frac{dR}{dl}, && \frac{dG}{dt}=\frac{dR}{dg}, && \frac{dH}{dt}=\frac{dR}{dh},\\ &\frac{dl}{dt}=-\frac{dR}{dL}, && \frac{dg}{dt}=-\frac{dR}{dG}, && \frac{dh}{dt}=-\frac{dR}{dH}.\end{aligned}\right.$$

Nous nous rappellerons que

l désigne l'anomalie moyenne de la Lune,
g la distance angulaire du nœud ascendant au périgée,
h la longitude du nœud ascendant comptée à partir d'une ligne fixe;

et que, en appelant

a le demi grand axe de l'orbite de la Lune,
e l'excentricité de cette orbite,
i son inclinaison sur le plan des xy,

on a

$$L=\sqrt{a\mu},\qquad G=L\sqrt{1-e^2},\qquad H=G\cos i.$$

Enfin on a

$$R=\frac{\mu^2}{2L^2}-\frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^3}+\frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}};$$

et dans cette valeur de R, on doit remplacer x, y, z par leurs valeurs déduites des formules du mouvement elliptique, et exprimées en fonction des six quantités L, G, H, l, g, h.

D'après la substitution de la variable l à la quantité $n(t + c)$, les coordonnées de la Lune déduites des formules du mouvement elliptique ne contiennent plus le temps explicitement; les valeurs de ces coordonnées ne sont plus que des fonctions de L, G, H, l, g, h. Il s'ensuit que la *fonction perturbatrice* R ne renferme le temps explicitement qu'autant qu'il y est introduit par les valeurs des coordonnées du Soleil. D'un autre côté, l'introduction du terme $\frac{\mu^2}{2L^2}$ dans la fonction R fait que cette fonction ne se réduit plus à zéro quand on y suppose m' nul, c'est-à-dire quand on fait abstraction de l'action perturbatrice du Soleil. Si l'on met dans les équations (9) la valeur à laquelle se réduit R dans cette hypothèse, on trouve que L, G, H, g, h sont constants, et que $\frac{dl}{dt}$ est égal à n; de sorte que les valeurs des coordonnées de la Lune redeviennent ce qu'elles étaient dans le mouvement elliptique avant la substitution de l à $n(t + c)$.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION R. — EXPRESSIONS DE LA LONGITUDE DE LA LUNE, DE SA LATITUDE ET DE SA PARALLAXE.

7. La fonction R est donnée par la formule

$$R = \frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} + \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}},$$

et nous devons y remplacer x, y, z par leurs valeurs en fonction des six quantités L, G, H, l, g, h déduites des formules du mouvement elliptique. Cependant, au lieu des trois quantités L, G, H, nous introduirons dans R : 1° le demi grand axe a de l'orbite de la Lune ; 2° l'excentricité e de cette orbite ; 3° le sinus γ de la moitié de son inclinaison sur l'écliptique fixe. R n'en pourra pas moins être considéré comme une fonction de L, G, H, l, g, h, puisque a, e, γ sont des fonctions connues de L, G, H. En effet, d'après les relations

$$L = \sqrt{a\mu}, \qquad G = L\sqrt{1-e^2}, \qquad H = G\cos i, \qquad \gamma = \sin\frac{1}{2}i,$$

on a

$$(10) \qquad a = \frac{L^2}{\mu}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{H}{2G}}.$$

La substitution de a, e, γ à L, G, H permettra de développer facilement R en mettant de côté tous les termes qui ne donneraient aucun résultat sensible, eu égard à la petitesse de e, de γ, et du rapport de a au demi grand axe de l'orbite apparente du Soleil.

8. Outre que x, y, z doivent être remplacés par leurs valeurs déduites des formules du mouvement elliptique, et exprimées en fonction de a, e, γ, l, g, h, nous devons aussi mettre, au lieu de x', y', z', les valeurs de ces coordonnées du Soleil, qui sont censées connues en fonction du temps.

Soient donc

h' la longitude du nœud ascendant de l'écliptique mobile, comptée sur l'écliptique fixe correspondant à l'origine du temps, à partir de la ligne fixe qui a été prise pour axe des x;

i' l'inclinaison de l'écliptique mobile sur l'écliptique fixe;

γ' le sinus de la moitié de cette inclinaison;

v' la distance angulaire du Soleil au nœud ascendant de l'écliptique mobile.

On aura, d'après les formules (3) dans lesquelles il suffit de mettre un accent à chacune des lettres qui y entrent,

$$x' = r' \cos v' \cos h' - r' \sin v' \cos i' \sin h',$$

$$y' = r' \cos v' \sin h' + r' \sin v' \cos i' \cos h',$$

$$z' = r' \sin v' \sin i'.$$

En combinant ces valeurs de x', y', z' avec celles de x, y, z, données par les mêmes formules (3), on trouvera facilement la valeur de $xx' + yy' + zz'$; et si l'on pose

$$xx' + yy' + zz' = rr'\,\mathrm{S},$$

on aura la valeur suivante pour S, qui n'est autre chose que le cosinus de la distance angulaire du Soleil et de la Lune :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} = {} & (\cos v \cos h - \sin v \sin h \cos i)(\cos v' \cos h' - \sin v' \sin h' \cos i') \\
& + (\cos v \sin h + \sin v \cos h \cos i)(\cos v' \sin h' + \sin v' \cos h' \cos i') \\
& + \sin v \sin i \sin v' \sin i';
\end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant $\sin i$, $\cos i$, $\sin i'$, et $\cos i'$, par leurs valeurs en fonction de γ et de γ', et effectuant des calculs convenables,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{S} = {} & (1 - \gamma^2 - \gamma'^2 + \gamma^2\gamma'^2)\cos(v + h - v' - h') \\
& + (\gamma^2 - \gamma^2\gamma'^2)\cos(v - h + v' + h') \\
& + (\gamma'^2 - \gamma^2\gamma'^2)\cos(v + h + v' - h') \\
& + \gamma^2\gamma'^2 \cos(v - h - v' + h') \\
& + 2\gamma\gamma' \sqrt{1 - \gamma^2}\sqrt{1 - \gamma'^2}\cos(v - v') \\
& - 2\gamma\gamma' \sqrt{1 - \gamma^2}\sqrt{1 - \gamma'^2}\cos(v + v').
\end{aligned}\right.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = r'^2 + r^2 - 2rr'\,\mathrm{S},$$

et la fonction R deviendra, en remplaçant L par $\sqrt{a\mu}$ dans le premier terme,

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a} - m'\frac{r}{r'^2}\mathrm{S} + \frac{m'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\,\mathrm{S}}}.$$

r étant très-petit relativement à r', nous pouvons développer la dernière partie de R, suivant les puissances croissantes entières et positives de $\frac{r}{r'}$, et nous obtiendrons ainsi une série très-convergente. Si l'on pose

$$\frac{1}{\sqrt{r'^2+r^2-2rr'S}}=\frac{1}{r'}U_0+\frac{r}{r'^2}U_1+\frac{r^2}{r'^3}U_2+\frac{r^3}{r'^4}U_3+\frac{r^4}{r'^5}U_4+\frac{r^5}{r'^6}U_5+\ldots,$$

on aura (Legendre, *Exercices de calcul intégral,* tome II, page 247)

$$U_0=1,$$

$$U_1=S,$$

$$U_2=\frac{3}{2}S^2-\frac{1}{2},$$

$$U_3=\frac{5}{2}S^3-\frac{3}{2}S,$$

$$U_4=\frac{35}{8}S^4-\frac{15}{4}S^2+\frac{3}{8},$$

$$U_5=\frac{63}{8}S^5-\frac{35}{4}S^3+\frac{15}{8}S,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et R deviendra, en supprimant le terme $\frac{1}{r'}$, qui est indépendant de L, G, H, l, g, h, et qui disparaîtrait dans les dérivées partielles prises par rapport à ces quantités,

$$R=\frac{\mu}{2a}+m'\frac{r^2}{r'^3}\left(U_2+\frac{r}{r'}U_3+\frac{r^2}{r'^2}U_4+\frac{r^3}{r'^3}U_5+\ldots\right). \tag{12}$$

9. Les valeurs de U_2, U_3,... étant calculées en fonction de γ, γ', h, h', v et v' au moyen de la formule (11), R deviendra une fonction de ces quantités et des deux rayons vecteurs r, r'. Il ne nous restera plus dès lors qu'à y remplacer : 1° r et v par leurs valeurs déduites des formules du mouvement elliptique ; 2° r' et v' par leurs valeurs connues en fonction du temps.

Les valeurs de r et v en fonction de a, e, l, g, peuvent s'obtenir au moyen des formules (5) et (6), dans la dernière desquelles on devra remplacer $t+c$ par $\frac{l}{n}$. Mais nous prendrons ces valeurs toutes calculées dans la *Mécanique céleste* (livre II, chapitre III, n° 22), où elles sont données avec une approximation suffisante pour notre objet. Nous aurons ainsi :

$$\tag{13} \left\{ \begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 & \\ & - \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5\right)\cos l \\ & - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \frac{1}{16}e^6\right)\cos 2l \\ & - \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5\right)\cos 3l \\ & - \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{2}{5}e^6\right)\cos 4l \\ & - \frac{125}{384}e^5\cos 5l \\ & - \frac{27}{80}e^6\cos 6l, \end{aligned} \right.$$

$$\tag{14} \left\{ \begin{aligned} v = g + l & \\ & + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right)\sin l \\ & + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right)\sin 2l \\ & + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\sin 3l \\ & + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right)\sin 4l \\ & + \frac{1097}{960}e^5\sin 5l \\ & + \frac{1223}{960}e^6\sin 6l. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de r' et v' se composent chacune : 1° d'une partie principale qui est due au mouvement elliptique du Soleil, et dans laquelle les éléments sont affectés de leurs inégalités séculaires ; 2° de quelques termes très-petits qui représentent les inégalités périodiques du mouvement apparent du Soleil dues aux actions perturbatrices des planètes sur cet astre et sur la Terre. Les premières parties de ces valeurs de r' et v' se déduisent évidemment des valeurs précédentes (13) et (14) de r et v, en y accentuant les différentes lettres qui y entrent.

Pour simplifier, nous ferons abstraction tout d'abord des inégalités tant séculaires que périodiques dont le mouvement apparent du Soleil est affecté. Nous prendrons donc simplement, pour r' et v', les premières parties que nous venons d'indiquer, et nous y regarderons les éléments elliptiques comme constants. Par la même raison, nous supposerons γ' nul, puisque c'est le sinus de la moitié de l'inclinaison de l'écliptique mobile sur l'écliptique fixe correspondant à l'origine du temps ; et h' sera une constante qui sera partout réunie à la constante g', de telle sorte que $h' + g'$ représentera la longitude du périgée solaire. L'angle l' aura pour valeur $n't +$ une constante, n' étant donné par la formule

$$n' = \frac{\sqrt{\mathrm{M} + m'}}{a'\sqrt{a'}}.$$

Nous verrons plus tard de quelle manière nous devrons modifier nos résultats, pour tenir compte de ces inégalités du mouvement du Soleil, dont nous faisons provisoirement abstraction.

De la valeur de n' qui vient d'être écrite, on déduit

$$m' = \frac{a'^3 n'^2}{1 + \frac{\mathrm{M}}{m'}}.$$

Le rapport $\frac{\mathrm{M}}{m'}$ de la masse de la Terre à celle du Soleil est très-petit, et nous le négligerons dans ce qui suit; en sorte que l'on aura simplement

$$m' = a'^3 n'^2. \tag{15}$$

Lorsque nous introduirons ensuite, dans la théorie de la Lune, les effets dus aux inégalités tant séculaires que périodiques du mouvement du Soleil, nous tiendrons compte en même temps de ce rapport $\frac{\mathrm{M}}{m'}$ que nous aurons négligé.

10. En substituant la valeur (11) de S dans les formules qui donnent U_2, U_3, U_4,... en fonction de cette quantité, nous y ferons $\gamma' = 0$, conformément à ce qui a été dit ci-dessus. De plus, en raison de la petitesse du rapport $\frac{r}{r'}$ dont les puissances 1, 2, 3,... multiplient respectivement U_3, U_4, U_5,... dans la valeur de R, nous négligerons: 1° dans U_3 les termes qui sont d'un ordre supérieur au quatrième par rapport à γ: 2° dans U_4 les termes qui sont d'un ordre supérieur au second par rapport à γ; 3° dans U_5 tous les termes qui dépendent de cette quantité γ; 4° enfin tous les termes de U_6, U_7,.... D'après cela, nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_2 = {} & \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 \\
& + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{4}\gamma^4\right) \cos 2(h + v - h' - v') \\
& + \left(\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4\right) \cos 2v \\
& + \left(\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4\right) \cos 2(h - h' - v') \\
& + \frac{3}{4}\gamma^4 \cos 2(v - h + h' + v');
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}_3 = {} & \left(\frac{3}{8} - \frac{33}{8}\gamma^2 + \frac{75}{8}\gamma^4\right)\cos(h + v - h' - v') \\
& + \left(\frac{5}{8} - \frac{15}{8}\gamma^2 + \frac{15}{8}\gamma^4\right)\cos 3(h + v - h' - v') \\
& + \left(\frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{15}{2}\gamma^4\right)\cos(v - h + h' + v') \\
& + \left(\frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{15}{4}\gamma^4\right)\cos(3v + h - h' - v') \\
& + \left(\frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{15}{4}\gamma^4\right)\cos(v + 3h - 3h' - 3v') \\
& + \frac{15}{8}\gamma^4\cos(3v - h + h' + v') \\
& + \frac{15}{8}\gamma^4\cos(v - 3h + 3h' + 3v');
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}_4 = {} & \frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 \\
& + \left(\frac{5}{16} - 5\gamma^2\right)\cos 2(h + v - h' - v') \\
& + \left(\frac{35}{64} - \frac{35}{16}\gamma^2\right)\cos 4(h + v - h' - v') \\
& + \frac{45}{16}\gamma^2\cos 2v \\
& + \frac{45}{16}\gamma^2\cos 2(h - h' - v') \\
& + \frac{35}{16}\gamma^2\cos(2h + 4v - 2h' - 2v') \\
& + \frac{35}{16}\gamma^2\cos(4h + 2v - 4h' - 4v');
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}_5 = {} & \frac{15}{64}\cos(h + v - h' - v') \\
& + \frac{35}{128}\cos 3(h + v - h' - v') \\
& + \frac{63}{128}\cos 5(h + v - h' - v').
\end{aligned}
$$

11. Pour faciliter la substitution des valeurs (13) et (14) de r et v dans la fonction R, on a calculé les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \ (^*)& \\
& - \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{1}{96}e^5\right)\cos l \\
& - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6\right)\cos 2l \\
& - \left(\frac{1}{4}e^3 - \frac{9}{64}e^5\right)\cos 3l \\
& - \left(\frac{1}{6}e^4 - \frac{2}{15}e^6\right)\cos 4l \\
& - \frac{25}{192}e^5\cos 5l \\
& - \frac{9}{80}e^6\cos 6l;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{r^3}{a^3} = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4 \ (^{**})& \\
& - \left(3e + \frac{9}{8}e^3 - \frac{15}{64}e^5\right)\cos l \\
& - \frac{1}{2}e^4\cos 2l \\
& + \left(\frac{1}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5\right)\cos 3l \\
& + \frac{1}{8}e^4\cos 4l \\
& + \frac{15}{128}e^5\cos 5l;
\end{aligned}
$$

(*) La partie de $\frac{r^2}{a^2}$ qui est indépendante de l, ne contient aucun terme en e^4, e^6, e^8.

(**) La partie de $\frac{r^3}{a^3}$ qui est indépendante de l, ne contient aucun terme en e^6.

$$
\begin{aligned}
\frac{r^4}{a^4} = 1 + 5e^2 + \frac{15}{8}e^4 & \\
- 4e\cos l & \\
+ e^2\cos 2l; &
\end{aligned}
$$

$$
\frac{r^5}{a^5} = 1 + \frac{15}{2}e^2;
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{r^2}{a^2}\cos(2v+\alpha)\,(^*) = {} & \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{23}{16}e^4 - \frac{65}{288}e^6\right)\cos(2g+2l+\alpha) \\
& + \left(e - \frac{19}{8}e^3 + \frac{107}{64}e^5\right)\cos(2g+3l+\alpha) \\
& - \left(3e - \frac{13}{8}e^3 - \frac{5}{192}e^5\right)\cos(2g+l+\alpha) \\
& + \left(e^2 - \frac{5}{2}e^4 + \frac{101}{48}e^6\right)\cos(2g+4l+\alpha) \\
& + \frac{5}{2}e^2\,(^{**})\cos(2g+\alpha) \\
& + \left(\frac{25}{24}e^3 - \frac{1075}{384}e^5\right)\cos(2g+5l+\alpha) \\
& - \left(\frac{7}{24}e^3 + \frac{47}{384}e^5\right)\cos(2g-l+\alpha) \\
& + \left(\frac{9}{8}e^4 - \frac{261}{80}e^6\right)\cos(2g+6l+\alpha) \\
& - \left(\frac{1}{16}e^4 + \frac{11}{480}e^6\right)\cos(2g-2l+\alpha) \\
& + \frac{2401}{1920}e^5\cos(2g+7l+\alpha)
\end{aligned}
$$

(*) Dans cette formule et dans les suivantes, α désigne un angle quelconque.

(**) Ce coefficient de $\cos(2g+\alpha)$ ne renferme pas de terme en e^4, ni en e^6.

$$-\frac{17}{640}e^5\cos(2g-3l+\alpha)$$

$$+\frac{64}{45}e^6\cos(2g+8l+\alpha)$$

$$-\frac{11}{720}e^6\cos(2g-4l+\alpha);$$

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{a^2}\cos(v+\alpha)=&\left(1+2e^2-\frac{41}{64}e^4\right)\cos(g+l+\alpha)\\
&-\left(\frac{1}{2}e-e^3\right)\cos(g+2l+\alpha)\\
&-\left(\frac{5}{2}e+\frac{15}{8}e^3\right)\text{(*)}\ \cos(g+\alpha)\\
&-\left(\frac{3}{8}e^2-\frac{11}{16}e^4\right)\cos(g+3l+\alpha)\\
&+\left(\frac{11}{8}e^2+\frac{7}{48}e^4\right)\cos(g-l+\alpha)\\
&-\frac{7}{24}e^3\cos(g+4l+\alpha)\\
&+\frac{1}{6}e^3\cos(g-2l+\alpha)\\
&-\frac{95}{384}e^4\cos(g+5l+\alpha)\\
&+\frac{7}{128}e^4\cos(g-3l+\alpha);\end{aligned}$$

(*) Ce coefficient de $\cos(g+\alpha)$ ne renferme pas de terme en e^5.

$$\begin{aligned}
\frac{r^3}{a^3}\cos(3v+\alpha) = {} & \left(1-6e^2+\frac{591}{64}e^4\right)\cos(3g+3l+\alpha) \\
& + \left(\frac{3}{2}e-\frac{57}{8}e^3\right)\cos(3g+4l+\alpha) \\
& - \left(\frac{9}{2}e-\frac{33}{4}e^3\right)\cos(3g+2l+\alpha) \\
& + \left(\frac{15}{8}e^2-\frac{135}{16}e^4\right)\cos(3g+5l+\alpha) \\
& + \left(\frac{57}{8}e^2-\frac{65}{16}e^4\right)\cos(3g+l+\alpha) \\
& + \frac{9}{4}e^3\cos(3g+6l+\alpha) \\
& - \frac{35}{8}e^3\,(^*)\cos(3g+\alpha) \\
& + \frac{343}{128}e^4\cos(3g+7l+\alpha) \\
& + \frac{75}{128}e^4\cos(3g-l+\alpha);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r^4}{a^4}\cos(2v+\alpha) = {} & (1+e^2)\cos(2g+2l+\alpha) \\
& - 4e\cos(2g+l+\alpha)\;(^{**}) \\
& - \frac{1}{4}e^2\cos(2g+4l+\alpha) \\
& + \frac{21}{4}e^2\cos(2g+\alpha);
\end{aligned}$$

(*) Ce coefficient de $\cos(3g+\alpha)$ ne contient pas de terme en e^5.

(**) La valeur de $\frac{r^4}{a^4}\cos(2v+\alpha)$, calculée jusqu'aux quantités du second ordre par rapport à e, ne renferme aucun terme en $\cos(2g+3l+\alpha)$.

$$\begin{aligned}\frac{r^4}{a^4}\cos(4v+\alpha) = (1-11e^2)\cos(4g+4l+\alpha)\\ +2e\cos(4g+5l+\alpha)\\ -6e\cos(4g+3l+\alpha)\\ +3e^2\cos(4g+6l+\alpha)\\ +14e^2\cos(4g+2l+\alpha);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{r^5}{a^5}\cos(v+\alpha) = \cos(g+l+\alpha)\\ -\frac{3}{2}e\cos(g+2l+\alpha)\\ -\frac{7}{2}e\cos(g+\alpha).\end{aligned}$$

12. De même, pour substituer dans R les valeurs elliptiques de r' et v' qui se déduisent des expressions (13) et (14), en y accentuant toutes les lettres, on a calculé les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{a'^3}{r'^3} = 1+\frac{3}{2}e'^2+\frac{15}{8}e'^4+\frac{35}{16}e'^6\\ +\left(3e'+\frac{27}{8}e'^3+\frac{261}{64}e'^5\right)\cos l'\\ +\left(\frac{9}{2}e'^2+\frac{7}{2}e'^4+\frac{141}{32}e'^6\right)\cos 2l'\\ +\left(\frac{53}{8}e'^3+\frac{393}{128}e'^5\right)\cos 3l'\\ +\left(\frac{77}{8}e'^4+\frac{129}{80}e'^6\right)\cos 4l'\\ +\frac{1773}{128}e'^5\cos 5l'\\ +\frac{3167}{160}e'^6\cos 6l';\end{aligned}$$

$$\frac{a'^5}{r'^5} = 1 + 5e'^2 + \frac{105}{8}e'^4$$
$$+ \left(5e' + \frac{135}{8}e'^3\right)\cos l'$$
$$- 10e'^2 \cos 2l'$$
$$+ \frac{145}{8}e'^3 \cos 3l';$$

$$\frac{a'^3}{r'^3}\cos(\alpha - 2v')\text{ (*)} = \left(1 - \frac{5}{2}e'^2 + \frac{13}{16}e'^4\right)\cos(\alpha - 2g' - 2l')$$
$$+ \left(\frac{7}{2}e' - \frac{123}{16}e'^3 + \frac{489}{128}e'^5\right)\cos(\alpha - 2g' - 3l')$$
$$- \left(\frac{1}{2}e' - \frac{1}{16}e'^3 + \frac{5}{384}e'^5\right)\cos(\alpha - 2g' - l')$$
$$- \left(\frac{17}{2}e'^2 - \frac{115}{6}e'^4\right)\cos(\alpha - 2g' - 4l')$$
$$+ \left(\frac{845}{48}e'^3 - \frac{32525}{768}e'^5\right)\cos(\alpha - 2g' - 5l')\text{ (**)}$$
$$- \left(\frac{1}{48}e'^3 + \frac{11}{768}e'^5\right)\cos(\alpha - 2g' + l')$$
$$+ \frac{533}{16}e'^4\cos(\alpha - 2g' - 6l')$$
$$+ \frac{1}{24}e'^4\cos(\alpha - 2g' + 2l')$$
$$+ \frac{228347}{3840}e'^5\cos(\alpha - 2g' - 7l')$$
$$+ \frac{81}{1280}e'^5\cos(\alpha - 2g' + 3l');$$

(*) Dans cette formule et dans les suivantes, α désigne un angle quelconque.

(**) La valeur de $\frac{a'^3}{r'^3}\cos(\alpha - 2v')$, calculée jusqu'aux quantités du cinquième ordre par rapport à e', ne renferme aucun terme en $\cos(\alpha - 2g')$.

$$\frac{a'^4}{r'^4}\cos(x - v') = \left(1 - 2e'^2 + \frac{239}{64}e'^4\right)\cos(x - g' - l')$$

$$+ \left(3e' + \frac{11}{4}e'^3\right)\cos(x - g' - 2l')$$

$$- \left(e' + \frac{5}{2}e'^3\right)\cos(x - g')$$

$$+ \left(\frac{53}{8}e'^2 + \frac{39}{16}e'^4\right)\cos(x - g' - 3l')$$

$$- \left(\frac{11}{8}e'^2 + \frac{49}{16}e'^4\right)\cos(x - g' - l')$$

$$- \frac{77}{6}e'^3\cos(x - g' - 4l')$$

$$- \frac{23}{12}e'^3\cos(x - g' + 2l')$$

$$- \frac{2955}{128}e'^4\cos(x - g' - 5l')$$

$$- \frac{343}{128}e'^4\cos(x - g' - 3l');$$

$$\frac{a'^4}{r'^4}\cos(x - 3v') = \left(1 - 6e'^2 + \frac{423}{64}e'^4\right)\cos(x - 3g' - 3l')$$

$$- (5e' - 22e'^3)\cos(x - 3g' - 4l')$$

$$- \left(e' - \frac{5}{4}e'^3\right)\cos(x - 3g' - 2l')$$

$$+ \left(\frac{127}{8}e'^2 - \frac{3065}{48}e'^4\right)\cos(x - 3g' - 5l')$$

$$- \left(\frac{1}{8}e'^2 - \frac{1}{48}e'^4\right)\cos(x - 3g' - l')$$

$$+ \frac{163}{4}e'^3\cos(x - 3g' - 6l')$$

$$- \frac{35413}{384}e'^4\cos(x - 3g' - 7l') \text{ (*)}$$

$$- \frac{1}{384}e'^4\cos(x - 3g' + l');$$

(*) La valeur de $\frac{a'^4}{r'^4}\cos(x - 3v')$, calculée jusqu'aux quantités du quatrième ordre par rapport à e', ne renferme aucun terme en $\cos(x - 3g')$.

$$
\begin{aligned}
\frac{a'^5}{r'^5}\cos(\alpha - 2v') = (1 + e'^2)\cos(\alpha - 2g' - 2l')& \\
+ \frac{9}{2}e'\cos(\alpha - 2g' - 3l')& \\
+ \frac{1}{2}e'\cos(\alpha - 2g' - l')& \\
+ \frac{53}{4}e'^2\cos(\alpha - 2g' - 4l')& \\
+ \frac{3}{4}e'^2\cos(\alpha - 2g');&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a'^5}{r'^5}\cos(\alpha - 4v') = (1 - 11e'^2)\cos(\alpha - 4g' - 4l')& \\
+ \frac{13}{2}e'\cos(\alpha - 4g' - 5l')& \\
- \frac{3}{2}e'\cos(\alpha - 4g' - 3l')& \\
+ \frac{51}{2}e'^2\cos(\alpha - 4g' - 6l')& \\
+ \frac{1}{2}e'^2\cos(\alpha - 4g' - 2l');&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a'^6}{r'^6}\cos(\alpha - v') = \cos(\alpha - g' - l')& \\
+ 4e'\cos(\alpha - g' - 2l')& \\
+ 2e'\cos(\alpha - g').&
\end{aligned}
$$

15. Dans les formules des deux numéros précédents, α désigne un angle arbitraire auquel on donnera successivement différentes valeurs, dans chaque formule, pour obtenir le développement des diverses parties de R. Un exemple suffira pour mettre complétement en évidence la marche qui a été suivie dans la recherche de ce développement.

Prenons la portion $\frac{m'r^2}{r'^3}U_2$ de la valeur (12) de R, et remplaçons-y U_2 par le développement de cette quantité donnée au n° **10**; un des termes du résultat sera

$$\frac{m' r^2}{r'^3}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{4}\gamma^4\right)\cos 2(h+v-h'-v').$$

Nous remplacerons d'abord r et v par leurs valeurs dans ce terme en l'écrivant ainsi

$$\frac{m' a^2}{r'^3}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{4}\gamma^4\right)\cdot\frac{r^2}{a^2}\cos(2v+2h-2h'-2v'),$$

et nous servant de la formule qui donne $\frac{r^2}{a^2}\cos(2v+\alpha)$ (n° **11**), dans laquelle nous ferons

$$\alpha = 2h-2h'-2v'.$$

Ce terme se trouvera ainsi remplacé par plusieurs autres dans lesquels il n'y aura plus qu'à mettre pour r' et v' leurs valeurs elliptiques. Soit

$$\frac{m' a^2}{r'^3}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{4}\gamma^4\right)\left(e-\frac{19}{8}e^3+\frac{107}{64}e^5\right)\cos(2g+3l+2h-2h'-2v')$$

un de ces nouveaux termes; nous l'écrirons d'abord de la manière suivante

$$\frac{m' a^2}{a'^3}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{4}\gamma^4\right)\left(e-\frac{19}{8}e^3+\frac{107}{64}e^5\right)\cdot\frac{a'^3}{r'^3}\cos(2g+3l+2h-2h'-2v'),$$

puis nous nous servirons de la formule qui donne $\frac{a'^3}{r'^3}\cos(\alpha-2v')$ (n° **12**), en y supposant

$$\alpha = 2g+3l+2h-2h'.$$

On conçoit de suite, par cet exemple, avec quelle facilité le développement de R se forme à l'aide des formules données dans les n^{os} **11** et **12**.

14. Pour pouvoir distinguer immédiatement, parmi les termes obtenus dans le développement de R, ceux qui peuvent être négligés sans crainte d'erreur, et ceux qui doivent être conservés, on a considéré suivant l'usage γ, e, e', dont les valeurs sont à très-peu près égales aux fractions $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{60}$, comme des quantités du premier ordre de petitesse. Le rapport $\frac{a}{a'}$ étant égal à peu près à $\frac{1}{400}$, on l'a regardé comme une quantité du second ordre. Enfin le rapport $\frac{n'}{n}$ des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, qui est à peu près égal à $\frac{1}{13}$, a été considéré comme une quantité du premier ordre; de sorte que le facteur $\frac{m' a^2}{a'^3}$, dont le rapport au premier terme $\frac{\mu}{2a}$ de R est $\frac{2m' a^3}{\mu a'^3}$, ou, ce qui est la même chose, $2\frac{n'^2}{n^2}$ (n° **9**), a été traité comme une quantité du second ordre.

En se basant sur ces considérations, on a conservé dans le développement de R tous les termes du huitième ordre et des ordres inférieurs, sans aucune exception. De plus, on est allé jusqu'aux quantités du neuvième ordre dans les termes dont l'argument (angle soumis au signe cosinus) contient l' sans contenir l, et jusqu'aux quantités du dixième ordre dans les termes qui ne renferment ni l ni l'. Enfin, dans certaines parties, on a conservé exceptionnellement des termes d'un ordre supérieur à celui auquel on aurait dû s'arrêter, d'après ce qui vient d'être dit, et cela pour des raisons spéciales qui seront indiquées plus tard (chapitre IV).

Ajoutons encore que, e' étant environ trois fois plus petit que γ et e, dans le rejet des termes d'un ordre supérieur à celui auquel on voulait s'arrêter, on a regardé e'^3, e'^4, e'^5, comme des quantités des quatrième, cinquième, sixième ordres; e'^6 comme une quantité du huitième ordre, etc.

En opérant conformément aux explications qui précèdent, on a trouvé pour R la valeur suivante :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a} & \\
+ \frac{m' a^2}{a'^3} \Bigg\{ & \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 \\
& + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{45}{16}\gamma^2 e'^4 + \frac{45}{64}e^2 e'^4 \\
& + \left(\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2} \\
& + \Bigg[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{8}e'^2 + \frac{3}{4}\gamma^4 + \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{69}{64}e^4 + \frac{75}{16}e^2 e'^2 \\
& \quad + \frac{39}{64}e'^4 - \frac{15}{8}\gamma^4 e^2 - \frac{15}{8}\gamma^4 e'^2 - \frac{69}{32}\gamma^2 e^4 - \frac{75}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{65}{384}e^6 - \frac{345}{128}e^4 e'^2 \\
& \quad + \left(\frac{5}{16} - 5\gamma^2 + \frac{5}{16}e^2 + \frac{5}{16}e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l') \\
& + \Bigg[-\frac{1}{2}e + 3\gamma^2 e + \frac{1}{16}e^3 - \frac{3}{4}ee'^2 - 3\gamma^4 e - \frac{3}{8}\gamma^2 e^3 + \frac{9}{2}\gamma^2 ee'^2 - \frac{1}{384}e^5 \\
& \qquad + \frac{3}{32}e^3 e'^2 - \frac{15}{16}ee'^4 - \frac{9}{16}e\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos l \\
& + \Bigg[\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{8}e^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{27}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{81}{16}\gamma^2 e'^3 + \frac{81}{64}e^2 e'^3 \\
& \qquad + \frac{261}{256}e'^5 + \frac{27}{4}\gamma^4 e^2 e' + \left(\frac{45}{64}e' - \frac{225}{16}\gamma^2 e' + \frac{225}{64}e^2 e'\right)\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos l'
\end{aligned}
$$

$$+\left[\frac{3}{4}e-\frac{3}{2}\gamma^2 e-\frac{57}{32}e^3-\frac{15}{8}ee'^2+\frac{3}{4}\gamma^4 e+\frac{57}{16}\gamma^2 e^3+\frac{15}{4}\gamma^2 ee'^2\right.$$

$$\left.+\frac{321}{256}e^5+\frac{285}{64}e^3e'^2+\frac{39}{64}ee'^4\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[-\frac{9}{4}e+\frac{9}{2}\gamma^2 e+\frac{39}{32}e^3+\frac{45}{8}ee'^2-\frac{9}{4}\gamma^4 e-\frac{39}{16}\gamma^2 e^3-\frac{45}{4}\gamma^2 ee'^2+\frac{5}{256}e^5\right.$$

$$\left.-\frac{195}{64}e^3e'^2-\frac{117}{64}ee'^4-\frac{5}{4}e\frac{a^2}{a'^2}\right]{}^{\mathrm{c}}\mathrm{os}(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{21}{8}e'-\frac{21}{4}\gamma^2 e'-\frac{105}{16}e^2e'-\frac{369}{64}e'^3+\frac{21}{8}\gamma^4 e'+\frac{105}{8}\gamma^2 e^2e'+\frac{369}{32}\gamma^2 e'^3+\frac{483}{128}e^4e'\right.$$

$$\left.+\frac{1845}{128}e^2e'^3+\frac{1467}{512}e'^5+\frac{45}{32}e'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[-\frac{3}{8}e'+\frac{3}{4}\gamma^2 e'+\frac{15}{16}e^2e'+\frac{3}{64}e'^3-\frac{3}{8}\gamma^4 e'-\frac{15}{8}\gamma^2 e^2e'-\frac{3}{32}\gamma^2 e'^3-\frac{69}{128}e^4e'\right.$$

$$\left.-\frac{15}{128}e^2e'^3-\frac{5}{512}e'^5+\frac{5}{32}e'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-l')$$

$$+\left[-\frac{1}{8}e^2+\frac{3}{4}\gamma^2 e^2+\frac{1}{24}e^4-\frac{3}{16}e^2e'^2-\frac{3}{4}\gamma^4 e^2-\frac{1}{4}\gamma^2 e^4+\frac{9}{8}\gamma^2 e^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{192}e^6+\frac{1}{16}e^4e'^2+\frac{9}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos 2l$$

$$+\left[-\frac{3}{4}ee'+\frac{9}{2}\gamma^2 ee'+\frac{3}{32}e^3e'-\frac{27}{32}ee'^3-\frac{9}{2}\gamma^4 ee'-\frac{9}{16}\gamma^2 e^3e'\right.$$

$$\left.-\frac{1}{256}e^5e'-\frac{45}{32}ee'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(l+l')$$

$$+\left[-\frac{3}{4}ee'+\frac{9}{2}\gamma^2 ee'+\frac{3}{32}e^3e'-\frac{27}{32}ee'^3-\frac{9}{2}\gamma^4 ee'-\frac{9}{16}\gamma^2 e^3e'\right.$$

$$\left.-\frac{1}{256}e^5e'-\frac{45}{32}ee'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(l-l')$$

$$+\left[\frac{9}{8}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2 e'^2+\frac{27}{16}e^2e'^2+\frac{7}{8}e'^4+\frac{27}{4}\gamma^4 e'^2-\frac{81}{8}\gamma^2 e^2e'^2-\frac{21}{4}\gamma^2 e'^4\right.$$

$$\left.+\frac{21}{16}e^2e'^4+\frac{45}{32}e'^2\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos 2l'$$

$$+\left[\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{15}{8}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2+\frac{3}{4}\gamma^4e^2+\frac{15}{4}\gamma^2e^4+\frac{15}{4}\gamma^2e^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{101}{64}e^6+\frac{75}{16}e^4e'^2-\frac{5}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{15}{8}e^2-\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{75}{16}e^2e'^2+\frac{15}{8}\gamma^4e^2+\frac{75}{8}\gamma^2e^2e'^2+\frac{195}{128}e^2e'^4\right.$$

$$\left.+\frac{105}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h+2g-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{21}{8}ee'-\frac{21}{4}\gamma^2ee'-\frac{399}{64}e^3e'-\frac{369}{64}ee'^3+\frac{21}{8}\gamma^4ee'+\frac{399}{32}\gamma^2e^3e'\right.$$

$$\left.+\frac{2247}{512}e^5e'\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[-\frac{3}{8}ee'+\frac{3}{4}\gamma^2ee'+\frac{57}{64}e^3e'+\frac{3}{64}ee'^3-\frac{3}{8}\gamma^4ee'-\frac{57}{32}\gamma^2e^3e'\right.$$

$$\left.-\frac{321}{512}e^5e'\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-l')$$

$$+\left[-\frac{63}{8}ee'+\frac{63}{4}\gamma^2ee'+\frac{273}{64}e^3e'+\frac{1107}{64}ee'^3-\frac{63}{8}\gamma^4ee'-\frac{273}{32}\gamma^2e^3e'\right.$$

$$\left.+\frac{35}{512}e^5e'-\frac{45}{8}ee'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[\frac{9}{8}ee'-\frac{9}{4}\gamma^2ee'-\frac{39}{64}e^3e'-\frac{9}{64}ee'^3+\frac{9}{8}\gamma^4ee'+\frac{39}{32}\gamma^2e^3e'\right.$$

$$\left.-\frac{5}{512}e^5e'-\frac{5}{8}ee'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$$

$$+\left[\frac{51}{8}e'^2-\frac{51}{4}\gamma^2e'^2-\frac{255}{16}e^2e'^2-\frac{115}{8}e'^4+\frac{51}{8}\gamma^4e'^2+\frac{255}{8}\gamma^2e^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{1173}{128}e^4e'^2+\frac{265}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-4l')$$

$$+\left[\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma^4-\frac{15}{4}\gamma^2e^2+\frac{9}{4}\gamma^2e'^2+\frac{15}{4}\gamma^4e^2-\frac{9}{4}\gamma^4e'^2+\frac{69}{32}\gamma^2e^4\right.$$

$$\left.-\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'^2+\frac{45}{16}\gamma^2\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2g+2l)$$

$$\begin{aligned}+\Big[\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma^4+\frac{9}{4}\gamma^2e^2-\frac{15}{4}\gamma^2e'^2-\frac{9}{4}\gamma^4e^2+\frac{15}{4}\gamma^4e'^2-\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'^2&\\ +\frac{39}{32}\gamma^2e'^4+\frac{45}{16}\gamma^2\frac{a^2}{a'^2}\Big]&\cos(2h-2h'-2g'-2l')\end{aligned}$$

$$+\Big[-\frac{1}{16}e^3+\frac{3}{8}\gamma^2e^3+\frac{9}{256}e^5-\frac{3}{32}e^3e'^2\Big]\cos 3l$$

$$+\Big[-\frac{3}{16}e^2e'+\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{1}{16}e^4e'-\frac{27}{128}e^2e'^3\Big]\cos(2l+l')$$

$$+\Big[-\frac{3}{16}e^2e'+\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{1}{16}e^4e'-\frac{27}{128}e^2e'^3\Big]\cos(2l-l')$$

$$+\Big[-\frac{9}{8}ee'^2+\frac{27}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{9}{64}e^3e'^2-\frac{7}{8}ee'^4\Big]\cos(l+2l')$$

$$+\Big[-\frac{9}{8}ee'^2+\frac{27}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{9}{64}e^3e'^2-\frac{7}{8}ee'^4-\frac{27}{32}\gamma^2e^3e'^2-\frac{3}{512}e^5e'^2\Big]\cos(l-2l')$$

$$+\Big[\frac{53}{32}e'^3-\frac{159}{16}\gamma^2e'^3+\frac{159}{64}e^2e'^3+\frac{393}{512}e'^5\Big]\cos 3l'$$

$$+\Big[\frac{25}{32}e^3-\frac{25}{16}\gamma^2e^3-\frac{1075}{512}e^5-\frac{125}{64}e^3e'^2\Big]\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\Big[-\frac{7}{32}e^3+\frac{7}{16}\gamma^2e^3-\frac{47}{512}e^5+\frac{35}{64}e^3e'^2\Big]\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\Big[\frac{21}{8}e^2e'-\frac{21}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{105}{16}e^4e'-\frac{369}{64}e^2e'^3\Big]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\Big[-\frac{3}{8}e^2e'+\frac{3}{4}\gamma^2e^2e'+\frac{15}{16}e^4e'+\frac{3}{64}e^2e'^3\Big]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-l')$$

$$\begin{aligned}+\Big[\frac{105}{16}e^2e'-\frac{105}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{1845}{128}e^2e'^3+\frac{105}{16}\gamma^4e^2e'&\\ +\frac{945}{128}e^2e'\frac{a^2}{a'^2}\Big]&\cos(2h+2g-2h'-2g'-3l')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+\Big[-\frac{15}{16}e^2e'+\frac{15}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{15}{128}e^2e'^3-\frac{15}{16}\gamma^4e^2e'&\\ +\frac{105}{128}e^2e'\frac{a^2}{a'^2}\Big]&\cos(2h+2g-2h'-2g'-l')\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{51}{8}ee'^2-\frac{51}{4}\gamma^2ee'^2-\frac{969}{64}e^3e'^2-\frac{115}{8}ee'^4\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l')$$

$$+\left[-\frac{153}{8}ee'^2+\frac{153}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{663}{64}e^3e'^2+\frac{345}{8}ee'^4\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-4l')$$

$$+\left[\frac{845}{64}e'^3-\frac{845}{32}\gamma^2e'^3-\frac{4225}{128}e^2e'^3-\frac{32525}{1024}e'^5\right]\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-5l')$$

$$+\left[\frac{1}{64}e'^3-\frac{1}{32}\gamma^2e'^3-\frac{5}{128}e^2e'^3+\frac{11}{1024}e'^5\right]\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'+l')$$

$$+\left[\frac{3}{2}\gamma^2e-\frac{3}{2}\gamma^4e-\frac{57}{16}\gamma^2e^3+\frac{9}{4}\gamma^2ee'^2\right]\cos(2g+3l)$$

$$+\left[-\frac{9}{2}\gamma^2e+\frac{9}{2}\gamma^4e+\frac{39}{16}\gamma^2e^3-\frac{27}{4}\gamma^2ee'^2-\frac{39}{16}\gamma^4e^3\right.$$
$$\left.+\frac{5}{128}\gamma^2e^5+\frac{117}{32}\gamma^2e^3e'^2\right]\cos(2g+l)$$

$$+\left[\frac{9}{4}\gamma^2e'-\frac{9}{4}\gamma^4e'-\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{81}{32}\gamma^2e'^3\right]\cos(2g+2l+l')$$

$$+\left[\frac{9}{4}\gamma^2e'-\frac{9}{4}\gamma^4e'-\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{81}{32}\gamma^2e'^3\right]\cos(2g+2l-l')$$

$$+\left[-\frac{3}{2}\gamma^2e+\frac{3}{2}\gamma^4e+\frac{3}{16}\gamma^2e^3+\frac{15}{4}\gamma^2ee'^2-\frac{3}{16}\gamma^4e^3\right.$$
$$\left.-\frac{1}{128}\gamma^2e^5-\frac{15}{32}\gamma^2e^3e'^2\right]\cos(2h+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[-\frac{3}{2}\gamma^2e+\frac{3}{2}\gamma^4e+\frac{3}{16}\gamma^2e^3+\frac{15}{4}\gamma^2ee'^2\right]\cos(2h-l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{21}{4}\gamma^2e'-\frac{21}{4}\gamma^4e'+\frac{63}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{369}{32}\gamma^2e'^3-\frac{63}{8}\gamma^4e^2e'\right]\cos(2h-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[-\frac{3}{4}\gamma^2e'+\frac{3}{4}\gamma^4e'-\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{3}{32}\gamma^2e'^3+\frac{9}{8}\gamma^4e^2e'\right]\cos(2h-2h'-2g'-l')$$

$$+\left[-\frac{1}{24}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4+\frac{1}{30}e^6-\frac{1}{16}e^4e'^2\right]\cos 4l$$

$$+\left[-\frac{3}{32}e^3e'+\frac{9}{16}\gamma^2e^3e'+\frac{27}{512}e^5e'\right]\cos(3l+l')$$

$$+\left[-\frac{3}{32}e^3e'+\frac{9}{16}\gamma^2e^3e'+\frac{27}{512}e^5e'\right]\cos(3l-l')$$

$$+\left[-\frac{9}{32}e^2e'^2+\frac{27}{16}\gamma^2e^2e'^2+\frac{3}{32}e^4e'^2\right]\cos(2l+2l')$$

$$+\left[-\frac{9}{32}e^2e'^2+\frac{27}{16}\gamma^2e^2e'^2+\frac{3}{32}e^4e'^2\right]\cos(2l-2l')$$

$$-\frac{53}{32}ee'^3\cos(l+3l')$$

$$-\frac{53}{32}ee'^3\cos(l-3l')$$

$$+\left[\frac{77}{32}e'^4-\frac{231}{16}\gamma^2e'^4+\frac{231}{64}e^2e'^4\right]\cos 4l'$$

$$+\left[\frac{27}{32}e^4-\frac{27}{16}\gamma^2e^4-\frac{783}{320}e^6-\frac{135}{64}e^4e'^2\right]\cos(2h+2g+6l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[-\frac{3}{64}e^4+\frac{3}{32}\gamma^2e^4-\frac{11}{640}e^6+\frac{15}{128}e^4e'^2\right]\cos(2h+2g-2l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{175}{64}e^3e'-\frac{175}{32}\gamma^2e^3e'-\frac{7525}{1024}e^5e'\right]\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[-\frac{25}{64}e^3e'+\frac{25}{32}\gamma^2e^3e'+\frac{1075}{1024}e^5e'\right]\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-l')$$

$$+\left[-\frac{49}{64}e^3e'+\frac{49}{32}\gamma^2e^3e'-\frac{329}{1024}e^5e'\right]\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[\frac{7}{64}e^3e'-\frac{7}{32}\gamma^2e^3e'+\frac{47}{1024}e^5e'\right]\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-l')$$

$$+\left[\frac{51}{8}e^2e'^2-\frac{51}{4}\gamma^2e^2e'^2-\frac{255}{16}e^4e'^2\right]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-4l')$$

$$+\left[\frac{255}{16}e^2e'^2-\frac{255}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{575}{16}e^2e'^4\right]\cos(2h+2g-2h'-2g'-4l')$$

$$+\frac{845}{64}ee'^5\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-5l')$$

$$+\frac{1}{64}ee'^3\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'+l')$$

$$-\frac{2535}{64}ee'^5\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-5l')$$

$$-\frac{3}{64}ee'^3\cos(2h+2g+l-2h'-2g'+l')$$

$$+\frac{1599}{64}e'^4\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-6l')$$

$$+\frac{1}{32}e'^4\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'+2l')$$

$$+\left[\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{3}{2}\gamma^4e^2-\frac{15}{4}\gamma^2e^4+\frac{9}{4}\gamma^2e^2e'^2\right]\cos(2g+4l)$$

$$+\left[\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{15}{4}\gamma^4e^2+\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{45}{8}\gamma^4e^2e'^2\right]\cos 2g$$

$$+\left[\frac{9}{4}\gamma^2ee'-\frac{9}{4}\gamma^4ee'-\frac{171}{32}\gamma^2e^3e'\right]\cos(2g+3l+l')$$

$$+\left[\frac{9}{4}\gamma^2ee'-\frac{9}{4}\gamma^4ee'-\frac{171}{32}\gamma^2e^3e'\right]\cos(2g+3l-l')$$

$$+\left[-\frac{27}{4}\gamma^2ee'+\frac{27}{4}\gamma^4ee'+\frac{117}{32}\gamma^2e^3e'\right]\cos(2g+l+l')$$

$$+\left[-\frac{27}{4}\gamma^2ee'+\frac{27}{4}\gamma^4ee'+\frac{117}{32}\gamma^2e^3e'\right]\cos(2g+l-l')$$

$$+\left[\frac{27}{8}\gamma^2e'^2-\frac{27}{8}\gamma^4e'^2-\frac{135}{16}\gamma^2e^2e'^2\right]\cos(2g+2l+2l')$$

$$+\left[\frac{27}{8}\gamma^2e'^2-\frac{27}{8}\gamma^4e'^2-\frac{135}{16}\gamma^2e^2e'^2\right]\cos(2g+2l-2l')$$

$$+\left[-\frac{3}{8}\gamma^2e^2+\frac{3}{8}\gamma^4e^2+\frac{1}{8}\gamma^2e^4+\frac{15}{16}\gamma^2e^2e'^2\right]\cos(2h+2l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[-\frac{3}{8}\gamma^2e^2+\frac{3}{8}\gamma^4e^2+\frac{1}{8}\gamma^2e^4+\frac{15}{16}\gamma^2e^2e'^2\right]\cos(2h-2l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[-\frac{21}{4}\gamma^2ee'+\frac{21}{4}\gamma^4ee'+\frac{21}{32}\gamma^2e^3e'\right]\cos(2h+l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[\frac{3}{4}\gamma^2 ee' - \frac{3}{4}\gamma^4 ee' - \frac{3}{32}\gamma^2 e^3 e'\right]\cos(2h + l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+\left[-\frac{21}{4}\gamma^2 ee' + \frac{21}{4}\gamma^4 ee' + \frac{21}{32}\gamma^2 e^3 e'\right]\cos(2h - l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+\left[\frac{3}{4}\gamma^2 ee' - \frac{3}{4}\gamma^4 ee' - \frac{3}{32}\gamma^2 e^3 e'\right]\cos(2h - l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+\left[\frac{51}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{51}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{153}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{115}{4}\gamma^2 e'^4\right]\cos(2h - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$+\left[\frac{3}{4}\gamma^4 - \frac{15}{8}\gamma^4 e^2 - \frac{15}{8}\gamma^4 e'^2\right]\cos(2h - 2g - 2l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$-\frac{25}{768}e^5\cos 5l$$

$$-\frac{1}{16}e^4 e'\cos(4l + l')$$

$$-\frac{1}{16}e^4 e'\cos(4l - l')$$

$$-\frac{9}{64}e^3 e'^2\cos(3l + 2l')$$

$$+\left[-\frac{9}{64}e^3 e'^2 + \frac{27}{32}\gamma^2 e^3 e'^2 + \frac{81}{1024}e^5 e'^2\right]\cos(3l - 2l')$$

$$-\frac{53}{128}e^2 e'^3\cos(2l + 3l')$$

$$-\frac{53}{128}e^2 e'^3\cos(2l - 3l')$$

$$-\frac{77}{32}ee'^4\cos(l + 4l')$$

$$-\frac{77}{32}ee'^4\cos(l - 4l')$$

$$+\frac{1773}{512}e'^5\cos 5l'$$

$$+\frac{2401}{2560}e^5\cos(2h + 2g + 7l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$-\frac{51}{2560}e^5\cos(2h + 2g - 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \frac{189}{64} e^4 e' \cos(2h + 2g + 6l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$\frac{27}{64} e^4 e' \cos(2h + 2g + 6l - 2h' - 2g' - l')$$

$$- \frac{21}{128} e^4 e' \cos(2h + 2g - 2l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ \frac{3}{128} e^4 e' \cos(2h + 2g - 2l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+ \frac{425}{64} e^3 e'^2 \cos(2h + 2g + 5l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$- \frac{119}{64} e^3 e'^2 \cos(2h + 2g - l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$+ \frac{845}{64} e^2 e'^3 \cos(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - 5l')$$

$$+ \frac{1}{64} e^2 e'^3 \cos(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' + l')$$

$$+ \frac{4225}{128} e^2 e'^3 \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 5l')$$

$$+ \frac{5}{128} e^2 e'^3 \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' + l')$$

$$+ \frac{1599}{64} ee'^4 \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 6l')$$

$$+ \frac{1}{32} ee'^4 \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' + 2l')$$

$$- \frac{4797}{64} ee'^4 \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 6l')$$

$$- \frac{3}{32} ee'^4 \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' + 2l')$$

$$+ \frac{228347}{5120} e'^5 \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 7l')$$

$$+ \frac{243}{5120} e'^5 \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' + 3l')$$

$$+ \frac{25}{16} \gamma^2 e^3 \cos(2g + 5l)$$

$$+\left[-\frac{7}{16}\gamma^2 e^3+\frac{7}{16}\gamma^4 e^3-\frac{47}{256}\gamma^2 e^5-\frac{21}{32}\gamma^2 e^3 e'^2\right]\cos(2g-l)$$

$$+\frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e'\cos(2g+4l+l')$$

$$+\frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e'\cos(2g+4l-l')$$

$$+\left[\frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'-\frac{45}{8}\gamma^4 e^2 e'\right]\cos(2g+l')$$

$$+\left[\frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'-\frac{45}{8}\gamma^4 e^2 e'\right]\cos(2g-l')$$

$$+\frac{27}{8}\gamma^2 ee'^2\cos(2g+3l+2l')$$

$$+\left[\frac{27}{8}\gamma^2 ee'^2-\frac{27}{8}\gamma^4 ee'^2-\frac{513}{64}\gamma^2 e^3 e'^2\right]\cos(2g+3l-2l')$$

$$-\frac{81}{8}\gamma^2 ee'^2\cos(2g+l+2l')$$

$$+\left[-\frac{81}{8}\gamma^2 ee'^2+\frac{81}{8}\gamma^4 ee'^2+\frac{351}{64}\gamma^2 e^3 e'^2\right]\cos(2g+l-2l')$$

$$+\frac{159}{32}\gamma^2 e'^3\cos(2g+2l+3l')$$

$$+\frac{159}{32}\gamma^2 e'^3\cos(2g+2l-3l')$$

$$+\left[-\frac{3}{16}\gamma^2 e^3+\frac{3}{16}\gamma^4 e^3+\frac{27}{256}\gamma^2 e^5+\frac{15}{32}\gamma^2 e^3 e'^2\right]\cos(2h+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{3}{16}\gamma^2 e^3\cos(2h-3l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{21}{16}\gamma^2 e^2 e'\cos(2h+2l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\frac{3}{16}\gamma^2 e^2 e'\cos(2h+2l-2h'-2g'-l')$$

$$-\frac{21}{16}\gamma^2 e^2 e'\cos(2h-2l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\frac{3}{16}\gamma^2 e^2 e'\cos(2h-2l-2h'-2g'-l')$$

$$-\frac{51}{4}\gamma^2 c e'^2 \cos(2h + l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$-\frac{51}{4}\gamma^2 c e'^2 \cos(2h - l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$+\frac{845}{32}\gamma^2 e'^3 \cos(2h - 2h' - 2g' - 5l')$$

$$+\frac{1}{32}\gamma^2 e'^3 \cos(2h - 2h' - 2g' + l')$$

$$+\frac{3}{4}\gamma^4 c \cos(2h - 2g - 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$-\frac{9}{4}\gamma^4 c \cos(2h - 2g - l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\frac{21}{8}\gamma^4 e' \cos(2h - 2g - 2l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$-\frac{3}{8}\gamma^4 e' \cos(2h - 2g - 2l - 2h' - 2g' - l')$$

$$-\frac{9}{320} e^6 \cos 6l$$

$$-\frac{25}{512} e^5 e' \cos(5l + l')$$

$$-\frac{25}{512} e^5 e' \cos(5l - l')$$

$$-\frac{3}{32} e^4 e'^2 \cos(4l + 2l')$$

$$-\frac{3}{32} e^4 e'^2 \cos(4l - 2l')$$

$$+\frac{16}{15} e^6 \cos(2h + 2g + 8l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$-\frac{11}{960} e^6 \cos(2h + 2g - 4l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\frac{16807}{5120} e^5 e' \cos(2h + 2g + 7l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$-\frac{2401}{5120} e^5 e' \cos(2h + 2g + 7l - 2h' - 2g' - l')$$

$$-\frac{357}{5120} e^5 e' \cos(2h + 2g - 3l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+\frac{51}{5120}e^5 e' \cos(2h+2g-3l-2h'-2g'-l')$$

$$+\frac{459}{64}e^4 e'^2 \cos(2h+2g+6l-2h'-2g'-4l')$$

$$-\frac{51}{128}e^4 e'^2 \cos(2h+2g-2l-2h'-2g'-4l')$$

$$+\frac{7995}{128}e^2 e'^4 \cos(2h+2g-2h'-2g'-6l')$$

$$+\frac{5}{64}e^2 e'^4 \cos(2h+2g-2h'-2g'+2l')$$

$$+\frac{27}{16}\gamma^2 e^4 \cos(2g+6l)$$

$$-\frac{3}{32}\gamma^2 e^4 \cos(2g-2l)$$

$$+\frac{75}{32}\gamma^2 e^3 e' \cos(2g+5l+l')$$

$$+\frac{75}{32}\gamma^2 e^3 e' \cos(2g+5l-l')$$

$$-\frac{21}{32}\gamma^2 e^3 e' \cos(2g-l+l')$$

$$-\frac{21}{32}\gamma^2 e^3 e' \cos(2g-l-l')$$

$$+\frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \cos(2g+4l+2l')$$

$$+\frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \cos(2g+4l-2l')$$

$$+\frac{135}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 \cos(2g+2l')$$

$$+\frac{135}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 \cos(2g-2l')$$

$$-\frac{1}{8}\gamma^2 e^4 \cos(2h+4l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{1}{8}\gamma^2 e^4 \cos(2h-4l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{21}{32}\gamma^2 e^3 e' \cos(2h + 3l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+\frac{3}{32}\gamma^2 e^3 e' \cos(2h + 3l - 2h' - 2g' - l')$$

$$-\frac{21}{32}\gamma^2 e^3 e' \cos(2h - 3l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+\frac{3}{32}\gamma^2 e^3 e' \cos(2h - 3l - 2h' - 2g' - l')$$

$$-\frac{51}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 \cos(2h + 2l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$-\frac{51}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 \cos(2h - 2l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$+\frac{1599}{32}\gamma^2 e'^4 \cos(2h - 2h' - 2g' - 6l')$$

$$+\frac{1}{16}\gamma^2 e'^4 \cos(2h - 2h' - 2g' + 2l')$$

$$+\frac{3}{4}\gamma^4 e^2 \cos(2h - 2g - 4l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\frac{15}{8}\gamma^4 e^2 \cos(2h - 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\frac{21}{8}\gamma^4 ee' \cos(2h - 2g - 3l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$-\frac{3}{8}\gamma^4 ee' \cos(2h - 2g - 3l - 2h' - 2g' - l')$$

$$-\frac{63}{8}\gamma^4 ee' \cos(2h - 2g - l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+\frac{9}{8}\gamma^4 ee' \cos(2h - 2g - l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+\frac{51}{8}\gamma^4 e'^2 \cos(2h - 2g - 2l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$+\frac{105}{16}\gamma^4 e^2 e' \cos(2h - 2g - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$-\frac{15}{16}\gamma^4 e^2 e' \cos(2h - 2g - 2h' - 2g' - l')\ \Big\}$$

$$+ m\frac{a}{a'}\Big)\Big[\frac{3}{8}-\frac{33}{8}\gamma^2+\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}e'^2+\frac{75}{8}\gamma^4-\frac{33}{4}\gamma^2e^2-\frac{33}{4}\gamma^2e'^2$$

$$-\frac{123}{512}e^4+\frac{3}{2}e^2e'^2+\frac{15}{64}\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos(h+g+l-h'-g'-l')$$

$$+\Big[\frac{5}{8}-\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{15}{4}e^2-\frac{15}{4}e'^2+\frac{15}{8}\gamma^4+\frac{45}{4}\gamma^2e^2+\frac{45}{4}\gamma^2e'^2+\frac{2955}{512}e^4$$

$$+\frac{45}{2}e^2e'^2+\frac{35}{128}\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\Big[-\frac{3}{16}e+\frac{33}{16}\gamma^2e+\frac{3}{8}e^3-\frac{3}{8}ee'^2\Big]\cos(h+g+2l-h'-g'-l')$$

$$+\Big[-\frac{15}{16}e+\frac{165}{16}\gamma^2e-\frac{45}{64}e^3-\frac{15}{8}ee'^2-\frac{375}{16}\gamma^4e+\frac{495}{64}\gamma^2e^3$$

$$+\frac{165}{8}\gamma^2ee'^2-\frac{45}{32}e^3e'^2-\frac{105}{128}e\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos(h+g-h'-g'-l')$$

$$+\Big[\frac{9}{8}e'-\frac{99}{8}\gamma^2e'+\frac{9}{4}e^2e'+\frac{33}{32}e'^3-\frac{99}{4}\gamma^2e^2e'$$

$$-\frac{369}{512}e^4e'\Big]\cos(h+g+l-h'-g'-2l')$$

$$+\Big[\frac{3}{8}e'-\frac{33}{8}\gamma^2e'+\frac{3}{4}e^2e'+\frac{15}{16}e'^3-\frac{33}{4}\gamma^2e^2e'$$

$$-\frac{123}{512}e^4e'\Big]\cos(h+g+l-h'-g')$$

$$+\Big[\frac{15}{16}e-\frac{45}{16}\gamma^2e-\frac{285}{64}e^3-\frac{45}{8}ee'^2\Big]\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\Big[-\frac{45}{16}e+\frac{135}{16}\gamma^2e+\frac{165}{32}e^3+\frac{135}{8}ee'^2\Big]\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\Big[\frac{25}{8}e'-\frac{75}{8}\gamma^2e'-\frac{75}{4}e^2e'-\frac{55}{4}e'^3\Big]\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-4l')$$

$$+\Big[-\frac{5}{8}e'+\frac{15}{8}\gamma^2e'+\frac{15}{4}e^2e'+\frac{25}{32}e'^3-\frac{45}{4}\gamma^2e^2e'$$

$$-\frac{2955}{512}e^4e'\Big]\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-2l')$$

$$+\left[-\frac{9}{64}e^2+\frac{99}{64}\gamma^2e^2+\frac{33}{128}e^4-\frac{9}{32}e^2e'^2\right]\cos(h+g+3l-h'-g'-l')$$

$$+\left[\frac{33}{64}e^2-\frac{363}{64}\gamma^2e^2+\frac{7}{128}e^4+\frac{33}{32}e^2e'^2\right]\cos(h+g-l-h'-g'-l')$$

$$+\left[-\frac{9}{16}ee'+\frac{99}{16}\gamma^2ee'+\frac{9}{8}e^3e'\right]\cos(h+g+2l-h'-g'-2l')$$

$$+\left[-\frac{3}{16}ee'+\frac{33}{16}\gamma^2ee'+\frac{3}{8}e^3e'\right]\cos(h+g+2l-h'-g')$$

$$+\left[-\frac{45}{16}ee'+\frac{495}{16}\gamma^2ee'-\frac{135}{64}e^3e'-\frac{165}{64}ee'^3\right]\cos(h+g-h'-g'-2l')$$

$$\begin{aligned}+\Bigg[-\frac{15}{16}ee'+\frac{165}{16}\gamma^2ee'-\frac{45}{64}e^3e'-\frac{75}{32}ee'^3-\frac{375}{16}\gamma^4ee'&\\ +\frac{495}{64}\gamma^2e^3e'-\frac{105}{64}ee'\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]&\cos(h+g-h'-g')\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{159}{64}e'^2-\frac{1749}{64}\gamma^2e'^2+\frac{159}{32}e^2e'^2\right]\cos(h+g+l-h'-g'-3l')$$

$$+\left[\frac{33}{64}e'^2-\frac{363}{64}\gamma^2e'^2+\frac{33}{32}e^2e'^2\right]\cos(h+g+l-h'-g'+l')$$

$$+\left[\frac{75}{64}e^2-\frac{225}{64}\gamma^2e^2-\frac{675}{128}e^4-\frac{225}{32}e^2e'^2\right]\cos(3h+3g+5l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\left[\frac{285}{64}e^2-\frac{855}{64}\gamma^2e^2-\frac{325}{128}e^4-\frac{855}{32}e^2e'^2\right]\cos(3h+3g+l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\left[\frac{75}{16}ee'-\frac{225}{16}\gamma^2ee'-\frac{1425}{64}e^3e'\right]\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-4l')$$

$$+\left[-\frac{15}{16}ee'+\frac{45}{16}\gamma^2ee'+\frac{285}{64}e^3e'\right]\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-2l')$$

$$+\left[-\frac{225}{16}ee'+\frac{675}{16}\gamma^2ee'+\frac{825}{32}e^3e'\right]\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-4l')$$

$$+\left[\frac{45}{16}ee'-\frac{135}{16}\gamma^2ee'-\frac{165}{32}e^3e'\right]\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-2l')$$

$$+\left[\frac{635}{64}e'^2-\frac{1905}{64}\gamma^2e'^2-\frac{1905}{32}e^2e'^2\right]\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-5l')$$

$$+\left[\frac{5}{64}e'^2-\frac{15}{64}\gamma^2e'^2-\frac{15}{32}e^2e'^2\right]\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-l')$$

$$+\left[\frac{9}{4}\gamma^2-\frac{15}{2}\gamma^4+\frac{9}{2}\gamma^2e^2+\frac{9}{2}\gamma^2e'^2\right]\cos(h-g-l-h'-g'-l')$$

$$+\left[\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{15}{4}\gamma^4-\frac{45}{4}\gamma^2e^2+\frac{15}{4}\gamma^2e'^2\right]\cos(h+3g+3l-h'-g'-l')$$

$$+\left[\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{15}{4}\gamma^4+\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{45}{4}\gamma^2e'^2\right]\cos(3h+g+l-3h'-3g'-3l')$$

$$-\frac{7}{64}e^3\cos(h+g+4l-h'-g'-l')$$

$$+\frac{1}{16}e^3\cos(h+g-2l-h'-g'-l')$$

$$+\left[-\frac{27}{64}e^2e'+\frac{297}{64}\gamma^2e^2e'+\frac{99}{128}e^4e'\right]\cos(h+g+3l-h'-g'-2l')$$

$$-\frac{9}{64}e^2e'\cos(h+g+3l-h'-g')$$

$$+\frac{99}{64}e^2e'\cos(h+g-l-h'-g'-2l')$$

$$+\left[\frac{33}{64}e^2e'-\frac{363}{64}\gamma^2e^2e'+\frac{7}{128}e^4e'\right]\cos(h+g-l-h'-g')$$

$$-\frac{159}{128}ee'^2\cos(h+g+2l-h'-g'-3l')$$

$$-\frac{33}{128}ee'^2\cos(h+g+2l-h'-g'+l')$$

$$+\left[-\frac{795}{128}ee'^2+\frac{8745}{128}\gamma^2ee'^2-\frac{2385}{512}e^3e'^2\right]\cos(h+g-h'-g'-3l')$$

$$+\left[-\frac{165}{128}ee'^2+\frac{1815}{128}\gamma^2ee'^2-\frac{495}{512}e^3e'^2\right]\cos(h+g-h'-g'+l')$$

$$+\frac{77}{16}e'^3\cos(h+g+l-h'-g'-4l')$$

$$+\frac{23}{32}e'^3\cos(h+g+l-h'-g'+2l')$$

$$+\frac{45}{32}e^3\cos(3h+3g+6l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\left[-\frac{175}{64}e^3+\frac{525}{64}\gamma^2e^3+\frac{525}{32}e^3e'^2\right]\cos(3h+3g-3h'-3g'-3l')$$

$$+\frac{375}{64}e^2e'\cos(3h+3g+5l-3h'-3g'-4l')$$

$$-\frac{75}{64}e^2e'\cos(3h+3g+5l-3h'-3g'-2l')$$

$$+\frac{1425}{64}e^2e'\cos(3h+3g+l-3h'-3g'-4l')$$

$$+\left[-\frac{285}{64}e^2e'+\frac{855}{64}\gamma^2e^2e'+\frac{325}{128}e^4e'\right]\cos(3h+3g+l-3h'-3g'-2l')$$

$$+\frac{1905}{128}ee'^2\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-5l')$$

$$+\frac{15}{128}ee'^2\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-l')$$

$$-\frac{5715}{128}ee'^2\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-5l')$$

$$-\frac{45}{128}ee'^2\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-l')$$

$$+\frac{815}{32}e'^3\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-6l')$$

$$-\frac{9}{8}\gamma^2e\cos(h-g-2l-h'-g'-l')$$

$$+\left[-\frac{45}{8}\gamma^2e+\frac{75}{4}\gamma^4e-\frac{135}{32}\gamma^2e^3-\frac{45}{4}\gamma^2ee'^2\right]\cos(h-g-h'-g'-l')$$

$$+\frac{27}{4}\gamma^2e'\cos(h-g-l-h'-g'-2l')$$

$$+\left[\frac{9}{4}\gamma^2e'+\frac{9}{2}\gamma^2e^2e'\right]\cos(h-g-l-h'-g')$$

$$+\frac{45}{16}\gamma^2e\cos(h+3g+4l-h'-g'-l')$$

$$-\frac{135}{16}\gamma^2e\cos(h+3g+2l-h'-g'-l')$$

$$+\left[\frac{45}{8}\gamma^2 e' - \frac{135}{4}\gamma^2 e^2 e'\right]\cos(h + 3g + 3l - h' - g' - 2l')$$

$$+\frac{15}{8}\gamma^2 e' \cos(h + 3g + 3l - h' - g')$$

$$-\frac{15}{16}\gamma^2 e \cos(3h + g + 2l - 3h' - 3g - 3l')$$

$$+\left[-\frac{75}{16}\gamma^2 e + \frac{75}{8}\gamma^4 e - \frac{225}{64}\gamma^2 e^3 + \frac{225}{8}\gamma^2 e e'^2\right]\cos(3h + g - 3h' - 3g - 3l')$$

$$+\frac{75}{8}\gamma^2 e' \cos(3h + g + l - 3h' - 3g' - 4l')$$

$$+\left[-\frac{15}{8}\gamma^2 e' - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 e'\right]\cos(3h + g + l - 3h' - 3g' - 2l')$$

$$-\frac{95}{1024} e^4 \cos(h + g + 5l - h' - g' - l')$$

$$+\frac{21}{1024} e^4 \cos(h + g - 3l - h' - g' - l')$$

$$-\frac{21}{64} e^3 e' \cos(h + g + 4l - h' - g' - 2l')$$

$$-\frac{7}{64} e^3 e' \cos(h + g + 4l - h' - g')$$

$$+\frac{3}{16} e^3 e' \cos(h + g - 2l - h' - g' - 2l')$$

$$+\frac{1}{16} e^3 e' \cos(h + g - 2l - h' - g')$$

$$-\frac{477}{512} e^2 e'^2 \cos(h + g + 3l - h' - g' - 3l')$$

$$-\frac{99}{512} e^2 e'^2 \cos(h + g + 3l - h' - g' + l')$$

$$+\frac{1749}{512} e^2 e'^2 \cos(h + g - l - h' - g' - 3l')$$

$$+\frac{363}{512} e^2 e'^2 \cos(h + g - l - h' - g' + l')$$

$$-\frac{385}{32} e e'^3 \cos(h + g - h' - g' - 4l')$$

$$- \frac{115}{64} ee'^2 \cos(h + g - h' - g' + 2l')$$

$$+ \frac{1715}{1024} e^4 \cos(3h + 3g + 7l - 3h' - 3g' - 3l')$$

$$+ \frac{375}{1024} e^4 \cos(3h + 3g - l - 3h' - 3g' - 3l')$$

$$+ \frac{225}{32} e^3 e' \cos(3h + 3g + 6l - 3h' - 3g' - 4l')$$

$$- \frac{45}{32} e^3 e' \cos(3h + 3g + 6l - 3h' - 3g' - 2l')$$

$$- \frac{875}{64} e^3 e' \cos(3h + 3g - 3h' - 3g' - 4l')$$

$$+ \frac{175}{64} e^3 e' \cos(3h + 3g - 3h' - 3g' - 2l')$$

$$+ \frac{9525}{512} e^2 e'^2 \cos(3h + 3g + 5l - 3h' - 3g' - 5l')$$

$$+ \frac{75}{512} e^2 e'^2 \cos(3h + 3g + 5l - 3h' - 3g' - l')$$

$$+ \frac{36195}{512} e^2 e'^2 \cos(3h + 3g + l - 3h' - 3g' - 5l')$$

$$+ \frac{285}{512} e^2 e'^2 \cos(3h + 3g + l - 3h' - 3g' - l')$$

$$- \frac{27}{32} \gamma^2 e^2 \cos(h - g - 3l - h' - g' - l')$$

$$+ \frac{99}{32} \gamma^2 e^2 \cos(h - g + l - h' - g' - l')$$

$$- \frac{27}{8} \gamma^2 ee' \cos(h - g - 2l - h' - g' - 2l')$$

$$- \frac{9}{8} \gamma^2 ee' \cos(h - g - 2l - h' - g')$$

$$- \frac{135}{8} \gamma^2 ee' \cos(h - g - h' - g' - 2l')$$

$$+ \left[- \frac{45}{8} \gamma^2 ee' + \frac{75}{4} \gamma^4 ee' - \frac{135}{32} \gamma^2 e^3 e' \right] \cos(h - g - h' - g')$$

$$+\frac{477}{32}\gamma^2 e'^2 \cos(h-g-l-h'-g'-3l')$$

$$-\frac{99}{32}\gamma^2 e'^2 \cos(h-g-l-h'-g'+l')$$

$$+\frac{225}{64}\gamma^2 e^2 \cos(h+3g+5l-h'-g'-l')$$

$$+\frac{855}{64}\gamma^2 e^2 \cos(h+3g+l-h'-g'-l')$$

$$+\frac{135}{16}\gamma^2 ee' \cos(h+3g+4l-h'-g'-2l')$$

$$+\frac{45}{16}\gamma^2 ee' \cos(h+3g+4l-h'-g')$$

$$-\frac{405}{16}\gamma^2 ee' \cos(h+3g+2l-h'-g'-2l')$$

$$-\frac{135}{16}\gamma^2 ee' \cos(h+3g+2l-h'-g')$$

$$+\frac{795}{64}\gamma^2 e'^2 \cos(h+3g+3l-h'-g'-3l')$$

$$+\frac{165}{64}\gamma^2 e'^2 \cos(h+3g+3l-h'-g'+l')$$

$$-\frac{45}{64}\gamma^2 e^2 \cos(3h+g+3l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\frac{165}{64}\gamma^2 e^2 \cos(3h+g-l-3h'-3g'-3l')$$

$$-\frac{75}{16}\gamma^2 ee' \cos(3h+g+2l-3h'-3g'-4l')$$

$$+\frac{15}{16}\gamma^2 ee' \cos(3h+g+2l-3h'-3g'-2l')$$

$$-\frac{375}{16}\gamma^2 ee' \cos(3h+g-3h'-3g'-4l')$$

$$+\frac{75}{16}\gamma^2 ee' \cos(3h+g-3h'-3g'-2l')$$

$$+\frac{1905}{64}\gamma^2 e'^2 \cos(3h+g+l-3h'-3g'-5l')$$

$$+\frac{15}{64}\gamma^2 e'^2 \cos(3h+g+l-3h'-3g'-l')$$

$$+\frac{15}{8}\gamma^4 \cos(h-3g-3l-h'-g'-l')$$

$$+\frac{15}{8}\gamma^4 \cos(3h-g-l-3h'-3g'-3l')$$

$$-\frac{22225}{512}e^3 e'^2 \cos(3h+3g-3h'-3g'-5l')$$

$$-\frac{175}{512}e^3 e'^2 \cos(3h+3g-3h'-3g'-l')$$

$$-\frac{2385}{64}\gamma^2 ee'^2 \cos(h-g-h'-g'-3l')$$

$$-\frac{495}{64}\gamma^2 ee'^2 \cos(h-g-h'-g'+l')$$

$$+\frac{99}{32}\gamma^2 e^2 e' \cos(h-g+l-h'-g')$$

$$-\frac{525}{64}\gamma^2 e^3 \cos(h+3g-h'-g'-l')$$

$$+\frac{2565}{64}\gamma^2 e^2 e' \cos(h+3g+l-h'-g'-2l')$$

$$+\frac{45}{64}\gamma^2 e^2 e' \cos(3h+g+3l-3h'-3g'-2l')$$

$$-\frac{9525}{128}\gamma^2 ee'^2 \cos(3h+g-3h'-3g'-5l')$$

$$-\frac{75}{128}\gamma^2 ee'^2 \cos(3h+g-3h'-3g'-l')$$

$$-\frac{75}{16}\gamma^4 e \cos(3h-g-3h'-3g'-3l')$$

$$-\frac{525}{64}\gamma^2 e^3 e' \cos(h+3g-h'-g')\Big\}$$

$$+m'\frac{a^4}{a'^5}\Big\{\frac{15}{64}e'^2 \cos(2h+2g+2l-2h'-2g')$$

$$+\left[\frac{35}{64}-\frac{35}{16}\gamma^2-\frac{385}{64}e^2-\frac{385}{64}e'^2\right]\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-4l')$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{35}{32}\,e\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')\\
&-\frac{105}{32}\,e\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l')\\
&+\frac{455}{128}\,e'\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-5l')\\
&-\frac{105}{128}\,e'\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-3l')\\
&+\frac{105}{64}\,e^2\cos(4h+4g+6l-4h'-4g'-4l')\\
&+\frac{245}{32}\,e^2\cos(4h+4g+2l-4h'-4g'-4l')\\
&+\frac{455}{64}\,ee'\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-5l')\\
&-\frac{105}{64}\,ee'\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-3l')\\
&-\frac{1365}{64}\,ee'\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-5l')\\
&+\frac{315}{64}\,ee'\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-3l')\\
&+\frac{1785}{128}\,e'^2\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-6l')\\
&+\frac{35}{128}\,e'^2\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-2l')\\
&+\frac{35}{16}\,\gamma^2\cos(2h+4g+4l-2h'-2g'-2l')\\
&+\frac{35}{16}\,\gamma^2\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-4l')\Big\}
\end{aligned}
$$

$$+m'\frac{a^4}{a'^5}\cdot\frac{63}{128}\cos(5h+5g+5l-5h'-5g'-5l').$$

15. Au moyen du développement de R qui vient d'être donné, on pourra déterminer les valeurs de L, G, H, l, g, h, en fonction du temps, en se servant des équations (9). Les valeurs de ces six quantités devront ensuite être substituées dans les expressions des coordonnées de la Lune, ce qui donnera définitivement ces coordonnées en fonction du temps.

Nous avons donc besoin de connaître les expressions des coordonnées de la Lune en fonction de L, G, H, l, g, h, ou bien, ce qui revient au même (n° 7), en fonction de a, e, γ, l, g, h. Ce sont ces expressions que nous allons déterminer maintenant. Au lieu d'adopter, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, les coordonnées rectangulaires x, y, z, pour fixer la position de la Lune, nous prendrons les trois coordonnées adoptées pour les astronomes, savoir :

1°. La *longitude* V comptée sur le plan des xy, à partir de l'axe des x;

2°. La *latitude* U, ou hauteur au-dessus du plan des xy ;

3°. Enfin, la valeur inverse $\frac{1}{r}$ de la distance de la Lune à la Terre, qui, étant multipliée par le rayon de l'équateur terrestre, donne la *parallaxe équatoriale* de la Lune.

La valeur de $\frac{1}{r}$ se déduit immédiatement de la valeur de r donnée par la formule (13). En effectuant les calculs convenables et s'arrêtant aux termes du cinquième ordre par rapport à e, on trouve

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{r} = \frac{1}{a}\Bigg\{ & 1 \\ & + \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5\right)\cos l \\ & + \left(e^2 - \frac{1}{3}e^4\right)\cos 2l \\ & + \left(\frac{9}{8}e^3 - \frac{81}{128}e^5\right)\cos 3l \\ & + \frac{4}{3}e^4\cos 4l \\ & + \frac{625}{384}e^5\cos 5l\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

16. On a, pour déterminer V, la formule suivante, qui se déduit sans peine de la considération d'un triangle sphérique rectangle,

$$\tang(V - h) = \tang v \cos i.$$

Si l'on remarque que $\sin\frac{1}{2}i$ est égal à γ, et qu'on développe V en série, en s'arrêtant aux termes du sixième ordre par rapport à γ, on trouvera

$$V = h + v - (\gamma^2 + \gamma^4 + \gamma^6)\sin 2v + \left(\frac{1}{2}\gamma^4 + \gamma^6\right)\sin 4v - \frac{1}{3}\gamma^6 \sin 6v.$$

En remplaçant ensuite v par sa valeur (14) dans cette formule, développant en série, et ne conservant que les termes du sixième ordre par rapport aux petites quantités e et γ, on aura

$$
\begin{aligned}
(17)\quad V = {} & h + g + l \\
& + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right)\sin l \\
& + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right)\sin 2l \\
& + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\sin 3l \\
& + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right)\sin 4l \\
& + \frac{1097}{960}e^5 \sin 5l \\
& + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6l \\
& + \left(-\gamma^2 - \gamma^4 + 4\gamma^2 e^2 - \gamma^6 + 4\gamma^4 e^2 - \frac{55}{16}\gamma^2 e^4\right)\sin(2g + 2l) \\
& + \left(-2\gamma^2 e - 2\gamma^4 e + \frac{27}{4}\gamma^2 e^3\right)\sin(2g + 3l)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(2\gamma^2 e + 2\gamma^4 e - \frac{7}{4}\gamma^2 e^3\right)\sin(2g+l)\\
&+\left(-\frac{13}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{13}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{259}{24}\gamma^2 e^4\right)\sin(2g+4l)\\
&+\left(-\frac{3}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{3}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{1}{8}\gamma^2 e^4\right)\sin 2g\\
&-\frac{59}{12}\gamma^2 e^3 \sin(2g+5l)\\
&-\frac{1}{12}\gamma^2 e^3 \sin(2g-l)\\
&-\frac{115}{16}\gamma^2 e^4 \sin(2g+6l)\\
&-\frac{1}{24}\gamma^2 e^4 \sin(2g-2l)\\
&+\left(\frac{1}{2}\gamma^4 + \gamma^6 - 8\gamma^4 e^2\right)\sin(4g+4l)\\
&+2\gamma^4 e \sin(4g+5l)\\
&-2\gamma^4 e \sin(4g+3l)\\
&+\frac{21}{4}\gamma^4 e^2 \sin(4g+6l)\\
&+\frac{11}{4}\gamma^4 e^2 \sin(4g+2l)\\
&-\frac{1}{3}\gamma^6 \sin(6g+6l).
\end{aligned}
$$

17. Le même triangle sphérique rectangle, qui a servi à trouver la valeur de V, fournit encore la relation suivante :

$$\sin \mathrm{U} = \sin v \sin i.$$

Si l'on introduit γ dans cette relation, et qu'on développe la valeur de U en série, en négligeant les termes du septième ordre et des ordres supérieurs par rapport à γ, on trouve

$$\mathrm{U} = \left(2\gamma - \frac{1}{4}\gamma^5\right)\sin v - \left(\frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{4}\gamma^5\right)\sin 3v + \frac{3}{20}\gamma^5 \sin 5v.$$

En remplaçant enfin ν par sa valeur (14), développant et s'arrêtant aux termes du sixième ordre par rapport à e et γ, on obtient l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
(18)\quad \mathrm{U} = & \left(2\gamma - 2\gamma e^2 - \frac{1}{4}\gamma^5 + \frac{7}{32}\gamma e^4\right) \sin(g+l) \\
& + \left(2\gamma e - \frac{5}{2}\gamma e^3 - \frac{1}{4}\gamma^5 e + \frac{17}{24}\gamma e^5\right) \sin(g+2l) \\
& + \left(-2\gamma e + \frac{1}{4}\gamma^5 e\right) \sin g \\
& + \left(\frac{9}{4}\gamma e^2 - \frac{27}{8}\gamma e^4\right) \sin(g+3l) \\
& + \left(-\frac{1}{4}\gamma e^2 + \frac{1}{24}\gamma e^4\right) \sin(g-l) \\
& + \left(\frac{8}{3}\gamma e^3 - \frac{14}{3}\gamma e^5\right) \sin(g+4l) \\
& + \left(-\frac{1}{6}\gamma e^3 + \frac{1}{24}\gamma e^5\right) \sin(g-2l) \\
& + \frac{625}{192}\gamma e^4 \sin(g+5l) \\
& - \frac{9}{64}\gamma e^4 \sin(g-3l) \\
& + \frac{81}{20}\gamma e^5 \sin(g+6l) \\
& - \frac{2}{15}\gamma e^5 \sin(g-4l) \\
& + \left(-\frac{1}{3}\gamma^3 - \frac{1}{4}\gamma^5 + 3\gamma^3 e^2\right) \sin(3g+3l) \\
& + \left(-\gamma^3 e - \frac{3}{4}\gamma^5 e + \frac{13}{2}\gamma^3 e^3\right) \sin(3g+4l) \\
& + \left(\gamma^3 e + \frac{3}{4}\gamma^5 e - \frac{11}{4}\gamma^3 e^3\right) \sin(3g+2l)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{17}{8}\gamma^3 e^2 \sin(3g + 5l)$$

$$-\frac{7}{8}\gamma^3 e^2 \sin(3g + l)$$

$$-\frac{47}{12}\gamma^3 e^3 \sin(3g + 6l)$$

$$+\frac{1}{6}\gamma^3 e^3 \sin 3g$$

$$+\frac{3}{20}\gamma^5 \sin(5g + 5l)$$

$$+\frac{3}{4}\gamma^5 e \sin(5g + 6l)$$

$$-\frac{3}{4}\gamma^5 e \sin(5g + 4l).$$

CHAPITRE III.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE ADOPTÉE POUR EFFECTUER L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

18. Nous avons vu, dans le premier chapitre, comment la recherche des valeurs des coordonnées de la Lune en fonction du temps est ramenée à l'intégration des équations différentielles (9). Lorsque nous serons parvenus à intégrer ces équations (9), il ne nous restera plus qu'à substituer les valeurs de L, G, H, l, g, h, ou bien, ce qui est la même chose, celles de a, e, γ, l, g, h dans les formules (16), (17), (18), qui donnent la parallaxe, la longitude et la latitude de la Lune en fonction de ces quantités.

Nous avons dit (n° **9**) que, pour simplifier, nous ferions abstraction tout d'abord : 1° des inégalités séculaires et périodiques des éléments elliptiques du Soleil ; 2° d'une portion très-petite de la valeur de m'. Nous prendrons donc, pour la fonction R qui entre dans les équations (9), la valeur obtenue au n° **14**, et nous y supposerons l' égal à $n't +$ une constante, et a', e', h', g' indépendants du temps. L'intégration des équations (9), en y attribuant à R la valeur qui vient d'être indiquée, constitue à peu près toute la difficulté de la détermination des formules qui représentent le mouvement de la Lune. L'objet de ce chapitre est d'exposer la méthode que nous avons adoptée pour vaincre cette difficulté.

Nous commencerons par établir les principes sur lesquels cette méthode est basée.

19. Soit à intégrer le système des équations

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dL}{dt}=\frac{dR}{dl}, &&\frac{dG}{dt}=\frac{dR}{dg}, &&\frac{dH}{dt}=\frac{dR}{dh},\\ &\frac{dl}{dt}=-\frac{dR}{dL}, &&\frac{dg}{dt}=-\frac{dR}{dG}, &&\frac{dh}{dt}=-\frac{dR}{dH}, \end{aligned}\right.$$

qui sont exactement les mêmes que les équations (9), si ce n'est que R, au lieu de représenter la fonction dont le développement est donné au n° **14**, représente une fonction quelconque de même forme. R sera donc supposé renfermer : 1° un terme dépendant seulement de L, G, H ; 2° une série de termes dont chacun renferme le cosinus d'un angle formé par la réunion de divers multiples des angles l, g, h, l', g', h', ce cosinus ayant pour coefficient une fonction de L, G, H. On doit y regarder l' comme égal à $n't +$ une constante, et n', g', h' comme constants.

Prenons séparément, dans R, le premier terme qui ne dépend que de L, G, H, et que nous désignerons par $-$ B, avec un des termes suivants qui pourra être représenté par

$$-\mathrm{A}\cos(il+i'g+i''h+i'''l'+q),$$

q se composant de multiples de h' et de g', et A étant une fonction de L, G, H. Soit enfin R_1 la somme des autres termes de R, en sorte qu'on aura

$$(20)\qquad \mathrm{R}=-\mathrm{A}\cos(il+i'g+i''h+i'''l'+q)-\mathrm{B}+\mathrm{R}_1.$$

Cela posé, nous allons d'abord intégrer les équations (19), en y supposant R_1 nul, c'est-à-dire en ne prenant pour R que la valeur

$$R = -A\cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q) - B; \tag{21}$$

puis nous nous servirons des intégrales ainsi obtenues pour trouver celles des mêmes équations (19) en ne supposant plus que R_1 soit nul.

20. En remplaçant R par la valeur (21), les équations à intégrer deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= Ai\sin(il + i'g + i''h + i'''l' + q),\\
\frac{dG}{dt} &= Ai'\sin(il + i'g + i''h + i'''l' + q),\\
\frac{dH}{dt} &= Ai''\sin(il + i'g + i''h + i'''l' + q),\\
\frac{dl}{dt} &= \frac{dA}{dL}\cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \frac{dB}{dL},\\
\frac{dg}{dt} &= \frac{dA}{dG}\cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \frac{dB}{dG},\\
\frac{dh}{dt} &= \frac{dA}{dH}\cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \frac{dB}{dH}.
\end{aligned}\right. \tag{22}$$

On déduit de là immédiatement

$$\frac{1}{i}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{i'}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{i''}\frac{dH}{dt};$$

en sorte que, si l'on pose

$$L = i\Theta,$$

on aura

$$G = i'\Theta + (G), \qquad H = i''\Theta + (H);$$

(G) et (H) étant deux constantes arbitraires. Substituons ces valeurs à la place de L, G, H, dans A et B, et ces deux quantités ne dépendront plus que de la seule variable Θ. Posons en outre

$$il + i'g + i''h + i'''l' + q = \theta,$$

et nous trouverons

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{i}\,\frac{dL}{dl} = A \sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(i\,\frac{dA}{dL} + i'\,\frac{dA}{dG} + i''\,\frac{dA}{dH}\right)\cos\theta + i\,\frac{dB}{dL} + i'\,\frac{dB}{dG} + i''\,\frac{dB}{dH} + i'''n'.$$

Si nous remarquons enfin que

$$\frac{dA}{d\Theta} = i\,\frac{dA}{dL} + i'\,\frac{dA}{dG} + i''\,\frac{dA}{dH},$$

$$\frac{dB}{d\Theta} = i\,\frac{dB}{dL} + i'\,\frac{dB}{dG} + i''\,\frac{dB}{dH},$$

et que nous désignions par B_1 la somme $B + i'''n'\Theta$, nous obtiendrons les équations suivantes pour déterminer Θ et θ,

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= A \sin\theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{dA}{d\Theta}\cos\theta + \frac{dB_1}{d\Theta}. \end{aligned}\right.$$

En multipliant la première équation par $d\theta$, la seconde par $d\Theta$, et retranchant, on trouve une relation qui s'intègre immédiatement et qui donne

$$A\cos\theta + B_1 = C.$$

Si l'on tire de là la valeur de θ, qu'on la substitue dans la première des équations (23), et qu'on intègre, on trouvera encore

$$t + c = \int \frac{d\Theta}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}}.$$

C et c sont deux constantes arbitraires; nous supposerons que l'intégrale qui entre dans le second membre de la dernière équation soit prise de manière à être nulle lorsque θ est nul, c'est-à-dire lorsque l'on a $A = C - B_1$.

Au moyen des deux relations que nous venons d'obtenir, Θ et θ sont connus en fonction de t; les relations

$$L = i\Theta, \quad G = i'\Theta + (G), \quad H = i''\Theta + (H),$$

établies précédemment, feront donc connaître L, G, H aussi en fonction de t : reste à déterminer les valeurs de l, g, h. Or la première des équations (23), combinée avec une des intégrales de ces mêmes équations, donne

$$dt = \frac{d\Theta}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}}.$$

En remplaçant dt par cette valeur dans les deux dernières équations (22), y mettant $\frac{C - B_1}{A}$ au lieu de

$$\cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q),$$

et remarquant que, d'après la manière dont (G) et (H) sont introduits dans A et B, on a

$$\frac{dA}{dG} = \frac{dA}{d(G)}, \quad \frac{dA}{dH} = \frac{dA}{d(H)}, \quad \frac{dB}{dG} = \frac{dB_1}{d(G)}, \quad \frac{dB}{dH} = \frac{dB_1}{d(H)},$$

on trouvera, après avoir intégré,

$$g = \int \frac{\dfrac{dA}{d(G)}\,\dfrac{C - B_1}{A} + \dfrac{dB_1}{d(G)}}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}}\, d\Theta + (g),$$

$$h = \int \frac{\dfrac{dA}{d(H)}\,\dfrac{C - B_1}{A} + \dfrac{dB_1}{d(H)}}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}}\, d\Theta + (h).$$

(g) et (h) sont deux constantes arbitraires, et les intégrales sont prises de manière à être nulles lorsque Θ satisfait à la relation

$$A = C - B_1.$$

Enfin l se déterminera en fonction de t au moyen de la formule

$$il + i'g + i''h + i'''l' + q = \theta,$$

qui a servi à définir θ.

21. En réunissant les diverses équations qui ont été obtenues dans le numéro précédent, et qui représentent les intégrales des équations (22), on aura

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
&L = i\Theta,\\
&G = i'\Theta + (G),\\
&H = i''\Theta + (H),\\
&il + i'g + i''h + i'''l' + q = \theta,\\
&A\cos\theta + B_1 = C,\\
&t + c = \int \frac{d\Theta}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}},\\
&g = \int \frac{\dfrac{dA}{d(G)}\,\dfrac{C - B_1}{A} + \dfrac{dB_1}{d(G)}}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}}\, d\Theta + (g).\\
&h = \int \frac{\dfrac{dA}{d(H)}\,\dfrac{C - B_1}{A} + \dfrac{dB_1}{d(H)}}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}}\, d\Theta + (h).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine Θ et θ de ces huit équations, il en restera six qui détermineront L, G, H, l, g, h en fonction de t et des six constantes arbitraires C, (G), (H), c, (g), (h). Les quantités A et B_1 qui entrent dans les trois dernières équations, sous le signe $\int$, doivent être considérées comme des fonctions de Θ, (G), (H), obtenues par la substitution des valeurs de L, G, H, données par les trois premières équations (24) dans A et $B + i''' n' \Theta$.

Les trois dernières équations (24) peuvent être écrites plus simplement de la manière suivante. Soit

$$K = \int \operatorname{arc\,cos} \frac{C - B_1}{A} \, d\Theta;$$

l'intégrale étant prise depuis la valeur de Θ pour laquelle on a

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{C - B_1}{A} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, pour laquelle on a

$$A = C - B_1,$$

jusqu'à une valeur quelconque de Θ. K sera une fonction entièrement déterminée de Θ, C, (G), (H). La limite inférieure de la valeur de K est une fonction de C, (G), (H); mais comme l'élément de l'intégrale est nul ,en même temps que Θ est égal à cette limite inférieure, on aura simplement

$$\frac{dK}{dC} = -\int \frac{d\Theta}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}},$$

$$\frac{dK}{d(G)} = \int \frac{\dfrac{dA}{d(G)} \dfrac{C - B_1}{A} + \dfrac{dB_1}{d(G)}}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}} \, d\Theta,$$

$$\frac{dK}{d(H)} = \int \frac{\dfrac{dA}{d(H)} \dfrac{C - B_1}{A} + \dfrac{dB_1}{d(H)}}{\sqrt{A^2 - (C - B_1)^2}} \, d\Theta.$$

On pourra donc remplacer les trois dernières équations (24) par celles-ci :

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} t+c &= -\frac{dK}{dC},\\ g &= \frac{dK}{d(G)}+(g),\\ h &= \frac{dK}{d(H)}+(h). \end{aligned}\right.$$

22. Maintenant que nous avons intégré complétement les équations (19), en prenant pour R la valeur (21), c'est-à-dire en supposant R_1 nul, nous allons chercher à déduire des intégrales trouvées celles des mêmes équations (19) dans lesquelles on ne supposera plus R_1 nul. Pour cela, nous conserverons entre L, G, H, l, g, h et C, (G), (H), c, (g), (h) les relations qui résultent des équations (24) et (25) ; seulement nous n'y regarderons plus C, (G), (H), c, (g), (h) comme des constantes, mais comme de nouvelles variables. Ces relations, qui étaient les intégrales des équations (19), dans le cas où nous supposions R_1 nul, ne seront plus que des formules de transformation servant à remplacer les six variables L, G, H, l, g, h par les six autres C, (G), (H), c, (g), (h).

En mettant pour R, dans les équations (19), la valeur donnée par la formule (20), ces quatre équations deviennent

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= Ai\sin(il+i'g+i''h+i'''l'+q)+\frac{dR_1}{dl},\\ \frac{dG}{dt} &= Ai'\sin(il+i'g+i''h+i'''l'+q)+\frac{dR_1}{dg},\\ \frac{dH}{dt} &= Ai''\sin(il+i'g+i''h+i'''l'+q)+\frac{dR_1}{dh},\\ \frac{dl}{dt} &= \frac{dA}{dL}\cos(il+i'g+i''h+i'''l'+q)+\frac{dB}{dL}-\frac{dR_1}{dL},\\ \frac{dg}{dt} &= \frac{dA}{dG}\cos(il+i'g+i''h+i'''l'+q)+\frac{dB}{dG}-\frac{dR_1}{dG},\\ \frac{dh}{dt} &= \frac{dA}{dH}\cos(il+i'g+i''h+i'''l'+q)+\frac{dB}{dH}-\frac{dR_1}{dH}. \end{aligned}\right.$$

Pour y introduire les nouvelles variables C, (G), (H), c, (g), (h), nous remarquerons que, d'après les équations (24) et (25), on a d'abord

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} = {} & \left(\frac{dA}{dL}\cos\theta + \frac{dB_1}{dL}\right)\frac{dL}{dt} + \left(\frac{dA}{dG}\cos\theta + \frac{dB_1}{dG}\right)\frac{dG}{dt} + \left(\frac{dA}{dH}\cos\theta + \frac{dB_1}{dH}\right)\frac{dH}{dt} \\ & - A\sin\theta\left(i\frac{dl}{dt} + i'\frac{dg}{dt} + i''\frac{dh}{dt} + i'''n'\right),\end{aligned}$$

$$\frac{d(G)}{dt} = \frac{dG}{dt} - \frac{i'}{i}\frac{dL}{dt},$$

$$\frac{d(H)}{dt} = \frac{dH}{dt} - \frac{i''}{i}\frac{dL}{dt},$$

$$\frac{dc}{dt} = -1 - \frac{d^2K}{dC\,d\Theta}\cdot\frac{1}{i}\frac{dL}{dt} - \frac{d^2K}{dC^2}\frac{dC}{dt} - \frac{d^2K}{dC\,d(G)}\frac{d(G)}{dt} - \frac{d^2K}{dC\,d(H)}\frac{d(H)}{dt},$$

$$\frac{d(g)}{dt} = \frac{dg}{dt} - \frac{d^2K}{d(G)\,d\Theta}\cdot\frac{1}{i}\frac{dL}{dt} - \frac{d^2K}{d(G)\,dC}\frac{dC}{dt} - \frac{d^2K}{d(G)^2}\frac{d(G)}{dt} - \frac{d^2K}{d(G)\,d(H)}\frac{d(H)}{dt},$$

$$\frac{d(h)}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{d^2K}{d(H)\,d\Theta}\cdot\frac{1}{i}\frac{dL}{dt} - \frac{d^2K}{d(H)\,dC}\frac{dC}{dt} - \frac{d^2K}{d(H)\,d(G)}\frac{d(G)}{dt} - \frac{d^2K}{d(H)^2}\frac{d(H)}{dt}.$$

Si l'on remplace, dans ces formules, $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$, $\frac{dH}{dt}$, $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$ et $\frac{dh}{dt}$, par leurs valeurs (26), et que l'on remarque que, R_1 étant regardé comme fonction des nouvelles variables C, (G), (H), c, (g), (h), on a

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dC} = {} & \frac{dR_1}{dL}\left(\frac{dA}{dL}\cos\theta + \frac{dB_1}{dL}\right) - \frac{i'}{i}\frac{dR_1}{d(G)} - \frac{i''}{i}\frac{dR_1}{d(H)} \\ & - \frac{dR_1}{dc}\left[\frac{1}{i}\frac{d^2K}{dC\,d\Theta} + \frac{d^2K}{dC^2}\left(\frac{dA}{dL}\cos\theta + \frac{dB_1}{dL}\right) - \frac{i'}{i}\frac{d^2K}{dC\,d(G)} - \frac{i''}{i}\frac{d^2K}{dC\,d(H)}\right] \\ & - \frac{dR_1}{d(g)}\left[\frac{1}{i}\frac{d^2K}{d(G)\,d\Theta} + \frac{d^2K}{d(G)\,dC}\left(\frac{dA}{dL}\cos\theta + \frac{dB_1}{dL}\right)\right. \\ & \qquad\qquad \left. - \frac{i'}{i}\frac{d^2K}{d(G)^2} - \frac{i''}{i}\frac{d^2K}{d(G)\,d(H)}\right] \\ & - \frac{dR_1}{d(h)}\left[\frac{1}{i}\frac{d^2K}{d(H)\,d\Theta} + \frac{d^2K}{d(H)\,dC}\left(\frac{dA}{dL}\cos\theta + \frac{dB_1}{dL}\right)\right. \\ & \qquad\qquad \left. - \frac{i'}{i}\frac{d^2K}{d(H)\,d(G)} - \frac{i''}{i}\frac{d^2K}{d(H)^2}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dG} = \frac{dR_1}{dC}\left(\frac{dA}{dG}\cos\theta + \frac{dB_1}{dG}\right) + \frac{dR_1}{d(G)} &- \frac{dR_1}{dc}\left[\frac{d^2K}{dC^2}\left(\frac{dA}{dG}\cos\theta + \frac{dB_1}{dG}\right) + \frac{d^2K}{dC\,d(G)}\right] \\ &- \frac{dR_1}{d(g)}\left[\frac{d^2K}{d(G)\,dC}\left(\frac{dA}{dG}\cos\theta + \frac{dB_1}{dG}\right) + \frac{d^2K}{d(G)^2}\right] \\ &- \frac{dR_1}{d(h)}\left[\frac{d^2K}{d(H)\,dC}\left(\frac{dA}{dG}\cos\theta + \frac{dB_1}{dG}\right) + \frac{d^2K}{d(H)\,d(G)}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dH} = \frac{dR_1}{dC}\left(\frac{dA}{dH}\cos\theta + \frac{dB_1}{dH}\right) + \frac{dR_1}{d(H)} &- \frac{dR_1}{dc}\left[\frac{d^2K}{dC^2}\left(\frac{dA}{dH}\cos\theta + \frac{dB_1}{dH}\right) + \frac{d^2K}{dC\,d(H)}\right] \\ &- \frac{dR_1}{d(g)}\left[\frac{d^2K}{d(G)\,dC}\left(\frac{dA}{dH}\cos\theta + \frac{dB_1}{dH}\right) + \frac{d^2K}{d(G)\,d(H)}\right] \\ &- \frac{dR_1}{d(h)}\left[\frac{d^2K}{d(H)\,dC}\left(\frac{dA}{dH}\cos\theta + \frac{dB_1}{dH}\right) + \frac{d^2K}{d(H)^2}\right],\end{aligned}$$

$$\frac{dR_1}{dl} = -\,i\,A\sin\theta\left(\frac{dR_1}{dC} - \frac{dR_1}{dc}\,\frac{d^2K}{dC^2} - \frac{dR_1}{d(g)}\,\frac{d^2K}{d(G)\,dC} - \frac{dR_1}{d(h)}\,\frac{d^2K}{d(H)\,dC}\right),$$

$$\frac{dR_1}{dg} = -\,i'A\sin\theta\left(\frac{dR_1}{dC} - \frac{dR_1}{dc}\,\frac{d^2K}{dC^2} - \frac{dR_1}{d(g)}\,\frac{d^2K}{d(G)\,dC} - \frac{dR_1}{d(h)}\,\frac{d^2K}{d(H)\,dC}\right) + \frac{dR_1}{d(g)},$$

$$\frac{dR_1}{dh} = -\,i''A\sin\theta\left(\frac{dR_1}{dC} - \frac{dR_1}{dc}\,\frac{d^2K}{dC^2} - \frac{dR_1}{d(g)}\,\frac{d^2K}{d(G)\,dC} - \frac{dR_1}{d(h)}\,\frac{d^2K}{d(H)\,dC}\right) + \frac{dR_1}{d(h)};$$

et que l'on a aussi

$$\frac{dB_1}{dL} = \frac{dB}{dL} + \frac{i'''}{i}\,n', \qquad \frac{dB_1}{dG} = \frac{dB}{dG}, \qquad \frac{dB_1}{dH} = \frac{dB}{dH},$$

$$\frac{d^2K}{dC\,d\Theta} = \frac{-1}{A\sin\theta}, \qquad \frac{d^2K}{d(G)\,d\Theta} = \frac{\dfrac{dA}{dG}\cos\theta + \dfrac{dB}{dG}}{A\sin\theta}, \qquad \frac{d^2K}{d(H)\,d\Theta} = \frac{\dfrac{dA}{dH}\cos\theta + \dfrac{dB}{dH}}{A\sin\theta},$$

on trouvera les équations suivantes, pour déterminer les nouvelles variables C, (G), (H), c, (g), (h) :

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dC}{dt}=\frac{dR_1}{dc}, && \frac{d(G)}{dt}=\frac{dR_1}{d(g)}, && \frac{d(H)}{dt}=\frac{dR_1}{d(h)},\\ &\frac{dc}{dt}=-\frac{dR_1}{dC}, && \frac{d(g)}{dt}=-\frac{dR_1}{d(G)}, && \frac{d(h)}{dt}=-\frac{dR_1}{d(H)}. \end{aligned}\right.$$

L'intégration des équations (19) est donc ramenée à celle des équations (27), qui n'en diffèrent que parce que R est remplacé par R_1.

23. Si l'on fait attention à la manière dont R_1 est composé au moyen des nouvelles variables C, (G), (H), c, (g), (h), on verra que cette fonction ne se présente pas sous la même forme que R.

En effet, la cinquième et la sixième des équations (24) donneront pour θ et Θ des valeurs de la forme suivante :

$$\theta=\theta_0(t+c)+\theta_1\sin\theta_0(t+c)+\theta_2\sin 2\theta_0(t+c)+\theta_3\sin 3\theta_0(t+c)+\ldots,$$
$$\Theta=\Theta_0+\Theta_1\cos\theta_0(t+c)+\Theta_2\cos 2\theta_0(t+c)+\Theta_3\cos 3\theta_0(t+c)+\ldots;$$

comme on peut s'en assurer facilement, en faisant attention que θ, $\frac{d\Theta}{dt}$ et $t+c$ doivent être nuls en même temps (n° **20**). Les nombreuses applications que nous aurons à faire de tout ce qui précède le mettront d'ailleurs complétement en évidence. Dans ces formules, θ_0, θ_1, θ_2, ..., Θ_0, Θ_1, Θ_2, ..., sont des fonctions de C, (G), (H).

En remplaçant Θ par sa valeur en fonction de $t+c$ dans les deux dernières équations (24), on trouvera

$$g=(g)+g_0(t+c)+g_1\sin\theta_0(t+c)+g_2\sin 2\theta_0(t+c)+g_3\sin 3\theta_0(t+c)+\ldots,$$
$$h=(h)+h_0(t+c)+h_1\sin\theta_0(t+c)+h_2\sin 2\theta_0(t+c)+h_3\sin 3\theta_0(t+c)+\ldots,$$

g_0, g_1, g_2, ..., h_0, h_1, h_2, ..., étant encore des fonctions de C, (G), (H). l se déduira de la quatrième des équations (24), qui donnera

$$l = \frac{1}{i}\theta_0(t+c) - \frac{i'}{i}[(g) + g_0(t+c)] - \frac{i''}{i}[(h) + h_0(t+c)] - \frac{i'''}{i}l' - \frac{q}{i}$$
$$+ l_1 \sin\theta_0(t+c) + l_2 \sin 2\theta_0(t+c) + l_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

l_1, l_2, l_3, ... étant déterminés par les relations

$$\begin{gathered} i l_1 + i' g_1 + i'' h_1 = \theta_1, \\ i l_2 + i' g_2 + i'' h_2 = \theta_2, \\ i l_3 + i' g_3 + i'' h_3 = \theta_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Enfin, d'après les trois premières des équations (24), on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \mathrm{L}_0 + \mathrm{L}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{L}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{L}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots, \\ \mathrm{G} &= \mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{G}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{G}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots, \\ \mathrm{H} &= \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{H}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{H}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots, \end{aligned}$$

L_0, L_1, L_2, ..., G_0, G_1, G_2, ..., H_0, H_1, H_2, ... étant déterminés par les relations

$$\begin{array}{llll} \mathrm{L}_0 = i\Theta_0, & \mathrm{L}_1 = i\Theta_1, & \mathrm{L}_2 = i\Theta_2, & \ldots, \\ \mathrm{G}_0 = i'\Theta_0 + (\mathrm{G}), & \mathrm{G}_1 = i'\Theta_1, & \mathrm{G}_2 = i'\Theta_2, & \ldots, \\ \mathrm{H}_0 = i''\Theta_0 + (\mathrm{H}), & \mathrm{H}_1 = i''\Theta_1, & \mathrm{H}_2 = i''\Theta_2, & \ldots. \end{array}$$

R_1 se compose (n° **19**) d'une série de termes dont chacun est égal à une fonction de L, G, H, multipliée par le cosinus d'un angle formé par la réunion de divers multiples de l, g, h, l', g', h'. Si l'on y remplace L, G, H, l, g, h par les valeurs qui viennent d'être indiquées, il en résultera pour R_1 une valeur formée d'une série de termes périodiques; chaque terme aura pour coefficient une fonction de C, (G), (H), et les angles soumis aux signes cosinus seront formés par la réunion de divers multiples de

$$\theta_0(t+c), \quad (g)+g_0(t+c), \quad (h)+h_0(t+c), \quad l', g', h'.$$

La valeur de R_1, qui doit être mise dans les équations (27), diffère donc de celle de R [équations (19)], quant à la forme, en ce que dans R les variables L, G, H n'entrent que dans les coefficients des cosinus; tandis que dans R_1 les variables C, (G), (H) entrent à la fois dans les coefficients des cosinus et dans les angles soumis aux signes cosinus, puisque θ_0, g_0 et h_0 sont fonctions de ces trois variables.

Cette circonstance, que nous venons de signaler dans R_1, de renfermer C, (G), (H) sous les signes cosinus, donne lieu à un grave inconvénient que nous avons déjà rencontré dans les équations (7) du chapitre I : trois des équations (27) étant formées des dérivées partielles de R_1, relatives à C, (G), (H), le temps t se trouvera, dans ces équations, en dehors des signes sinus ou cosinus. Pour faire disparaître cet inconvénient et ramener en même temps R_1 à avoir une composition entièrement semblable à celle de R, nous allons effectuer un changement de variables analogue à celui du n° 5.

24. Mais avant de définir les nouvelles variables que nous substituerons à C, (G), (H), c, (g), (h), nous avons besoin de démontrer un lemme qui consiste en ce que

$$\frac{1}{\theta_0}, \quad -\frac{g_0}{\theta_0}, \quad -\frac{h_0}{\theta_0},$$

sont les dérivées partielles d'une fonction de C, (G), (H), prises par rapport à chacune de ces variables.

Nous avons posé (nº **21**)

$$K = \int \text{arc cos} \frac{C - B_1}{A} d\Theta;$$

cette quantité K est une fonction de Θ, C, (G), (H). Si l'on y remplace Θ par sa valeur en fonction de $t+c$, arc cos $\frac{C-B_1}{A}$ deviendra égal à θ, et l'on aura, d'après les valeurs de θ et Θ, écrites dans le numéro précédent,

$$K = -\frac{1}{2}\theta_0(\theta_1\Theta_1 + 2\theta_2\Theta_2 + 3\theta_3\Theta_3 + \ldots)(t+c) + \ldots.$$

Nous ne mettons ici en évidence, dans la valeur de K, que le terme proportionnel à $t+c$, parce que c'est le seul dont nous allons avoir besoin.

En remplaçant Θ par sa valeur en fonction de $t+c$, K devient une fonction de $t+c$, C, (G), (H); désignons par

$$\left(\frac{dK}{dC}\right), \quad \left(\frac{dK}{d(G)}\right), \quad \left(\frac{dK}{d(H)}\right),$$

les dérivées partielles de cette fonction relatives à C, (G), (H), tandis que

$$\frac{dK}{dC}, \quad \frac{dK}{d(G)}, \quad \frac{dK}{d(H)},$$

désigneront, comme précédemment, les dérivées partielles de K prises relativement aux mêmes variables, avant que Θ y ait été remplacé par sa valeur en $t+c$. Il est clair qu'on a

$$\left(\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{C}}\right)=\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{C}}+\frac{d\mathrm{K}}{d\Theta}\frac{d\Theta}{d\mathrm{C}},$$

$$\left(\frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{G})}\right)=\frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{G})}+\frac{d\mathrm{K}}{d\Theta}\frac{d\Theta}{d(\mathrm{G})},$$

$$\left(\frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{H})}\right)=\frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{H})}+\frac{d\mathrm{K}}{d\Theta}\frac{d\Theta}{d(\mathrm{H})};$$

et, par suite, en remarquant que $\frac{d\mathrm{K}}{d\Theta}=\theta$,

$$\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{C}}=\left(\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{C}}\right)-\theta\frac{d\Theta}{d\mathrm{C}},$$

$$\frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{G})}=\left(\frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{G})}\right)-\theta\frac{d\Theta}{d(\mathrm{G})},$$

$$\frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{H})}=\left(\frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{H})}\right)-\theta\frac{d\Theta}{d(\mathrm{H})}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de $\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{C}}, \frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{G})}, \frac{d\mathrm{K}}{d(\mathrm{H})}$, dans les équations (25), qu'on remplace K, θ et Θ par leurs valeurs en $t+c$, et qu'on identifie les termes proportionnels à $t+c$, dans les deux membres de chacune de ces équations, on trouvera

$$1=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{d[\theta_0(\theta_1\Theta_1+2\theta_2\Theta_2+3\theta_3\Theta_3+\ldots)]}{d\mathrm{C}}\\+\theta_0\frac{d\Theta_0}{d\mathrm{C}}-\frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1+2\theta_2\Theta_2+3\theta_3\Theta_3+\ldots)\frac{d\theta_0}{d\mathrm{C}},\end{array}\right.$$

$$g_0=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\frac{d[\theta_0(\theta_1\Theta_1+2\theta_2\Theta_2+3\theta_3\Theta_3+\ldots)]}{d(\mathrm{G})}\\-\theta_0\frac{d\Theta_0}{d(\mathrm{G})}+\frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1+2\theta_2\Theta_2+3\theta_3\Theta_3+\ldots)\frac{d\theta_0}{d(\mathrm{G})},\end{array}\right.$$

$$h_0=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\frac{d[\theta_0(\theta_1\Theta_1+2\theta_2\Theta_2+3\theta_3\Theta_3+\ldots)]}{d(\mathrm{H})}\\-\theta_0\frac{d\Theta_0}{d(\mathrm{H})}+\frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1+2\theta_2\Theta_2+3\theta_3\Theta_3+\ldots)\frac{d\theta_0}{d(\mathrm{H})};\end{array}\right.$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\frac{1}{\theta_0} = \frac{d\left[\Theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1 + 2\theta_2\Theta_2 + 3\theta_3\Theta_3 + \ldots)\right]}{d\mathrm{C}},$$

$$-\frac{g_0}{\theta_0} = \frac{d\left[\Theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1 + 2\theta_2\Theta_2 + 3\theta_3\Theta_3 + \ldots)\right]}{d(\mathrm{G})},$$

$$-\frac{h_0}{\theta_0} = \frac{d\left[\Theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1 + 2\theta_2\Theta_2 + 3\theta_3\Theta_3 + \ldots)\right]}{d(\mathrm{H})};$$

donc les trois quantités

$$\frac{1}{\theta_0}, \qquad -\frac{g_0}{\theta_0}, \qquad -\frac{h_0}{\theta_0}$$

sont les dérivées partielles de la fonction

$$\Theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1 + 2\theta_2\Theta_2 + 3\theta_3\Theta_3 + \ldots),$$

prises relativement aux trois variables C, (G), (H). C. Q. F. D.

25. Posons maintenant

$$\mathrm{A} = \Theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1 + 2\theta_2\Theta_2 + 3\theta_3\Theta_3 + \ldots); \tag{28}$$

et aussi

$$\lambda = \theta_0(t + c), \qquad \chi = (g) + g_0(t + c), \qquad \eta = (h) + h_0(t + c). \tag{29}$$

D'après ce qui vient d'être établi, nous aurons d'abord

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt} = \frac{1}{\theta_0}\frac{d\mathrm{C}}{dt} - \frac{g_0}{\theta_0}\frac{d(\mathrm{G})}{dt} - \frac{h_0}{\theta_0}\frac{d(\mathrm{H})}{dt};$$

et ensuite

$$\frac{d\lambda}{dt} = \theta_0\left(1 + \frac{dc}{dt}\right) + (t+c)\left(\frac{d\theta_0}{dC}\,\frac{dC}{dt} + \frac{d\theta_0}{d(G)}\,\frac{d(G)}{dt} + \frac{d\theta_0}{d(H)}\,\frac{d(H)}{dt}\right),$$

$$\frac{d\varkappa}{dt} = \frac{d(g)}{dt} + g_0\left(1 + \frac{dc}{dt}\right) + (t+c)\left(\frac{dg_0}{dC}\,\frac{dC}{dt} + \frac{dg_0}{d(G)}\,\frac{d(G)}{dt} + \frac{dg_0}{d(H)}\,\frac{d(H)}{dt}\right),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d(h)}{dt} + h_0\left(1 + \frac{dc}{dt}\right) + (t+c)\left(\frac{dh_0}{dC}\,\frac{dC}{dt} + \frac{dh_0}{d(G)}\,\frac{d(G)}{dt} + \frac{dh_0}{d(H)}\,\frac{d(H)}{dt}\right).$$

En supposant que les variables C, (G), (H), c, (g), (h) aient été remplacées, dans R_1, par les nouvelles variables Λ, (G), (H), λ, $\varkappa$, η, et en désignant par $\left(\frac{dR_1}{d(G)}\right)$ et $\left(\frac{dR_1}{d(H)}\right)$ les dérivées partielles de cette fonction, par rapport à (G) et (H), après cette substitution, nous aurons aussi

$$\frac{dR_1}{dC} = \frac{dR_1}{d\Lambda}\,\frac{1}{\theta_0} + \frac{dR_1}{d\lambda}(t+c)\frac{d\theta_0}{dC} + \frac{dR_1}{d\varkappa}(t+c)\frac{dg_0}{dC} + \frac{dR_1}{d\eta}(t+c)\frac{dh_0}{dC},$$

$$\frac{dR_1}{d(G)} = \left(\frac{dR_1}{d(G)}\right) - \frac{dR_1}{d\Lambda}\,\frac{g_0}{\theta_0} + \frac{dR_1}{d\lambda}(t+c)\frac{d\theta_0}{d(G)} + \frac{dR_1}{d\varkappa}(t+c)\frac{dg_0}{d(G)} + \frac{dR_1}{d\eta}(t+c)\frac{dh_0}{d(G)},$$

$$\frac{dR_1}{d(H)} = \left(\frac{dR_1}{d(H)}\right) - \frac{dR_1}{d\Lambda}\,\frac{h_0}{\theta_0} + \frac{dR_1}{d\lambda}(t+c)\frac{d\theta_0}{d(H)} + \frac{dR_1}{d\varkappa}(t+c)\frac{dg_0}{d(H)} + \frac{dR_1}{d\eta}(t+c)\frac{dh_0}{d(H)},$$

$$\frac{dR_1}{dc} = \frac{dR_1}{d\lambda}\theta_0 + \frac{dR_1}{d\varkappa}g_0 + \frac{dR_1}{d\eta}h_0,$$

$$\frac{dR_1}{d(g)} = \frac{dR_1}{d\varkappa},$$

$$\frac{dR_1}{d(h)} = \frac{dR_1}{d\eta}.$$

En nous servant de ces diverses relations, et remarquant que, d'après le numéro précédent, on a

$$\frac{d.\frac{1}{\theta_0}}{d(G)} = -\frac{d.\frac{g_0}{\theta_0}}{dC}, \qquad \frac{d.\frac{1}{\theta_0}}{d(H)} = -\frac{d.\frac{h_0}{\theta_0}}{dC}, \qquad \frac{d.\frac{g_0}{\theta_0}}{d(H)} = \frac{d.\frac{h_0}{\theta_0}}{d(G)},$$

ou bien, en développant,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_0 \frac{dg_0}{dC} = \frac{d\theta_0}{d(G)} + g_0 \frac{d\theta_0}{dC},\\ &\theta_0 \frac{dh_0}{dC} = \frac{d\theta_0}{d(H)} + h_0 \frac{d\theta_0}{dC},\\ &\theta_0 \left(\frac{dh_0}{d(G)} - \frac{dg_0}{d(H)}\right) = h_0 \frac{d\theta_0}{d(G)} - g_0 \frac{d\theta_0}{d(H)}; \end{aligned}\right.$$

nous trouverons que les équations (27), destinées à déterminer les valeurs des variables C, (G), (H), c, (g), (h), doivent être remplacées par les suivantes, dans lesquelles les variables sont Λ, (G), (H), λ, $\varkappa$, η :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{dR_1}{d\lambda}, && \frac{d(G)}{dt} = \frac{dR_1}{d\varkappa}, && \frac{d(H)}{dt} = \frac{dR_1}{d\eta},\\ &\frac{d\lambda}{dt} = \theta_0 - \frac{dR_1}{d\Lambda}, && \frac{d\varkappa}{dt} = g_0 - \frac{dR_1}{d(G)}, && \frac{d\eta}{dt} = h_0 - \frac{dR_1}{d(H)}. \end{aligned}\right.$$

Pour simplifier, et aussi pour établir la symétrie des formules, nous avons supprimé les parenthèses de $\left(\frac{dR_1}{d(G)}\right)$ et $\left(\frac{dR_1}{d(H)}\right)$.

26. Les équations (31), auxquelles nous venons de parvenir, n'ont pas tout à fait la même forme que les équations (27) qu'elles sont destinées à remplacer ; mais il nous sera bien facile de les ramener à cette forme. Pour cela, démontrons d'abord que θ_0,

g_0, h_0 sont les dérivées partielles d'une même fonction prise par rapport aux variables Λ, (G), (H).

Nous avons trouvé, dans le n° 24, qu'on a

$$\frac{1}{\theta_0} = \frac{d\Lambda}{dC}, \qquad -\frac{g_0}{\theta_0} = \frac{d\Lambda}{d(G)}, \qquad -\frac{h_0}{\theta_0} = \frac{d\Lambda}{d(H)},$$

Λ étant donné par la relation

$$(28) \qquad \Lambda = \Theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1\Theta_1 + 2\theta_2\Theta_2 + 3\theta_3\Theta_3 + \ldots).$$

Nous pouvons regarder cette équation (28) comme déterminant C en fonction de Λ, (G), (H). Supposons que nous en ayons tiré la valeur de C et que nous remettions cette valeur à la place de C dans l'équation (28) elle-même, son second membre se réduira identiquement à Λ. Cette équation étant devenue ainsi une identité, différentions-la successivement par rapport à Λ, (G), (H), et nous aurons, en nous rappelant que les dérivées partielles du second membre par rapport à C, (G), (H), avant la substitution, sont $\frac{1}{\theta_0}$, $-\frac{g_0}{\theta_0}$, $-\frac{h_0}{\theta_0}$,

$$1 = \frac{1}{\theta_0}\frac{dC}{d\Lambda},$$

$$0 = \frac{1}{\theta_0}\frac{dC}{d(G)} - \frac{g_0}{\theta_0},$$

$$0 = \frac{1}{\theta_0}\frac{dC}{d(H)} - \frac{h_0}{\theta_0};$$

donc on a

$$\theta_0 = \frac{dC}{d\Lambda}, \qquad g_0 = \frac{dC}{d(G)}, \qquad h_0 = \frac{dC}{d(H)}.$$

D'après cela, si nous posons

$$R_1 - C = R',$$

les équations (29) se trouveront remplacées par les suivantes :

$$(32)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\Lambda}{dt} = \dfrac{dR'}{d\lambda}, & \dfrac{d(G)}{dt} = \dfrac{dR'}{d\varkappa}, & \dfrac{d(H)}{dt} = \dfrac{dR'}{d\eta}, \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{dR'}{d\Lambda}, & \dfrac{d\varkappa}{dt} = -\dfrac{dR'}{d(G)}, & \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{dR'}{d(H)}. \end{array} \right.$$

Nous sommes donc ramenés encore à des équations (32) pareilles aux équations (19) d'où nous sommes partis ; mais cette fois on n'y trouve plus le défaut que présentaient les équations (27) : la substitution des variables λ, $\varkappa$, η, aux quantités

$$\theta_0(t+c), \qquad (g)+g_0(t+c), \qquad (h)+h_0(t+c),$$

fait que le temps t ne sort plus des signes sinus ou cosinus dans les équations différentielles. Les transformations opérées dans les n^{os} **5** et **6** du chapitre I ne sont évidemment qu'un cas particulier de celles que nous venons d'effectuer pour passer des équations (27) aux équations (32).

Nous pouvons remarquer que C est le résultat de la substitution des valeurs des anciennes variables L, G, H, l, g, h en fonction des nouvelles variables Λ, (G), (H), λ, $\varkappa$, η, dans la quantité

$$A\cos\theta + B + i''' n'\Theta$$

(n° **21**), et que, par conséquent, R' s'obtiendra en faisant cette même substitution dans

$$R_1 - A\cos\theta - B - i''' n'\Theta,$$

c'est-à-dire dans l'ancienne fonction R (nº **19**) diminuée de $i''' n' \Theta$.

27. D'après tout ce qui vient d'être dit, l'intégration des équations (19) est ramenée à celle des équations (32), qui non-seulement sont de même forme que les premières, mais encore renferment une fonction R' de même nature que la fonction R contenue dans ces premières équations. Les variables L, G, H, l, g, h des équations (19) sont liées aux variables Λ, (G), (H), $\lambda, \varkappa, \nu$ des équations (32), par les douze relations (24), (28) et (29), entre lesquelles on doit éliminer les six quantités θ, Θ, C, c, (g), (h), pour obtenir les formules destinées à effectuer le changement des variables.

Mais nous ne nous en tiendrons pas encore là, et nous chercherons à remplacer les variables Λ, (G), (H), $\lambda, \varkappa, \nu$, auxquelles nous sommes parvenus, par d'autres qui aient des rapports plus intimes avec les variables primitives L, G, H, l, g, h. Si nous supposions que le coefficient A du terme périodique, que nous avons conservé seul dans la valeur (21) de R, devînt égal à zéro, nous verrions par les relations (24), (28) et (29) que les nouveaux angles variables $\lambda, \varkappa, \nu$ se confondraient, non pas avec les anciens angles l, g, h, mais avec les angles $il + i'g + i''h + i'''l' + q$, g, h; et de même les nouvelles variables Λ, (G), (H) se réduiraient, non pas à L, G, H, mais bien à $\frac{1}{i}L$, $G - \frac{i'}{i}L$, $H - \frac{i''}{i}L$. Nous allons faire une dernière transformation, afin d'arriver à des variables définitives qui soient telles, qu'elles ne diffèrent des anciennes variables L, G, H, l, g, h que par des quantités dépendantes du terme périodique $-A\cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q)$, considéré spécialement dans la fonction R; et qu'elles se confondent avec ces anciennes variables, dans le cas où l'on suppose que A se réduit à zéro. Pour cela, nous poserons

$$(33)\qquad\left\{\begin{aligned} &\Lambda' = i\,\Lambda, \qquad G' = i'\,\Lambda + (G), \qquad H' = i''\,\Lambda + (H),\\ &\lambda' = \frac{1}{i}\,\lambda - \frac{i'}{i}\,\varkappa - \frac{i''}{i}\,\eta - \frac{i'''}{i}\,l' - \frac{q}{i}. \end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir qu'en vertu des équations (32) les six variables Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η seront déterminées par les équations suivantes :

$$(34)\qquad\left\{\begin{aligned} &\frac{d\Lambda'}{dt} = \frac{dR'}{d\lambda'}, \qquad \frac{dG'}{dt} = \frac{dR'}{d\varkappa}, \qquad \frac{dH'}{dt} = \frac{dR'}{d\eta},\\ &\frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{dR'}{d\Lambda'} - \frac{i'''}{i}\,n', \qquad \frac{d\varkappa}{dt} = -\frac{dR'}{dG'}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dR'}{dH'}. \end{aligned}\right.$$

Nous n'avons plus maintenant qu'à poser

$$R' + \frac{i'''}{i}\,n'\,\Lambda' = R'',$$

et nous arriverons aux équations

$$(35)\qquad\left\{\begin{aligned} &\frac{d\Lambda'}{dt} = \frac{dR''}{d\lambda'}, \qquad \frac{dG'}{dt} = \frac{dR''}{d\varkappa}, \qquad \frac{dH'}{dt} = \frac{dR''}{d\eta},\\ &\frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{dR''}{d\Lambda'}, \qquad \frac{d\varkappa}{dt} = -\frac{dR''}{dG'}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dR''}{dH'}, \end{aligned}\right.$$

qui, comme les équations (27) et (32), sont encore de même forme que les équations (19) d'où nous sommes partis.

Il est aisé de reconnaître que le dernier changement de variables que nous venons d'effectuer nous a conduits au but que nous voulions atteindre, car les variables Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η, auxquelles se rapportent les équations (35), se réduisent bien aux variables primitives L, G, H, l, g, h quand on introduit l'hypothèse $A = 0$ dans les relations qui servent à passer des unes aux autres.

La fonction R″, dont les dérivées partielles entrent dans les équations (35), a pour valeur

$$R' + \frac{i'''}{i} n' \Lambda',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$R' + i''' n' \Lambda,$$

ou bien enfin

$$R' + i''' n' \left[\Theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1 \Theta_1 + 2\theta_2 \Theta_2 + 3\theta_3 \Theta_3 + \ldots)\right].$$

Mais R′ n'est autre chose que le résultat auquel on parvient en remplaçant les variables primitives L, G, H, l, g, h par leurs valeurs en fonction des nouvelles variables dans l'ancienne fonction R diminuée de $i''' n' \Theta$ (nº **26**) : donc R″ s'obtiendra en faisant cette même substitution dans

$$R - i''' n' \Theta + i''' n' \left[\Theta_0 + \frac{1}{2}(\theta_1 \Theta_1 + 2\theta_2 \Theta_2 + 3\theta_3 \Theta_3 + \ldots)\right].$$

Si nous nous reportons aux formules du nº **23**, nous verrons que nos variables définitives Λ′, G′, H′ sont déterminées par les équations

$$\Lambda' = L_0 + \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + 3\theta_3 L_3 + \ldots),$$

$$G' = G_0 + \frac{1}{2}(\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + 3\theta_3 G_3 + \ldots),$$

$$H' = H_0 + \frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + 3\theta_3 H_3 + \ldots),$$

dont les deux dernières peuvent être remplacées par les suivantes :

$$G' = G_0 + \frac{i'}{i}\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\,\theta_2 L_2 + 3\,\theta_3 L_3 + \ldots),$$

$$H' = H_0 + \frac{i''}{i}\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\,\theta_2 L_2 + 3\,\theta_3 L_3 + \ldots).$$

Nous verrons aussi que λ' n'est autre chose que le terme non périodique

$$\frac{1}{i}\theta_0(t+c) - \frac{i'}{i}[(g) + g_0(t+c)] - \frac{i''}{i}[(h) + h_0(t+c)] - \frac{i'''}{i}l' - \frac{q}{i}$$

de la valeur de l, de même que $\varkappa$, ν étaient déjà les termes non périodiques

$$(g) + g_0(t+c), \qquad (h) + h_0(t+c)$$

des valeurs de g et h. Il en résulte que $\theta_0(t+c)$ se trouvera remplacé par $i\lambda' + i'\varkappa + i''\nu + i'''l' + q$. Quant à la fonction R″, elle sera donnée par l'équation

$$R'' = R - \frac{i'''}{i}n'[L_1\cos\theta_0(t+c) + L_2\cos 2\,\theta_0(t+c) + L_3\cos 3\,\theta_0(t+c) + \ldots]$$
$$+ \frac{i'''}{i}n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\,\theta_2 L_2 + 3\,\theta_3 L_3 + \ldots),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(36) \qquad R'' = R - \frac{i'''}{i}n'(L - L_0) + \frac{i'''}{i}n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\,\theta_2 L_2 + 3\,\theta_3 L_3 + \ldots),$$

R étant la fonction complète de la formule (20). Bien entendu que, dans cette valeur de R″, les variables primitives L, G, H,

l, g, h doivent être remplacées par leurs valeurs en fonction des nouvelles variables Λ', G', H', λ, $\varkappa$, n.

28. Résumons tout ce qui précède, depuis le n° **19** inclusivement.

Nous avions à intégrer les équations (19), dans lesquelles R se composait, 1° d'un terme $-$ B dépendant seulement de L, G, H; 2° d'une série de termes dont chacun est égal à une fonction de L, G, H multipliée par le cosinus d'un angle formé par la réunion de divers multiples de l, g, h, l', g', h'.

Nous avons intégré ces équations en ne prenant pour R que le terme $-$ B, avec un seul des autres termes que nous avons désigné par $-\text{A}\cos(il + i'g + i''h + i''l' + q)$: les intégrales sont données par les équations suivantes déduites des équations (24) :

$$\theta = \theta_0(t+c) + \theta_1 \sin\theta_0(t+c) + \theta_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \theta_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 \cos\theta_0(t+c) + \Theta_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \Theta_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$g = (g) + g_0(t+c) + g_1 \sin\theta_0(t+c) + g_2 \sin 2\theta_0(t+c) + g_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$h = (h) + h_0(t+c) + h_1 \sin\theta_0(t+c) + h_2 \sin 2\theta_0(t+c) + h_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\begin{aligned} l = \frac{1}{i}\theta_0(t+c) - \frac{i'}{i}[(g) + g_0(t+c)] - \frac{i''}{i}[(h) + h_0(t+c)] - \frac{i'''}{i}l' - \frac{q}{i} \\ + l_1 \sin\theta_0(t+c) + l_2 \sin 2\theta_0(t+c) + l_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\text{L} = \text{L}_0 + \text{L}_1 \cos\theta_0(t+c) + \text{L}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \text{L}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\text{G} = \text{G}_0 + \text{G}_1 \cos\theta_0(t+c) + \text{G}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \text{G}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\text{H} = \text{H}_0 + \text{H}_1 \cos\theta_0(t+c) + \text{H}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \text{H}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots.$$

Enfin, par une série de transformations, nous avons été conduits à poser

$$\varkappa = (g) + g_0(t+c),$$
$$\eta = (h) + h_0(t+c),$$
$$\lambda' = \frac{1}{i}\,\theta_0(t+c) - \frac{i'}{i}\varkappa - \frac{i''}{i}\eta - \frac{i'''}{i}l' - \frac{q}{i},$$
$$\Lambda' = \mathrm{L}_0 + \frac{1}{2}(\theta_1\,\mathrm{L}_1 + 2\,\theta_2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\theta_3\,\mathrm{L}_3 + \ldots),$$
$$\mathrm{G}' = \mathrm{G}_0 + \frac{i'}{i}\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\,\mathrm{L}_1 + 2\,\theta_2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\theta_3\,\mathrm{L}_3 + \ldots),$$
$$\mathrm{H}' = \mathrm{H}_0 + \frac{i''}{i}\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\,\mathrm{L}_1 + 2\,\theta_2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\theta_3\,\mathrm{L}_3 + \ldots),$$

de sorte que, par l'élimination de c, C, (g), (G), (h), (H) entre ces relations et les précédentes, les variables L, G, H, l, g, h peuvent être exprimées en fonction de Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η; et nous avons vu que la recherche des valeurs de L, G, H, l, g, h qui satisfont aux équations (19) est ramenée à celle des valeurs de Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η qui satisfont aux équations de même forme (35). La fonction R'' qui entre dans ces équations (35) se déduit d'ailleurs de la fonction R des équations (19) par la relation

$$(36)\qquad \mathrm{R}'' = \mathrm{R} - \frac{i'''}{i}n'(\mathrm{L} - \mathrm{L}_0) + \frac{i'''}{i}n'.\frac{1}{2}(\theta_1\,\mathrm{L}_1 + 2\,\theta_2\,\mathrm{L}_2 + 3\,\theta_3\,\mathrm{L}_3 + \ldots)$$

dont le second membre doit être exprimé en fonction des nouvelles variables Λ, G', H', λ', $\varkappa$, η.

Il est aisé de voir que, par cette substitution des variables Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η aux variables L, G, H, l, g, h, on s'est débarrassé du terme périodique

$$-\mathrm{A}\cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q)$$

de la fonction R, c'est-à-dire que ce terme n'entre plus dans la nouvelle fonction R'' qui remplace R. En effet, si nous nous reportons à ce qui a été dit précédemment, nous verrons que l'on a

$$R'' = R - i''' n' \Theta + i''' n' \left[\Theta_0 + \frac{1}{2} (\theta_1 \Theta_1 + 2 \theta_2 \Theta_2 + 3 \theta_3 \Theta_3 + \,..)\right],$$

ou bien, en mettant en évidence les termes que nous avons considérés d'abord seuls dans R,

$$\begin{aligned} R'' = & - A \cos(il + i' g + i'' h + i''' l' + q) - B - i''' n' \Theta \\ & + R_1 + i''' n' \left[\Theta_0 + \frac{1}{2} (\theta_1 \Theta_1 + 2 \theta_2 \Theta_2 + 3 \theta_3 \Theta_3 + \ldots)\right]. \end{aligned}$$

Or, d'après les équations (24), la première ligne de cette valeur de R'' se réduit à $-C$, quand on y remplace L, G, H, l, g, h par leurs valeurs en fonction de C, (G), (H), c, (g), (h); cette même portion de R'' doit donc se réduire simplement à une fonction de Λ', G', H', c'est-à-dire à la valeur de $-C$ exprimée au moyen de ces trois quantités, quand on substitue les variables définitives Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η aux variables primitives L, G, H, l, g, h. Ainsi la fonction R'' ne contient plus que les termes périodiques de R_1, modifiés bien entendu par suite de la substitution des nouvelles variables aux anciennes.

Remarquons en passant que la réduction de

$$- A \cos(il + i' g + i'' h + i''' l' + q) - B - i''' n' \Theta$$

à une simple fonction de Λ', G', H', quand on y remplace les variables L, G, H, l, g, h par leurs valeurs en fonction des variables Λ', G', H', λ', $\varkappa$, η, fournit une importante vérification des formules qui servent à passer des premières variables aux dernières. Cette vérification, consistant en ce que tous les termes périodiques qui proviennent des diverses portions de

$$-\mathrm{A}\cos(il+i'g+i''h+i'''l'+q)-\mathrm{B}-i'''n'\Theta$$

se détruisent mutuellement, se fera de même quand, au lieu de cette quantité, on considérera la suivante

$$-\mathrm{A}\cos(il+i'g+i''h+i'''l'+q)-\mathrm{B}-\frac{i'''}{i}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0),$$

qui n'en diffère que par le terme non périodique $-i'''n'\Theta_0$, et l'on aura naturellement l'occasion de l'effectuer quand on cherchera la valeur de la fonction R'' au moyen de la formule (36).

29. Il n'est pas indispensable que les variables primitives L, G, H, l, g, h soient exprimées explicitement en fonction des nouvelles variables Λ', G', H', λ', $\varkappa$, ν, pour effectuer la transformation dont nous nous occupons. On pourra, par exemple, exprimer L, G, H, l, g, h en fonction des angles λ', $\varkappa$, ν, et de trois autres quantités a, e, γ, liées à Λ', G', H' par des relations connues.

D'un autre côté, après que le changement de variables aura été effectué, rien ne nous empêchera de mettre les lettres L, G, H, l, g, h à la place des lettres Λ', G', H', λ', $\varkappa$, ν, qui désignent les nouvelles variables, et de même de nommer R la nouvelle fonction R''.

Au moyen de ces remarques, nous pouvons poser la règle suivante :

Règle. — Si l'on a intégré les équations différentielles (19) en réduisant R aux deux termes

$$-\mathrm{A}\cos(il+i'g+i''h+i'''l'+q)-\mathrm{B},$$

et si l'on a trouvé de cette manière (θ désignant l'angle $il + i'g + i''h + i'''l' + q$)

$$\theta = \theta_0(t+c) + \theta_1 \sin\theta_0(t+c) + \theta_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \theta_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$g = (g) + g_0(t+c) + g_1 \sin\theta_0(t+c) + g_2 \sin 2\theta_0(t+c) + g_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$h = (h) + h_0(t+c) + h_1 \sin\theta_0(t+c) + h_2 \sin 2\theta_0(t+c) + h_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\begin{aligned} l = {} & \frac{1}{i}\theta_0(t+c) - \frac{i'}{i}[(g) + g_0(t+c)] - \frac{i''}{i}[(h) + h_0(t+c)] - \frac{i'''}{i}l' - \frac{q}{i} \\ & + l_1 \sin\theta_0(t+c) + l_2 \sin 2\theta_0(t+c) + l_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_0 + \mathrm{L}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{L}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{L}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{G}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{G}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{H}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{H}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

c, (g), (h) étant trois constantes, et $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, g_0, g_1, g_2, \ldots, h_0, h_1, h_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots, \mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{G}_0, \mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots$ étant des fonctions connues de trois autres constantes a, e, γ, on pourra remplacer

$$\begin{aligned} \mathrm{L} \text{ par } & \mathrm{L}_0 + \mathrm{L}_1 \cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q) \\ & + \mathrm{L}_2 \cos 2(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{G} \text{ par } & \mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1 \cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q) \\ & + \mathrm{G}_2 \cos 2(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{H} \text{ par } & \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 \cos(il + i'g + i''h + i'''l' + q) \\ & + \mathrm{H}_2 \cos 2(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l \text{ par } & l + l_1 \sin(il + i'g + i''h + i'''l' + q) \\ & + l_2 \sin 2(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \text{ par } & g + g_1 \sin(il + i'g + i''h + i'''l' + q) \\ & + g_2 \sin 2(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \text{ par } & h + h_1 \sin(il + i'g + i''h + i'''l' + q) \\ & + h_2 \sin 2(il + i'g + i''h + i'''l' + q) + \ldots, \end{aligned}$$

et l'on aura, pour déterminer les nouvelles variables l, g, h,

a, e, γ, précisément les mêmes équations (19), pourvu, 1° qu'on y mette pour R la fonction qu'on obtient quand on fait les substitutions précédentes dans l'ancienne fonction R (complète) de ces équations (19) augmentée de la quantité

$$-\frac{i'''}{i} n' (L - L_0) + \frac{i'''}{i} n' . \frac{1}{2} (\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + 3\theta_3 L_3 + \ldots);$$

2° qu'on regarde les nouvelles variables L, G, H comme liées à a, e, γ par les relations

$$L = L_0 + \frac{1}{2} (\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + 3\theta_3 L_3 + \ldots),$$

$$G = G_0 + \frac{i'}{i} . \frac{1}{2} (\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + 3\theta_3 L_3 + \ldots),$$

$$H = H_0 + \frac{i''}{i} . \frac{1}{2} (\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + 3\theta_3 L_3 + \ldots).$$

Le changement de variables ainsi opéré aura pour effet principal de faire disparaître le terme périodique

$$- A \cos (il + i'g + i''h + i'''l' + q)$$

de la fonction R, sans qu'il y ait rien de changé dans la forme des équations différentielles à intégrer.

30. Tout ce qui précède peut s'appliquer, sans aucune modification, quand un ou plusieurs des nombres i', i'', i''' se réduisent à zéro ; mais il n'en serait pas de même si i devenait nul. Pour voir comment on devra opérer dans ce cas particulier, en supposant toutefois que i, i', i'' ne soient pas nuls tous trois en même temps, il suffit de remarquer que, en raison de la symétrie de nos équations différentielles (19), rien ne nous empêche de faire jouer à G, g et i' ou bien à H, h et i'', les rôles que nous avons fait jouer à L, l et i. Nous pourrons donc appliquer la règle du numéro précédent, en y changeant i en i', i' en i, L en G, G en L, l en g, g en l, ou bien en y changeant i en i'', i'' en i, L en H, H en L, l en h, h en l. Pour plus de commodité, nous allons énoncer ce que devient cette règle pour chacun des cas qui peuvent se présenter quand i est nul, et que i' et i'' ne sont pas tous deux nuls en même temps que i.

I$^{\text{er}}$ Cas. i nul, i' différent de zéro.

Règle. — Si l'on a intégré les équations différentielles (19) en réduisant R aux deux termes

$$-\mathrm{A}\cos(i'g + i''h + i'''l' + q) - \mathrm{B},$$

et si l'on a trouvé de cette manière (θ désignant l'angle $i'g + i''h + i'''l' + q$)

$$\theta = \theta_0(t+c) + \theta_1 \sin\theta_0(t+c) + \theta_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \theta_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$l = (l) + l_0(t+c) + l_1 \sin\theta_0(t+c) + l_2 \sin 2\theta_0(t+c) + l_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$h = (h) + h_0(t+c) + h_1 \sin\theta_0(t+c) + h_2 \sin 2\theta_0(t+c) + h_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\begin{aligned} g = \frac{1}{i'}\theta_0(t+c) - \frac{i''}{i'}[(h) + h_0(t+c)] - \frac{i'''}{i'}l' - \frac{q}{i'} \\ + g_1 \sin\theta_0(t+c) + g_2 \sin 2\theta_0(t+c) + g_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_0,$$

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{G}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{G}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{H}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{H}_3 \cos 3\theta_0(t+c) + \ldots,$$

c, (l), (h) étant trois constantes, et $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, l_0, l_1, l_2, \ldots,$

$h_0, h_1, h_2, \dots, g_1, g_2, \dots, L_0, G_0, G_1, G_2, \dots, H_0, H_1, H_2, \dots$ étant des fonctions connues de trois autres constantes a, e, γ, on pourra remplacer

L par L_0,

G par $G_0 + G_1 \cos(i'g + i''h + i'''l' + q) + G_2 \cos 2(i'g + i''h + i'''l' + q) + \dots$,

H par $H_0 + H_1 \cos(i'g + i''h + i'''l' + q) + H_2 \cos 2(i'g + i''h + i'''l' + q) + \dots$,

l par $l + l_1 \sin(i'g + i''h + i'''l' + q) + l_2 \sin 2(i'g + i''h + i'''l' + q) + \dots$,

g par $g + g_1 \sin(i'g + i''h + i'''l' + q) + g_2 \sin 2(i'g + i''h + i'''l' + q) + \dots$,

h par $h + h_1 \sin(i'g + i''h + i'''l' + q) + h_2 \sin 2(i'g + i''h + i'''l' + q) + \dots$

et l'on aura pour déterminer les nouvelles variables l, g, h, a, e, γ, précisément les mêmes équations (19), pourvu, 1° qu'on y mette pour R la fonction qu'on obtient quand on fait les substitutions précédentes dans l'ancienne fonction R (complète) de ces équations (19) augmentée de la quantité

$$-\frac{i'''}{i'} n' (G - G_0) + \frac{i'''}{i'} n' . \frac{1}{2} (\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + 3\theta_3 G_3 + \dots);$$

2° qu'on regarde les nouvelles variables L, G, H comme liées à a, e, γ par les relations

$$L = L_0,$$

$$G = G_0 + \frac{1}{2} (\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + 3\theta_3 G_3 + \dots),$$

$$H = H_0 + \frac{i''}{i'} \cdot \frac{1}{2} (\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + 3\theta_3 G_3 + \dots).$$

II^e CAS. i et i' nuls, i'' différent de zéro.

RÈGLE. — Si l'on a intégré les équations différentielles (19) en réduisant R aux deux termes

$$- A \cos(i''h + i'''l' + q) - B,$$

et si l'on a trouvé de cette manière (θ désignant l'angle $i''h + i'''l' + q$)

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_0(t+c) + \theta_1 \sin\theta_0(t+c) + \theta_2 \sin 2\theta_0(t+c) + \theta_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,\\
l &= (l) + l_0(t+c) + l_1 \sin\theta_0(t+c) + l_2 \sin 2\theta_0(t+c) + l_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,\\
g &= (g) + g_0(t+c) + g_1 \sin\theta_0(t+c) + g_2 \sin 2\theta_0(t+c) + g_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,\\
h &= \frac{1}{i''}\theta_0(t+c) - \frac{i'''}{i''}l' - \frac{q}{i''}\\
&\qquad + h_1 \sin\theta_0(t+c) + h_2 \sin 2\theta_0(t+c) + h_3 \sin 3\theta_0(t+c) + \ldots,\\
\mathrm{L} &= \mathrm{L}_0.\\
\mathrm{G} &= \mathrm{G}_0,\\
\mathrm{H} &= \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 \cos\theta_0(t+c) + \mathrm{H}_2 \cos 2\theta_0(t+c) + \mathrm{H}_3 \cos 3\theta_0((t+c) + \ldots,
\end{aligned}$$

c, (l), (g) étant trois constantes, et $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, l_0, l_1, l_2, \ldots, g_0, g_1, g_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots, \mathrm{L}_0, \mathrm{G}_0, \mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots$ étant des fonctions connues de trois autres constantes a, e, γ, on pourra remplacer

L par L_0,

G par G_0,

H par $\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 \cos(i''h + i'''l' + q) + \mathrm{H}_2 \cos 2(i''h + i'''l' + q) + \ldots,$

l par $l + l_1 \sin(i''h + i'''l' + q) + l_2 \sin 2(i''h + i'''l' + q) + \ldots,$

g par $g + g_1 \sin(i''h + i'''l' + q) + g_2 \sin 2(i''h + i'''l' + q) + \ldots,$

h par $h + h_1 \sin(i''h + i'''l' + q) + h_2 \sin 2(i''h + i'''l' + q) + \ldots,$

et l'on aura pour déterminer les nouvelles variables l, g, h, a, e, γ, précisément les mêmes équations (19), pourvu, 1° qu'on y mette pour R la fonction qu'on obtient quand on fait les substitutions précédentes dans l'ancienne fonction R (complète) de ces équations (19) augmentée de la quantité

$$-\frac{i'''}{i''}n'(\mathrm{H} - \mathrm{H}_0) + \frac{i'''}{i''}n'.\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{H}_1 + 2\theta_2\mathrm{H}_2 + 3\theta_3\mathrm{H}_3 + \ldots);$$

2° qu'on regarde les nouvelles variables L, G, H comme liées à a, e, γ par les relations

$$L = L_0,$$
$$G = G_0.$$
$$H = H_0 + \frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + 3\theta_3 H_3 + \ldots).$$

51. Il nous reste à examiner le cas où i, i' et i'' sont tous trois nuls, c'est-à-dire le cas où l'angle soumis au signe cosinus, dans le terme périodique que nous voulons faire disparaître de R, se réduit à $i'''l' + q$. Mais pour cela il est nécessaire de modifier complétement la théorie précédente, qui n'a pu être établie qu'en admettant implicitement qu'un au moins des nombres i, i', i'' n'était pas nul.

Dans les applications que nous aurons à faire de tout ceci, i, i' et i'' ne seront nuls en même temps qu'autant que q sera aussi nul; de sorte que l'angle dont il vient d'être question se réduira à un multiple de l'. D'un autre côté, nous pourrons alors, sans amener aucune complication, prendre en même temps dans R les divers termes périodiques dont les arguments (angles soumis aux signes cosinus) sont des multiples différents de l', au lieu de ne considérer qu'un seul de ces termes à la fois. Nous supposerons donc d'abord que R se réduise à

$$R = -A\cos l' - A'\cos 2l' - A''\cos 3l' - \ldots \tag{37}$$

Nous ne mettons pas, dans cette valeur réduite de R, le terme non périodique que nous avons précédemment désigné par $-B$, parce que cela ne nous serait pas utile ici; de sorte que, en représentant par R_1 l'ensemble des termes périodiques de R non compris dans la formule (37), joints au terme non périodique $-B$, nous aurons pour la valeur complète de R

$$(38)\qquad R = -A\cos l' + A'\cos 2l' - A''\cos 3l' - \ldots + R_1.$$

Cela posé, si nous remplaçons R par sa valeur (37) dans les équations (19), nous trouverons

$$\frac{dL}{dt} = 0,\qquad \frac{dG}{dt} = 0,\qquad \frac{dH}{dt} = 0,$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dA}{dL}\cos l' + \frac{dA'}{dL}\cos 2l' + \frac{dA''}{dL}\cos 3l' + \ldots,$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{dA}{dG}\cos l' + \frac{dA'}{dG}\cos 2l' + \frac{dA''}{dG}\cos 3l' + \ldots,$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dA}{dH}\cos l' + \frac{dA'}{dH}\cos 2l' + \frac{dA''}{dH}\cos 3l' + \ldots;$$

d'où, en intégrant,

$$L = \text{const.},\qquad G = \text{const.},\qquad H = \text{const.},$$

$$l = (l) + \frac{1}{n'}\frac{dA}{dL}\sin l' + \frac{1}{2n'}\frac{dA'}{dL}\sin 2l' + \frac{1}{3n'}\frac{dA''}{dL}\sin 3l' + \ldots,$$

$$g = (g) + \frac{1}{n'}\frac{dA}{dG}\sin l' + \frac{1}{2n'}\frac{dA'}{dG}\sin 2l' + \frac{1}{3n'}\frac{dA''}{dG}\sin 3l' + \ldots,$$

$$h = (h) + \frac{1}{n'}\frac{dA}{dH}\sin l' + \frac{1}{2n'}\frac{dA'}{dH}\sin 2l' + \frac{1}{3n'}\frac{dA''}{dH}\sin 3l' + \ldots.$$

Revenons maintenant à la valeur complète (38) de R. Si nous la substituons dans les équations (19) et que nous remplacions en même temps les trois variables l, g, h par les trois autres (l), (g), (h), liées aux premières par les relations qui viennent d'être écrites, nous trouverons, après des calculs faciles à refaire,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dR_1}{d(l)},\qquad \frac{dG}{dt} = \frac{dR_1}{d(g)},\qquad \frac{dH}{dt} = \frac{dR_1}{d(h)},$$

$$\frac{d(l)}{dL} = -\left(\frac{dR_1}{dL}\right),\qquad \frac{d(g)}{dt} = -\left(\frac{dR_1}{dG}\right),\qquad \frac{d(h)}{dt} = -\left(\frac{dR_1}{dH}\right).$$

Dans ces équations, $\left(\frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{L}}\right)$, $\left(\frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{G}}\right)$, $\left(\frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{H}}\right)$ représentent les dérivées partielles de R_1 prises par rapport à L, G, H, après que l, g, h ont été remplacés dans cette fonction par leurs valeurs en (l), (g), (h). De là il est facile de déduire la règle suivante :

Règle. — Si l'on a intégré les équations différentielles (19) en réduisant R aux seuls termes périodiques

$$-\mathrm{A}\cos l' - \mathrm{A}'\cos 2l' - \mathrm{A}'''\cos 3l' - \ldots,$$

et si l'on a trouvé ainsi

$$\begin{aligned}
l &= (l) + l_1 \sin l' + l_2 \sin 2l' + l_3 \sin 3l' + \ldots,\\
g &= (g) + g_1 \sin l' + g_2 \sin 2l' + g_3 \sin 3l' + \ldots,\\
h &= (h) + h_1 \sin l' + h_2 \sin 2l' + h_3 \sin 3l' + \ldots,
\end{aligned}$$

L, G, H étant d'ailleurs constants, on pourra remplacer

$$\begin{aligned}
&l \text{ par } l + l_1 \sin l' + l_2 \sin 2l' + l_3 \sin 3l' + \ldots,\\
&g \text{ par } g + g \sin l' + g_2 \sin 2l' + g_3 \sin 3l' + \ldots,\\
&h \text{ par } h + h_1 \sin l' + h_2 \sin 2l' + h_3 \sin 3l' + \ldots,
\end{aligned}$$

et l'on aura pour déterminer les nouvelles variables, l, g, h, jointes aux anciennes variables L, G, H, que l'on conserve, précisément les mêmes équations (19), pourvu qu'on y mette pour R la fonction qu'un obtient quand on fait les substitutions précédentes dans l'ancienne fonction R de ces équations (19), après en avoir ôté les termes

$$-\mathrm{A}\cos l' - \mathrm{A}'\cos 2l' - \mathrm{A}''\cos 3l' - \ldots.$$

32. Tout ce qui précède, depuis le n° **19** inclusivement, constitue, à proprement parler, la base de la méthode d'intégration que nous avons adoptée, pour déduire des équations (9) les expressions des coordonnées de la Lune en fonction du temps. Il nous sera bien facile maintenant de faire voir en quoi consiste cette méthode.

Nous avons donné au n° **14** du chapitre II le développement de la fonction perturbatrice R, dont les dérivées partielles entrent dans les équations (9). Cette fonction est de même nature que la fonction plus générale que nous avons désignée par la même lettre R dans les équations (19). Supposons que, au lieu du développement entier du n° **14**, nous ne prenions pour R que le terme non périodique avec le premier terme périodique qui renferme le cosinus de l'angle $2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l'$; avec cette valeur réduite de R, nous pourrons intégrer complétement les équations (9), comme nous l'avons vu au n° **20**. Cela fait, nous n'aurons qu'à appliquer la règle donnée au n° **29**, et alors, par le changement de variables qui y est indiqué, nous ramènerons l'intégration des équations (9) à celle d'équations toutes pareilles, si ce n'est que R ne contiendra plus le terme en

$$\cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l').$$

Dans la nouvelle valeur de R, les termes restants seront un peu différents de ce qu'ils étaient avant le changement de variables; de nouveaux termes auront même pu s'y introduire: mais on n'en aura pas moins fait un pas vers la solution de la question dont on s'occupe, parce que les nouveaux termes introduits dans R seront nécessairement petits par rapport à celui qu'on aura fait disparaître. (Les différents termes périodiques du développement du n° **14** sont du premier ordre par rapport à la force perturbatrice du Soleil; tandis que les termes périodiques introduits dans R par le changement de variables dont il vient d'être question, provenant de la combinaison du terme qu'on veut faire disparaître avec les termes restants, sont du second ordre par rapport à cette force perturbatrice.)

Après avoir effectué l'opération qui vient d'être indiquée, et qui a eu pour résultat de faire disparaître de R le terme en $\cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l')$, nous pourrons en faire une seconde pour faire disparaître de R un autre terme périodique, puis nous en ferons une troisième destinée à enlever de R un troisième terme périodique, et ainsi de suite. En continuant de cette manière, il est clair que nous pourrons parvenir à faire disparaître de R tous les termes périodiques capables d'introduire des inégalités sensibles dans les valeurs des coordonnées de la Lune. Dès lors la question sera ramenée à l'intégration d'équations différentielles identiques de forme avec les équations (9), et dans lesquelles R sera réduit à être simplement une fonction de L, G, H. Ces dernières équations s'intégreront immédiatement, et fourniront, pour les variables l, g, h, des valeurs proportionnelles au temps, tandis que L, G, H seront constants.

Si nous appliquions littéralement ce qui vient d'être dit, nous aurions à faire un nombre extrêmement grand de ces opérations successives, dont chacune a pour objet de faire disparaître un des termes périodiques de R; mais il n'est pas nécessaire qu'il en soit ainsi. Pour le faire comprendre et pour donner une idée nette de la marche qu'on doit suivre en réalité, nous allons examiner tout d'abord les différents termes du développement de la fonction R, afin de nous rendre compte du degré d'importance de chacun d'eux, au point de vue des inégalités qu'il peut introduire dans les expressions des coordonnées de la Lune.

33. Pour juger du degré d'importance d'un terme périodique

de la fonction R, nous le réunirons au terme non périodique, puis, regardant R comme se réduisant à l'ensemble de ces deux termes, nous déterminerons, à l'aide des équations (9), les plus fortes inégalités qui peuvent en résulter pour les variables L, G, H, l, g, h. Mais comme L, G, H n'entrent pas explicitement dans R, où ils sont remplacés par a, e, γ, il faut tout d'abord établir certaines formules à l'aide desquelles la valeur de R en fonction de a, e, γ, l, g, h puisse être introduite dans les équations (9), où les variables sont L, G, H, l, g, h.

Les relations (10), qui expriment a, e, γ en fonction de L, G, H, donnent, en mettant n pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$,

$$\frac{da}{dL} = \frac{2}{an}, \qquad \frac{da}{dG} = 0, \qquad \frac{da}{dH} = 0,$$

$$\frac{de}{dL} = \frac{1-e^2}{a^2ne}, \qquad \frac{de}{dG} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}, \qquad \frac{de}{dH} = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = 0, \qquad \frac{d\gamma}{dG} = \frac{1-2\gamma^2}{4a^2n\gamma\sqrt{1-e^2}}, \qquad \frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma\sqrt{1-e^2}}.$$

Il en résulte que l'on a

$$\frac{dR}{dL} = \frac{2}{an}\frac{dR}{da} + \frac{1-e^2}{a^2ne}\frac{dR}{de},$$

$$\frac{dR}{dG} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne}\frac{dR}{de} + \frac{1-2\gamma^2}{4a^2n\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma},$$

$$\frac{dR}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma}.$$

Cela posé, ne conservons dans R que le premier des termes périodiques que contient le développement de cette fonction donné au n° **14**, et laissons de côté toutes les quantités qui sont d'un ordre supérieur au quatrième, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} + m' \frac{a^2}{a'^3} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 \right) \\ & + m' \frac{a^2}{a'^3} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{8}e'^2 \right) \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l'). \end{aligned}$$

En introduisant cette valeur de R dans les équations (9), se rappelant que m' est égal à $a'^3 n'^2$ (n° **9**), et ne gardant partout que les termes qui ne sont pas d'un ordre supérieur au second, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{L}}{dt} &= -\frac{3}{2} n'^2 a^2 \sin(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l'), \\ \frac{d\mathrm{G}}{dt} &= -\frac{3}{2} n'^2 a^2 \sin(2h+2g+2l-2h'-2g-2l'), \\ \frac{d\mathrm{H}}{dt} &= -\frac{3}{2} n'^2 a \sin(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l'), \\ \frac{dl}{dt} &= n - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l'), \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n} - 3\frac{n'^2}{n} \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l'), \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l'). \end{aligned}$$

Si l'on intègre ces équations, en négligeant d'abord les quantités qui sont du second ordre, puis recommençant, pour tenir compte de ces quantités, on reconnaît sans peine que les principales inégalités de L, G, H, l, g, h, produites par le terme de R dont l'argument est $2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l'$, sont des quantités du second ordre.

Prenons pour second exemple le terme de R dont l'argument est l, et posons

$$\begin{aligned} R = \frac{\mu}{2a} &+ m' \frac{a^2}{a'^3}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2\right) \\ &+ m' \frac{a^2}{a'^3}\left(-\frac{1}{2}e + 3\gamma^2 e + \frac{1}{16}e^3 - \frac{3}{4}ee'^2\right)\cos l. \end{aligned}$$

Les équations (9) nous donneront encore, au même degré d'approximation que précédemment,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= 0, \\ \frac{dG}{dt} &= 0, \\ \frac{dH}{dt} &= 0, \\ \frac{dl}{dt} &= n - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{n'^2}{ne}\cos l, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n} - \frac{1}{2}\frac{n'^2}{ne}\cos l, \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}. \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations montre que le terme périodique de R dont l'argument est l introduit des inégalités du premier ordre dans les valeurs de l et g.

Soit encore, pour troisième exemple, le terme de R qui a pour argument $2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l'$. Posons

$$\begin{aligned} R = \frac{\mu}{2a} &+ m' \frac{a^2}{a'^3}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2\right) \\ &+ m' \frac{a^2}{a'^3}\left(\frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{75}{16}e^2 e'^2\right)\cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l'). \end{aligned}$$

En mettant cette valeur de R dans les équations (9), et ne conservant que les quantités du second ordre, il vient

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0,$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}\cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l'),$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n} + \frac{15}{4}\frac{n'^2}{n}\cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l'),$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}.$$

En intégrant ces équations et remarquant que le coefficient de t dans la valeur de l'argument $2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l'$ a pour partie principale $-2n'$, on voit encore que le terme de R qui contient cet argument introduit des inégalités du premier ordre dans les valeurs de l et g.

Soit enfin, pour dernier exemple, le terme de R qui a pour argument $2g$. Si nous posons

$$\begin{aligned}\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a} &+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2\right)\\ &+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left(\frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\cos 2g,\end{aligned}$$

les équations (9) deviendront, en conservant les quantités du quatrième ordre dans les coefficients des termes périodiques,

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0,$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{15}{2}\gamma^2\frac{n'^2}{n}\cos 2g,$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n} + \left(\frac{15}{2}\gamma^2 - \frac{15}{8}e^2\right)\frac{n'^2}{n}\cos 2g,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{15}{8}e^2\frac{n'^2}{n}\cos 2g.$$

Le coefficient de t, dans la valeur de l'argument $2g$, étant égal à $3\frac{n'^2}{n}$, on voit que le terme en $\cos 2g$ de la fonction R introduit des inégalités du second ordre dans les valeurs de l, g, h.

Ces divers exemples nous montrent que ce n'est pas l'ordre de la partie principale du coefficient d'un terme périodique de R qui détermine le degré d'importance de ce terme au point de vue des inégalités qu'il fournit; tandis que les coefficients des quatre termes périodiques que nous venons de considérer sont du deuxième, du troisième, du quatrième et du sixième ordre, les principales inégalités qui en résultent pour les valeurs des variables L, G, H, l, g, h sont respectivement du deuxième, du premier, du premier et du deuxième ordre.

Les deux derniers exemples, en particulier, doivent faire concevoir pourquoi, dans le développement de R du n° **14**, tout en ne conservant, en général, que les quantités du huitième ordre dans les termes qui renferment l, on a dû pousser l'approximation jusqu'au neuvième ordre dans ceux qui, ne contenant pas l, contiennent l'; et jusqu'au dixième ordre dans ceux qui ne renferment ni l, ni l'.

34. Si, en opérant comme nous venons de le faire dans les quatre exemples que nous avons choisis, nous cherchons quels sont les termes du développement de R qui peuvent fournir des inégalités du premier ordre dans les valeurs de L, G, H, l, g, h, nous trouverons qu'il y en a 5. Ce sont les termes qui ont pour arguments

$$l,$$

$$2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l',$$

$$2h + 2g + l - 2h' - 2h' - 2l',$$

$$2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l',$$

$$2h - 2h' - 2g' - 2l'.$$

Si nous cherchons ensuite, parmi les termes restants, ceux qui peuvent produire des inégalités du second ordre, nous en trouverons 18. De même nous verrons que 25 autres termes peuvent produire des inégalités du troisième ordre, et ainsi de suite.

Supposons maintenant que, en procédant successivement à diverses opérations comme nous l'avons dit au n° **32**, nous nous attachions à faire disparaître de R les différents termes capables de produire des inégalités du premier, du deuxième et du troisième ordre. Les termes périodiques restant dans R, après que toutes ces opérations auront été effectuées, ne pourront pas produire d'inégalités d'un ordre inférieur au quatrième. Dès lors on comprend que, pour intégrer les équations (9), dans lesquelles on attribuera à R sa valeur complète, mais modifiée par suite des opérations dont on vient de parler, on rencontrera incomparablement moins de difficultés que si l'on avait voulu intégrer ces mêmes équations en y mettant la valeur primitive de R telle qu'elle est donnée au n° **14**. L'intégration des équations (9), avec la valeur de R modifiée comme nous venons de le dire, se fera au moins aussi facilement que s'il s'agissait des équations analogues que l'on rencontre dans les théories des planètes et du Soleil. Cette intégration pourra s'effectuer sans qu'on tienne compte des quantités du second ordre par rapport à la force perturbatrice à laquelle correspond la valeur modifiée de la fonction R.

C'est de cette manière que nous avons appliqué la méthode d'intégration exposée dans ce chapitre. Nous avons donc effectué successivement les diverses opérations nécessaires pour enlever à la fonction perturbatrice R la totalité des termes périodiques capables de fournir des inégalités d'un ordre inférieur au quatrième. D'après ce que nous avons dit plus haut, ces termes sont au nombre de 48 dans le développement du n° **14**. Mais il arrive qu'après avoir effectué un certain nombre de ces opérations successives, plusieurs des termes qu'on a fait disparaître de R s'y introduisent de nouveau, avec des coefficients qui toutefois sont d'ordres supérieurs à ceux des coefficients qu'avaient ces mêmes termes dans la valeur primitive de R. Il arrive aussi que, dans les modifications que la fonction R éprouve successivement, cette fonction acquiert des termes dépendant d'arguments qui n'entraient pas dans la valeur primitive de cette fonction, ou qui y entraient avec des coefficients de moindre importance. Il en résulte qu'au lieu de 48 opérations destinées à faire disparaître de R tous les termes périodiques capables de produire des inégalités du premier, du deuxième ou du troisième ordre, nous avons dû en effectuer 57.

Parmi ces 57 opérations, cinq ont eu pour objet d'enlever à la fonction R les cinq termes indiqués ci-dessus comme produisant des inégalités du premier ordre. On peut les distinguer des autres en les désignant sous le nom d'*opérations du premier ordre*. Dix-huit autres, qui seront des *opérations du deuxième ordre,* ont servi à enlever de la fonction R les termes qui peuvent produire des inégalités du deuxième ordre. Enfin, trente-quatre *opérations du troisième ordre* ont fait disparaître de cette fonction les termes capables de fournir des inégalités du troisième ordre. La longueur des calculs que nécessite chacune de ces opérations est extrêmement différente, suivant qu'il s'agit d'une opération du premier ordre, du deuxième ordre ou du troisième ordre.

Quant à l'ordre dans lequel on peut faire disparaître successivement les termes les plus importants de la fonction perturbatrice, il est évidemment arbitraire. On verra dans le chapitre V quel est celui que nous avons adopté.

35. Si l'on intégrait immédiatement les équations (9), en tenant compte de la valeur complète de R, on trouverait les valeurs de L, G, H, l, g, h en fonction du temps, et ces valeurs devraient être ensuite substituées dans les formules (16), (17) et (18), qui donnent les trois coordonnées de la Lune en fonction de L, G, H, l, g, h. Mais il n'en est pas ainsi dans la méthode que nous adoptons : nous intégrons ces équations (9) au moyen d'un assez grand nombre d'opérations successives, et à chaque opération nous changeons de variables. Au lieu de déduire de tous les calculs, après leur entier achèvement, les valeurs complètes des va-

riables L, G, H, l, g, h, qui entrent dans les équations (9), et de les substituer ensuite dans les formules (16), (17), (18), il est bien plus naturel d'effectuer les changements de variables, à chaque opération, non-seulement dans les équations à intégrer, mais encore dans les expressions des coordonnées de la Lune. De cette manière, les inégalités qui doivent entrer dans ces expressions y seront introduites successivement, et, au lieu d'effectuer une seule substitution, qui serait extrêmement compliquée, après l'intégration complète des équations (9), nous en effectuerons une beaucoup plus simple après chacune des opérations qui doivent nous conduire à cette intégration complète.

36. Nous terminerons ce chapitre en donnant quelques formules générales que nous avons dû établir, et qui nous ont été d'un grand secours pour exécuter les calculs dont se composent nos 57 opérations.

Chaque fois que, après avoir réduit R à son terme non périodique et à un seul de ses termes périodiques, nous avons été conduit à deux équations différentielles, telles que les équations (23) du n° **20**, nous avons effectué directement l'intégration de ces deux équations différentielles en séries, sans nous servir de la forme générale sous laquelle les intégrales des équations (23) ont été données au n° **20**. Pour cela, nous avons habituellement employé la méthode d'intégration par approximations successives. Mais il est arrivé plusieurs fois que l'une des deux équations différentielles contenait la variable e en diviseur ; alors nous avons employé les formules suivantes, établies pour ce cas particulier.

Soit à intégrer les équations différentielles

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \mathrm{M}\,(1 + \mathrm{M}_1 e^2 + \mathrm{M}_2 e^4)\sin\theta,\\ \frac{d\theta}{dt} &= \mathrm{N}\,(1 + \mathrm{N}_1 e^2 + \mathrm{N}_2 e^4 + \mathrm{N}_3 e^6)\\ &\quad + \frac{\mathrm{M}}{e}\,(1 + \mathrm{P}_1 e^2 + \mathrm{P}_2 e^4)\cos\theta,\end{aligned}\right.$$

M étant une quantité du second ordre au moins, et les autres lettres M_1, M_2, N, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2 désignant des quantités de l'ordre zéro : les intégrales de ces équations seront fournies par les relations

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} e\cos\theta &= \mathrm{E}_0 + (e_0 + \mathrm{E}_1)\cos\theta_0(t+c)\\ &\quad + \mathrm{E}_2\cos 2\,\theta_0(t+c) + \mathrm{E}_3\cos 3\,\theta_0(t+c),\\ e\sin\theta &= e_0\sin\theta_0(t+c) + \mathrm{E}_2\sin 2\,\theta_0(t+c) + \mathrm{E}_3\sin 3\,\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

E_0, E_1, E_2, E_3 et θ_0 étant déterminés par les formules

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0 = &-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} + (\mathrm{N}_1 - \mathrm{P}_1)\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\right)^2 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\left(2\,\mathrm{N}_1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{M}_1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}_1\right)e_0^2\\ &+ \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\left(3\,\mathrm{N}_2 - 3\,\mathrm{N}_1^2 + \frac{3}{2}\,\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}_1\mathrm{N}_1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{M}_2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}_2\right)e_0^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_1 = &\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\right)^2\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{M}_1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}_1 - \mathrm{N}_1\right)e_0\\ &+ \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\right)^2\left(\frac{7}{2}\,\mathrm{N}_1^2 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{P}_2 - 3\,\mathrm{N}_2 - \frac{13}{4}\,\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1 - \frac{5}{4}\,\mathrm{P}_1\mathrm{N}_1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{M}_1^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{M}_1\mathrm{P}_1\right)e_0^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_2 = &-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\left(\mathrm{N}_1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{M}_1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}_1\right)e_0^2\\ &+ \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\left(2\,\mathrm{N}_1^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{P}_1\mathrm{N}_1 - 2\,\mathrm{N}_2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{M}_2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}_2\right)e_0^4,\end{aligned}$$

$$E_3 = \left(\frac{M}{N}\right)^2 \left(\frac{9}{8} M_1 N_1 - \frac{7}{8} P_1 N_1 + \frac{3}{4} N_1^2 - \frac{1}{2} M_1 P_1 + \frac{1}{4} M_1^2 + \frac{1}{4} P_1^2 + \frac{1}{2} N_2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} M_2 - \frac{1}{4} P_2 \right) e_0^3,$$

$$\theta_0 = N(1 + N_1 e_0^2 + N_2 e_0^4 + N_3 e_0^6) + \frac{M^2}{N}\left(\frac{1}{2} M_1 - \frac{3}{2} P_1 + 2 N_1\right)$$
$$+ \frac{M^2}{N}\left(-7 N_1^2 + 2 M_1 N_1 + 4 P_1 N_1 - \frac{1}{2} M_1 P_1 - \frac{1}{2} P_1^2 + \frac{1}{2} M_2 - \frac{5}{2} P_2 + 6 N_2\right) e_0^2.$$

Si d'ailleurs la valeur de θ en t est représentée par

$$\theta = \theta_0 (t + c) + \theta_1 \sin \theta_0 (t + c) + \theta_2 \sin 2\theta_0 (t + c),$$

on aura, avec un degré d'approximation qui ressort des formules elles-mêmes,

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{e_0} \frac{M}{N} \Big[1 + \left(\frac{M}{N}\right)^2 \left(\frac{1}{2} N_1 + \frac{1}{4} M_1 + \frac{1}{4} P_1\right) + (P_1 - 3 N_1) e_0^2 \\ &\qquad + (5 N_1^2 - P_1 N_1 - 2 M_1 N_1 + P_2 - 5 N_2) e_0^4 \Big], \\ \theta_2 &= \frac{1}{2 e_0^2} \left(\frac{M}{N}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Les lettres e_0 et c désignent les constantes introduites par l'intégration.

Dans le cours des calculs, on a eu très-souvent à développer le sinus ou le cosinus d'un angle φ, dont la valeur est de la forme

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \sin \theta + \varphi_2 \sin 2\theta + \varphi_3 \sin 3\theta + \varphi_4 \sin 4\theta + \varphi_5 \sin 5\theta.$$

Ce développement se déduit facilement de la formule suivante, où l'on a poussé l'exactitude jusqu'aux quantités du sixième ordre inclusivement dans le coefficient de $\sin\varphi_0$ et jusqu'aux quantités du cinquième ordre dans les autres coefficients, en supposant que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$ soient du premier, du deuxième, ..., du cinquième ordre :

$$
\begin{aligned}
(42)\quad \sin\varphi = {} & \left(1 - \frac{1}{4}\varphi_1^2 - \frac{1}{4}\varphi_2^2 - \frac{1}{4}\varphi_3^2 + \frac{1}{64}\varphi_1^4 + \frac{1}{16}\varphi_1^2\varphi_2^2 - \frac{1}{48}\varphi_1^3\varphi_3 - \frac{1}{2304}\varphi_1^6\right)\sin\varphi_0 \\
& + \left(\frac{1}{2}\varphi_1 - \frac{1}{16}\varphi_1^3 - \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_2 - \frac{1}{8}\varphi_1\varphi_2^2 + \frac{1}{16}\varphi_1^2\varphi_3 + \frac{1}{384}\varphi_1^5\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{1}{4}\varphi_2\varphi_3 + \frac{1}{48}\varphi_1^3\varphi_2\right)\sin(\varphi_0 + \theta) \\
& - \left(\frac{1}{2}\varphi_1 - \frac{1}{16}\varphi_1^3 + \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_2 - \frac{1}{8}\varphi_1\varphi_2^2 + \frac{1}{16}\varphi_1^2\varphi_3 + \frac{1}{384}\varphi_1^5\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{1}{4}\varphi_2\varphi_3 - \frac{1}{48}\varphi_1^3\varphi_2\right)\sin(\varphi_0 - \theta) \\
& + \left(\frac{1}{2}\varphi_2 + \frac{1}{8}\varphi_1^2 - \frac{1}{8}\varphi_1^2\varphi_2 - \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_3 - \frac{1}{96}\varphi_1^4\right)\sin(\varphi_0 + 2\theta) \\
& - \left(\frac{1}{2}\varphi_2 - \frac{1}{8}\varphi_1^2 - \frac{1}{8}\varphi_1^2\varphi_2 + \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_3 + \frac{1}{96}\varphi_1^4\right)\sin(\varphi_0 - 2\theta) \\
& + \left(\frac{1}{2}\varphi_3 + \frac{1}{48}\varphi_1^3 + \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_2 - \frac{1}{8}\varphi_1^2\varphi_3 - \frac{1}{16}\varphi_1\varphi_2^2 - \frac{1}{768}\varphi_1^5\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_4 - \frac{1}{32}\varphi_1^3\varphi_2\right)\sin(\varphi_0 + 3\theta) \\
& - \left(\frac{1}{2}\varphi_3 + \frac{1}{48}\varphi_1^3 - \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_2 - \frac{1}{8}\varphi_1^2\varphi_3 - \frac{1}{16}\varphi_1\varphi_2^2 - \frac{1}{768}\varphi_1^5\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_4 + \frac{1}{32}\varphi_1^3\varphi_2\right)\sin(\varphi_0 - 3\theta) \\
& + \left(\frac{1}{2}\varphi_4 + \frac{1}{16}\varphi_1^2\varphi_2 + \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_3 + \frac{1}{8}\varphi_2^2 + \frac{1}{384}\varphi_1^4\right)\sin(\varphi_0 + 4\theta) \\
& - \left(\frac{1}{2}\varphi_4 + \frac{1}{16}\varphi_1^2\varphi_2 - \frac{1}{4}\varphi_1\varphi_3 - \frac{1}{8}\varphi_2^2 - \frac{1}{384}\varphi_1^4\right)\sin(\varphi_0 - 4\theta)
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{1}{2}\varphi_5+\frac{1}{16}\varphi_1^2\varphi_3+\frac{1}{16}\varphi_1\varphi_2^2+\frac{1}{3840}\varphi_1^5+\frac{1}{4}\varphi_1\varphi_4\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\varphi_2\varphi_3+\frac{1}{96}\varphi_1^3\varphi_2\right)\sin(\varphi_0+5\theta)$$

$$-\left(\frac{1}{2}\varphi_5+\frac{1}{16}\varphi_1^2\varphi_3+\frac{1}{16}\varphi_1\varphi_2^2+\frac{1}{3840}\varphi_1^5-\frac{1}{4}\varphi_1\varphi_4\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\varphi_2\varphi_3-\frac{1}{96}\varphi_1^3\varphi_2\right)\sin(\varphi_0-5\theta).$$

Si, dans cette formule, on remplace φ et φ_0 par $\varphi+\frac{\pi}{2}$ et $\varphi_0+\frac{\pi}{2}$, on reconnaît de suite qu'il suffit d'y changer tous les signes *sin* en *cos* pour qu'elle fournisse la valeur de $\cos\varphi$.

* * *

CHAPITRE IV.

VALEUR DE LA FONCTION PERTURBATRICE, AVEC LES DIVERSES MODIFICATIONS QU'ELLE A SUBIES SUCCESSIVEMENT.

Nous avons donné au n° **14** le développement de la fonction perturbatrice R, dont dépendent les équations différentielles (9). On voit plus loin, dans le chapitre III, comment nous avons procédé à l'intégration de ces équations différentielles, en faisant d'abord une suite d'opérations distinctes dont chacune nous a amené à effectuer un changement de variables. Par suite de ces divers changements de variables, la fonction perturbatrice s'est modifiée successivement : chaque opération a fait disparaître un de ses termes les plus importants, quelquefois même plusieurs termes, et en même temps y a introduit, soit de nouveaux termes, soit des modifications aux coefficients des termes existant déjà. Ce sont ces changements successifs de la fonction perturbatrice que nous nous proposons de faire connaître en détail dans ce chapitre. Mais nous n'avons pas besoin pour cela de donner séparément la valeur complète de cette fonction après la première opération, puis la valeur complète de la même fonction après la deuxième opération, et ainsi de suite pour chacune des 57 opérations dont il a été question au n° **34**. Cela nous entraînerait dans de grandes longueurs et dans des répétitions bien inutiles. Reportons-nous aux règles qui ont été données aux nos **29**, **30** et **31**, ou mieux encore aux applications que nous en avons faites et qui sont exposées en détail dans le chapitre V ; nous verrons que le changement de variables auquel conduit une quelconque de nos opérations consiste à remplacer les diverses lettres a, e, γ, l, g, h par les mêmes lettres suivies de termes dépendant de la force perturbatrice partielle que l'on a spécialement considérée dans cette opération. En effectuant ce changement de variables dans la fonction perturbatrice, on trouvera donc exactement la même fonction, augmentée de parties provenant des termes dont il vient d'être question, et diminuée du terme périodique que l'opération a eu pour objet de faire disparaître. On conçoit dès lors qu'il nous suffira de donner en une seule fois le développement complet de la fonction perturbatrice, pourvu que nous mettions en évidence, dans les coefficients des différents termes, les parties qui y ont été introduites par chacune de nos opérations successives. Ce développement comprendra non-seulement les divers termes contenus dans la formule du n° **14**, mais encore tous ceux qui s'y sont ajoutés successivement avec des arguments nouveaux.

Pour que l'on puisse trouver sans peine, dans ce long développement de la fonction R, le terme périodique correspondant à un argument donné, nous avons rangé les divers termes à la suite les uns des autres dans un ordre méthodique que nous allons indiquer. Nous avons d'abord divisé l'ensemble de ces termes en deux grands groupes : le premier comprenant tous les termes qui ont pour facteur $m'\frac{a^2}{a'^3}$ ou $m'\frac{a^4}{a'^5}$, et le second comprenant tous les termes qui ont pour facteur $m'\frac{a^3}{a'^4}$. Ensuite, pour ranger les différents termes de chaque groupe, nous avons considéré leurs arguments comme formés de diverses combinaisons des quantités

$$h+g+l-h'-g'-l', \quad g+l, \quad l, \quad l',$$

de telle sorte qu'un argument quelconque soit représenté par la formule

$$k(h+g+l-h'-g'-l')+k'(g+l)+k''l-k'''l',$$

k, k', k'', k''' étant des nombres entiers ou zéro. On obtiendra évidemment les arguments de tous les termes de R, en attribuant à k, k', k'', k''' les diverses valeurs 0, 1, 2, 3, 4,..., et aussi à k', k'', k''' les valeurs négatives — 1, — 2, — 3, — 4,...; car on peut toujours s'arranger de manière que k ne soit pas négatif. Les termes des deux groupes dont il a été question plus haut se distinguent entre eux en ce que, dans tous ceux du premier groupe, k est nul ou égal à un nombre pair, tandis que, dans tous ceux du second groupe, k est égal à un nombre impair. Quant à k', il est partout nul ou égal à un nombre pair, et les deux autres indéterminées k'' et k''' peuvent recevoir toutes les valeurs 0, 1, 2, 3,..., — 1, — 2, — 3,.... D'après cela, pour obtenir les différents arguments du premier groupe, nous avons attribué à k successivement les valeurs 0, 2, 4, 6,...; pour chaque valeur de k, nous avons attribué à k' successivement les valeurs 0, 2, 4,..., — 2, — 4,...; pour chaque système de valeurs de k, k', nous avons attribué à k'' successivement les valeurs 0, 1, 2, 3,..., — 1, — 2, — 3,...; et enfin, pour chaque système de valeurs de k, k', k'', nous avons donné à k''' successivement les valeurs 0, 1, 2, 3,..., — 1, — 2, — 3,.... Nous avons opéré de même pour obtenir les arguments du second groupe, avec cette seule différence, qu'au lieu de donner à k successivement les valeurs 0, 2, 4, 6,..., nous lui avons donné les valeurs 1, 3, 5,.... Les termes ont été rangés à la suite les uns des autres dans l'ordre dans lequel on les obtient ainsi : c'est-à-dire que, dans le premier groupe, par exemple, on a écrit d'abord tous les termes qui correspondent à $k = 0$, puis ceux qui correspondent à $k = 2$, ensuite ceux dans lesquels $k = 4$, etc. ; dans chacune de ces portions du groupe total, on a pris d'abord les termes dans lesquels $k' = 0$, puis ceux où $k' = 2$, puis ceux où $k' = 4$,..., ensuite ceux où $k' = -2$, ceux où $k' = -4$, etc. ; les valeurs successives de k'' prises dans l'ordre 0, 1, 2, 3,..., -1, -2, -3,... ont de même servi à ranger entre eux les termes qui correspondent à un même système de valeurs de k et k' ; et enfin les termes correspondant à un même système de valeurs de k, k', k'' ont été rangés d'après les valeurs de k''' prises dans l'ordre 0, 1, 2, 3,..., -1, -2, -3,.... Il est aisé de voir, d'après cela, comment on trouvera le terme périodique correspondant à un argument donné : on opérera absolument de la même manière que quand on cherche un mot dans un dictionnaire. Soit, par exemple, le terme qui a pour argument $2h + 4g + 3l - 2h' - 2g'$: pour former cet argument, il faut donner à k, k', k'', k''' les valeurs

$$k = 2, \quad k' = 2, \quad k'' = -1, \quad k''' = -2;$$

le terme dont il s'agit est donc du premier groupe, et compris parmi tous ceux qui correspondent à $k = 2$; mais dans l'ensemble de ces termes correspondant à $k = 2$, il n'y a que la portion où $k' = 2$ qui puisse renfermer le terme cherché ; dans cette portion correspondant à $k = 2$ et $k' = 2$, on doit s'arrêter spécialement aux termes dans lesquels $k'' = -1$; et enfin, parmi ces derniers on trouve sans peine celui où l'on a $k''' = -2$.

Les différents termes de la fonction R ayant été rangés comme nous venons de l'expliquer, nous leur avons attribué à chacun un numéro d'ordre destiné à le désigner d'une manière simple. Le numéro (1) s'applique au terme non périodique tout entier, terme qui se forme d'une première partie $\frac{\mu}{2a}$ indépendante de l'action perturbatrice du Soleil, et d'une seconde partie produite par cette action perturbatrice et ayant $m'\frac{a^2}{a'^3}$ pour facteur. Les termes périodiques portent les n^{os} 2 à 461 ; le premier des deux groupes indiqués ci-dessus comprend les termes (2) à (308), et le second les termes restants de (309) à (461).

Les nombres en petits caractères placés au-dessous des diverses portions du coefficient de chacun des termes, en font connaître l'origine. Ainsi, dans le coefficient du terme (16), par exemple, on trouve ceci :

$$\underbrace{+\left(\frac{3}{32}e^2-\frac{9}{8}\gamma^2e^2+\frac{13}{64}e^4+\frac{9}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,23]};$$

les deux nombres 2 et 23 renfermés entre crochets, et reliés l'un à l'autre par une ligne de points, indiquent que cette partie du coefficient a été produite par la deuxième opération, et qu'elle provient de la substitution des formules de transformation fournies par cette opération dans le terme qui porte le n° (23). Il en est de même partout; le nombre de gauche est toujours le numéro de l'opération qui a fourni la portion de coefficient sous laquelle ce nombre est placé, et le nombre de droite est le numéro du terme d'où provient cette portion de coefficient par suite du changement de variables auquel cette opération conduit. Le terme non périodique seul renferme des indications un peu plus complexes : on y trouve, par exemple,

$$\underbrace{+\left(\frac{9}{16}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{45}{16}e^2e'^2+\frac{81}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[9\,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,1,12]}$$

$$\underbrace{-\left(\frac{45}{16}e'^2-\frac{729}{16}\gamma^2e'^2+\frac{81}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{10791}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{43479}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5}}_{[9\,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,1,12]}.$$

Cela veut dire que cette portion du terme (1) provient de la substitution des formules de transformation fournies par la 9^e opération, dans l'ensemble des termes (1) et (12), ce dernier étant le terme périodique que la 9^e opération avait spécialement pour objet de faire disparaître de la fonction perturbatrice ; mais ce n'est pas de là seulement qu'elle provient : en réalité, c'est le résultat de cette substitution joint à la valeur de la quantité

$$-\frac{i'''}{i}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)+\frac{i'''}{i}n'.\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\,\theta_2\mathrm{L}_2+3\,\theta_3\mathrm{L}_3+\ldots),$$

qui, d'après la formule (36), doit être ajoutée à la fonction R à la suite de chaque opération. On se souvient que le tout se réduit à une simple quantité non périodique (n° **28**), et c'est cette quantité non périodique qui porte l'indication $[9\,\cdots\cdots\cdots\,1,12]$. Le terme (1) contient d'ailleurs quelques indications plus simples, telles que celle-ci :

$$\underbrace{+\frac{1}{128}\frac{n'^6}{n^6}}_{[2\,\cdot\,\cdot\,23]};$$

cela signifie que cette partie du terme (1) provient de la substitution des formules de la 2^e opération dans le terme (23) seul. Les parties des divers coefficients qui ne sont pas accompagnées de ces indications en petits chiffres placés au-dessous sont celles qui existaient dans la valeur primitive de la fonction R, celle qui est donnée au n° **14**.

On comprendra sans peine, d'après cela, ce qu'il faudra faire pour avoir la valeur qui doit être attribuée à la fonction perturbatrice après une opération quelconque, après la 10^e^ par exemple. On ne devra prendre, dans les coefficients des différents termes, que la partie qui existait dans la valeur primitive de la fonction avec celles qui y ont été introduites par les 10 premières opérations, et on laissera complétement de côté les parties fournies par les opérations qui suivent la 10^e^. De plus, on devra laisser de côté dans un certain nombre de termes, les portions qui ont disparu par le fait même des 10 opérations qu'on suppose déjà effectuées, portions qui portent pour cela une indication spéciale, comme on peut le voir dans les coefficients des termes (2), (3), (7), (87), etc.,....

Les coefficients des divers termes ont été tous calculés *complétement* jusqu'aux quantités du huitième ordre inclusivement; aucune portion de ces coefficients n'a été omise jusqu'à cet ordre, quelque petit que soit d'ailleurs son facteur numérique. De même, on n'a laissé de côté aucun terme périodique dont le coefficient soit du huitième ordre ou d'un ordre inférieur. En outre, pour les termes dont l'argument ne contient pas l et contient l', on a poussé le calcul des coefficients jusqu'aux quantités du neuvième ordre, sans en omettre aucune, et pour les termes dont l'argument ne contient ni l, ni l', on est allé jusqu'aux quantités du dixième ordre. Enfin, le terme non périodique a été calculé jusqu'aux quantités du neuvième ordre. Dans certains termes, l'approximation a été exceptionnellement poussée plus loin encore que nous ne venons de l'indiquer, mais seulement pour une partie du coefficient de chacun d'eux, comme on peut le voir dans les termes (9), (25), (46),.... Des notes mises au bas des pages où se trouvent ces termes font connaître les motifs de ces exceptions. On se souvient que, pour évaluer l'ordre d'une quantité quelconque, nous sommes convenus (nº **14**) de regarder γ, e, e', $\frac{n'}{n}$ comme étant du premier ordre; $\frac{a}{a'}$, $m'\frac{a^2}{a'^3}$ comme étant du second ordre, et enfin, vu la petitesse de e' par rapport à γ et e, de traiter e'^3, e'^4, e'^5, e'^6,... comme des quantités des quatrième, cinquième, sixième, huitième,... ordres.

Faisons enfin une remarque qui n'est pas sans importance, soit pour la conduite des calculs que l'on a à effectuer, soit comme moyen de vérification pour les résultats que l'on obtient. Nous savons que l'argument d'un terme quelconque de R peut être représenté par la formule

$$k(h+g+l-h'-g'-l')+k'(g+l)+k''l-k'''l',$$

k, k', k'', k''' étant des nombres entiers qui peuvent être nuls, et dont les trois derniers peuvent être négatifs. Si l'on considère l'argument d'un terme sous cette forme, on reconnaît qu'une portion quelconque du coefficient de ce terme contient le facteur γ à une puissance au moins égale à k', et en général égale à k', ou à $k'+2$, ou à $k'+4$,...; qu'elle contient le facteur e à une puissance au moins égale à k'', et en général égale à k'', ou à $k''+2$, ou à $k''+4$,...; enfin qu'elle contient le facteur e' à une puissance au moins égale à k''', et en général égale à k''', ou à $k'''+2$, ou à $k'''+4$,.... Il n'est question, bien entendu, ici que des valeurs absolues de k', k'', k'''.

$$R = \frac{\mu}{2a}$$

(1) *

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 \right.$$

$$- \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{45}{16}\gamma^2 e'^4 + \frac{45}{64}e^2 e'^4 + \left(\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - 3\gamma^2 + \frac{5}{4}e^2 + \frac{3}{4}e'^2 + 12\gamma^4 - 15\gamma^2 e^2 - 9\gamma^2 e'^2 - \frac{67}{256}e^4 + \frac{15}{4}e^2 e'^2 + \frac{3}{2}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[2 . . . . 1, 7]

$$+ \left(\frac{17}{32} - \frac{153}{16}\gamma^2 + \frac{715}{128}e^2 - \frac{135}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{5}{4}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{9}{16}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[2 . . . . 1, 7]

$$- \left(\frac{1}{32} - \frac{9}{16}\gamma^2 + \frac{45}{128}e^2 + \frac{9}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{7}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1}{128}\frac{n'^6}{n^6}$$

[2 . . . . 16] [2 . . 23]

$$+ \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{15}{16}e'^2 + \frac{9}{8}\gamma^4 - \frac{21}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{8913}{1024}e^4 - \frac{15}{2}e^2 e'^2 + \frac{189}{128}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[3 . . . . 1, 87]

$$+ \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{81}{32}e^2 - \frac{75}{8}e'^2 + \frac{9}{8}\gamma^4 - \frac{75}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{651}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{13929}{1024}e^4 - \frac{1053}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[3 . . . . 1, 87]

$$+ \left(\frac{523}{384} - \frac{2171}{192}\gamma^2 + \frac{32159}{1536}e^2 - \frac{38891}{1536}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

[3 . . . . 1, 87]

$$+ \left(\frac{227}{144} - \frac{967}{72}\gamma^2 + \frac{19549}{576}e^2 - \frac{254615}{4608}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{39641}{4608}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{220681}{20736}\frac{n'^7}{n^7}$$

[3 . . . . 1, 87]

$$- \left(\frac{81}{16} - \frac{81}{4}\gamma^2 - \frac{351}{8}e^2 - \frac{405}{16}e'^2 + \frac{243}{8}\gamma^4 + \frac{621}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{405}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{39501}{1024}e^4\right.$$

[4 . . . .

$$\left. + \frac{1755}{8}e^2 e'^2 + \frac{5103}{128}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

. . . . 1, 116]

$$- \left(\frac{243}{16} - \frac{243}{4}\gamma^2 - \frac{5103}{32}e^2 - \frac{729}{8}e'^2 + \frac{729}{8}\gamma^4 + \frac{4617}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{2187}{8}\gamma^2 e'^2\right.$$

[4 . . . .

$$\left. + \frac{149391}{1024}e^4 + \frac{1539}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

. . . . 1, 116]

$$- \left(\frac{7515}{128} - \frac{20403}{64}\gamma^2 - \frac{365781}{512}e^2 - \frac{160371}{512}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

[4 . . . . 1, 116]

Cette partie non périodique de R se continue à la page suivante.

---

* Ce numéro (1) se rapporte à la totalité de la partie non périodique de la valeur de R, y compris le terme $\frac{\mu}{2a}$ placé immédiatement à la suite du signe =.

(1) Suite.

$$-\left(\frac{5055}{32}-\frac{13611}{16}\gamma^2-\frac{272273}{128}e^2-\frac{492519}{512}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
[4 . . . . 1,116]

$$-\frac{322707}{1024}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{171373}{3072}\frac{n'^7}{n^7}-\frac{45}{8}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{135}{8}\frac{n'^3}{n^3}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{1701}{2048}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{3969}{1024}\frac{n'^7}{n^7}$$
[4 . . . . 1,116] [4 . . . . 243]

$$-\left(\frac{3969}{64}e'^2-\frac{3969}{16}\gamma^2e'^2-\frac{17199}{32}e^2e'^2-\frac{69741}{256}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
[5 . . . . 1,117]

$$-\left(\frac{18711}{64}e'^2-\frac{69741}{64}\gamma^2e'^2-\frac{23247}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1431459}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{11393883}{2048}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$
[5 . . . . 1,117]

$$-\left(\frac{81}{64}e'^2-\frac{81}{16}\gamma^2e'^2-\frac{351}{32}e^2e'^2-\frac{81}{256}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{243}{64}e'^2-\frac{243}{64}\gamma^2e'^2-\frac{1053}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
[6 . . . . 1,121]

$$-\frac{10611}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{59841}{2048}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{147}{64}e'^2-\frac{147}{16}\gamma^2e'^2+\frac{147}{8}e^2e'^2-\frac{2583}{256}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
[6 . . . . 1,121] [7 . . . . 1,88]

$$+\left(\frac{693}{64}e'^2-\frac{5229}{64}\gamma^2e'^2+\frac{9639}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{32073}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{98499}{2048}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$
[7 . . . . 1,88]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{+\left(\frac{3}{64}e'^2-\frac{3}{16}\gamma^2e'^2+\frac{3}{8}e^2e'^2-\frac{3}{256}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{69}{64}e'^2-\frac{627}{64}\gamma^2e'^2+\frac{243}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
[8 . . . . 1,92]

$$+\frac{21227}{3072}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{154241}{18432}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{9}{16}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{45}{16}e^2e'^2+\frac{81}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
[8 . . . . 1,92] [9 . . . . 1,12]

$$-\left(\frac{45}{16}e'^2-\frac{729}{16}\gamma^2e'^2+\frac{81}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{10791}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{43479}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$
[9 . . . . 1,12]

$$+\left(\frac{9}{16}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{45}{16}e^2e'^2+\frac{81}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{45}{16}e'^2-\frac{729}{16}\gamma^2e'^2+\frac{81}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
[10 . . . . 1,8]

$$+\frac{10719}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{131553}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{961}{16}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1767}{4}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{81}{64}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{64}e'^4\frac{n'^2}{n^2}$$
[10 . . . . 1,8] [11 . . . . 1,7] [12 · 1,13] [13 · · 1,9]

$$+\frac{27}{256}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{135}{256}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{867}{64}e'^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{23409}{64}e'^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1587}{256}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{8027}{128}\frac{n'^7}{n^7}$$
[14 . . . . . . 1,87] [15 · 1,89] [16 · · 1,118] [17 . . . . 1,236]

$$+\frac{405}{256}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1107}{128}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{225}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{2025}{8192}\frac{n'^3}{n^3}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{2025}{512}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{18225}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\frac{a^2}{a'^2}$$
[18 . . . . . . 1,222] [19 . . . . 1,385] [20 . . . . 1,399]

$$+\frac{9}{512}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{27}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\frac{a^2}{a'^2}+\left(\frac{3}{4}\gamma^4+\frac{3}{4}\gamma^2e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{81}{4}\gamma^4-\frac{81}{4}\gamma^2e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
[21 . . . . 1,316] [22 . . . . 1,44] [23 . . . . 1,58]

Cette partie non periodique de R se continue à la page suivante.

(1) Suite.

$$+\left(\frac{9}{4}\gamma^4-\frac{9}{4}\gamma^2e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{27}{4}\gamma^4-\frac{27}{4}\gamma^2e^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{9}{4}\gamma^4+\frac{9}{4}\gamma^2e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{27}{4}\gamma^4+\frac{27}{4}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n^3}$$

[24 . . . . 1,175] [25 . . . . 1,188]

$$+\left(\frac{117}{32}-\frac{27}{2}\gamma^2-\frac{135}{8}e^2-\frac{585}{32}e'^2+\frac{297}{16}\gamma^4+\frac{999}{16}\gamma^2e^2+\frac{135}{2}\gamma^2e'^2+\frac{7137}{256}e^4\right.$$

[26 . . . .

$$\left.+\frac{675}{8}e^2e'^2+\frac{7371}{256}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

. . . . 1,76]

$$+\left(\frac{225}{32}-\frac{423}{16}\gamma^2-\frac{2115}{64}e^2-\frac{4581}{32}e'^2+\frac{297}{8}\gamma^4+\frac{3987}{32}\gamma^2e^2+\frac{15885}{16}\gamma^2e'^2\right.$$

[26 . . . .

$$\left.+\frac{14319}{256}e'^4+\frac{35685}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n^3}$$

. . . . 1,76]

$$+\left(\frac{225}{8}-\frac{3087}{16}\gamma^2-\frac{11709}{64}e^2-\frac{15705}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

[26 . . . . 1,76]

$$+\left(\frac{225}{4}-\frac{26397}{64}\gamma^2-\frac{89091}{256}e^2-\frac{37401}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}-\frac{1731}{4096}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{8570191}{8192}\frac{n'^7}{n^7}$$

[26 . . . . 1,76]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\quad+\frac{255}{64}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{465}{64}\frac{n'^3}{n^3}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{39123}{2048}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{64233}{1024}\frac{n'^7}{n^7}\right.$$

[26 . . . . 1,76] [26 . . . . 215]

$$+\left(\frac{5733}{128}e'^2-\frac{1323}{8}\gamma^2e'^2-\frac{6615}{32}e^2e'^2-\frac{100737}{512}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[27 . . . . 1,77]

$$+\left(\frac{57267}{256}e'^2-\frac{158571}{128}\gamma^2e'^2-\frac{486675}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{93789}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{835203}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[27 . . . . 1,77]

$$+\left(\frac{117}{128}e'^2-\frac{27}{8}\gamma^2e'^2-\frac{135}{32}e^2e'^2-\frac{117}{512}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[28 . . . . 1,82]

$$+\left(\frac{3681}{256}e'^2-\frac{14193}{128}\gamma^2e'^2-\frac{27225}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{10089}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{100329}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[28 . . . . 1,82]

$$+\left(\frac{9}{8}\gamma^2+9\gamma^4-\frac{81}{16}\gamma^2e^2+\frac{27}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{57}{8}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{567}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'}{n}$$

[29 . . . . 1,37] [30 . . . . 1,41]

$$+\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{567}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{1}{32}e^2-\frac{3}{8}\gamma^2e^2+\frac{5}{128}e^4+\frac{3}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[31 . . . . 1,38] [32 . . . . 1,16]

$$-\frac{73}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{59}{32}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{9}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{279}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{279}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[32 . . . . 1,16] [33 . . . . 1,20] [34 . . . . 1,17]

Cette partie non périodique de R se continue à la page suivante

(1) Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&+\left(\frac{9}{16}e^2-\frac{9}{4}\gamma^2e^2-\frac{45}{32}e^4-\frac{45}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{27}{64}e^2-\frac{27}{16}\gamma^2e^2-\frac{9}{32}e^4-\frac{2511}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\frac{279}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1377}{512}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{441}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{20601}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2403}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\frac{3}{256}e^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1125}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{675}{1024}e^4\frac{n'^3}{n^3}+\frac{441}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1323}{1024}e^4\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{225}{128}e^4-\frac{1125}{64}e^2e'^2+\frac{675}{32}\gamma^4e^2+\frac{225}{64}\gamma^2e^4+\frac{1125}{16}\gamma^2e^2e'^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{225}{512}e^6+\frac{1125}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}\\
&+\frac{2025}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{21195}{4096}e^2-\frac{4185}{512}\gamma^2e^2+\frac{88695}{16384}e^4+\frac{228285}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&-\frac{170265}{4096}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{50874397}{131072}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1575}{256}e^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}\\
&+\left(\frac{3675}{128}e^2e'^2-\frac{3675}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{3675}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}-\frac{4725}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{833475}{4096}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\left(\frac{225}{128}e^2e'^2-\frac{225}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{225}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}-\frac{2025}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{304695}{4096}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\left(\frac{225}{512}-\frac{2475}{256}\gamma^2+\frac{1125}{1024}e^2+\frac{225}{128}e'^2\right)\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{2025}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{8955}{1024}\frac{n'^3}{n^3}\frac{a^2}{a'^2}\\
&+\frac{2025}{1024}e'^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{75}{128}e'^2\frac{a^2}{a'^2}-\frac{225}{1024}e'^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}\\
&-\frac{75}{4}\gamma^4e^2+\frac{75}{16}\gamma^2e^4+\left(\frac{2925}{64}\gamma^4e^2-\frac{2925}{256}\gamma^2e^4\right)\frac{n'}{n}+\frac{225}{64}\gamma^4e^2\frac{n'}{n}\\
&+\left(\frac{9}{16}\gamma^2-\frac{27}{16}\gamma^4+\frac{63}{32}\gamma^2e^2-\frac{45}{16}\gamma^2e'^2+\frac{9}{8}\gamma^6-\frac{603}{64}\gamma^4e^2+\frac{135}{16}\gamma^4e'^2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{297}{128}\gamma^2e^4-\frac{315}{32}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\\
&+\left(\frac{27}{64}\gamma^4+\frac{675}{64}\gamma^2e^2-\frac{81}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{2853}{1024}\gamma^2-\frac{6561}{512}\gamma^4-\frac{65997}{2048}\gamma^2e^2+\frac{3411}{512}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&-\frac{9447}{1024}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1040021}{32768}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}
\end{aligned}\right.$$

[35 . . . 1,96]

[35 . . . 1,96] [36 . . . 1,97] [37 . . . 1,100]

[38 . . 1,23] [39 . . . 1,103] [40 . . . 1,134]

[41 . . . 1,125]

[41 . . . 1,125]

[41 . . . 1,125]

[42 . . . 1,126]

[43 . . . 1,130]

[46 . . . 1,330]

[47 . . 1,331] [48 . . . 1,334]

[49 . . . 1,63] [50 . . 1,125]

[52 . . . 1,166]

[52 . . . 1,166]

[52 . . . 1,166]

Cette partie non périodique de R se continue à la page suivante.

(1)
Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&+\left(\frac{147}{32}\gamma^2e'^2-\frac{441}{32}\gamma^4e'^2+\frac{1029}{64}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{189}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27981}{1024}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\&+\left(\frac{9}{32}\gamma^2e'^2-\frac{27}{32}\gamma^4e'^2+\frac{63}{64}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7065}{1024}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\end{aligned}\right.$$

[53 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 1, 167]

[54 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 1, 171]

(2)

$$\frac{3}{4}e'-\frac{9}{2}\gamma^2e'+\frac{9}{8}e^2e'+\frac{27}{32}e'^3+\frac{9}{2}\gamma^4e'-\frac{27}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{81}{16}\gamma^2e'^3$$

$$+\frac{81}{64}e^2e'^3+\frac{261}{256}e'^5+\frac{27}{4}\gamma^4e^2e'+\left(\frac{45}{64}e'-\frac{225}{16}\gamma^2e'+\frac{225}{64}e^2e'\right)\frac{a^2}{a'^2}$$

Cette portion du coefficient du terme (2) a disparu par suite de la 1re opération.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}$$

$$+\left(\frac{3}{8}e'-\frac{9}{2}\gamma^2e'+\frac{3}{2}e^2e'+\frac{63}{64}e'^3+18\gamma^4e'-18\gamma^2e^2e'-\frac{153}{512}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[2 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 8]

$$+\left(\frac{21}{32}e'-\frac{189}{16}\gamma^2e'+\frac{267}{64}e^2e'+\frac{63}{32}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{21}{32}e'-\frac{189}{16}\gamma^2e'+\frac{165}{32}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 8]

$$+\frac{147}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{177}{128}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{9}{8}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[2 · · · · · · · · · · · ·]

$$+\left(\frac{3}{8}e'-\frac{9}{2}\gamma^2e'+\frac{3}{2}e^2e'+\frac{63}{64}e'^3+18\gamma^4e'-18\gamma^2e^2e'-\frac{153}{512}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[2 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 12]

$$-\left(\frac{21}{32}e'-\frac{189}{16}\gamma^2e'+\frac{267}{64}e^2e'+\frac{63}{32}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{21}{32}e'-\frac{189}{16}\gamma^2e'+\frac{165}{32}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 12]

$$-\frac{147}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{177}{128}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{9}{8}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}-\left(\frac{3}{64}e'-\frac{27}{32}\gamma^2e'+\frac{135}{256}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 · · · · · · · · · · 12] [2 · · · · · · · · · · 17]

$$-\frac{21}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{21}{128}e'\frac{n'^6}{n^6}-\left(\frac{3}{64}e'-\frac{27}{32}\gamma^2e'+\frac{135}{256}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{21}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{21}{128}e'\frac{n'^6}{n^6}$$

[2 · · · · · · · 17] [2 · · · · · · · · · · · · · 20]

$$+\frac{3}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{3}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{3}{16}e'\frac{n'^6}{n^6}$$

[2 · · · 24] [2 · · · 26] [3 · · · 2]

Cette portion du coefficient du terme (2) a disparu par suite de la 87e opération.

$$+\left(\frac{21}{32}e'-\frac{21}{8}\gamma^2e'+\frac{105}{32}e^2e'-\frac{789}{256}e'^3+\frac{63}{16}\gamma^4e'-\frac{21}{2}\gamma^2e^2e'-\frac{43239}{2048}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[3 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 88]

$$+\left(\frac{191}{128}e'-\frac{733}{64}\gamma^2e'+\frac{4061}{256}e^2e'-\frac{15497}{512}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[3 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 88]

Ce coefficient du terme (2) se continue à la page suivante

(2)
Suite.

$$+\left(\frac{1957}{384}e' - \frac{8459}{192}\gamma^2 e' + \frac{22853}{384}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{34943}{4608}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{827147}{27648}e'\frac{n'^6}{n^6}$$
[3 . . . . 88]

$$-\left(\frac{3}{32}e' - \frac{3}{8}\gamma^2 e' + \frac{15}{32}e^2 e' - \frac{63}{256}e'^3 + \frac{9}{16}\gamma^4 e' - \frac{3}{2}\gamma^2 e^2 e' - \frac{6177}{2048}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
[3 . . . . 92]

$$-\left(\frac{143}{128}e' - \frac{637}{64}\gamma^2 e' + \frac{3149}{256}e^2 e' - \frac{1839}{512}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
[3 . . . . 92]

$$-\left(\frac{511}{384}e' - \frac{2273}{192}\gamma^2 e' + \frac{6875}{384}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{21215}{4608}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{203885}{27648}e'\frac{n'^6}{n^6} + \frac{7533}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}$$
[3 . . . . 92] [4 . . . . 2]

$$-\left(\frac{567}{32}e' - \frac{567}{8}\gamma^2 e' - \frac{4347}{32}e^2 e' - \frac{21303}{256}e'^3 + \frac{1701}{16}\gamma^4 e' + \frac{945}{2}\gamma^2 e^2 e' + \frac{237195}{2048}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
[4 . . . . 117]

$$-\left(\frac{4779}{128}e' - \frac{8829}{64}\gamma^2 e' - \frac{81783}{256}e^2 e' - \frac{111213}{512}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
[4 . . . . 117]

$$-\left(\frac{18531}{128}e' - \frac{56853}{64}\gamma^2 e' - \frac{401451}{256}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{20127}{64}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{861553}{2048}e'\frac{n'^6}{n^6} - \frac{45}{2}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$
[4 . . . . 117]

$m'\dfrac{a^2}{a'^3}$

$$+\left(\frac{81}{32}e' - \frac{81}{8}\gamma^2 e' - \frac{621}{32}e^2 e' - \frac{1701}{256}e'^3 + \frac{243}{16}\gamma^4 e' + \frac{135}{2}\gamma^2 e^2 e' + \frac{33885}{2048}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
[4 . . . . 121]

$$+\left(\frac{891}{128}e' - \frac{1053}{64}\gamma^2 e' - \frac{24813}{512}e^2 e' - \frac{9963}{512}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
[4 . . . . 121]

$$+\left(\frac{3033}{128}e' - \frac{7551}{64}\gamma^2 e' - \frac{22287}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{4107}{64}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{200863}{2048}e'\frac{n'^6}{n^6}$$
[4 . . . . 121]

$$-\frac{11907}{4096}e'\frac{n'^6}{n^6} - \frac{11907}{2048}e'\frac{n'^6}{n^6} - \frac{9639}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2} - \frac{508113}{1024}e'^3\frac{n'^3}{n^3} - \frac{243}{1024}e'^3\frac{n'^3}{n^3}$$
[4 . . . 214] [5 . . . 116] [5 . . . . 118] [6 . . . 122]

$$-\left(\frac{63}{128}e' - \frac{315}{64}\gamma^2 e' + \frac{4935}{512}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{1161}{512}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{26873}{4096}e'\frac{n'^6}{n^6}$$
[7 . . . . 87]

$$+\frac{357}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2} + \frac{30957}{1024}e'^3\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{9}{128}e' - \frac{45}{64}\gamma^2 e' + \frac{705}{512}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{489}{512}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{10111}{4096}e'\frac{n'^6}{n^6}$$
[7 . . . . 89] [8 . . . . 87]

$$+\frac{135}{1024}e'^3\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{93}{16}e' - \frac{423}{8}\gamma^2 e' + \frac{2403}{256}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{345}{64}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{120069}{512}e'\frac{n'^6}{n^6}$$
[8 . . . 95] [9 . . . . 7]

$$+\frac{27}{32}e'^3\frac{n'^2}{n^2} - \frac{783}{256}e'^3\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{93}{16}e' - \frac{423}{8}\gamma^2 e' + \frac{2403}{256}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{2391}{64}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{179517}{512}e'\frac{n'^6}{n^6}$$
[9 . . . . 13] [10 . . . . 7]

Cette portion du coefficient du terme (2) a disparu par suite de la 37e opération.

Ce coefficient du terme (2) se continue à la page suivante.

(2)
Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{$$

$$+\frac{27}{32}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{783}{256}e'^3\frac{n'^3}{n^3}-\frac{93}{64}e'\frac{n'^6}{n^6}-\frac{135}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}-\frac{135}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}-\frac{11109}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}$$

[10 · · · · · · · · · · · 9] [11 · · 12] [14 · · 88] [14 · · 92] [17 · · · 237]

$$+\frac{1587}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{2835}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}-\frac{405}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1125}{1024}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{225}{1024}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[17 · · 240] [18 · 223] [18 · · 225] [19 · · · · 386] [19 · · · · 388]

$$-\frac{10125}{512}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{2025}{512}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{27}{512}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{9}{512}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[20 · · · · 100] [20 · · · · 402] [21 · · · 317] [21 · · · 319]

$$+\left(\frac{9}{8}\gamma^4e'+\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{9}{8}\gamma^4e'+\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{243}{8}\gamma^4e'-\frac{243}{8}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[22 · · · · · · · · · 45] [22 · · · · · · · · · · 47] [23 · · · · · · · · · · · 59]

$$-\left(\frac{243}{8}\gamma^4e'-\frac{243}{8}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{63}{8}\gamma^4e'-\frac{63}{8}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{9}{8}\gamma^4e'-\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[23 · · · · · · · · · · · 61] [24 · · · · · · · · · · 176] [24 · · · · · · · · · · 178]

$$+\left(\frac{63}{8}\gamma^4e'+\frac{63}{8}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{9}{8}\gamma^4e'+\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[25 · · · · · · · · · · 189] [25 · · · · · · · · · 191]

$$+\left(\frac{693}{64}e'-\frac{315}{8}\gamma^2e'-\frac{1575}{32}e^2e'-\frac{26037}{512}e'^3+\frac{1701}{32}\gamma^4e'+\frac{5733}{32}\gamma^2e^2e'+\frac{40761}{512}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[26 · 77]

$$+\left(\frac{819}{32}e'-\frac{9243}{64}\gamma^2e'-\frac{27261}{256}e^2e'-\frac{97461}{256}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[26 · 77]

$$+\left(\frac{4437}{64}e'-\frac{4113}{8}\gamma^2e'-\frac{15831}{32}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{2445}{32}e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9790343}{8192}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{225}{16}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[26 · 77]

$$-\left(\frac{99}{64}e'-\frac{45}{8}\gamma^2e'-\frac{225}{32}e^2e'-\frac{2079}{512}e'^3+\frac{243}{32}\gamma^4e'+\frac{819}{32}\gamma^2e^2e'+\frac{5823}{512}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[26 · 82]

$$-\left(\frac{441}{32}e'-\frac{6435}{64}\gamma^2e'-\frac{13221}{256}e^2e'-\frac{11151}{256}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}-\left(\frac{2295}{64}e'-\frac{2403}{8}\gamma^2e'-\frac{4725}{32}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

[26 · 82]

$$-\frac{2325}{32}e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{5751745}{8192}e'\frac{n'^6}{n^6}-\frac{15}{32}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{273861}{2048}e'\frac{n'^6}{n^6}-\frac{39123}{2048}e'\frac{n'^6}{n^6}$$

[26 · 82] [26 · · · 216] [26 · · · 219]

$$-\frac{39123}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{11781}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{28917}{64}e'^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{5589}{256}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{189}{128}e'^3\frac{n'^3}{n^3}$$

[27 · · · 76] [27 · · · · · · · · · · · · · 78] [28 · · · 76] [28 · · · 83]

$$+\left(\frac{27}{16}\gamma^2e'+\frac{81}{8}\gamma^4e'-\frac{243}{32}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{32}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{64}\gamma^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[29 · 38]

$$+\left(\frac{27}{16}\gamma^2e'+\frac{81}{8}\gamma^4e'-\frac{243}{32}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{32}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{64}\gamma^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[29 · 41]

Cette portion du coefficient du terme (2) a disparu par suite de la 37e opération . . . .

Ce coefficient du terme (2) se continue à la page suivante.

(2)
Suite.

$$+\left(\frac{3}{64}e^2e' - \frac{9}{16}\gamma^2e^2e' + \frac{9}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{21}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{6213}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[32 . . . . 17]

$$+\left(\frac{3}{64}e^2e' - \frac{9}{16}\gamma^2e^2e' + \frac{9}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{21}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{2331}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[32 . . . . 20]

$$+\left(\frac{63}{32}e^2e' - \frac{63}{8}\gamma^2e^2e' - \frac{441}{64}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{45}{8}e^2e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{7497}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[35 . . . . 97]

$$-\left(\frac{9}{32}e^2e' - \frac{9}{8}\gamma^2e^2e' - \frac{63}{64}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{153}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{3519}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[35 . . . . 100]

$$+\frac{9}{512}e^4e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{512}e^4e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{7875}{2048}e^4e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1125}{2048}e^4e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{3087}{2048}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}$$

[38 . . . 24] [38 . . . 26] [39 . . . 104] [39 . . . 106] [40 . . . 135]

$$-\frac{441}{2048}e^4e'\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{1575}{64}e^2e' - \frac{1575}{16}\gamma^2e^2e' - \frac{1575}{128}e^4e' - \frac{59175}{512}e^2e'^3\right)\frac{n'}{n}$$

[40 . . . 137] [41 . . . . 126]

$$+\left(\frac{675}{256}e^2e' - \frac{2025}{64}\gamma^2e^2e' - \frac{3375}{1024}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{171855}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{3164835}{4096}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[41 . . . . 126]

$+ m'\frac{a^2}{a'^3}$

$$-\left(\frac{225}{64}e^2e' - \frac{225}{16}\gamma^2e^2e' - \frac{225}{128}e^4e' - \frac{4725}{512}e^2e'^3\right)\frac{n'}{n}$$

[41 . . . . 130]

$$+\left(\frac{3375}{256}e^2e' - \frac{10125}{64}\gamma^2e^2e' - \frac{16875}{1024}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{20115}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{330255}{4096}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[41 . . . . 130]

$$+\frac{8925}{64}e^2e'^3\frac{n'}{n} + \frac{675}{256}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{2925}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{225}{256}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{3375}{512}e'\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[42 . . . . 127] [46 . . . . 331] [46 . . . . 334]

$$-\frac{225}{8}\gamma^4e^2e' + \frac{225}{32}\gamma^2e^4e' - \frac{225}{8}\gamma^4e^2e' + \frac{225}{32}\gamma^2e^4e'$$

[49 . . . . 64] [49 . . . . 66]

$$+\left(\frac{63}{16}\gamma^2e' - \frac{189}{16}\gamma^4e' + \frac{441}{32}\gamma^2e^2e' - \frac{2367}{128}\gamma^2e'^3\right)\frac{n'}{n}$$

[52 . . . . 167]

$$-\left(\frac{27}{64}\gamma^2e' - \frac{81}{32}\gamma^4e' - \frac{9603}{128}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{5121}{256}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{93531}{1024}\gamma^2e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[52 . . . . 167]

$$-\left(\frac{9}{16}\gamma^2e' - \frac{27}{16}\gamma^4e' + \frac{63}{32}\gamma^2e^2e' - \frac{189}{128}\gamma^2e'^3\right)\frac{n'}{n}$$

[52 . . . . 171]

$$-\left(\frac{135}{64}\gamma^2e' - \frac{405}{32}\gamma^4e' + \frac{1485}{128}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{99}{256}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{2169}{1024}\gamma^2e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{357}{16}\gamma^2e'^3\frac{n'}{n}$$

[52 . . . . 171] [55 . . . 168]

$\times \cos l'$

Cette portion du coefficient du terme (2) a disparu par suite de la 37e opération. . . . .

(3)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{$$

$$\frac{9}{8}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 + \frac{7}{8}e'^4 + \frac{27}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{81}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{21}{4}\gamma^2 e'^4$$

$$+ \frac{21}{16}e^2 e'^4 + \frac{45}{32}e'^2\frac{a^2}{a'^2}$$

Cette portion du coefficient du terme (3) a disparu par suite de la 1re opération.

$$+ \left(\frac{9}{16}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{4}e^2 e'^2 + \frac{41}{32}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{189}{128}e'^2 - \frac{1701}{64}\gamma^2 e'^2 + \frac{2403}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[2 . . . 9]

$$+ \frac{945}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1323}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{9}{16}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{4}e^2 e'^2 + \frac{41}{32}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[2 . . . 9] [2 . . . 13]

$$- \left(\frac{189}{128}e'^2 - \frac{1701}{64}\gamma^2 e'^2 + \frac{2403}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{945}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{1323}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[2 . . . 13]

$$- \frac{9}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{189}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{189}{512}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[2 . . . 18] [2 . . . 21]

$$+ \left(\frac{51}{32}e'^2 - \frac{51}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{255}{32}e^2 e'^2 - \frac{485}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{2839}{512}e'^2 - \frac{11645}{256}\gamma^2 e'^2 + \frac{61285}{1024}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[3 . . . 89]

$$+ \frac{102137}{6144}e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{513793}{18432}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \left(\frac{135}{512}e'^2 - \frac{621}{256}\gamma^2 e'^2 + \frac{2997}{1024}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[3 . . . 89] [3 . . . 93]

$$+ \frac{5715}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1947}{2048}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \left(\frac{1377}{32}e'^2 - \frac{1377}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{10557}{32}e^2 e'^2 - \frac{13095}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[3 . . . 93] [4 . . . 118]

$$- \left(\frac{48195}{512}e'^2 - \frac{83997}{256}\gamma^2 e'^2 - \frac{783631}{1024}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \frac{734553}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{827061}{1024}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[4 . . . 118]

$$+ \left(\frac{243}{512}e'^2 + \frac{243}{256}\gamma^2 e'^2 + \frac{1377}{1024}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{567}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{2835}{1024}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{159705}{16384}e'^4\frac{n'^2}{n^2}$$

[4 . . . 122] [5 . . . 119]

$$+ \left(\frac{567}{64}e'^2 - \frac{567}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{4347}{64}e^2 e'^2 - \frac{5265}{256}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{2187}{64}e'^2 - \frac{729}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{28431}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[5 . . . 121]

$$+ \frac{140589}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{491859}{1024}e'^2\frac{n'^5}{n^5} + \frac{27}{512}e'^4\frac{n'^2}{n^2} + \frac{5915}{512}e'^4\frac{n'^2}{n^2}$$

[5 . . . 121] [6 . . 123] [7 . . . 90]

$$- \left(\frac{21}{64}e'^2 - \frac{21}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{105}{64}e^2 e'^2 - \frac{195}{256}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{291}{64}e'^2 - \frac{321}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{6393}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[7 . . . 92]

$$- \frac{12975}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{22107}{1024}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{1}{512}e'^4\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{9}{16}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{4}e^2 e'^2 + \frac{81}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[7 . . . 92] [8 . . 94] [9 . . . 8]

Cette portion du coefficient du terme (3) a disparu par suite de la 57e opération.

Ce coefficient du terme (3) se continue à la page suivante

(3)
Suite.

$$-\left(\frac{9}{16}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{99}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{8835}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{34899}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{159}{128}e'^4\frac{n'^2}{n^2}$$

[9 . . . . 8] [9 . . 14]

$$-\frac{9}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{99}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{159}{128}e'^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{99}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[9 . . . . . . 16] [10 . . 10] [10 . . . . . . 16]

$$+\frac{279}{32}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{14067}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{279}{32}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{2349}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{153}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{13413}{2048}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[11 . . . . . . 9] [11 . . . . . . 13] [14 . . . . . . 89]

$$+\frac{405}{2048}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{1683}{64}e'^2-\frac{765}{8}\gamma^2e'^2-\frac{3825}{32}e^2e'^2-\frac{16005}{128}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[14 . . . 93] [26 . . . . 78]

$$+\left(\frac{5355}{64}e'^2-\frac{133263}{256}\gamma^2e'^2-\frac{344097}{1024}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{23715}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{6705}{128}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[26 . . . . 78]

$$-\left(\frac{189}{64}e'^2-\frac{5967}{256}\gamma^2e'^2-\frac{10881}{1024}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{765}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{2055}{128}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{195195}{1024}e'^4\frac{n'^2}{n^2}$$

[26 . . . . 83] [27 . . . 79]

$$-\left(\frac{693}{128}e'^2-\frac{315}{16}\gamma^2e'^2-\frac{1575}{64}e^2e'^2-\frac{6435}{512}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[27 . . . . 82]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\left(\frac{7371}{128}e'^2-\frac{26325}{64}\gamma^2e'^2-\frac{55809}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{106947}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{119745}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right.$$

[27 . . . . 82]

$$-\frac{33}{1024}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{243}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{243}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[23 . . . 84] [29 . . . . . . 39] [29 . . . . . . 42]

$$+\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{189}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[30 . . . . . . 38] [32 . . . . . . 18] [32 . . . . . . 21]

$$+\frac{9}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{153}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5661}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{297}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[33 . . . . . . 17] [35 . . . . . . 98] [35 . . . 101]

$$-\frac{63}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4941}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{3825}{64}e^2e'^2-\frac{3825}{16}\gamma^2e^2e'^2-\frac{3825}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

[36 . . . . . . 100] [41 . . . . 127]

$$-\frac{11475}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{981045}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2025}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{103275}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[41 . . . . . . 127] [41 . . . . . . 131]

$$-\left(\frac{525}{64}e^2e'^2-\frac{525}{16}\gamma^2e^2e'^2-\frac{525}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{4875}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{360165}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[42 . . . . 130]

$$+\frac{11925}{2048}e'^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{2475}{2048}e'^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{675}{512}e'^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}$$

[46 . . . 332] [16 . . . 335] [47 . . . 334]

Cette portion du coefficient du terme (3) a disparu par suite de la 57e opération

Ce coefficient du terme (3) se continue à la page suivante

(3) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&+\left(\frac{153}{16}\gamma^2 e'^2-\frac{459}{16}\gamma^4 e'^2+\frac{1071}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{459}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{31365}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\&-\frac{81}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\left(\frac{21}{16}\gamma^2 e'^2-\frac{63}{16}\gamma^4 e'^2+\frac{147}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}\\&-\frac{195}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{651}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}\end{aligned}\right\}$$

[52 . . . 168]

[52 . . . 172] [53 . . . 171]

[53 . . . 171]

Cette portion du coefficient du terme (3) a disparu par suite de la 57e opération

$$\times \cos 2l'$$

(4)

$$\frac{53}{32}e'^3-\frac{159}{16}\gamma^2 e'^3+\frac{159}{64}e^2 e'^3+\frac{393}{512}e'^5$$

Cette portion du coefficient du terme (4) a disparu par suite de la 1re opération.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&+\frac{53}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{259}{96}e'^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{53}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{259}{96}e'^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{845}{256}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{22595}{1536}e'^3\frac{n'^3}{n^3}\\&+\frac{1}{256}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{581}{1536}e'^3\frac{n'^3}{n^3}-\frac{22815}{256}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{102789}{512}e'^3\frac{n'^3}{n^3}-\frac{27}{256}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{243}{512}e'^3\frac{n'^3}{n^3}\\&+\frac{1701}{1024}e'^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1377}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{40743}{1024}e'^3\frac{n'^3}{n^3}-\frac{945}{1024}e'^5\frac{n'^3}{n^3}-\frac{51}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{11747}{1024}e'^3\frac{n'^3}{n^3}\\&+\frac{27}{32}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{405}{256}e'^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{32}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{405}{256}e'^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27885}{512}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{53613}{256}e'^3\frac{n'^3}{n^3}\\&+\frac{33}{512}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1071}{256}e'^3\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1323}{128}e'^3\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1683}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1071}{8}e'^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63375}{512}e^2 e'^3\frac{n'}{n}\\&+\frac{75}{512}e^2 e'^3\frac{n'}{n}-\frac{3825}{64}e^2 e'^3\frac{n'}{n}+\frac{2535}{128}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}+\frac{3}{128}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}-\frac{153}{16}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}\end{aligned}\right\}$$

[2 . . . 10] [2 . . . 14] [3 . . . 90]

[3 . . . 94] [4 . . . 119] [4 . . . 123]

[5 . . . 122] [6 . . . 118] [7 . . . 93] [8 . . . 89]

[9 . . . 9] [10 . . . 13] [26 . . . 79]

[26 . . . 84] [27 . . . 83] [28 . . . 78] [41 . . . 128]

[41 . . . 132] [43 . . . 127] [52 . . . 169] [52 . . . 173] [54 . . . 168]

Cette portion du coefficient du terme (4) a disparu par suite de la 57e opération.

$$\times \cos 3l'$$

(5)

$$\frac{77}{32}e'^4-\frac{231}{16}\gamma^2 e'^4+\frac{231}{64}e^2 e'^4$$

Cette portion du coefficient du terme (5) a disparu par suite de la 1re opération.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&+\frac{77}{64}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{77}{64}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1599}{256}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1}{128}e'^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{43173}{256}e'^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{128}e'^4\frac{n'^2}{n^2}\\&-\frac{189}{512}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{22815}{512}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7}{512}e'^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{845}{512}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{159}{128}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{159}{128}e'^4\frac{n'^2}{n^2}\\&+\frac{81}{64}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{52767}{512}e'^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{33}{256}e'^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1911}{128}e'^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27885}{1024}e'^4\frac{n'^2}{n^2}\end{aligned}\right\}$$

[2 . . . 11] [2 . . . 15] [3 . . . 91] [3 . . . 95] [4 . . . 120] [4 . . . 124]

[5 . . . 123] [6 . . . 119] [7 . . . 94] [8 . . . 90] [9 . . . 10] [10 . . . 14]

[12 . . . 9] [26 . . . 80] [26 . . . 85] [27 . . . 84] [28 . . . 79]

Cette portion du coefficient du terme (5) a disparu par suite de la 57e opération.

$$\times \cos 4l'$$

(6)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1773}{512}e'^5\right\}\cos 5l'$$

Ce terme (6) a disparu par suite de la 1re opération.

(7)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}e+3\gamma^2e+\frac{1}{16}e^3-\frac{3}{4}ee'^2-3\gamma^4e-\frac{3}{8}\gamma^2e^3+\frac{9}{2}\gamma^2ee'^2-\frac{1}{384}e^5+\frac{3}{32}e^3e'^2 \\ -\frac{15}{16}ee'^4-\frac{9}{16}e\frac{a^2}{a'^2}+\underset{[1\cdots\cdots7]}{\frac{441}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots8]}{\left(\frac{63}{32}ee'^2-\frac{189}{8}\gamma^2ee'^2+\frac{153}{256}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}} \\ -\underset{[1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots12]}{\left(\frac{63}{32}ee'^2-\frac{189}{8}\gamma^2ee'^2+\frac{153}{256}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}} \\ \\ +\underset{[2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots16]}{\left(\frac{1}{8}e-\frac{3}{2}\gamma^2e+\frac{11}{32}e^3+\frac{3}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7}{32}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdot\cdot23]}{\frac{3}{64}e\frac{n'^4}{n^4}} \\ +\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots76]}{\left(\frac{15}{8}e-\frac{27}{4}\gamma^2e-\frac{1071}{128}e^3-\frac{75}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{13}{8}e-6\gamma^2e-\frac{237}{32}e^3-\frac{785}{8}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}} \\ +\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots76]}{\frac{1451}{96}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{2159}{144}e\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots96]}{\left(\frac{3}{8}e-\frac{3}{2}\gamma^2e-\frac{3}{32}e^3-\frac{15}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}} \\ +\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots96]}{\left(\frac{1}{4}e-\gamma^2e+\frac{11}{16}e^3-\frac{353}{16}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1117}{384}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1297}{576}e\frac{n'^5}{n^5}} \\ -\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots76]}{\left(\frac{297}{16}e-\frac{135}{2}\gamma^2e-\frac{3177}{64}e^3-\frac{1485}{16}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}} \\ -\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots76]}{\left(\frac{189}{4}e-\frac{351}{2}\gamma^2e-\frac{8325}{64}e^3-\frac{16065}{32}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{6663}{32}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{8095}{16}e\frac{n'^5}{n^5}} \\ +\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots125]}{\left(\frac{135}{16}e-\frac{135}{4}\gamma^2e-\frac{315}{16}e^3-\frac{675}{16}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}} \\ +\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots125]}{\left(\frac{135}{8}e-\frac{135}{2}\gamma^2e-\frac{315}{8}e^3-\frac{675}{32}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2433}{32}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{10003}{64}e\frac{n'^5}{n^5}} \\ -\underset{[5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots77]}{\frac{14553}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{281799}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot126]}{\frac{6615}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{65205}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} \\ -\underset{[6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots82]}{\frac{297}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{10017}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot130]}{\frac{135}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1485}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} \end{array}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (7) a disparu par suite de la 2e opération.

[Cette portion du coefficient du terme (7) a disparu par suite de la 11e opération . . . .]

Ce coefficient du terme (7) se continue à la page suivante

(7) Suite.

$+ m'\frac{a^2}{a'^3}$

$$+\frac{735}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{6951}{64}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{147}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2919}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[7 · · · · · · · · · · · · 77] [7 · · · · · · · · · · · · 97]

$$+\frac{15}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{733}{64}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{3}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{337}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[8 · · · · · · · · · · · 82] [8 · · · · · · · · · · 100]

$$+\frac{9}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{225}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{225}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[9 · · · · · · · · · · · · 20] [10 · · · · · · · · · · · 17]

Cette portion du coefficient du terme (7) a disparu par suite de la 11ᵉ opération.

$$+\frac{31}{16}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{57}{8}e\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9}{4}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{57}{8}e\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9}{32}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3}{4}e\frac{n'^5}{n^5}+\frac{3}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}$$

[11 · · · · · · · · 16] [14 · · · · · · · 76] [14 · · · · · · · 96] [22 · · 37] [23 · · 37]

$$+\frac{9}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{2}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}-\frac{9}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{2}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{3}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{225}{256}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{225}{512}e^3\frac{n'^3}{n^3}$$

[24 · · · · · · · · 166] [25 · · · · · · · · · 166] [32 · · 23] [35 · · · · · · · · · 103]

$$-\frac{315}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{315}{64}e^3\frac{n'^3}{n^3}-\left(\frac{135}{8}\gamma^2e-\frac{45}{1024}e^3+\frac{9045}{256}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{291915}{2048}e\frac{n'^5}{n^5}$$

[40 · · · · · · · · · 125] [41 · 116]

$$-\frac{7175}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{5145}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}+\frac{2955}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{315}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}+\frac{135}{512}e\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{495}{512}e\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}$$

[42 · · · 117] [42 · · · 135] [43 · · · 121] [43 · · · 137] [46 · · · 309] [46 · · · 317]

$$+\frac{9}{32}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}-\frac{147}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{147}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{9}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{9}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}$$

[52 · · 175] [53 · · · 176] [53 · · · 189] [54 · · · 178] [54 · · · 191]

$\cos l$

(8)

$+ m'\frac{a^2}{a'^3}$

$$-\frac{3}{4}ce'+\frac{9}{2}\gamma^2ce'+\frac{3}{32}e^3e'-\frac{27}{32}ce-\frac{9}{2}\gamma^4ce'-\frac{9}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{1}{256}e^5e'-\frac{45}{32}ce'\frac{a^2}{a'^2}$$

$$-\left(\frac{21}{16}ce'-\frac{63}{4}\gamma^2ce'+\frac{51}{128}e^3e'+\frac{441}{128}ce'^3\right)\frac{n'}{n}+\frac{189}{64}ce'^3\frac{n'}{n}-\frac{189}{128}ce'^3\frac{n'}{n}-\frac{87}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[1 · 7] [1 · · · · 9] [1 · · · 12] [2 · · · 8]

$$-\frac{45}{64}ce'\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{3}{16}ce'-\frac{9}{4}\gamma^2ce'+\frac{33}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{32}ce'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{21}{64}ce'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 · · · 12] [2 · 17] [2 · · · 21]

$$-\frac{393}{512}ce'\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{15}{16}ce'-\frac{27}{8}\gamma^2ce'-\frac{1071}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1229}{128}ce'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{349}{24}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[3 · · · 8] [3 · 82]

$$+\left(\frac{21}{16}ce'-\frac{21}{4}\gamma^2ce'-\frac{21}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{127}{32}ce'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9403}{768}ce'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{22923}{512}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[3 · 97] [4 · · · · · 8]

$$-\left(\frac{2079}{32}ce'-\frac{945}{4}\gamma^2ce'-\frac{22239}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{28539}{128}ce'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{111453}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[4 · 77]

Cette portion du coefficient du terme (8) a disparu par suite de la 10ᵉ opération

Ce coefficient du terme (8) se continue à la page suivante.

(8) Suite.

$$-\left(\frac{135}{32}ee'-\frac{135}{8}\gamma^2ee'-\frac{315}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{675}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{15}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[4 . . . . 130]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&+\left(\frac{945}{32}ee'-\frac{945}{8}\gamma^2ee'-\frac{2205}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{11745}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{54117}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\left(\frac{297}{32}ee'-\frac{135}{4}\gamma^2ee'-\frac{3177}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1323}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{8991}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\left(\frac{105}{16}ee'-\frac{189}{8}\gamma^2ee'-\frac{7497}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2847}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{3867}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}\\
&-\left(\frac{3}{16}ee'-\frac{3}{4}\gamma^2ee'-\frac{3}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{139}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{109}{48}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{3}{16}ee'-\frac{9}{4}\gamma^2ee'+\frac{33}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&-\frac{33}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2127}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}
\end{aligned}\right.$$

[5 . . . . 125]
[6 . . . . 76]
[7 . . . . 76]
[8 . . . . 96] [9 . . . . 16]
[9 . . . . 16]

Cette portion du coefficient du terme (8) a disparu par suite de la 10e opération.

$$+\frac{93}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{63}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{63}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}$$

[11 . . 17] [14 . 82] [14 . . 97] [22 . . 41] [23 . . . 38] [24 . . 171] [25 . . . 167]

$$+\frac{4725}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{18321}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{27}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{256}e^5e'\frac{n'^2}{n^2}$$

[26 . . . 88] [26 . . . 121] [29 . . . 45] [29 . . . 61] [32 . . . 12] [32 . . . 24]

$$+\frac{9}{256}e^5e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1575}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{225}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2205}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}$$

[33 . . . 23] [35 . . . 92] [35 . . . 104] [37 . . . 103] [40 . . . 126]

$$-\frac{3075}{256}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{195}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{315}{512}e^3e'\frac{n'}{n}-\frac{2835}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{128}ee'\frac{a^2}{a'^2}$$

[41 . . . . 117] [41 . . . . 137] [48 . . . 309]

$$+\frac{135}{8}\gamma^4ee'-\frac{135}{16}\gamma^2e^3e'-\frac{63}{16}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}-\frac{81}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{16}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}-\frac{1323}{128}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}$$

[49 . . . . 59] [52 . . . . 176] [52 . . . . 191]

$$\times\cos(l-l')$$

(9)*

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{9}{8}ee'^2+\frac{27}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{9}{64}e^3e'^2-\frac{7}{8}ee'^4-\frac{27}{32}\gamma^2e^3e'^2-\frac{3}{512}e^5e'^2\\
&-\left(\frac{63}{64}ee'^2-\frac{189}{16}\gamma^2ee'^2+\frac{153}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}-\left(\frac{441}{256}ee'^2+\frac{2583}{2048}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}
\end{aligned}\right.$$

[1 . . . . 7]

Cette portion du coefficient du terme (9) a disparu par suite de la 13e operation.

Ce coefficient du terme (9) se continue a la page suivante.

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 4e opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^3 ou e^5 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (**131**), qui provient du terme (9) dans cette 4e opération.

(9) Suite.

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
-\underset{[1\cdots8]}{\left(\frac{63}{32}ee'^2-\frac{189}{8}\gamma^2ee'^2+\frac{153}{256}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}+\underset{[2\cdots18]}{\left(\frac{9}{32}ee'^2+\frac{99}{128}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} \\
-\underset{[3\cdots83]}{\frac{1125}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n'^3}}+\underset{[3\cdots98]}{\left(\frac{51}{16}ee'^2-\frac{51}{64}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1955}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots78]}{\frac{5049}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{330939}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} \\
+\underset{[4\cdots131]}{\frac{1215}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[5\cdots130]}{\frac{945}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5265}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[6\cdots77]}{\frac{2079}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{25893}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} \\
-\underset{[7\cdots82]}{\frac{105}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{5361}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[8\cdots97]}{\frac{21}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1171}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[9\cdots17]}{\frac{9}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} \\
+\underset{[12\cdots16]}{\frac{9}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{333}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} \\
\\
+\underset{[15\cdots76]}{\frac{255}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{43979}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[16\cdots125]}{\frac{2295}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{153765}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[26\cdots122]}{\frac{2025}{2048}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} \\
-\underset{[35\cdots93]}{\frac{405}{1024}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[42\cdots137]}{\frac{735}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots117]}{\frac{3075}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[52\cdots177]}{\frac{153}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[53\cdots191]}{\frac{21}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[54\cdots176]}{\frac{63}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}
\end{array}\right.
$$

Cette portion du coefficient du terme (9) a disparu par suite de la 13ᵉ opération.

$$\times\cos(l-2l')$$

(10)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{53}{32}ee'^3-\underset{[1\cdots7]}{\frac{371}{384}ee'^3\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots8]}{\frac{189}{128}ee'^3\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots9]}{\frac{189}{64}ee'^3\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots119]}{\frac{38025}{512}ee'^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(l-3l')$$

(11)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{77}{32}ee'^4\right\}\cos(l-4l')$$

(12)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{3}{4}ee'+\frac{9}{2}\gamma^2ee'+\frac{3}{32}e^3e'-\frac{27}{32}ee'^3-\frac{9}{2}\gamma^4ee'-\frac{9}{16}\gamma^2e^3e'-\frac{1}{256}e^5e'-\frac{45}{32}ee'\frac{a^2}{a'^2} \\
+\underset{[1\cdots7]}{\left(\frac{21}{16}ee'-\frac{63}{4}\gamma^2ee'+\frac{51}{128}e^3e'+\frac{441}{128}ee'^3\right)\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots8]}{\frac{189}{128}ee'^3\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots13]}{\frac{189}{64}ee'^3\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots8]}{\frac{45}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}} \\
-\underset{[2\cdots12]}{\frac{87}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[2\cdots20]}{\left(\frac{3}{16}ee'-\frac{9}{4}\gamma^2ee'+\frac{33}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{21}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{21}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots26]}{\frac{9}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}} \\
-\underset{[3\cdots12]}{\frac{393}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[3\cdots77]}{\left(\frac{105}{16}ee'-\frac{189}{8}\gamma^2ee'-\frac{7497}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1853}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{5749}{96}ee'\frac{n'^4}{n^4}}
\end{array}\right.
$$

Cette portion du coefficient du terme (12) a disparu par suite de la 9ᵉ opération.

Ce coefficient du terme (12) se continue à la page suivante.

(12) Suite.

$$+ m'\frac{n'}{n}\left\{\begin{array}{l}
-\left(\frac{3}{16}ce' - \frac{5}{4}\gamma^2 ce' - \frac{3}{64}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{103}{32}ce'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{2701}{768}ce'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{22923}{512}ce'\frac{n'^5}{n^5}
\end{array}\right.$$

[1 · 100] [4 · · · · 12]

$$+\left(\frac{297}{32}ce' - \frac{135}{4}\gamma^2 ce' - \frac{3177}{128}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{10395}{128}ce'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{32415}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[3 · 82]

$$+\left(\frac{945}{32}ce' - \frac{945}{8}\gamma^2 ce' - \frac{2205}{32}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{2565}{64}ce'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{3657}{16}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[4 · 126]

$$-\left(\frac{2079}{32}ce' - \frac{945}{4}\gamma^2 ce' - \frac{22239}{128}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{16443}{64}ce'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{161469}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[5 · 71]

$$-\left(\frac{135}{32}ce' - \frac{135}{8}\gamma^2 ce' - \frac{315}{32}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{945}{128}ce'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{3591}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[6 · 125]

$$+\left(\frac{21}{16}ce' - \frac{21}{4}\gamma^2 ce' - \frac{21}{64}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{219}{64}ce'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{87}{8}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[7 · 96]

$$-\left(\frac{15}{16}ce' - \frac{27}{8}\gamma^2 ce' - \frac{1071}{256}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1807}{128}ce'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{2867}{192}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[8 · 76]

$$+\left(\frac{3}{16}ce' - \frac{9}{4}\gamma^2 ce' + \frac{33}{64}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{33}{64}ce'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{2121}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{93}{32}ce'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{63}{8}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[10 · 16] [11 · · 20] [13 · · 77]

$$+\frac{9}{64}ce'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8}\gamma^2 ce'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{81}{8}\gamma^2 ce'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{63}{8}\gamma^2 ce'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{8}\gamma^2 ce'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{4725}{256}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[11 · · 100] [22 · · 38] [23 · · 41] [24 · · · 167] [25 · · 174] [26 · · · 92]

$$-\frac{19065}{512}ce'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{27}{16}\gamma^2 ce'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{81}{16}\gamma^2 ce'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{256}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{256}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[26 · · · 117] [29 · · 37] [29 · · · 59] [32 · · · 26] [34 · · · 23] [35 · · 58]

$$-\frac{225}{512}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1575}{512}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{315}{256}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{675}{2048}ce'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{2955}{256}ce'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{10025}{512}ce'\frac{n'^4}{n^4}$$

[35 · · · 106] [36 · · · 103] [40 · · · 130] [41 · · · 12] [41 · · · · · · · · · · · · 124]

$$-\frac{2205}{512}e^3 e'\frac{n'}{n} + \frac{2835}{1024}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{165}{128}ce'\frac{a^2}{a'^2} + \frac{135}{8}\gamma^4 ce' - \frac{135}{16}\gamma^2 e^3 e'$$

[41 · · · · · · · · · · · · · 135] [48 · · 337] [49 · · · · · · · · · · 61]

$$-\frac{9}{16}\gamma^2 ce'\frac{n'}{n} + \frac{81}{16}\gamma^2 ce'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{63}{16}\gamma^2 ce'\frac{n'}{n} - \frac{783}{128}\gamma^2 ce'\frac{n'^2}{n^2}$$

[42 · · · · · · · · · · · · 178] [42 · · · · · · · · · · · 180]

$$\times \cos(l + l')$$

[Cette portion du coefficient du terme (12) a disparu par suite de la 9e opération . . .]

(13)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{9}{8}ce'^2+\frac{27}{4}\gamma^2ce'^2+\frac{9}{64}e^3e'^2-\frac{7}{8}ce'^4+\underset{[1\cdots7]}{\left(\frac{63}{64}ce'^2-\frac{189}{16}\gamma^2ce'^2+\frac{153}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[1\cdots7]}{\frac{441}{256}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots12]}{\left(\frac{63}{32}ce'^2-\frac{189}{8}\gamma^2ce'^2+\frac{153}{256}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}+\underset{[2\cdots21]}{\frac{9}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{189}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^2}}\\
&+\underset{[3\cdots78]}{\frac{255}{16}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{26197}{512}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[3\cdots101]}{\frac{99}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots83]}{\frac{7371}{512}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots127]}{\frac{2295}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{16065}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[5\cdots82]}{\frac{2079}{64}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{84483}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[6\cdots126]}{\frac{945}{64}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4185}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[7\cdots100]}{\frac{21}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1605}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[8\cdots77]}{\frac{105}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{6887}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[10\cdots20]}{\frac{9}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[13\cdots16]}{\frac{9}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{333}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[15\cdots96]}{\frac{51}{16}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3383}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[16\cdots76]}{\frac{5049}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{215271}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[26\cdots93]}{\frac{11745}{2048}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[41\cdots122]}{\frac{405}{1024}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3015}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[41\cdots136]}{\frac{5355}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[42\cdots121]}{\frac{6895}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[43\cdots135]}{\frac{2205}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[52\cdots190]}{\frac{153}{16}\gamma^2ce'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[53\cdots178]}{\frac{21}{16}\gamma^2ce'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[54\cdots189]}{\frac{63}{16}\gamma^2ce'^2\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.
$$

Cette portion du coefficient du terme (13) a disparu par suite de la 12e opération.

$$\times\cos(l+2l')$$

(14)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{53}{32}ce'^3+\underset{[1\cdots7]}{\frac{371}{384}ce'^3\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots12]}{\frac{189}{128}ce'^3\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots13]}{\frac{189}{64}ce'^3\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots123]}{\frac{45}{512}ce'^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(l+3l')$$

(15)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{77}{32}ce'^4\right\}\cos(l+4l')$$

(16)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{8}e^2+\frac{3}{4}\gamma^2e^2+\frac{1}{24}e^4-\frac{3}{16}e^2e'^2-\frac{3}{4}\gamma^4e^2-\frac{1}{4}\gamma^2e^4+\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{1}{192}e^6\\
&+\frac{1}{16}e^4e'^2+\frac{9}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2}+\underset{[1\cdots16]}{\frac{441}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots17]}{\frac{63}{64}e^2e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots20]}{\frac{63}{64}e^2e'^2\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.
$$

Cette portion du coefficient du terme (16) a disparu par suite de la 32e opération

Ce coefficient du terme (16) se continue à la page suivante

(16) Suite.

$$+\left(\frac{3}{32}e^2-\frac{9}{8}\gamma^2e^2+\frac{13}{64}e^4+\frac{9}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{29}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 . . . 23] [2 . . 28] [3 . . . 16]

$$+\left(\frac{75}{128}e^2-\frac{75}{32}\gamma^2e^2-\frac{325}{256}e^4-\frac{375}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{25}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{7771}{1536}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[3 . . . 103]

$$-\left(\frac{93}{16}e^2-21\gamma^2e^2-\frac{1931}{128}e^4-\frac{465}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{71}{16}e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{41449}{768}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[3 . . . 116]

$$+\frac{2349}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{189}{128}e^2-\frac{189}{32}\gamma^2e^2-\frac{135}{256}e^4-\frac{945}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{189}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{5055}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[4 . . . 16] [4 . . . 134]

$$-\frac{2205}{8}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9261}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{8}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{189}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3675}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[5 . . . 88] [5 . . . 135] [6 . . . 92] [6 . . . 137] [7 . . . 104]

$$+\frac{75}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{93}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{225}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[8 . . . 106] [9 . . . 8] [9 . . . 26] [10 . . . 24] [11 . . 23] [14 . . 103]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}$$

$$-\frac{9}{4}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{4}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[22 . . 58] [24 . . 188] [26 . . 16]

$$+\left(\frac{27}{8}e^2-\frac{99}{8}\gamma^2e^2-\frac{1017}{64}e^4-\frac{135}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{16}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{4221}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[26 . . . 96]

$$+\left(\frac{45}{8}e^2-\frac{315}{16}\gamma^2e^2-\frac{1395}{128}e^4-\frac{225}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{8}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{13203}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1323}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[26 . . . 125] [27 . . . 97]

$$+\frac{2205}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{8}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{16}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[27 . . . 126] [28 . . . 100] [28 . . . 150] [29 . . 49] [29 . . . 63]

$$+\frac{1}{48}e^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{63}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{81}{64}e^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{315}{256}e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{945}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{45}{128}e^4\frac{n'}{n}-\frac{135}{512}e^4\frac{n'^2}{n^2}$$

[32 . . 28] [35 . . 76] [35 . . 108] [41 . . . 76] [41 . . . 139]

$$-\frac{45225}{8192}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9}{32}\gamma^2e^2\frac{n'}{n}+\frac{27}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{32}\gamma^2e^2\frac{n'}{n}+\frac{27}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[41 . . . 243] [52 . . . 180] [52 . . . 195]

$$\times \cos 2l$$

[Cette portion du coefficient du terme (16) a disparu par suite de la 32e opération . . . . . .]

$$
(17)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
& -\frac{3}{16}e^2e' + \frac{9}{8}\gamma^2e^2e' + \frac{1}{16}e^4e' - \frac{27}{128}e^2e'^3 - \underset{[1\cdots\cdots16]}{\left(\frac{21}{32}e^2e' - \frac{63}{8}\gamma^2e^2e' + \frac{1}{16}e^4e'\right)\frac{n'}{n}}\\
& \underset{[2\cdots\cdots8]}{-\frac{9}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[2\cdots\cdots24]}{+\frac{9}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{189}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[3\cdots\cdots104]}{+\frac{525}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{7925}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
& \underset{[3\cdots\cdots121]}{+\frac{93}{32}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1693}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[4\cdots\cdots88]}{-\frac{315}{4}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{88029}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[4\cdots\cdots137]}{+\frac{189}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{5859}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
& \underset{[5\cdots\cdots134]}{-\frac{1323}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{16443}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[8\cdots\cdots103]}{-\frac{75}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{3475}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[9\cdots\cdots23]}{+\frac{9}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{99}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
& \underset{[26\cdots\cdots97]}{+\frac{189}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{6723}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[26\cdots\cdots130]}{-\frac{45}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{3735}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[27\cdots\cdots125]}{+\frac{315}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{10665}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
& \underset{[28\cdots\cdots96]}{-\frac{27}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{2349}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\[2ex]
& \underset{[41\cdots77]}{-\frac{1575}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[41\cdots142]}{+\frac{45}{256}e^4e'\frac{n'}{n}} \underset{[42\cdots139]}{-\frac{105}{128}e^4e'\frac{n'}{n}} \underset{[43\cdots76]}{+\frac{315}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[52\cdots181]}{-\frac{63}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}} \underset{[52\cdots196]}{+\frac{9}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}\\
& \underset{[53\cdots193]}{-\frac{21}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}} \underset{[54\cdots180]}{+\frac{9}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.
$$

$$\times \cos(2l - l')$$

Cette portion du coefficient du terme (17) a disparu par suite de la 34e opération.

$$
(18)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
& -\frac{9}{32}e^2e'^2 + \frac{27}{16}\gamma^2e^2e'^2 + \frac{3}{32}e^4e'^2 \underset{[1\cdots\cdots16]}{-\frac{63}{128}e^2e'^2\frac{n'}{n} - \frac{441}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[1\cdots17]}{-\frac{63}{64}e^2e'^2\frac{n'}{n}} \underset{[2\cdots9]}{-\frac{27}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
& \underset{[2\cdots25]}{+\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[3\cdots105]}{+\frac{1275}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[4\cdots89]}{-\frac{765}{4}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[5\cdots137]}{+\frac{1323}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[6\cdots88]}{+\frac{315}{8}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
& \underset{[8\cdots104]}{-\frac{525}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[9\cdots24]}{+\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[12\cdots23]}{+\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[16\cdots134]}{-\frac{3213}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[26\cdots98]}{+\frac{459}{16}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
& \underset{[27\cdots130]}{-\frac{315}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[28\cdots97]}{-\frac{189}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[41\cdots18]}{+\frac{2025}{2048}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[41\cdots\cdots78]}{-\frac{765}{16}e^2e'^2\frac{n'}{n} - \frac{103275}{1024}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
& \underset{[49\cdots39]}{+\frac{135}{32}\gamma^2e^2e'^2}
\end{aligned}\right.
$$

$$\times \cos(2l - 2l')$$

$$
(19)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{53}{128}e^2e'^3\right\}\cos(2l - 3l')
$$

$$(20)\quad \frac{3}{16}e^2e' + \frac{9}{8}\gamma^2e^2e' + \frac{1}{16}e^4e' - \frac{27}{128}e^2e'^3 + \underset{[1\cdots\cdots\cdots\cdots16]}{\left(\frac{21}{32}e^2e' - \frac{63}{8}\gamma^2e^2e' + \frac{1}{16}e^4e'\right)\frac{n'}{n}}$$

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\underset{[2\cdots\cdots\cdots12]}{\frac{9}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[2\cdots\cdots\cdots26]}{\frac{9}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{189}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[3\cdots\cdots\cdots106]}{\frac{75}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{6725}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[3\cdots\cdots\cdots117]}{\frac{651}{32}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{5101}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[4\cdots\cdots\cdots92]}{\frac{45}{4}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{41805}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[4\cdots\cdots\cdots135]}{\frac{1323}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{3213}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[6\cdots\cdots\cdots134]}{\frac{189}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1323}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[7\cdots\cdots\cdots103]}{\frac{525}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{5475}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[10\cdots\cdots\cdots23]}{\frac{9}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{99}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[26\cdots\cdots\cdots100]}{\frac{27}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{4779}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[26\cdots\cdots\cdots126]}{\frac{315}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{5\cdot5}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[27\cdots\cdots\cdots96]}{\frac{189}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{5589}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[28\cdots\cdots\cdots125]}{\frac{45}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{3465}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[41\cdots82]}{\frac{315}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[41\cdots140]}{\frac{315}{256}e^4e'\frac{n'}{n}} - \underset{[42\cdots76]}{\frac{735}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[43\cdots139]}{\frac{45}{128}e^4e'\frac{n'}{n}} + \underset{[52\cdots183]}{\frac{9}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}} - \underset{[52\cdots194]}{\frac{63}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[53\cdots180]}{\frac{21}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}} + \underset{[54\cdots193]}{\frac{9}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2l + l')$$

Cette portion du coefficient du terme (20) a disparu par suite de la 33e opération.

$$(21)\quad -\frac{9}{32}e^2e'^2 + \frac{27}{16}\gamma^2e^2e'^2 + \frac{3}{32}e^4e'^2 + \underset{[1\cdots\cdots\cdots\cdots16]}{\frac{63}{128}e^2e'^2\frac{n'}{n} - \frac{441}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[1\cdots20]}{\frac{63}{64}e^2e'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[2\cdots15]}{\frac{27}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}$$

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&+\underset{[2\cdots27]}{\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[3\cdots118]}{\frac{1581}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdots136]}{\frac{3213}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[5\cdots92]}{\frac{315}{8}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[6\cdots135]}{\frac{1323}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[7\cdots106]}{\frac{525}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[10\cdots26]}{\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[13\cdots23]}{\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[15\cdots103]}{\frac{1275}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdots127]}{\frac{765}{16}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[27\cdots100]}{\frac{189}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[28\cdots126]}{\frac{315}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[35\cdots78]}{\frac{1377}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdots21]}{\frac{2025}{2048}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdots83]}{\frac{3105}{1024}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[49\cdots12]}{\frac{135}{32}\gamma^2e^2e'^2}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2l + 2l')$$

(22)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{53}{128}e^2e'^3\right\}\cos(2l+3l')$$

(23)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{16}e^3+\frac{3}{8}\gamma^2e^3+\frac{9}{256}e^5-\frac{3}{32}e^3e'^2+\underset{[1\cdots24]}{\frac{189}{256}e^3e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots26]}{\frac{189}{256}e^3e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots16]}{\frac{61}{192}e^3\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[2\cdots28]}{\frac{1}{12}e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots\cdots108]}{\frac{27}{32}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{16}e^3\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[3\cdots\cdots125]}{\frac{555}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{185}{64}e^3\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots\cdots96]}{\frac{1719}{64}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2367}{32}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[4\cdots\cdots139]}{\frac{27}{64}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{32}e^3\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[26\cdots\cdots103]}{\frac{1875}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{375}{64}e^3\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[26\cdots\cdots134]}{\frac{273}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{105}{256}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[41\cdots87]}{\frac{2025}{2048}e^3\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[41\cdots143]}{\frac{765}{4096}e^5\frac{n'}{n}}-\underset{[52\cdots184]}{\frac{9}{64}\gamma^2e^3\frac{n'}{n}}-\underset{[52\cdots197]}{\frac{9}{64}\gamma^2e^3\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos 3l$$

Cette portion du coefficient du terme (23) a disparu par suite de la 38e opération.

(24)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{3}{32}e^3e'+\frac{9}{16}\gamma^2e^3e'+\frac{27}{512}e^5e'-\underset{[1\cdots23]}{\frac{63}{128}e^3e'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots17]}{\frac{61}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots29]}{\frac{1}{8}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots109]}{\frac{189}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[3\cdots130]}{\frac{555}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots97]}{\frac{12033}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots142]}{\frac{27}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots139]}{\frac{189}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots96]}{\frac{1719}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots125]}{\frac{3885}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[8\cdots108]}{\frac{27}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots28]}{\frac{1}{8}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots16]}{\frac{61}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots104]}{\frac{13125}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots137]}{\frac{273}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[27\cdots134]}{\frac{1911}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[28\cdots103]}{\frac{1875}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots24]}{\frac{2025}{4096}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[39\cdots45]}{\frac{45}{16}\gamma^2e^3e'}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3l-l')$$

(25)*

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{9}{64}e^3e'^2+\frac{27}{32}\gamma^2e^3e'^2+\frac{81}{1024}e^5e'^2-\underset{[1\cdots\cdots23]}{\frac{189}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}-\frac{3969}{2048}e^3e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[1\cdots24]}{\frac{189}{256}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[2\cdots18]}{\frac{183}{256}e^3e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots30]}{\frac{3}{16}e^3e'^2\frac{n'^2}{n^2}}.
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3l-2l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3e opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (131), qui provient du terme (25) dans cette 3e opération.

(26)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{3}{32}e^3e' + \frac{9}{16}\gamma^2e^3e' + \frac{27}{512}e^5e' + \underset{[1\cdots23]}{\frac{63}{128}e^3e'\frac{n'}{n}} - \underset{[2\cdots20]}{\frac{61}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[2\cdots31]}{\frac{1}{8}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[3\cdots111]}{\frac{27}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[3\cdots126]}{\frac{3885}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[4\cdots100]}{\frac{1719}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdots140]}{\frac{189}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[5\cdots96]}{\frac{12033}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[6\cdots139]}{\frac{27}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[7\cdots108]}{\frac{189}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[8\cdots125]}{\frac{1455}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[9\cdots16]}{\frac{61}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[10\cdots28]}{\frac{1}{8}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdots106]}{\frac{1875}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdots135]}{\frac{1911}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[27\cdots103]}{\frac{13125}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[28\cdots134]}{\frac{273}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdots26]}{\frac{2025}{4096}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[49\cdots47]}{\frac{45}{16}\gamma^2e^3e'}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3l + l')$$

(27)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{9}{64}e^3e'^2 + \underset{[1\cdots23]}{\frac{189}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[1\cdots26]}{\frac{189}{256}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\right\}\cos(3l + 2l')$$

(28)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{1}{24}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2e^4 + \frac{1}{30}e^6 - \frac{1}{16}e^4e'^2 - \underset{[2\cdots23]}{\frac{139}{512}e^4\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[2\cdots33]}{\frac{125}{1536}e^4\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[3\cdots112]}{\frac{2401}{2048}e^4\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[3\cdots134]}{\frac{901}{2048}e^4\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[4\cdots103]}{\frac{66825}{2048}e^4\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdots143]}{\frac{459}{2048}e^4\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdots108]}{\frac{1053}{256}e^4\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdots139]}{\frac{45}{512}e^4\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[35\cdots125]}{\frac{495}{128}e^4\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdots28]}{\frac{75}{256}e^4\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[49\cdots49]}{\frac{15}{8}\gamma^2e^4}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos 4l$$

(29)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{1}{16}e^4e' - \underset{[1\cdots28]}{\frac{7}{16}e^4e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(4l - l')$$

(30)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{32}e^4e'^2\right\}\cos(4l - 2l')$$

(31)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{1}{16}e^4e' + \underset{[1\cdots28]}{\frac{7}{16}e^4e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(4l + l')$$

(32)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{32}e^4e'^2\right\}\cos(4l + 2l')$$

(33)

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \left\{ -\frac{25}{768} e^5 \right\} \cos 5l$$

(34)

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \left\{ -\frac{25}{512} e^5 e' \right\} \cos (5l - l')$$

(35)

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \left\{ -\frac{25}{512} e^5 e' \right\} \cos (5l + l')$$

(36)

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \left\{ -\frac{9}{320} e^6 \right\} \cos 6l$$

(37)

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \left\{ \begin{aligned}
& \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{15}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{69}{32}\gamma^2 e^4 - \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{45}{16}\gamma^2 \frac{a^2}{a'^2} \\
& \underset{[1 \cdots 37]}{- \frac{27}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[1 \cdots 38]}{- \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'}{n}} \underset{[1 \cdots 41]}{+ \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'}{n}} \underset{[2 \cdots 37]}{- \frac{15}{16}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \\
& \underset{[2 \cdots\cdots 44]}{- \left(\frac{3}{4}\gamma^2 - \frac{21}{4}\gamma^4 + \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{21}{16}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[2 \cdots 49]}{+ \frac{3}{8}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \\
& \underset{[2 \cdots\cdots 58]}{+ \left(\frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{63}{4}\gamma^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{63}{16}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[2 \cdots 63]}{+ \frac{15}{16}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[3 \cdots 37]}{- \frac{15}{64}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \\
& \underset{[3 \cdots\cdots 175]}{- \left(\frac{3}{8}\gamma^2 - \frac{9}{8}\gamma^4 + \frac{9}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{8}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1}{4}\gamma^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{151}{96}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[4 \cdots 37]}{- \frac{1215}{64}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[4 \cdots 156]}{+ \frac{135}{32}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \\
& \underset{[4 \cdots\cdots 188]}{- \left(\frac{27}{8}\gamma^2 - \frac{81}{8}\gamma^4 - \frac{9}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{135}{8}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{27}{4}\gamma^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{465}{16}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[5 \cdots 189]}{- \frac{1323}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \\
& \underset{[6 \cdots 191]}{- \frac{27}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[7 \cdots 176]}{- \frac{147}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[8 \cdots 178]}{- \frac{3}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[9 \cdots 47]}{- \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[9 \cdots 59]}{+ \frac{81}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[10 \cdots 45]}{- \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \\
& \underset{[10 \cdots 61]}{+ \frac{81}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[11 \cdots 44]}{- \frac{93}{8}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[11 \cdots 58]}{+ \frac{279}{8}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[14 \cdots 175]}{+ \frac{9}{32}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[26 \cdots 37]}{- \frac{243}{32}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[26 \cdots 147]}{+ \frac{297}{16}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \\
& \underset{[26 \cdots\cdots 166]}{+ \left(\frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{45}{8}\gamma^4 - \frac{99}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{45}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{4}\gamma^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{1359}{64}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4}} \underset{[27 \cdots 167]}{+ \frac{441}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \\
& \underset{[28 \cdots 171]}{+ \frac{9}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned} \right.$$

Cette portion du coefficient du terme (37) a disparu par suite de la 29e opération

Ce coefficient du terme (37) se continue à la page suivante.

(37) Suite

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\underbrace{\frac{3}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[32\,\cdots\,49]}-\underbrace{\frac{15}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[32\,\cdots\,63]}-\underbrace{\frac{9}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[35\,\cdots\,180]}\underbrace{-\frac{45}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'}{n}-\frac{135}{128}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\,\cdots\,193]}\underbrace{+\frac{27}{64}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{81}{256}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[52\,\cdots\,76]}\\
&\underbrace{+\frac{9}{8}\gamma^4\frac{n'}{n}-\frac{27}{32}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}_{[52\,\cdots\,204]}-\underbrace{\frac{189}{512}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[52\,\cdots\,259]}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2g+2l)$$

(38)

$$\begin{aligned}
&\frac{9}{4}\gamma^2 e'-\frac{9}{4}\gamma^4 e'-\frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'+\frac{81}{32}\gamma^2 e'^3+\underbrace{\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e'-\frac{117}{8}\gamma^4 e'-\frac{9}{2}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n}}_{[1\,\cdots\,37]}\\
+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\;&\underbrace{-\frac{9}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[2\,\cdots\,45]}\underbrace{+\frac{27}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[2\,\cdots\,59]}\underbrace{+\frac{3}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{125}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\,\cdots\,178]}\\
&\underbrace{+\frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\,\cdots\,191]}\underbrace{-\frac{189}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2349}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[5\,\cdots\,188]}\underbrace{-\frac{21}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{219}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[7\,\cdots\,175]}\\
&\underbrace{-\frac{9}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{99}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[9\,\cdots\,44]}\underbrace{+\frac{27}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{297}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[10\,\cdots\,58]}\underbrace{-\frac{9}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{639}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[26\,\cdots\,171]}\\
&\underbrace{+\frac{63}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1431}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[27\,\cdots\,166]}\\
&+\underbrace{\frac{45}{64}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}}_{[41\,\cdots\,196]}-\underbrace{\frac{105}{32}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}}_{[42\,\cdots\,193]}+\underbrace{\frac{135}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[52\,\cdots\,77]}-\underbrace{\frac{9}{16}\gamma^4 e'\frac{n'}{n}}_{[52\,\cdots\,204]}+\underbrace{\frac{21}{8}\gamma^4 e'\frac{n'}{n}}_{[54\,\cdots\,201]}-\underbrace{\frac{27}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[54\,\cdots\,76]}
\end{aligned}$$

$$\times\cos(2g+2l-l')$$

Cette portion du coefficient du terme (38) a disparu par suite de la 31e opération

(39)

$$\begin{aligned}
&\frac{27}{8}\gamma^2 e'^2-\frac{27}{8}\gamma^4 e'^2-\frac{135}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\underbrace{+\frac{27}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n}+\frac{27}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[1\,\cdots\,37]}+\underbrace{\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n}}_{[17\,\cdots\,38]}-\underbrace{\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[2\,\cdots\,46]}\\
+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\;&+\underbrace{\frac{81}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[2\,\cdots\,60]}+\underbrace{\frac{189}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[5\,\cdots\,191]}+\underbrace{\frac{21}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[7\,\cdots\,178]}-\underbrace{\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[9\,\cdots\,45]}+\underbrace{\frac{81}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[10\,\cdots\,59]}-\underbrace{\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[12\,\cdots\,44]}\\
&+\underbrace{\frac{81}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[13\,\cdots\,58]}-\underbrace{\frac{51}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[15\,\cdots\,175]}-\underbrace{\frac{459}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[16\,\cdots\,188]}-\underbrace{\frac{63}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[27\,\cdots\,171]}+\underbrace{\frac{45}{32}\gamma^2 e^2 e'^2}_{[49\,\cdots\,18]}-\underbrace{\frac{243}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[52\,\cdots\,39]}\\
&\underbrace{+\frac{153}{8}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n}-\frac{5049}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[52\,\cdots\,78]}
\end{aligned}$$

$$\times\cos(2g+2l-2l')$$

(40)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{159}{32}\gamma^2 e'^3\right\}\cos(2g + 2l - 3l')$$

(41)

$$
+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{9}{4}\gamma^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^4 e' - \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e' + \frac{81}{32}\gamma^2 e'^3 - \underset{[1 \cdots 37]}{\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{117}{8}\gamma^4 e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[2 \cdots 47]}{- \frac{9}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{81}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[2 \cdots 61]}{+ \frac{27}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[3 \cdots 176]}{- \frac{21}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{173}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[4 \cdots 189]}{- \frac{189}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1431}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[6 \cdots 188]}{+ \frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{189}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[8 \cdots 175]}{+ \frac{3}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{139}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[9 \cdots 58]}{+ \frac{27}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{297}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[10 \cdots 44]}{- \frac{9}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{99}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[26 \cdots 167]}{+ \frac{63}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1071}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[28 \cdots 166]}{- \frac{9}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{711}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[41 \cdots 194]}{- \frac{315}{64}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}} \underset{[43 \cdots 193]}{+ \frac{45}{32}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}} \underset{[52 \cdots 82]}{+ \frac{27}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[52 \cdots 202]}{+ \frac{63}{16}\gamma^4 e'\frac{n'}{n}} \underset{[53 \cdots 76]}{+ \frac{63}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[54 \cdots 201]}{- \frac{9}{8}\gamma^4 e'\frac{n'}{n}}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\times \cos(2g + 2l + l')$$

Cette portion du coefficient du terme (41) a disparu par suite de la 30e opération.

(42)

$$
+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{27}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^4 e'^2 - \frac{135}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 \underset{[1 \cdots 37]}{- \frac{27}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n} + \frac{27}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[1 \cdots 41]}{- \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n}} \underset{[2 \cdots 48[}{- \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[2 \cdots 62]}{+ \frac{81}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[3 \cdots 177]}{- \frac{51}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[4 \cdots 190]}{- \frac{459}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[6 \cdots 189]}{+ \frac{189}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[8 \cdots 176]}{+ \frac{21}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[9 \cdots 61]}{+ \frac{81}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[10 \cdots 47]}{- \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[12 \cdots 58]}{+ \frac{81}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[13 \cdots 44]}{- \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[26 \cdots 168]}{+ \frac{153}{8}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[28 \cdots 167]}{- \frac{63}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[49 \cdots 21]}{+ \frac{45}{32}\gamma^2 e^2 e'^2}\\
&\underset{[52 \cdots 42]}{- \frac{243}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[52 \cdots 83]}{+ \frac{675}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\times \cos(2g + 2l + 2l')$$

(43)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{159}{32}\gamma^2 e'^3\right\}\cos(2g + 2l + 3l')$$

$$(44)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned} & \frac{3}{2}\gamma^2 e - \frac{3}{2}\gamma^4 e - \frac{57}{16}\gamma^2 e^3 + \frac{9}{4}\gamma^2 e e'^2 - \underset{[1\cdots 45]}{\frac{243}{32}\gamma^2 e e'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[1\cdots 47]}{\frac{243}{32}\gamma^2 e e'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[2\cdots 37]}{3\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} \\ & - \underset{[2\cdots 49]}{\frac{3}{2}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[3\cdots 166]}{\frac{45}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{15}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[4\cdots 193]}{\frac{27}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{27}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}} \\ & - \underset{[23\cdots 16]}{\frac{9}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[24\cdots 96]}{\frac{9}{4}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{2}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[25\cdots 76]}{\frac{63}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{45}{2}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[41\cdots 156]}{\frac{1035}{32}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[41\cdots 197]}{\frac{135}{128}\gamma^2 e^3\frac{n'}{n}} \\ & + \underset{[52\cdots 87]}{\frac{9}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[52\cdots 211]}{\frac{9}{8}\gamma^4 e\frac{n'}{n}} \end{aligned}\right\}$$

Cette portion du coefficient du terme (44) a disparu par suite de la 22e opération.

$$\times\cos(2g+3l)$$

$$(45)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned} & \frac{9}{4}\gamma^2 e e' - \frac{9}{4}\gamma^4 e e' - \frac{171}{32}\gamma^2 e^3 e' + \underset{[1\cdots 44]}{\frac{81}{16}\gamma^2 e e'\frac{n'}{n}} + \underset{[2\cdots 38]}{\frac{9}{2}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots 50]}{\frac{9}{4}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[3\cdots 171]}{\frac{45}{32}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} \\ & + \underset{[4\cdots 196]}{\frac{27}{32}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[5\cdots 193]}{\frac{189}{32}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[7\cdots 166]}{\frac{315}{32}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[9\cdots 49]}{\frac{9}{4}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[10\cdots 37]}{\frac{9}{2}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[23\cdots 17]}{\frac{27}{16}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} \\ & - \underset{[24\cdots 97]}{\frac{63}{8}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[25\cdots 77]}{\frac{441}{16}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdots 191]}{\frac{45}{64}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[32\cdots 59]}{\frac{27}{32}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[35\cdots 178]}{\frac{9}{32}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[41\cdots 45]}{\frac{2025}{512}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} \\ & + \underset{[49\cdots 24]}{\frac{45}{64}\gamma^2 e^3 e'} - \underset{[52\cdots 45]}{\frac{81}{256}\gamma^2 e e'\frac{n'^2}{n^2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2g+3l-l')$$

$$(46)^{*}\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned} & \frac{27}{8}\gamma^2 e e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^4 e e'^2 - \frac{513}{64}\gamma^2 e^3 e'^2 + \underset{[1\cdots 44]}{\frac{243}{64}\gamma^2 e e'^2\frac{n'}{n} + \frac{2187}{256}\gamma^2 e e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[1\cdots 45]}{\frac{243}{32}\gamma^2 e e'^2\frac{n'}{n}} \\ & + \underset{[2\cdots 39]}{\frac{27}{4}\gamma^2 e e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots 51]}{\frac{27}{8}\gamma^2 e e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2g+3l-2l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvieme ordre, avant la 3e opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (172), qui provient du terme (46) dans cette 3e opération.

(47)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{9}{4}\gamma^2 ee' - \frac{9}{4}\gamma^4 ee' - \frac{171}{32}\gamma^2 e^3 e' - \underset{[1\cdots44]}{\frac{81}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} + \underset{[2\cdots41]}{\frac{9}{2}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots52]}{\frac{9}{4}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[4\cdots167]}{\frac{315}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\ - \underset{[4\cdots194]}{\frac{189}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[6\cdots195]}{\frac{27}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[8\cdots166]}{\frac{45}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[9\cdots37]}{\frac{9}{2}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[10\cdots49]}{\frac{9}{4}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[25\cdots201]}{\frac{27}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\ + \underset{[24\cdots100]}{\frac{9}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[25\cdots82]}{\frac{63}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdots189]}{\frac{315}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[32\cdots61]}{\frac{27}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[35\cdots176]}{\frac{63}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[41\cdots47]}{\frac{2025}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\ + \underset{[49\cdots26]}{\frac{45}{64}\gamma^2 e^3 e'} - \underset{[52\cdots47]}{\frac{81}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$

$$\times \cos(2g + 3l + l')$$

(48)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'^2 - \underset{[1\cdots44]}{\frac{243}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[1\cdots47]}{\frac{243}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2g + 3l + 2l')$$

(49)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 e^2 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e'^2 + \underset{[2\cdots44]}{\frac{87}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots54]}{\frac{75}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[3\cdots188]}{\frac{51}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\ - \underset{[4\cdots197]}{\frac{81}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[23\cdots23]}{\frac{27}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[24\cdots103]}{\frac{225}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdots193]}{\frac{9}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[29\cdots16]}{\frac{3}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[35\cdots166]}{\frac{99}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\ - \underset{[41\cdots49]}{\frac{675}{128}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[49\cdots24]}{\frac{5}{12}\gamma^2 e^4} - \underset{[52\cdots49]}{\frac{27}{128}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$

$$\times \cos(2g + 4l)$$

(50)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' + \underset{[1\cdots49]}{9\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2g + 4l - l')$$

(51)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2\right\}\cos(2g + 4l - 2l')$$

(52)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' - \underset{[1\cdots49]}{9\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2g + 4l + l')$$

(53)

$$-m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2\right\}\cos(2g+4l+2l')$$

(54)

$$-m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{25}{16}\gamma^2 e^3\right\}\cos(2g+5l)$$

(55)

$$-m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{75}{32}\gamma^2 e^3 e'\right\}\cos(2g+5l-l')$$

(56)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{75}{32}\gamma^2 e^3 e'\right\}\cos(2g+5l+l')$$

(57)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{27}{16}\gamma^2 e^4\right\}\cos(2g+6l)$$

(58)*

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
-\frac{9}{2}\gamma^2 e+\frac{9}{2}\gamma^4 e+\frac{39}{16}\gamma^2 e^3-\frac{27}{4}\gamma^2 ee'^2-\frac{39}{16}\gamma^4 e^3+\frac{5}{128}\gamma^2 e^5+\frac{117}{32}\gamma^2 e^3 e'^2\\
-\underset{[1\cdots59]}{\frac{405}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots61]}{\frac{405}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots37]}{\frac{9}{4}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots63]}{\frac{15}{4}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\\
-\underset{[3\cdots180]}{\frac{3}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots166]}{\frac{27}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[22\cdots16]}{\frac{1}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right\}\\
-\underset{[24\cdots76]}{\frac{27}{4}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[25\cdots125]}{\frac{45}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[42\cdots189]}{\frac{735}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[43\cdots191]}{\frac{45}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\\
-\underset{[52\cdots116]}{\frac{27}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[52\cdots205]}{\frac{27}{8}\gamma^4 e\frac{n'}{n}}
\end{array}\right\}$$

Cette portion du coefficient du terme (58) a disparu par suite de la 23e opération.

$$\times\cos(2g+l)$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2e opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^3 ou e^5 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (63) qui provient du terme (58) dans cette 2e opération.

$$(59)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{27}{4}\gamma^2 ee' + \frac{27}{4}\gamma^4 ee' + \frac{117}{32}\gamma^2 e^3 e' + \underset{[1\cdots58]}{\frac{135}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} - \underset{[2\cdots38]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots64]}{\frac{45}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
+ \underset{[3\cdots183]}{\frac{3}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[4\cdots171]}{\frac{27}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[5\cdots166]}{\frac{189}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[7\cdots180]}{\frac{21}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[9\cdots37]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[10\cdots63]}{\frac{45}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
- \underset{[22\cdots20]}{\frac{3}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[24\cdots77]}{\frac{189}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[25\cdots126]}{\frac{315}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdots178]}{\frac{81}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdots45]}{\frac{9}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdots59]}{\frac{6075}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
+ \underset{[41\cdots191]}{\frac{45}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} + \underset{[52\cdots59]}{\frac{243}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right\}$$

$$\times \cos(2g + l - l')$$

$$(60)^{*}\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{81}{8}\gamma^2 ee'^2 + \frac{81}{8}\gamma^4 ee'^2 + \frac{351}{64}\gamma^2 e^3 e'^2 + \underset{[1\cdots58]}{\frac{405}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n} - \frac{2025}{256}\gamma^2 ee'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[1\cdots59]}{\frac{405}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} \\
- \underset{[2\cdots39]}{\frac{81}{16}\gamma^2 ee'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots65]}{\frac{135}{16}\gamma^2 ee'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[42\cdots191]}{\frac{105}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}
\end{array}\right\}$$

$$\times \cos(2g + l - 2l')$$

$$(61)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{27}{4}\gamma^2 ee' + \frac{27}{4}\gamma^4 ee' + \frac{117}{32}\gamma^2 e^3 e' - \underset{[1\cdots58]}{\frac{135}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} - \underset{[2\cdots41]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots66]}{\frac{45}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
- \underset{[3\cdots181]}{\frac{21}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdots167]}{\frac{189}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[6\cdots166]}{\frac{27}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[8\cdots180]}{\frac{3}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[9\cdots65]}{\frac{45}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[10\cdots37]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
- \underset{[22\cdots17]}{\frac{3}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[24\cdots82]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[25\cdots130]}{\frac{45}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdots176]}{\frac{567}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdots47]}{\frac{9}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdots61]}{\frac{6075}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
- \underset{[41\cdots189]}{\frac{315}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} - \frac{405}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[49\cdots12]}{\frac{15}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[52\cdots61]}{\frac{243}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right\}$$

$$\times \cos(2g + l + l')$$

---

[*] On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 4e opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (172) qui provient du terme (60) dans cette 4e opération.

(62)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{81}{8}\gamma^2ee'^2-\underset{[1\cdots58]}{\frac{405}{64}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots61]}{\frac{405}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots190]}{\frac{765}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[45\cdots189]}{\frac{315}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2g+l+2l')$$

(63)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{15}{4}\gamma^4e^2+\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{45}{8}\gamma^4e^2e'^2-\underset{[1\cdots63]}{\frac{1215}{16}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots64]}{\frac{405}{16}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[1\cdots66]}{\frac{405}{16}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots37]}{\frac{15}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[2\cdots58]}{\left(\frac{57}{16}\gamma^2e^2-\frac{615}{16}\gamma^4e^2-\frac{79}{16}\gamma^2e^4+\frac{171}{16}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[2\cdots58]}{\frac{291}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[2\cdots63]}{\frac{15}{2}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[2\cdots68]}{\left(\frac{21}{32}\gamma^2e^2-\frac{147}{32}\gamma^4e^2+\frac{97}{64}\gamma^2e^4+\frac{63}{32}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[2\cdots68]}{\frac{147}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots71]}{\frac{9}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[3\cdots63]}{\frac{585}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[3\cdots184]}{\left(\frac{9}{64}\gamma^2e^2-\frac{27}{64}\gamma^4e^2-\frac{27}{128}\gamma^2e^4-\frac{45}{64}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{197}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[4\cdots175]}{\left(\frac{495}{32}\gamma^2e^2-\frac{1269}{32}\gamma^4e^2-\frac{291}{32}\gamma^2e^4-\frac{2475}{32}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{657}{16}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{25839}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[5\cdots176]}{\frac{24255}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots178]}{\frac{495}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots185]}{\frac{441}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[8\cdots186]}{\frac{9}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[9\cdots61]}{\frac{513}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots69]}{\frac{189}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots59]}{\frac{513}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots70]}{\frac{189}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[11\cdots68]}{\frac{651}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[14\cdots184]}{\frac{27}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[22\cdots23]}{\left(\frac{3}{32}\gamma^2e^2-\frac{21}{32}\gamma^4e^2-\frac{15}{64}\gamma^2e^4+\frac{9}{32}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{8637}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[25\cdots134]}{\left(\frac{63}{64}\gamma^2e^2-\frac{189}{64}\gamma^4e^2+\frac{519}{512}\gamma^2e^4-\frac{315}{64}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{63}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{3921}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[25\cdots205]}{\frac{27}{4}\gamma^4e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots63]}{\frac{1485}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdots164]}{\frac{28899}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[26\cdots180]}{\left(\frac{45}{64}\gamma^2e^2-\frac{117}{64}\gamma^4e^2-\frac{69}{32}\gamma^2e^4-\frac{225}{64}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{8}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{15813}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[27\cdots181]}{\frac{2205}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[28\cdots183]}{\frac{45}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[29\cdots16]}{\left(\frac{3}{16}\gamma^2e^2-\frac{15}{8}\gamma^4e^2-\frac{25}{32}\gamma^2e^4+\frac{9}{16}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

(Cette portion du coefficient du terme (63) a disparu par suite de la 49e opération . . . .

Ce coefficient du terme (63) se continue à la page suivante.

(63) Suite.

$$+\frac{1977}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{135}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{27}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{15}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[29 · · · · 16] [29 · · · 63] [30 · · · · 20] [31 · · · · 17] [32 · · · 49] [32 · · · 63]

$$+\frac{3}{64}\gamma^2e^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{657}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3}{16}\gamma^2e^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{675}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[32 · · · 74] [35 · · · · 63] [35 · · · 147] [35 · · 187] [38 · · · 44] [39 · · · 152]

$$-\left(\frac{3375}{256}\gamma^2e^2-\frac{16875}{256}\gamma^4e^2-\frac{3375}{256}\gamma^2e^4-\frac{23625}{512}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[41 · 63]

$$-\frac{10125}{512}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{3448575}{16384}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{135}{32}\gamma^2e^2-\frac{495}{32}\gamma^4e^2-\frac{135}{64}\gamma^2e^4-\frac{675}{32}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

[41 · · · · · · · · · · · · · · · · 63] [41 · 166]

$$-\left(\frac{135}{128}\gamma^2e^2+\frac{1755}{128}\gamma^4e^2+\frac{3105}{256}\gamma^2e^4+\frac{24975}{256}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{72873}{1024}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1092105}{4096}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[41 · 166]

$$+\frac{131625}{4096}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{18375}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2205}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{37275}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[41 · · · · · 273] [42 · · · · · · · 63] [42 · · · · · · · · · · · · · · · · 167]

$$-\frac{3375}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{3915}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[43 · · · · · · 63] [43 · · · · · · · · · · · · · · · 171]

(Cette portion du coefficient du terme (63) a disparu par suite de la 49e opération

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}$$

$$+\left(\frac{45}{64}\gamma^2e^2+\frac{45}{8}\gamma^4e^2+\frac{585}{256}\gamma^2e^4-\frac{225}{64}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

[50 · 166]

$$-\left(\frac{2025}{1024}\gamma^2e^2+\frac{40365}{1024}\gamma^4e^2-\frac{20925}{2048}\gamma^2e^4+\frac{15165}{2048}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{21357}{16384}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[50 · 166]

$$+\frac{4878807}{262144}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[50 · · · · · · 166]

Cette portion du coefficient du terme (63) a disparu par suite de la 51e opération.

$$+\left(\frac{135}{1024}\gamma^2e^2+\frac{4725}{1024}\gamma^4e^2+\frac{1755}{2048}\gamma^2e^4-\frac{3105}{2048}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4455}{4096}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[52 · 125]

$$+\frac{504549}{262144}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{495}{32}\gamma^4e^2\frac{n'}{n}+\frac{7425}{256}\gamma^4e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3645}{4096}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{223965}{65536}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[52 · · · · 125] [52 · · · · · · · · · · · · · 208] [52 · · · · · · · · · · · · · · 273]

$$+\frac{735}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{11445}{1024}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{135}{1024}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3645}{16}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[53 · · · · · · · · · · · · · · · · 126] [54 · · · · · · · · · · · · · · · 130] [57 · · · · · · · 64]

$$-\frac{3645}{16}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[57 · · · · · · 66]

$$\times\cos 2g$$

(64)

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{45}{8}\gamma^2e^2e' - \frac{45}{8}\gamma^2e^2e' - \underbrace{\frac{135}{8}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}_{[1\cdots 63]} + \underbrace{\frac{171}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[2\cdots 59]} + \underbrace{\frac{63}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[2\cdots 69]} + \underbrace{\frac{9}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\cdots 186]}\\
&- \underbrace{\frac{495}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\cdots 178]} + \underbrace{\frac{3465}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[5\cdots 175]} - \underbrace{\frac{63}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[7\cdots 184]} + \underbrace{\frac{171}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[9\cdots 58]} + \underbrace{\frac{63}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[10\cdots 68]}\\
&- \underbrace{\frac{9}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[22\cdots 26]} + \underbrace{\frac{441}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[25\cdots 135]} + \underbrace{\frac{45}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\cdots 183]} - \underbrace{\frac{315}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[27\cdots 180]} - \underbrace{\frac{9}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[29\cdots 20]}\\
&- \underbrace{\frac{9}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[31\cdots 16]} - \underbrace{\frac{9}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[38\cdots 45]} - \underbrace{\frac{63}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[40\cdots 191]} - \underbrace{\frac{10125}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\cdots 64]}\\
&- \underbrace{\frac{135}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n} - \frac{5535}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\cdots 171]} + \underbrace{\frac{315}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n} + \frac{7935}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[42\cdots 166]}\\
&- \underbrace{\frac{3375}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n} - \frac{45405}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[49\cdots 2]} - \underbrace{\frac{45}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n} - \frac{1215}{2048}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[50\cdots 171]} - \underbrace{\frac{10125}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[51\cdots 2]}\\
&- \underbrace{\frac{405}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[52\cdots 64]} + \underbrace{\frac{315}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n} - \frac{8775}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[52\cdots 126]} - \underbrace{\frac{135}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[54\cdots 125]}
\end{aligned}\right.$$

$$\times \cos(2g - l')$$

(65)

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{135}{16}\gamma^2e^2e'^2 - \underbrace{\frac{405}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[1\cdots 63]} - \underbrace{\frac{405}{16}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[1\cdots 64]} - \underbrace{\frac{315}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[42\cdots 171]} + \underbrace{\frac{2295}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[44\cdots 166]}\\
&- \underbrace{\frac{4125}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[49\cdots 3]} + \underbrace{\frac{765}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[52\cdots 127]} - \underbrace{\frac{315}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[54\cdots 126]}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times \cos(2g - 2l')$$

(66)

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{45}{8}\gamma^2e^2e' - \frac{45}{8}\gamma^2e^2e' + \underbrace{\frac{135}{8}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}_{[1\cdots 63]} + \underbrace{\frac{171}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[2\cdots 61]} + \underbrace{\frac{63}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[2\cdots 70]} - \underbrace{\frac{63}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\cdots 185]}\\
&+ \underbrace{\frac{3465}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\cdots 176]} - \underbrace{\frac{495}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[6\cdots 175]} + \underbrace{\frac{9}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[8\cdots 184]} + \underbrace{\frac{63}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[9\cdots 68]} + \underbrace{\frac{171}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[10\cdots 58]}\\
&- \underbrace{\frac{9}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[22\cdots 24]} - \underbrace{\frac{63}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[25\cdots 137]} - \underbrace{\frac{315}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\cdots 181]} + \underbrace{\frac{45}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[28\cdots 180]} - \underbrace{\frac{9}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[29\cdots 17]}
\end{aligned}\right.$$

Ce coefficient du terme (66) se continue à la page suivante.

(66) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\underset{[30\cdots\cdots16]}{\frac{9}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[38\cdots\cdots47]}{\frac{9}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[40\cdots\cdots189]}{\frac{441}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots\cdots66]}{\frac{10125}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[41\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots167]}{\frac{945}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}+\frac{4725}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[43\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots166]}{\frac{135}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{3915}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[49\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots2]}{\frac{3375}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{45405}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[50\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots167]}{\frac{315}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{10935}{2048}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[51\cdots\cdots2]}{\frac{10125}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[52\cdots\cdots66]}{\frac{405}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[52\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots130]}{\frac{45}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{135}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[53\cdots\cdots125]}{\frac{315}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2g+l')$$

(67)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{135}{16}\gamma^2e^2e'^2+\underset{[1\cdots\cdots63]}{\frac{405}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots\cdots66]}{\frac{405}{16}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[41\cdots\cdots168]}{\frac{2295}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[43\cdots\cdots167]}{\frac{945}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}\\&-\underset{[45\cdots\cdots166]}{\frac{405}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[49\cdots\cdots3]}{\frac{4125}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[50\cdots\cdots168]}{\frac{765}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[53\cdots\cdots130]}{\frac{105}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2g+2l')$$

(68)*

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{7}{16}\gamma^2e^3+\frac{7}{16}\gamma^4e^3-\frac{47}{256}\gamma^2e^5-\frac{21}{32}\gamma^2e^3e'^2\right\}\cos(2g-l)$$

(69)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{21}{32}\gamma^2e^3e'\right\}\cos(2g-l-l')$$

(70)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{21}{32}\gamma^2e^3e'\right\}\cos(2g-l+l')$$

(71)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{32}\gamma^2e^4\right\}\cos(2g-2l)$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2^e opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (63), qui provient du terme (68) dans cette 2^e opération.

(72)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[3\cdots205]}{\frac{9}{16}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots211]}{\frac{27}{16}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[22\cdots58]}{\frac{9}{4}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots201]}{\frac{27}{32}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots49]}{\frac{15}{2}\gamma^4 e^2}\right\}\cos(4g+4l)$$

(73)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots211]}{\frac{45}{32}\gamma^4 e\frac{n'}{n}}\right\}\cos(4g+3l)$$

(74)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[49\cdots15]}{\frac{45}{8}\gamma^4 ee'}\right\}\cos(4g+3l-l')$$

(75)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[49\cdots47]}{\frac{45}{8}\gamma^4 ee'}\right\}\cos(4g+3l+l')$$

(76)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{15}{8}e^2-\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{4}\gamma^4+\frac{15}{4}\gamma^2e^2+\frac{15}{4}\gamma^2e'^2+\frac{69}{64}e^4+\frac{75}{16}e^2e'^2+\frac{39}{64}e'^4\\
&-\frac{15}{8}\gamma^4e^2-\frac{15}{8}\gamma^4e'^2-\frac{69}{32}\gamma^2e^4-\frac{75}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{65}{384}e^6-\frac{345}{128}e^4e'^2\\
&+\left(\frac{5}{16}-5\gamma^2+\frac{5}{16}e^2+\frac{5}{16}e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}-\underset{[1\cdots\cdots76]}{\left(\frac{27}{4}e'^2-\frac{297}{4}\gamma^2e'^2-\frac{27}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[1\cdots\cdots77]}{\left(\frac{63}{8}e'^2-\frac{819}{16}\gamma^2e'^2-\frac{693}{64}e^2e'^2-\frac{135}{16}e'^4\right)\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots78]}{\frac{459}{32}e'^4\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[1\cdots\cdots82]}{\left(\frac{9}{8}e'^2-\frac{117}{16}\gamma^2e'^2-\frac{99}{64}e^2e'^2+\frac{9}{8}e'^4\right)\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots\cdots76]}{\left(\frac{15}{32}-\frac{105}{16}\gamma^2+\frac{1563}{128}e^2+\frac{15}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{105}{64}\frac{n'^6}{n^6}}\\
&-\underset{[2\cdots\cdots87]}{\left(\frac{3}{8}-3\gamma^2+\frac{9}{4}e^2-\frac{3}{8}e'^2+\frac{57}{8}\gamma^4-\frac{63}{4}\gamma^2e^2+3\gamma^2e'^2-\frac{3615}{512}e^4-\frac{9}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{16}e'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[2\cdots\cdots87]}{\left(\frac{21}{32}-\frac{147}{16}\gamma^2+\frac{333}{32}e^2-\frac{3615}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{75}{64}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{27}{64}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}}\\
&+\underset{[2\cdots\cdots96]}{\left(\frac{3}{16}-\frac{21}{8}\gamma^2+\frac{213}{64}e^2+\frac{3}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{21}{32}\frac{n'^6}{n^6}}-\underset{[2\cdots103]}{\frac{25}{256}\frac{n'^6}{n^6}}\\
&+\underset{[2\cdots\cdots116]}{\left(\frac{9}{8}-9\gamma^2-\frac{15}{4}e^2-\frac{9}{8}e'^2+\frac{171}{8}\gamma^4+\frac{93}{4}\gamma^2e^2+9\gamma^2e'^2+\frac{1119}{512}e^4+\frac{15}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.$$

[Cette portion du coefficient du terme (76) a disparu par suite de la 26ᵉ opération. ……]

Ce coefficient du terme (76) se continue à la page suivante.

(76)
Suite.

$$+ m\frac{a^2}{a'^3}\left\{\vphantom{\frac{a}{a}}\right.$$

$$-\frac{27}{16}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{63}{32}-\frac{441}{16}\gamma^2-\frac{345}{32}e^2-\frac{1773}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{129}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{121}{64}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[2 · · · 116]

$$+\left(\frac{15}{32}-\frac{105}{16}\gamma^2-\frac{45}{128}e^2+\frac{15}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{105}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{7}{256}\frac{n'^6}{n^6}$$

[2 · · · 125] [2 · · 134]

$$+\left(\frac{1}{32}-\frac{7}{16}\gamma^2+\frac{71}{128}e^2+\frac{1}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1}{48}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{401}{2304}\frac{n'^6}{n^6}$$

[3 · · · 7]

$$-\left(\frac{15}{128}-\frac{45}{64}\gamma^2+\frac{2109}{512}e^2-\frac{225}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{5}{32}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{361}{256}\frac{n'^6}{n^6}$$

[3 · · · 76]

$$+\left(\frac{3}{64}-\frac{9}{32}\gamma^2+\frac{87}{256}e^2-\frac{45}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1}{16}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{595}{1024}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{35}{128}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[3 · · · 96] [3 · · · 222]

$$+\left(\frac{171}{32}-\frac{261}{8}\gamma^2-\frac{13569}{256}e^2-\frac{2421}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{477}{32}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{42001}{512}\frac{n'^6}{n^6}$$

[4 · · · 7]

$$-\left(\frac{1215}{128}-\frac{3645}{64}\gamma^2-\frac{26487}{512}e^2-\frac{18225}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1215}{32}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{11799}{64}\frac{n'^6}{n^6}$$

[4 · · · 76]

$$+\left(\frac{1215}{128}-\frac{3645}{64}\gamma^2-\frac{30375}{512}e^2-\frac{18225}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1215}{32}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{46467}{256}\frac{n'^6}{n^6}$$

[4 · · · 125]

$$+\left(\frac{135}{64}-\frac{405}{32}\gamma^2-\frac{11925}{256}e^2-\frac{2025}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{45}{8}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{31431}{1024}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{945}{128}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[4 · · · 236]

$$-\left(\frac{189}{32}e'^2-\frac{189}{4}\gamma^2e'^2-\frac{63}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{513}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{164871}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{59535}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[5 · · · 12] [5 · · · 76]

$$+\frac{30429}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{27}{32}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2-\frac{9}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{25461}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[5 · · · 237] [6 · · · 8]

$$-\frac{1215}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{621}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{21}{32}e'^2-\frac{21}{4}\gamma^2e'^2+\frac{63}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{183}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{13725}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[6 · · · 76] [6 · · · 240] [7 · · · 8]

$$-\frac{735}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{4851}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{3}{32}e'^2-\frac{3}{4}\gamma^2e'^2+\frac{9}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{59}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2713}{1536}e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[7 · · · 76] [7 · · · 223] [8 · · · 12]

$$-\frac{15}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{99}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{21}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{27}{32}e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[8 · · · 76] [8 · · · 225] [9 · · · 76] [9 · · · 117] [10 · · · 76] [10 · · 88]

$$+\frac{267}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{279}{64}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{135}{256}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{45}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{675}{512}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{45}{512}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}$$

[10 · · 121] [11 · · 87] [14 · 222] [19 · · · 316] [20 · · · 330] [21 · · · 330]

(Cette portion du coefficient du terme (76) a disparu par suite de la 26ᵉ opération.

Ce coefficient du terme (76) se continue à la page suivante.

(76) Suite.

$$-\left(\frac{3}{4}\gamma^4+\frac{3}{4}\gamma^2e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{27}{4}\gamma^4-\frac{27}{4}\gamma^2e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\Bigg\}$$

[22 · · · · · · · · 188] [23 · · · · · · · · 175]

Cette portion du coefficient du terme (76) a disparu par suite de la 26e opération.

$$m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\left(\frac{81}{16}-\frac{459}{16}\gamma^2-\frac{261}{8}e^2+\frac{243}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{81}{8}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9315}{128}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1155}{256}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\\&-\frac{15435}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3969}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{2205}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{81}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{27}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\\&+\left(\frac{9}{8}\gamma^2-\frac{9}{16}\gamma^2e^2-\frac{9}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{189}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}\\&-\left(\frac{3}{16}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{3}{16}e^4-\frac{3}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{693}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\\&-\left(\frac{15}{32}e^2-\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{15}{128}e^4-\frac{15}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{219}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{315}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}\\&-\frac{63}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1377}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{75}{512}e^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{512}e^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2025}{2048}e^4\frac{n'^2}{n^2}\\&-\frac{3015}{512}e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{20685}{2048}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{45}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2}+\frac{225}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2}+\frac{15}{8}\gamma^4e^2-\frac{15}{32}\gamma^2e^4-\frac{135}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}\\&+\frac{81}{128}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{63}{32}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{375}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\end{aligned}\right.$$

[26 · · · · · · · · 215]

[27 · · · · 2] [27 · · 216] [25 · · · · 2] [28 · 219] [29 · · 147]

[29 · · · · · · · · 166] [30 · · · 167] [31 · · · 171]

[32 · · · · · · · · 96]

[32 · · · · · · · · 125] [33 · · · 100] [33 · · · 126]

[34 · · · 97] [34 · · · 130] [35 · · 227] [38 · · 103] [38 · · 134] [41 · · 139]

[41 · · · · · · · · 243] [48 317] [48 · · 402] [49 · · · · · · · · 180] [52 · · · 37]

[52 · · 201] [52 · · · · · · · · 259]

$$\times\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l')$$

(77)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{21}{8}e'-\frac{21}{4}\gamma^2e'-\frac{105}{16}e^2e'-\frac{369}{64}e'^3+\frac{21}{8}\gamma^4e'+\frac{105}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{369}{32}\gamma^2e'^3+\frac{483}{128}e^4e'\\&+\frac{1845}{128}e^2e'^3+\frac{1467}{512}e'^5+\frac{45}{32}e'\frac{a^2}{a'^2}\\&+\left(\frac{9}{4}e'-\frac{117}{8}\gamma^2e'-\frac{99}{32}e^2e'-\frac{99}{32}e'^3+\frac{117}{4}\gamma^4e'+\frac{369}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{369}{128}e^4e'\right)\frac{n'}{n}\\&-\frac{81}{16}e'^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{165}{32}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{189}{8}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{153}{8}e'^3\frac{n'}{n}-\frac{27}{32}e'^3\frac{n'}{n}-\frac{27}{16}e'^3\frac{n'^2}{n^2}\\&-\frac{105}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{99}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}-\left(\frac{21}{16}e'-\frac{21}{2}\gamma^2e'+\frac{63}{8}e^2e'-\frac{117}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\end{aligned}\right.$$

[1 · · · · · · · · 76]

[1 · · · · · · · · 76] [1 · · · 77] [1 · · · 78] [1 · · · · · · · · 82]

[2 · · · · · · · · 77] [2 · · · · · · · · 88]

Cette portion du coefficient du terme (77) a disparu par suite de la 27e opération

Ce coefficient du terme (77) se continue à la page suivante

(77) Suite.

$$-\left(\frac{135}{64}e' - \frac{891}{32}\gamma^2 e' + \frac{2457}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} - \frac{147}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{945}{256}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{21}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{99}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[2 · · · 88] [2 · · · 97]

$$+\left(\frac{63}{16}e' - \frac{63}{2}\gamma^2 e' - \frac{105}{8}e^2 e' - \frac{351}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{27}{64}e' - \frac{27}{32}\gamma^2 e' + \frac{549}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[2 · · · 117]

$$+\frac{441}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{189}{256}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{105}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{135}{128}e'\frac{n'^5}{n^5} - \left(\frac{3}{16}e' - \frac{3}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{16}e^2 e' - \frac{33}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[2 · · · 115] [2 · · · 126] [3 · · · 12]

$$+\left(\frac{13}{64}e' - \frac{115}{32}\gamma^2 e' + \frac{279}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} - \frac{25}{48}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1297}{2304}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{105}{256}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{35}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[3 · · · 12] [3 · · · 77]

$$-\frac{3}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{107}{256}e'\frac{n'^5}{n^5} - \left(\frac{27}{16}e' - \frac{27}{2}\gamma^2 e' - \frac{9}{16}e^2 e' - \frac{297}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[4 · · · 100] [4 · · · 8]

$$-\left(\frac{405}{64}e' - \frac{2187}{82}\gamma^2 e' + \frac{135}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} - \frac{957}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{24685}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[4 · · · 8]

$$-\frac{8505}{256}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{76059}{512}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{1215}{256}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1215}{512}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{945}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{3825}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[4 · · · 77] [4 · · · 130] [4 · · · 247]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\frac{1953}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{53001}{128}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{81}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2} - \frac{621}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{14427}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}\end{aligned}\right.$$

[5 · · · 71] [6 · · · 9] [6 · · · 256]

$$-\frac{217}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{5455}{128}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{9}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2} - \frac{45}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{2469}{512}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{27}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{81}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[7 · · · 7] [8 · · · 1[illegible]] [8 · · · 222] [9 · · · 87]

$$+\frac{459}{32}e'^3\frac{n'^2}{n^2} - \frac{153}{32}e'^3\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1665}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{6345}{32}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{7749}{512}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{3213}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[9 · · · 118] [10 · · · 89] [26 · · · [illegible]] [26 · · · 77]

$$-\frac{4239}{2048}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{27891}{1024}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{567}{16}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{62613}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[26 · · · 82] [26 · · · 216]

$$+\frac{81}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{5751}{256}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{63}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{81}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}$$

[28 · · · 215] [29 · · · 167] [31 · · · 166]

$$-\frac{21}{32}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{99}{64}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{105}{64}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{128}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{9}{32}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{8}e^2 e'\frac{n'}{n}$$

[32 · · · 57] [32 · · · 126] [33 · · · 96]

$$-\frac{45}{64}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{45}{16}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{72135}{512}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{3015}{512}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{135}{256}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{3375}{256}e'\frac{n}{n}\frac{a^2}{a'^2}$$

[33 · · · 125] [41 · · · 244] [43 · · · 243] [46 · · · 517] [46 · · · 400]

$$-\frac{441}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{63}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}$$

[52 · · · 260] [54 · · · 259]

$$\times \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l')$$

Cette portion du coefficient du terme (77) a disparu par suite de la [illegible] opération

$$
(78)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{51}{8}e'^2 - \frac{51}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{255}{16}e^2 e'^2 - \frac{115}{8}e'^4 + \frac{51}{8}\gamma^4 e'^2 + \frac{255}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{1173}{128}e^4 e'^2\\
&+ \frac{265}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2} + \underset{[1\cdots 76]}{\left(\frac{27}{16}e'^2 - \frac{351}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{297}{128}e^2 e'^2 - \frac{93}{32}e'^4\right)\frac{n'}{n}}\\
&+ \underset{[1\cdots 76]}{\left(\frac{27}{8}e'^2 - \frac{297}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{27}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[1\cdots 75]}{\left(\frac{63}{8}e'^2 - \frac{819}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{693}{64}e^2 e'^2 - \frac{135}{16}e'^4\right)\frac{n'}{n}}\\
&- \underset{[1\cdots 79]}{\frac{2535}{64}e'^4\frac{n'}{n}} - \underset{[1\cdots 82]}{\frac{53}{64}e'^4\frac{n'}{n}} - \underset{[2\cdots 78]}{\frac{255}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[2\cdots 89]}{\left(\frac{51}{16}e'^2 - \frac{51}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{153}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&- \underset{[2\cdots 89]}{\frac{2295}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{11787}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[2\cdots 98]}{\frac{51}{32}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[2\cdots 118]}{\left(\frac{153}{16}e'^2 - \frac{153}{2}\gamma^2 e'^2 - \frac{255}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+ \underset{[2\cdots 118]}{\frac{459}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{17217}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[2\cdots 127]}{\frac{255}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[3\cdots 13]}{\left(\frac{9}{32}e'^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{27}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+ \underset{[3\cdots 13]}{\frac{141}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{1073}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[3\cdots 78]}{\frac{255}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[4\cdots 9]}{\left(\frac{81}{32}e'^2 - \frac{81}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{27}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&- \underset{[4\cdots 9]}{\frac{2997}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{25425}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[4\cdots 78]}{\frac{20655}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[4\cdots 238]}{\frac{2295}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&- \underset{[5\cdots 8]}{\left(\frac{189}{32}e'^2 - \frac{189}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{63}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{459}{16}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{327663}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[5\cdots 125]}{\frac{59535}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&- \underset{[6\cdots 237]}{\frac{7749}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[7\cdots 12]}{\left(\frac{21}{32}e'^2 - \frac{21}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{63}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{16}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{10911}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[7\cdots 96]}{\frac{147}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&- \underset{[8\cdots 223]}{\frac{315}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[9\cdots 96]}{\frac{27}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[10\cdots 117]}{\frac{345}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[10\cdots 125]}{\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[11\cdots 89]}{\frac{1581}{32}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[11\cdots 118]}{\frac{4743}{32}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+ \underset{[12\cdots 87]}{\frac{81}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[26\cdots 3]}{\frac{14985}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[26\cdots 78]}{\frac{18819}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[26\cdots 217]}{\frac{17415}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[27\cdots 2]}{\frac{15435}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[28\cdots 216]}{\frac{567}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+ \underset{[29\cdots 168]}{\frac{153}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[31\cdots 167]}{\frac{189}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdots 98]}{\frac{51}{32}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdots 127]}{\frac{255}{64}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[33\cdots 97]}{\frac{63}{64}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[34\cdots 126]}{\frac{315}{128}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&- \underset{[35\cdots 21]}{\frac{27}{128}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[41\cdots 18]}{\frac{135}{128}e^2 e'^2\frac{n'}{n} - \frac{405}{64}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[48\cdots 400]}{\frac{1125}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2}} + \underset{[52\cdots 39]}{\frac{81}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.
$$

$$
\times\cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 4l')
$$

(79)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{845}{64}e'^3-\frac{845}{32}\gamma^2e'^3-\frac{4225}{128}e^2e'^3-\frac{32525}{1024}e'^5+\underset{[1\cdots\cdots76]}{\frac{53}{32}e'^3\frac{n'}{n}+\frac{81}{16}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[1\cdots\cdots77]}{\frac{189}{32}e'^3\frac{n'}{n}+\frac{189}{16}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots78]}{\frac{153}{8}e'^3\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots98]}{\frac{845}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots119]}{\frac{2535}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots14]}{\frac{53}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[4\cdots10]}{\frac{477}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots9]}{\frac{567}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots13]}{\frac{63}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots89]}{\frac{153}{32}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots118]}{\frac{459}{32}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-5l')$$

(80)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1599}{64}e'^5+\underset{[1\cdots76]}{\frac{231}{128}e'^5\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots77]}{\frac{371}{64}e'^5\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots78]}{\frac{459}{32}e'^5\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots79]}{\frac{2535}{64}e'^5\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+2l+2h'-2g'-6l')$$

(81)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{228347}{5120}e'^5\right\}\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-7l')$$

(82)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\frac{3}{8}e'+\frac{3}{4}\gamma^2e'+\frac{15}{16}e^2e'+\frac{3}{64}e'^3-\frac{3}{8}\gamma^4e'-\frac{15}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{3}{32}\gamma^2e'^3-\frac{69}{128}e^4e'\\&-\frac{15}{128}e^2e'^3-\frac{5}{512}e'^5+\frac{5}{32}e'\frac{a^2}{a'^2}\\&-\underset{[1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots76]}{\left(\frac{9}{4}e'-\frac{117}{8}\gamma^2e'-\frac{99}{32}e^2e'-\frac{99}{32}e'^3+\frac{117}{4}\gamma^4e'+\frac{369}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{369}{128}e^4e'\right)\frac{n'}{n}}\\&-\underset{[1\cdots\cdots76]}{\frac{81}{16}e'^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{165}{32}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}}-\underset{[1\cdots\cdots77]}{\frac{189}{32}e'^3\frac{n'}{n}+\frac{189}{16}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots82]}{\frac{27}{8}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots\cdots82]}{\frac{15}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{99}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\&+\underset{[2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots92]}{\left(\frac{3}{16}e'-\frac{3}{2}\gamma^2e'+\frac{9}{8}e^2e'+\frac{33}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{135}{64}e'-\frac{891}{32}\gamma^2e'+\frac{2457}{128}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}}\\&+\underset{[2\cdots\cdots92]}{\frac{21}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{945}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[2\cdots\cdots100]}{\frac{3}{32}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{99}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[2\cdots\cdots\cdots\cdots121]}{\left(\frac{9}{16}e'-\frac{9}{2}\gamma^2e'-\frac{15}{8}e^2e'+\frac{99}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots121]}{\left(\frac{27}{64}e'-\frac{27}{32}\gamma^2e'+\frac{549}{128}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{63}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{189}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[2\cdots\cdots130]}{\frac{15}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{135}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}}\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (82) a disparu par suite de la 28e opération

Ce coefficient du terme (82) se continue à la page suivante.

(82) Suite.

$$-\left(\frac{3}{16}e' - \frac{3}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{16}e^2 e' - \frac{33}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{29}{64}e' - \frac{179}{32}\gamma^2 e' + \frac{423}{128}e^2 e'\right)\frac{n'}{n}$$

[1 . . . . 8]

$$-\frac{23}{24}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{4289}{2304}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{15}{256}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{5}{64}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{21}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{155}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[3 . . . . 8] [3 . . . . 82] [3 . . . . 97]

$$-\left(\frac{27}{16}e' - \frac{27}{2}\gamma^2 e' - \frac{9}{16}e^2 e' - \frac{297}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{27}{64}e' + \frac{459}{32}\gamma^2 e' + \frac{873}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[3 . . . . 12]

$$+\frac{663}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{25565}{512}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1215}{256}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{17739}{512}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8505}{256}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{57105}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[3 . . . . 12] [3 . . . . 82] [4 . . . . 126]

$$-\frac{135}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{495}{256}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{567}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2} + \frac{4347}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{124587}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[4 . . . . 246] [5 . . . 13] [5 . . . . 236]

$$+m'\frac{a^2}{a'^2}\left\{\begin{aligned}&+\frac{279}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{6057}{128}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{63}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2} + \frac{315}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{5973}{512}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{31}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{5677}{384}e'\frac{n'^5}{n^5}\end{aligned}\right.$$

[6 . . . . 7] [7 . . . 9] [7 . . . . 222] [8 . . . . 1]

$$+\frac{27}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{513}{256}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{1665}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{6345}{32}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{29673}{2048}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{57699}{1024}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[10 . . . . 87] [26 . . . . 2] [26 . . . . 77]

$$+\frac{1107}{512}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{351}{32}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{81}{16}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{29565}{256}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{567}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{16767}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}$$

[26 . . . . 82] [26 . . . . 219] [27 . . . . 214]

$$-\frac{9}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{81}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{3}{32}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{99}{64}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3}$$

[29 . . . . 171] [30 . . . . 166] [32 . . . . 100]

$$+\frac{15}{64}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{135}{128}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{45}{64}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{45}{16}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{9}{32}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{8}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3}$$

[32 . . . . 150] [33 . . . . 125] [34 . . . . 96]

$$+\frac{10305}{512}e^2 e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{7035}{512}e^2 e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{45}{256}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2} - \frac{675}{256}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{63}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{147}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}$$

[31 . . . 246] [42 . . . 215] [46 . . . 119] [46 . . . 102] [52 . . . 262] [53 . . . 259]

Cette portion du coefficient du terme (82) a disparu par suite de la 28e opération

$$\cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - l')$$

(83)

$$+m'\frac{a^3}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{15}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2} - \left(\frac{27}{16}e'^2 - \frac{351}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{297}{128}e^2 e'^2 - \frac{93}{32}e'^4\right)\frac{n'}{n} + \left(\frac{27}{8}e'^2 - \frac{297}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{27}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\end{aligned}\right.$$

[1 . . . . 76]

$$-\frac{371}{64}e'^4\frac{n'}{n} + \left(\frac{9}{8}e'^2 - \frac{117}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{99}{64}e^2 e'^2 + \frac{9}{8}e'^4\right)\frac{n'}{n} + \frac{3}{64}e'^4\frac{n'}{n}$$

[1 . . . 77] [1 . . . . 82] [1 . . . 83]

Ce coefficient du terme (83) se continue à la page suivante

(83)
Suite.

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
&+\underset{[2\cdots 93]}{\frac{135}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{6075}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots 122]}{\frac{27}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{81}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots 9]}{\left(\frac{9}{32}e'^2-\frac{9}{4}\gamma^2e'^2+\frac{27}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[\cdots 9]}{\frac{237}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{2081}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[3\cdots 98]}{\frac{51}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots 13]}{\left(\frac{81}{32}e'^2-\frac{81}{4}\gamma^2e'^2-\frac{27}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[4\cdots 13]}{\frac{405}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{31167}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots 127]}{\frac{20655}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[5\cdots 240]}{\frac{4347}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[6\cdots 12]}{\left(\frac{27}{32}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2-\frac{9}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{11583}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[6\cdots 125]}{\frac{1215}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[7\cdots 225]}{\frac{693}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[8\cdots 8]}{\left(\frac{3}{32}e'^2-\frac{3}{4}\gamma^2e'^2+\frac{9}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5}{4}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9379}{1536}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[8\cdots 96]}{\frac{3}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[9\cdots 124]}{\frac{3}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[9\cdots 125]}{\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[10\cdots 92]}{\frac{189}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[10\cdots 96]}{\frac{27}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[13\cdots 87]}{\frac{81}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[15\cdots 222]}{\frac{765}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[16\cdots 236]}{\frac{10557}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[26\cdots 3]}{\frac{14985}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots 78]}{\frac{72063}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots 220]}{\frac{243}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[27\cdots 219]}{\frac{567}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[28\cdots 2]}{\frac{2205}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[30\cdots 171]}{\frac{27}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[33\cdots 130]}{\frac{45}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[34\cdots 100]}{\frac{9}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[35\cdots 18]}{\frac{27}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots 21]}{\frac{135}{128}e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{1215}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[48\cdots 319]}{\frac{15}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2}}\\
&+\underset{[52\cdots 42]}{\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{243}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$\times\cos(2h+2g+2l-2h'-2g')$$

(84)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{64}e'^3-\frac{1}{32}\gamma^2e'^3-\frac{5}{128}e^2e'^3+\frac{11}{1024}e'^5-\underset{[1\cdots 76]}{\frac{53}{32}e'^3\frac{n'}{n}+\frac{81}{16}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots 82]}{\frac{27}{32}e'^3\frac{n'}{n}-\frac{27}{16}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[2\cdots 94]}{\frac{1}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots 123]}{\frac{3}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots 10]}{\frac{53}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots 14]}{\frac{477}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots 13]}{\frac{81}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots 9]}{\frac{9}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$\times\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'+l')$$

(85)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{32}e'^4-\underset{[1\cdots 76]}{\frac{231}{128}e'^4\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots 82]}{\frac{53}{64}e'^4\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots 84]}{\frac{3}{64}e'^4\frac{n'}{n}}\right\}
$$

$$\times\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'+2l')$$

(86)

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \left\{ \frac{243}{5120} e^5 \right\} \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' + 3l')$$

(87)

$$\frac{3}{4} e - \frac{3}{2} \gamma^2 e - \frac{57}{32} e^3 - \frac{15}{8} ee'^2 + \frac{3}{4} \gamma^4 e + \frac{57}{16} \gamma^2 e^3 + \frac{15}{4} \gamma^2 ee'^2 + \frac{321}{256} e^5 + \frac{285}{64} e^3 e'^2$$

$$+ \frac{39}{64} ee'^4 - \underbrace{\frac{6075}{256} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2}}_{[1 \cdots 87]} - \underbrace{\left(\frac{945}{64} ee'^2 - \frac{1701}{16} \gamma^2 ee'^2 - \frac{11907}{512} e^3 e'^2 \right) \frac{n'}{n}}_{[1 \cdots 88]}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{135}{64} ee'^2 - \frac{243}{16} \gamma^2 ee'^2 - \frac{1701}{512} e^3 e'^2 \right) \frac{n'}{n}}_{[1 \cdots 92]} + \underbrace{\left(\frac{21}{8} e - \frac{75}{4} \gamma^2 e - \frac{207}{32} e^3 - \frac{21}{8} ee'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2}}_{[2 \cdots 76]}$$

$$- \underbrace{\frac{315}{16} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{273}{32} e \frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 76]} - \underbrace{\frac{177}{128} e \frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 87]} - \underbrace{\left(\frac{3}{4} e - 6 \gamma^2 e + \frac{33}{16} e^3 - \frac{3}{4} ee'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2}}_{[2 \cdots 96]}$$

$$+ \underbrace{\frac{99}{4} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{21}{16} e \frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 96]} + \underbrace{\frac{75}{128} e \frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 103]} + \underbrace{\frac{57}{32} e \frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 116]}$$

Cette portion du coefficient du terme (87) a disparu par suite de la 8ᵉ opération

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{9}{16} e - \frac{9}{2} \gamma^2 e + \frac{15}{64} e^3 - \frac{9}{16} ee'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{9}{8} e - 9 \gamma^2 e + \frac{69}{32} e^3 - \frac{63}{32} ee'^2 \right) \frac{n'^3}{n^3}}_{[4 \cdots 16]}$$

$$- \underbrace{\frac{6793}{256} e \frac{n'^4}{n^4} - \frac{6871}{96} e \frac{n'^5}{n^5}}_{[4 \cdots 16]} - \underbrace{\frac{1701}{512} e \frac{n'^4}{n^4} - \frac{1701}{128} e \frac{n'^5}{n^5}}_{[4 \cdots 134]} + \underbrace{\frac{1809}{64} e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{2979}{32} e \frac{n'^5}{n^5}}_{[4 \cdots 215]}$$

$$- \underbrace{\frac{189}{64} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{297}{256} ee'^2 \frac{n'^3}{n}}_{[5 \cdots 20]} + \underbrace{\frac{27}{64} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{567}{256} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[6 \cdots 17]} + \underbrace{\frac{441}{32} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{5985}{128} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[9 \cdots 77]}$$

$$+ \underbrace{\frac{9}{16} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{495}{64} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[9 \cdots 100]} - \underbrace{\frac{63}{32} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{1935}{128} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[10 \cdots 82]} - \underbrace{\frac{63}{16} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{1287}{64} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[10 \cdots 97]}$$

$$+ \underbrace{\frac{1209}{16} e \frac{n'^4}{n^4} + 342 e \frac{n'^5}{n^5}}_{[11 \cdots 76]} - \underbrace{\frac{93}{8} e \frac{n'^4}{n^4} - \frac{171}{4} e \frac{n'^5}{n^5}}_{[11 \cdots 96]}$$

Cette portion du coefficient du terme (87) a disparu par suite de la 11ᵉ opération.

$$- \underbrace{\frac{345}{64} e \frac{n'^4}{n^4} - \frac{465}{16} e \frac{n'^5}{n^5}}_{[17 \cdots 125]} + \underbrace{\frac{135}{16} e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{2277}{80} e \frac{n'^5}{n^5}}_{[18 \cdots 76]} + \underbrace{\frac{3}{4} \gamma^2 e \frac{n'^2}{n^2}}_{[22 \cdots 166]} + \underbrace{\frac{9}{4} \gamma^2 e \frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{2} \gamma^2 e \frac{n'}{n^3}}_{[24 \cdots 37]}$$

$$- \underbrace{\frac{75}{256} e^3 \frac{n'^2}{n^2}}_{[1 \cdots 103]} - \underbrace{\frac{15}{64} e^3 \frac{n'^2}{n^2}}_{[38 \cdots 125]} - \underbrace{\frac{945}{1024} e^3 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{135}{512} e \frac{n'^5}{n^5}}_{[11 \cdots 236]} - \underbrace{\frac{315}{256} e^3 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[12 \cdots 26]} + \underbrace{\frac{16905}{128} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[12 \cdots 247]}$$

Ce coefficient du terme (87) se continue à la page suivante

(87) Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned} &+\underset{[43\cdots 24]}{\frac{135}{256}e^3e'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[43\cdots 240]}{\frac{1035}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[46\cdots 321]}{\frac{135}{512}e\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}} + \underset{[46\cdots 379]}{\frac{4275}{512}e\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}} + \underset{[52\cdots 44]}{\frac{27}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[52\cdots 264]}{\frac{45}{16}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}\\ &+\underset{[53\cdots 47]}{\frac{63}{16}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[54\cdots 45]}{\frac{27}{16}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} \end{aligned}\right.$$

$$\times \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

(88)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\ \frac{21}{8}ee' - \frac{21}{4}\gamma^2 ee' - \frac{399}{64}e^3e' - \frac{369}{64}ee'^2 + \frac{21}{8}\gamma^4 ee' + \frac{399}{32}\gamma^2e^3e' + \frac{2247}{512}e^5e'\right.$$

$$+ \underset{[1\cdots 87]}{\left(\frac{135}{32}ee' - \frac{243}{8}\gamma^2 ee' - \frac{1701}{256}e^3e' - \frac{1485}{256}ee'^3\right)\frac{n'}{n}} - \underset{[1\cdots 89]}{\frac{2295}{64}ee'^3\frac{n'}{n'}} - \underset{[1\cdots 92]}{\frac{405}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}$$

$$+ \underset{[2\cdots 77]}{\left(\frac{147}{16}ee' - \frac{525}{8}\gamma^2 ee' - \frac{1449}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{315}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{1911}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[2\cdots 88]}{\frac{1239}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}$$

$$- \underset{[2\cdots 97]}{\left(\frac{21}{8}ee' - 21\gamma^2 ee' + \frac{231}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{99}{16}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{147}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[2\cdots 103]}{\frac{525}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[2\cdots 117]}{\frac{399}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}$$

$$+ \underset{[3\cdots 2]}{\frac{57}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[3\cdots 88]}{\frac{903}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[3\cdots 92]}{\frac{93}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[4\cdots 17]}{\left(\frac{27}{32}ee' - \frac{27}{4}\gamma^2 ee' + \frac{45}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}$$

$$- \underset{[4\cdots 17]}{\frac{297}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{4785}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[4\cdots 88]}{\frac{310149}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[4\cdots 137]}{\frac{1701}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[4\cdots 216]}{\frac{12663}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}$$

$$- \underset{[5\cdots 16]}{\left(\frac{63}{32}ee' - \frac{63}{4}\gamma^2 ee' + \frac{105}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{783}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{32403}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[6\cdots 215]}{\frac{1809}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}$$

$$- \underset{[8\cdots 227]}{\frac{675}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[9\cdots 96]}{\left(\frac{9}{8}ee' - 9\gamma^2 ee' + \frac{99}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{99}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{1395}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}$$

$$+ \underset{[10\cdots 76]}{\left(\frac{63}{16}ee' - \frac{225}{8}\gamma^2 ee' - \frac{621}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{495}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{4239}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[11\cdots 77]}{\frac{8463}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}$$

$$- \underset{[11\cdots 97]}{\frac{651}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[17\cdots 130]}{\frac{345}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[18\cdots 82]}{\frac{135}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[22\cdots 167]}{\frac{21}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[24\cdots \text{[illegible]}]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdots 223]}{\frac{46305}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}$$

$$- \underset{[29\cdots 176]}{\frac{63}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdots 104]}{\frac{525}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[32\cdots 117]}{\frac{205}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[33\cdots 103]}{\frac{225}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[35\cdots 12]}{\frac{9}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[38\cdots 126]}{\frac{105}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}$$

Cette portion du coefficient du terme (88) a disparu par suite de la 7e opération . . . . . . [1]

Ce coefficient du terme (88) se continue à la page suivante

(88) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underbrace{-\frac{135}{256}e^3e'\frac{n'}{n}-\frac{405}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\cdots\cdots24]}\underbrace{-\frac{10125}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[41\cdots88]}\underbrace{+\frac{7245}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{365415}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[41\cdots\cdots237]}\underbrace{-\frac{975}{128}ee'\frac{a^2}{a'^2}}_{[48\cdots379]}\\&\underbrace{+\frac{27}{16}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}+\frac{81}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[52\cdots\cdots45]}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

(89)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{51}{8}ee'^2-\frac{51}{4}\gamma^2ee'^2-\frac{969}{64}e^3e'^2-\frac{115}{8}ee'^4+\underbrace{\left(\frac{405}{128}ee'^2-\frac{729}{32}\gamma^2ee'^2-\frac{5103}{1024}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}_{[1\cdots\cdots87]}\\&\underbrace{+\frac{6075}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[1\cdots87]}+\underbrace{\left(\frac{945}{64}ee'^2-\frac{1701}{16}\gamma^2ee'^2-\frac{11907}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}_{[1\cdots\cdots88]}\underbrace{+\frac{357}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5355}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[2\cdots\cdots78]}\\&\underbrace{-\frac{51}{8}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1683}{64}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[2\cdots\cdots98]}\underbrace{-\frac{81}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2349}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\cdots\cdots18]}\underbrace{-\frac{189}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4995}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[5\cdots\cdots17]}\\&\underbrace{-\frac{63}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{99}{64}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[9\cdots\cdots97]}\underbrace{+\frac{441}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7875}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[10\cdots\cdots77]}\underbrace{-\frac{27}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{999}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[12\cdots\cdots96]}\\&\underbrace{+\frac{189}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{4995}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[13\cdots\cdots76]}\\&\underbrace{-\frac{153}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{10251}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[16\cdots\cdots16]}\underbrace{-\frac{405}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}_{[41\cdots25]}\underbrace{+\frac{121095}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[41\cdots238]}\underbrace{-\frac{315}{256}e^3e'^2\frac{n'}{n}}_{[42\cdots24]}\\&\underbrace{-\frac{7245}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[43\cdots237]}\underbrace{+\frac{81}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}_{[52\cdots46]}\underbrace{+\frac{63}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}_{[53\cdots45]}\end{aligned}\right\}$$

Cette portion du coefficient du terme (89) a disparu par suite de la 15e opération.

$$\times\cos(2h+2g+3l-2h'-2g-4l')$$

(90)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{845}{64}ee'^3\underbrace{+\frac{795}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots87]}\underbrace{+\frac{2835}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots88]}\underbrace{+\frac{2295}{64}ee'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots89]}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-5l')$$

(91)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1599}{64}ee'^4\right\}\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-6l')$$

$$
(92)\qquad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{3}{8}ee'+\frac{3}{4}\gamma^2ee'+\frac{57}{64}e^3e'+\frac{3}{64}ee'^3-\frac{3}{8}\gamma^4ee'-\frac{57}{32}\gamma^2e^3e'-\frac{321}{512}e^5e'\\
&-\underset{[1\cdots\cdots 87]}{\left(\frac{135}{32}ee'-\frac{243}{8}\gamma^2ee'-\frac{1701}{256}e^3e'-\frac{1485}{256}ee'^3\right)\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots 88]}{\frac{2835}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[2\cdots\cdots 82]}{\left(\frac{21}{16}ee'-\frac{75}{8}\gamma^2ee'-\frac{207}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{315}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{273}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[2\cdots 92]}{\frac{177}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[2\cdots\cdots 100]}{\left(\frac{3}{8}ee'-3\gamma^2ee'+\frac{33}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{99}{16}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{21}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots 106]}{\frac{75}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots 121]}{\frac{57}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[3\cdots 2]}{\frac{57}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[3\cdots 88]}{\frac{651}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots 92]}{\frac{129}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots\cdots 20]}{\left(\frac{27}{32}ee'-\frac{27}{4}\gamma^2ee'+\frac{45}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[4\cdots\cdots 20]}{\frac{81}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{48135}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots 92]}{\frac{44307}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots 135]}{\frac{11907}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots 219]}{\frac{1809}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[5\cdots 215]}{\frac{12663}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[6\cdots\cdots 16]}{\left(\frac{9}{32}ee'-\frac{9}{4}\gamma^2ee'+\frac{15}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{4077}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[7\cdots 227]}{\frac{4725}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[9\cdots\cdots 76]}{\left(\frac{63}{16}ee'-\frac{225}{8}\gamma^2ee'-\frac{621}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{495}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{17073}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[10\cdots\cdots 96]}{\left(\frac{9}{8}ee'-9\gamma^2ee'+\frac{99}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{99}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{693}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[11\cdots 82]}{\frac{1209}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[11\cdots 100]}{\frac{93}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[17\cdots 126]}{\frac{2415}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[18\cdots 77]}{\frac{945}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[22\cdots 171]}{\frac{3}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[24\cdots 41]}{\frac{27}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots 12]}{\frac{153}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdots 225]}{\frac{6615}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[29\cdots 178]}{\frac{9}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots 106]}{\frac{75}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots 121]}{\frac{197}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[34\cdots 103]}{\frac{225}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[38\cdots 130]}{\frac{15}{128}e^5e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[41\cdots\cdots 26]}{\frac{135}{256}e^3e'\frac{n'}{n}+\frac{1215}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots 92]}{\frac{10125}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[41\cdots\cdots 240]}{\frac{1035}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{59355}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[48\cdots 321]}{\frac{45}{128}ee'\frac{a^2}{a'^2}}\\
&+\underset{[52\cdots\cdots 47]}{\frac{27}{16}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}-\frac{81}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.
$$

$$\times\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-l')$$

Cette portion du coefficient du terme (92) a disparu par suite de la 8ᵉ opération

(93)

$$-m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[1\ldots\ldots87]}{-\left(\frac{405}{128}ee'^2-\frac{729}{32}\gamma^2ee'^2-\frac{5103}{1024}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{6075}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[1\ldots\ldots92]}{+\left(\frac{135}{64}ee'^2-\frac{243}{16}\gamma^2ee'^2-\frac{1701}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}\underset{[2\ldots83]}{-\frac{315}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[2\ldots101]}{+\frac{99}{64}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[4\ldots\ldots21]}{-\frac{81}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1053}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[6\ldots\ldots20]}{+\frac{27}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{189}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[9\ldots\ldots32]}{-\frac{63}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[10\ldots\ldots100]}{+\frac{9}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{693}{64}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[12\ldots\ldots76]}{+\frac{189}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4995}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[13\ldots\ldots96]}{-\frac{27}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{999}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[32\ldots122]}{-\frac{27}{1024}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[41\ldots27]}{-\frac{405}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\underset{[41\ldots93]}{+\frac{30375}{16384}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[41\ldots241]}{+\frac{1035}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[42\ldots240]}{-\frac{2415}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[43\ldots26]}{+\frac{135}{256}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\underset{[52\ldots48]}{+\frac{81}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}\underset{[54\ldots47]}{-\frac{27}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2h+2g+3l-2h'-2g')$$

(94)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{64}ee'^3\underset{[1\ldots87]}{-\frac{795}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}\underset{[1\ldots92]}{+\frac{405}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'+l')$$

(95)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{32}ee'^4\right\}\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'+2l')$$

(96)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{15}{8}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2+\frac{3}{4}\gamma^4e^2+\frac{15}{4}\gamma^2e^4+\frac{15}{4}\gamma^2e^2e'^2+\frac{101}{64}e^6+\frac{75}{16}e^4e'^2\\
&-\frac{5}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2}\underset{[1\ldots36]}{-\frac{3267}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[1\ldots97]}{-\frac{693}{32}e^2e'^2\frac{n'}{n}}\underset{[1\ldots100]}{-\frac{99}{32}e^2e'^2\frac{n'}{n}}\underset{[2\ldots76]}{+\frac{1467}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[2\ldots\ldots87]}{+\left(\frac{123}{32}e^2-\frac{57}{2}\gamma^2e^2-\frac{19}{2}e^4-\frac{123}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1653}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[2\ldots96]}{-\frac{117}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[2\ldots\ldots103]}{-\left(\frac{75}{64}e^2-\frac{75}{8}\gamma^2e^2+\frac{225}{128}e^4-\frac{75}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{525}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[2\ldots108]}{+\frac{81}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[3\ldots7]}{+\frac{129}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[3\ldots76]}{+\frac{261}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[3\ldots96]}{+\frac{57}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\ldots\ldots2.]}{-\left(\frac{27}{64}e^2-\frac{27}{8}\gamma^2e^2+\frac{27}{128}e^4-\frac{27}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (96) a disparu par suite de la 55ᵉ opération.

Ce coefficient du terme (96) se continue à la page suivante.

(96) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[4\cdots23]}{-\frac{27}{32}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{15771}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots96]}{-\frac{23571}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots139]}{-\frac{719}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots222]}{+\frac{16227}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[5\cdots26]}{-\frac{567}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[6\cdots24]}{+\frac{81}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[7\cdots12]}{-\frac{357}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[8\cdots8]}{+\frac{51}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[9\cdots106]}{+\frac{225}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[10\cdots104]}{-\frac{1575}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[11\cdots103]}{-\frac{2325}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[17\cdots134]}{+\frac{483}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[22\cdots175]}{-\frac{3}{4}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots16]}{\left(\frac{3}{64}e^2-\frac{3}{32}\gamma^2e^2-\frac{3}{128}e^4-\frac{3}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[26\cdots16]}{+\frac{3}{32}e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{8733}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[26\cdots96]}{-\frac{2187}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[26\cdots125]}{+\frac{135}{32}e^2\frac{n^4}{n^4}}\underset{[26\cdots227]}{+\frac{50625}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[27\cdots20]}{-\frac{63}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[28\cdots17]}{+\frac{9}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[29\cdots180]}{-\frac{9}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[32\cdots96]}{-\frac{3}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[32\cdots108]}{-\frac{27}{64}e^4\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[32\cdots125]}{+\frac{15}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\\
&\underset{[41\cdots28]}{-\frac{5}{16}e^4\frac{n'}{n}-\frac{15}{64}e^4\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots215]}{+\frac{2655}{256}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{18105}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[49\cdots147]}{+\frac{45}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[52\cdots49]}{+\frac{9}{8}\gamma^2e^2\frac{n'}{n}-\frac{27}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l')$$

Cette portion du coefficient du terme (96) a disparu par suite de la 35e opération

(97)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{21}{8}e^2e'-\frac{21}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{105}{16}e^4e'-\frac{369}{64}e^2e'^3+\underset{[1\cdots96]}{\left(\frac{99}{16}e^2e'-\frac{369}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{45}{4}e^4e'\right)\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[2\cdots88]}{+\frac{861}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{4293}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[2\cdots104]}{-\frac{525}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{6525}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[3\cdots8]}{-\frac{51}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{859}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[4\cdots24]}{-\frac{81}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2349}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[5\cdots25]}{-\frac{189}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2349}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[9\cdots103]}{-\frac{225}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2475}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[26\cdots17]}{-\frac{9}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[27\cdots16]}{-\frac{21}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{279}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\\
&\underset{[41\cdots29]}{-\frac{15}{32}e^4e'\frac{n'}{n}}\underset{[41\cdots216]}{+\frac{19215}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[42\cdots28]}{-\frac{35}{48}e^4e'\frac{n'}{n}}\underset{[43\cdots215]}{-\frac{2655}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[52\cdots50]}{+\frac{27}{16}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[53\cdots49]}{+\frac{21}{8}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-3l')$$

Cette portion du coefficient du terme (97) a disparu par suite de la 36e opération

(98)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{51}{8}e^2e'^2-\frac{51}{4}\gamma^2e^2e'^2-\frac{255}{16}e^4e'^2+\underset{[1\cdots\cdots 96]}{\frac{297}{64}e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{3267}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots 97]}{\frac{693}{32}e^2e'^2\frac{n'}{n}}\\
&+\underset{[2\cdots 89]}{\frac{2091}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots 105]}{\frac{1275}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots 9]}{\frac{153}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots 25]}{\frac{243}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots 24]}{\frac{567}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[7\cdots 8]}{\frac{357}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots 104]}{\frac{1575}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[12\cdots 103]}{\frac{675}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[16\cdots 23]}{\frac{459}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots 18]}{\frac{27}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[27\cdots 17]}{\frac{63}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots 78]}{\frac{357}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots 98]}{\frac{11475}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-4l')$$

(99)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{845}{64}e^2e'^3\right\}\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-5l')$$

(100)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{3}{8}e^2e'+\frac{3}{4}\gamma^2e^2e'+\frac{15}{16}e^4e'+\frac{3}{64}e^2e'^3-\underset{[1\cdots\cdots 96]}{\left(\frac{99}{16}e^2e'-\frac{369}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{45}{4}e^4e'\right)\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[2\cdots\cdots 92]}{\frac{123}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4293}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[2\cdots\cdots 106]}{\frac{75}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{6525}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[3\cdots\cdots 12]}{\frac{51}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{683}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[4\cdots\cdots 26]}{\frac{81}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1053}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[6\cdots\cdots 23]}{\frac{27}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[10\cdots\cdots 103]}{\frac{225}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2475}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[26\cdots\cdots 20]}{\frac{9}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{8}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[28\cdots\cdots 16]}{\frac{3}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{159}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[41\cdots 31]}{\frac{15}{32}e^4e'\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots 219]}{\frac{2745}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[42\cdots 215]}{\frac{6195}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[43\cdots 28]}{\frac{5}{16}e^4e'\frac{n'}{n}}+\underset{[52\cdots 52]}{\frac{27}{16}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[54\cdots 49]}{\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (100) a disparu par suite de la 37e opération.

$$\times\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-l')$$

(101)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\underset{[1\cdots\cdots 96]}{\frac{297}{64}e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{3267}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots 100]}{\frac{99}{32}e^2e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[3\cdots 13]}{\frac{153}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots 27]}{\frac{243}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots 26]}{\frac{81}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[8\cdots 12]}{\frac{51}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots 106]}{\frac{225}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[13\cdots 103]}{\frac{675}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots 21]}{\frac{27}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots 20]}{\frac{9}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+4l-2h'-2g')$$

(102)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{64}e^2e'^3\right\}\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'+l')$$

(103)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\frac{25}{32}e^3-\frac{25}{16}\gamma^2e^3-\frac{1075}{512}e^5-\frac{125}{64}e^3e'^2-\underset{[1\cdots104]}{\frac{15225}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots106]}{\frac{2175}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\\+\underset{[2\cdots96]}{\frac{165}{32}e^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots108]}{\frac{27}{16}e^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots\cdots16]}{\frac{29}{384}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7}{576}e^3\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots\cdots28]}{\frac{3}{8}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{4}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\\+\underset{[26\cdots\cdots23]}{\frac{3}{256}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{15}{128}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Cette portion du coef-}\\\text{ficient du terme (103)}\\\text{a disparu par suite}\\\text{de la 39}^{\text{e}}\text{ opération.}\end{array}\\-\underset{[41\cdots33]}{\frac{625}{2048}e^5\frac{n'}{n}}+\underset{[41\cdots222]}{\frac{3375}{1024}e^3\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[52\cdots54]}{\frac{75}{64}\gamma^2e^3\frac{n'}{n}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l')$$

(104)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{175}{64}e^3e'-\frac{175}{32}\gamma^2e^3e'-\frac{7525}{1024}e^5e'+\underset{[1\cdots103]}{\frac{2175}{256}e^3e'\frac{n'}{n}}+\underset{[2\cdots97]}{\frac{1155}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots109]}{\frac{189}{32}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\-\underset{[3\cdots17]}{\frac{29}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots29]}{\frac{9}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots28]}{\frac{21}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots16]}{\frac{203}{768}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots108]}{\frac{81}{32}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots96]}{\frac{495}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\+\underset{[26\cdots24]}{\frac{9}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[27\cdots23]}{\frac{21}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots104]}{\frac{118125}{8192}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-3l')$$

(105)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{425}{64}e^3e'^2+\underset{[1\cdots103]}{\frac{6525}{1024}e^3e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots104]}{\frac{15225}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-4l')$$

(106)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l} -\frac{25}{64}e^3e'+\frac{25}{32}\gamma^2e^3e'+\frac{1075}{1024}e^5e'-\underset{[1\cdots103]}{\frac{2175}{256}e^3e'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots100]}{\frac{165}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots111]}{\frac{27}{32}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots20]}{\frac{29}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} \\ -\underset{[5\cdots31]}{\frac{9}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots28]}{\frac{3}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots16]}{\frac{29}{768}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots96]}{\frac{495}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots108]}{\frac{81}{32}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots26]}{\frac{9}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}. \\ -\underset{[28\cdots23]}{\frac{3}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots106]}{\frac{16875}{8192}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}} \end{array}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-l')$$

(107)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[1\cdots103]}{\frac{6525}{1024}e^3e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots106]}{\frac{2175}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2g+5l-2h'-2g')$$

(108)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l} \frac{27}{32}e^4-\frac{27}{16}\gamma^2e^4-\frac{783}{320}e^6-\frac{135}{64}e^4e'^2+\underset{[2\cdots103]}{\frac{6925}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots112]}{\frac{2401}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[1\cdots22]}{\frac{9}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}} \\ -\underset{[1\cdots33]}{\frac{375}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots28]}{\frac{1}{32}e^4\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots96]}{\frac{5}{8}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots108]}{\frac{6075}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}} \end{array}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+6l-2h'-2g'-2l')$$

(109)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{189}{64}e^4e'+\underset{[1\cdots108]}{\frac{729}{64}e^4e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2g+6l-2h'-2g'-3l')$$

(110)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{459}{64}e^4e'^2\right\}\cos(2h+2g+6l-2h'-2g-4l')$$

(111)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{27}{64}e^4e'-\underset{[1\cdots108]}{\frac{729}{64}e^4e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2g+6l-2h'-2g'-l')$$

(112)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{2401}{2560}e^5\right\}\cos(2h+2g+7l-2h'-2g'-2l')$$

(113)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{16807}{5120}e^5e'\right\}\cos(2h+2g+7l-2h'-2g'-3l')$$

(114)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{2401}{5120}e^5e'\right\}\cos(2h+2g+7l-2h'-2g'-l')$$

(115)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{16}{15}e^6\right\}\cos(2h+2g+8l-2h'-2g'-2l')$$

(116)

$$-\frac{9}{4}e+\frac{9}{2}\gamma^2e+\frac{39}{32}e^3+\frac{45}{8}ee'^2-\frac{9}{4}\gamma^4e-\frac{39}{16}\gamma^2e^3-\frac{45}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{5}{256}e^5-\frac{195}{64}e^3e'^2$$

$$-\frac{117}{64}ee'^4-\frac{5}{4}e\frac{a^2}{a'^2}+\underset{[1\cdots116]}{\frac{81}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots117]}{\left(\frac{189}{64}ee'^2+\frac{189}{16}\gamma^2ee'^2+\frac{8253}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}$$

$$+\underset{[1\cdots121]}{\left(\frac{27}{64}ee'^2+\frac{27}{16}\gamma^2ee'^2+\frac{1179}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots76]}{\left(\frac{9}{4}e-\frac{63}{4}\gamma^2e-\frac{393}{64}e^3-\frac{9}{4}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}$$

$$+\underset{[2\cdots76]}{\frac{621}{16}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{63}{8}e\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[2\cdots87]}{\frac{3}{2}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots116]}{\frac{669}{128}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots125]}{\left(\frac{15}{8}e-15\gamma^2e-\frac{15}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}$$

$$-\underset{[2\cdots125]}{\frac{135}{8}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{105}{32}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots134]}{\frac{21}{128}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots16]}{\left(\frac{1}{16}e-\frac{1}{2}\gamma^2e-\frac{1}{64}e^3-\frac{1}{16}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}$$

$$-\underset{[3\cdots16]}{\left(\frac{1}{24}e-\frac{1}{3}\gamma^2e+\frac{5}{96}e^3-\frac{139}{96}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{31}{144}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{169}{864}e\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[3\cdots105]}{\frac{75}{512}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{25}{128}e\frac{n'^5}{n^5}}$$

$$+ m\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\ -\underset{[3\cdots116]}{\frac{1587}{512}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{157}{32}e\frac{n'^5}{n^5}}$$

(Cette portion du coefficient du terme (116) a disparu par suite de la 7e opération.....)

$$-\underset{[4\cdots243]}{\frac{189}{256}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{63}{32}e\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[7\cdots17]}{\frac{21}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{513}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[8\cdots20]}{\frac{3}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{97}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}$$

$$+\underset{[9\cdots82]}{\frac{27}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{243}{32}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[9\cdots126]}{\frac{315}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{4275}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[10\cdots77]}{\frac{189}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2025}{32}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}$$

$$+\underset{[10\cdots130]}{\frac{45}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{315}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[11\cdots76]}{\frac{279}{4}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{2565}{8}e\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[11\cdots125]}{\frac{465}{16}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{855}{8}e\frac{n'^5}{n^5}}$$

$$+\underset{[14\cdots16]}{\frac{3}{64}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1}{8}e\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[17\cdots76]}{\frac{1449}{64}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{279}{2}e\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[18\cdots96]}{\frac{27}{32}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{99}{40}e\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[23\cdots166]}{\frac{27}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}}$$

$$-\underset{[27\cdots37]}{\frac{9}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{2}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[32\cdots134]}{\frac{21}{256}e^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[35\cdots25]}{\frac{9}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{256}e^3\frac{n'^3}{n^3}}$$

Ce coefficient du terme (116) se continue à la page suivante

(116) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\left(\frac{45}{4}\gamma^2 e+\frac{5985}{1024}e^3\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{285}{256}e\frac{n'^3}{n^3}-\frac{38745}{4096}e^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{105}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{855}{512}e\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}\\&-\frac{4275}{512}e\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}-\frac{297}{32}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}-\frac{63}{16}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}-\frac{189}{16}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}+\frac{81}{16}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}\end{aligned}\right.$$

[41 . . . 7] [41 . . 248] [42 . . . 12] [46 . . . 309]

[46 . . . 404] [52 . . . 58] [52 . . 268] [53 . . . 61] [54 . . . 59]

$$\times\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

(117)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\frac{63}{8}ee'+\frac{63}{4}\gamma^2 ee'+\frac{273}{64}e^3e'+\frac{1107}{64}ee'^3-\frac{63}{8}\gamma^4 ee'-\frac{273}{32}\gamma^2e^3e'+\frac{35}{512}e^5e'\end{aligned}\right.$$

$$-\frac{45}{8}ee'\frac{a^2}{a'^2}-\left(\frac{27}{32}ee'+\frac{27}{8}\gamma^2ee'+\frac{1179}{256}e^3e'-\frac{297}{256}ee'^3\right)\frac{n'}{n}+\frac{459}{64}ee'^3\frac{n'}{n}+\frac{81}{256}ee'^3\frac{n'}{n}$$

[1 . . . 116] [1 . . . 118] [1 . . . 121]

$$-\left(\frac{63}{8}ee'-\frac{441}{8}\gamma^2ee'-\frac{2751}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{621}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{441}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{21}{4}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 . . . 77] [2 . . . 88]

$$-\frac{4683}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{105}{16}ee'-\frac{105}{2}\gamma^2ee'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{735}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{147}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 . . . 117] [2 . . . 126] [2 . . . 135]

$$-\left(\frac{3}{32}ee'-\frac{3}{4}\gamma^2ee'-\frac{3}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{17}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{37}{96}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{75}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[3 . . . 20] [3 . . . 106]

$$-\frac{11109}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{27}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{250047}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{16281}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1323}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[3 . . . 117] [4 . . . 2] [4 . . . 117] [4 . . . 124] [4 . . . 244]

$$+\frac{189}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{7}{32}ee'-\frac{7}{4}\gamma^2ee'-\frac{7}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{73}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{3257}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[6 . . 243] [7 . . . 16]

$$+\frac{213}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{27}{8}ee'-\frac{189}{8}\gamma^2ee'-\frac{1179}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{891}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{7785}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[8 . . . 215] [9 . . . 76]

$$-\left(\frac{45}{16}ee'-\frac{45}{2}\gamma^2ee'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{495}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-108\,ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1953}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3255}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[10 . . . 125] [11 . . . 77] [11 . . . 126]

$$+\frac{9}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1449}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{27}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{189}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[14 . . 20] [17 . . . 82] [18 . . 100] [23 . . . 167] [25 . . . 38] [26 . . . 12]

$$+\frac{65205}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{63}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{147}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}$$

[26 . . . 237] [29 . . . 189] [32 . . . 88] [32 . . 135] [34 . . . 134] [35 . . . 26]

Cette portion du coefficient du terme (117) a disparu par suite de la 3e opération.

Ce coefficient du terme (117) se continue à la page suivante.

(117) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&+\frac{945}{128}ce'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{63}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{46125}{4096}ce'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{4725}{4096}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1425}{128}ce'\frac{a^2}{a'^2}\\&+\frac{105}{8}\gamma^4ce'-\frac{105}{16}\gamma^2e^3e'-\frac{81}{16}\gamma^2ce'\frac{n'}{n}+\frac{1431}{128}\gamma^2ce'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{945}{128}\gamma^2ce'\frac{n'^2}{n^2}\end{aligned}\right\}$$

[35 · · 223] [36 · · 23] [41 · · 117] [41 · · 137] [48 · · 403]

[49 · · 176] [52 · · 59] [52 · · 269]

$$\times\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')$$

(118)

$$-\frac{153}{8}ce'^2+\frac{153}{4}\gamma^2ce'^2+\frac{663}{64}e^3e'^2+\frac{345}{8}ce'^4$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\left(\frac{81}{128}ce'^2+\frac{81}{32}\gamma^2ce'^2+\frac{3537}{1024}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}-\frac{81}{512}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}\\&-\left(\frac{189}{64}ce'^2+\frac{189}{16}\gamma^2ce'^2+\frac{8253}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}-\frac{153}{8}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{10557}{256}ce'^2\frac{n'^4}{n^4}\\&-\frac{255}{16}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2295}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{9}{64}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{165}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{21}{64}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{75}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}\\&-\frac{189}{16}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2187}{64}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{315}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2655}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{81}{16}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{8991}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}\\&-\frac{135}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4995}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{17}{32}ce'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3383}{1536}ce'^2\frac{n'^3}{n}\\&+\frac{42075}{256}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{243}{32}\gamma^2ce'^2\frac{n'}{n}-\frac{189}{16}\gamma^2ce'^2\frac{n'}{n}\end{aligned}\right.$$

[1 · · 116]

[1 · · 117] [2 · · 78]

[2 · · 127] [3 · · 21] [7 · · 20]

[9 · · 77] [10 · · 126] [12 · · 76]

[15 · · 125] [15 · · 16]

[41 · · 9] [52 · · 60] [53 · · 59]

Cette portion du coefficient du terme (118) a disparu par suite de la 16ᵉ opération

$$\times\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-4l')$$

(119)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{2535}{64}ce'^3-\frac{159}{256}ce'^3\frac{n'}{n}-\frac{567}{256}ce'^3\frac{n'}{n}-\frac{459}{64}ce'^3\frac{n'}{n}-\frac{795}{256}ce'^3\frac{n'}{n}\right\}$$

[1 · · 116] [1 · · 117] [1 · · 118] [41 · · 10]

$$\times\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-5l')$$

(120)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{4797}{64}ce'^5\right\}\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-6l')$$

(121)

$$\frac{9}{8}ee' - \frac{9}{4}\gamma^2 ee' - \frac{39}{64}e^3e' - \frac{9}{64}ee'^3 + \frac{9}{8}\gamma^4 ee' + \frac{39}{32}\gamma^2 e^3 e' - \frac{5}{512}e^5e' - \frac{5}{8}ee'\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{27}{32}ee' + \frac{27}{8}\gamma^2 ee' + \frac{1179}{256}e^3e' - \frac{297}{256}ee'^3\right)\frac{n'}{n}}_{[1 \cdots 116]} + \underbrace{\frac{567}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}_{[1 \cdots 117]}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{9}{8}ee' - \frac{63}{8}\gamma^2 ee' - \frac{393}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{621}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{63}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 82]} - \underbrace{\frac{3}{4}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 92]} + \underbrace{\frac{669}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 121]}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{15}{16}ee' - \frac{15}{2}\gamma^2 ee'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{135}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{105}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 130]} + \underbrace{\frac{21}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2 \cdots 137]}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{3}{32}ee' - \frac{3}{4}\gamma^2 ee' - \frac{3}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{25}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{79}{96}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3 \cdots 17]} + \underbrace{\frac{525}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3 \cdots 104]} + \underbrace{\frac{1587}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3 \cdots 121]}$$

$$- \underbrace{\frac{27}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4 \cdots 2]} + \underbrace{\frac{113967}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4 \cdots 117]} - \underbrace{\frac{35721}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4 \cdots 121]} + \underbrace{\frac{189}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4 \cdots 246]} - \underbrace{\frac{1323}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[5 \cdots 243]}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}$$

$$- \underbrace{\frac{1491}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[7 \cdots 215]} + \underbrace{\left(\frac{1}{32}ee' - \frac{1}{4}\gamma^2 ee' - \frac{1}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{139}{384}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{4463}{2304}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[8 \cdots 16]}$$

$$- \underbrace{\left(\frac{45}{16}ee' - \frac{45}{2}\gamma^2 ee'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{495}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{6957}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[9 \cdots 125]} - \underbrace{\left(\frac{27}{8}ee' - \frac{189}{8}\gamma^2 ee' - \frac{1179}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[10 \cdots 76]}$$

$$- \underbrace{\frac{891}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{7731}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[10 \cdots 76]} + \underbrace{\frac{279}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[11 \cdots 82]} + \underbrace{\frac{465}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[11 \cdots 130]} + \underbrace{\frac{9}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[14 \cdots 17]} + \underbrace{\frac{10143}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[17 \cdots 77]}$$

$$+ \underbrace{\frac{189}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[18 \cdots 97]} + \underbrace{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[23 \cdots 171]} - \underbrace{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[25 \cdots 41]} - \underbrace{\frac{9315}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[26 \cdots 240]} + \underbrace{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[29 \cdots 191]} - \underbrace{\frac{45}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[32 \cdots 92]}$$

$$- \underbrace{\frac{21}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[32 \cdots 137]} + \underbrace{\frac{63}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[33 \cdots 134]} - \underbrace{\frac{27}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[35 \cdots 24]} - \underbrace{\frac{135}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[35 \cdots 225]} + \underbrace{\frac{9}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[37 \cdots 23]}$$

$$+ \underbrace{\frac{45}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{315}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[41 \cdots 12]} + \underbrace{\frac{44325}{4096}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[41 \cdots 121]} - \underbrace{\frac{33075}{4096}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[41 \cdots 135]} + \underbrace{\frac{195}{128}ee'\frac{a^2}{a'^2}}_{[48 \cdots 309]}$$

$$- \underbrace{\frac{15}{8}\gamma^4 ee' + \frac{15}{16}\gamma^2 e^3 e'}_{[49 \cdots 178]} - \underbrace{\frac{81}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} - \frac{1269}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[52 \cdots 61]} + \underbrace{\frac{135}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[52 \cdots 271]}.$$

$$\times \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$$

Cette portion du coefficient du terme (121) a disparu par suite de la 6e opération

(122)*

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underbrace{\left(\frac{81}{128}ee'^2+\frac{81}{32}\gamma^2ee'^2+\frac{3537}{1024}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}-\left(\frac{81}{512}ee'^2+\frac{7425}{4096}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[1\cdots116]}\\
&-\underbrace{\left(\frac{27}{64}ee'^2+\frac{27}{16}\gamma^2ee'^2+\frac{1179}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}}_{[1\cdots121]}+\underbrace{\frac{621}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[2\cdots83]}-\underbrace{\frac{135}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[2\cdots131]}\\
&\underbrace{-\frac{9}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{213}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\cdots18]}+\underbrace{\frac{3}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{181}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[8\cdots17]}+\underbrace{\frac{45}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1305}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[9\cdots130]}\\
&+\underbrace{\frac{27}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1377}{64}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[10\cdots82]}-\underbrace{\frac{135}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{4995}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[12\cdots125]}-\underbrace{\frac{81}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{8991}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[13\cdots76]}\\
&+\underbrace{\frac{135}{1024}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[32\cdots93]}-\underbrace{\frac{37035}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[41\cdots13]}-\underbrace{\frac{6075}{16384}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[41\cdots122]}-\underbrace{\frac{45}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[43\cdots12]}-\underbrace{\frac{243}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}_{[52\cdots62]}+\underbrace{\frac{81}{16}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}_{[54\cdots61]}
\end{aligned}\right.
$$

$$\times\cos(2h+2g+l-2h'-2g')$$

(123)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{64}ee'^3+\underbrace{\frac{159}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots116]}-\underbrace{\frac{81}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots121]}-\underbrace{\frac{795}{256}ee'^3\frac{n'}{n}}_{[41\cdots14]}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g+l-2h'-2g'+l')$$

(124)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{32}ee'^4\right\}\cos(2h+2g+l-2h'-2g'+2l')$$

(125)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{15}{8}e^2-\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{75}{16}e^2e'^2+\frac{15}{8}\gamma^4e^2+\frac{75}{8}\gamma^2e^2e'^2+\frac{195}{128}e^2e'^4+\frac{105}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2}\\
&-\underbrace{\frac{1215}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[1\cdots125]}+\underbrace{\left(\frac{945}{64}e^2e'^2-\frac{4725}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{945}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}}_{[1\cdots126]}\\
&+\underbrace{\left(\frac{135}{64}e^2e'^2-\frac{675}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{135}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}}_{[1\cdots130]}+\underbrace{\frac{579}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\cdots76]}\\
&+\underbrace{\left(\frac{165}{32}e^2-\frac{69}{2}\gamma^2e^2-\frac{97}{32}e^4-\frac{165}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1305}{64}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1803}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\cdots116]}+\underbrace{\frac{105}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\cdots125]}
\end{aligned}\right.
$$

Ce coefficient du terme (125) se continue à la page suivante.

Cette portion du coefficient du terme (125) a disparu par suite de la 41e opération.

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2e opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^3 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (131), qui provient du terme (122) dans cette 2e opération.

(125) suite.

$$+\left(\frac{21}{64}e^2-\frac{21}{8}\gamma^2e^2+\frac{55}{128}e^4-\frac{21}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{819}{128}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{147}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 . . . . 134] [2 . . 139]

$$-\left(\frac{3}{64}e^2-\frac{3}{8}\gamma^2e^2-\frac{9}{128}e^4-\frac{3}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{1}{32}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2e^2-\frac{139}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[. . . . 23]

$$-\frac{143}{384}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{331}{1152}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{81}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{27}{64}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{645}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{995}{128}e^2\frac{n'^5}{n^5}$$

. . . . 23] [3 . . . . 108] [3 . . . . 125]

$$-\frac{29757}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{23703}{128}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{186057}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{234171}{256}e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{18225}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{83835}{128}e^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[3 . . . . 7] [4 . . . . 76] [4 . . . . 125]

$$-\frac{81}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{27}{32}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{3465}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{44514}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{495}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{567}{128}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[4 . . . . 248] [5 . . . . 8] [6 . . . . 12]

$$-\frac{63}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{495}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{57}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{441}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1827}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[7 . . . . 24] [8 . . . . 26] [9 . . . . 135]

$$-\frac{63}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{441}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{651}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1197}{64}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{9}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3}{32}e^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[10 . . . . 137] [11 . . . . 134] [14 . . . . 23]

$$+\frac{675}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{495}{128}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{27}{4}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{15}{64}e^2-\frac{51}{32}\gamma^2e^2-\frac{23}{32}e^4-\frac{15}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[18 . . . . 103] [23 . . 188] [26 . . . . 16]

$$+m'\frac{a^2}{a'^2}\left\{\begin{array}{l}\end{array}\right.$$

$$-\left(\frac{3}{8}e^2-\frac{87}{32}\gamma^2e^2-\frac{143}{128}e^4-\frac{393}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{14541}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{18885}{256}e^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[26 . . . . 16]

$$+\frac{2673}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3969}{256}e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{3375}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3375}{256}e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{1323}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{315}{128}e^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[26 . . . . 96] [26 . . . . 125] [26 . . . . 243]

$$-\frac{315}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{6147}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{45}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{675}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{9}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[27 . . . . 17] [28 . . . . 20] [29 . . . 193] [32 . . 96]

$$-\frac{15}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3}{128}e^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1}{16}e^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1}{32}e^4\frac{n'^3}{n^3}-\frac{135}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{135}{512}e^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[32 . . 125] [32 . . 139] [35 . . . . 28] [35 . . . . 125]

$$-\frac{315}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{717}{256}e^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[35 . . . . 245]

Cette portion du coefficient du terme (125) a disparu par suite de la 41e opération.

$$+\frac{9225}{1024}e^4\frac{n'^4}{n^4}+\frac{23625}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{424035}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{10125}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[41 . . 251] [42 . . . . 2] [43 . . . . 2]

$$-\frac{66015}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{7875}{1024}e^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{15}{8}\gamma^2e^2+\frac{15}{16}\gamma^4e^2+\frac{75}{32}\gamma^2e^4-\frac{75}{16}\gamma^2e^2e'^2$$

[44 . . . . 2] [46 . . . . 109] [49 . . . . 166]

Cette portion du coefficient du terme (125) a disparu par suite de la 50e opération.

Ce coefficient du terme (125) se continue à la page suivante.

(125)
Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}$$

$$-\left(\frac{855}{128}\gamma^2 e^2 + \frac{7695}{128}\gamma^4 e^2 - \frac{4905}{256}\gamma^2 e^4 + \frac{1875}{128}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

[49 · 166]

$$-\frac{17859}{2048}\gamma^3 e^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{1004137}{32768}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3}$$

[49 · · · · · · · · · · · · · · 166]

Cette portion du coefficient du terme (125) a disparu par suite de la 50e opération.

$$+\left(\frac{45}{128}\gamma^2 e^2 + \frac{315}{64}\gamma^4 e^2 + \frac{405}{256}\gamma^2 e^4 - \frac{405}{128}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} - \frac{675}{256}\gamma^2 e^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{121383}{32768}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3}$$

[51 · 166]

$$+\frac{1215}{256}\gamma^2 e^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{89235}{4096}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^2} + \frac{315}{32}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n} - \frac{135}{32}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}$$

[52 · · · · · · · · · · · · 273] [53 · · · · 66] [54 · · · · 64]

$$\times \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l').$$

(126)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}$$

$$\frac{105}{16}e^2 e' - \frac{105}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{1845}{128}e^2 e'^3 + \frac{105}{16}\gamma^4 e^2 e' + \frac{945}{128}e^2 e' \frac{a^2}{a'^2}$$

$$-\left(\frac{135}{32}e^2 e' - \frac{675}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{135}{64}e^4 e' - \frac{1485}{256}e^2 e'^3\right)\frac{n'}{n} + \frac{2295}{64}e^2 e'^3 \frac{n'}{n} + \frac{405}{256}e^2 e'^3 \frac{n'}{n}$$

[1 · 125] [1 · · · 127] [1 · · · · 130]

$$+\frac{4053}{512}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{1155}{64}e^2 e' - \frac{483}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{679}{64}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1305}{256}e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{12621}{256}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[2 · · · · 77] [2 · 117]

$$+\frac{735}{32}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{147}{128}e^2 e' - \frac{147}{16}\gamma^2 e^2 e' + \frac{385}{256}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{819}{512}e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{1029}{512}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[2 · · · 126] [2 · 135]

$$-\frac{63}{256}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{9}{128}e^2 e' - \frac{9}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{27}{256}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{165}{512}e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{13}{32}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[2 · · · 140] [3 · 26]

$$-\frac{81}{512}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{105}{64}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{495}{64}e^2 e' - \frac{207}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{291}{64}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{981}{256}e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}$$

[3 · · · 111] [3 · · · 126] [4 · 12]

$$-\frac{142533}{1024}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{186057}{2048}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{127575}{256}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{567}{512}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{642201}{1024}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[4 · · · · · · 12] [4 · · · · · 82] [4 · · · · 126] [4 · · · 249] [· · · · · · · 7]

$$+\frac{6237}{1024}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{21}{128}e^2 e' - \frac{21}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{63}{256}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{219}{512}e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{60927}{1024}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[6 · · · · 248] [7 · 23]

$$+\left(\frac{63}{128}e^2 e' - \frac{63}{16}\gamma^2 e e' + \frac{165}{256}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{693}{512}e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{8427}{512}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[10 · 134]

$$+\frac{4557}{256}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{27}{512}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{675}{1024}e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{189}{8}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{81}{8}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}$$

[11 · · · 135] [14 · · · 26] [18 · · · 106] [23 · · · · 189] [25 · · · 59]

Cette portion du coefficient du terme (126) a disparu par suite de la 42e opération

Ce coefficient du terme (126) se continue à la page suivante.

(126) Suite.

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\left(\frac{45}{128}e^2e'-\frac{153}{64}\gamma^2e^2e'-\frac{69}{64}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{12465}{256}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{2673}{1024}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad{\scriptstyle[26\cdots\cdots20]\quad[26\cdots100]}\\
&-\frac{23625}{1024}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{223587}{1024}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{105}{128}e^2e'-\frac{357}{64}\gamma^2e^2e'-\frac{161}{64}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{873}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\\
&\qquad{\scriptstyle[26\cdots126]\quad[26\cdots244]\quad[27\cdots\cdots16]}\\
&+\frac{28017}{1024}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{12663}{2048}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{63}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad{\scriptstyle[27\cdots16]\quad[28\cdots243]\quad[29\cdots194]\quad[31\cdots193]\quad[32\cdots97]}\\
&-\frac{105}{1024}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{21}{256}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{256}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{32}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{945}{1024}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad{\scriptstyle[32\cdots126]\quad[32\cdots140]\quad[33\cdots76]\quad[34\cdots139]\quad[35\cdots31]\quad[35\cdots126]}\\
&+\frac{9387}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{7}{32}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{495}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{45}{256}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{4725}{512}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad{\scriptstyle[35\cdots216]\quad[36\cdots28]\quad[37\cdots215]\quad[38\cdots88]\quad[39\cdots223]}\\
&+\frac{39285}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2165355}{4096}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad{\scriptstyle[41\cdots\cdots2]}\\
&-\left(\frac{23625}{1024}e^2e'-\frac{70875}{512}\gamma^2e^2e'-\frac{23625}{1024}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{10125}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{20794725}{65536}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad{\scriptstyle[41\cdots\cdots126]}\\
&-\left(\frac{3375}{1024}e^2e'-\frac{10125}{512}\gamma^2e^2e'-\frac{10125}{2048}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{10125}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{334125}{65536}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad{\scriptstyle[41\cdots\cdots130]}\\
&-\frac{2625}{256}e^2e'\frac{a^2}{a'^2}+\frac{105}{16}\gamma^2e^2e'+\frac{105}{32}\gamma^4e^2e'+\frac{525}{64}\gamma^2e^4e'-\frac{4905}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}\\
&\qquad{\scriptstyle[48\cdots409]\quad[49\cdots\cdots167]}\\
&-\frac{211053}{4096}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{10125}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{315}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{135}{16}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}\\
&\qquad{\scriptstyle[49\cdots167]\quad[50\cdots2]\quad[51\cdots\cdots167]\quad[52\cdots64]}\\
&-\frac{25515}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{14805}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1215}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\\
&\qquad{\scriptstyle[52\cdots64]\quad[52\cdots274]\quad[54\cdots273]}
\end{aligned}\right\}$$

[Cette portion du coefficient du terme (126) a disparu par suite de la 42e opération . . . . .]

$$\times\cos(2h+2g-2h'-2g'-3l')$$

(127)

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{255}{16}e^2e'^2-\frac{255}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{575}{16}e^2e'^4\\
&-\left(\frac{405}{128}e^2e'^2-\frac{2025}{64}\gamma^2e^2e'^2-\frac{405}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{1215}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}\\
&\qquad{\scriptstyle[1\cdots\cdots125]}\\
&-\left(\frac{945}{64}e^2e'^2-\frac{4725}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{945}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{2805}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}\\
&\qquad{\scriptstyle[1\cdots\cdots126]\quad[2\cdots118]}
\end{aligned}\right\}$$

Cette portion du coefficient du terme (127) a disparu par suite de la 44e opération.

Ce coefficient du terme (127) se continue à la page suivante

(127)
Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&+\underbrace{\frac{22185}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[2\cdots118]}+\underbrace{\frac{357}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{13923}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[2\cdots136]}-\underbrace{\frac{27}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1557}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\cdots27]}\\
&+\underbrace{\frac{1485}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{6939}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\cdots13]}+\underbrace{\frac{3465}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{14589}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[5\cdots12]}\\
&-\underbrace{\frac{63}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{333}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[7\cdots26]}+\underbrace{\frac{441}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1197}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[10\cdots135]}\\
&+\underbrace{\frac{189}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{6993}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[13\cdots134]}-\underbrace{\frac{51}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3383}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[15\cdots23]}\\
&-\underbrace{\frac{135}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{459}{128}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[26\cdots21]}-\underbrace{\frac{315}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{909}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[27\cdots20]}\\
&-\underbrace{\frac{255}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{6273}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[32\cdots78]}+\underbrace{\frac{353565}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[41\cdots3]}-\underbrace{\frac{57375}{1024}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{172125}{8192}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[41\cdots127]}\\
&+\underbrace{\frac{30375}{8192}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[41\cdots131]}+\underbrace{\frac{23625}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{424035}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[42\cdots2]}\\
&+\underbrace{\frac{255}{16}\gamma^2e^2e'^2-\frac{9945}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[49\cdots168]}+\underbrace{\frac{765}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[51\cdots168]}+\underbrace{\frac{405}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[52\cdots65]}+\underbrace{\frac{315}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}_{[53\cdots64]}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2h+2g-2h'-2g'-4l')$$

[Cette portion du coefficient du terme (127) a disparu par suite de la 41^e opération.]

(128)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{4225}{128}e^2e'^3-\underbrace{\frac{795}{256}e^2e'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots125]}-\underbrace{\frac{2835}{256}e^2e'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots126]}-\underbrace{\frac{2295}{64}e^2e'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots127]}\right\}$$

$$\cos(2h+2g-2h'-2g'-5l')$$

(129)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{7995}{128}e^2e'^4\right\}\cos(2h+2g-2h'-2g'-6l')$$

(130)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{15}{16}e^2e'+\frac{15}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{15}{128}e^2e'^3-\frac{15}{16}\gamma^4e^2e'+\frac{105}{128}e^2e'\frac{a^2}{a'^2}\\
&+\underbrace{\left(\frac{135}{32}e^2e'-\frac{675}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{135}{64}e^4e'-\frac{1485}{256}e^2e'^3\right)\frac{n'}{n}}_{[1\cdots125]}+\underbrace{\frac{2835}{256}e^2e'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots126]}
\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (130) a disparu par suite de la 43^e opération

Ce coefficient du terme (130) se continue à la page suivante

(130) Suite.

$+ m' \frac{a^2}{a'^3}$

$$- \frac{579}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{165}{64} e^2 e' - \frac{69}{4} \gamma^2 e^2 e' - \frac{97}{64} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{1305}{256} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{1803}{256} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[2 . . . 82] [2 . . . . 121]

$$- \frac{105}{32} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{21}{128} e^2 e' - \frac{21}{16} \gamma^2 e^2 e' + \frac{55}{256} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{819}{512} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{147}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[2 . . . 130] [2 . . . . 137]

$$+ \frac{9}{256} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{9}{128} e^2 e' - \frac{9}{16} \gamma^2 e^2 e' - \frac{27}{256} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{213}{512} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{115}{128} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[2 . . . 142] [3 . . . . 24]

$$+ \frac{567}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{15}{64} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{495}{64} e^2 e' - \frac{207}{4} \gamma^2 e^2 e' - \frac{291}{64} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{9531}{256} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}$$

[3 . . . 109] [3 . . . 130] [4 . . . . 8]

$$+ \frac{123363}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1302399}{2048} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{18225}{256} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{81}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{43659}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[4 . . . 8] [4 . . . 77] [4 . . . 130] [4 . . . 250] [5 . . . 248]

$$- \frac{91743}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{21}{2} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{3}{128} e^2 e' - \frac{3}{16} \gamma^2 e^2 e' - \frac{9}{256} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{139}{512} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}$$

[6 . . . 7] [7 . . . 236] [8 . . . . 23]

$$+ \frac{26387}{3072} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{63}{128} e^2 e' - \frac{63}{16} \gamma^2 e^2 e' + \frac{165}{256} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{693}{512} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{4245}{256} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[8 . . . 23] [9 . . . . 134]

$$- \frac{651}{256} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{27}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{4725}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{27}{8} \gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{81}{8} \gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}$$

[11 . . . 137] [14 . . . 24] [18 . . . 104] [23 . . . 191] [25 . . . 61]

$$- \left(\frac{45}{128} e^2 e' - \frac{153}{64} \gamma^2 e^2 e' - \frac{69}{64} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{81}{32} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{84339}{256} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{18711}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[26 . . . . 17] [26 . . . 97]

$$+ \frac{3375}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{31941}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{88641}{2048} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{15}{128} e^2 e' - \frac{51}{64} \gamma^2 e^2 e' - \frac{23}{64} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

[26 . . . 130] [26 . . . 246] [27 . . . 243] [28 . . . . 16]

$$+ \frac{393}{256} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{1791}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{64} \gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{27}{64} \gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{3}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{15}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[28 . . . . 16] [29 . . . 196] [30 . . . 193] [32 . . . 100] [32 . . . 130]

$$- \frac{3}{256} e^4 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{256} e^4 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{63}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{3}{32} e^4 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{1341}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[32 . . . 142] [33 . . . 139] [34 . . . 76] [35 . . . 29] [35 . . . 130] [35 . . . 219]

$$- \frac{3465}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1}{32} e^4 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{45}{256} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{675}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{63}{512} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[36 . . . 215] [37 . . . 28] [38 . . . 92] [39 . . . 225] [40 . . . 12]

$$+ \frac{39285}{256} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{2165355}{4096} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[41 . . . . 2]

$$+ \left(\frac{23625}{1024} e^2 e' - \frac{70875}{512} \gamma^2 e^2 e' - \frac{70875}{2048} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{10125}{512} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{20794725}{65536} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[41 . . . . 126]

$$+ \left(\frac{3375}{1024} e^2 e' - \frac{10125}{512} \gamma^2 e^2 e' - \frac{3375}{1024} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{10125}{1024} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{334125}{65536} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}$$

[41 . . . . 130]

(Cette portion du coefficient du terme (130) a disparu par suite de la 43e opération

Ce coefficient du terme (130) se continue à la page suivante.

(130) Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\frac{15}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{15}{32}\gamma^4e^2e'-\frac{75}{64}\gamma^2e^4e'-\frac{225}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}+\frac{54939}{4096}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{10125}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\\&-\frac{45}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}+\frac{135}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{10395}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3915}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\\&+\frac{2835}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\end{aligned}\right.$$

[49 . . . . 171] [50 . . . . 2]

[51 . . . . 171] [52 . . . . 66] [52 . . . . . 276]

[53 . . . . . 273]

$$\times\cos(2h+2g-2h'-2g'-l')$$

(131)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{405}{128}e^2e'^2-\frac{2025}{64}\gamma^2e^2e'^2-\frac{405}{256}e^4e'^2-\frac{1395}{256}e^2e'^4\right)\frac{n'}{n}\\&+\left(\frac{1215}{256}e^2e'^2-\frac{10935}{128}\gamma^2e^2e'^2-\frac{1215}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5565}{512}e^2e'^4\frac{n'}{n}\\&-\left(\frac{135}{64}e^2e'^2-\frac{675}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{135}{128}e^4e'^2+\frac{135}{64}e^2e'^4\right)\frac{n'}{n}-\frac{45}{512}e^2e'^4\frac{n'}{n}\\&-\frac{1305}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{6345}{4096}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{819}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{31941}{8192}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\\&-\left(\frac{27}{256}e^2e'^2-\frac{27}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{81}{512}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1845}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{23307}{8192}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\\&+\left(\frac{1485}{128}e^2e'^2-\frac{621}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{873}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{70011}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{735705}{4096}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\\&+\frac{684369}{512}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{43659}{2048}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{495}{128}e^2e'^2-\frac{207}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{291}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\&-\frac{5409}{256}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1054017}{2048}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{40257}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{90573}{2048}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\\&+\left(\frac{9}{256}e^2e'^2-\frac{9}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{27}{512}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{303}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{111805}{4096}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\\&+\frac{81}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{63}{256}e^2e'^2-\frac{63}{32}\gamma^2e^2e'^2+\frac{165}{512}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1575}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\&-\frac{88599}{4096}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{81}{512}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3375}{512}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{17361}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\end{aligned}\right.$$

[1 . . . . 125]

[1 . . . . 125] [1 . . . . . 126]

[1 . . . . 130] [1 . . . 132]

[2 . . . . 122] [2 . . . . 138]

[3 . . . . 25]

[4 . . . . 9]

[4 . . . . 78] [5 . . . . . . 250] [6 . . . . 8]

[6 . . . . 8] [6 . . . . . . 76] [7 . . . . . . 240]

[8 . . . . 24]

[8 . . . . . 108] [9 . . . . 137]

[9 . . . . . . 137] [9 . . . . 139] [10 . . . . 76] [10 . . . . . 121]

Cette portion du coefficient du terme (131) a disparu par suite de la 45^e opération

Ce coefficient du terme (131) se continue à la page suivante.

(431) Suite.

$$+\left(\frac{189}{256}e^2e'^2-\frac{189}{32}\gamma^2e^2e'^2+\frac{495}{512}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{6993}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{485019}{8192}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[12 . . . . 134]

$$+\frac{81}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{106029}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{11475}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{243}{16}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[14 . . . . 25] [16 . . . . . . 248] [18 . . . . 105] [25 . . . . . . 62]

$$-\left(\frac{135}{356}e^2e'^2-\frac{459}{128}\gamma^2e^2e'^2-\frac{207}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{675}{128}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{683937}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[26 . . . . 18]

$$+\frac{45441}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1323}{4096}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{263277}{2048}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[26 . . . . . 98] [26 . . . . 247] [27 . . . . 246]

$$+\left(\frac{45}{256}e^2e'^2-\frac{153}{128}\gamma^2e^2e'^2-\frac{69}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1683}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{30357}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[28 . . . . 17]

$$+\frac{2673}{2048}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{27}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{369}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{357}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9}{512}e^4e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[28 . . . . 96] [30 . . . . 196] [32 . . . . 83] [33 . . . 142]

$$+\frac{9}{128}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{27}{1024}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9}{64}e^4e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1431}{512}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{2583}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3}{64}e^4e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[34 . . . . 82] [34 . . . . 96] [35 . . . 30] [35 . . . 220] [36 . . . 219] [37 . . . 29]

$$+m'\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+\frac{135}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{7083}{8192}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{675}{2048}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{51849}{512}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[38 . . . . 93] [39 . . . 226] [40 . . . . . 13]

$$+\frac{353565}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{4459785}{4096}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{57375}{1024}e^2e'^2-\frac{172125}{512}\gamma^2e^2e'^2-\frac{172125}{2048}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[41 . . . . 3] [41 . . . . 127]

$$+\frac{172125}{8192}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{52944975}{65536}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{30375}{8192}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{820125}{16384}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[41 . . . . 127] [41 . . . . 131]

$$-\left(\frac{10125}{256}e^2e'^2-\frac{30375}{128}\gamma^2e^2e'^2-\frac{30375}{512}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{66015}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{3767265}{8192}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[43 . . . . 2]

$$-\frac{135}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{3015}{2048}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{12375}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{405}{2048}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[49 . . . . 172] [50 . . . . 3] [51 . . . . . 172]

$$+\frac{405}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{14085}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4725}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{1215}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[52 . . . . 67] [53 . . . . . . 276] [54 . . . . 66]

$$+\frac{20655}{1024}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{10125}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[55 . . . . . . 273] [57 . . . . . . 130]

$$\times\cos(2h+2g-2h'-2g')$$

Cette portion du coefficient du terme (131) a disparu par suite de la 45e opération . . . .]

(132)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{5}{128}e^2e'^3+\underset{[1\cdots125]}{\frac{795}{256}e^2e'^3\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots130]}{\frac{405}{256}e^2e'^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2g-2h'-2g'+l')$$

(133)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{5}{64}e^2e'^4\right\}\cos(2h+2g-2h'-2g'+2l')$$

(134)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}-\frac{7}{32}e^3+\frac{7}{16}\gamma^2e^3-\frac{47}{512}e^5+\frac{35}{64}e^3e'^2-\underset{[1\cdots135]}{\frac{1911}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots137]}{\frac{273}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\\ -\underset{[2\cdots125]}{\frac{105}{64}e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots139]}{\frac{3}{32}e^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots\cdots\cdots28]}{\frac{1}{24}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1}{36}e^3\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots\cdots\cdots16]}{\frac{261}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{369}{64}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\\ -\underset{[26\cdots\cdots\cdots23]}{\frac{33}{256}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{15}{64}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\\ \\ -\underset{[41\cdots7]}{\frac{5985}{2048}e^3\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[52\cdots68]}{\frac{21}{64}\gamma^2e^3\frac{n'}{n}}\end{array}\right\}$$

Cette portion du coefficient du terme (134) a disparu par suite de la 40e opération.

$$\times\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-2l')$$

(135)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}-\frac{49}{64}e^3e'+\frac{49}{32}\gamma^2e^3e'-\frac{329}{1024}e^5e'+\underset{[1\cdots134]}{\frac{273}{256}e^3e'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots126]}{\frac{735}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots140]}{\frac{21}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots31]}{\frac{1}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\ +\underset{[4\cdots20]}{\frac{783}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[5\cdots16]}{\frac{1827}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots28]}{\frac{7}{48}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots125]}{\frac{315}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots139]}{\frac{9}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots26]}{\frac{99}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\ -\underset{[27\cdots23]}{\frac{231}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots135]}{\frac{33075}{8192}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots189]}{\frac{105}{16}\gamma^2e^3e'}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-3l')$$

(136)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{119}{64}e^3e'^2+\underset{[1\cdots134]}{\frac{819}{1024}e^3e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots135]}{\frac{1911}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-4l')$$

(137)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{7}{64}e^3e'-\frac{7}{32}\gamma^2e^3e'+\frac{47}{1024}e^5e'-\underset{[1\cdots134]}{\frac{273}{256}e^3e'\frac{n'}{n}}+\underset{[2\cdots130]}{\frac{105}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots142]}{\frac{3}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots29]}{\frac{1}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[4\cdots17]}{\frac{783}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots16]}{\frac{261}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots28]}{\frac{1}{48}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots139]}{\frac{9}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots125]}{\frac{315}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots24]}{\frac{99}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[28\cdots23]}{\frac{33}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots137]}{\frac{4725}{8192}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[49\cdots131]}{\frac{15}{16}\gamma^2e^3e'}\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-l')$$

(138)*

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[1\cdots134]}{\frac{819}{1024}e^3e'^2\frac{n'}{n}-\frac{10647}{4096}e^3e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[1\cdots137]}{\frac{273}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g-l-2h'-2g')$$

(139)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\frac{3}{64}e^4+\frac{3}{32}\gamma^2e^4-\frac{11}{640}e^6+\frac{15}{128}e^4e'^2-\underset{[2\cdots134]}{\frac{135}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots143]}{\frac{51}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots33]}{\frac{125}{3072}e^4\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[4\cdots23]}{\frac{1431}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots28]}{\frac{3}{32}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[32\cdots125]}{\frac{55}{128}e^4\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots139]}{\frac{675}{2048}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots193]}{\frac{15}{32}\gamma^2e^4}\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2h+2g-2l-2h'-2g'-2l')$$

(140)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{21}{128}e^4e'+\underset{[1\cdots139]}{\frac{45}{128}e^4e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2g-2l-2h'-2g'-3l')$$

(141)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{51}{128}e^4e'^2\right\}\cos(2h+2g-2l-2h'-2g'-4l')$$

(142)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{3}{128}e^4e'-\underset{[1\cdots139]}{\frac{45}{128}e^4e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2g-2l-2h'-2g'-l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvieme ordre, avant la 2^e opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (131), qui provient du terme (138) dans cette 2^e opération.

(143)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{51}{2560}e^5\right\}\cos(2h+2g-3l-2h'-2g'-2l')$$

(144)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{357}{5120}e^5e'\right\}\cos(2h+2g-3l-2h'-2g'-3l')$$

(145)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{51}{5120}e^5e'\right\}\cos(2h+2g-3l-2h'-2g'-l')$$

(146)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{11}{960}e^6\right\}\cos(2h+2g-4l-2h'-2g'-2l')$$

(147)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{35}{16}\gamma^2\frac{a^2}{a'^2}\underset{[3\cdots\cdots 58]}{-\left(\frac{9}{8}\gamma^2-\frac{27}{8}\gamma^4-\frac{39}{8}\gamma^2e^2-\frac{9}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{4}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{199}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots180]}{\frac{3}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[4\cdots\cdots 44]}{+\left(\frac{27}{8}\gamma^2-\frac{81}{8}\gamma^4+\frac{45}{8}\gamma^2e^2-\frac{27}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{4}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1941}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots193]}{\frac{243}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[5\cdots47]}{\frac{567}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots45]}{\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots61]}{\frac{189}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots59]}{\frac{27}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[14\cdots58]}{\frac{27}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[17\cdots188]}{\frac{69}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[18\cdots175]}{\frac{27}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[26\cdots\cdots 37]}{-\left(\frac{27}{16}\gamma^2-\frac{81}{16}\gamma^4-\frac{135}{16}\gamma^2e^2-\frac{27}{16}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{8}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{945}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[27\cdots41]}{\frac{567}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots38]}{\frac{81}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[29\cdots166]}{\frac{27}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[35\cdots63]}{\frac{45}{16}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots\cdots 49]}{+\frac{45}{8}\gamma^2e^2\frac{n'}{n}+\frac{135}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[52\cdots147]}{\frac{81}{1024}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[52\cdots\cdots 215]}{+\frac{27}{8}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{279}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\times\cos(2h+4g+4l-2h'-2g'-2l')$$

(148)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
&\underset{[3\cdots\cdots 59]}{-\frac{27}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[4\cdots\cdots 45]}{+\frac{81}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1377}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[5\cdots\cdots 44]}{+\frac{189}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2349}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[7\cdots\cdots 58]}{-\frac{63}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{657}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[26\cdots\cdots 38]}{-\frac{81}{32}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{16}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[27\cdots\cdots 37]}{-\frac{189}{32}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1539}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[41\cdots50]}{\frac{135}{16}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[42\cdots49]}{\frac{105}{8}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[52\cdots216]}{\frac{189}{32}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n'^3}}-\underset{[54\cdots215]}{\frac{27}{8}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\times\cos(2h+4g+4l-2h'-2g'-3l')$$

$$(149)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots60]}{-\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[4\cdots46]}{+\frac{243}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[5\cdots45]}{+\frac{567}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[7\cdots59]}{-\frac{189}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[15\cdots58]}{-\frac{153}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[16\cdots44]}{+\frac{459}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&\underset{[26\cdots39]}{-\frac{243}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[27\cdots38]}{-\frac{567}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[29\cdots78]}{-\frac{459}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[49\cdots98]}{-\frac{255}{8}\gamma^2e^2e'^2}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h+4g+4l-2h'-2g'-4l')$$

$$(150)\quad +m\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots61]}{-\frac{27}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{207}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[4\cdots47]}{+\frac{81}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[6\cdots44]}{-\frac{27}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{189}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\&\underset{[8\cdots58]}{+\frac{9}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{417}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[26\cdots41]}{-\frac{81}{32}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{16}\gamma^2e'\frac{n'^3}{h^3}}\underset{[28\cdots37]}{+\frac{27}{32}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{459}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\&\underset{[41\cdots52]}{+\frac{135}{16}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[43\cdots49]}{-\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[52\cdots219]}{+\frac{27}{32}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[53\cdots215]}{+\frac{63}{8}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h+4g+4l-2h'-2g'-l')$$

$$(151)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[3\cdots62]}{-\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[4\cdots48]}{+\frac{243}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[6\cdots47]}{-\frac{81}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[8\cdots61]}{+\frac{27}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[26\cdots42]}{-\frac{243}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[28\cdots41]}{+\frac{81}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+4g+4l-2h'-2g')$$

$$(152)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[3\cdots37]}{-\frac{9}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{2}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[4\cdots49]}{+\frac{27}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{2}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[22\cdots76]}{-\frac{9}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[23\cdots96]}{+\frac{27}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots54]}{+\frac{1125}{128}\gamma^2e^3\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+4g+5l-2h'-2g'-2l')$$

$$(153)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots38]}{-\frac{27}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[4\cdots50]}{+\frac{81}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[5\cdots49]}{+\frac{189}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[7\cdots37]}{-\frac{63}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[22\cdots77]}{-\frac{63}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[23\cdots97]}{+\frac{189}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&\underset{[26\cdots45]}{-\frac{243}{64}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[35\cdots59]}{-\frac{81}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[49\cdots104]}{-\frac{2625}{128}\gamma^2e^3e'}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h+4g+5l-2h'-2g'-3l')$$

(154)
$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots41]}{\frac{27}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots52]}{\frac{81}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots49]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots37]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[22\cdots82]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[23\cdots100]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\ -\underset{[26\cdots47]}{\frac{243}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[35\cdots61]}{\frac{81}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[49\cdots106]}{\frac{375}{128}\gamma^2 e^3 e'}\end{array}\right\}$$
$$\times\cos(2h+4g+5l-2h'-2g'-l')$$

(155)
$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[3\cdots55]}{\frac{27}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots54]}{\frac{675}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[23\cdots103]}{\frac{675}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots59]}{\frac{27}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[29\cdots96]}{\frac{27}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots108]}{\frac{135}{16}\gamma^2 e^4}\right\}$$
$$\times\cos(2h+4g+6l-2h'-2g'-2l')$$

(156)
$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots63]}{\frac{15}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots37]}{\frac{27}{4}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[22\cdots125]}{\frac{15}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[25\cdots76]}{\frac{27}{4}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\\ +\underset{[41\cdots44]}{\frac{135}{16}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[42\cdots47]}{\frac{315}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[43\cdots45]}{\frac{135}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\end{array}\right\}$$
$$\times\cos(2h+4g+3l-2h'-2g'-2l')$$

(157)
$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots64]}{\frac{45}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots58]}{\frac{81}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[5\cdots47]}{\frac{189}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots63]}{\frac{105}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[22\cdots126]}{\frac{105}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\ +\underset{[25\cdots77]}{\frac{189}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots59]}{\frac{405}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots45]}{\frac{135}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}+\frac{405}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots88]}{\frac{225}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$
$$\times\cos(2h+4g+3l-2h'-2g'-3l')$$

(158)
$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots46]}{\frac{405}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[42\cdots45]}{\frac{315}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+4g+3l-2h'-2g'-4l')$$

(159)
$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots66]}{\frac{45}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots41]}{\frac{81}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots37]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[8\cdots63]}{\frac{15}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[22\cdots130]}{\frac{15}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[23\cdots82]}{\frac{27}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\ +\underset{[26\cdots61]}{\frac{405}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots47]}{\frac{135}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}-\frac{405}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots92]}{\frac{225}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$
$$\times\cos(2h+4g+3l-2h'-2g'-l')$$

(160)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41 \cdots 48]}{\frac{405}{64}\gamma^2 ce'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[43 \cdots 47]}{\frac{135}{32}\gamma^2 ce'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[49 \cdots 93]}{\frac{675}{256}\gamma^2 ce'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+4g+3l-2h'-2g')$$

(161)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}-\underset{[3 \cdots 68]}{\frac{21}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4 \cdots 58]}{\frac{243}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[22 \cdots 134]}{\frac{21}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26 \cdots 63]}{\frac{45}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[29 \cdots 125]}{\frac{45}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41 \cdots 193]}{\frac{675}{512}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\+\underset{[49 \cdots 76]}{\frac{75}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(2h+4g+2l-2h'-2g'-2l')$$

(162)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[49 \cdots 78]}{\frac{1275}{32}\gamma^2 e^2 e'^2}\right\}\cos(2h+4g+2l-2h'-2g'-4l')$$

(163)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[49 \cdots 166]}{\frac{75}{128}\gamma^2 e^4-\frac{4275}{1024}\gamma^2 e^4\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+4g-2h'-2g'-2l')$$

(164)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[49 \cdots 167]}{\frac{525}{256}\gamma^2 e^4 e'}\right\}\cos(2h+4g-2h'-2g'-3l')$$

(165)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[49 \cdots 171]}{-\frac{75}{256}\gamma^2 e^4 e'}\right\}\cos(2h+4g-2h'-2g'-l')$$

(166)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma^4+\frac{9}{4}\gamma^2 e^2-\frac{15}{4}\gamma^2 e'^2-\frac{9}{4}\gamma^4 e^2+\frac{15}{4}\gamma^4 e'^2-\frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'^2+\frac{39}{32}\gamma^2 e'^4+\frac{45}{16}\gamma^2\frac{a^2}{a'^2}\\-\underset{[1 \cdots 166]}{\frac{243}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[1 \cdots 167]}{\left(\frac{189}{16}\gamma^2 e'^2-\frac{567}{16}\gamma^4 e'^2+\frac{1323}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}}\\-\underset{[1 \cdots 171]}{\left(\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2-\frac{81}{16}\gamma^4 e'^2+\frac{189}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}}+\underset{[2 \cdots 166]}{\frac{9}{16}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\+\underset{[2 \cdots 175]}{\left(\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{21}{4}\gamma^4+\frac{21}{4}\gamma^2 e^2-\frac{3}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{117}{8}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{21}{16}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2 \cdots 180]}{\frac{3}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\end{array}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (166) a disparu par suite de la 32e opération.

Ce coefficient du terme (166) se continue à la page suivante.

(166)
Suite.

$$+\,m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\;+\left(\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{21}{4}\gamma^4+\frac{3}{4}\gamma^2e^2-\frac{3}{4}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{8}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{21}{16}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}$$

[2 · · · 188] [2 · · 193]

$$+\left(\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{9}{8}\gamma^4+\frac{9}{8}\gamma^2e^2-\frac{3}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{3}{4}\gamma^4+\frac{15}{8}\gamma^2e^2-\frac{139}{16}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

[3 · · · 44]

$$+\frac{187}{96}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{29}{18}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{9}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3}{16}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[3 · · · 44] [3 · · · 166]

$$-\left(\frac{81}{8}\gamma^2-\frac{243}{8}\gamma^4-\frac{459}{8}\gamma^2e^2-\frac{81}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[4 · · · 58]

$$-\left(\frac{81}{4}\gamma^2-\frac{243}{4}\gamma^4-\frac{1161}{8}\gamma^2e^2+\frac{1539}{16}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{4851}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1257}{8}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[4 · · · 58]

$$+\frac{729}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{729}{16}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{27}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9}{8}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{1701}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3159}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[4 · · · 166] [4 · · · 268] [5 · · · 59]

$$+\frac{243}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{729}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{153}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{9}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{21}{8}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[6 · · · 61] [7 · · · 45] [8 · · · 47]

$$-\frac{9}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{63}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{4}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{261}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[9 · · · 178] [9 · · · 189] [10 · · · 176]

$$-\frac{9}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{8}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{93}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{171}{4}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{93}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{171}{4}\gamma\frac{n'^5}{n^5}$$

[10 · · · 191] [11 · · · 175] [11 · · · 188]

$$-\frac{9}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3}{4}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{81}{16}\gamma^2-\frac{225}{16}\gamma^4-\frac{369}{16}\gamma^2e^2-\frac{81}{16}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

[14 · · · 44] [26 · · · 37]

$$+\left(\frac{27}{4}\gamma^2-\frac{153}{8}\gamma^4-\frac{63}{2}\gamma^2e^2-\frac{1161}{16}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{621}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{837}{32}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}$$

[26 · · · 57]

$$-\frac{27}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{27}{64}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{765}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{645}{8}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1701}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{12231}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[26 · · · 166] [26 · · · 259] [27 · · · 58]

$$-\frac{243}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3159}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{27}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{8}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[28 · · · 44] [29 · · 166] [29 · 201] [32 · · 180] [32 · · 193]

$$+\frac{9}{8}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{16}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{16}\gamma^4e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{675}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[35 · · · 49] [41 · · · 65]

$$+\frac{7695}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{8775}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1575}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{675}{32}\gamma^4e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{675}{128}\gamma^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}$$

[41 · · · 65] [41 · · · 273] [42 · · · 64] [43 · · · 66] [46 · · · 567]

Ce coefficient du terme (166) se continue à la page suivante

Cette portion du coefficient du terme (166) a disparu par suite de la 52e opération

(166) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&+\underbrace{\frac{1125}{256}\gamma^2\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}}_{[46\cdots430]}\underbrace{-\frac{75}{128}\gamma^4 e^4+\frac{4275}{1024}\gamma^2 e^4\frac{n'}{n}}_{[49\cdots166]}\\&\underbrace{-\frac{63}{64}\gamma^4\frac{n'^3}{n^3}}_{[52\cdots278]}\underbrace{+\frac{189}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3825}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[53\cdots2]}\underbrace{-\frac{81}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2565}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[54\cdots2]}\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (166) a disparu par suite de la 52e opération.

$$\times\cos(2h-2h'-2g'-2l')$$

(167)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{21}{4}\gamma^2 e'-\frac{21}{4}\gamma^4 e'+\frac{63}{8}\gamma^2 e^2 e'-\frac{369}{32}\gamma^2 e'^3-\frac{63}{8}\gamma^4 e^2 e'\\
&\underbrace{+\left(\frac{27}{8}\gamma^2 e'-\frac{81}{8}\gamma^4 e'+\frac{189}{16}\gamma^2 e^2 e'-\frac{297}{64}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'}{n}}_{[1\cdots166]}\underbrace{-\frac{459}{16}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots168]}\underbrace{-\frac{81}{64}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}}_{[1\cdots171]}\\
&\underbrace{+\frac{63}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\cdots167]}\underbrace{+\left(\frac{21}{8}\gamma^2 e'-\frac{147}{8}\gamma^4 e'+\frac{147}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{117}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{147}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\cdots176]}\\
&\underbrace{-\frac{21}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\cdots181]}\underbrace{+\left(\frac{21}{8}\gamma^2 e'-\frac{147}{8}\gamma^4 e'+\frac{21}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{147}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\cdots189]}\\
&\underbrace{-\frac{21}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[2\cdots194]}\underbrace{+\left(\frac{9}{16}\gamma^2 e'-\frac{27}{16}\gamma^4 e'+\frac{27}{16}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{57}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{133}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\cdots47]}\\
&\underbrace{+\frac{63}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\cdots167]}\underbrace{-\left(\frac{243}{16}\gamma^2 e'-\frac{729}{16}\gamma^4 e'-\frac{1377}{16}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3159}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{19521}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\cdots64]}\\
&\underbrace{+\frac{5103}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\cdots167]}\underbrace{-\frac{189}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\cdots269]}\underbrace{-\left(\frac{567}{16}\gamma^2 e'-\frac{1701}{16}\gamma^4 e'-\frac{3213}{16}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{7047}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[5\cdots58]}\\
&\underbrace{-\frac{14931}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[5\cdots58]}\underbrace{-\frac{351}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[6\cdots268]}\underbrace{+\left(\frac{21}{16}\gamma^2 e'-\frac{63}{16}\gamma^4 e'+\frac{21}{4}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[7\cdots44]}\\
&\underbrace{+\frac{219}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{591}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[7\cdots44]}\underbrace{-\frac{3}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[8\cdots264]}\underbrace{+\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e'-\frac{63}{8}\gamma^4 e'+\frac{63}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[9\cdots175]}\\
&\underbrace{-\frac{99}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{405}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[9\cdots175]}\underbrace{+\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e'-\frac{63}{8}\gamma^4 e'+\frac{9}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{99}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2097}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[10\cdots188]}\\
&\underbrace{+\frac{651}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[11\cdots176]}\underbrace{+\frac{651}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[11\cdots189]}\underbrace{-\frac{27}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[14\cdots47]}\underbrace{+\frac{45}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[22\cdots88]}\underbrace{-\frac{1845}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[23\cdots117]}\underbrace{-\frac{9}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[24\cdots12]}\\
&\underbrace{+\left(\frac{243}{32}\gamma^2 e'-\frac{675}{32}\gamma^4 e'-\frac{1107}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1377}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[26\cdots41]}\underbrace{-\frac{189}{256}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}}_{[26\cdots167]}
\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (167) a disparu par suite de la 53e opération . .

Ce coefficient du terme (167) se continue à la page suivante.

(167) Suite.

$$-\frac{5355}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{567}{32}\gamma^2 e'-\frac{1575}{32}\gamma^4 e'-\frac{2583}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3321}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{16713}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[26 · · · 260] [27 · · · 7]

$$+\frac{1071}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{189}{256}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{63}{16}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{27}{16}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{64}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}$$

[28 · · · 259] [29 · · · 167] [29 · · 202] [30 · · · 76] [1 · · 201] [32 · · · 184]

$$+\frac{21}{64}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{64}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{64}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{16}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{16}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}$$

[32 · · · 194] [33 · · · 180] [34 · · · 193] [35 · · · 52] [36 · · · 49]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{+\frac{675}{32}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}+\frac{10125}{128}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{525}{16}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}+\frac{4125}{128}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3375}{128}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

[41 · · · 66] [42 · · · 63] [43 · · · 273]

$$-\frac{375}{64}\gamma^2 e'\frac{a^2}{a'^2}-\frac{525}{256}\gamma^2 e^4 e'-\frac{2025}{64}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{459}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{5931}{256}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[48 · · · 430] [49 · · 167] [52 · · · 2]

$$-\left(\frac{189}{256}\gamma^2 e'-\frac{567}{256}\gamma^4 e'+\frac{2079}{512}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{77679}{16384}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[52 · · · 165]

$$-\left(\frac{27}{256}\gamma^2 e'-\frac{189}{256}\gamma^4 e'+\frac{297}{512}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{256}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{8505}{16384}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}$$

[52 · · · 174]

$$\times\cos(2h-2h'-2g'-3l')$$

Cette portion du coefficient du terme (167) a disparu par suite de la 55^e opération.

(168)

$$\frac{51}{4}\gamma^2 e'^2-\frac{51}{4}\gamma^4 e'^2+\frac{153}{8}\gamma^2 e^2 e'^2-\frac{115}{4}\gamma^2 e'^4$$

$$-m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{+\left(\frac{81}{32}\gamma^2 e'^2-\frac{243}{32}\gamma^4 e'^2+\frac{567}{64}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{243}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

[1 · · · 166]

$$+\left(\frac{189}{16}\gamma^2 e'^2-\frac{567}{16}\gamma^4 e'^2+\frac{1323}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{51}{8}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1989}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[1 · · · 167] [2 · · · 177]

$$+\frac{51}{8}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{153}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{585}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{729}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}\quad\frac{22599}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[2 · · · 190] [3 · · · 18] [4 · · · 62]

$$-\frac{1701}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{14823}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{171}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[5 · · · 61] [7 · · · 47] [9 · · · 176]

$$+\frac{63}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{333}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{999}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{999}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[10 · · · 189] [12 · · · 175] [13 · · · 188]

$$+\frac{51}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3383}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1377}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{92259}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}$$

[15 · · · 11] [16 · · · 58]

Cette portion du coefficient du terme (168) a disparu par suite de la 55^e opération.

Ce coefficient du terme (168) se continue à la page suivante

(168) Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&+\frac{729}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{243}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1701}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7695}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\&+\frac{1377}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{17901}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2025}{64}\gamma^2 e^2 e'^2\frac{n'}{n}+\frac{1575}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\frac{n'}{n}+\frac{3825}{64}\gamma^2 e^2 e'^2\frac{n'}{n}\\&+\frac{4131}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{459}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1377}{2048}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{243}{2048}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\&+\frac{189}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3825}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}\end{aligned}\right.$$

[26 . . . . 42] [27 . . . . 41]

[29 . . . . 78] [41 . . . . . . 67] [42 . . . . . . 66] [44 . . . . . . 63]

[52 . . . . . 3] [52 . . . . 168] [52 . . . . . 172]

[5 . . . . 2]

$$\times\cos(2h-2h'-2g'-4l')$$

Cette portion du coefficient du terme 168 a disparu par suite de la 33ᵉ opération.

(169)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{845}{32}\gamma^2 e'^3+\frac{159}{64}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}+\frac{567}{64}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}+\frac{459}{16}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}\right\}$$

[1 . . . . 166] [1 . . . . 167] [1 . . . . 168]

$$\times\cos(2h-2h'-2g'-5l')$$

(170)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1599}{32}\gamma^2 e'^4\right\}\cos(2h-2h'-2g'-6l')$$

(171)

$$+ m\frac{a}{a'}\left\{\begin{aligned}&-\frac{3}{4}\gamma^2 e'+\frac{3}{4}\gamma^4 e'-\frac{9}{8}\gamma^2 e^2 e'+\frac{3}{32}\gamma^2 e'^3+\frac{9}{8}\gamma^4 e^2 e'\\&-\left(\frac{27}{8}\gamma^2 e'-\frac{81}{8}\gamma^4 e'+\frac{189}{16}\gamma^2 e^2 e'-\frac{297}{64}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'}{n}-\frac{567}{64}\gamma^2 e'^3\frac{n'}{n}-\frac{9}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\\&-\left(\frac{3}{8}\gamma^2 e'-\frac{21}{8}\gamma^4 e'+\frac{21}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{117}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{21}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\\&-\left(\frac{3}{8}\gamma^2 e'-\frac{21}{8}\gamma^4 e'+\frac{3}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{21}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\\&+\left(\frac{9}{16}\gamma^2 e'-\frac{27}{16}\gamma^4 e'+\frac{27}{16}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{105}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{241}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\\&-\left(\frac{243}{16}\gamma^2 e'-\frac{729}{16}\gamma^4 e'-\frac{1377}{16}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{729}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{9585}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{729}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\end{aligned}\right.$$

[1 . . . . 166] [1 . . . . 167] [2 . . . 171]

[2 . . . . 178] [2 . . . 183]

[2 . . . . 194] [2 . . . 196]

[3 . . . . 15] [3 . . . . 171]

[4 . . . . 59] [4 . . . . 171]

Cette portion du coefficient du terme (171) a disparu par suite de la 31ᵉ opération.

Ce coefficient du terme (171) se continue à la page suivante

(171)
Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{ + \underbrace{\frac{27}{128}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[4 \cdots 271]} + \underbrace{\frac{2457}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[5 \cdots 268]} + \underbrace{\left(\frac{81}{16}\gamma^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^4 e' - \frac{459}{16}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[6 \cdots 58]}$$

$$+ \underbrace{\frac{567}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{891}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[6 \cdots 58]} + \underbrace{\frac{21}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[7 \cdots 264]} - \underbrace{\left(\frac{3}{16}\gamma^2 e' - \frac{9}{16}\gamma^4 e' + \frac{9}{16}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[8 \cdots 44]}$$

$$- \underbrace{\frac{139}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{391}{192}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[8 \cdots 44]} + \underbrace{\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{63}{8}\gamma^4 e' + \frac{9}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[9 \cdots 188]}$$

$$- \underbrace{\frac{99}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{1053}{16}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[9 \cdots 188]} + \underbrace{\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{63}{8}\gamma^4 e' + \frac{63}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{99}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{801}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3}}_{[10 \cdots 175]}$$

$$- \underbrace{\frac{93}{16}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[11 \cdots 178]} - \underbrace{\frac{93}{16}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[11 \cdots 191]} - \underbrace{\frac{27}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[14 \cdots 45]} + \underbrace{\frac{45}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[22 \cdots 92]} - \underbrace{\frac{1773}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[23 \cdots 121]} - \underbrace{\frac{9}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[25 \cdots 12]}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{243}{32}\gamma^2 e' - \frac{675}{32}\gamma^4 e' - \frac{1107}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{243}{16}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{243}{128}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[26 \cdots 38]} + \underbrace{\frac{27}{256}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[26 \cdots 171]}$$

$$+ \underbrace{\frac{765}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[26 \cdots 262]} - \underbrace{\frac{7497}{128}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[27 \cdots 259]} - \underbrace{\left(\frac{81}{32}\gamma^2 e' - \frac{225}{32}\gamma^4 e' - \frac{369}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[28 \cdots 37]}$$

$$- \underbrace{\frac{1161}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{4563}{128}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[28 \cdots 37]} + \underbrace{\frac{27}{256}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[29 \cdots 171]} - \underbrace{\frac{9}{16}\gamma^4 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[29 \cdots 204]} + \underbrace{\frac{27}{16}\gamma^4 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[30 \cdots 201]} + \underbrace{\frac{81}{128}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[31 \cdots 76]}$$

$$- \underbrace{\frac{3}{64}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[32 \cdots 183]} - \underbrace{\frac{3}{64}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[32 \cdots 196]} + \underbrace{\frac{9}{64}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[33 \cdots 193]} + \underbrace{\frac{9}{64}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[34 \cdots 180]} + \underbrace{\frac{27}{16}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[35 \cdots 50]}$$

$$- \underbrace{\frac{9}{16}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[37 \cdots 49]} + \underbrace{\frac{675}{32}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'}{n} - \frac{6075}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[41 \cdots 64]} + \underbrace{\frac{7875}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[42 \cdots 273]}$$

$$- \underbrace{\frac{225}{16}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'}{n} + \frac{3375}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[43 \cdots 63]} - \underbrace{\frac{225}{32}\gamma^2 e' \frac{a^2}{a'^2}}_{[48 \cdots 367]} + \underbrace{\frac{75}{256}\gamma^2 e^4 e'}_{[49 \cdots 171]}$$

$$- \underbrace{\frac{2025}{64}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{459}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{5931}{256}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[52 \cdots 2]}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{189}{256}\gamma^2 e' - \frac{1323}{256}\gamma^4 e' + \frac{2079}{512}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{81}{128}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{77679}{16384}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[52 \cdots 167]}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{27}{256}\gamma^2 e' - \frac{81}{256}\gamma^4 e' + \frac{297}{512}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{81}{256}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{8505}{16384}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}}_{[52 \cdots 171]} \Bigg\}$$

$$\times \cos(2h - 2h' - 2g' - l')$$

Cette portion du coefficient du terme (171) a disparu par suite de la 57e opération

(172)

$$-\left(\frac{81}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{243}{32}\gamma^4 e'^2 + \frac{567}{64}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{279}{64}\gamma^2 e'^4\right)\frac{n'}{n}$$

[1 . . . . 166]

$$-\left(\frac{243}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{1215}{64}\gamma^4 e'^2 + \frac{2673}{128}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1113}{128}\gamma^2 e'^4 \frac{n'}{n}$$

[1 . . . . 166] [1 . . . . 167]

$$+\left(\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{81}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{189}{32}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{27}{16}\gamma^2 e'^4\right)\frac{n'}{n} + \frac{9}{128}\gamma^2 e'^4 \frac{n'}{n}$$

[1 . . . . 171] [1 . . . 173]

$$-\frac{117}{128}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{4563}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{128}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{27}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[2 . . . . 179] [2 . . . . 192]

$$+\left(\frac{27}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{81}{32}\gamma^4 e'^2 + \frac{81}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{873}{256}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{8619}{1024}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[3 . . . . 16]

$$-\left(\frac{729}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{2187}{32}\gamma^4 e'^2 - \frac{4131}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{729}{256}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{135513}{1024}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[4 . . . . 60]

$$-\frac{2457}{128}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{243}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{729}{32}\gamma^4 e'^2 - \frac{1377}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{243}{64}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{31131}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[5 . . . . 271] [6 . . . . 59]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\quad +\frac{147}{256}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{9}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{27}{32}\gamma^4 e'^2 + \frac{27}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{249}{64}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{5425}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right.$$

[7 . . . . 266] [8 . . . . 15]

$$-\left(\frac{9}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{63}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{9}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{63}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{189}{256}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{27}{128}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[9 . . . . 191] [9 . . . . 195]

$$-\left(\frac{9}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{63}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{63}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{12681}{256}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{27}{128}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[10 . . . . 178] [10 . . . 180]

$$+\left(\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{189}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{27}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{999}{128}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{47853}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[12 . . . . 188]

$$+\left(\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{189}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{189}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{999}{128}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{104445}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[13 . . . . 175]

$$-\frac{81}{128}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{51}{64}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{5967}{64}\gamma^2 e'^4 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{135}{256}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{7083}{1024}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[14 . . . . 16] [15 . . 264] [16 . . . . 268] [22 . . . . 95]

$$+\frac{243}{256}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{1809}{64}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{8415}{64}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{7407}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[23 . . . . 122] [24 . . . . . . 9] [25 . . . . 15]

$$+\left(\frac{729}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{2025}{64}\gamma^4 e'^2 - \frac{3321}{64}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1701}{64}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{9477}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}$$

[26 . . . . 59]

Cette portion du coefficient du terme (172) a disparu par suite de la 56e opération

Ce coefficient du terme (172) se continue à la page suivante.

(172)
Suite.

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[26\cdots263]}{-\frac{765}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[27\cdots262]}{\frac{18207}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[28\cdots\cdots\cdots38]}{\left(\frac{243}{64}\gamma^2e'^2-\frac{675}{64}\gamma^4e'^2-\frac{1107}{64}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[28\cdots\cdots\cdots38]}{-\frac{3807}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{18225}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[29\cdots\cdots\cdots83]}{-\frac{1053}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{621}{64}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[30\cdots204]}{-\frac{27}{32}\gamma^4e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[31\cdots82]}{+\frac{81}{128}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[33\cdots196]}{-\frac{9}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[34\cdots183]}{-\frac{9}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[35\cdots51]}{+\frac{81}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[37\cdots50]}{-\frac{27}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[41\cdots\cdots\cdots65]}{+\frac{2025}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{30375}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[42\cdots276]}{-\frac{7875}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[43\cdots\cdots\cdots64]}{-\frac{675}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{24975}{256}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[44\cdots273]}{+\frac{57375}{512}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[45\cdots\cdots\cdots63]}{-\frac{675}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{104085}{512}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[48\cdots63]}{+\frac{375}{64}\gamma^2e'^2\frac{a^2}{a'^2}}\underset{[48\cdots370]}{-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\frac{a^2}{a'^2}}\\
&\underset{[52\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots3]}{-\frac{2475}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{4131}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{126261}{2048}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[52\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots168]}{+\left(\frac{459}{256}\gamma^2e'^2-\frac{3213}{256}\gamma^4e'^2+\frac{5049}{512}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1377}{2048}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{238221}{16384}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[52\cdots\cdots\cdots172]}{+\frac{243}{2048}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{81}{2048}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[54\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots2]}{-\left(\frac{81}{64}\gamma^2e'^2-\frac{567}{64}\gamma^4e'^2-\frac{3159}{128}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[54\cdots\cdots\cdots\cdots2]}{-\frac{2565}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{80253}{2048}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}}
\end{aligned}\right.
$$

Cette portion du coefficient du terme (172) a disparu par suite de la 50e opération

$$\times\cos(2h-2h'-2g')$$

(173)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{32}\gamma^2e'^3\underset{[1\cdots166]}{-\frac{159}{64}\gamma^2e'^3\frac{n'}{n}}\underset{[1\cdots171]}{+\frac{81}{64}\gamma^2e'^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h-2h'-2g'+l')$$

(174)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{16}\gamma^2e'^4\right\}\cos(2h-2h'-2g'+2l')$$

(175)*

$$
+m'\frac{a^2}{a'^2}\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{3}{2}\gamma^2 e+\frac{3}{2}\gamma^4 e+\frac{3}{16}\gamma^2 e^3+\frac{15}{4}\gamma^2 ee'^2-\frac{3}{16}\gamma^4 e^3-\frac{1}{128}\gamma^2 e^5-\frac{15}{32}\gamma^2 e^3 e'^2+\underset{[1\cdots176]}{\frac{819}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\\
&+\underset{[1\cdots178]}{\frac{117}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots166]}{\left(\frac{3}{8}\gamma^2 e-\frac{219}{64}\gamma^2 e^3\right)\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots180]}{\left(\frac{3}{8}\gamma^2 e+\frac{51}{32}\gamma^2 e^3\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[3\cdots37]}{\left(3\gamma^2 e-\frac{861}{64}\gamma^2 e^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{11}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots63]}{\frac{135}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[22\cdots96]}{\frac{3}{4}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[23\cdots76]}{\frac{243}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[25\cdots16]}{\frac{3}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[41\cdots68]}{\frac{315}{128}\gamma^2 e^3\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots268]}{\frac{315}{32}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[52\cdots7]}{\frac{9}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\times\cos(2h+l-2h'-2g'-2l')$$

Cette portion du coefficient du terme (175) a disparu par suite de la 24^e^ opération.

(176)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{21}{4}\gamma^2 ee'+\frac{21}{4}\gamma^4 ee'+\frac{21}{32}\gamma^2 e^3 e'-\underset{[1\cdots175]}{\frac{117}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots167]}{\frac{21}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots181]}{\frac{21}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[3\cdots41]}{\frac{9}{2}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots66]}{\frac{405}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[5\cdots63]}{\frac{945}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots37]}{\frac{21}{2}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots180]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots166]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[22\cdots97]}{\frac{21}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[23\cdots77]}{\frac{1701}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[25\cdots17]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots61]}{\frac{1215}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots189]}{\frac{21}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[35\cdots47]}{\frac{27}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[41\cdots176]}{\frac{4725}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[49\cdots117]}{\frac{1025}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots176]}{\frac{189}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots191]}{\frac{27}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\times\cos(2h+l-2h'-2g'-3l')$$

(177)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{51}{4}\gamma^2 ee'^2-\underset{[1\cdots175]}{\frac{351}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots176]}{\frac{819}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+l-2h'-2g'-4l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 4^e^ opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^3 ou e^5 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (63) qui provient du terme (175) dans cette 4^e^ opération.

(178)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{3}{4}\gamma^2 ee'-\frac{3}{4}\gamma^4 ee'-\frac{3}{32}\gamma^2 e^3 e'+\underset{[1\cdots175]}{\frac{117}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}+\underset{[2\cdots171]}{\frac{3}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots183]}{\frac{3}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots38]}{\frac{9}{2}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[4\cdots64]}{\frac{405}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots63]}{\frac{135}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[8\cdots37]}{\frac{3}{2}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots166]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots180]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[22\cdots100]}{\frac{3}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[23\cdots82]}{\frac{243}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[25\cdots20]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots59]}{\frac{1215}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[32\cdots191]}{\frac{3}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[35\cdots45]}{\frac{27}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots178]}{\frac{675}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[49\cdots121]}{\frac{985}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[52\cdots178]}{\frac{27}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[52\cdots189]}{\frac{189}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2h+l-2h'-2g'-l')$$

(179)*

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[1\cdots\cdots\cdots175]}{\frac{351}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{4563}{256}\gamma^2 ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[1\cdots178]}{\frac{117}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[49\cdots122]}{\frac{135}{256}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+l-2h'-2g')$$

(180)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\frac{3}{8}\gamma^2 e^2+\frac{3}{8}\gamma^4 e^2+\frac{1}{8}\gamma^2 e^4+\frac{15}{16}\gamma^2 e^2 e'^2-\underset{[2\cdots175]}{\frac{27}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots184]}{\frac{9}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots58]}{\frac{75}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[4\cdots68]}{\frac{189}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[22\cdots103]}{\frac{75}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[25\cdots23]}{\frac{9}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots63]}{\frac{135}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[29\cdots96]}{\frac{45}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[32\cdots166]}{\frac{3}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[41\cdots180]}{\frac{675}{512}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[49\cdots76]}{\frac{75}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots180]}{\frac{27}{512}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[52\cdots193]}{\frac{27}{512}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(2h+2l-2h'-2g'-2l')$$

(181)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{21}{16}\gamma^2 e^2 e'-\underset{[1\cdots180]}{\frac{45}{16}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2l-2h'-2g'-3l')$$

(182)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{51}{16}\gamma^2 e^2 e'^2+\underset{[49\cdots78]}{\frac{765}{32}\gamma^2 e^2 e'^2}\right\}\cos(2h+2l-2h'-2g'-4l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2ᵉ opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (172), qui provient du terme (179) dans cette 2ᵉ opération.

(183)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{3}{16}\gamma^2e^2e'+\underset{[1\cdots180]}{\frac{45}{16}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h+2l-2h'-2g'-l')$$

(184)[*]

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{16}\gamma^2e^3+\frac{3}{16}\gamma^4e^3+\frac{27}{256}\gamma^2e^5+\frac{15}{32}\gamma^2e^3e'^2-\underset{[2\cdots180]}{\frac{97}{64}\gamma^2e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots187]}{\frac{1}{4}\gamma^2e^3\frac{n'^2}{n^2}}\right\}$$

$$\times\cos(2h+3l-2h'-2g'-2l')$$

(185)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{21}{32}\gamma^2e^3e'\right\}\cos(2h+3l-2h'-2g'-3l')$$

(186)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{3}{32}\gamma^2e^3e'\right\}\cos(2h+3l-2h'-2g'-l')$$

(187)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{1}{8}\gamma^2e^4\right\}\cos(2h+4l-2h'-2g'-2l')$$

(188)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}-\frac{3}{2}\gamma^2e+\frac{3}{2}\gamma^4e+\frac{3}{16}\gamma^2e^3+\frac{15}{4}\gamma^2ee'^2-\underset{[1\cdots189]}{\frac{63}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots191]}{\frac{9}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}\\-\underset{[2\cdots166]}{\frac{39}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots193]}{\frac{3}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots49]}{\frac{3}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1}{2}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots37]}{\frac{243}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}-81\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\\+\underset{[22\cdots76]}{3\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[23\cdots125]}{\frac{135}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[24\cdots16]}{\frac{3}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3}{4}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\end{array}\right\}\\-\underset{[41\cdots58]}{\frac{1485}{64}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[42\cdots59]}{\frac{945}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots61]}{\frac{405}{32}\gamma^2ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[52\cdots7]}{\frac{9}{4}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\end{array}\right\}$$

Cette portion du coefficient du terme (188) a disparu par suite de la 25^e opération.

$$\times\cos(2h-l-2h'-2g'-2l')$$

---

[*] On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3^e opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (63), qui provient du terme (184) dans cette 3^e opération.

(189)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{21}{4}\gamma^2 ee' + \frac{21}{4}\gamma^4 ee' + \frac{21}{32}\gamma^2 e^3 e' + \underset{[1\cdots188]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} - \underset{[2\cdots167]}{\frac{273}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[2\cdots194]}{\frac{21}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[3\cdots52]}{\frac{9}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdots41]}{\frac{729}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[5\cdots37]}{\frac{1701}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[7\cdots49]}{\frac{21}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[9\cdots166]}{\frac{117}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[10\cdots193]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[22\cdots77]}{\frac{21}{2}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[23\cdots126]}{\frac{945}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[24\cdots20]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdots47]}{\frac{513}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[32\cdots176]}{\frac{21}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[41\cdots61]}{\frac{405}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} - \frac{405}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2} + \underset{[41\cdots189]}{\frac{4725}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[49\cdots135]}{\frac{735}{128}\gamma^2 e^3 e'} + \underset{[52\cdots178]}{\frac{27}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[52\cdots189]}{\frac{189}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$\times\cos(2h-l-2h'-2g'-3l')$$

(190)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{51}{4}\gamma^2 ee'^2 + \underset{[1\cdots188]}{\frac{27}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[1\cdots189]}{\frac{63}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[41\cdots62]}{\frac{1215}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[42\cdots61]}{\frac{945}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}
$$

$$\times\cos(2h-l-2h'-2g'-4l')$$

(191)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{3}{4}\gamma^2 ee' - \frac{3}{4}\gamma^4 ee' - \frac{3}{32}\gamma^2 e^3 e' - \underset{[1\cdots188]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} + \underset{[2\cdots171]}{\frac{39}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots196]}{\frac{3}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[3\cdots50]}{\frac{9}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[4\cdots38]}{\frac{729}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[6\cdots37]}{\frac{243}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[8\cdots49]}{\frac{3}{8}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[9\cdots193]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[10\cdots166]}{\frac{117}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[22\cdots82]}{\frac{3}{2}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[23\cdots130]}{\frac{135}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[24\cdots17]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdots45]}{\frac{513}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdots178]}{\frac{3}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[41\cdots59]}{\frac{405}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} + \frac{405}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2} - \underset{[41\cdots191]}{\frac{675}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[49\cdots137]}{\frac{105}{128}\gamma^2 e^3 e'} - \underset{[52\cdots176]}{\frac{189}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[52\cdots191]}{\frac{27}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$\times\cos(2h-l-2h'-2g'-l')$$

(192) *

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{27}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n} - \underset{[1\cdots188]}{\frac{27}{256}\gamma^2 ee'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[1\cdots191]}{\frac{9}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[41\cdots60]}{\frac{1215}{64}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[43\cdots59]}{\frac{405}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}
$$

$$\times\cos(2h-l-2h'-2g')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2ᵉ opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (**172**) qui provient du terme (**192**) dans cette 2ᵉ opération.

(193)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\frac{3}{8}\gamma^2e^2+\frac{3}{8}\gamma^4e^2+\frac{1}{8}\gamma^2e^4+\frac{15}{16}\gamma^2e^2e'^2+\underset{[2\cdots188]}{\frac{9}{8}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots197]}{\frac{9}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots54]}{\frac{75}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[4\cdots44]}{\frac{153}{4}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[23\cdots134]}{\frac{189}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[24\cdots23]}{\frac{9}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots49]}{\frac{45}{8}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[29\cdots125]}{\frac{135}{16}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[32\cdots166]}{\frac{15}{16}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[41\cdots193]}{\frac{675}{512}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[49\cdots139]}{\frac{15}{32}\gamma^2e^4}+\underset{[49\cdots201]}{\frac{15}{8}\gamma^4e^2}-\underset{[52\cdots180]}{\frac{27}{512}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots193]}{\frac{27}{512}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h-2l-2h'-2g'-2l')$$

(194)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{21}{16}\gamma^2e^2e'+\underset{[1\cdots193]}{\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h-2l-2h'-2g'-3l')$$

(195)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{51}{16}\gamma^2e^2e'^2\right\}\cos(2h-2l-2h'-2g'-4l')$$

(196)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{3}{16}\gamma^2e^2e'-\underset{[1\cdots193]}{\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h-2l-2h'-2g'-l')$$

(197)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{16}\gamma^2e^3\right\}\cos(2h-3l-2h'-2g'-2l')$$

(198)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{21}{32}\gamma^2e^3e'\right\}\cos(2h-3l-2h'-2g'-3l')$$

(199)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{3}{32}\gamma^2e^3e'\right\}\cos(2h-3l-2h'-2g'-l')$$

(200)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{1}{8}\gamma^2e^4\right\}\cos(2h-4l-2h'-2g'-2l')$$

(201)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{3}{4}\gamma^4-\frac{15}{8}\gamma^4e^2-\frac{15}{8}\gamma^4e'^2+\underset{[2\cdots205]}{\frac{9}{8}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots211]}{\frac{3}{8}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[22\cdots175]}{\frac{3}{4}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[23\cdots188]}{\frac{27}{4}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[29\cdots166]}{\frac{27}{8}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[49\cdots193]}{\frac{15}{8}\gamma^4e^2}-\underset{[52\cdots201]}{\frac{27}{128}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(2h-2g-2l-2h'-2g'-2l')$$

(202)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{21}{8}\gamma^4e'+\underset{[1\cdot\cdot\,201]}{\frac{9}{8}\gamma^4e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h-2g-2l-2h'-2g'-3l')$$

(203)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{51}{8}\gamma^4e'^2\right\}\cos(2h-2g-2l-2h'-2g'-4l')$$

(204)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{8}\gamma^4e'-\underset{[1\cdot\cdot\,201]}{\frac{9}{8}\gamma^4e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(2h-2g-2l-2h'-2g'-l')$$

(205)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{9}{4}\gamma^4e\right\}\cos(2h-2g-l-2h'-2g'-2l')$$

(206)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{63}{8}\gamma^4ee'+\underset{[49\cdot\cdot\,189]}{\frac{105}{8}\gamma^4ee'}\right\}\cos(2h-2g-l-2h'-2g'-3l')$$

(207)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{9}{8}\gamma^4ee'-\underset{[49\cdot\cdot\,191]}{\frac{51}{8}\gamma^4ee'}\right\}\cos(2h-2g-l-2h'-2g'-l')$$

(208)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{15}{8}\gamma^4e^2\underset{[49\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\,166]}{-\frac{195}{16}\gamma^4e^2+\frac{495}{32}\gamma^4e^2\frac{n'}{n}}\underset{[51\cdot\cdot\cdot\,166]}{-\frac{495}{128}\gamma^4e^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(2h-2g-2h'-2g'-2l')$$

(209)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{105}{16}\gamma^4e^2e'-\underset{[49\cdot\cdot\cdot\,167]}{\frac{1365}{32}\gamma^4e^2e'}\right\}\cos(2h-2g-2h'-2g'-3l')$$

(210)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{15}{16}\gamma^4e^2e'+\underset{[49\cdot\cdot\cdot\,171]}{\frac{195}{32}\gamma^4e^2e'}\right\}\cos(2h-2g-2h'-2g'-l')$$

(211)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{3}{4}\gamma^4e\right\}\cos(2h-2g-3l-2h'-2g'-2l')$$

(212)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{21}{8}\gamma^4 ee'\right\}\cos(2h - 2g - 3l - 2h' - 2g' - 3l')$$

(213)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{8}\gamma^4 ee'\right\}\cos(2h - 2g - 3l - 2h' - 2g' - l')$$

(214)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{3}{4}\gamma^4 e^2\right\}\cos(2h - 2g - 4l - 2h' - 2g' - 2l')$$

(215)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{35}{64} - \frac{35}{16}\gamma^2 - \frac{385}{64}e^2 - \frac{385}{64}e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2} - \underset{[2\cdot\cdot\,222]}{\frac{35}{64}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}} + \underset{[2\cdot\cdot\cdot\,236]}{\frac{105}{64}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}}\\
&-\underbrace{\left(\frac{1}{128} - \frac{5}{64}\gamma^2 + \frac{3}{512}e^2 - \frac{7}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{1}{96}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{97}{1536}\frac{n'^6}{n^6}}_{[3\cdots\cdots16]} + \underset{[3\cdot\cdot\,105]}{\frac{25}{2048}\frac{n'^6}{n^6}}\\
&-\underbrace{\left(\frac{9}{16} - \frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{39}{16}e^2 - \frac{45}{16}e'^2 + \frac{27}{8}\gamma^4 + \frac{39}{4}\gamma^2e^2 + \frac{45}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{3201}{1024}e^4 + \frac{195}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\cdots\cdots116]}\\
&-\underbrace{\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{35}{16}e^2 - \frac{123}{8}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \left(\frac{217}{64} - \frac{947}{32}\gamma^2 - \frac{7463}{384}e^2 - \frac{20029}{512}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\cdots\cdots116]}\\
&-\underbrace{\frac{131}{48}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{42955}{2304}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{5}{16}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}}_{[3\cdots\cdots116]} - \underbrace{\left(\frac{81}{128} - \frac{405}{64}\gamma^2 + \frac{1863}{512}e^2 - \frac{567}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\cdots\cdots16]}\\
&-\underbrace{\frac{81}{32}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{74241}{2028}\frac{n'^6}{n^6}}_{[4\cdots\cdots16]} - \underset{[4\cdot\cdot\,134]}{\frac{5103}{2048}\frac{n'^6}{n^6}} + \underset{[4\cdot\cdot\,215]}{\frac{3159}{256}\frac{n'^6}{n^6}} - \underset{[4\cdot\cdot\,291]}{\frac{189}{2048}\frac{n'^6}{n^6}}\\
&-\underbrace{\left(\frac{189}{64}e'^2 - \frac{189}{16}\gamma^2e'^2 + \frac{315}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{5427}{128}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{154593}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[5\cdots\cdots92]}\\
&-\underbrace{\left(\frac{189}{64}e'^2 - \frac{189}{16}\gamma^2e'^2 + \frac{315}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1269}{128}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{24165}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[6\cdots\cdots88]} + \underset{[3\cdot\cdot\,117]}{\frac{7}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[9\cdot\cdot\,225]}{\frac{135}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[9\cdot\cdot\cdot\,237]}{\frac{1449}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[10\cdot\cdot\,223]}{\frac{945}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[10\cdot\cdot\,240]}{\frac{207}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[11\cdot\cdot\,222]}{\frac{1395}{64}\frac{n'^6}{n^6}} - \underset{[11\cdot\cdot\,256]}{\frac{2139}{64}\frac{n'^6}{n^6}}\\
&-\underset{[19\cdot\cdot\cdot\,330]}{\frac{225}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}} - \underset{[20\cdot\cdot\,316]}{\frac{135}{512}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}} + \underset{[26\cdot\cdot\,215]}{\frac{2349}{256}\frac{n'^6}{n^6}} + \underset{[26\cdot\cdot\,282]}{\frac{37629}{1024}\frac{n'^6}{n^6}}\\
&+\underbrace{\left(\frac{189}{128}e'^2 - \frac{189}{32}\gamma^2e'^2 - \frac{945}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{891}{128}e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{17091}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[27\cdots\cdots82]} - \underset{[29\cdot\cdot\,259]}{\frac{63}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}
\end{aligned}\right\}$$

Ce coefficient du terme (215) se continue a la page suivante

(215) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\underset{[32\cdots227]}{\frac{459}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[32\cdots243]}{\frac{201}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[35\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots125]}{\left(\frac{45}{32}e^2-\frac{45}{8}\gamma^2e^2-\frac{495}{128}e^4-\frac{225}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[35\cdots\cdots\cdots125]}{\frac{45}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{5283}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[36\cdots130]}{\frac{315}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[37\cdots126]}{\frac{315}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[39\cdots134]}{\frac{315}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots28]}{\frac{225}{256}e^4\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[48\cdots386]}{\frac{375}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2}}+\underset{[52\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots147]}{\frac{135}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{64}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{423}{256}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-4l')$$

(216)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{455}{128}e'\frac{a^2}{a'^2}+\underset{[1\cdots215]}{\frac{105}{32}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}}-\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots20]}{\frac{3}{256}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{13}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\
&-\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots117]}{\left(\frac{63}{32}e'-\frac{63}{8}\gamma^2e'-\frac{273}{32}e^2e'-\frac{2367}{256}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{195}{128}e'-\frac{309}{64}\gamma^2e'-\frac{1303}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots117]}{\frac{1537}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{18137}{1536}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots17]}{\frac{243}{256}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3645}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\
&+\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots88]}{\left(\frac{189}{32}e'-\frac{189}{8}\gamma^2e'+\frac{315}{32}e^2e'-\frac{7101}{256}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots88]}{\left(\frac{2727}{128}e'-\frac{8613}{64}\gamma^2e'+\frac{22941}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2235}{32}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{40945}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\
&-\underset{[5\cdots\cdots\cdots\cdots87]}{\frac{567}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{11583}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[6\cdots89]}{\frac{459}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots118]}{\frac{153}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots\cdots\cdots222]}{\frac{135}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{333}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\
&-\underset{[10\cdots\cdots\cdots\cdots256]}{\frac{207}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{5637}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[26\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots77]}{\left(\frac{189}{64}e'-\frac{189}{16}\gamma^2e'-\frac{945}{64}e^2e'-\frac{7101}{512}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[26\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots77]}{\left(\frac{189}{32}e'-\frac{1755}{64}\gamma^2e'-\frac{7317}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1809}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{5121}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[28\cdots78]}{\frac{459}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[35\cdots\cdots\cdots\cdots126]}{\frac{315}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{64}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[36\cdots\cdots\cdots\cdots125]}{\frac{315}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3915}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[46\cdots386]}{\frac{1125}{256}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}}+\underset{[52\cdots148]}{\frac{135}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[53\cdots147]}{\frac{63}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[57\cdots215]}{\frac{6615}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-5l')$$

(217)

$$
+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
& \frac{1785}{128}e'^2\frac{a^2}{a'^2} - \underset{[3\cdots21]}{\frac{9}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots118]}{\left(\frac{153}{32}e'^2 - \frac{153}{8}\gamma^2e'^2 - \frac{663}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{2091}{512}e'^2\frac{n'^3}{n^3}} \\
& - \underset{[3\cdots118]}{\frac{60329}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[4\cdots18]}{\frac{729}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots89]}{\left(\frac{459}{32}e'^2 - \frac{459}{8}\gamma^2e'^2 + \frac{765}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}} \\
& + \underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots89]}{\frac{35343}{512}e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{472875}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[5\cdots16]}{\frac{3969}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} \\
& + \underset{[5\cdots\cdots\cdots\cdots88]}{\left(\frac{1323}{64}e'^2 - \frac{1323}{16}\gamma^2e'^2 + \frac{2205}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{6237}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{393489}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[7\cdots16]}{\frac{49}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} \\
& - \underset{[9\cdots223]}{\frac{945}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[10\cdots237]}{\frac{1449}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[12\cdots222]}{\frac{405}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[13\cdots236]}{\frac{621}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[14\cdots118]}{\frac{459}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} \\
& - \underset{[26\cdots\cdots\cdots\cdots78]}{\left(\frac{459}{64}e'^2 - \frac{459}{16}\gamma^2e'^2 - \frac{2295}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{459}{32}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{9585}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[35\cdots127]}{\frac{765}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \\
& + \underset{[36\cdots126]}{\frac{2205}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdots\cdots\cdots\cdots98]}{\frac{765}{32}e^2e'^2\frac{n'}{n} + \frac{29835}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$\times \cos(4h + 4g + 4l - 4h' - 4g' - 6l')$$

(218)

$$
+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ - \underset{[3\cdots119]}{\frac{2535}{256}e'^3\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[4\cdots90]}{\frac{7605}{256}e'^3\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[5\cdots89]}{\frac{3213}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[7\cdots118]}{\frac{1071}{64}e'^3\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdots79]}{\frac{7605}{512}e'^3\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[27\cdots78]}{\frac{3213}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}} \right\}
$$

$$\times \cos(4h + 4g + 4l - 4h' - 4g' - 7l')$$

219)

$$
+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{
\begin{aligned}
& - \frac{105}{128}e'\frac{a^2}{a'^2} - \underset{[1\cdots215]}{\frac{105}{32}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}} - \underset{[3\cdots\cdots\cdots17]}{\frac{3}{256}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{29}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}} \\
& + \underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots121]}{\left(\frac{9}{32}e' - \frac{9}{8}\gamma^2e' - \frac{39}{32}e^2e' - \frac{189}{256}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{51}{128}e' - \frac{21}{64}\gamma^2e' + \frac{377}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}} \\
& + \underset{[3\cdots\cdots\cdots121]}{\frac{235}{128}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{5561}{1536}e'\frac{n'^5}{n^5}} - \underset{[4\cdots\cdots\cdots20]}{\frac{243}{256}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{243}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}} \\
& - \underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots92]}{\left(\frac{27}{32}e' - \frac{27}{8}\gamma^2e' + \frac{45}{32}e^2e' - \frac{567}{256}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{1431}{128}e' - \frac{6021}{64}\gamma^2e' + \frac{6957}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right.
$$

Ce coefficient du terme (219) se continue à la page suivante.

(219) Suite.

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underbrace{-\frac{105}{4}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{17953}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}_{[4\ldots92]}\underbrace{+\frac{81}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1215}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}_{[6\ldots87]}\underbrace{-\frac{207}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1083}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}_{[9\ldots236]}\\
&\underbrace{-\frac{135}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{2637}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}_{[10\ldots222]}\underbrace{+\left(\frac{27}{64}e'-\frac{27}{16}\gamma^2e'-\frac{135}{64}e^2e'-\frac{567}{512}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\ldots82]}\\
&\underbrace{+\left(\frac{27}{32}e'-\frac{459}{64}\gamma^2e'-\frac{837}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{243}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1521}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}}_{[26\ldots82]}\underbrace{-\frac{45}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{16}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[35\ldots130]}\\
&\underbrace{-\frac{45}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3015}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[37\ldots125]}\underbrace{+\frac{225}{256}e'\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}}_{[46\ldots388]}\underbrace{+\frac{27}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[52\ldots150]}\underbrace{-\frac{27}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[54\ldots147]}\underbrace{-\frac{6615}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}}_{[57\ldots215]}
\end{aligned}\right\}
$$

$$\times\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-3l')$$

(220)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{35}{128}e'^2\frac{a^2}{a'^2}\underbrace{-\frac{9}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\ldots18]}\underbrace{+\frac{27}{512}e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{9}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\ldots122]}\underbrace{-\frac{729}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\ldots21]}\\
&\underbrace{-\frac{1215}{512}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{44955}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\ldots93]}\underbrace{-\frac{81}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[6\ldots16]}\underbrace{+\left(\frac{27}{64}e'^2-\frac{27}{16}\gamma^2e'^2+\frac{45}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[6\ldots92]}\\
&\underbrace{+\frac{351}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{11853}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[6\ldots92]}\underbrace{-\frac{1}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[8\ldots16]}\underbrace{+\frac{207}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[9\ldots240]}\underbrace{+\frac{135}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[10\ldots225]}\underbrace{-\frac{621}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[12\ldots236]}\\
&\underbrace{-\frac{405}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[13\ldots222]}\underbrace{+\frac{297}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[26\ldots83]}\underbrace{+\frac{45}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[37\ldots130]}\underbrace{-\frac{1485}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\ldots101]}\underbrace{-\frac{75}{64}e'^2\frac{a^2}{a'^2}}_{[48\ldots388]}
\end{aligned}\right\}
$$

$$\times\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-2l')$$

(221)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underbrace{-\frac{3}{256}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\ldots123]}\underbrace{+\frac{9}{256}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\ldots94]}\underbrace{-\frac{9}{512}e'^3\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\ldots84]}\right\}
$$

$$\times\cos(4h+4g+4l-4h'-4g'-l')$$

(222)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{35}{32}e\frac{a^2}{a'^2}\underbrace{-\left(\frac{9}{16}e-\frac{9}{4}\gamma^2e-\frac{165}{64}e^3-\frac{45}{16}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\ldots76]}\\
&\underbrace{-\left(\frac{3}{4}e-3\gamma^2e-\frac{227}{64}e^3-\frac{741}{32}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{447}{64}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{407}{48}e\frac{n'^5}{n^5}}_{[5\ldots76]}
\end{aligned}\right\}
$$

Cette portion du coefficient du terme (222) a disparu par suite de la 18ᵉ opération.

Ce coefficient du terme (222) se continue à la page suivante

(222) Suite.

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underbrace{-\frac{243}{256}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{243}{64}e\frac{n'^5}{n^5}}_{[4\cdots\cdots 23]}+\underbrace{\left(\frac{27}{8}e-\frac{27}{2}\gamma^2e+\frac{45}{32}e^3-\frac{135}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\cdots\cdots 96]}\\
&\underbrace{+\left(\frac{27}{4}e-27\gamma^2e+\frac{369}{16}e^3-\frac{2403}{16}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{4179}{128}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{4291}{64}e\frac{n'^5}{n^5}}_{[4\cdots\cdots 96]}\\
&\underbrace{-\frac{189}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{14823}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[5\cdots\cdots 100]}\underbrace{-\frac{189}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3105}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[6\cdots\cdots 97]}\underbrace{+\frac{63}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[7\cdots\cdots 82]}\\
&\underbrace{+\frac{63}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5649}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[8\cdots\cdots 77]}\underbrace{+\frac{81}{64}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{2}e\frac{n'^5}{n^5}}_{[14\cdots\cdots 76]}\underbrace{+\frac{23}{64}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{31}{16}e\frac{n'^5}{n^5}}_{[17\cdots\cdots 16]}\\
&\underbrace{+\frac{225}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}}_{[39\cdots\cdots 125]}\underbrace{+\frac{45}{64}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\underbrace{-\frac{52875}{4096}e\frac{n'^5}{n^5}}_{[41\cdots 291]}\underbrace{-\frac{2625}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}_{[42\cdots 106]}\underbrace{-\frac{7875}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}_{[43\cdots 104]}\underbrace{-\frac{1125}{512}e\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}}_{[46\cdots 390]}\\
&\underbrace{+\frac{135}{16}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}_{[52\cdots 152]}
\end{aligned}\right.
$$

$$\times\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')$$

Cette portion du coefficient du terme (222) a disparu par suite de la 18e opération.

(223)

$$
+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{455}{64}ee'\frac{a^2}{a'^2}\underbrace{-\frac{21}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\cdots 12]}\underbrace{-\left(\frac{63}{32}ee'-\frac{63}{8}\gamma^2ee'-\frac{1155}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{147}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{3147}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\cdots\cdots 77]}\\
&\underbrace{-\frac{729}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\cdots 24]}\underbrace{+\left(\frac{189}{16}ee'-\frac{189}{4}\gamma^2ee'+\frac{315}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1647}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{42591}{256}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\cdots\cdots 97]}\\
&\underbrace{+\left(\frac{189}{16}ee'-\frac{189}{4}\gamma^2ee'+\frac{315}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2349}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{10899}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[5\cdots\cdots 96]}\\
&\underbrace{-\left(\frac{63}{32}ee'-\frac{63}{8}\gamma^2ee'-\frac{1155}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{657}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{2229}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[7\cdots\cdots 76]}\underbrace{-\frac{2025}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[9\cdots 227]}\\
&\underbrace{-\frac{333}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[10\cdots 215]}\underbrace{+\frac{567}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[14\cdots 77]}\underbrace{+\frac{69}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[17\cdots 17]}\underbrace{+\frac{405}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[26\cdots 88]}\underbrace{-\frac{483}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[32\cdots 237]}\underbrace{-\frac{615}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[35\cdots 117]}\\
&\underbrace{+\frac{1575}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[39\cdots 126]}\underbrace{+\frac{7875}{512}e^3e'\frac{n'}{n}+\frac{30375}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\cdots\cdots 104]}\underbrace{-\frac{70875}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[41\cdots 223]}
\end{aligned}\right.
$$

$$\times\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-5l')$$

$$(224)\qquad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\underbrace{-\frac{153}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{51}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\cdots 78]}\underbrace{+\frac{459}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{22491}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\cdots 98]}\underbrace{+\frac{1323}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{28917}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[5\cdots 97]}\\
\underbrace{-\frac{441}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{7875}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[7\cdots 77]}\underbrace{-\frac{153}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{10149}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[15\cdots 76]}\underbrace{+\frac{459}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{30753}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[16\cdots 96]}\\
\underbrace{+\frac{19125}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}_{[41\cdots 105]}\underbrace{+\frac{18375}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}_{[42\cdots 104]}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-6l')$$

$$(225)\qquad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{105}{64}ee'\frac{a^2}{a'^2}\underbrace{-\frac{21}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\cdots 8]}\underbrace{+\left(\frac{9}{32}ee'-\frac{9}{8}\gamma^2ee'-\frac{165}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{141}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{465}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[3\cdots 82]}\\
\underbrace{-\frac{729}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\cdots 26]}\underbrace{-\left(\frac{27}{16}ee'-\frac{27}{4}\gamma^2ee'+\frac{45}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{999}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{19353}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[4\cdots 100]}\\
\underbrace{-\left(\frac{27}{16}ee'-\frac{27}{4}\gamma^2ee'+\frac{45}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{189}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{729}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[6\cdots 96]}\\
\underbrace{+\left(\frac{9}{32}ee'-\frac{9}{8}\gamma^2ee'-\frac{165}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{417}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{489}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[8\cdots 76]}\underbrace{-\frac{333}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[9\cdots 245]}\underbrace{-\frac{2025}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[10\cdots 227]}\\
\underbrace{-\frac{81}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[14\cdots 82]}\underbrace{+\frac{69}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[17\cdots 20]}\underbrace{+\frac{405}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[26\cdots 92]}\underbrace{+\frac{69}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[32\cdots 240]}\underbrace{-\frac{591}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[35\cdots 121]}\underbrace{-\frac{225}{256}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[39\cdots 130]}\\
\underbrace{-\frac{1125}{512}e^3e'\frac{n'}{n}-\frac{50625}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\cdots 106]}\underbrace{+\frac{10125}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}_{[41\cdots 225]}\underbrace{+\frac{375}{128}ee'\frac{a^2}{a'^2}}_{[48\cdots 390]}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-3l')$$

$$(226)\qquad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\underbrace{-\frac{189}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\cdots 83]}\underbrace{-\frac{891}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\cdots 101]}\underbrace{+\frac{27}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1971}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[6\cdots 100]}\underbrace{-\frac{9}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{645}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[8\cdots 82]}\\
\underbrace{+\frac{1215}{2048}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[26\cdots 93]}\underbrace{+\frac{81}{1024}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[35\cdots 122]}\underbrace{+\frac{1125}{512}e^3e'^2\frac{n'}{n}}_{[43\cdots 106]}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-2l')$$

$$(227)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\frac{105}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2} - \underset{[4\cdots28]}{\frac{81}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots103]}{\left(\frac{675}{128}e^2 - \frac{675}{32}\gamma^2e^2 - \frac{225}{256}e^4 - \frac{3375}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{675}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}} \\[2ex]
+ \underset{[4\cdots103]}{\frac{28227}{512}e^2\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[5\cdots106]}{\frac{4725}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[6\cdots104]}{\frac{4725}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[7\cdots92]}{\frac{189}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[17\cdots23]}{\frac{69}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[26\cdots16]}{\frac{81}{2048}e^2\frac{n'^4}{n^4}} \\[2ex]
- \underset{[26\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots96]}{\left(\frac{27}{16}e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2e^2 - 9e^4 - \frac{135}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{27}{8}e^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{1629}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[27\cdots100]}{\frac{189}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \\[2ex]
+ \underset{[28\cdots97]}{\frac{189}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdot215]}{\frac{3}{8}e^2\frac{n'^5}{n^5}} - \underset{[35\cdots76]}{\frac{63}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[41\cdots\cdots\cdots108]}{\frac{405}{64}e^4\frac{n'}{n} + \frac{1215}{256}e^4\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[41\cdots227]}{\frac{103275}{8192}e^2\frac{n'^4}{n^4}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h + 4g + 6l - 4h' - 4g' - 4l')$$

$$(228)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
- \underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots88]}{\frac{189}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{99}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots104]}{\frac{4725}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{96525}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \\[2ex]
+ \underset{[5\cdots\cdots\cdots\cdots103]}{\frac{4725}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{58725}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[26\cdots\cdots\cdots\cdots97]}{\frac{189}{32}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{2403}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \\[2ex]
- \underset{[27\cdots\cdots\cdots\cdots96]}{\frac{189}{32}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{3807}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[41\cdots109]}{\frac{2835}{128}e^4e'\frac{n'}{n}} + \underset{[42\cdots108]}{\frac{945}{64}e^4e'\frac{n'}{n}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h + 4g + 6l - 4h' - 4g' - 5l')$$

$$(229)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
- \underset{[3\cdots89]}{\frac{459}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[4\cdots105]}{\frac{11475}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[5\cdots104]}{\frac{33075}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[16\cdots103]}{\frac{11475}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdots98]}{\frac{459}{32}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \\[2ex]
- \underset{[27\cdots97]}{\frac{1323}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[35\cdots78]}{\frac{459}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h + 4g + 6l - 4h' - 4g' - 6l')$$

$$(230)\qquad + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots92]}{\frac{27}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots106]}{\frac{675}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{64125}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[6\cdots\cdots\cdots\cdots103]}{\frac{675}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{4725}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} \\[2ex]
+ \underset{[26\cdots\cdots\cdots\cdots100]}{\frac{27}{32}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1107}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[28\cdots\cdots\cdots\cdots96]}{\frac{27}{32}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1647}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[41\cdots111]}{\frac{405}{128}e^4e'\frac{n'}{n}} - \underset{[43\cdots108]}{\frac{405}{64}e^4e'\frac{n'}{n}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h + 4g + 6l - 4h' - 4g' - 3l')$$

(231)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[6\cdots106]}{\frac{675}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[28\cdots100]}{\frac{27}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\right\}\cos(4h+4g+6l-4h'-4g'-2l')$$

(232)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[3\cdots96]}{-\frac{75}{64}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{49}{32}e^3\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots108]}{\frac{243}{32}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{243}{16}e^3\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[26\cdots103]}{\frac{1125}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1125}{256}e^3\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[41\cdots112]}{\frac{36015}{4096}e^5\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+7l-4h'-4g'-4l')$$

(233)

$$+m'\frac{a^2}{a^3}\left\{-\underset{[3\cdots97]}{\frac{525}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots109]}{\frac{1701}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[5\cdots108]}{\frac{1701}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots96]}{\frac{525}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots104]}{\frac{7875}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[27\cdots103]}{\frac{7875}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+7l-4h'-4g'-5l')$$

(234)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{+\underset{[3\cdots100]}{\frac{75}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots111]}{\frac{243}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots108]}{\frac{243}{64}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots96]}{\frac{75}{128}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots106]}{\frac{1125}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots103]}{\frac{1125}{1024}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+7l-4h'-4g'-3l')$$

(235)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[3\cdots103]}{\frac{3225}{2048}e^4\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots112]}{\frac{21609}{2048}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots108]}{\frac{729}{256}e^4\frac{n'^2}{n^2}}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+8l-4h'-4g'-4l').$$

(236)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left(\begin{aligned}&-\frac{105}{32}e\frac{a^2}{a'^2}\underset{[3\cdots23]}{-\frac{3}{256}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1}{64}e\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[3\cdots125]}{\left(\frac{15}{16}e-\frac{15}{4}\gamma^2e-\frac{45}{16}e^3-\frac{75}{16}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[3\cdots125]}{\left(\frac{5}{8}e-\frac{5}{2}\gamma^2e-\frac{15}{8}e^3-\frac{505}{32}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2563}{384}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3013}{576}e\frac{n'^5}{n^5}}\\&+\underset{[4\cdots76]}{\left(\frac{27}{8}e-\frac{27}{2}\gamma^2e-\frac{1899}{128}e^3-\frac{135}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{135}{8}e-\frac{135}{2}\gamma^2e-\frac{1935}{32}e^3-\frac{2079}{16}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}}\\&+\underset{[4\cdots76]}{\frac{2289}{32}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3595}{16}e\frac{n'^5}{n^5}}\underset{[5\cdots82]}{-\frac{189}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4779}{64}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[6\cdots77]}{-\frac{189}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1917}{64}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\&\underset{[7\cdots130]}{-\frac{105}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{795}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[8\cdots126]}{-\frac{105}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4595}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[14\cdots125]}{-\frac{45}{64}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{15}{8}e\frac{n'^5}{n^5}}\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (236) a disparu par suite de la 17ᵉ opération.

Ce coefficient du terme (236) se continue à la page suivante.

(236) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned} &\underset{[18\cdots16]}{-\frac{9}{64}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{33}{80}e\frac{n'^5}{n^5}}\;\underset{[35\cdots134]}{-\frac{63}{256}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{63}{512}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[41\cdots87]}{+\left(\frac{45}{8}\gamma^2e-\frac{2025}{1024}e^3\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2925}{512}e\frac{n'^5}{n^5}}\\ &\underset{[42\cdots92]}{+\frac{1575}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[45\cdots88]}{-\frac{675}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[46\cdots379]}{-\frac{675}{512}e\frac{n'}{n}\frac{a^2}{a'^2}}\;\underset{[52\cdots156]}{+\frac{207}{16}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l')$$

(237)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned} &-\frac{1365}{64}ee'\frac{a^2}{a'^2}\;\underset{[3\cdots26]}{-\frac{9}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[3\cdots126]}{+\left(\frac{105}{32}ee'-\frac{105}{8}\gamma^2ee'-\frac{315}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\ &\underset{[3\cdots126]}{+\frac{5}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{16861}{768}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[4\cdots77]}{+\left(\frac{189}{16}ee'-\frac{189}{4}\gamma^2ee'-\frac{13293}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\ &\underset{[4\cdots77]}{+\frac{8613}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{37797}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[4\cdots8]}{-\frac{81}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[5\cdots76]}{+\left(\frac{189}{16}ee'-\frac{189}{4}\gamma^2ee'-\frac{13293}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\ &\underset{[5\cdots76]}{+\frac{11745}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{32067}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[7\cdots125]}{+\left(\frac{105}{32}ee'-\frac{105}{8}\gamma^2ee'-\frac{315}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1095}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}}\\ &\underset{[7\cdots125]}{+\frac{1719}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[9\cdots215]}{+\frac{369}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[10\cdots243]}{+\frac{63}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[14\cdots126]}{-\frac{315}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[18\cdots20]}{-\frac{27}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[26\cdots117]}{-\frac{4305}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\ &\underset{[32\cdots223]}{-\frac{315}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[35\cdots135]}{-\frac{441}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[36\cdots134]}{-\frac{441}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[41\cdots24]}{-\frac{2025}{2048}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[41\cdots88]}{+\frac{675}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{19845}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\ &\underset{[41\cdots237]}{-\frac{108675}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[52\cdots157]}{+\frac{405}{128}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-5l')$$

(238)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned} &\underset{[3\cdots127]}{\frac{255}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{935}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[4\cdots78]}{+\frac{459}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{91341}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[5\cdots77]}{+\frac{1323}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{44793}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\ &\underset{[7\cdots126]}{+\frac{735}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5775}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[15\cdots125]}{+\frac{255}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{16915}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[16\cdots76]}{+\frac{459}{16}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{153765}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\\ &\underset{[41\cdots89]}{-\frac{2295}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[42\cdots88]}{+\frac{1575}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-6l')$$

(239)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots\cdots90]}{\frac{12675}{512}ee'^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-7l')$$

(240)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{315}{64}ee'\frac{a^2}{a'^2}-\underset{[3\cdots\cdots24]}{\frac{9}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots130]}{\left(\frac{15}{32}ee'-\frac{15}{8}\gamma^2ee'-\frac{45}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{115}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1483}{768}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots82]}{\left(\frac{27}{16}ee'-\frac{27}{4}\gamma^2ee'-\frac{1899}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2133}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{10815}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots12]}{\frac{81}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots76]}{\left(\frac{27}{16}ee'-\frac{27}{4}\gamma^2ee'-\frac{1899}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{945}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1269}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots125]}{\left(\frac{15}{32}ee'-\frac{15}{8}\gamma^2ee'-\frac{45}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{695}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1081}{192}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[9\cdots243]}{\frac{63}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[10\cdots215]}{\frac{369}{64}ee'\frac{n'^3}{n^4}}+\underset{[14\cdots130]}{\frac{45}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[18\cdots17]}{\frac{27}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdots121]}{\frac{4137}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[32\cdots225]}{\frac{45}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[35\cdots137]}{\frac{63}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[37\cdots134]}{\frac{63}{512}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots\cdots26]}{\frac{2025}{2048}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots\cdots\cdots\cdots92]}{\frac{675}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{15795}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[41\cdots240]}{\frac{15525}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[48\cdots379]}{\frac{225}{128}ee'\frac{a^2}{a'^2}}\\
&+\underset{[52\cdots159]}{\frac{405}{128}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-3l')$$

(241)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[3\cdots131]}{\frac{135}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots\cdots83]}{\frac{1053}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[6\cdots\cdots\cdots\cdots82]}{\frac{27}{32}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{999}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[8\cdots\cdots\cdots\cdots130]}{\frac{15}{64}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{425}{256}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[26\cdots122]}{\frac{81}{2048}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[41\cdots\cdots\cdots\cdots93]}{\frac{2025}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{50085}{2048}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[43\cdots92]}{\frac{675}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-2l')$$

(242)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots94]}{\frac{15}{512}ee'^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-l')$$

$$(243)\qquad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{245}{32}e^2\frac{a^2}{a'^2}-\underset{[3\cdots28]}{\frac{1}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots\cdots134]}{\left(\frac{21}{128}e^2-\frac{21}{32}\gamma^2e^2-\frac{99}{256}e^4-\frac{105}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{7}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[3\cdots134]}{\frac{2839}{1536}e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[5\cdots121]}{\frac{1701}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots137]}{\frac{147}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots135]}{\frac{147}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[14\cdots134]}{\frac{63}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[18\cdots23]}{\frac{27}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[26\cdots16]}{\frac{117}{2048}e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdots\cdots125]}{\left(\frac{45}{32}e^2-\frac{45}{8}\gamma^2e^2-\frac{45}{64}e^4-\frac{225}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{32}e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{567}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[27\cdots130]}{\frac{315}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots126]}{\frac{315}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots215]}{\frac{15}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[35\cdots139]}{\frac{9}{128}e^4\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots\cdots76]}{\frac{315}{256}e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{945}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[41\cdots243]}{\frac{45225}{8192}e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[49\cdots259]}{\frac{105}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+2l-4h'-4g'-4l')$$

$$(244)\qquad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\underset{[3\cdots\cdots135]}{\frac{147}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{427}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots\cdots117]}{\frac{1701}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{7533}{64}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[7\cdots\cdots134]}{\frac{147}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1533}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[26\cdots\cdots126]}{\frac{315}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1665}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[27\cdots\cdots125]}{\frac{315}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1755}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[41\cdots77]}{\frac{1575}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[42\cdots76]}{\frac{735}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+2l-4h'-4g'-5l')$$

$$(245)\qquad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&-\underset{[3\cdots136]}{\frac{357}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots118]}{\frac{4131}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots135]}{\frac{1029}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[15\cdots134]}{\frac{357}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots127]}{\frac{765}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[27\cdots126]}{\frac{2205}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots18]}{\frac{2025}{2048}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots\cdots78]}{\frac{765}{64}e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{6885}{1024}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+2l-4h'-4g'-6l')$$

$$(246)\qquad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[3\cdots\cdots137]}{\frac{21}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{763}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots\cdots121]}{\frac{243}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9801}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[8\cdots\cdots134]}{\frac{21}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{973}{1024}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[26\cdots\cdots130]}{\frac{45}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{585}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[28\cdots\cdots125]}{\frac{45}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[41\cdots82]}{\frac{315}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[43\cdots76]}{\frac{315}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g+2l-4h'-4g'-3l')$$

(247)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ \underset{[8 \cdots 137]}{-\frac{21}{512}e^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[28 \cdots 130]}{-\frac{45}{128}e^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[41 \cdots 21]}{-\frac{2025}{2048}e^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[41 \cdots 83]}{-\frac{135}{1024}e^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}} \right\}$$

$$\times \cos(4h + 4g + 2l - 4h' - 4g' - 2l')$$

(248)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ \underset{[3 \cdots 139]}{-\frac{3}{64}e^3 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{1}{32}e^3 \frac{n'^3}{n^3}} \underset{[4 \cdots 125]}{-\frac{225}{128}e^3 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{225}{64}e^3 \frac{n'^3}{n^3}} \underset{[26 \cdots 134]}{+\frac{63}{512}e^3 \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[41 \cdots 116]}{+\frac{45}{2048}e^3 \frac{n'^3}{n^3}} \right\}$$

$$\times \cos(4h + 4g + l - 4h' - 4g' - 4l')$$

(249)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ \underset{[3 \cdots 140]}{-\frac{21}{128}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[4 \cdots 126]}{-\frac{1575}{256}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[5 \cdots 125]}{-\frac{1575}{256}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[7 \cdots 139]}{-\frac{21}{128}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[26 \cdots 135]}{+\frac{441}{1024}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[27 \cdots 134]}{+\frac{441}{1024}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \right\}$$

$$\times \cos(4h + 4g + l - 4h' - 4g' - 5l')$$

(250)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ \underset{[3 \cdots 142]}{\frac{3}{128}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[4 \cdots 130]}{+\frac{225}{256}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[6 \cdots 125]}{+\frac{225}{256}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[8 \cdots 139]}{+\frac{3}{128}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[26 \cdots 137]}{-\frac{63}{1024}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[28 \cdots 154]}{-\frac{63}{1024}e^3 e' \frac{n'^2}{n^2}} \right\}$$

$$\times \cos(4h + 4g + l - 4h' - 4g' - 3l')$$

(251)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ \begin{aligned} & \underset{[3 \cdots 143]}{-\frac{51}{2048}e^4 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{17}{1024}e^4 \frac{n'^3}{n^3}} \underset{[4 \cdots 134]}{+\frac{2475}{2048}e^4 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{3987}{1024}e^4 \frac{n'^3}{n^3}} \underset{[26 \cdots 139]}{+\frac{9}{512}e^4 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{256}e^4 \frac{n'^3}{n^3}} \\ & \underset{[49 \cdots 273]}{+\frac{1125}{128}\gamma^2 e^4 \frac{n'}{n}} \underset{[52 \cdots 163]}{+\frac{225}{512}\gamma^2 e^4 \frac{n'}{n}} \end{aligned} \right\}$$

$$\times \cos(4h + 4g - 4h' - 4g' - 4l')$$

(252)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ \begin{aligned} & \underset{[3 \cdots 144]}{-\frac{357}{4096}e^4 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[4 \cdots 135]}{+\frac{17325}{4096}e^4 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[5 \cdots 134]}{+\frac{17325}{4096}e^4 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[7 \cdots 143]}{-\frac{357}{4096}e^4 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[26 \cdots 140]}{+\frac{63}{1024}e^4 e' \frac{n'^2}{n^2}} \\ & \underset{[27 \cdots 139]}{+\frac{63}{1024}e^4 e' \frac{n'^2}{n^2}} \underset{[41 \cdots 126]}{+\frac{8775}{1024}e^4 e' \frac{n'^2}{n^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$\times \cos(4h + 4g - 4h' - 4g' - 5l')$$

(253)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots145]}{\frac{51}{4096}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots137]}{\frac{2475}{4096}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots144]}{\frac{2475}{4096}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots143]}{\frac{51}{4096}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots142]}{\frac{9}{1024}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[28\cdots139]}{\frac{9}{1024}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots130]}{\frac{4725}{1024}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+4g-4h'-4g'-3l')$$

(254)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots63]}{\frac{15}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots49]}{\frac{243}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots152]}{\frac{81}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[17\cdots44]}{\frac{69}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[18\cdots58]}{\frac{81}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots37]}{\frac{1053}{512}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdots147]}{\frac{27}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\&+\underset{[29\cdots215]}{\frac{27}{16}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[49\cdots227]}{\frac{2295}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+6g+6l-4h'-4g'-4l')$$

(255)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots152]}{\frac{675}{32}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(4h+6g+5l-4h'-4g'-4l')$$

(256)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[49\cdots223]}{\frac{1575}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\right\}\cos(4h+6g+5l-4h'-4g'-5l')$$

(257)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[49\cdots225]}{\frac{225}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\right\}\cos(4h+6g+5l-4h'-4g'-3l')$$

(258)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots49]}{\frac{675}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots215]}{\frac{615}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\right\}\cos(4h+6g+4l-4h'-4g'-4l')$$

(259)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\frac{35}{16}\gamma^2\frac{a^2}{a'^2}+\underset{[3\cdots49]}{\frac{3}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots188]}{\left(\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{9}{8}\gamma^4+\frac{3}{8}\gamma^2e^2-\frac{15}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1}{4}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{259}{96}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\&+\underset{[4\cdots63]}{\frac{1215}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots175]}{\left(\frac{27}{8}\gamma^2-\frac{81}{8}\gamma^4+\frac{45}{8}\gamma^2e^2-\frac{135}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{4}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{111}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\end{aligned}\right.$$

Ce coefficient du terme (259) se continue à la page suivante.

(259) Suite.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
+\underset{[5\cdots178]}{\frac{189}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots176]}{\frac{189}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots191]}{\frac{21}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots189]}{\frac{21}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[14\cdots188]}{\frac{9}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[17\cdots58]}{\frac{207}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
+\underset{[18\cdots44]}{\frac{27}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots37]}{\frac{2511}{512}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots166]}{\left(\frac{9}{8}\gamma^2-\frac{27}{8}\gamma^4-\frac{81}{32}\gamma^2e^2-\frac{45}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{8}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1557}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\
-\underset{[27\cdots171]}{\frac{63}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[28\cdots167]}{\frac{63}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[29\cdots245]}{\frac{135}{16}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[35\cdots193]}{\frac{9}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots180]}{\frac{45}{32}\gamma^2e^2\frac{n'}{n}-\frac{135}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
+\underset{[49\cdots243]}{\frac{1005}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots76]}{\frac{27}{64}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{81}{256}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[52\cdots259]}{\frac{189}{512}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-4l')$$

(260)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
-\underset{[3\cdots189]}{\frac{21}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{47}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots176]}{\frac{189}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2565}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[5\cdots175]}{\frac{189}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2349}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
-\underset{[7\cdots188]}{\frac{21}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{219}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[26\cdots167]}{\frac{63}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{657}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[27\cdots166]}{\frac{63}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{351}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
-\underset{[41\cdots181]}{\frac{315}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[42\cdots180]}{\frac{105}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[52\cdots77]}{\frac{135}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[53\cdots76]}{\frac{63}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-5l')$$

(261)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
-\underset{[3\cdots190]}{\frac{51}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots177]}{\frac{459}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots176]}{\frac{1323}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots189]}{\frac{147}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[15\cdots188]}{\frac{51}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[16\cdots175]}{\frac{459}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
+\underset{[26\cdots168]}{\frac{153}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[27\cdots167]}{\frac{441}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots39]}{\frac{243}{512}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots78]}{\frac{153}{16}\gamma^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{5049}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-6l')$$

(262)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\underset{[3\cdots191]}{\frac{3}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots178]}{\frac{27}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1269}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[6\cdots175]}{\frac{27}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
+\underset{[8\cdots188]}{\frac{3}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{139}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[26\cdots171]}{\frac{9}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{441}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[28\cdots166]}{\frac{9}{16}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
+\underset{[41\cdots183]}{\frac{45}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots180]}{\frac{45}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[52\cdots82]}{\frac{27}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[54\cdots76]}{\frac{27}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-3l')$$

(263)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\underset{[6\cdots178]}{\frac{27}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[8\cdots191]}{\frac{3}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots171]}{\frac{9}{32}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots42]}{\frac{243}{512}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots83]}{\frac{27}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\Big\}$$

$$\times\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-2l')$$

(264)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots166]}{\frac{33}{16}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{11}{8}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[4\cdots180]}{\frac{27}{16}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{8}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[24\cdots76]}{\frac{45}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+18\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\\-\underset{[25\cdots96]}{\frac{9}{4}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{2}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[41\cdots184]}{\frac{135}{128}\gamma^2e^3\frac{n'}{n}}+\underset{[52\cdots87]}{\frac{9}{8}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+3l-4h'-4g'-4l')$$

(265)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots167]}{\frac{231}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots181]}{\frac{189}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots180]}{\frac{189}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots166]}{\frac{231}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[24\cdots77]}{\frac{315}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\-\underset{[25\cdots95]}{\frac{63}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots176]}{\frac{63}{64}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[35\cdots189]}{\frac{63}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots237]}{\frac{2415}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots45]}{\frac{81}{256}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+3l-4h'-4g'-5l')$$

(266)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}-\underset{[3\cdots171]}{\frac{33}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots183]}{\frac{27}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots180]}{\frac{27}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[8\cdots166]}{\frac{33}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[24\cdots82]}{\frac{45}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[25\cdots100]}{\frac{9}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\+\underset{[26\cdots178]}{\frac{9}{64}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[35\cdots191]}{\frac{9}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[49\cdots240]}{\frac{345}{32}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots47]}{\frac{81}{256}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+3l-4h'-4g'-3l')$$

(267)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}-\underset{[3\cdots175]}{\frac{27}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots183]}{\frac{81}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[25\cdots103]}{\frac{225}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots180]}{\frac{9}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[35\cdots166]}{\frac{81}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots215]}{\frac{435}{64}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\+\underset{[52\cdots49]}{\frac{27}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+4l-4h'-4g'-4l')$$

(268)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underbrace{-\frac{3}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\cdots193]}\underbrace{+\frac{81}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\cdots166]}\underbrace{-\frac{45}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}_{[24\cdots125]}\\&\underbrace{-\frac{9}{2}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}_{[25\cdots76]}\underbrace{+\frac{45}{64}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}_{[41\cdots175]}\underbrace{+\frac{105}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}_{[42\cdots178]}\underbrace{+\frac{315}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}_{[43\cdots176]}\underbrace{-\frac{27}{8}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}_{[52\cdots116]}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+l-4h'-4g'-4l')$$

(269)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underbrace{-\frac{21}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\cdots194]}\underbrace{+\frac{567}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\cdots167]}\underbrace{+\frac{567}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[5\cdots166]}\underbrace{-\frac{21}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[7\cdots193]}\underbrace{-\frac{315}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[24\cdots126]}\underbrace{-\frac{63}{4}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[25\cdots77]}\\&\underbrace{-\frac{315}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\cdots189]}\underbrace{-\frac{315}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}-\frac{675}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\cdots176]}\underbrace{-\frac{243}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[52\cdots59]}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+l-4h'-4g'-5l')$$

(270)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underbrace{-\frac{765}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}_{[41\cdots177]}\underbrace{-\frac{735}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}_{[42\cdots176]}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+l-4h'-4g'-6l')$$

(271)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underbrace{\frac{3}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\cdots196]}\underbrace{-\frac{81}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\cdots171]}\underbrace{-\frac{81}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[6\cdots166]}\underbrace{+\frac{3}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[8\cdots193]}\underbrace{+\frac{45}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[24\cdots130]}\underbrace{+\frac{9}{4}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[25\cdots82]}\\&\underbrace{+\frac{45}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\cdots191]}\underbrace{+\frac{45}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}+\frac{945}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[41\cdots178]}\underbrace{-\frac{243}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[52\cdots61]}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g+l-4h'-4g'-3l')$$

(272)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underbrace{-\frac{45}{32}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n}}_{[43\cdots178]}\right\}\cos(4h+2g+l-4h'-4g'-2l')$$

(273)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underbrace{-\frac{9}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\cdots197]}\underbrace{+\frac{279}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{441}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\cdots188]}\underbrace{+\frac{63}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[24\cdots134]}\\&\underbrace{-\frac{27}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[26\cdots193]}\underbrace{+\frac{3375}{256}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{10125}{512}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}}_{[41\cdots63]}\end{aligned}\right.$$

Ce coefficient du terme (273) se continue à la page suivante

(273) Suite.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
+ \underbrace{\left(\frac{225}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{32}\gamma^4 e^2 + \frac{225}{64}\gamma^2 e^4 - \frac{1125}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} + \frac{1215}{128}\gamma^2 e^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{123615}{1024}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[41 \cdots 166]} \\
\underbrace{- \frac{525}{64}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[42 \cdots 171]} \underbrace{- \frac{1575}{64}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[43 \cdots 167]} \underbrace{- \left(\frac{45}{64}\gamma^2 e^2 - \frac{45}{8}\gamma^4 e^2 + \frac{585}{256}\gamma^2 e^4 - \frac{225}{64}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}}_{[50 \cdots 166]} \\
\underbrace{+ \frac{2025}{1024}\gamma^2 e^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{21357}{16384}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[50 \cdots 166]} \underbrace{+ \frac{135}{1024}\gamma^2 e^2 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{4455}{4096}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[52 \cdots 125]} \underbrace{- \frac{3645}{4096}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3}}_{[52 \cdots 273]} \\
\underbrace{- \frac{105}{128}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[53 \cdots 130]} \underbrace{- \frac{315}{128}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[54 \cdots 126]}
\end{array}\right\}$$

$$\times \cos(4h + 2g - 4h' - 4g' - 4l')$$

(274)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\underbrace{- \frac{63}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[3 \cdots 198]} \underbrace{+ \frac{1953}{64}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[4 \cdots 189]} \underbrace{+ \frac{1953}{64}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[5 \cdots 188]} \underbrace{- \frac{63}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[7 \cdots 197]} \underbrace{+ \frac{441}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[24 \cdots 135]} \\
\underbrace{- \frac{189}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[26 \cdots 194]} \underbrace{- \frac{189}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[27 \cdots 193]} \underbrace{+ \frac{441}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[40 \cdots 176]} \underbrace{+ \frac{10125}{512}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[41 \cdots 66]} \\
\underbrace{+ \frac{1575}{64}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'}{n} + \frac{15795}{256}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[41 \cdots 167]} \underbrace{+ \frac{525}{32}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'}{n} + \frac{7335}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[42 \cdots 166]} \\
\underbrace{- \frac{315}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'}{n} + \frac{10935}{2048}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[50 \cdots 167]} \underbrace{+ \frac{405}{512}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[52 \cdots 64]} \underbrace{+ \frac{315}{128}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'}{n} - \frac{8775}{1024}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[52 \cdots 126]} \\
\underbrace{+ \frac{315}{1024}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}}_{[53 \cdots 125]}
\end{array}\right\}$$

$$\times \cos(4h + 2g - 4h' - 4g' - 5l')$$

(275)

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\underbrace{\frac{3825}{64}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[41 \cdots 168]} \underbrace{+ \frac{3675}{64}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[42 \cdots 167]} \underbrace{+ \frac{3825}{128}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[44 \cdots 166]} \underbrace{- \frac{765}{128}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[50 \cdots 168]} \underbrace{+ \frac{765}{128}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[52 \cdots 127]} \\
\underbrace{+ \frac{735}{128}\gamma^2 e^2 e'^2 \frac{n'}{n}}_{[53 \cdots 126]}
\end{array}\right\}$$

$$\times \cos(4h + 2g - 4h' - 4g' - 6l')$$

(276)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[3\cdots199]}{\frac{9}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots191]}{\frac{279}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots188]}{\frac{279}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots197]}{\frac{9}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[24\cdots137]}{\frac{63}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[26\cdots196]}{\frac{27}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots193]}{\frac{27}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[40\cdots178]}{\frac{63}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[44\cdots64]}{\frac{10125}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[44\cdots171]}{-\frac{225}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{8505}{256}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[43\cdots166]}{-\frac{225}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}+\frac{1485}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[50\cdots171]}{+\frac{45}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}+\frac{1215}{2048}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots66]}{\frac{405}{512}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[52\cdots130]}{-\frac{45}{128}\gamma^2e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{135}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[54\cdots125]}{\frac{135}{1024}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g-4h'-4g'-3l')$$

(277)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[43\cdots171]}{\frac{225}{64}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[45\cdots166]}{\frac{675}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[54\cdots130]}{\frac{45}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(4h+2g-4h'-4g'-2l')$$

(278)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[3\cdots211]}{\frac{3}{16}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1}{8}\gamma^4\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[4\cdots205]}{-\frac{81}{16}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{8}\gamma^4\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[24\cdots188]}{+\frac{9}{4}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{2}\gamma^4\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[26\cdots201]}{+\frac{63}{32}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{16}\gamma^4\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[44\cdots208]}{\frac{225}{32}\gamma^4e^2\frac{n'}{n}}-\underset{[49\cdots273]}{\frac{1125}{32}\gamma^4e^2\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h-4h'-4g'-4l')$$

(279)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[3\cdots212]}{\frac{21}{32}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots206]}{\frac{567}{32}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots205]}{\frac{567}{32}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots211]}{\frac{21}{32}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[24\cdots189]}{\frac{63}{8}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[25\cdots176]}{\frac{63}{8}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[26\cdots292]}{\frac{441}{64}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[27\cdots201]}{\frac{441}{64}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[52\cdots167]}{\frac{351}{64}\gamma^4e'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h-4h'-4g'-5l')$$

(280)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\underset{[3\cdots213]}{\frac{3}{32}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots207]}{\frac{81}{32}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots205]}{\frac{81}{32}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[8\cdots211]}{\frac{3}{32}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[24\cdots191]}{\frac{9}{8}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[25\cdots178]}{\frac{9}{8}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[26\cdots204]}{\frac{63}{64}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[28\cdots201]}{\frac{63}{64}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots171]}{\frac{189}{64}\gamma^4 e'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(4h-4h'-4g'-3l')$$

(281)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[11\cdots205]}{\frac{135}{32}\gamma^4 e\frac{n'}{n}}\right\}\cos(4h-l-4h'-4g'-4l')$$

(282)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&-\underset{[3\cdots23]}{\frac{1}{1024}\frac{n'^6}{n^6}}+\underset{[3\cdots\cdots125]}{\left(\frac{15}{128}-\frac{45}{64}\gamma^2-\frac{675}{512}e^2-\frac{225}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{5}{32}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1411}{1024}\frac{n'^6}{n^6}}-\underset{[3\cdots236]}{\frac{105}{128}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}}\\&-\underset{[4\cdots23]}{\frac{729}{1024}\frac{n'^6}{n^6}}+\underset{[4\cdots\cdots96]}{\left(\frac{243}{64}-\frac{729}{32}\gamma^2+\frac{11907}{256}e^2-\frac{3645}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{243}{16}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{76923}{1024}\frac{n'^6}{n^6}}\\&\underset{[4\cdots\cdots222]}{-\left(\frac{81}{64}-\frac{243}{32}\gamma^2+\frac{243}{256}e^2-\frac{1215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{135}{32}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{6867}{256}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{315}{128}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}}\\&-\underset{[5\cdots225]}{\frac{2835}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[6\cdots223]}{\frac{6237}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[7\cdots240]}{\frac{861}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[8\cdots237]}{\frac{483}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[14\cdot236]}{\frac{207}{256}\frac{n'^6}{n^6}}-\underset{[19\cdots399]}{\frac{675}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}}\\&+\underset{[26\cdots\cdots215]}{\left(\frac{27}{32}-\frac{81}{16}\gamma^2-\frac{45}{8}e^2+\frac{81}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{4}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1035}{128}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{315}{256}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}}+\underset{[27\cdots219]}{\frac{189}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\&+\underset{[28\cdots216]}{\frac{189}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[35\cdots243]}{\frac{603}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[41\cdots108]}{\frac{18225}{1024}e^4\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots\cdots227]}{\frac{6885}{512}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{75735}{2048}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+6l-6h'-6g'-6l')$$

(283)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&+\underset{[3\cdots\cdots126]}{\frac{105}{256}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{145}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[4\cdots\cdots97]}{\frac{1701}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{21627}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}\underset{[4\cdots\cdots223]}{-\frac{567}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{5859}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\&+\underset{[5\cdots\cdots222]}{\frac{2835}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{59427}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[7\cdots\cdots236]}{\frac{483}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{12877}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[26\cdots\cdots77]}{\frac{7371}{2048}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{13365}{1024}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\&\underset{[26\cdots\cdots216]}{-\frac{189}{32}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{5679}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[27\cdots\cdots215]}{\frac{189}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{4581}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[41\cdots228]}{\frac{42525}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^5}}+\underset{[42\cdots227]}{\frac{16065}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+6l-6h'-6g'-7l')$$

(284)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots127]}{\frac{255}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots98]}{\frac{4131}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots224]}{\frac{1377}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[5\cdots96]}{\frac{11907}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[5\cdots223]}{\frac{19845}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[7\cdots125]}{\frac{735}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\\&+\underset{[7\cdots237]}{\frac{6027}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[15\cdots236]}{\frac{1173}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[16\cdots222]}{\frac{6885}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots78]}{\frac{17901}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdots217]}{\frac{5805}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[27\cdots216]}{\frac{1323}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+6l-6h'-6g'-8l')$$

(285)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots130]}{-\frac{15}{256}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{95}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[4\cdots100]}{\frac{243}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9963}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[4\cdots225]}{\frac{81}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{621}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\&\underset{[6\cdots222]}{-\frac{405}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{6291}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[8\cdots236]}{\frac{69}{128}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{4317}{512}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[26\cdots82]}{\frac{1053}{2048}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1701}{1024}e'\frac{n'^5}{n^5}}\\&\underset{[26\cdots219]}{+\frac{27}{32}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1575}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[28\cdots215]}{\frac{27}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1773}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[41\cdots230]}{\frac{6075}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[43\cdots227]}{\frac{6885}{512}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+6l-6h'-6g'-5l')$$

(286)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[6\cdots96]}{\frac{243}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[6\cdots225]}{\frac{405}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[8\cdots125]}{\frac{15}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[8\cdots240]}{\frac{123}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdots220]}{\frac{81}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[28\cdots219]}{\frac{27}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+6l-6h'-6g'-4l')$$

(287)

$$+m'\frac{a^2}{a'}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots116]}{+\frac{123}{256}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{127}{128}e\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[4\cdots103]}{\frac{6075}{512}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{6075}{128}e\frac{n'^5}{n^5}}-\underset{[17\cdots96]}{\frac{69}{32}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{93}{8}e\frac{n'^5}{n^5}}\\&\underset{[18\cdots76]}{-\frac{135}{64}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{99}{10}e\frac{n'^5}{n^5}}+\underset{[41\cdots232]}{\frac{97335}{4096}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+7l-6h'-6g'-6l')$$

(288)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{aligned}&\underset{[3\cdots117]}{\frac{861}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots104]}{\frac{42525}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots228]}{\frac{1701}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[5\cdots227]}{\frac{42525}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[7\cdots215]}{\frac{147}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[17\cdots97]}{\frac{483}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\&-\underset{[18\cdots77]}{\frac{945}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdots223]}{\frac{10395}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[35\cdots237]}{\frac{1449}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+7l-6h'-6g'-7l')$$

$$(289)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots121]}{-\frac{123}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots106]}{-\frac{6075}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots230]}{+\frac{243}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[6\cdots227]}{-\frac{6075}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[8\cdots215]}{-\frac{21}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[17\cdots100]}{+\frac{69}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\ \underset{[18\cdots82]}{+\frac{135}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[26\cdots225]}{+\frac{1485}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[35\cdots240]}{-\frac{207}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+7l-6h'-6g'-5l')$$

$$(290)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots76]}{\frac{63}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots108]}{+\frac{6561}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots232]}{-\frac{2025}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[17\cdots103]}{-\frac{1725}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[26\cdots96]}{+\frac{1539}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[26\cdots227]}{-\frac{14175}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\ \underset{[35\cdots125]}{+\frac{135}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[35\cdots215]}{+\frac{9}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+8l-6h'-6g'-6l')$$

$$(291)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots134]}{-\frac{21}{512}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{7}{128}e\frac{n'^5}{n^5}}\underset{[4\cdots215]}{-\frac{297}{64}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{801}{32}e\frac{n'^5}{n^5}}\underset{[17\cdots76]}{-\frac{69}{16}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{651}{16}e\frac{n'^5}{n^5}}\\ \underset{[18\cdots125]}{+\frac{135}{64}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{99}{16}e\frac{n'^5}{n^5}}\underset{[41\cdots222]}{+\frac{3375}{512}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[42\cdots225]}{-\frac{1575}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[43\cdots223]}{-\frac{4725}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+5l-6h'-6g'-6l')$$

$$(292)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots135]}{-\frac{147}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots88]}{+\frac{37989}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots216]}{-\frac{2079}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[5\cdots215]}{-\frac{2079}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[7\cdots243]}{-\frac{147}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[17\cdots77]}{-\frac{483}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\ \underset{[18\cdots126]}{+\frac{945}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[26\cdots237]}{-\frac{10143}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[41\cdots104]}{+\frac{118125}{4096}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots223]}{+\frac{4725}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{175725}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+5l-6h'-6g'-7l')$$

$$(293)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots224]}{\frac{78975}{512}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[42\cdots223]}{+\frac{11025}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(6h+6g+5l-6h'-6g'-8l')$$

$$(294)\quad +m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots137]}{\frac{21}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots92]}{-\frac{5427}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[4\cdots219]}{+\frac{297}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[6\cdots215]}{+\frac{297}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[8\cdots243]}{+\frac{21}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[17\cdots82]}{+\frac{69}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\ \underset{[18\cdots130]}{-\frac{135}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[26\cdots240]}{+\frac{1449}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[41\cdots106]}{-\frac{16875}{4096}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots225]}{-\frac{675}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{59265}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+5l-6h'-6g'-5l')$$

(295)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots226]}{\frac{675}{512}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[43\cdots225]}{\frac{675}{128}ce'^2\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(6h+6g+5l-6h'-6g'-4l')$$

(296)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots139]}{-\frac{9}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots76]}{\frac{8829}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots236]}{\frac{2745}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[18\cdots134]}{\frac{189}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots125]}{\frac{405}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots243]}{\frac{189}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\\ \underset{[41\cdots\cdots\cdots\cdots215]}{+\frac{1035}{256}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{4065}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(6h+6g+4l-6h'-6g'-6l')$$

(297)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots216]}{\frac{11025}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[42\cdots215]}{\frac{2415}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(6h+6g+4l-6h'-6g'-7l')$$

(298)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots98]}{\frac{11475}{512}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\right\}\cos(6h+6g+4l-6h'-6g'-8l')$$

(299)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots219]}{-\frac{1575}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[43\cdots215]}{\frac{1035}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(6h+6g+4l-6h'-6g'-5l')$$

(300)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdots236]}{-\frac{945}{2048}e^3\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(6h+6g+3l-6h'-6g'-6l')$$

(301)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}\underset{[3\cdots193]}{-\frac{3}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots180]}{\frac{243}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots264]}{\frac{297}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[17\cdot175]}{\frac{69}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[18\cdot188]}{\frac{27}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\;166]}{\frac{27}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdot259]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\\ \underset{[52\cdots147]}{+\frac{81}{1024}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\underset{[52\cdots\cdots\cdots\cdots215]}{-\frac{27}{16}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{261}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(6h+4g+4l-6h'-6g'-6l')$$

(302)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[52\cdots216]}{\frac{189}{64}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[53\cdots215]}{\frac{63}{16}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(6h+4g+4l-6h'-6g'-7l')$$

(303)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[52\cdot\;\cdot\;219]}{\frac{27}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[54\cdot\;\cdot\;215]}{\frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(6h+4g+4l-6h'-6g'-5l')$$

(304)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdot\;\cdot\;264]}{\frac{225}{32}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(6h+4g+3l-6h'-6g'-6l')$$

(305)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[41\cdot\;\cdot\;\cdot\;180]}{\frac{675}{512}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}}\right\}\cos(6h+4g+2l-6h'-6g'-6l')$$

(306)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\underset{[3\cdot\;\cdot\;134]}{\frac{7}{2048}\frac{n'^6}{n^6}}+\underset{[4\cdot\;\cdot\;103]}{\frac{18225}{2048}\frac{n'^6}{n^6}}+\underset{[4\cdot\;\cdot\;287]}{\frac{1107}{1024}\frac{n'^6}{n^6}}-\underset{[17\cdot\;222]}{\frac{1035}{256}\frac{n'^6}{n^6}}-\underset{[26\cdot\;215]}{\frac{2349}{2048}\frac{n'^6}{n^6}}-\underset{[26\cdot\;282]}{\frac{5085}{1024}\frac{n'^6}{n^6}}\right\}$$

$$\times\cos(8h+8g+8l-8h'-8g'-8l')$$

(307)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdot\;\cdot\;287]}{\frac{62055}{4096}e\frac{n'^5}{n^5}}\right\}\cos(8h+8g+7l-8h'-8g'-8l')$$

(308)

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\underset{[41\cdot\;\cdot\;\cdot\;227]}{\frac{103275}{8192}e^2\frac{n'^4}{n^4}}\right\}\cos(8h+8g+6l-8h'-8g'-8l')$$

(309)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&\frac{3}{8}-\frac{33}{8}\gamma^2+\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{4}e'^2+\frac{75}{8}\gamma^4-\frac{33}{4}\gamma^2e^2-\frac{33}{4}\gamma^2e'^2-\frac{123}{512}e^4+\frac{3}{2}e^2e'^2+\frac{15}{64}\frac{a^2}{a'^2}\\&-\underset{[1\cdot\;\cdot\;309]}{\frac{27}{32}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[1\cdot\;\cdot\;310]}{\frac{27}{16}e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdot\;\cdot\;313]}{\frac{9}{16}e'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[2\cdot\;309]}{\frac{3}{16}\frac{n'^4}{n^4}}\\&+\underset{[2\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;316]}{\left(\frac{3}{32}-\frac{51}{32}\gamma^2+\frac{27}{64}e^2+\frac{21}{64}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{128}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdot\;321]}{\frac{9}{256}\frac{n'^4}{n^4}}\\&+\underset{[2\cdot\;330]}{\left(\frac{15}{32}-\frac{255}{32}\gamma^2+\frac{105}{64}e^2+\frac{105}{64}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{105}{128}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[2\cdot\;337]}{\frac{33}{256}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[3\cdot\;309]}{\frac{3}{64}\frac{n'^4}{n^4}}\\&-\underset{[3\cdot\;316]}{\left(\frac{3}{64}-\frac{39}{64}\gamma^2+\frac{33}{128}e^2-\frac{3}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1}{32}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{187}{768}\frac{n'^4}{n^4}}\end{aligned}\right.$$

Ce coefficient du terme (309) se continue à la page suivante.

(309) Suite.

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&+\underset{[3\cdots385]}{\left(\frac{15}{64}-\frac{75}{64}\gamma^2+\frac{195}{128}e^2-\frac{255}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5}{32}\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1295}{768}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[3\cdots390]}{\frac{75}{1024}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots309]}{\frac{243}{64}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[4\cdots330]}{\left(\frac{135}{64}-\frac{1755}{64}\gamma^2-\frac{765}{128}e^2-\frac{135}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{32}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{3381}{256}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[4\cdots399]}{\left(\frac{405}{64}-\frac{2025}{64}\gamma^2-\frac{11745}{128}e^2-\frac{6885}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{405}{32}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{27063}{512}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots404]}{\frac{23085}{1024}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[5\cdots331]}{\frac{2835}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots400]}{\frac{14175}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots334]}{\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots402]}{\frac{405}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots317]}{\frac{63}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots386]}{\frac{525}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[8\cdots319]}{\frac{3}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots388]}{\frac{15}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots319]}{\frac{9}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots331]}{\frac{135}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdot317]}{\frac{27}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdot334]}{\frac{45}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[11\cdot316]}{\frac{93}{64}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[11\cdot330]}{\frac{465}{64}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[14\cdot316]}{\frac{9}{256}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[14\cdot385]}{\frac{45}{256}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[17\cdot399]}{\frac{1035}{256}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[18\cdot385]}{\frac{135}{256}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[26\cdots309]}{\left(\frac{171}{128}-\frac{2007}{128}\gamma^2-\frac{99}{128}e^2-\frac{171}{256}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{99}{64}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{79443}{2048}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[26\cdots379]}{\left(\frac{495}{128}-\frac{2295}{128}\gamma^2-\frac{3915}{128}e^2-\frac{8415}{256}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{315}{64}\frac{n'^3}{n^3}+\frac{60345}{2048}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[27\cdots310]}{\frac{3591}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[27\cdots380]}{\frac{17325}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[28\cdots313]}{\frac{171}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots383]}{\frac{495}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[29\cdot340]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[29\cdot362]}{\frac{27}{16}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots321]}{\frac{9}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[32\cdots337]}{\frac{33}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[35\cdots321]}{\frac{27}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[35\cdots390]}{\frac{225}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots337]}{\frac{495}{256}e^2\frac{n'}{n}+\frac{1485}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots404]}{\frac{4275}{256}e^2\frac{n'}{n}+\frac{12825}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[48\cdots421]}{\frac{985}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots362]}{\frac{27}{16}\gamma^2\frac{n'}{n}-\frac{81}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots420]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'}{n}-\frac{135}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(h+g+l-h'-g'-l')$$

(310) *

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{9}{8}e'-\frac{99}{8}\gamma^2e'+\frac{9}{4}e^2e'+\frac{33}{32}e'^3-\frac{99}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{369}{512}e^4e'\\
+m'\frac{a^3}{a'^4}&\left\{+\underset{[1\cdots309]}{\left(\frac{9}{16}e'-\frac{279}{32}\gamma^2e'+\frac{225}{128}e^2e'\right)\frac{n'}{n}}+\underset{[2\cdots317]}{\left(\frac{9}{32}e'+\frac{81}{64}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{99}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\right.
\end{aligned}\right\}$$

Ce coefficient du terme (310) se continue à la page suivante.

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 4^e^ opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^2 ou e^4 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (334) qui provient du terme (310) dans cette 4^e opération.

(310) Suite.

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&+\underset{[2\cdots331]}{\left(\frac{45}{32}e'+\frac{315}{64}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[3\cdots319]}{-\left(\frac{3}{64}e'+\frac{33}{128}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{83}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[3\cdots386]}{\left(\frac{75}{64}e'+\frac{975}{128}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1255}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[4\cdots334]}{-\frac{135}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3375}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[4\cdots400]}{-\frac{2025}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{38475}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[5\cdots330]}{-\frac{945}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{11745}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[6\cdots399]}{+\frac{405}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2835}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[7\cdots316]}{-\frac{21}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{219}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[8\cdots385]}{-\frac{15}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{695}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[9\cdots316]}{+\frac{9}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{99}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[10\cdots330]}{+\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{495}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[26\cdots313]}{+\frac{171}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{279}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[26\cdots380]}{+\frac{2475}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{11565}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[27\cdots309]}{+\frac{1197}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3267}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[28\cdots379]}{-\frac{495}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4095}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[41\cdots340]}{+\frac{495}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\;\underset{[41\cdots405]}{+\frac{21375}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[42\cdots337]}{+\frac{1155}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\;\underset{[43\cdots404]}{-\frac{4275}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\;\underset{[46\cdots117]}{+\frac{3075}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\;\underset{[52\cdots365]}{+\frac{27}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\;\underset{[52\cdots421]}{+\frac{225}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\;\underset{[53\cdots362]}{+\frac{63}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[54\cdots420]}{-\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\;\underset{[57\cdots309]}{-\frac{2205}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right.
$$

$$\times\cos(h+g+l-h'-g'-2l')$$

(311)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{159}{64}e'^2-\frac{1749}{64}\gamma^2e'^2+\frac{159}{32}e^2e'^2\;\underset{[1\cdots309]}{+\frac{27}{64}e'^2\frac{n'}{n}+\frac{27}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[1\cdots310]}{+\frac{27}{16}e'^2\frac{n'}{n}}\;\underset{[2\cdots318]}{+\frac{159}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[2\cdots332]}{+\frac{795}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[3\cdots320]}{-\frac{33}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[3\cdots387]}{+\frac{1905}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[4\cdots335]}{-\frac{1485}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[4\cdots401]}{-\frac{51435}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[5\cdots334]}{-\frac{945}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[6\cdots400]}{+\frac{2025}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[7\cdots319]}{-\frac{21}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[8\cdots386]}{-\frac{75}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[9\cdots317]}{+\frac{27}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[10\cdots331]}{+\frac{135}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[12\cdots316]}{+\frac{27}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[13\cdots330]}{+\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[15\cdots316]}{-\frac{51}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[16\cdots330]}{-\frac{2295}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[26\cdots314]}{+\frac{1881}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[26\cdots381]}{+\frac{62865}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[27\cdots313]}{+\frac{1197}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[28\cdots380]}{-\frac{2475}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[48\cdots117]}{-\frac{1025}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.
$$

$$\times\cos(h+g+l-h'-g'-3l')$$

(312)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{77}{16}e'^3\right\}\cos(h+g+l-h'-g'-4l')$$

(313)*

$$
+m'\frac{a^2}{a'^4}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{3}{8}e'-\frac{33}{8}\gamma^2e'+\frac{3}{4}e^2e'+\frac{15}{16}e'^3-\frac{33}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{123}{512}e^4e'\\
&\underset{[1\cdots309]}{-\left(\frac{9}{16}e'-\frac{279}{32}\gamma^2e'+\frac{225}{128}e^2e'\right)\frac{n'}{n}}\underset{[2\cdots319]}{+\frac{3}{32}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{99}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[2\cdots331]}{+\frac{15}{32}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[3\cdots317]}{-\frac{9}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{147}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[3\cdots388]}{-\frac{15}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{935}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[4\cdots331]}{-\frac{405}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{5265}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[4\cdots402]}{+\frac{405}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{12555}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[5\cdots399]}{-\frac{2835}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{35235}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[6\cdots330]}{+\frac{135}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{945}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[7\cdots385]}{+\frac{105}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1095}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[8\cdots316]}{+\frac{3}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{139}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[9\cdots330]}{+\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{495}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[10\cdots316]}{+\frac{9}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{99}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[26\cdots310]}{+\frac{513}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1863}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[26\cdots383]}{-\frac{495}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{6525}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[27\cdots379]}{+\frac{3465}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{10395}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[28\cdots309]}{-\frac{171}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1287}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[41\cdots338]}{+\frac{1485}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[41\cdots407]}{-\frac{4275}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[42\cdots404]}{+\frac{9975}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[43\cdots337]}{-\frac{495}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[46\cdots12]}{-\frac{45}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[46\cdots121]}{+\frac{2955}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[52\cdots363]}{+\frac{81}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[52\cdots423]}{-\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[53\cdots420]}{+\frac{105}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[54\cdots362]}{-\frac{27}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[57\cdots309]}{+\frac{2205}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\times\cos(h+g+l-h'-g')$$

(314)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{33}{64}e'^2-\frac{363}{64}\gamma^2e'^2+\frac{33}{32}e^2e'^2\underset{[1\cdots309]}{-\frac{27}{64}e'^2\frac{n'}{n}+\frac{27}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[1\cdots313]}{-\frac{9}{16}e'^2\frac{n'}{n}}\underset{[2\cdots320]}{+\frac{33}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[2\cdots335]}{+\frac{165}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots318]}{-\frac{159}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots389]}{+\frac{15}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[4\cdots332]}{-\frac{7155}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[4\cdots403]}{-\frac{405}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[5\cdots402]}{+\frac{2835}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}
\right.
$$

Ce coefficient du terme (314) se continue à la page suivante.

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2^e opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^2 ou e^4 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (334), qui provient du terme (313) dans cette 2^e opération.

(314) Suite.

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&+\underset{[6\cdots331]}{\frac{405}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots388]}{\frac{105}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots317]}{\frac{9}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots334]}{\frac{45}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots319]}{\frac{9}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[12\cdots330]}{\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[13\cdots316]}{\frac{27}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[15\cdots385]}{\frac{255}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[16\cdots399]}{\frac{6885}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots311]}{\frac{9063}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots384]}{\frac{495}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[27\cdots383]}{\frac{3465}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[28\cdots310]}{\frac{513}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[46\cdots122]}{\frac{405}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[48\cdots12]}{\frac{15}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(h+g+l-h'-g'+l')$$

(315)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{23}{32}e'^3\right\}\cos(h+g+l-h'-g'+2l')$$

(316)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&-\frac{3}{16}e+\frac{33}{16}\gamma^2e+\frac{3}{8}e^3-\frac{3}{8}ee'^2+\underset{[1\cdots317]}{\frac{297}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots319]}{\frac{99}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots309]}{\frac{21}{64}e\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[2\cdots321]}{\frac{9}{64}e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots309]}{\frac{171}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[3\cdots390]}{\frac{75}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{25}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots337]}{\frac{297}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{297}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[4\cdots379]}{\frac{3375}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4185}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[19\cdots76]}{\frac{315}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2295}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[20\cdots125]}{\frac{675}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2025}{256}e\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right\}\\
&-\underset{[21\cdots96]}{\frac{9}{64}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{128}e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[26\cdots330]}{\frac{45}{16}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{16}e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[32\cdots330]}{\frac{15}{128}e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots342]}{\frac{45}{128}e^3\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots399]}{\frac{675}{256}e\frac{n'^3}{n^3}}\\
&-\underset{[42\cdots400]}{\frac{7875}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[43\cdots402]}{\frac{675}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[46\cdots76]}{\frac{315}{512}e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[52\cdots374]}{\frac{27}{32}\gamma^2e\frac{n'}{n}}-\underset{[52\cdots425]}{\frac{45}{64}\gamma^2e\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (316) a disparu par suite de la 21ᵉ opération.

$$\times\cos(h+g+2l-h'-g'-l')$$

(317)

$$+m'\frac{a^3}{n'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{9}{16}ee'+\frac{99}{16}\gamma^2ee'+\frac{9}{8}e^3e'-\underset{[1\cdots316]}{\frac{99}{128}ee'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots310]}{\frac{63}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots322]}{\frac{27}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots313]}{\frac{171}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[3\cdots391]}{\frac{375}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots340]}{\frac{297}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots380]}{\frac{16875}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[5\cdots337]}{\frac{2079}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots379]}{\frac{3375}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots309]}{\frac{1197}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[8\cdots390]}{\frac{75}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[9\cdots321]}{\frac{27}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots309]}{\frac{63}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[19\cdots82]}{\frac{315}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[20\cdots130]}{\frac{675}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[21\cdots97]}{\frac{63}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.$$

Ce coefficient du terme (317) se continue à la page suivante.

(317) Suite.

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&-\underset{[26\cdots334]}{\frac{45}{16}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots386]}{\frac{3825}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[27\cdots330]}{\frac{315}{32}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots331]}{\frac{45}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[34\cdots330]}{\frac{45}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[35\cdots319]}{\frac{9}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[41\cdots317]}{\frac{2025}{2048}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots\cdots\cdots\cdots400]}{-\frac{3375}{128}ee'\frac{n'}{n}-\frac{30375}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[48\cdots76]}{\frac{105}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(h+g+2l-h'-g'-2l')$$

(318)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&-\frac{159}{128}ee'^2-\underset{[1\cdots316]}{\frac{297}{512}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots317]}{\frac{297}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots401]}{\frac{85725}{1024}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots400]}{\frac{3375}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[46\cdots18]}{\frac{135}{256}ee'^2\frac{n'}{n}}\\&+\underset{[46\cdots78]}{\frac{765}{16}ee'^2\frac{n'}{n}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(h+g+2l-h'-g'-3l')$$

(319)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&-\frac{3}{16}ee'+\frac{33}{16}\gamma^2ee'+\frac{3}{8}e^3e'+\underset{[1\cdots316]}{\frac{99}{128}ee'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots313]}{\frac{21}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots324]}{\frac{9}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots310]}{\frac{513}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[3\cdots393]}{\frac{75}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots338]}{\frac{891}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdots383]}{\frac{3375}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots379]}{\frac{23625}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots337]}{\frac{297}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots390]}{\frac{525}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[8\cdots309]}{\frac{171}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots309]}{\frac{63}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[10\cdots324]}{\frac{27}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[19\cdots77]}{\frac{2205}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[20\cdots126]}{\frac{4725}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[21\cdots100]}{\frac{9}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[26\cdots331]}{\frac{135}{16}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots388]}{\frac{765}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots330]}{\frac{45}{32}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots334]}{\frac{15}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[33\cdots330]}{\frac{45}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[35\cdots317]}{\frac{27}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[41\cdots319]}{\frac{675}{2048}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots\cdots\cdots\cdots402]}{+\frac{675}{128}ee'\frac{n'}{n}+\frac{14175}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(h+g+2l-h'-g')$$

(320)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{33}{128}ee'^2+\underset{[1\cdots316]}{\frac{297}{512}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots319]}{\frac{99}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots403]}{\frac{675}{1024}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[42\cdots402]}{\frac{1575}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[46\cdots21]}{\frac{135}{256}ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(h+g+2l-h'-g'+l')$$

$$(321)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{9}{64}e^2+\frac{99}{64}\gamma^2e^2+\frac{33}{128}e^4-\frac{9}{32}e^2e'^2-\underset{[2\cdots316]}{\frac{135}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots326]}{\frac{21}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots330]}{\frac{1365}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots395]}{\frac{135}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
+\underset{[4\cdots342]}{\frac{27}{64}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots385]}{\frac{21555}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[20\cdots134]}{\frac{945}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[21\cdots103]}{\frac{225}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots337]}{\frac{1287}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots390]}{\frac{7875}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[32\cdots309]}{\frac{21}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
+\underset{[35\cdots309]}{\frac{171}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[38\cdots330]}{\frac{15}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots321]}{\frac{2025}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots\cdots\cdots\cdots379]}{\frac{2475}{256}e^2\frac{n'}{n}-\frac{4725}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[48\cdots24]}{\frac{45}{128}e^2e'^2}+\underset{[49\cdots346]}{\frac{75}{32}\gamma^2e^2}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(h+g+3l-h'-g'-l')$$

$$(322)^{*}\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{27}{64}e^2e'+\frac{297}{64}\gamma^2e^2e'+\frac{99}{128}e^4e'-\underset{[1\cdots321]}{\frac{243}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots317]}{\frac{405}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots327]}{\frac{63}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\
-\underset{[41\cdots380]}{\frac{12375}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots379]}{\frac{2475}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[46\cdots24]}{\frac{135}{512}e^2e'\frac{n'}{n}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(h+g+3l-h'-g'-2l')$$

$$(323)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{477}{512}e^2e'^2\right\}\cos(h+g+3l-h'-g'-3l')$$

$$(324)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{9}{64}e^2e'+\underset{[1\cdots321]}{\frac{243}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[41\cdots383]}{\frac{2475}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[42\cdots379]}{\frac{5775}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[46\cdots26]}{\frac{135}{512}e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(h+g+3l-h'-g')$$

$$(325)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{99}{512}e^2e'^2-\underset{[48\cdots26]}{\frac{45}{128}e^2e'^2}\right\}\cos(h+g+3l-h'-g'+l')$$

$$(326)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{7}{64}e^3+\underset{[46\cdots28]}{\frac{5}{32}e^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(h+g+4l-h'-g'-l')$$

$$(327)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{21}{64}e^3e'\right\}\cos(h+g+4l-h'-g'-2l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3$^{\text{e}}$ opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (334), qui provient du terme (322) dans cette 3$^{\text{e}}$ opération.

(328)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{7}{64}e^3e' - \underset{[48\cdots28]}{\frac{5}{24}e^3e'}\right\}\cos(h+g+4l-h'-g')$$

(329)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{95}{1024}e^4\right\}\cos(h+g+5l-h'-g'-l')$$

(330)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{15}{16}e+\frac{165}{16}\gamma^2e-\frac{45}{64}e^3-\frac{15}{8}ee'^2-\frac{375}{16}\gamma^4e+\frac{495}{64}\gamma^2e^3+\frac{165}{8}\gamma^2ee'^2-\frac{45}{32}e^3e'^2\\
&-\frac{105}{128}e\frac{a^2}{a'^2}+\underset{[1\cdots330]}{\frac{1215}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[1\cdots331]}{\frac{405}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots334]}{\frac{135}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[2\cdots\cdots309]}{\left(\frac{99}{64}e-\frac{1647}{64}\gamma^2e+\frac{399}{256}e^3+\frac{693}{128}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{945}{256}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots316]}{\frac{147}{512}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots330]}{\frac{1155}{512}e\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[2\cdots\cdots337]}{\left(\frac{33}{64}e-\frac{561}{64}\gamma^2e+\frac{603}{512}e^3+\frac{231}{128}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{231}{256}e\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[2\cdot342]}{\frac{3}{64}e\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[3\cdots\cdots321]}{\left(\frac{9}{128}e-\frac{117}{128}\gamma^2e+\frac{45}{1024}e^3-\frac{9}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{64}e\frac{n'^3}{n^3}-\frac{143}{256}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots330]}{\frac{45}{1024}e\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[3\cdots\cdots379]}{\left(\frac{255}{128}e-\frac{1155}{128}\gamma^2e-\frac{8685}{512}e^3-\frac{4335}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{115}{64}e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{26485}{1536}e\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[3\cdots395]}{\frac{135}{512}e\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[4\cdots\cdots309]}{\left(\frac{459}{128}e-\frac{4671}{128}\gamma^2e+\frac{5103}{512}e^3-\frac{459}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{621}{64}e\frac{n'^3}{n'^3}-\frac{11649}{256}e\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots330]}{\frac{44145}{2048}e\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[4\cdots399]}{\frac{324405}{2048}e\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots\cdots404]}{\left(\frac{2565}{128}e-\frac{12825}{128}\gamma^2e-\frac{109035}{1024}e^3-\frac{43605}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2565}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}\\
&+\underset{[4\cdots404]}{\frac{96693}{512}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[5\cdots310]}{\frac{9639}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[5\cdots405]}{\frac{89775}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots313]}{\frac{459}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[6\cdots407]}{\frac{2565}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots322]}{\frac{189}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[7\cdots380]}{\frac{8925}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots324]}{\frac{9}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdots383]}{\frac{255}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots313]}{\frac{297}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots338]}{\frac{297}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots310]}{\frac{891}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[10\cdots340]}{\frac{99}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[11\cdots309]}{\frac{4185}{128}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[11\cdots337]}{\frac{1023}{128}e\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[14\cdot321]}{\frac{27}{512}e\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[14\cdots379]}{\frac{1305}{512}e\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[17\cdots379]}{\frac{15525}{512}e\frac{n'^4}{n^4}}
\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (330) a disparu par suite de la 46ᵉ opération

Ce coefficient du terme (330) se continue à la page suivante

(330)
Suite.

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
+\frac{675}{512}e\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{45}{128}e-\frac{225}{128}\gamma^2e-\frac{405}{512}e^3-\frac{765}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{512}e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1413}{512}e\frac{n'^4}{n^4}\\
-\frac{2205}{512}e\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{2025}{128}e-\frac{9315}{128}\gamma^2e-\frac{23085}{256}e^3-\frac{34425}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3645}{128}e\frac{n'^3}{n^3}\\
-\frac{259659}{2048}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{945}{2048}e\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{3}{128}e-\frac{51}{128}\gamma^2e+\frac{9}{512}e^3+\frac{21}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
+\frac{3}{256}e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1587}{512}e\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{45}{64}e-\frac{531}{64}\gamma^2e-\frac{765}{256}e^3-\frac{45}{128}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{117}{256}e\frac{n'^3}{n^3}\\
-\frac{23013}{256}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{15}{16}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{16}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{32}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3105}{2048}e\frac{n'^4}{n^4}\\
-\frac{2835}{1024}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{945}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{70875}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2025}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{405}{64}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}\\
-\frac{27}{32}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{512}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{15}{2048}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}\\
-\frac{63}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{2048}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{27}{512}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1575}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}\\
+\frac{1125}{1024}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{693}{1024}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{225}{128}e-\frac{2925}{128}\gamma^2e+\frac{225}{128}e^3-\frac{225}{256}ee'^2\right)\frac{n'}{n}\\
+\left(\frac{675}{2048}e+\frac{6075}{2048}\gamma^2e-\frac{26325}{8192}e^3-\frac{53325}{2048}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{101205}{16384}e\frac{n'^3}{n^3}-\frac{17466765}{524288}e\frac{n'^4}{n^4}\\
-\frac{7875}{512}e^3\frac{n'}{n}-\frac{165375}{4096}e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{18375}{2048}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1575}{128}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{675}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3375}{2048}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}\\
+\frac{225}{128}ee'^2\frac{n'}{n}+\frac{3375}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}\\
\\
-\frac{30375}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3375}{128}ee'^2\frac{n'}{n}+\frac{1755}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{225}{16}\gamma^4e-\frac{225}{32}\gamma^2e'\\
-\frac{135}{32}\gamma^2e\frac{n'}{n}-\frac{2565}{512}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{225}{64}\gamma^2e\frac{n'}{n}-\frac{3375}{256}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}
\end{array}\right.$$

[18 · 390] [19 · · · 96]

[19 · · 215] [20 · · · 76]

[20 · · · 76] [20 · · 243] [21 · · · 16]

[21 · · · 16] [21 · · · 76]

[21 · · · 76] [22 · · 346] [23 · · 362] [24 · · 420] [25 · · 362] [26 · 316] [26 · · 330]

[26 · 399] [27 · · · 317] [27 · · · 400] [28 · · · 319] [28 · · · 402] [29 · · · 355]

[29 · 374] [32 · 316] [32 · · 330] [32 · · 342] [33 · · · 319] [34 · · 317]

[35 · · 326] [35 · · 330] [35 · 385] [36 · · · 386] [37 · · · 388] [38 · · 321]

[39 · · 390] [40 · · 337] [41 · · · 330]

[41 · · · 330]

[41 · · · 409] [42 · · · 330] [42 · · · 331] [43 · · · 330]

[43 · · · 334]

[47 · · · 2] [48 · · · 2] [49 · · · 367]

[52 · · · 367] [52 · · · 430]

$$\times\cos(h+g-h'-g'-l')$$

[Cette portion du coefficient du terme (330) a disparu par suite de la 46e opération ....]

(331)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{45}{16}ee'+\frac{495}{16}\gamma^2ee'-\frac{135}{64}e^3e'-\frac{165}{64}ee'^3+\left(\frac{135}{128}ee'-\frac{2565}{128}\gamma^2ee'+\frac{135}{512}e^3e'\right)\frac{n'}{n}
\end{aligned}\right.$$

[1 . . . . 401]

$$-\frac{297}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{783}{256}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{99}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{495}{256}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{9}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{219}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}$$

[2 . . . . 310] [2 . . . . 338] [3 . . . . 324]

$$+\frac{1275}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{11215}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{459}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1971}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{12825}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{94905}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}$$

[3 . . . . 380] [4 . . . . 313] [4 . . . . 405]

$$-\frac{3213}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{54027}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{2565}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{17955}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{63}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{657}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}$$

[5 . . . . 309] [6 . . . . 404] [7 . . . . 321]

$$-\frac{255}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{15985}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{297}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3861}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{99}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1089}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}$$

[8 . . . . 379] [9 . . . . 309] [10 . . . . 337]

$$-\frac{45}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3105}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2025}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{69255}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{9}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{256}ee'\frac{n'^3}{n^3}$$

[19 . . . . 100] [20 . . . . 82] [21 . . . . 20]

$$-\frac{315}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4689}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{45}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2925}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{10125}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{66825}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}$$

[21 . . . . 77] [26 . . . . 319] [26 . . . . 400]

$$+\frac{9}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{99}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{225}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3465}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{10125}{2048}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{91125}{16384}ee'\frac{n'^3}{n^3}$$

[32 . . . . 317] [35 . . . . 386] [41 . . . . 334]

$$-\left(\frac{225}{128}ee'-\frac{2925}{128}\gamma^2ee'+\frac{225}{128}e^3e'\right)\frac{n'}{n}-\frac{3375}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{151965}{16384}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{39375}{512}e^3e'\frac{n'}{n}$$

[44 . . . . 334] [44 . . . 410]

$$-\left(\frac{525}{128}ee'-\frac{6825}{128}\gamma^2ee'+\frac{525}{128}e^3e'\right)\frac{n'}{n}-\frac{7275}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{725715}{16384}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{7875}{512}e^3e'\frac{n'}{n}$$

[42 . . . . 330] [43 . . . 409]

$$-\frac{10125}{512}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{587655}{4096}ee'\frac{n'^3}{n^3}$$

[46 . . . . 2]

$$+\frac{45}{16}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}-\frac{1125}{64}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}-\frac{315}{32}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}+\frac{225}{64}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}$$

[52 . . . 370] [52 . . . 431] [53 . . . 367] [54 . . . 410]

$$\times\cos(h+g-h'-g'-2l')$$

Cette portion du coefficient du terme (331) a disparu par suite de la 47e opération.

(332)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{795}{128}ee'^2+\frac{8745}{128}\gamma^2ee'^2-\frac{2385}{512}e^3e'^2+\frac{405}{512}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{1215}{2048}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{405}{128}ee'^2\frac{n'}{n}
\end{aligned}\right.$$

[1 . . . . 330] [1 . . . 331]

$$-\frac{5247}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1749}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{99}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{32385}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{5049}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}$$

[2 . . . 311] [2 . . . 339] [3 . . . 325] [3 . . . 381] [4 . . . 318]

Ce coefficient du terme (332) se continue à la page suivante.

(332)
Suite.

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&+\underset{[4\cdots406]}{\frac{325755}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[5\cdots313]}{\frac{3213}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots405]}{\frac{12825}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdots324]}{\frac{63}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[8\cdots380]}{\frac{1275}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[9\cdots310]}{\frac{891}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots338]}{\frac{297}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[12\cdots309]}{\frac{891}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[13\cdots337]}{\frac{297}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[15\cdots321]}{\frac{153}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[16\cdots309]}{\frac{7803}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[21\cdots21]}{\frac{27}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[21\cdots78]}{\frac{765}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots320]}{\frac{495}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots401]}{\frac{257175}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[27\cdots319]}{\frac{315}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots400]}{\frac{10125}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+\underset{[32\cdots318]}{\frac{159}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[33\cdots317]}{\frac{27}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[35\cdots387]}{\frac{5715}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[37\cdots386]}{\frac{225}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots332]}{\frac{178875}{16384}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[41\cdots335]}{\frac{2475}{1024}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{675}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[42\cdots334]}{\frac{525}{128}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{13875}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[44\cdots330]}{\frac{3825}{512}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{34425}{4096}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&-\underset{[46\cdots3]}{\frac{12375}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[47\cdots2]}{\frac{30375}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(h+g-h'-g'-3l')$$

(333)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{385}{32}ee'^3\right\}\cos(h+g-h'-g'-4l')$$

(334)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{15}{16}ee'+\frac{165}{16}\gamma^2ee'-\frac{45}{64}e^3e'-\frac{75}{32}ee'^3-\frac{375}{16}\gamma^4ee'+\frac{495}{64}\gamma^2e^3e'-\frac{105}{64}ee'\frac{a^2}{a'^2}\\
&-\underset{[1\cdots330]}{\left(\frac{135}{128}ee'-\frac{2565}{128}\gamma^2ee'+\frac{135}{512}e^3e'+\frac{3375}{1024}ee'^3\right)\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots331]}{\frac{1215}{512}ee'^3\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots335]}{\frac{1485}{1024}ee'^3\frac{n'}{n}}\\
&-\underset{[2\cdots313]}{\left(\frac{99}{64}ee'-\frac{1647}{64}\gamma^2ee'+\frac{399}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{783}{256}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{945}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots319]}{\frac{147}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[2\cdots334]}{\frac{1155}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[2\cdots340]}{\left(\frac{33}{64}ee'-\frac{561}{64}\gamma^2ee'+\frac{603}{512}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{495}{256}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{231}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[2\cdots344]}{\frac{3}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots322]}{\left(\frac{27}{128}ee'-\frac{351}{128}\gamma^2ee'+\frac{135}{1024}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{315}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{447}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&-\underset{[3\cdots334]}{\frac{495}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots383]}{\left(\frac{255}{128}ee'-\frac{1155}{128}\gamma^2ee'-\frac{8685}{512}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{7535}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{42955}{1536}ee'\frac{n'^4}{n^4}}
\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (334) a disparu par suite de la 48e opération

Ce coefficient du terme (334) se continue à la page suivante.

(334)
Suite.

$$
\begin{aligned}
+m'\frac{a^3}{a'^4}\Bigg\{\;
&+\underset{[3\cdots396]}{\frac{675}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[4\cdots310]}{-\left(\frac{1377}{128}ee'-\frac{14013}{128}\gamma^2ee'+\frac{15309}{512}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{17901}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{39861}{256}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[4\cdots334]}{\frac{29565}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots400]}{\frac{1622025}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[4\cdots407]}{-\left(\frac{2565}{128}ee'-\frac{12825}{128}\gamma^2ee'-\frac{109035}{1024}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[4\cdots407]}{-\frac{12825}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{81087}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[5\cdots404]}{\left(\frac{17955}{256}ee'-\frac{89775}{256}\gamma^2ee'-\frac{763245}{2048}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[5\cdots404]}{+\frac{223155}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2215017}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[6\cdots309]}{\left(\frac{459}{256}ee'-\frac{4671}{256}\gamma^2ee'+\frac{5103}{1024}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[6\cdots309]}{+\frac{4347}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{186597}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[7\cdots379]}{\left(\frac{1785}{256}ee'-\frac{8085}{256}\gamma^2ee'-\frac{60795}{1024}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[7\cdots379]}{+\frac{25185}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{58521}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[8\cdots321]}{\left(\frac{9}{256}ee'-\frac{117}{256}\gamma^2ee'+\frac{45}{2048}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{417}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[8\cdots321]}{+\frac{11503}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[9\cdots337]}{-\left(\frac{99}{128}ee'-\frac{1683}{128}\gamma^2ee'+\frac{1809}{1024}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1089}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{909}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[10\cdots309]}{-\left(\frac{297}{128}ee'-\frac{4941}{128}\gamma^2ee'+\frac{1197}{512}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3861}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{17253}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[11\cdots313]}{-\frac{4185}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[11\cdots340]}{-\frac{1023}{128}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[14\cdots322]}{\frac{81}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[14\cdots383]}{\frac{1305}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[17\cdots380]}{\frac{77625}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[18\cdots391]}{\frac{3375}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[19\cdots97]}{+\left(\frac{315}{256}ee'-\frac{1575}{256}\gamma^2ee'-\frac{2835}{1024}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3915}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{21177}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[19\cdots219]}{-\frac{5625}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[20\cdots77]}{-\left(\frac{14175}{256}ee'-\frac{65205}{256}\gamma^2ee'-\frac{161595}{512}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{156735}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1975023}{4096}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+\underset{[20\cdots246]}{\frac{22815}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[21\cdots17]}{\left(\frac{9}{256}ee'-\frac{153}{256}\gamma^2ee'+\frac{27}{1024}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{36099}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\\
&\underset{[21\cdots82]}{+\left(\frac{45}{128}ee'-\frac{531}{128}\gamma^2ee'-\frac{765}{512}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3285}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{102555}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[22\cdots349]}{\frac{15}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[23\cdots365]}{-\frac{81}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[24\cdots423]}{-\frac{45}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[25\cdots363]}{-\frac{81}{8}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}}\;\underset{[26\cdots317]}{-\left(\frac{135}{64}ee'-\frac{1593}{64}\gamma^2ee'-\frac{2295}{256}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[26\cdots317]}{-\frac{6669}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{657855}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}}\;\underset{[26\cdots334]}{-\frac{3105}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdots386]}{\frac{4725}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}}
\end{aligned}
$$

[Cette portion du coefficient du terme (334) a disparu par suite de la 48ᵉ opération.......]

Ce coefficient du terme (334) se continue a la page suivante

(334)
Suite.

$$+\left(\frac{2025}{128}ee' - \frac{9315}{128}\gamma^2 ee' - \frac{31545}{512}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{27945}{512}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{392931}{4096}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[26 · 402]

$$-\frac{19845}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{567}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{405}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{27}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{81}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1215}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}$$

[27 · · · 399] [28 · · 316] [29 · · · 357] [29 · · · 376] [30 · · · 374] [31 · · · · 355]

$$+\left(\frac{3}{128}ee' - \frac{51}{128}\gamma^2 ee' + \frac{9}{512}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{99}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{2457}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{15}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[32 · 319] [32 · · · 334]

$$-\frac{3}{128}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{256}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1089}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{189}{512}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[32 · · · 344] [33 · · · 342] [34 · · · 316] [35 · · · 327] [35 · · · 334]

$$-\left(\frac{45}{128}ee' - \frac{225}{128}\gamma^2 ee' - \frac{405}{512}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{2745}{1024}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{1179}{512}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{567}{2048}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[35 · 388] [36 · · · 385]

$$+\frac{63}{1024}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{512}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1125}{1024}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{2079}{1024}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2}$$

[37 · · · 326] [38 · · · 324] [39 · · · 393] [40 · · · 338]

$$-\left(\frac{675}{128}ee' - \frac{8775}{128}\gamma^2 ee' + \frac{675}{128}e^3 e' - \frac{4275}{512}ee'^3\right)\frac{n'}{n}$$

[41 · 331]

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\Bigg\{ -\left(\frac{2025}{1024}ee' - \frac{42525}{1024}\gamma^2 ee' + \frac{2025}{2048}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{393255}{16384}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{7627125}{131072}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[41 · 331]

$$+\left(\frac{3375}{2048}ee' - \frac{50625}{2048}\gamma^2 ee' - \frac{23625}{8192}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{70875}{16384}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{10935675}{524288}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[41 · 334]

$$-\frac{590625}{4096}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{7875}{512}e^3 e'\frac{n'}{n} - \frac{165375}{4096}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{27825}{1024}ee'^3\frac{n'}{n}$$

[41 · · · · 410] [41 · · · · · · · · · · · · · · 412] [42 · · · 332]

$$-\frac{18375}{512}e^3 e'\frac{n'}{n} - \frac{49875}{4096}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{225}{128}ee' - \frac{2925}{128}\gamma^2 ee' + \frac{225}{128}e^3 e' + \frac{3375}{1024}ee'^3\right)\frac{n'}{n}$$

[42 · · · · · · · · · · · · · 409] [43 · 330]

$$-\left(\frac{2025}{1024}ee' - \frac{62775}{1024}\gamma^2 ee' - \frac{62775}{1024}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{669105}{16384}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{59651865}{131072}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{675}{512}ee'^3\frac{n'}{n}$$

[43 · 330] [45 · · 334]

$$-\left(\frac{10125}{512}ee' - \frac{151875}{512}\gamma^2 ee' - \frac{30375}{2048}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{587655}{4096}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{60915015}{65536}ee'\frac{n'^4}{n^4}$$

[46 · 2]

$$-\frac{75}{8}\gamma^4 ee' + \frac{75}{16}\gamma^2 e^3 e' - \frac{765}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} - \frac{31995}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} + \frac{3915}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}$$

[49 · · · · · · · · · 370] [52 · · · · · · · · · · · · · · 368] [52 · · · · · · · · · · · · · · 433]

$$-\frac{525}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} - \frac{4875}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} + \frac{10665}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}$$

[53 · · · · · · · · · · · · · 430] [54 · · · · · · · · · · · · · · 367]

$$\times \cos(h + g - h' - g')$$

Cette portion du coefficient du terme (334) a disparu par suite de la 48e opération · · · · · · · · · · · · · · ·]

(335)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{165}{128}ee'^2+\frac{1815}{128}\gamma^2ee'^2-\frac{495}{512}e^3e'^2\underset{[1\cdots\cdots330]}{-\frac{405}{512}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{1215}{2048}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[1\cdots334]}{-\frac{135}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\\
\underset{[2\cdots314]}{-\frac{1089}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[2\cdots341]}{-\frac{363}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots323]}{-\frac{477}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots384]}{+\frac{255}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[4\cdots311]}{-\frac{24327}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[4\cdots408]}{+\frac{2565}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[5\cdots407]}{-\frac{17955}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[6\cdots310]}{+\frac{1377}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[7\cdots383]}{-\frac{1785}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[8\cdots322]}{+\frac{27}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[9\cdots340]}{-\frac{99}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[10\cdots313]}{-\frac{297}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[12\cdots337]}{-\frac{297}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[13\cdots309]}{-\frac{891}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[15\cdots379]}{+\frac{4335}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[16\cdots404]}{+\frac{43605}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[19\cdots98]}{+\frac{765}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[20\cdots78]}{-\frac{34425}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[21\cdots18]}{+\frac{27}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[26\cdots318]}{-\frac{2385}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[26\cdots403]}{-\frac{2025}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[27\cdots402]}{+\frac{14175}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[28\cdots317]}{+\frac{135}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[32\cdots320]}{+\frac{33}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[34\cdots319]}{+\frac{9}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[35\cdots389]}{+\frac{45}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[36\cdots388]}{-\frac{315}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[41\cdots\cdots332]}{-\frac{11925}{1024}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{675}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots335]}{+\frac{37125}{16384}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[43\cdots\cdots31]}{+\frac{675}{128}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{6975}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[45\cdots\cdots330]}{+\frac{675}{512}ee'^2\frac{n'}{n}+\frac{108135}{4096}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[46\cdots3]}{-\frac{12375}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[48\cdots\cdots2]}{+\frac{3375}{128}ee'^2\frac{n'}{n}+\frac{1755}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(h+g-h'-g'+l')$$

(336)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{115}{64}ee'^3\right\}\cos(h+g-h'-g'+2l')$$

(337)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
\frac{33}{64}e^2-\frac{363}{64}\gamma^2e^2+\frac{7}{128}e^4+\frac{33}{32}e^2e'^2\underset{[2\cdots330]}{+\frac{435}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[2\cdots342]}{-\frac{3}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots326]}{-\frac{21}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots399]}{-\frac{5505}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[4\cdots316]}{+\frac{2313}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[4\cdots409]}{-\frac{4725}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[19\cdots103]}{+\frac{1125}{2048}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[21\cdots23]}{+\frac{9}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[26\cdots321]}{-\frac{567}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[26\cdots404]}{+\frac{23085}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[32\cdots309]}{-\frac{39}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[35\cdots379]}{+\frac{135}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[49\cdots330]}{+\frac{315}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots\cdots309]}{+\frac{225}{256}e^2\frac{n'}{n}+\frac{135}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots337]}{-\frac{7425}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots404]}{+\frac{64125}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
\underset{[48\cdots137]}{+\frac{105}{256}e^2e'^2}\underset{[49\cdot362]}{+\frac{45}{16}\gamma^2e^2}
\end{array}\right.$$

$$\times\cos(h+g-l-h'-g'-l')$$

(338)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{99}{64}e^2e' - \underset{[1\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,337]}{\frac{495}{256}e^2e'\frac{n'}{n}} + \underset{[41\,\cdot\,\cdot\,313]}{\frac{225}{256}e^2e'\frac{n'}{n}} + \underset{[42\,\cdot\,\cdot\,309]}{\frac{525}{256}e^2e'\frac{n'}{n}} + \underset{[46\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,135]}{\frac{2205}{1024}e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times \cos(h + g - l - h' - g' - 2l')$$

(339)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{1749}{512}e^2e'^2 - \underset{[48\,\cdot\,\cdot\,135]}{\frac{735}{256}e^2e'^2}\right\}\cos(h + g - l - h' - g' - 3l')$$

(340)*

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{33}{64}e^2e' - \frac{363}{64}\gamma^2e^2e' + \frac{7}{128}e^4e' + \underset{[1\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,337]}{\frac{495}{256}e^2e'\frac{n'}{n}} + \underset{[41\,\cdot\,\cdot\,310]}{\frac{675}{256}e^2e'\frac{n'}{n}} - \underset{[43\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,309]}{\frac{225}{256}e^2e'\frac{n'}{n}} - \underset{[46\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,137]}{\frac{315}{1024}e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times \cos(h + g - l - h' - g')$$

(341)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{363}{512}e^2e'^2\right\}\cos(h + g - l - h' - g' + l')$$

(342)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{1}{16}e^3 + \underset{[46\,\cdot\,\cdot\,139]}{\frac{45}{256}e^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(h + g - 2l - h' - g' - l')$$

(343)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{3}{16}e^3e' - \underset{[48\,\cdot\,\cdot\,139]}{\frac{15}{64}e^3e'}\right\}\cos(h + g - 2l - h' - g' - 2l')$$

(344)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{1}{16}e^3e'\right\}\cos(h + g - 2l - h' - g')$$

(345)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{21}{1024}e^4\right\}\cos(h + g - 3l - h' - g' - l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2^e^ opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (334), qui provient du terme (340) dans cette 2^e^ opération.

(346)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned} &\frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{15}{4}\gamma^4 - \frac{45}{4}\gamma^2e^2 + \frac{15}{4}\gamma^2e'^2 - \underset{[2\cdot\cdot351]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[2\cdot\cdot355]}{\frac{135}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[3\cdot\cdot367]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdot\cdot174]}{\frac{81}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} \\ &- \underset{[19\cdot\cdot175]}{\frac{45}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[20\cdot\cdot188]}{\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[21\cdot\cdot58]}{\frac{27}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[22\cdot330]}{\frac{15}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdot\cdot362]}{\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[29\cdot309]}{\frac{45}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[48\cdot\cdot45]}{\frac{45}{16}\gamma^2e'^2} \\ &+ \underset{[49\cdot321]}{\frac{45}{64}\gamma^2e^2} - \underset{[52\cdot\cdot346]}{\frac{135}{512}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[52\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot379]}{\frac{45}{16}\gamma^2\frac{n'}{n} + \frac{945}{256}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\times \cos(h + 3g + 3l - h' - g' - l')$$

(347) *

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{45}{8}\gamma^2e' - \frac{135}{4}\gamma^2e^2e' + \underset{[1\cdot\cdot\cdot346]}{\frac{135}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}} - \underset{[46\cdot\cdot\cdot45]}{\frac{135}{64}\gamma^2e'\frac{n'}{n}} - \underset{[52\cdot\cdot\cdot380]}{\frac{225}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}} + \underset{[54\cdot\quad379]}{\frac{45}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times \cos(h + 3g + 3l - h' - g' - 2l')$$

(348)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{795}{64}\gamma^2e'^2\right\}\cos(h + 3g + 3l - h' - g' - 3l')$$

(349)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{15}{8}\gamma^2e' - \underset{[1\cdot\cdot\cdot346]}{\frac{135}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}} - \underset{[46\cdot\cdot47]}{\frac{135}{64}\gamma^2e'\frac{n'}{n}} + \underset{[52\cdot\cdot383]}{\frac{45}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}} - \underset{[53\cdot\cdot379]}{\frac{105}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times \cos(h + 3g + 3l - h' - g')$$

(350)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{165}{64}\gamma^2e'^2 + \underset{[48\cdot\cdot47]}{\frac{45}{16}\gamma^2e'^2}\right\}\cos(h + 3g + 3l - h' - g' + l')$$

(351)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{45}{16}\gamma^2e - \underset{[46\cdot\cdot49]}{\frac{45}{16}\gamma^2e\frac{n'}{n}}\right\}\cos(h + 3g + 4l - h' - g' - l')$$

(352)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{135}{16}\gamma^2ee'\right\}\cos(h + 3g + 4l - h' - g' - 2l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3^e opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^2 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (370) qui provient du terme (347) dans cette 3^e opération.

(353)
$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{45}{16}\gamma^2 ee' + \underset{[48\cdot\cdot 49]}{\frac{15}{4}\gamma^2 ee'}\right\}\cos(h + 3g + 4l - h' - g')$$

(354)
$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{225}{64}\gamma^2 e^2\right\}\cos(h + 3g + 5l - h' - g' - l')$$

(355)
$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{135}{16}\gamma^2 e - \underset{[41\cdot\cdot\cdot 374]}{\frac{135}{64}\gamma^2 e\frac{n'}{n}}\right\}\cos(h + 3g + 2l - h' - g' - l')$$

(356)
$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{405}{16}\gamma^2 ee' + \underset{[49\cdot\cdot 317]}{\frac{45}{32}\gamma^2 ee'}\right\}\cos(h + 3g + 2l - h' - g' - 2l')$$

(357)
$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{135}{16}\gamma^2 ee' + \underset{[49\cdot 319]}{\frac{15}{32}\gamma^2 ee'}\right\}\cos(h + 3g + 2l - h' - g')$$

(358)
$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{855}{64}\gamma^2 e^2 - \underset{[49\cdot\cdot 309]}{\frac{135}{32}\gamma^2 e^2}\right\}\cos(h + 3g + l - h' - g' - l')$$

(359)*
$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{2565}{64}\gamma^2 e^2 e'\right\}\cos(h + 3g + l - h' - g' - 2l')$$

(360)
$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{525}{64}\gamma^2 e^3\right\}\cos(h + 3g - h' - g' - l')$$

(361)
$$+ m\,\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{525}{64}\gamma^2 e^3 e'\right\}\cos(h + 3g - h' - g')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 4^e opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (370), qui provient du terme (359) dans cette 4^e opération.

$$(362)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{15}{2}\gamma^4 + \frac{9}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 + \underset{[2\cdot\cdot 367]}{\frac{45}{16}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[2\cdot\cdot 374]}{\frac{9}{16}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[3\cdot\cdot 351]}{\frac{45}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[3\cdot\cdot 425]}{\frac{15}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&- \underset{[4\cdot\cdot\cdot 355]}{\frac{1215}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdot\cdot 430]}{\frac{675}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[21\cdot\cdot 44]}{\frac{9}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[21\cdot 175]}{\frac{9}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[23\cdot\cdot 330]}{\frac{135}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[25\cdot 330]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[26\cdot\cdot 346]}{\frac{1305}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&+ \underset{[26\cdot\cdot 420]}{\frac{855}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[29\cdot 309]}{\frac{63}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[48\cdot\cdot 61]}{\frac{135}{16}\gamma^2 e'^2} + \underset{[48\cdot 191]}{\frac{15}{16}\gamma^2 e'^2} - \underset{[49\cdot\cdot 337]}{\frac{165}{64}\gamma^2 e^2} - \underset{[52\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 309]}{\frac{63}{32}\gamma^2\frac{n'}{n} + \frac{459}{256}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&- \underset{[52\cdot\cdot 362]}{\frac{81}{256}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[52\cdot\cdot 420]}{\frac{135}{512}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(h - g - l - h' - g' - l')$$

$$(363)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{27}{4}\gamma^2 e' + \underset{[1\cdot\cdot 362]}{\frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} + \underset{[46\cdot\cdot\cdot 61]}{\frac{405}{64}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} + \underset{[46\cdot\cdot 189]}{\frac{315}{64}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} - \underset{[52\cdot\cdot 313]}{\frac{63}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} - \underset{[53\cdot\cdot 309]}{\frac{147}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(h - g - l - h' - g' - 2l')$$

$$(364)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{477}{32}\gamma^2 e'^2 - \underset{[48\cdot 189]}{\frac{105}{16}\gamma^2 e'^2}\right\}\cos(h - g - l - h' - g' - 3l')$$

$$(365)^{*}\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{9}{2}\gamma^2 e^2 e' - \underset{[1\cdot\cdot\cdot 362]}{\frac{27}{16}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} + \underset{[46\cdot\cdot\cdot 59]}{\frac{405}{64}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} - \underset{[46\cdot\cdot 191]}{\frac{45}{64}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} - \underset{[52\cdot\cdot 310]}{\frac{189}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} + \underset{[54\cdot\cdot 309]}{\frac{63}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(h - g - l - h' - g')$$

$$(366)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{99}{32}\gamma^2 e'^2 - \underset{[48\cdot\cdot 59]}{\frac{135}{16}\gamma^2 e'^2}\right\}\cos(h - g - l - h' - g' + l')$$

$$(367)\quad + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&- \frac{45}{8}\gamma^2 e + \frac{75}{4}\gamma^4 e - \frac{135}{32}\gamma^2 e^3 - \frac{45}{4}\gamma^2 e e'^2 - \underset{[2\cdot\cdot\cdot 362]}{\frac{189}{32}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdot\cdot 372]}{\frac{99}{32}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[3\cdot\cdot\cdot 346]}{\frac{645}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\\
&- \underset{[3\cdot\cdot\cdot 428]}{\frac{45}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[4\cdot\cdot\cdot 358]}{\frac{7695}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdot\cdot\cdot 420]}{\frac{2295}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[21\cdot\cdot 37]}{\frac{9}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[21\cdot\cdot 180]}{\frac{9}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[22\cdot\cdot 324]}{\frac{9}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.$$

Ce coefficient du terme (367) se continue à la page suivante.

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2^e^ opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^2 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (370) qui provient du terme (365) dans cette 2$^{\text{e}}$ opération.

(367) Suite.

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\underset{[23\cdots309]}{+\frac{189}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[24\cdots309]}{-\frac{477}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[25\cdots337]}{-\frac{99}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[26\cdots355]}{-\frac{5265}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[26\cdots425]}{-\frac{225}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[32\cdots374]}{+\frac{9}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[35\cdots351]}{+\frac{135}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[41\cdots367]}{+\frac{10125}{1024}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[41\cdots\cdots430]}{-\frac{1125}{128}\gamma^2 e\frac{n'}{n}-\frac{3375}{512}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[46\cdots\cdots63]}{-\frac{225}{32}\gamma^2 e\frac{n'}{n}-\frac{3375}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[46\cdots\cdots166]}{+\frac{315}{64}\gamma^2 e\frac{n'}{n}+\frac{3375}{512}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[48\cdots66]}{+\frac{225}{16}\gamma^2 ee'^2}
\underset{[48\cdots171]}{-\frac{15}{32}\gamma^2 ee'^2}
\underset{[52\cdots367]}{+\frac{405}{512}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[52\cdots430]}{-\frac{675}{1024}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.
$$

$$
\times\cos(h-g-h'-g'-l')
$$

(368)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{135}{8}\gamma^2 ee'
\underset{[1\cdots367]}{-\frac{1215}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}
\underset{[41\cdots431]}{-\frac{5625}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}
\underset{[43\cdots430]}{+\frac{1125}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}
\underset{[46\cdots66]}{-\frac{675}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[46\cdots167]}{+\frac{2205}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}
\underset{[47\cdots63]}{-\frac{675}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}
\underset{[48\cdots\cdots166]}{+\frac{15}{16}\gamma^2 ee'-\frac{2385}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\times\cos(h-g-h'-g'-2l')
$$

(369)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{2385}{64}\gamma^2 ee'^2
\underset{[48\cdots167]}{+\frac{105}{32}\gamma^2 ee'^2}
\underset{[49\cdots332]}{+\frac{3975}{256}\gamma^2 ee'^2}\right\}
$$

$$
\times\cos(h-g-h'-g'-3l')
$$

(370)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{45}{8}\gamma^2 ee'+\frac{75}{4}\gamma^4 ee'-\frac{135}{32}\gamma^2 e^3 e'
\underset{[1\cdots367]}{+\frac{1215}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}
\underset{[2\cdots365]}{-\frac{189}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[2\cdots373]}{-\frac{99}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[3\cdots347]}{+\frac{1935}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[3\cdots429]}{+\frac{45}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[4\cdots359]}{+\frac{23085}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[4\cdots423]}{+\frac{2295}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[5\cdots420]}{-\frac{16065}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[6\cdots358]}{-\frac{7695}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[7\cdots428]}{-\frac{315}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[8\cdots346]}{-\frac{645}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[9\cdots362]}{-\frac{567}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[10\cdots372]}{-\frac{297}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[21\cdots38]}{-\frac{27}{32}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[21\cdots183]}{-\frac{9}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[22\cdots324]}{-\frac{9}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[23\cdots313]}{-\frac{405}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[24\cdots310]}{-\frac{1431}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[25\cdots338]}{-\frac{297}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[26\cdots356]}{-\frac{15795}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[26\cdots427]}{+\frac{225}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[27\cdots425]}{-\frac{1575}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\underset{[28\cdots355]}{+\frac{5265}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right.
$$

Ce coefficient du terme (370) se continue a la page suivante.

(370) Suite.

$$
\begin{aligned}
+m'\frac{a^3}{a'^4}\Bigg\{ & -\underset{[29\cdot\cdot\cdot319]}{\frac{9}{16}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[32\cdot\cdot\cdot376]}{\frac{9}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[33\cdot\cdot\cdot374]}{\frac{27}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[35\cdot\cdot\cdot352]}{\frac{405}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[37\cdot\cdot\cdot351]}{\frac{135}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
& + \underset{[41\cdot\cdot\cdot\cdot370]}{\frac{10125}{1024}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot433]}{\frac{1125}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} + \frac{16875}{1024}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[42\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot430]}{\frac{2625}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} - \frac{22125}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
& - \underset{[46\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot64]}{\frac{675}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} - \frac{675}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[46\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot171]}{\frac{315}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} - \frac{21735}{1024}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\
& + \underset{[47\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot166]}{\frac{945}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n} - \frac{405}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[48\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot63]}{\frac{75}{8}\gamma^2 ee' - \frac{75}{2}\gamma^4 ee' + \frac{225}{8}\gamma^2 e^3 e' - \frac{2025}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}} \\
& + \underset{[48\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot63]}{\frac{242715}{1024}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[52\cdot\cdot\cdot370]}{\frac{135}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[52\cdot\cdot\cdot\cdot431]}{\frac{3375}{1024}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[54\cdot\cdot\cdot330]}{\frac{1485}{512}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[57\cdot\cdot\cdot\cdot367]}{\frac{27945}{256}\gamma^2 ee'\frac{n'^2}{n^2}} \Bigg\} \\
& \times\cos(h-g-h'-g')
\end{aligned}
$$

(371)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{495}{64}\gamma^2 ee'^2 + \underset{[48\cdot\cdot\cdot64]}{\frac{225}{16}\gamma^2 ee'^2} + \underset{[49\cdot\cdot335]}{\frac{825}{256}\gamma^2 ee'^2}\right\}\cos(h-g-h'-g'+l')
$$

(372)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{99}{32}\gamma^2 e^2 - \underset{[49\cdot309]}{\frac{75}{16}\gamma^2 e^2}\right\}\cos(h-g+l-h'-g'-l')
$$

(373)*

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{99}{32}\gamma^2 e^2 e'\right\}\cos(h-g+l-h'-g')
$$

(374)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{9}{8}\gamma^2 e - \underset{[41\cdot\cdot\cdot355]}{\frac{2025}{128}\gamma^2 e\frac{n'}{n}} + \underset{[46\cdot\cdot193]}{\frac{45}{64}\gamma^2 e\frac{n'}{n}}\right\}\cos(h-g-2l-h'-g'-l')
$$

(375)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{27}{8}\gamma^2 ee' - \underset{[48\cdot193]}{\frac{15}{16}\gamma^2 ee'}\right\}\cos(h-g-2l-h'-g'-2l')
$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 2^e^ opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (370) qui provient du terme (373) dans cette 2^e^ opération.

(376)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{9}{8}\gamma^2 e e'\right\}\cos(h - g - 2l - h' - g')$$

(377)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{27}{32}\gamma^2 e^2\right\}\cos(h - g - 3l - h' - g' - l')$$

(378)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{15}{8}\gamma^4\right\}\cos(h - 3g - 3l - h' - g' - l')$$

(379)

$$
+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{
\begin{aligned}
&\frac{5}{8} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{15}{4}e^2 - \frac{15}{4}e'^2 + \frac{15}{8}\gamma^4 + \frac{45}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{45}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{2955}{512}e^4 + \frac{45}{2}e^2 e'^2\\
&+ \frac{35}{128}\frac{a^2}{a'^2} - \underset{[1\cdot\cdot379]}{\frac{405}{32}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[1\cdot\cdot380]}{\frac{225}{16}e'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[1\cdot\cdot383]}{\frac{45}{16}e'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[2\cdot379]}{\frac{15}{16}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&- \underset{[2\cdot\cdots\cdots385]}{\left(\frac{15}{32} - \frac{135}{32}\gamma^2 + \frac{165}{64}e^2 - \frac{135}{64}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{105}{128}\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[2\cdot390]}{\frac{75}{256}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+ \underset{[2\cdot\cdots\cdots399]}{\left(\frac{45}{32} - \frac{405}{32}\gamma^2 - \frac{735}{64}e^2 - \frac{405}{64}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{315}{128}\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[2\cdot404]}{\frac{285}{256}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&- \underset{[3\cdot\cdots\cdots330]}{\left(\frac{15}{64} - \frac{195}{64}\gamma^2 + \frac{135}{128}e^2 - \frac{15}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{5}{32}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{1151}{768}\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[3\cdot379]}{\frac{15}{64}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&- \underset{[4\cdot\cdots\cdots316]}{\left(\frac{27}{64} - \frac{351}{64}\gamma^2 - \frac{99}{128}e^2 - \frac{27}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{27}{32}\frac{n'^3}{n^3} + \frac{339}{256}\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[4\cdot\cdot337]}{\frac{2673}{1024}\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[4\cdot\cdot379]}{\frac{1215}{64}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+ \underset{[4\cdot\cdot437]}{\frac{2565}{512}\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[5\cdot\cdot319]}{\frac{189}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[6\cdot\cdot317]}{\frac{81}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[7\cdot\cdot\cdot334]}{\frac{105}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[8\cdot\cdot331]}{\frac{45}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[9\cdot\cdot388]}{\frac{45}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[9\cdot\cdot400]}{\frac{675}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&- \underset{[10\cdot\cdot386]}{\frac{225}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[10\cdot\cdot402]}{\frac{135}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[11\cdot385]}{\frac{465}{64}\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[11\cdot399]}{\frac{1395}{64}\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[14\cdot330]}{\frac{45}{256}\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[17\cdot330]}{\frac{345}{256}\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[18\cdot316]}{\frac{27}{256}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+ \underset{[26\cdot\cdots\cdots309]}{\left(\frac{45}{128} - \frac{405}{123}\gamma^2 - \frac{81}{128}e^2 - \frac{45}{256}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{9}{64}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{23877}{1024}\frac{n'^4}{n^4}} - \underset{[26\cdot\cdot379]}{\frac{15525}{2048}\frac{n'^4}{n^4}} + \underset{[26\cdot438]}{\frac{7965}{512}\frac{n'^4}{n^4}}\\
&+ \underset{[27\cdot\cdot313]}{\frac{315}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[28\cdot\cdot310]}{\frac{135}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[29\cdot420]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdot\cdot390]}{\frac{75}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[32\cdot\cdot404]}{\frac{285}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[35\cdot\cdot337]}{\frac{99}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&- \underset{[41\cdot\cdots\cdots321]}{\frac{135}{256}e^2\frac{n'}{n} - \frac{405}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[48\cdot\cdot88]}{\frac{225}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[48\cdot\cdot240]}{\frac{345}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[52\cdot\cdots\cdots346]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'}{n} - \frac{135}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\times\cos(3h + 3g + 3l - 3h' - 3g' - 3l')$$

(380)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{25}{8}e' - \frac{75}{8}\gamma^2 e' - \frac{75}{4}e^2 e' - \frac{55}{4}e'^3 + \underset{[1\cdots\cdots379]}{\left(\frac{45}{16}e' - \frac{675}{32}\gamma^2 e' - \frac{1755}{128}e^2 e'\right)\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[2\cdots\cdots386]}{-\frac{75}{32}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{855}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[2\cdots\cdots400]}{+\frac{225}{32}e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[3\cdots\cdots334]}{-\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{105}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[4\cdots\cdots317]}{-\frac{81}{64}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{2187}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[5\cdots\cdots316]}{-\frac{189}{128}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{2349}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[7\cdots\cdots330]}{-\frac{105}{128}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1095}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[9\cdots\cdots385]}{-\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{495}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[10\cdots\cdots399]}{+\frac{135}{64}e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1485}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[26\cdots\cdots310]}{+\frac{135}{128}e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{405}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[27\cdots\cdots309]}{+\frac{315}{256}e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{297}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[41\cdots322]}{-\frac{405}{256}e^2 e'\frac{n'}{n}} \underset{[42\cdots321]}{-\frac{315}{256}e^2 e'\frac{n'}{n}} \underset{[46\cdots88]}{-\frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}} \underset{[46\cdots247]}{-\frac{7245}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[52\cdots347]}{+\frac{135}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} \underset{[53\cdots346]}{+\frac{105}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} \underset{[57\cdots379]}{-\frac{11025}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\times\cos(3h + 3g + 3l - 3h' - 3g' - 4l')
$$

(381)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{635}{64}e'^2 - \frac{1905}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{1905}{32}e^2 e'^2 \underset{[1\cdots\cdots379]}{+\frac{135}{64}e'^2\frac{n'}{n} + \frac{405}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[1\cdots380]}{+\frac{225}{16}e'^2\frac{n'}{n}} \underset{[2\cdots387]}{-\frac{1905}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[2\cdots401]}{+\frac{5715}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[3\cdots332]}{-\frac{795}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[4\cdots318]}{-\frac{1431}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[5\cdots317]}{-\frac{567}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[7\cdots331]}{-\frac{315}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[9\cdots386]}{-\frac{225}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[10\cdots400]}{+\frac{675}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[12\cdots385]}{-\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[13\cdots399]}{+\frac{405}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[15\cdots330]}{-\frac{255}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[16\cdots316]}{-\frac{459}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[26\cdots311]}{+\frac{2385}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[27\cdots310]}{+\frac{945}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}} \underset{[48\cdots237]}{+\frac{2415}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\times\cos(3h + 3g + 3l - 3h' - 3g' - 5l')
$$

(382)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{815}{32}e'^3\right\}\cos(3h + 3g + 3l - 3h' - 3g' - 6l')
$$

$$
(383)^{*}\qquad +m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&-\frac{5}{8}e'+\frac{15}{8}\gamma^2e'+\frac{15}{4}e^2e'+\frac{25}{32}e'^3-\frac{45}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{2955}{512}e^4e'\\
&\underset{[1\cdots379]}{-\left(\frac{45}{16}e'-\frac{675}{32}\gamma^2e'-\frac{1755}{128}e^2e'\right)\frac{n'}{n}}\underset{[2\cdots388]}{+\left(\frac{15}{32}e'+\frac{165}{64}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{855}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[2\cdots402]}{-\left(\frac{45}{32}e'-\frac{735}{64}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[3\cdots334]}{-\frac{15}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{215}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[4\cdots319]}{-\frac{27}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{459}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[6\cdots316]}{+\frac{27}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[8\cdots330]}{+\frac{15}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{695}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[9\cdots399]}{+\frac{135}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1485}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\
&\underset{[10\cdots385]}{-\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{495}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[26\cdots313]}{+\frac{45}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{261}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[28\cdots309]}{-\frac{45}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{117}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[41\cdots324]}{-\frac{135}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[43\cdots321]}{+\frac{135}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[46\cdots92]}{-\frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[46\cdots240]}{+\frac{1035}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[52\cdots349]}{+\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[54\cdots346]}{-\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\underset{[57\cdots379]}{+\frac{11025}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\times\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-2l')
$$

$$
(384)\qquad +m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\frac{5}{64}e'^2-\frac{15}{64}\gamma^2e'^2-\frac{15}{32}e^2e'^2\underset{[1\cdots379]}{-\frac{135}{64}e'^2\frac{n'}{n}+\frac{405}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[1\cdots383]}{+\frac{45}{16}e'^2\frac{n'}{n}}\underset{[2\cdots389]}{-\frac{15}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[2\cdots403]}{+\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots335]}{-\frac{165}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[4\cdots320]}{-\frac{297}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[6\cdots319]}{+\frac{27}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[8\cdots334]}{+\frac{15}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[9\cdots402]}{-\frac{135}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[10\cdots388]}{+\frac{45}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[12\cdots399]}{+\frac{405}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[13\cdots385]}{-\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[26\cdots314]}{+\frac{495}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[28\cdots313]}{-\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[46\cdots93]}{+\frac{2025}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\
&\underset{[45\cdots92]}{+\frac{225}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\times\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-l')
$$

$$
(385)\qquad +m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{15}{16}e-\frac{45}{16}\gamma^2e-\frac{285}{64}e^3-\frac{45}{8}ee'^2\underset{[1\cdots386]}{-\frac{4275}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\underset{[1\cdots388]}{-\frac{855}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\\
&\underset{[2\cdots379]}{+\frac{255}{64}e\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[2\cdots390]}{-\frac{75}{64}e\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots309]}{+\frac{93}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{25}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[4\cdots321]}{-\frac{81}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right.
$$

Cette portion du coëfficient du terme (385) a disparu par suite de la 19e opération.

Ce coefficient du terme (385) se continue a la page suivante.

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3e opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^2 ou e^4 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (334) qui provient du terme (383) dans cette 3e opération.

(385) Suite.

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&\underset{[20\cdots\cdots16]}{-\frac{45}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{256}e\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[21\cdots\cdots76]}{+\frac{63}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{128}e\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[35\cdots\cdots330]}{-\frac{45}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{45}{256}e\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[41\cdots326]}{-\frac{315}{512}e^3\frac{n'}{n}}\\&\underset{[41\cdots447]}{+\frac{24075}{2048}e\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[46\cdots215]}{-\frac{4815}{512}e\frac{n'^3}{n^3}}\underset{[52\cdots351]}{+\frac{135}{64}\gamma^2e\frac{n'}{n}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')$$

(386)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&\frac{75}{16}ee'-\frac{225}{16}\gamma^2ee'-\frac{1425}{64}e^3e'\underset{[1\cdots385]}{+\frac{855}{128}ee'\frac{n'}{n}}\underset{[2\cdots380]}{+\frac{1275}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[2\cdots391]}{-\frac{375}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots310]}{+\frac{279}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&\underset{[4\cdots322]}{-\frac{243}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[5\cdots321]}{-\frac{567}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[7\cdots309]}{+\frac{651}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[9\cdots390]}{-\frac{225}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[10\cdots379]}{+\frac{765}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[20\cdots17]}{-\frac{135}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&\underset{[21\cdots77]}{+\frac{441}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[26\cdots317]}{-\frac{27}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[32\cdots400]}{+\frac{225}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[35\cdots331]}{-\frac{135}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[36\cdots330]}{-\frac{315}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots386]}{-\frac{16875}{2048}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&\underset{[48\cdots215]}{+\frac{1065}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-4l')$$

(387)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{1905}{128}ee'^2\underset{[1\cdots385]}{+\frac{2565}{512}ee'^2\frac{n'}{n}}\underset{[1\cdots386]}{+\frac{4275}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\underset{[46\cdots98]}{-\frac{765}{64}ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-5l')$$

(388)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&-\frac{15}{16}ee'+\frac{45}{16}\gamma^2ee'+\frac{285}{64}e^3e'\underset{[1\cdots385]}{-\frac{855}{128}ee'\frac{n'}{n}}\underset{[2\cdots383]}{-\frac{255}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[2\cdots393]}{+\frac{75}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[3\cdots313]}{+\frac{93}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&\underset{[4\cdots324]}{-\frac{81}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[6\cdots321]}{+\frac{81}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[8\cdots309]}{-\frac{93}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[9\cdots379]}{+\frac{765}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[10\cdots390]}{-\frac{225}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[20\cdots20]}{-\frac{135}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&\underset{[21\cdots82]}{-\frac{63}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[26\cdots319]}{-\frac{9}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[32\cdots402]}{-\frac{45}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[35\cdots334]}{-\frac{45}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[37\cdots330]}{+\frac{45}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\underset{[41\cdots388]}{+\frac{3375}{2048}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-2l')$$

(389)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{15}{128}ee'^2-\underset{[1\cdots385]}{\frac{2565}{512}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots388]}{\frac{855}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-l')$$

(390)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&\frac{75}{64}e^2-\frac{225}{64}\gamma^2e^2-\frac{675}{128}e^4-\frac{225}{32}e^2e'^2+\underset{[2\cdots385]}{\frac{1785}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots395]}{\frac{135}{64}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdots316]}{\frac{51}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[4\cdots326]}{\frac{189}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[20\cdots23]}{\frac{135}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots321]}{\frac{27}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots379]}{\frac{75}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[35\cdots309]}{\frac{117}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[39\cdots330]}{\frac{225}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots390]}{\frac{16875}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[48\cdots104]}{\frac{2625}{256}e^2e'^2}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+5l-3h'-3g'-3l')$$

(391)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{375}{64}e^2e'+\underset{[1\cdots390]}{\frac{2925}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[46\cdots104]}{\frac{7875}{1024}e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+5l-3h'-3g'-4l')$$

(392)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{9525}{512}e^2e'^2\right\}\cos(3h+3g+5l-3h'-3g'-5l')$$

(393)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{75}{64}e^2e'-\underset{[1\cdots390]}{\frac{2925}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[46\cdots106]}{\frac{1125}{1024}e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+5l-3h'-3g'-2l')$$

(394)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{75}{512}e^2e'^2-\underset{[48\cdots106]}{\frac{375}{256}e^2e'^2}\right\}\cos(3h+3g+5l-3h'-3g'-l')$$

(395)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{45}{32}e^3-\underset{[46\cdots108]}{\frac{405}{128}e^3\frac{n'}{n}}\right\}\cos(3h+3g+6l-3h'-3g'-3l')$$

(396)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{225}{32}e^3e'\right\}\cos(3h+3g+6l-3h'-3g'-4l')$$

(397)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{45}{32}e^3e'+\underset{[48\cdot\ 108]}{\frac{135}{32}e^3e'}\right\}\cos(3h+3g+6l-3h'-3g'-2l')$$

(398)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{1715}{1024}e^4\right\}\cos(3h+3g+7l-3h'-3g'-3l')$$

(399)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}-\frac{45}{16}e+\frac{135}{16}\gamma^2e+\frac{165}{32}e^3+\frac{135}{8}ee'^2+\underset{[1\cdots 400]}{\frac{3375}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[1\cdots 402]}{\frac{675}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots 379]}{\frac{135}{64}e\frac{n'^2}{n^2}}\\
-\underset{[2\cdots 404]}{\frac{285}{64}e\frac{n'^2}{n^2}}+\frac{33}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\underset{[3\cdots\cdots 337]}{\frac{11}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}+\frac{243}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\underset{[4\cdots\cdots 309]}{\frac{405}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}-\frac{15}{256}e\frac{n'^2}{n^2}-\underset{[19\cdots\cdots 16]}{\frac{45}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}}\end{array}\right\}\\
\\
-\frac{45}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\underset{[21\cdots\cdots 125]}{\frac{45}{256}e\frac{n'^3}{n^3}}-\frac{135}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\underset{[26\cdots\cdots 330]}{\frac{135}{128}e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[41\cdots 316]}{\frac{5445}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[42\cdots 319]}{\frac{105}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots 317]}{\frac{135}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\\
+\underset{[46\cdots 76]}{\frac{315}{512}e\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[46\cdots 243]}{\frac{3015}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[52\cdots 355]}{\frac{405}{64}\gamma^2e\frac{n'}{n}}
\end{array}\right\}$$

Cette portion du coefficient du terme (399) a disparu par suite de la 20e opération.

$$\times\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$$

(400)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
-\frac{225}{16}ee'+\frac{675}{16}\gamma^2ee'+\frac{825}{32}e^3e'-\underset{[1\cdots 399]}{\frac{675}{128}ee'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots 380]}{\frac{675}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots 405]}{\frac{1425}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots 8]}{\frac{99}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
+\underset{[4\cdots 310]}{\frac{729}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[5\cdots 309]}{\frac{1701}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdots 337]}{\frac{231}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots 379]}{\frac{405}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots 404]}{\frac{855}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[19\cdots 20]}{\frac{45}{512}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
-\underset{[21\cdots 126]}{\frac{315}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots 331]}{\frac{405}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[27\cdots 330]}{\frac{945}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[32\cdots 386]}{\frac{75}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots\cdots 317]}{\frac{135}{128}ee'\frac{n'}{n}-\frac{2295}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\
+\underset{[41\cdots 400]}{\frac{50625}{2048}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[48\cdots 243]}{\frac{1005}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-4l')$$

(401)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{5715}{128}ee'^2-\underset{[1\cdots399]}{\frac{2025}{512}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots400]}{\frac{3375}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots318]}{\frac{2385}{1024}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[42\cdots317]}{\frac{315}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[46\cdots78]}{\frac{2295}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-5l')$$

(402)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&\frac{45}{16}ee'-\frac{135}{16}\gamma^2ee'-\frac{165}{32}e^3e'+\underset{[1\cdots399]}{\frac{675}{128}ee'\frac{n'}{n}}+\underset{[2\cdots383]}{\frac{135}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots407]}{\frac{285}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots340]}{\frac{33}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[4\cdots313]}{\frac{243}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[6\cdots309]}{\frac{243}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[8\cdots337]}{\frac{33}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[9\cdots404]}{\frac{855}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[10\cdots379]}{\frac{405}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[19\cdots17]}{\frac{45}{512}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[21\cdots130]}{\frac{45}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdots334]}{\frac{135}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[28\cdots330]}{\frac{135}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots388]}{\frac{15}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots\cdots\cdots319]}{\frac{45}{128}ee'\frac{n'}{n}+\frac{1215}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[41\cdots402]}{\frac{10125}{2048}ee'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[48\cdots76]}{\frac{105}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-2l')$$

(403)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{45}{128}ee'^2+\underset{[1\cdots399]}{\frac{2025}{512}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[1\cdots402]}{\frac{675}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots320]}{\frac{495}{1024}ee'^2\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots319]}{\frac{45}{128}ee'^2\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-l')$$

(404)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&\frac{285}{64}e^2-\frac{855}{64}\gamma^2e^2-\frac{325}{128}e^4-\frac{855}{32}e^2e'^2+\underset{[2\cdots399]}{\frac{2715}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdots409]}{\frac{525}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots342]}{\frac{3}{64}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[4\cdots330]}{\frac{1575}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[19\cdots23]}{\frac{45}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[21\cdots134]}{\frac{63}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots337]}{\frac{693}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[32\cdots379]}{\frac{15}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots\cdots\cdots309]}{\frac{495}{256}e^2\frac{n'}{n}+\frac{945}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[41\cdots337]}{\frac{7425}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots404]}{\frac{64125}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[49\cdots420]}{\frac{75}{32}\gamma^2e^2}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+l-3h'-3g'-3l')$$

(405)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{1425}{64}e^2e'-\underset{[1\cdots403]}{\frac{855}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[41\cdots310]}{\frac{1485}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[42\cdots309]}{\frac{1155}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+l-3h'-3g'-4l')$$

(406)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{36195}{512}e^2e'^2\right\}\cos(3h+3g+l-3h'-3g'-5l')$$

(407)*

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&-\frac{285}{64}e^2e'+\frac{855}{64}\gamma^2e^2e'+\frac{325}{128}e^4e'+\underset{[1\cdots 404]}{\frac{855}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[2\cdots 402]}{\frac{2715}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots 412]}{\frac{525}{128}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[3\cdots 344]}{\frac{3}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots 313]}{\frac{495}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[43\cdots 309]}{\frac{495}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g+l-3h'-3g'-2l')$$

(408)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{285}{512}e^2e'^2\right\}\cos(3h+3g+l-3h'-3g'-l')$$

(409)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&-\frac{175}{64}e^3+\frac{525}{64}\gamma^2e^3+\frac{525}{32}e^3e'^2-\underset{[2\cdots 404]}{\frac{3095}{256}e^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[2\cdots 414]}{\frac{375}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[3\cdots 345]}{\frac{21}{1024}e^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots 337]}{\frac{2835}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[19\cdots 28]}{\frac{5}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[20\cdots 16]}{\frac{735}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[21\cdots 139]}{\frac{9}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26.\ 342]}{\frac{3}{32}e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[38\cdots 379]}{\frac{5}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[40\cdots 309]}{\frac{987}{1024}e^3\frac{n'^2}{n^2}}\\&-\underset{[41\cdots\cdots\cdots 330]}{\frac{675}{512}e^3\frac{n'}{n}-\frac{6075}{2048}e^3\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots 409]}{\frac{118125}{8192}e^3\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdots 430]}{\frac{375}{64}\gamma^2e^3}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g-3h'-3g'-3l')$$

(410)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{875}{64}e^3e'+\underset{[1\cdots 409]}{\frac{4725}{512}e^3e'\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots 331]}{\frac{2025}{512}e^3e'\frac{n'}{n}}-\underset{[42\cdots 330]}{\frac{1575}{512}e^3e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+3g-3h'-3g'-4l')$$

(411)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{22225}{512}e^3e'^2\right\}\cos(3h+3g-3h'-3g'-5l')$$

(412)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{175}{64}e^3e'-\underset{[1\cdots 409]}{\frac{4725}{512}e^3e'\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots 334]}{\frac{675}{512}e^3e'\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots 330]}{\frac{675}{512}e^3e'\frac{n'}{n}}\right\}.$$

$$\times\cos(3h+3g-3h'-3g'-2l')$$

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 4ᵉ opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (334) qui provient du terme (407) dans cette 4ᵉ opération.

(413)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{175}{512}e^3e'^2\right\}\cos(3h+3g-3h'-3g'-l')$$

(414)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{375}{1024}e^4\right\}\cos(3h+3g-l-3h'-3g'-3l')$$

(415)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\underset{[3\cdot\cdot355]}{\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdot\cdot351]}{\frac{405}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[19\cdot\cdot58]}{\frac{135}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[20\cdot\cdot44]}{\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdot\cdot346]}{\frac{405}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[29\cdot\cdot379]}{\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[49\cdot390]}{\frac{375}{64}\gamma^2e^2}\right\}$$

$$\times\cos(3h+5g+5l-3h'-3g'-3l')$$

(416)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\underset{[44\cdot\cdot351]}{\frac{675}{128}\gamma^2e\frac{n'}{n}}\right\}\cos(3h+5g+4l-3h'-3g'-3l')$$

(417)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\underset{[49\cdot\cdot386]}{\frac{375}{32}\gamma^2ee'}\right\}\cos(3h+5g+4l-3h'-3g'-4l')$$

(418)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\underset{[49\cdot388]}{\frac{75}{32}\gamma^2ee'}\right\}\cos(3h+5g+4l-3h'-3g'-2l')$$

(419)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\underset{[49\cdot379]}{\frac{75}{8}\gamma^2e^2}\right\}\cos(3h+5g+3l-3h'-3g'-3l')$$

(420)

$$+m'\frac{a}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{15}{4}\gamma^4+\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{45}{4}\gamma^2e'^2+\underset{[2\cdot\cdot425]}{\frac{15}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[2\cdot\cdot430]}{\frac{75}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[3\cdot\cdot374]}{\frac{9}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdot\cdot367]}{\frac{405}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}\\+\underset{[19\cdot\cdot44]}{\frac{45}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[20\cdot\cdot58]}{\frac{405}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[21\cdot188]}{\frac{9}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[24\cdot330]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdot\cdot362]}{\frac{405}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[29\cdot\cdot379]}{\frac{405}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[48\cdot\cdot176]}{\frac{105}{16}\gamma^2e'^2}\\-\underset{[49\cdot404]}{\frac{1425}{64}\gamma^2e^2}-\underset{[52\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot309]}{\frac{9}{8}\gamma^2\frac{n'}{n}+\frac{135}{256}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdot\cdot362]}{\frac{81}{256}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[52\cdot\cdot420]}{\frac{135}{512}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}\end{array}\right\}$$

$$\times\cos(3h+g+l-3h'-3g'-3l')$$

(421)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{75}{8}\gamma^2e'+\underset{[1\cdot\cdot\cdot420]}{\frac{225}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[46\cdot\cdot\cdot176]}{\frac{315}{64}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[52\cdot\cdot310]}{\frac{27}{8}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[53\cdot\cdot309]}{\frac{21}{8}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+g+l-3h'-3g'-4l')$$

(422)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{1905}{64}\gamma^2 e'^2\right\}\cos(3h+g+l-3h'-3g'-5l')$$

(423) *

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{15}{8}\gamma^2 e' - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 e' - \underset{[1\cdots 420]}{\frac{225}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} - \underset{[46\cdots 178]}{\frac{45}{64}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} - \underset{[52\cdot 313]}{\frac{9}{8}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}} + \underset{[54\cdot 309]}{\frac{9}{8}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}}\right\}$$

$$\times\cos(3h+g+l-3h'-3g'-2l')$$

(424)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{15}{64}\gamma^2 e'^2 + \underset{[48\cdot 178]}{\frac{15}{16}\gamma^2 e'^2}\right\}\cos(3h+g+l-3h'-3g'-l')$$

(425)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{15}{16}\gamma^2 e + \underset{[46\cdots 180]}{\frac{45}{64}\gamma^2 e\frac{n'}{n}}\right\}\cos(3h+g+2l-3h'-3g'-3l')$$

(426)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{75}{16}\gamma^2 ee' + \underset{[49\cdots 400]}{\frac{1125}{32}\gamma^2 ee'}\right\}\cos(3h+g+2l-3h'-3g'-4l')$$

(427)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{15}{16}\gamma^2 ee' - \underset{[48\cdot 180]}{\frac{15}{16}\gamma^2 ee'} - \underset{[49\cdots 402]}{\frac{225}{32}\gamma^2 ee'}\right\}\cos(3h+g+2l-3h'-3g'-2l')$$

(428)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{45}{64}\gamma^2 e^2 + \underset{[49\cdot 379]}{\frac{225}{32}\gamma^2 e^2}\right\}\cos(3h+g+3l-3h'-3g'-3l')$$

(429) **

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{45}{64}\gamma^2 e^2 e'\right\}\cos(3h+g+3l-3h'-3g'-2l')$$

(430)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l} -\frac{75}{16}\gamma^2 e + \frac{75}{8}\gamma^4 e - \frac{225}{64}\gamma^2 e^3 + \frac{225}{8}\gamma^2 ee'^2 - \underset{[2\cdots 420]}{\frac{675}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[2\cdots 435]}{\frac{165}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[\;\cdots 377]}{\frac{27}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} \\ -\underset{[4\cdots 362]}{\frac{729}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[19\cdots 49]}{\frac{45}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[20\cdots 37]}{\frac{405}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[21\cdots 193]}{\frac{9}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[22\cdots 379]}{\frac{195}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[24\cdots 404]}{\frac{2565}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}} \end{array}\right.$$

Ce coefficient du terme (430) se continue à la page suivante.

---

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 4^e^ opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e^2 en facteur, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (370) qui provient du terme (423) dans cette 4^e^ opération.

** On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3^e^ opération, afin de pouvoir calculer complétement la portion du coefficient du terme (370) qui provient du terme (429) dans cette 3^e^ opération.

(430) Suite.

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&-\underset{[24\cdot\cdot337]}{\frac{99}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[25\cdot\cdot309]}{\frac{81}{64}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[26\cdot\cdot374]}{\frac{27}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[32\cdots425]}{\frac{15}{128}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[41\cdots\cdots\cdots367]}{\frac{675}{64}\gamma^2 e\frac{n'}{n}-\frac{2025}{256}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\\&+\underset{[41\cdots\cdot430]}{\frac{16875}{2048}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[46\cdots\cdots\cdots\cdots166]}{\frac{675}{64}\gamma^2 e\frac{n'}{n}-\frac{24435}{512}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[46\cdots273]}{\frac{3375}{256}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[48\cdot\cdot167]}{\frac{735}{32}\gamma^2 ee'^2}+\underset{[49\cdot\cdot409]}{\frac{2625}{128}\gamma^2 e^3}\\&-\underset{[52\cdots367]}{\frac{405}{512}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots430]}{\frac{675}{1024}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+g-3h'-3g'-3l')$$

(431)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&-\frac{375}{16}\gamma^2 ee'-\underset{[1\cdots430]}{\frac{675}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdots368]}{\frac{2025}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}-\underset{[42\cdots367]}{\frac{1575}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}-\underset{[46\cdots167]}{\frac{4725}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}\\&-\underset{[47\cdots166]}{\frac{2025}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}+\underset{[48\cdots273]}{\frac{1125}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+g-3h'-3g'-4l')$$

(432)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{9525}{128}\gamma^2 ee'^2\right\}\cos(3h+g-3h'-3g'-5l')$$

(433)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{aligned}&\frac{75}{16}\gamma^2 ee'+\underset{[1\cdots430]}{\frac{675}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}-\underset{[41\cdot\cdot370]}{\frac{675}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots367]}{\frac{675}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}+\underset{[46\cdots171]}{\frac{675}{128}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}\\&+\underset{[48\cdots\cdots\cdots\cdots166]}{\frac{105}{16}\gamma^2 ee'+\frac{2475}{64}\gamma^2 ee'\frac{n'}{n}}\end{aligned}\right\}$$

$$\times\cos(3h+g-3h'-3g'-2l')$$

(434)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{75}{128}\gamma^2 ee'^2-\underset{[48\cdot\cdot171]}{\frac{105}{32}\gamma^2 ee'^2}\right\}\cos(3h+g-3h'-3g'-l')$$

(435)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{165}{64}\gamma^2 e^2\right\}\cos(3h+g-l-3h'-3g'-3l')$$

(436)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\frac{15}{8}\gamma^4\right\}\cos(3h-g-l-3h'-3g'-3l')$$

(437)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\underset{[49\cdot\ 430]}{\frac{75}{16}\gamma^4 e+\frac{375}{32}\gamma^4 e}\right\}\cos(3h-g-3h'-3g'-3l')$$

(438)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
\frac{63}{128}\frac{a^2}{a'^2}+\underset{[3\cdot\cdot\ 337]}{\frac{33}{1024}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[3\cdots\cdots\cdots\cdots 399]}{\left(\frac{45}{64}-\frac{225}{64}\gamma^2-\frac{645}{128}e^2-\frac{765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{15}{32}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{1175}{256}\frac{n'^4}{n^4}}\\[2ex]
-\underset{[4\cdot\cdot\ 321]}{\frac{729}{1024}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots\cdots\cdots\cdots 385]}{\left(\frac{135}{64}-\frac{675}{64}\gamma^2-\frac{225}{128}e^2-\frac{2295}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{135}{32}\frac{n'^3}{n^3}+\frac{10677}{512}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[5\cdot\cdot\cdot\ 388]}{\frac{945}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\[2ex]
-\underset{[6\cdot\cdot\cdot 386]}{\frac{675}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[7\cdot\ \cdot\ 402]}{\frac{315}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[8\cdot\ \cdot\cdot 400]}{\frac{225}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[14\cdot 399]}{\frac{135}{256}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[17\cdot 316]}{\frac{69}{256}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[18\cdot 330]}{\frac{135}{256}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdot\ 309]}{\frac{243}{2048}\frac{n'^4}{n^4}}\\[2ex]
-\underset{[26\cdots\cdots\cdots\cdots 379]}{\left(\frac{135}{128}-\frac{675}{128}\gamma^2-\frac{1215}{128}e^2-\frac{2295}{256}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{64}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{4779}{512}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[27\cdot\cdot\ 383]}{\frac{945}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\[2ex]
+\underset{[28\cdot\cdot\ 380]}{\frac{675}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[35\cdot\cdot 404]}{\frac{855}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[41\cdots\cdots\cdots 390]}{\frac{1125}{256}e^2\frac{n'}{n}+\frac{3375}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[48\cdot\ \cdot\ 223]}{\frac{1575}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right.$$

$$\times\cos(5h+5g+5l-5h'-5g'-5l')$$

(439)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
-\underset{[3\cdots\cdots\cdots 400]}{\frac{225}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1875}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[4\cdots\cdots\cdots 386]}{\frac{675}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{18495}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}+\underset{[5\cdots\cdots\cdots 385]}{\frac{945}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{11745}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\[2ex]
-\underset{[7\cdots\cdots\cdots 399]}{\frac{315}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3285}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[26\cdots\cdots\cdots 380]}{\frac{675}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3105}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}-\underset{[27\cdots\cdots\cdots 379]}{\frac{945}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{4455}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}\\[2ex]
+\underset{[41\cdot\ \cdot\ \cdot\ 391]}{\frac{5625}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[42\cdot\ \cdot\ \cdot\ 390]}{\frac{2625}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[46\cdot\ \cdot\ 223]}{\frac{4725}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}
\end{array}\right.$$

$$\times\cos(5h+5g+5l-5h'-5g'-6l')$$

(440)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\begin{array}{l}
-\underset{[3\cdot\ \cdot\ \cdot\ 401]}{\frac{5715}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[4\cdot\ \cdot\ \cdot\ 387]}{\frac{17145}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[5\cdot\ \cdot\ \cdot\ 386]}{\frac{4725}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[7\cdot\ \cdot\ \cdot\ 400]}{\frac{1575}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[15\cdot\ \cdot\ 399]}{\frac{765}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[16\cdot\ \cdot\ 385]}{\frac{2295}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}\\[2ex]
-\underset{[26\cdot\ \cdot\ \cdot\ 381]}{\frac{17145}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[27\ \ \cdot\cdot 380]}{\frac{4725}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}
\end{array}\right.$$

$$\times\cos(5h+5g+5l-5h'-5g'-7l')$$

$$
\begin{aligned}
&(441)\\
&+m'\frac{a^5}{a'^6}\left\{\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{915}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\cdots402]}\underbrace{-\frac{135}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9855}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\cdots388]}\underbrace{-\frac{135}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{945}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[6\cdots385]}\\
&\underbrace{+\frac{45}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2085}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[8\cdots399]}\underbrace{+\frac{135}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{945}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[26\cdots383]}\underbrace{+\frac{135}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1755}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[28\cdots379]}\underbrace{-\frac{1125}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}_{[41\cdots393]}\\
&\underbrace{-\frac{1125}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}_{[43\cdots390]}\underbrace{+\frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}}_{[46\cdots225]}
\end{aligned}\right\}\\
&\qquad\times\cos(5h+5g+5l-5h'-5g'-4l')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(442)\\
&+m'\frac{a^5}{a'^6}\left\{\underbrace{-\frac{45}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\cdots403]}\underbrace{+\frac{135}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\cdots389]}\underbrace{+\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[6\cdots388]}\underbrace{-\frac{45}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[8\cdots402]}\underbrace{-\frac{135}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\cdots384]}\underbrace{-\frac{135}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[28\cdots383]}\underbrace{-\frac{225}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}}_{[48\cdots225]}\right\}\\
&\qquad\times\cos(5h+5g+5l-5h'-5g'-3l')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(443)\\
&+m'\frac{a^5}{a'^6}\left\{\begin{aligned}
&\underbrace{-\frac{135}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{75}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}_{[3\cdots379]}\underbrace{+\frac{675}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{675}{64}e\frac{n'^3}{n^3}}_{[4\cdots390]}\underbrace{-\frac{135}{256}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{405}{512}e\frac{n'^3}{n^3}}_{[19\cdots76]}\\
&\underbrace{+\frac{135}{64}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{405}{128}e\frac{n'^3}{n^3}}_{[20\cdots96]}\underbrace{+\frac{2025}{256}e^3\frac{n'}{n}}_{[41\cdots395]}\underbrace{-\frac{6885}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}}_{[46\cdots227]}
\end{aligned}\right\}\\
&\qquad\times\cos(5h+5g+6l-5h'-5g'-5l')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(444)\\
&+m'\frac{a^5}{a'^6}\left\{\begin{aligned}
&\underbrace{-\frac{675}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\cdots380]}\underbrace{+\frac{3375}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\cdots391]}\underbrace{+\frac{4725}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[5\cdots390]}\underbrace{-\frac{945}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[7\cdots379]}\underbrace{-\frac{945}{512}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[19\cdots77]}\underbrace{+\frac{945}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[20\cdots97]}\\
&\underbrace{-\frac{675}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\cdots386]}\underbrace{-\frac{675}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[35\cdots400]}
\end{aligned}\right\}\\
&\qquad\times\cos(5h+5g+6l-5h'-5g'-6l')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(445)\\
&+m'\frac{a^5}{a'^6}\left\{\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{135}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[3\cdots383]}\underbrace{-\frac{675}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[4\cdots393]}\underbrace{-\frac{675}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[6\cdots390]}\underbrace{+\frac{135}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[8\cdots379]}\underbrace{+\frac{135}{512}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[19\cdots82]}\underbrace{-\frac{135}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[20\cdots100]}\\
&\underbrace{+\frac{135}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[26\cdots388]}\underbrace{+\frac{135}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[35\cdots402]}\underbrace{+\frac{2295}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}}_{[48\cdots227]}
\end{aligned}\right\}\\
&\qquad\times\cos(5h+5g+6l-5h'-5g'-4l')
\end{aligned}
$$

(446)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{ -\underset{[3\cdot\cdot385]}{\frac{855}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[4\cdot\cdot\cdot395]}{\frac{1215}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[20\cdot\cdot103]}{\frac{3375}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdot\cdot390]}{\frac{3375}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[35\cdot\cdot379]}{\frac{135}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}} \right\}$$
$$\times \cos(5h + 5g + 7l - 5h' - 5g' - 5l')$$

(447)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{ \begin{aligned} & \underset{[3\cdots404]}{\frac{285}{128}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{95}{64}e\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[4\cdots379]}{\frac{135}{128}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{945}{64}e\frac{n'^3}{n^3}} + \underset{[19\cdots125]}{\frac{225}{256}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{675}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}} \\ & + \underset{[20\cdots76]}{\frac{135}{64}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{405}{128}e\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[41\cdot\cdot385]}{\frac{405}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}} - \underset{[42\cdot\cdot388]}{\frac{525}{128}ee'^2\frac{n'}{n}} - \underset{[43\cdot\cdot\cdot386]}{\frac{1125}{128}ee'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[46\cdot\cdot215]}{\frac{1125}{512}e\frac{n'^3}{n^3}} \end{aligned} \right\}$$
$$\times \cos(5h + 5g + 4l - 5h' - 5g' - 5l')$$

(448)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{ \begin{aligned} & \underset{[3\cdot\cdot\cdot405]}{\frac{1425}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[4\cdot\cdot\cdot380]}{\frac{675}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[5\cdot\cdot\cdot379]}{\frac{945}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[7\cdot\cdot\cdot404]}{\frac{1995}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[19\cdot\cdot126]}{\frac{1575}{512}ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[20\cdot\cdot\cdot77]}{\frac{945}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\ & + \underset{[26\cdot\cdot400]}{\frac{675}{32}ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[41\cdots386]}{\frac{1125}{128}ee'\frac{n'}{n} + \frac{19575}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}} \end{aligned} \right\}$$
$$\times \cos(5h + 5g + 4l - 5h' - 5g' - 6l')$$

(449)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{ \underset{[41\cdot\cdot\cdot387]}{\frac{28575}{1024}ee'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[42\cdot\cdot\cdot386]}{\frac{2625}{128}ee'^2\frac{n'}{n}} \right\} \cos(5h + 5g + 4l - 5h' - 5g' - 7l')$$

(450)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{ \begin{aligned} & -\underset{[3\cdot\cdot\cdot407]}{\frac{285}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdot\cdot\cdot383]}{\frac{135}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[6\cdot\cdot\cdot379]}{\frac{135}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[8\cdot\cdot\cdot404]}{\frac{285}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[19\cdot\cdot130]}{\frac{225}{512}ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[20\cdot\cdot\cdot82]}{\frac{135}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}} \\ & - \underset{[26\cdot\cdot402]}{\frac{135}{32}ee'\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[41\cdots388]}{\frac{225}{128}ee'\frac{n'}{n} - \frac{14175}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}} + \underset{[48\cdot\cdot215]}{\frac{165}{128}ee'\frac{n'^2}{n^2}} \end{aligned} \right\}$$
$$\times \cos(5h + 5g + 4l - 5h' - 5g' - 4l')$$

(451)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{ \underset{[41\cdot\cdot\cdot389]}{\frac{225}{1024}ee'^2\frac{n'}{n}} + \underset{[43\cdot\cdot388]}{\frac{225}{128}ee'^2\frac{n'}{n}} \right\} \cos(5h + 5g + 4l - 5h' - 5g' - 3l')$$

(452)

$$+ m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{ -\underset{[3\cdot\cdot409]}{\frac{525}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[4\cdot\cdot\cdot399]}{\frac{7965}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[19\cdot\cdot134]}{\frac{315}{2048}e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[26\cdot\cdot404]}{\frac{5985}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[41\cdot\cdot321]}{\frac{2025}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2}} - \underset{[41\cdots379]}{\frac{1125}{256}e^2\frac{n'}{n} - \frac{675}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}} \right\}$$
$$\times \cos(5h + 5g + 3l - 5h' - 5g' - 5l')$$

(453)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\underset{[41\cdots 380]}{\frac{5625}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[42\cdots 379]}{\frac{2625}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(5h+5g+3l-5h'-5g'-6l')$$

(454)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\underset{[41\cdots 383]}{\frac{1125}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[43\cdots 379]}{\frac{1125}{256}e^2e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(5h+5g+3l-5h'-5g'-4l')$$

(455)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\underset{[3\cdots 430]}{\frac{75}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[4\cdots 425]}{\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[19\cdots 188]}{\frac{45}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}-\underset{[20\cdots 175]}{\frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[26\cdots 420]}{\frac{45}{128}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots 346]}{\frac{135}{512}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}+\underset{[52\cdots\cdots 379]}{\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'}{n}-\frac{675}{256}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}}\right\}$$

$$\times\cos(5h+3g+3l-5h'-5g'-5l')$$

(456)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\underset{[52\cdots 380]}{\frac{225}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}+\underset{[53\cdots 379]}{\frac{105}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(5h+3g+3l-5h'-5g'-6l')$$

(457)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\underset{[52\cdots 383]}{\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}-\underset{[53\cdots 379]}{\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}}\right\}\cos(5h+3g+3l-5h'-5g'-4l')$$

(458)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\underset{[41\cdots 425]}{\frac{225}{128}\gamma^2e\frac{n'}{n}}\right\}\cos(5h+3g+2l-5h'-5g'-5l')$$

(459)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\underset{[3\cdots 404]}{\frac{285}{1024}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[4\cdots 190]}{\frac{6075}{1024}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[4\cdots 443]}{\frac{1215}{512}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[17\cdot 385]}{\frac{345}{256}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[18\cdot 399]}{\frac{405}{256}\frac{n'^4}{n^4}}+\underset{[26\cdot 379]}{\frac{405}{256}\frac{n'^4}{n^4}}-\underset{[26\cdot 438]}{\frac{1485}{512}\frac{n'^4}{n^4}}\right\}$$

$$\times\cos(7h+7g+7l-7h'-7g'-7l')$$

(460)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\underset{[41\cdots 443]}{\frac{22275}{2048}e\frac{n'^3}{n^3}}\right\}\cos(7h+7g+6l-7h'-7g'-7l')$$

(461)

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{\underset{[41\cdots 390]}{\frac{16875}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2}}\right\}\cos(7h+7g+5l-7h'-7g'-7l').$$

CHAPITRE V.

DÉTAIL DES 57 OPÉRATIONS EFFECTUÉES POUR FAIRE DISPARAITRE LES TERMES LES PLUS IMPORTANTS DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

Nous avons expliqué, dans le chapitre III, la marche que nous avons suivie pour faire disparaître successivement de la fonction perturbatrice les divers termes capables de fournir des inégalités d'un ordre inférieur au quatrième. Nous avons dit qu'il nous a fallu, pour cela, effectuer 57 opérations distinctes, dont chacune se traduit en définitive par un changement de variables. Nous nous proposons de donner ici le détail des calculs qui se rapportent à ces diverses opérations, pour chacune desquelles nous n'avons autre chose à faire que d'appliquer une des quatre règles données aux nos **29**, **30** et **31**.

On se rappelle que les équations différentielles qu'il s'agit d'intégrer sont les suivantes :

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{dl},\qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{dg},\qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{dh},$$
$$\frac{dl}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}},\qquad \frac{dg}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}};\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}.$$

La fonction perturbatrice R qui entre dans ces équations, est donnée en fonction du temps t et des éléments variables de la Lune par le développement du n° **14** ; mais on peut aussi la prendre dans le chapitre IV, en ayant soin de ne conserver, dans les coefficients des divers termes, que les parties qui ne sont pas accompagnées d'indications en petits chiffres placés au dessous.

Des six variables L, G, H, l, g, h, auxquelles se rapportent les équations différentielles précédentes, il n'y a que les trois dernières qui entrent explicitement dans la valeur de R. Les trois autres L, G, H, y sont remplacées par les éléments a, e, γ, auxquels elles sont liées par les relations

$$\mathrm{L}=\sqrt{a\mu},\qquad \mathrm{G}=\mathrm{L}\sqrt{1-e^2},\qquad \mathrm{H}=\mathrm{G}(1-2\gamma^2).$$

Si l'on développe ces deux dernières relations et qu'on s'arrête aux quantités du huitième ordre, elles deviennent

$$G = \sqrt{a\mu}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8\right\},$$

$$H = \sqrt{a\mu}\left\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8\right\}.$$

Ce que nous venons de dire pour les équations différentielles que nous avons à considérer tout d'abord, avant d'avoir effectué aucune des diverses opérations qui doivent nous conduire peu à peu à la solution de la question dont nous nous occupons, nous pouvons le répéter pour celles auxquelles nous serons ramenés après avoir fait un nombre quelconque de nos opérations successives. Ces équations différentielles seront toujours les mêmes que les précédentes. Des six variables L, G, H, l, g, h qu'elles seront destinées à déterminer en fonction du temps, les trois dernières seules entreront dans la valeur de la fonction R, et les trois fonctions L, G, H seront remplacées dans cette fonction par trois quantités a, e, γ, auxquelles elles seront liées par des relations que nous aurons soin de faire connaître à la suite de chacune des opérations. Nous donnerons les valeurs de L, G, H en a, e, γ sous forme de développements en séries, comme nous venons de le faire ci-dessus pour les valeurs primitives de G, H, et dans ces développements nous nous arrêterons toujours aux termes du neuvième ordre pour L, et à ceux du huitième ordre pour G et H.

Les équations différentielles qui fournissent les valeurs de $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$, renfermant les dérivées partielles de R relatives à L, G, H, nous devrons exprimer ces dérivées partielles au moyen des dérivées de la même fonction R par rapport à a, e, γ. Nous aurons ainsi :

$$\frac{dR}{dL} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dL} + \frac{dR}{de}\frac{de}{dL} + \frac{dR}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dL},$$

$$\frac{dR}{dG} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dG} + \frac{dR}{de}\frac{de}{dG} + \frac{dR}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dG},$$

$$\frac{dR}{dH} = \frac{dR}{da}\frac{da}{dH} + \frac{dR}{de}\frac{de}{dH} + \frac{dR}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dH}.$$

Il faudra donc, avant d'entamer une quelconque de nos opérations, que nous calculions les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ..., au moyen des expressions de

L, G, H en fonction de a, e, γ, telles qu'elles résultent des opérations déjà effectuées. Ces valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ s'obtiendront avec une approximation qui dépendra de celle avec laquelle L, G, H seront donnés en fonction de a, e, γ.

Nous allons commencer par donner les valeurs de ces quantités, telles qu'elles résultent des relations primitives entre L, G, H et a, e, γ, relations qui ont été rappelées ci-dessus. Ces valeurs, dont on devra se servir pour effectuer la première opération, sont, en y mettant n pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$,

$$\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{2}{an},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}} = 0,$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}} = 0,$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\left\{1 - e^2\right\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6\right\};$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = 0.$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6\right\}.$$

On peut effectuer dans un ordre quelconque les diverses opérations necessaires pour faire disparaître de la fonction perturbatrice les termes principaux dont on veut se débarrasser. Nous allons indiquer ici l'ordre que nous avons suivi pour cela, en mettant en regard du numéro de chaque opération : 1° l'argument ou les arguments du terme ou des termes que cette opération a eu pour objet de faire disparaître de R ; 2° l'ordre de cette opération, c'est-à-dire l'ordre des principales inégalités que ce terme ou ces termes de R sont capables d'introduire dans les valeurs des variables L, G, H, l, g, h (n° **34**).

NUMÉROS des opérations.	ARGUMENTS DES TERMES que ces opérations sont destinées à faire disparaître de R.	ORDRES de ces opérations.
1	l', $2l'$, $3l'$, $4l'$, $5l'$	2e ordre.
2	l	1er ordre.
3	$2h+2g+3l-2h'-2g'-2l'$	1er ordre.
4	$2h+2g+l-2h'-2g'-2l'$	1er ordre.
5	$2h+2g+l-2h'-2g'-3l'$	2e ordre.
6	$2h+2g+l-2h'-2g'-l'$	2e ordre.
7	$2h+2g+3l-2h'-2g'-3l'$	2e ordre.
8	$2h+2g+3l-2h'-2g'-l'$	2e ordre.
9	$l+l'$	2e ordre.
10	$l-l'$	2e ordre.
11	l (une seconde fois)	3e ordre.
12	$l+2l'$	3e ordre.
13	$l-2l'$	3e ordre.
14	$2h+2g+3l-2h'-2g'-2l'$ (une seconde fois)	3e ordre.
15	$2h+2g+3l-2h'-2g'-4l'$	3e ordre.
16	$2h+2g+l-2h'-2g'-4l'$	3e ordre.
17	$4h+4g+3l-4h'-4g'-4l'$	3e ordre.
18	$4h+4g+5l-4h'-4g'-4l'$	3e ordre.
19	$3h+3g+4l-3h'-3g'-3l'$	3e ordre.
20	$3h+3g+2l-3h'-3g'-3l'$	3e ordre.
21	$h+g+2l-h'-g'-l'$	3e ordre.
22	$2g+3l$	3e ordre.
23	$2g+l$	3e ordre.
24	$2h+l-2h'-2g'-2l'$	3e ordre.
25	$2h-l-2h'-2g'-2l'$	3e ordre.
26	$2h+2g+2l-2h'-2g'-2l'$	2e ordre.
27	$2h+2g+2l-2h'-2g'-3l'$	3e ordre.
28	$2h+2g+2l-2h'-2g'-l'$	3e ordre.
29	$2g+2l$	2e ordre.
30	$2g+2l+l'$	3e ordre.
31	$2g+2l-l'$	3e ordre.
32	$2l$	2e ordre.
33	$2l+l'$	3e ordre.
34	$2l-l'$	3e ordre.
35	$2h+2g+4l-2h'-2g'-2l'$	2e ordre.
36	$2h+2g+4l-2h'-2g'-3l'$	3e ordre.
37	$2h+2g+4l-2h'-2g'-l'$	3e ordre.

NUMÉROS des opérations.	ARGUMENTS DES TERMES que ces opérations sont destinées à faire disparaître de R.	ORDRES de ces opérations.
38	$3l$	3^e ordre.
39	$2h+2g+5l-2h'-2g'-2l'$	3^e ordre.
40	$2h+2g-l-2h'-2g'-2l'$	3^e ordre.
41	$2h+2g-2h'-2g'-2l'$	1er ordre.
42	$2h+2g-2h'-2g'-3l'$	2^e ordre.
43	$2h+2g-2h'-2g'-l'$	2^e ordre.
44	$2h+2g-2h'-2g'-4l'$	3^e ordre.
45	$2h+2g-2h'-2g'$	3^e ordre.
46	$h+g-h'-g'-l'$	2^e ordre.
47	$h+g-h'-g'-2l'$	3^e ordre.
48	$h+g-h'-g'$	2^e ordre.
49	$2g$	2^e ordre.
50	$2h+2g-2h'-2g'-2l'$ (une seconde fois)	3^e ordre.
51	$2g$ (une seconde fois)	3^e ordre.
52	$2h-2h'-2g'-2l'$	1er ordre.
53	$2h-2h'-2g'-3l'$	2^e ordre.
54	$2h-2h'-2g'-l'$	2^e ordre.
55	$2h-2h'-2g'-4l'$	3^e ordre.
56	$2h-2h'-2g'$	3^e ordre.
57	l', $2l'$, $3l'$, $4l'$ (une seconde fois)	3^e ordre.

I^{re} OPÉRATION

destinée à faire disparaître les termes (2), (3), (4), (5) *et* (6) *de* R.

Prenons dans R les termes (2), (3), (4), (5) et (6) *, dans lesquels les arguments sont l', $2l'$, $3l'$, $4l'$, $5l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = m'\frac{a^2}{a'^3}\left[\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{8}e^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{27}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{81}{16}\gamma^2 e'^3 + \frac{81}{64}e^2 e'^3 + \frac{261}{256}e'^5 \right.$$
$$\left. + \frac{27}{4}\gamma^4 e^2 e' + \left(\frac{45}{64}e' - \frac{225}{16}\gamma^2 e' + \frac{225}{64}e^2 e'\right)\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos l'$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes, dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de la fonction R.

$$\begin{aligned}
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\left[\frac{9}{8}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{27}{16}e^2e'^2+\frac{7}{8}e'^4+\frac{27}{4}\gamma^4e'^2-\frac{81}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{21}{4}\gamma^2e'^4+\frac{21}{16}e^2e'^4\right.\\
&\qquad\left.+\frac{45}{32}e'^2\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos 2l'\\
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\left[\frac{53}{32}e'^3-\frac{159}{16}\gamma^2e'^3+\frac{159}{64}e^2e'^3+\frac{393}{512}e'^5\right]\cos 3l'\\
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\left[\frac{77}{32}e'^4-\frac{231}{16}\gamma^2e'^4+\frac{231}{64}e^2e'^4\right]\cos 4l'\\
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\cdot\frac{1773}{512}e'^5\cos 5l'.
\end{aligned}$$

Les équations différentielles à intégrer nous donneront d'abord

$$\frac{dL}{dt}=0,\qquad \frac{dG}{dt}=0,\qquad \frac{dH}{dt}=0:$$

L, G et H sont donc constants et, par suite, il en est de même de a, e, γ. Quant à l, g, h, si l'on tient compte des valeurs qui viennent d'être données (page 259) pour $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ..., on verra que ces trois variables sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dt}=&-\frac{n'^2}{n}\left[\frac{21}{4}e'-\frac{63}{2}\gamma^2e'+\frac{9}{4}e^2e'+\frac{189}{32}e'^3+\frac{63}{2}\gamma^4e'-\frac{27}{2}\gamma^2e^2e'+\frac{405}{32}e'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos l'\\
&-\frac{n'^2}{n}\left[\frac{63}{8}e'^2-\frac{189}{4}\gamma^2e'^2+\frac{27}{8}e^2e'^2+\frac{49}{8}e'^4\right]\cos 2l'\\
&-\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{371}{32}e'^3\cos 3l'\\
&-\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{539}{32}e'^4\cos 4l',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt}=&-\frac{n'^2}{n}\left[3e'-\frac{27}{2}\gamma^2e'+\frac{27}{8}e^2e'+\frac{27}{8}e'^3+9\gamma^4e'-\frac{45}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{243}{16}\gamma^2e'^3+\frac{9}{32}e^4e'\right.\\
&\qquad\left.+\frac{243}{64}e^2e'^3+\frac{261}{64}e'^5+\frac{45}{8}e'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos l'\\
&-\frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{2}e'^2-\frac{81}{4}\gamma^2e'^2+\frac{81}{16}e^2e'^2+\frac{7}{2}e'^4+\frac{27}{2}\gamma^4e'^2-\frac{135}{8}\gamma^2e^2e'^2+\frac{27}{64}e^4e'^2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{45}{4}e'^2\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos 2l'\\
&-\frac{n'^2}{n}\left[\frac{53}{8}e'^3-\frac{477}{16}\gamma^2e'^3+\frac{477}{64}e^2e'^3+\frac{393}{128}e'^5\right]\cos 3l'\\
&-\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{77}{8}e'^4\cos 4l'\\
&-\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{1773}{128}e'^5\cos 5l',
\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{2}e^2 e' + \frac{81}{32}e'^3 - 9\gamma^2 e^2 e' + \frac{81}{32}e^4 e' + \frac{225}{32}e'\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos l'$$

$$-\frac{n'^2}{n}\left[\frac{27}{8}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{27}{4}e^2 e'^2 + \frac{21}{8}e'^4\right]\cos 2l'$$

$$-\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{159}{32}e'^3\cos 3l'$$

$$-\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{231}{32}e'^4\cos 4l'.$$

Si l'on intègre ces équations, en se rappelant que l' est égal à $n't$ + const., et qu'ensuite on applique la règle du n° **31**, on sera conduit à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

l par

$$l - \left(\frac{21}{4}e' - \frac{63}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{4}e^2 e' + \frac{189}{32}e'^3 - \frac{63}{2}\gamma^4 e' - \frac{27}{2}\gamma^2 e^2 e' + \frac{405}{32}e'\frac{a^2}{a'^2}\right)\frac{n'}{n}\sin l'$$

$$-\left(\frac{63}{16}e'^2 - \frac{189}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 + \frac{49}{16}e'^4\right)\frac{n'}{n}\sin 2l'$$

$$-\frac{371}{96}e'^3\frac{n'}{n}\sin 3l'$$

$$-\frac{539}{128}e'^4\frac{n'}{n}\sin 4l';$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \left(3e' - \frac{27}{2}\gamma^2 e' + \frac{27}{8}e^2 e' + \frac{27}{8}e'^3 + 9\gamma^4 e' - \frac{45}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e'^3 + \frac{9}{32}e^4 e'\right.$$

$$\left. + \frac{243}{64}e^2 e'^3 + \frac{261}{64}e'^5 + \frac{45}{8}e'\frac{a^2}{a'^2}\right)\frac{n'}{n}\sin l'$$

$$-\left(\frac{9}{4}e'^2 - \frac{81}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{81}{32}e^2 e'^2 + \frac{7}{4}e'^4 + \frac{27}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{135}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{27}{128}e^4 e'^2 + \frac{45}{8}e'^2\frac{a^2}{a'^2}\right)\frac{n'}{n}\sin 2l'$$

$$-\left(\frac{53}{24}e'^3 - \frac{159}{16}\gamma^2 e'^3 + \frac{159}{64}e^2 e'^3 + \frac{131}{128}e'^5\right)\frac{n'}{n}\sin 3l'$$

$$-\frac{77}{32}e'^4\frac{n'}{n}\sin 4l'$$

$$-\frac{1773}{640}e'^5\frac{n'}{n}\sin 5l';$$

h par

$$h - \left(\frac{9}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{2}e^2 e' + \frac{81}{32}e'^3 - 9\gamma^2 e^2 e' + \frac{81}{32}e^4 e' + \frac{225}{32}e'\frac{a^2}{a'^2}\right)\frac{n'}{n}\sin l'$$

$$- \left(\frac{27}{16}e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{27}{8}e^2 e'^2 + \frac{21}{16}e'^4\right)\frac{n'}{n}\sin 2l'$$

$$- \frac{53}{32}e'^3\frac{n'}{n}\sin 3l'$$

$$- \frac{231}{128}e'^4\frac{n'}{n}\sin 4l'.$$

La nouvelle valeur de la fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions précédentes dans la valeur qu'avait primitivement cette fonction, après en avoir ôté les termes (2), (3), (4), (5) et (6).

Les quantités L, G, H ne changent pas; elles sont exprimées en a, e, γ par les mêmes formules que précédemment (page 257). Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... sont donc aussi les mêmes que celles qui ont été employées pour effectuer la 1^re^ opération.

2^e^ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (7) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (7) *, dans lequel l'argument est l, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
R = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 \\
& \qquad - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \left(\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\frac{1}{2}e + 3\gamma^2 e + \frac{1}{16}e^3 - \frac{3}{4}ee'^2 - 3\gamma^4 e - \frac{3}{8}\gamma^2 e^3 + \frac{9}{2}\gamma^2 ee'^2 - \frac{1}{384}e^5 + \frac{3}{32}e^3 e'^2 \\
& \qquad - \frac{15}{16}ee'^4 + \frac{441}{128}ee'^2\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{16}e\frac{a^2}{a'^2}\Big\}\cos l.
\end{aligned}$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (7), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de la fonction R, avec celles qui y ont été introduites par suite de la 1^re^ opération.

D'après la valeur de l'argument du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \qquad i' = 0, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dG}{dt} = 0, \qquad \frac{dH}{dt} = 0.$$

G et H sont donc constants, et par suite γ l'est aussi. La relation qui lie G aux variables a et e peut être regardée comme déterminant a en fonction de e; en la résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_2) \qquad a = \frac{G^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - e^2}.$$

Si l'on remplace a par cette valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$L = \frac{G}{\sqrt{1 - e^2}} = G\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8\right);$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_2) \left\{ \begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{n'^2 G^3}{\mu^2} \Big\{ & \frac{1}{2} - 3\gamma^2 + \frac{3}{16}e^2 + \frac{3}{4}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{9}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{61}{384}e^4 + \frac{9}{32}e^2 e'^2 + \frac{15}{16}e'^4 \\ & - \frac{441}{128}e'^2 \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} + \frac{9}{16}\frac{G^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \sin l. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a $\frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL}$; en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{de}{dL}$, $\frac{d\gamma}{dL}$, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_2) \left\{ \begin{aligned} \frac{dl}{dt} = {} & \frac{\mu^2}{G^3}\left(1 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4\right) - \frac{n'^2 G^3}{\mu^2}\left(\frac{7}{4} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{27}{8}e^2 + \frac{21}{8}e'^2\right) \\ & + \frac{n'^2 G^3}{\mu^2} \cdot \frac{1}{e} \Big\{ \frac{1}{2} - 3\gamma^2 + \frac{33}{16}e^2 + \frac{3}{4}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{99}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{1097}{384}e^4 + \frac{99}{32}e^2 e'^2 \\ & + \frac{15}{16}e'^4 - \frac{441}{128}e'^2 \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} + \frac{9}{16}\frac{G^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \cos l. \end{aligned} \right.$$

Ces deux équations différentielles (C_2), (D_2) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre chose que L) a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction, et aussi en ce que l y est mis à la place de θ. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(\mathrm{E}_2)\left\{\begin{aligned}
e\cos l = &-\left(\frac{1}{2}-3\gamma^2+\frac{21}{8}e_0^2+\frac{3}{4}e'^2+3\gamma^4-\frac{63}{4}\gamma^2e_0^2-\frac{9}{2}\gamma^2e'^2+\frac{805}{128}e_0^4+\frac{63}{16}e_0^2e'^2+\frac{15}{16}e'^4\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&-\left(\frac{7}{8}-\frac{21}{2}\gamma^2+\frac{339}{32}e_0^2-\frac{105}{128}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}-\frac{143}{64}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{9}{16}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2a'^2}\\
&+\left[e_0+\left(\frac{15}{16}e_0-\frac{45}{4}\gamma^2e_0+\frac{371}{64}e_0^3+\frac{45}{16}e_0e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\frac{153}{32}e_0\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right]\cos l_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{27}{16}e_0^2-\frac{81}{8}\gamma^2e_0^2+\frac{943}{192}e_0^4+\frac{81}{32}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}+\frac{381}{64}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{{}^8}\right]\cos 2l_0(t+c)\\
&+\frac{847}{384}e_0^3\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\cos 3l_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_2).\left\{\begin{aligned}
e\sin l = &\; e_0\sin l_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{27}{16}e_0^2-\frac{81}{8}\gamma^2e_0^2+\frac{943}{192}e_0^4+\frac{81}{32}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}+\frac{381}{64}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right]\sin 2l_0(t+c)\\
&+\frac{847}{384}e_0^3\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\sin 3l_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et l_0 a pour valeur

$$
l_0=\frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left[1-\frac{3}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4-\left(\frac{7}{4}-\frac{21}{2}\gamma^2+\frac{27}{8}e_0^2+\frac{21}{8}e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}-\frac{9}{4}\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right].
$$

Si de ces formules (E_2), (F_2), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans la relation (A_2), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$
(\mathrm{G}_2)\left\{\begin{aligned}
a = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{ &1+e_0^2+e_0^4+e_0^6+e_0^8\\
&+\left(\frac{1}{4}-3\gamma^2+\frac{73}{16}e_0^2+\frac{3}{4}e'^2+12\gamma^4-\frac{219}{4}\gamma^2e_0^2-9\gamma^2e'^2+\frac{8467}{256}e_0^4+\frac{219}{16}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&+\left(\frac{7}{8}-\frac{63}{4}\gamma^2+\frac{751}{32}e_0^2+\frac{63}{128}e'^2\right)\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}+\frac{49}{16}\frac{n'^8\mathrm{G}^{24}}{\mu^{16}}+\frac{9}{16}\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2a'^2}\\
&-\Bigg[\Bigg(e_0-6\gamma^2e_0+\frac{31}{8}e_0^3+\frac{3}{2}e_0e'^2+6\gamma^4e_0-\frac{93}{4}\gamma^2e_0^3-9\gamma^2e_0e'^2\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{1825}{192}e_0^5+\frac{93}{16}e_0^3e'^2+\frac{15}{8}e_0e'^4\Bigg)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&+\left(\frac{7}{4}e_0-21\gamma^2e_0+\frac{409}{32}e_0^3-\frac{105}{64}e_0e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\frac{189}{32}e_0\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}+\frac{9}{8}e_0\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg]\cos l_0(t+c)\\
&-\left[\left(\frac{1}{4}e_0^2-3\gamma^2e_0^2+\frac{27}{16}e_0^4+\frac{3}{4}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\frac{19}{8}e_0^2\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right]\cos 2l_0(t+c)\Bigg\}.
\end{aligned}\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{G^2}{\mu}\Big\{ & 1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 + e_0^8 \\ & + \Big(\frac{1}{4} - 3\gamma^2 + \frac{73}{16}e_0^2 + \frac{3}{4}e'^2 + 12\gamma^4 - \frac{219}{4}\gamma^2 e_0^2 - 9\gamma^2 e'^2 + \frac{8467}{256}e_0^4 + \frac{219}{16}e_0^2 e'^2\Big)\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} \\ & + \Big(\frac{7}{8} - \frac{63}{4}\gamma^2 + \frac{751}{32}e_0^2 + \frac{63}{128}e'^2\Big)\frac{n'^6 G^{18}}{\mu^{12}} + \frac{49}{16}\frac{n'^8 G^{24}}{\mu^{16}} + \frac{9}{16}\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{G^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}. \end{aligned}$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_2), (F_2), (G_2), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_2)\quad \begin{aligned} e\cos l = & -\Big(\frac{1}{2} - 3\gamma^2 + \frac{9}{8}e_0^2 + \frac{3}{4}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{27}{4}\gamma^2 e_0^2 - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 - \frac{11}{128}e_0^4 + \frac{27}{16}e_0^2 e'^2 + \frac{15}{16}e'^4\Big)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & -\Big(\frac{7}{8} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{171}{32}e_0^2 - \frac{105}{128}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{119}{64}\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{9}{16}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} \\ & + \Big[e_0 + \Big(\frac{15}{16}e_0 - \frac{45}{4}\gamma^2 e_0 + \frac{11}{64}e_0^3 + \frac{45}{16}e_0 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{153}{32}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}\Big]\cos l_0(t+c) \\ & + \Big[\Big(\frac{27}{16}e_0^2 - \frac{81}{8}\gamma^2 e_0^2 - \frac{29}{192}e_0^4 + \frac{81}{32}e_0^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{381}{64}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\Big]\cos 2l_0(t+c) \\ & + \frac{847}{384}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 3l_0(t+c); \end{aligned}$$

$$(F'_2)\quad \begin{aligned} e\sin l = {} & e_0\sin l_0(t+c) \\ & + \Big[\Big(\frac{27}{16}e_0^2 - \frac{81}{8}\gamma^2 e_0^2 - \frac{29}{192}e_0^4 + \frac{81}{32}e_0^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{381}{64}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\Big]\sin 2l_0(t+c) \\ & + \frac{847}{384}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 3l_0(t+c); \end{aligned}$$

$$(G'_2)\quad \begin{aligned} a = a_0\Big\{1 - \Big[\Big(& e_0 - 6\gamma^2 e_0 - \frac{1}{8}e_0^3 + \frac{3}{2}e_0 e'^2 + 6\gamma^4 e_0 + \frac{3}{4}\gamma^2 e_0^3 - 9\gamma^2 e_0 e'^2 \\ & + \frac{1}{192}e_0^5 - \frac{3}{16}e_0^3 e'^2 + \frac{15}{8}e_0 e'^4\Big)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \Big(\frac{7}{4}e_0 - 21\gamma^2 e_0 + \frac{17}{32}e_0^3 - \frac{105}{64}e_0 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{157}{32}e_0\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{9}{8}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big]\cos l_0(t+c) \\ & - \Big[\Big(\frac{1}{4}e_0^2 - 3\gamma^2 e_0^2 - \frac{1}{16}e_0^4 + \frac{3}{4}e_0^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{19}{8}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}\Big]\cos 2l_0(t+c)\Big\}. \end{aligned}$$

La valeur de l_0 deviendra de même

$$l_0 = n_0 \left[1 - \left(\frac{7}{4} - \frac{21}{2} \gamma^2 + \frac{3}{4} e_0^2 + \frac{21}{8} e'^2 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{15}{8} \frac{n'^4}{n_0^4} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} \Big[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2} \Big] \\ + \frac{n'^2}{n} \Big[\frac{7}{4}e - \frac{15}{2}\gamma^2 e - \frac{3}{32}e^3 + \frac{21}{8}ee'^2 + \frac{9}{2}\gamma^4 e + \frac{27}{16}\gamma^2 e^3 - \frac{45}{4}\gamma^2 ee'^2 + \frac{3}{256}e^5 \\ - \frac{9}{64}e^3 e'^2 - \frac{8379}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{32}e\frac{a^2}{a'^2} \Big] \cos l, \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2\right] + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{2}e - 3\gamma^2 e + \frac{9}{16}e^3 + \frac{9}{4}ee'^2\right]\cos l;$$

d'où, en remplaçant a, e, l par leurs valeurs en t données par les formules (E'_2), (F'_2), (G'_2), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_2) \left\{ \begin{aligned} h+g+l = (h) + (g) + (h_0 + g_0 + l_0)(t+c) \\ + \Big[\Big(\frac{13}{4}e_0 - \frac{33}{2}\gamma^2 e_0 - \frac{9}{32}e_0^3 + \frac{39}{8}e_0 e'^2 + \frac{27}{2}\gamma^4 e_0 + \frac{45}{16}\gamma^2 e_0^3 \\ - \frac{99}{4}\gamma^2 e_0 e'^2 + \frac{5}{256}e_0^5 - \frac{27}{64}e_0^3 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ + \Big(\frac{175}{16}e_0 - \frac{483}{4}\gamma^2 e_0 + \frac{405}{128}e_0^3 - \frac{2625}{256}e_0 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{1283}{32}e_0\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{189}{32}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} \Big] \sin l_0(t+c) \\ + \frac{3}{2}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2l_0(t+c), \end{aligned} \right.$$

$$(L_2) \left\{ \begin{aligned} h = (h) + h_0(t+c) \\ + \Big[\Big(\frac{3}{2}e_0 - 3\gamma^2 e_0 + \frac{9}{16}e_0^3 + \frac{9}{4}e_0 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{21}{4}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} \Big] \sin l_0(t+c) \\ + \frac{9}{16}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2l_0(t+c). \end{aligned} \right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme l_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin.

Les cinq formules (E'_2), (F'_2), (G'_2), (K_2), (L_2), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (7); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos l$ par

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{1}{2}-3\gamma^2+\frac{9}{8}e^2+\frac{3}{4}e'^2+3\gamma^4-\frac{27}{4}\gamma^2e^2-\frac{9}{2}\gamma^2e'^2-\frac{11}{128}e^4+\frac{27}{16}e^2e'^2+\frac{15}{16}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&-\left(\frac{7}{8}-\frac{21}{2}\gamma^2+\frac{171}{32}e^2-\frac{105}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{119}{64}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{9}{16}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\\
&+\left[e+\left(\frac{15}{16}e-\frac{45}{4}\gamma^2e+\frac{11}{64}e^3+\frac{45}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{153}{32}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos l\\
&+\left[\left(\frac{27}{16}e^2-\frac{81}{8}\gamma^2e^2-\frac{29}{192}e^4+\frac{81}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{381}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 2l\\
&+\frac{847}{384}e^3\frac{n'^4}{n^4}\cos 3l;
\end{aligned}
$$

$e\sin l$ par

$$
\begin{aligned}
&e\sin l\\
&+\left[\left(\frac{27}{16}e^2-\frac{81}{8}\gamma^2e^2-\frac{29}{192}e^4+\frac{81}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{381}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2l\\
&+\frac{847}{384}e'^3\frac{n'^4}{n^4}\sin 3l;
\end{aligned}
$$

a par

$$
\begin{aligned}
a\Bigg\{1-\Bigg[&\left(e-6\gamma^2e-\frac{1}{8}e^3+\frac{3}{2}ee'^2+6\gamma^4e+\frac{3}{4}\gamma^2e^3-9\gamma^2ee'^2+\frac{1}{192}e^5-\frac{3}{16}e^3e'^2+\frac{15}{8}ee'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\left(\frac{7}{4}e-21\gamma^2e+\frac{17}{32}e^3-\frac{105}{64}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{157}{32}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{9}{8}e\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos l\\
&-\left[\left(\frac{1}{4}e^2-3\gamma^2e^2-\frac{1}{16}e^4+\frac{3}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{19}{8}e^2\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos 2l\Bigg\};
\end{aligned}
$$

$h+g+l$ par

$$
\begin{aligned}
&h+g+l\\
&+\left[\left(\frac{13}{4}e-\frac{33}{2}\gamma^2 e-\frac{9}{32}e^3+\frac{39}{8}ee'^2+\frac{27}{2}\gamma^4 e+\frac{45}{16}\gamma^2 e^3-\frac{99}{4}\gamma^2 ee'^2+\frac{5}{256}e^5-\frac{27}{64}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{175}{16}e-\frac{483}{4}\gamma^2 e+\frac{405}{128}e^3-\frac{2625}{256}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1283}{32}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{189}{32}e\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\right]\sin l\\
&+\frac{3}{2}e^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2l;
\end{aligned}
$$

h par

$$
\begin{aligned}
&h+\left[\left(\frac{3}{2}e-3\gamma^2 e+\frac{9}{16}e^3+\frac{9}{4}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{4}e\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin l\\
&\quad+\frac{9}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2l.
\end{aligned}
$$

γ ne change pas.

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$
\begin{aligned}
&e^2+\left(\frac{1}{4}-3\gamma^2+\frac{33}{16}e^2+\frac{3}{4}e'^2+12\gamma^4-\frac{99}{4}\gamma^2 e^2-9\gamma^2 e'^2+\frac{1075}{256}e^4+\frac{99}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&\quad+\left(\frac{7}{8}-\frac{63}{4}\gamma^2+\frac{387}{32}e^2+\frac{63}{128}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{21}{8}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{9}{16}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\\
&-\left[\left(e-6\gamma^2 e-\frac{9}{8}e^3+\frac{3}{2}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7}{4}e\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos l\\
&-\frac{3}{4}e^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2l;
\end{aligned}
$$

$e^2\cos 2l$* par

$$
\begin{aligned}
&\quad\left(\frac{1}{4}-3\gamma^2+\frac{33}{16}e^2+\frac{3}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{7}{8}\frac{n'^6}{n^6}\\
&-\left[\left(e-6\gamma^2 e+\frac{9}{4}e^3+\frac{3}{2}ee'^2+6\gamma^4 e-\frac{27}{2}\gamma^2 e^3-9\gamma^2 ee'^2-\frac{11}{64}e^5+\frac{27}{8}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{7}{4}e-21\gamma^2 e+\frac{171}{16}e^3-\frac{105}{64}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{149}{32}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{9}{8}e\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos l
\end{aligned}
$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$+\left[e^2-\frac{3}{4}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 2l$$

$$+\left[\left(\frac{27}{8}e^3-\frac{81}{4}\gamma^2e^3-\frac{29}{96}e^5+\frac{81}{16}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{381}{32}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 3l;$$

$e^2\sin 2l$ par

$$-\left[\left(e-6\gamma^2e+\frac{9}{4}e^3+\frac{3}{2}ee'^2+6\gamma^4e-\frac{27}{2}\gamma^2e^3-9\gamma^2ee'^2-\frac{11}{64}e^5+\frac{27}{8}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{7}{4}e-21\gamma^2e+\frac{171}{16}e^3-\frac{105}{64}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{119}{32}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{9}{8}e\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\right]\sin l$$

$$+\left[e^2-\frac{3}{4}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2l$$

$$+\left[\left(\frac{27}{8}e^3-\frac{81}{4}\gamma^2e^3-\frac{29}{96}e^5+\frac{81}{16}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{381}{32}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 3l;$$

$e^3\cos 3l$ par

$$-\frac{1}{8}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left[\left(\frac{3}{4}e-9\gamma^2e+\frac{153}{32}e^3+\frac{9}{4}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{21}{8}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos l$$

$$-\left[\left(\frac{3}{2}e^2-9\gamma^2e^2+\frac{27}{8}e^4+\frac{9}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 2l$$

$$+\left[e^3-\frac{117}{32}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 3l$$

$$+\frac{81}{16}e^4\frac{n'^2}{n^2}\cos 4l;$$

$e^3\sin 3l$ par

$$\left[\left(\frac{3}{4}e-9\gamma^2e+\frac{153}{32}e^3+\frac{9}{4}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{21}{8}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin l$$

$$-\left[\left(\frac{3}{2}e^2-9\gamma^2e^2+\frac{27}{8}e^4+\frac{9}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{21}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2l$$

$$+\left[e^3-\frac{117}{32}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 3l$$

$$+\frac{81}{16}e^4\frac{n'^2}{n^2}\sin 4l;$$

$e^4\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}4l$ par

$$-\frac{1}{2}e\frac{n'^6}{n^6}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}l$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\frac{3}{2}e^2\frac{n'^4}{n^4}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2l$$

$$-\left[\left(2e^3-12\gamma^2e^3+\frac{9}{2}e^5+3e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7}{2}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3l$$

$$+e^4\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}4l$$

$$+\frac{27}{4}e^5\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}5l.$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_2), (F'_2) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celle de a donnée par la formule (G'_2), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 257)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{16}e^2-\frac{3}{4}\gamma^2e^2-\frac{1}{64}e^4+\frac{3}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{7}{32}e^2\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$L_1=\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{2}e-3\gamma^2e-\frac{1}{16}e^3+\frac{3}{4}ee'^2+3\gamma^4e+\frac{3}{8}\gamma^2e^3-\frac{9}{2}\gamma^2ee'^2+\frac{1}{384}e^5-\frac{3}{32}e^3e'^2+\frac{15}{16}ee'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{7}{8}e-\frac{21}{2}\gamma^2e+\frac{17}{64}e^3-\frac{105}{128}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{157}{64}e\frac{n'^6}{n^6}-\frac{9}{16}e\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\right\},$$

$$L_2=\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{3}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 257)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{43}{32}e^2+\frac{3}{8}e'^2+6\gamma^4-\frac{129}{8}\gamma^2e^2-\frac{9}{2}\gamma^2e'^2+\frac{1267}{512}e^4+\frac{129}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{7}{16}-\frac{63}{8}\gamma^2+\frac{457}{64}e^2+\frac{63}{256}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}-\frac{169}{128}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{9}{32}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\right\},$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 257)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{8}-\frac{7}{4}\gamma^2+\frac{43}{32}e^2+\frac{3}{8}e'^2+9\gamma^4-\frac{301}{16}\gamma^2e^2-\frac{21}{4}\gamma^2e'^2+\frac{1267}{512}e^4+\frac{129}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{7}{16}-\frac{35}{4}\gamma^2+\frac{457}{64}e^2+\frac{63}{256}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}-\frac{169}{128}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{9}{32}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 et θ_2 à l'aide des formules (41), on trouve

$$\begin{aligned}\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{\left(\frac{1}{2} - 3\gamma^2 + \frac{45}{16}e^2 + \frac{3}{4}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{135}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 - \frac{91}{384}e^4 + \frac{135}{32}e^2 e'^2 + \frac{15}{16}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\\ \left. + \left(\frac{7}{8} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{723}{64}e^2 - \frac{105}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{77}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{9}{16}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{1}{8}\frac{n'^4}{n^4}.$$

De là on conclut

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots\ldots) =\\ &\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{11}{16}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + 6\gamma^4 - \frac{33}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 - \frac{75}{512}e^4 + \frac{33}{16}e^2 e'^2 + \frac{3}{4}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.\\ &\left. - \left(\frac{7}{16} - \frac{63}{8}\gamma^2 + \frac{131}{32}e^2 + \frac{63}{256}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} - \frac{169}{128}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{9}{32}\frac{n'^2}{n^2}\frac{a^2}{a'^2}\right\}.\end{aligned}$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 269 et 270) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 2^e opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (7) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}L = \sqrt{a\mu}\left\{1 - \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + 6\gamma^4 - 9\gamma^2 e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 - \frac{83}{512}e^4 + \frac{9}{4}e^2 e'^2 + \frac{3}{4}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.\\ \left. - \left(\frac{7}{16} - \frac{63}{8}\gamma^2 + \frac{69}{16}e^2 + \frac{63}{256}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} - \frac{169}{128}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{9}{32}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G = \sqrt{a\mu}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8\right.\\ - \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{43}{32}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + 6\gamma^4 - \frac{129}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{1267}{512}e^4 + \frac{129}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\ \left. - \left(\frac{7}{16} - \frac{63}{8}\gamma^2 + \frac{457}{64}e^2 + \frac{63}{256}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} - \frac{169}{128}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{9}{32}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H = \sqrt{a\mu}\left\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8\right.\\ - \left(\frac{1}{8} - \frac{7}{4}\gamma^2 + \frac{43}{32}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + 9\gamma^4 - \frac{301}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{21}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{1267}{512}e^4 + \frac{129}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\ \left. - \left(\frac{7}{16} - \frac{35}{4}\gamma^2 + \frac{457}{64}e^2 + \frac{63}{256}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} - \frac{169}{128}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{9}{32}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\right\}.\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\left\{2 + \left(\frac{25}{4} - 75\gamma^2 + \frac{973}{64}e^2 + \frac{75}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{271}{8}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\left\{\left(\frac{9}{2} - 51\gamma^2 + \frac{445}{64}e^2 + \frac{27}{2}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{201}{8}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{an}\left\{\left(\frac{3}{2} - 12\gamma^2 + \frac{39}{4}e^2 + \frac{9}{2}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{63}{8}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2ne}\left\{1 - e^2 - \left(\frac{19}{16} - \frac{57}{4}\gamma^2 + \frac{1155}{64}e^2 + \frac{57}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{181}{32}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2ne}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \left(\frac{19}{16} - \frac{57}{4}\gamma^2 + \frac{899}{64}e^2 + \frac{57}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{181}{32}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{63}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4};$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = 0.$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{1}{8} - \frac{7}{4}\gamma^2 + \frac{47}{32}e^2 + \frac{3}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{16}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{47}{32}e^2 + \frac{3}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{16}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

3e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (87) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (87)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4e'^2\right.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (87), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des deux premières opérations.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \left(\frac{1}{4} - 3\gamma^2 + \frac{5}{4}e^2 + \frac{3}{4}e'^2 + 12\gamma^4 - 15\gamma^2 e^2 - 9\gamma^2 e'^2 - \frac{67}{256}e^4 + \frac{15}{4}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
&+\left(\frac{1}{2} - 9\gamma^2 + \frac{335}{64}e^2 - \frac{153}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{147}{128}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 + \frac{9}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\} \\
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{3}{4}e - \frac{3}{2}\gamma^2 e - \frac{57}{32}e^3 - \frac{15}{8}ee'^2 + \frac{3}{4}\gamma^4 e + \frac{57}{16}\gamma^2 e^3 + \frac{15}{4}\gamma^2 ee'^2 + \frac{321}{256}e^5 + \frac{285}{64}e^3 e'^2 + \frac{39}{64}ee'^4 \\
&\qquad -\left(\frac{135}{8}ee'^2 - \frac{243}{2}\gamma^2 ee'^2 - \frac{1701}{64}e^3 e'^2\right)\frac{n'}{n} + \left(\frac{15}{8}e - \frac{51}{4}\gamma^2 e - \frac{273}{32}e^3 - \frac{6555}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
&\qquad\qquad + \frac{81}{16}ee'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{525}{64}e\frac{n'^4}{n^4}\Bigg\} \\
&\qquad \times \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 3, \quad i' = 2, \quad i'' = 2, \quad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{3}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G = \frac{2}{3}L + (G), \qquad H = \frac{2}{3}L + (H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$
(A_3)\quad \left\{
\begin{aligned}
a = \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 + 3e^2 + \frac{15}{2}e^4 + \frac{69}{4}e^6 + \frac{1209}{32}e^8 \\
& + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{171}{16}e^2 + \frac{3}{4}e'^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{167}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^2 - \frac{3}{2}\frac{(G)-(H)}{(G)}e'^2 + \frac{50767}{256}e^4 + \frac{513}{16}e^2 e'^2\right]\frac{n'^4 . 3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& + \left[\frac{7}{8} - \frac{21}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{1701}{32}e^2 + \frac{63}{128}e'^2\right]\frac{n'^6 . 3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} \\
& \qquad + \frac{49}{16}\frac{n'^8 . 3^{24}(G)^{24}}{\mu^{16}} + \frac{9}{16}\frac{n'^4 . 3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} . \frac{3^4(G)^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(B_3)\quad \gamma^2 = \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 - e^2 - \frac{3}{4}e^4 - \frac{5}{8}e^6 - \frac{21}{16}e^2\frac{n'^4 . 3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.
$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} = 3(\mathrm{G}) \Big\{ & 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{21}{8}e^4 + \frac{75}{16}e^6 + \frac{1077}{128}e^8 \\
& + \left[\frac{63}{32}e^2 - \frac{63}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2 + \frac{12909}{256}e^4 + \frac{189}{32}e^2 e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{585}{64}e^2\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}} \Big\};
\end{aligned}
$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$
(\mathrm{C}_3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{de}{dt} = -\frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{3}{32}e^2 - \frac{15}{8}e'^2 + \frac{1}{48}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2 \\
& + \frac{7}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2 + \frac{5}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{309}{256}e^4 - \frac{15}{64}e^2e'^2 + \frac{39}{64}e'^4 \\
& - \left[\frac{135}{8}e'^2 - \frac{81}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{5859}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{15}{8} - \frac{17}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{417}{32}e^2 - \frac{6555}{256}e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& + \frac{81}{16}e'^2\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} + \frac{243}{32}\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\}\sin\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

D'ailleurs on a

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 3\frac{dl}{dt} - 2n' \\
&= -3\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 2n';
\end{aligned}
$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}, \dfrac{da}{d\mathrm{G}}, \dfrac{da}{d\mathrm{H}}, \dfrac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 2^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$
(\mathrm{D}_3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\Big\{ & 3 - \frac{27}{2}e^2 + \frac{135}{8}e^4 - 2\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
& - \left[\frac{15}{4} - \frac{13}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{159}{8}e^2 + \frac{45}{8}e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \frac{19}{4}\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\} \\
- \frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Big\{ & \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{177}{32}e^2 - \frac{15}{8}e'^2 + \frac{1}{48}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2 \\
& - \frac{35}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2 + \frac{5}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{4209}{256}e^4 - \frac{885}{64}e^2e'^2 + \frac{39}{64}e'^4 \\
& - \left[\frac{135}{8}e'^2 - \frac{81}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{25137}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{15}{8} - \frac{17}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1671}{32}e^2 - \frac{6555}{256}e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& + \frac{81}{16}e'^2\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} + \frac{243}{32}\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_3), (D_3) correspondent aux équations (23) du chapitre III ; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{3}\text{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(E_3)\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \Big[\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\,\frac{(G-(H)}{(G)} + \frac{51}{16}e_0^2 - \frac{5}{8}e'^2 + \frac{1}{144}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2 - \frac{43}{48}\,\frac{(G)-(H)}{(G)}\,e_0^2 \\
& \qquad + \frac{5}{24}\,\frac{(G)-(H)}{(G)}\,e'^2 + \frac{4677}{256}e_0^4 - \frac{255}{32}e_0^2e'^2 + \frac{13}{64}e'^4\Big]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\
& + \Big[\frac{1}{6} - \frac{1}{18}\,\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{29}{8}e_0^2 - \frac{145}{24}e'^2 + \frac{1}{216}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2 - \frac{79}{72}\,\frac{(G)-(H)}{(G)}\,e_0^2 \\
& \qquad + \frac{62}{9}\,\frac{(G)-(H)}{(G)}\,e'^2 + \frac{4163}{128}e_0^4 - \frac{4493}{32}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} \\
& + \Big[\frac{151}{144} - \frac{121}{108}\,\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{5765}{192}e_0^2 - \frac{29665}{2304}e'^2\Big]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& + \Big[\frac{49}{54} - \frac{323}{324}\,\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{5029}{144}e_0^2 - \frac{48853}{3456}e'^2\Big]\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} \\
& + \frac{208535}{41472}\,\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} + \frac{313817}{62208}\,\frac{n'^7.3^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}} \\
& + \Big\{e_0 + \Big[\frac{33}{64}e_0 - \frac{29}{96}\,\frac{(G)-(H)}{(G)}\,e_0 + \frac{1941}{256}e_0^3 - \frac{165}{64}e_0e'^2\Big]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad + \frac{7}{8}e_0\,\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} + \frac{501}{64}e_0\,\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\cos\theta_0(t+c) \\
& - \Big\{\Big[\frac{65}{32}e_0^2 - \frac{19}{32}\,\frac{(G)-(H)}{(G)}\,e_0^2 + \frac{1801}{128}e_0^4 - \frac{325}{64}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\
& \qquad + \Big[\frac{101}{48}e_0^2 - \frac{31}{48}\,\frac{(G)-(H)}{(G)}\,e_0^2 + \frac{4573}{192}e_0^4 - \frac{15509}{192}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} \\
& \qquad + \frac{19409}{1152}e_0^2\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{16459}{864}e_0^2\,\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c) \\
& + \frac{1743}{512}e_0^3\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\cos 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_3)\left\{
\begin{aligned}
e\sin\theta &= e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad-\left\{\left[\frac{65}{32}e_0^2-\frac{19}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2+\frac{1801}{128}e_0^4-\frac{325}{64}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right.\\
&\qquad+\left[\frac{101}{48}e_0^2-\frac{31}{48}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2+\frac{4573}{192}e_0^4-\frac{15509}{192}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{19409}{1152}e_0^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}+\frac{16459}{864}e_0^2\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right]\right\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&\quad+\frac{1743}{512}e_0^3\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\begin{aligned}
\theta_0 = \frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\Bigg\{ 3-\frac{27}{2}e_0^2+\frac{135}{8}e_0^4-2\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}&\\
-\left[\frac{15}{4}-\frac{13}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{159}{8}e_0^2+\frac{45}{8}e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}-\frac{17}{2}\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Bigg\}&.
\end{aligned}
$$

Si de ces formules (E_3), (F_3), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_3), (B_3), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_3)\left\{
\begin{aligned}
a &= \frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\left\{1+3e_0^2+\frac{15}{2}e_0^4+\frac{69}{4}e_0^6+\frac{1209}{32}e_0^8\right.\\
&\qquad+\left[\frac{7}{16}-\frac{5}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{1209}{64}e_0^2-\frac{3}{16}e'^2+\frac{35}{96}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{831}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2-\frac{7}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2+\frac{349525}{1024}e_0^4-\frac{573}{64}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad+\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{55}{4}e_0^2-\frac{155}{16}e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\\
&\qquad+\left[\frac{81}{32}-\frac{469}{96}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{10363}{64}e_0^2-\frac{14743}{512}e'^2\right]\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{347}{144}\frac{n'^7.3^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}+\frac{428777}{27648}\frac{n'^8.3^{24}(\mathrm{G})^{24}}{\mu^{16}}+\frac{9}{16}\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}.\frac{3^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\right\}\\
&\quad+\frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\left\{\left[\frac{3}{2}e_0-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0+\frac{231}{16}e_0^3-\frac{15}{4}e_0e'^2+\frac{1}{24}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2e_0-\frac{69}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^3\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{5}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0e'^2+\frac{10977}{128}e_0^5-\frac{1155}{32}e_0^3e'^2-\frac{39}{32}e_0e'^4\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}
\end{aligned}\right.
$$

Cette formule (G_3) se continue à la page suivante.

$$(G_3)\quad + \Big[e_0 - \frac{1}{3}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{113}{8}e_0^3 - \frac{145}{4}e_0e'^2 + \frac{1}{36}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2 e_0$$

$$- \frac{35}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^3 + \frac{124}{3}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0e'^2 + \frac{7367}{64}e_0^5 - \frac{17249}{32}e_0^3e'^2\Big]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6}$$

$$+ \Big[\frac{151}{24}e_0 - \frac{121}{18}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{21221}{192}e_0^3 - \frac{29665}{384}e_0e'^2\Big]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}$$

$$+ \Big[\frac{49}{9}e_0 - \frac{323}{54}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{17635}{144}e_0^3 - \frac{48853}{576}e_0e'^2\Big]\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}$$

$$+ \frac{254057}{6912}e_0\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} + \frac{379427}{10368}e_0\frac{n'^7.3^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}}\Big\}\cos\theta_0(t+c)$$

$$- \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{\Big[\frac{9}{16}e_0^2 - \frac{3}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2 + \frac{585}{64}e_0^4 - \frac{45}{16}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}$$

$$+ \frac{21}{16}e_0^2\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} + \frac{537}{64}e_0^2\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c).$$

$$(H_3)\quad \gamma^2 = \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\Big\{1 - e_0^2 - \frac{3}{4}e_0^4 - \frac{5}{8}e_0^6 - \Big[\frac{1}{16} - \frac{1}{24}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{231}{64}e_0^2 - \frac{5}{16}e'^2\Big]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}$$

$$- \frac{1}{12}\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{53}{96}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\}$$

$$- \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\Big\{\Big[\frac{1}{2}e_0 - \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{49}{16}e_0^3 - \frac{5}{4}e_0e'^2\Big]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}$$

$$+ \Big[\frac{1}{3}e_0 - \frac{1}{9}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{85}{24}e_0^3 - \frac{145}{12}e_0e'^2\Big]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6}$$

$$+ \frac{151}{72}e_0\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{49}{27}e_0\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos\theta_0(t+c)$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\cdot\frac{13}{32}e_0^2\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c).$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{1 + 3e_0^2 + \frac{15}{2}e_0^4 + \frac{69}{4}e_0^6 + \frac{1209}{32}e_0^8$$

$$+ \Big[\frac{7}{16} - \frac{5}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{1209}{64}e_0^2 - \frac{3}{16}e'^2 + \frac{35}{96}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2$$

$$- \frac{831}{32}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2 - \frac{7}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e'^2 + \frac{349525}{1024}e_0^4 - \frac{573}{64}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}+\frac{55}{4}e_0^2-\frac{155}{16}e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}$$

$$+\left[\frac{81}{32}-\frac{469}{96}\frac{(G)-(H)}{(G)}+\frac{10363}{64}e_0^2-\frac{14743}{512}e'^2\right]\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}$$

$$+\frac{347}{144}\frac{n'^7.3^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}}+\frac{428777}{27648}\frac{n'^8.3^{24}(G)^{24}}{\mu^{16}}+\frac{9}{16}\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{3^4(G)^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\},$$

$$\gamma_0^2=\frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\Bigg\{1-e_0^2-\frac{3}{4}e_0^4-\frac{5}{8}e_0^6-\left[\frac{1}{16}-\frac{1}{24}\frac{(G)-(H)}{(G)}+\frac{231}{64}e_0^2-\frac{5}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}$$

$$-\frac{1}{12}\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}-\frac{53}{96}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_3), (F_3), (G_3), (H_3), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_3)\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma_0^2+\frac{15}{16}e_0^2-\frac{5}{8}e'^2+\frac{1}{4}\gamma_0^4-\frac{11}{8}\gamma_0^2e_0^2+\frac{5}{4}\gamma_0^2e'^2-\frac{651}{256}e_0^4-\frac{75}{32}e_0^2e'^2+\frac{13}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
& +\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\gamma_0^2+\frac{11}{8}e_0^2-\frac{145}{24}e'^2+\frac{1}{6}\gamma_0^4-\frac{29}{12}\gamma_0^2e_0^2+\frac{124}{3}\gamma_0^2e'^2-\frac{445}{128}e_0^4-\frac{1883}{32}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
& +\left(\frac{151}{144}-\frac{121}{18}\gamma_0^2+\frac{2141}{192}e_0^2-\frac{29665}{2304}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\left(\frac{49}{54}-\frac{323}{54}\gamma_0^2+\frac{2089}{144}e_0^2-\frac{48853}{3456}e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\
& +\frac{194927}{41472}\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{281741}{62208}\frac{n'^7}{n_0^7}\\
& +\left[e_0+\left(\frac{33}{64}e_0-\frac{29}{16}\gamma_0^2e_0-\frac{435}{256}e_0^3-\frac{165}{64}e_0e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{7}{8}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{501}{64}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
& -\left[\left(\frac{65}{32}e_0^2-\frac{57}{16}\gamma_0^2e_0^2-\frac{539}{128}e_0^4-\frac{325}{64}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
& \qquad+\left(\frac{101}{48}e_0^2-\frac{31}{8}\gamma_0^2e_0^2-\frac{881}{192}e_0^4-\frac{15509}{192}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
& \qquad\qquad\left.+\frac{19409}{1152}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{16459}{864}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos 2\theta_0(t+c)\\
& +\frac{1743}{512}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_3)\quad\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c)\\
& -\Bigg[\left(\frac{65}{32}e_0^2-\frac{57}{16}\gamma_0^2e_0^2-\frac{539}{128}e_0^4-\frac{325}{64}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
& \quad+\left(\frac{101}{48}e_0^2-\frac{31}{8}\gamma_0^2e_0^2-\frac{881}{192}e_0^4-\frac{15509}{192}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
& \qquad+\frac{19409}{1152}e_0^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{16459}{864}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin 2\theta_0(t+c)\\
& +\frac{1743}{512}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_3)\quad\left\{\begin{aligned}
a = a_0\Bigg\{1 & +\Bigg[\bigg(\frac{3}{2}e_0-3\gamma_0^2e_0-\frac{57}{16}e_0^3-\frac{15}{4}e_0e'^2+\frac{3}{2}\gamma_0^4e_0+\frac{57}{8}\gamma_0^2e_0^3\\
& \qquad+\frac{15}{2}\gamma_0^2e_0e'^2+\frac{321}{128}e_0^5+\frac{285}{32}e_0^3e'^2+\frac{39}{32}e_0e'^4\bigg)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
& \quad+\bigg(e_0-2\gamma_0^2e_0-\frac{19}{8}e_0^3-\frac{145}{4}e_0e'^2+\gamma_0^4e_0+\frac{19}{4}\gamma_0^2e_0^3\\
& \qquad+248\gamma_0^2e_0e'^2+\frac{107}{64}e_0^5+\frac{1891}{32}e_0^3e'^2\bigg)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
& \quad+\left(\frac{151}{24}e_0-\frac{121}{3}\gamma_0^2e_0-\frac{4147}{192}e_0^3-\frac{29665}{384}e_0e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
& \quad+\left(\frac{49}{9}e_0-\frac{323}{9}\gamma_0^2e_0-\frac{2357}{144}e_0^3-\frac{48853}{576}e_0e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\
& \qquad+\frac{235913}{6912}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{338927}{10368}e_0\frac{n'^7}{n_0^7}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
& -\Bigg[\left(\frac{9}{16}e_0^2-\frac{9}{4}\gamma_0^2e_0^2-\frac{171}{64}e_0^4-\frac{45}{16}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{21}{16}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{537}{64}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}\Bigg]\cos 2\theta_0(t+c)\Bigg\};
\end{aligned}\right.$$

$$(H'_3)\quad\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & \gamma_0^2-\Bigg[\left(\frac{1}{2}\gamma_0^2e_0-\gamma_0^4e_0-\frac{15}{16}\gamma_0^2e_0^3-\frac{5}{4}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
& \quad+\left(\frac{1}{3}\gamma_0^2e_0-\frac{2}{3}\gamma_0^4e_0-\frac{5}{8}\gamma_0^2e_0^3-\frac{145}{12}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{151}{72}e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{49}{27}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
& +\frac{13}{32}\gamma_0^2e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[3-2\frac{n'}{n_0}-\left(\frac{15}{4}-\frac{39}{2}\gamma_0^2+3e_0^2+\frac{45}{8}e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}-\frac{209}{32}\frac{n'^4}{n_0^4}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Big[& 1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 \\
& + \left(\frac{7}{8} - 7\gamma^2 + \frac{9}{4}e^2 + \frac{21}{8}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{21}{16}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Big] \\
- \frac{n'^2}{n}\Big[& \frac{21}{8}e - \frac{15}{4}\gamma^2 e - \frac{279}{64}e^3 - \frac{105}{16}ee'^2 + \frac{9}{8}\gamma^4 e + \frac{189}{32}\gamma^2 e^3 + \frac{75}{8}\gamma^2 ee'^2 \\
& + \frac{645}{512}e^5 + \frac{1395}{128}e^3 e'^2 - \frac{1755}{16}ee'^2\frac{n'}{n} \\
& + \left(\frac{285}{16}e - \frac{867}{8}\gamma^2 e - \frac{2313}{32}e^3 - \frac{124545}{512}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{16137}{128}e\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cos\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = & -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 + \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\
& - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4}e - \frac{3}{4}\gamma^2 e - \frac{45}{32}e^3 - \frac{15}{8}ee'^2 - \frac{243}{4}ee'^2\frac{n'}{n} + \frac{51}{8}e\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;
\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_3), (F'_3), (G'_3), (H'_3), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_3)\left\{\begin{aligned}
h+g+l = {} & \frac{1}{3}(h) + \frac{1}{3}(g) + \frac{1}{3}(2h' + 2g' + 2l') + \frac{1}{3}(\theta_0 + h_0 + g_0)(t+c) \\
& - \Big[\Big(\frac{13}{8}e_0 - \frac{11}{4}\gamma_0^2 e_0 - \frac{207}{64}e_0^3 - \frac{65}{16}e_0 e'^2 + \frac{9}{8}\gamma_0^4 e_0 + \frac{177}{32}\gamma_0^2 e_0^3 \\
& \qquad + \frac{55}{8}\gamma_0^2 e_0 e'^2 + \frac{857}{512}e_0^5 + \frac{1035}{128}e_0^3 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \quad + \left(\frac{19}{12}e_0 - \frac{17}{6}\gamma_0^2 e_0 - \frac{107}{32}e_0^3 - \frac{2755}{48}e_0 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\
& \quad + \left(\frac{3775}{288}e_0 - \frac{2783}{36}\gamma_0^2 e_0 - \frac{31693}{768}e_0^3 - \frac{741625}{4608}e_0 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \qquad + \frac{1519}{108}e_0\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{7907441}{82944}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}\Big]\sin\theta_0(t+c) \\
& + \left[\frac{137}{128}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{427}{192}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+e),
\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{L}_3)\left\{
\begin{aligned}
h = {} & (h) + h_0(t+c) \\
& -\left[\left(\frac{1}{4}e_0 - \frac{1}{4}\gamma_0^2 e_0 - \frac{15}{32}e_0^3 - \frac{5}{8}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\
& \qquad \left. + \left(\frac{1}{6}e_0 - \frac{1}{6}\gamma_0^2 e_0 - \frac{5}{16}e_0^3 - \frac{62}{3}e_0 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{121}{36}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{323}{108}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c) \\
& + \frac{11}{64}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h + g + l$ vient de ce que l'on a

$$h + g + l = \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}g + \frac{1}{3}(2h' + 2g' + 2l').$$

Les six formules (E'_3), (F'_3), (G'_3), (H'_3), (K_3), (L_3) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (87); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$ par

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{15}{16}e^2 - \frac{5}{8}e'^2 + \frac{1}{4}\gamma^4 - \frac{11}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{5}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{651}{256}e^4 - \frac{75}{32}e^2 e'^2 + \frac{13}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{11}{8}e^2 - \frac{145}{24}e'^2 + \frac{1}{6}\gamma^4 - \frac{29}{12}\gamma^2 e^2 + \frac{124}{3}\gamma^2 e'^2 - \frac{445}{128}e^4 - \frac{1883}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& + \left(\frac{151}{144} - \frac{121}{18}\gamma^2 + \frac{2141}{192}e^2 - \frac{29665}{2304}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{49}{54} - \frac{323}{54}\gamma^2 + \frac{2089}{144}e^2 - \frac{48853}{3456}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{194927}{41472}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{281741}{62208}\frac{n'^7}{n^7} \\
& + \left[e + \left(\frac{33}{64}e - \frac{29}{16}\gamma^2 e - \frac{435}{256}e^3 - \frac{165}{64}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{8}e\frac{n'^5}{n^5} + \frac{501}{64}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$-\Big[\Big(\frac{65}{32}e^2-\frac{57}{16}\gamma^2e^2-\frac{539}{128}e^4-\frac{325}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}+\Big(\frac{101}{48}e^2-\frac{31}{8}\gamma^2e^2-\frac{891}{192}e^4-\frac{15509}{192}e^2e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{19409}{1152}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{16459}{864}e^2\frac{n'^5}{n^5}\Big]\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{1743}{512}e^3\frac{n'^4}{n^4}\cos 3(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

$e\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$ par

$$e\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\Big[\Big(\frac{65}{32}e^2-\frac{57}{16}\gamma^2e^2-\frac{539}{128}e^4-\frac{325}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}+\Big(\frac{101}{48}e^2-\frac{31}{8}\gamma^2e^2-\frac{881}{192}e^4-\frac{15509}{192}e^2e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{19409}{1152}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{16459}{864}e^2\frac{n'^5}{n^5}\Big]\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{1743}{512}e^3\frac{n'^4}{n^4}\sin 3(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

a par

$$a\Big\{1+\Big[\Big(\frac{3}{2}e-3\gamma^2e-\frac{57}{16}e^3-\frac{15}{4}ee'^2+\frac{3}{2}\gamma^4e+\frac{57}{8}\gamma^2e^3+\frac{15}{2}\gamma^2ee'^2+\frac{321}{128}e^5+\frac{285}{32}e^3e'^2+\frac{39}{32}ee'^4\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\Big(e-2\gamma^2e-\frac{19}{8}e^3-\frac{145}{4}ee'^2+\gamma^4e+\frac{19}{4}\gamma^2e^3+248\gamma^2ee'^2+\frac{107}{64}e^5+\frac{1891}{32}e^3e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\Big(\frac{151}{24}e-\frac{121}{3}\gamma^2e-\frac{4147}{192}e^3-\frac{29665}{384}ee'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}+\Big(\frac{49}{9}e-\frac{323}{9}\gamma^2e-\frac{2357}{144}e^3-\frac{48853}{576}ee'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{235913}{6912}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{338927}{10368}e\frac{n'^7}{n^7}\Big]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\Big[\Big(\frac{9}{16}e^2-\frac{9}{4}\gamma^2e^2-\frac{171}{64}e^4-\frac{45}{16}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{21}{16}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{537}{64}e^2\frac{n'^6}{n^6}\Big]\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')\Big\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\Big[\Big(\frac{1}{2}\gamma^2e-\gamma^4e-\frac{15}{16}\gamma^2e^3-\frac{5}{4}\gamma^2ee'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}+\Big(\frac{1}{3}\gamma^2e-\frac{2}{3}\gamma^4e-\frac{5}{8}\gamma^2e^3-\frac{145}{12}\gamma^2ee'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{151}{72}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{49}{27}e\frac{n'^5}{n^5}\Big]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{13}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\Bigg[\left(\frac{13}{8}e-\frac{11}{4}\gamma^2e-\frac{207}{64}e^3-\frac{65}{16}ee'^2+\frac{9}{8}\gamma^4e+\frac{177}{32}\gamma^2e^3+\frac{55}{8}\gamma^2ee'^2+\frac{857}{512}e^5+\frac{1035}{128}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{19}{12}e-\frac{17}{6}\gamma^2e-\frac{107}{32}e^3-\frac{2755}{48}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{3775}{288}e-\frac{2783}{36}\gamma^2e-\frac{31693}{768}e^3-\frac{741625}{4608}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{1519}{108}e\frac{n'^5}{n^5}+\frac{7907441}{82944}e\frac{n'^6}{n^6}\Bigg]\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{137}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{427}{192}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

h par

$$h-\Bigg[\left(\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}\gamma^2e-\frac{15}{32}e^3-\frac{5}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{1}{6}e-\frac{1}{6}\gamma^2e-\frac{5}{16}e^3-\frac{62}{3}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{121}{36}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{323}{108}e\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{11}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\gamma^2+\frac{63}{64}e^2-\frac{5}{16}e'^2+\frac{3}{8}\gamma^4-\frac{55}{16}\gamma^2e^2+\frac{5}{4}\gamma^2e'^2+\frac{2083}{1024}e^4-\frac{315}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\gamma^2+\frac{15}{8}e^2-\frac{155}{48}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{53}{96}-\frac{217}{48}\gamma^2+\frac{1013}{64}e^2-\frac{14995}{1536}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{347}{432}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{311219}{82944}\frac{n'^8}{n^8}$$

$$+\Bigg[\left(\frac{1}{2}e-\gamma^2e-\frac{35}{16}e^3-\frac{5}{4}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{1}{3}e-\frac{2}{3}\gamma^2e-\frac{35}{24}e^3-\frac{145}{12}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{151}{72}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{49}{27}e\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{1}{2}e^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

$e^2 \cos 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$* par

$$\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{63}{64}e^2 - \frac{5}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{15}{8}e^2 - \frac{155}{48}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{53}{96}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{347}{432}\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+ \Big[\left(\frac{1}{2}e - \gamma^2 e + \frac{15}{8}e^3 - \frac{5}{4}ee'^2 + \frac{1}{2}\gamma^4 e - \frac{11}{4}\gamma^2 e^3 + \frac{5}{2}\gamma^2 ee'^2 - \frac{651}{128}e^5 - \frac{75}{16}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{1}{3}e - \frac{2}{3}\gamma^2 e + \frac{11}{4}e^3 - \frac{145}{12}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{151}{72}e - \frac{121}{9}\gamma^2 e + \frac{2141}{96}e^3 - \frac{29665}{1152}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{49}{27}e\frac{n'^5}{n^5} + \frac{200273}{20736}e\frac{n'^6}{n^6}\Big] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \left[e^2 - \frac{1}{2}e^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{41}{48}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right] \cos 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$- \Big[\left(\frac{65}{16}e^3 - \frac{57}{8}\gamma^2 e^3 - \frac{539}{64}e^5 - \frac{325}{32}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \frac{101}{24}e^3\frac{n'^3}{n^3} + \frac{19409}{576}e^3\frac{n'^4}{n^4}\Big] \cos 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$e^2 \sin 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$ par

$$\Big[\left(\frac{1}{2}e - \gamma^2 e + \frac{15}{8}e^3 - \frac{5}{4}ee'^2 + \frac{1}{2}\gamma^4 e - \frac{11}{4}\gamma^2 e^3 + \frac{5}{2}\gamma^2 ee'^2 - \frac{651}{128}e^5 - \frac{75}{16}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{1}{3}e - \frac{2}{3}\gamma^2 e + \frac{11}{4}e^3 - \frac{145}{12}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{151}{72}e - \frac{121}{9}\gamma^2 e + \frac{2141}{96}e^3 - \frac{29665}{1152}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{49}{27}e\frac{n'^5}{n^5} + \frac{194927}{20736}e\frac{n'^6}{n^6}\Big] \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \Big[\Big(e^2 - \frac{1}{2}e^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{41}{48}e^2\frac{n'^5}{n^5}\Big] \sin 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$- \Big[\left(\frac{65}{16}e^3 - \frac{57}{8}\gamma^2 e^3 - \frac{539}{64}e^5 - \frac{325}{32}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \frac{101}{24}e^3\frac{n'^3}{n^3} + \frac{19409}{576}e^3\frac{n'^4}{n^4}\Big] \sin 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$e^3 \cos 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$ par

$$\frac{1}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1}{32}\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+ \left[\left(\frac{3}{16}e - \frac{3}{4}\gamma^2 e + \frac{279}{128}e^3 - \frac{15}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1}{4}e\frac{n'^5}{n^5} + \frac{53}{32}e\frac{n'^6}{n^6}\right] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$+\left[\left(\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2+\frac{45}{16}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{1}{2}e^2-\gamma^2e^2+\frac{33}{8}e^4-\frac{145}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^8}{n^3}\right.$$

$$\left.+\frac{151}{48}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{49}{18}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[e^3-\frac{291}{128}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 3(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\left[\frac{195}{32}e^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{101}{16}e^4\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos 4(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l);$$

$e^3\sin 3(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$ par

$$\left[\left(\frac{3}{16}e-\frac{3}{4}\gamma^2e+\frac{279}{128}e^3-\frac{15}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1}{4}e\frac{n'^5}{n^5}+\frac{53}{32}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2+\frac{45}{16}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{1}{2}e^2-\gamma^2e^2+\frac{33}{8}e^4-\frac{145}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left.+\frac{151}{48}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{49}{18}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[e^3-\frac{291}{128}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 3(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\left[\frac{195}{32}e^4\frac{n'^2}{n^2}+\frac{101}{16}e^4\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 4(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

$e^4\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}4(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$ par

$$\frac{1}{16}e\frac{n'^6}{n^6}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{3}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1}{2}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(e^3-2\gamma^2e^3+\frac{15}{4}e^5-\frac{5}{2}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}e^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{151}{36}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+e^4.\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}4(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{65}{8}e^5\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}.5(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_3), (F'_3) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_3), (H'_3) dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 273)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{9}{64}e^2-\frac{9}{16}\gamma^2e^2-\frac{171}{256}e^4-\frac{45}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{3}{16}e^2-\frac{3}{4}\gamma^2e^2-\frac{57}{64}e^4-\frac{465}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\right.$$

$$\left.-\frac{159}{128}e^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{347}{192}e^2\frac{n'^7}{n^7}-\frac{3}{64}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{1}{16}\frac{n'^9}{n^9}\right\},$$

$$L_1=\sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{3}{4}e-\frac{3}{2}\gamma^2e-\frac{57}{32}e^3-\frac{15}{8}ee'^2+\frac{3}{4}\gamma^4e+\frac{57}{16}\gamma^2e^3+\frac{15}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{321}{256}e^5+\frac{285}{64}e^3e'^2+\frac{39}{64}ee'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2}e-\gamma^2e-\frac{19}{16}e^3-\frac{145}{8}ee'^2+\frac{1}{2}\gamma^4e+\frac{19}{8}\gamma^2e^3+124\gamma^2ee'^2+\frac{107}{128}e^5+\frac{1891}{64}e^3e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{151}{48}e-\frac{121}{6}\gamma^2e-\frac{4147}{384}e^3-\frac{29665}{768}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$\left.+\left(\frac{49}{18}e-\frac{323}{18}\gamma^2e-\frac{2357}{288}e^3-\frac{48853}{1152}ee'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{213881}{13824}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{316895}{20736}e\frac{n'^7}{n^7}\right\},$$

$$L_2=\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{27}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{27}{32}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 273)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{8}\gamma^2+\frac{97}{128}e^2-\frac{5}{32}e'^2+\frac{3}{16}\gamma^4-\frac{89}{32}\gamma^2e^2+\frac{5}{8}\gamma^2e'^2-\frac{333}{2048}e^4-\frac{485}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$-\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{6}\gamma^2+\frac{31}{24}e^2-\frac{155}{96}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}-\left(\frac{53}{192}-\frac{217}{96}\gamma^2+\frac{985}{96}e^2-\frac{14995}{3072}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$\left.-\frac{347}{864}\frac{n'^7}{n^7}-\frac{20327}{10368}\frac{n'^8}{n^8}\right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 273)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{32}-\frac{3}{16}\gamma^2+\frac{97}{128}e^2-\frac{5}{32}e'^2+\frac{7}{16}\gamma^4-\frac{291}{64}\gamma^2e^2+\frac{15}{16}\gamma^2e'^2-\frac{333}{2048}e^4-\frac{485}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$-\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{4}\gamma^2+\frac{31}{24}e^2-\frac{155}{96}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}-\left(\frac{53}{192}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{985}{96}e^2-\frac{14995}{3072}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$\left.-\frac{347}{864}\frac{n'^7}{n^7}-\frac{20327}{10368}\frac{n'^8}{n^8}\right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 et θ_2 à l'aide des formules (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\Big\{-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{95}{32}e^2-\frac{5}{8}e'^2+\frac{1}{4}\gamma^4-\frac{79}{16}\gamma^2e^2+\frac{5}{4}\gamma^2e'^2-\frac{1729}{256}e^4-\frac{475}{64}e^2e'^2+\frac{13}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\gamma^2+\frac{167}{48}e^2-\frac{145}{24}e'^2+\frac{1}{6}\gamma^4-\frac{151}{24}\gamma^2e^2+\frac{124}{3}\gamma^2e'^2-\frac{3097}{384}e^4-\frac{26807}{192}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$-\left(\frac{151}{144}-\frac{121}{18}\gamma^2+\frac{32255}{1152}e^2-\frac{29665}{2304}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{49}{54}-\frac{323}{54}\gamma^2+\frac{28993}{864}e^2-\frac{48853}{3456}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$-\frac{186989}{41472}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{253553}{62208}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\theta_2 = \frac{1}{e^2}\Big\{\frac{1}{32}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1}{24}\frac{n'^5}{n^5}\Big\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) =$$

$$\sqrt{a\mu}\Big\{-\left(\frac{3}{32}-\frac{3}{8}\gamma^2+\frac{57}{64}e^2-\frac{15}{32}e'^2+\frac{9}{16}\gamma^4-\frac{51}{16}\gamma^2e^2+\frac{15}{8}\gamma^2e'^2-\frac{10281}{2048}e^4-\frac{285}{64}e^2e'^2+\frac{189}{256}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{7}{4}e^2-\frac{155}{32}e'^2+\frac{3}{4}\gamma^4-\frac{13}{2}\gamma^2e^2+\frac{661}{16}\gamma^2e'^2-\frac{4795}{512}e^4-\frac{1193}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$-\left(\frac{53}{64}-\frac{217}{32}\gamma^2+\frac{437}{32}e^2-\frac{14995}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}-\left(\frac{347}{288}-\frac{1477}{144}\gamma^2+\frac{3707}{144}e^2-\frac{86969}{2304}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$
$$-\frac{19841}{3456}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{30253}{3456}\frac{n'^9}{n^9}\Big\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° 29 et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 283 à 285) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 3e opération et y ajoutant

$$+\frac{2}{3}n'(L - L_0) - \frac{2}{3}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (87) de R, joint à la quantité $+\frac{2}{3}n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{2}{3}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [3 . . . . 1, 87]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- \Big(\frac{7}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 + \frac{57}{32}e^2 - \frac{3}{32}e'^2 + \frac{105}{16}\gamma^4 - \frac{51}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{21}{8}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad - \frac{11981}{2048}e^4 - \frac{93}{32}e^2 e'^2 + \frac{381}{256}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&- \Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{31}{16}e^2 - \frac{155}{32}e'^2 + \frac{3}{4}\gamma^4 - \frac{29}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{661}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{5251}{512}e^4 - \frac{5237}{64}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\
&- \Big(\frac{81}{64} - \frac{469}{32}\gamma^2 + \frac{2459}{128}e^2 - \frac{14743}{1024}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} - \Big(\frac{347}{288} - \frac{1477}{144}\gamma^2 + \frac{15869}{576}e^2 - \frac{86969}{2304}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7} \\
&- \frac{12283}{1728}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{30469}{3456}\frac{n'^9}{n^9} - \frac{9}{32}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&- \Big(\frac{7}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 + \frac{345}{128}e^2 - \frac{3}{32}e'^2 + \frac{105}{16}\gamma^4 - \frac{673}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{21}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{2119}{2048}e^4 - \frac{349}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&- \Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{59}{24}e^2 - \frac{155}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} - \Big(\frac{81}{64} - \frac{469}{32}\gamma^2 + \frac{5089}{192}e^2 - \frac{14743}{1024}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&- \frac{347}{288}\frac{n'^7}{n^7} - \frac{12283}{1728}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{9}{32}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&- \Big(\frac{7}{32} - \frac{35}{16}\gamma^2 + \frac{345}{128}e^2 - \frac{3}{32}e'^2 + \frac{157}{16}\gamma^4 - \frac{1631}{64}\gamma^2 e^2 - \frac{49}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{2119}{2048}e^4 - \frac{349}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&- \Big(\frac{1}{8} - \frac{7}{12}\gamma^2 + \frac{59}{24}e^2 - \frac{155}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} - \Big(\frac{81}{64} - \frac{193}{12}\gamma^2 + \frac{5089}{192}e^2 - \frac{14743}{1024}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&- \frac{347}{288}\frac{n'^7}{n^7} - \frac{12283}{1728}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{9}{32}\frac{n'^4}{n^4}\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ 2 &+ \Big(\frac{205}{16} - \frac{399}{4}\gamma^2 - \frac{1949}{256}e^2 - \frac{225}{16}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} + \Big(\frac{47}{4} - 45\gamma^2 - \frac{1779}{64}e^2 - \frac{7717}{16}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \frac{1999}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{23503}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{da}{dG} = -\frac{1}{an}\left\{\left(9 - \frac{543}{8}\gamma^2 - \frac{9389}{256}e^2 - 9e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{33}{4} - \frac{63}{2}\gamma^2 - \frac{5019}{64}e^2 - \frac{2949}{8}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\right.$$
$$\left. + \frac{183}{2}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{2891}{24}\frac{n'^7}{n^7}\right\},$$

$$\frac{da}{dH} = \frac{1}{an}\left\{\left(\frac{15}{8} - \frac{105}{8}\gamma^2 + \frac{219}{16}e^2 + \frac{21}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{15}{2}e^2 - \frac{661}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{469}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1477}{144}\frac{n'^7}{n^7}\right\},$$

$$\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2ne}\left\{1 - e^2 - \left(\frac{117}{64} - \frac{265}{16}\gamma^2 + \frac{8091}{256}e^2 + \frac{23}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{25}{24}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{2801}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2ne}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \left(\frac{117}{64} - \frac{265}{16}\gamma^2 + \frac{6099}{256}e^2 + \frac{23}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{25}{24}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{2801}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{dH} = -\frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{295}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = -\frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{7}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{5}{32} + \frac{3}{16}\gamma^2 + \frac{305}{128}e^2 + \frac{7}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{137}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{5}{32} - \frac{11}{8}\gamma^2 + \frac{305}{128}e^2 + \frac{7}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{137}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

4^e^ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (116) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (116) *, dans lequel l'argument est $2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{9}{4}\gamma^4e^2\right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (116), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de la fonction R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trois premières opérations.

$$+\left(\frac{7}{16}-\frac{15}{4}\gamma^2+\frac{11}{4}e^2-\frac{3}{16}e'^2+\frac{105}{8}\gamma^4-\frac{81}{4}\gamma^2e^2-\frac{21}{4}\gamma^2e'^2-\frac{9181}{1024}e^4-\frac{15}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{3}{16}-\frac{3}{4}\gamma^2+\frac{81}{32}e^2-\frac{75}{8}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{715}{384}-\frac{3899}{192}\gamma^2+\frac{40199}{1536}e^2-\frac{40727}{1536}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{227}{144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{44933}{4608}\frac{n'^6}{n^6}+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2+\frac{9}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\}$$

$$m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\frac{9}{4}e+\frac{9}{2}\gamma^2e+\frac{39}{32}e^3+\frac{45}{8}ee'^2-\frac{9}{4}\gamma^4e-\frac{39}{16}\gamma^2e^3-\frac{45}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{5}{256}e^5-\frac{195}{64}e^3e'^2$$

$$-\frac{117}{64}ee'^4+\left(\frac{27}{8}ee'^2+\frac{27}{2}\gamma^2ee'^2+\frac{1179}{64}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{67}{16}e-\frac{125}{4}\gamma^2e-\frac{197}{32}e^3-\frac{1153}{256}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{1}{24}e-\frac{1}{3}\gamma^2e+\frac{5}{96}e^3-\frac{2245}{96}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\frac{2623}{144}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{16957}{3456}e\frac{n'^5}{n^5}-\frac{5}{4}e\frac{a^2}{a'^2}\Big\}\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-2l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=1,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=-2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dG}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G=2L+(G),\qquad H=2L+(H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_4)\left\{\begin{aligned}a=\frac{(G)^2}{\mu}\Big\{&1-e^2+\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{4}e^6+\frac{3}{32}e^8\\&+\left[\frac{7}{16}-\frac{15}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{99}{64}e^2-\frac{3}{16}e'^2+\frac{105}{32}\left(\frac{(H)-(G)}{(G)}\right)^2+\frac{247}{32}\frac{(H)-(G)}{(G)}e^2\right.\\&\qquad\left.-\frac{21}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2-\frac{22563}{1024}e^4-\frac{305}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\\&-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}+\frac{7}{12}e^2-\frac{155}{16}e'^2\right]\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\\&+\left[\frac{81}{32}-\frac{469}{32}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{527}{192}e^2-\frac{14743}{512}e'^2\right]\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}\\&\qquad-\frac{347}{144}\frac{n'^7(G)^{21}}{\mu^{14}}+\frac{428777}{27648}\frac{n'^8(G)^{24}}{\mu^{16}}+\frac{9}{16}\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{(G)^4}{\mu^2a'^2}\Big\},\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_4)\left\{\begin{aligned}\gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\Bigg\{ & 1 + e^2 + \frac{3}{4}e^4 + \frac{5}{8}e^6 - \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{119}{64}e^2 - \frac{5}{16}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ & + \frac{1}{12}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{53}{96}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, en ayant soin de tenir compte de ce que (G) est négatif, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{L} = -(\mathrm{G})\Bigg\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{128}e^8 \\ & - \left[\frac{131}{128}e^2 - \frac{295}{64}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e^2 - \frac{1465}{1024}e^4 + \frac{17}{128}e^2e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ & + \frac{7}{12}e^2\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{761}{96}e^2\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\};\end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_4)\left\{\begin{aligned}\frac{de}{dt} = \frac{n'^2(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Bigg\{ & \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{147}{32}e^2 - \frac{45}{8}e'^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2 + \frac{75}{32}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e^2 \\ & + \frac{45}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{967}{256}e^4 + \frac{735}{64}e^2e'^2 + \frac{117}{64}e'^4 \\ & + \left[\frac{27}{8}e'^2 + \frac{27}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{531}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ & + \left[\frac{67}{16} - \frac{125}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - 25e^2 - \frac{1153}{256}e'^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\ & - \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{19}{96}e^2 - \frac{2245}{96}e'^2\right]\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\ & + \frac{35893}{2304}\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{11773}{3456}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} + \frac{5}{4}\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + \frac{dl}{dt} - 2n' = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}, \dfrac{da}{d\mathrm{G}}, \dfrac{da}{d\mathrm{H}}, \dfrac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 3^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_4)\left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu^2}{(\mathrm{G})^3}\Bigg\{ & 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e^4 + 2\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\ & - \frac{1}{4}\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{3}{8}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(D_4)\quad
\begin{aligned}
&+\frac{n'^2(G)^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Big\{\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{513}{32}e^2-\frac{45}{8}e'^2+\frac{9}{16}\left(\frac{(H)-(G)}{(G)}\right)^2+\frac{297}{32}\frac{(H)-(G)}{(G)}e^2\\
&\qquad+\frac{45}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2+\frac{6587}{256}e^4+\frac{2565}{64}e^2e'^2+\frac{117}{64}e'^4\\
&\qquad+\left[\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2+\frac{1377}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'(G)^3}{\mu^2}\\
&\qquad+\left[\frac{67}{16}-\frac{125}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{1267}{16}e^2-\frac{1153}{256}e'^2\right]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\left[\frac{1}{24}-\frac{1}{6}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{61}{96}e^2-\frac{2245}{96}e'^2\right]\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\\
&\qquad+\frac{35893}{2304}\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}-\frac{11773}{3456}\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}+\frac{5}{4}\frac{(G)^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Ces deux équations différentielles (C_4), (D_4) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(E_4)\quad
\begin{aligned}
e\cos\theta=&\Big[\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{273}{16}e_0^2-\frac{45}{8}e'^2+\frac{9}{16}\left(\frac{(H)-(G)}{(G)}\right)^2+\frac{201}{16}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^2\\
&\qquad+\frac{45}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2+\frac{11445}{256}e_0^4+\frac{1365}{32}e_0^2e'^2+\frac{117}{64}e'^4\Big]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\\
&-\Big[\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{381}{8}e_0^2-\frac{117}{8}e'^2+\frac{9}{8}\left(\frac{(H)-(G)}{(G)}\right)^2+\frac{309}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^2\\
&\qquad+\frac{9}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2+\frac{23001}{128}e_0^4+\frac{3657}{32}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\\
&+\left[\frac{55}{4}-\frac{47}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{12019}{64}e_0^2-\frac{8785}{256}e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\\
&-\left[\frac{86}{3}-\frac{539}{12}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{11131}{24}e_0^2-\frac{36091}{384}e'^2\right]\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\\
&-\frac{98299}{4608}\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}+\frac{3172321}{6912}\frac{n'^7(G)^{21}}{\mu^{14}}+\frac{5}{4}\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\cdot\frac{(G)^4}{\mu^2a'^2}-\frac{5}{2}\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\cdot\frac{(G)^4}{\mu^2a'^2}\\
&+\Big\{e_0-\left[\frac{1971}{64}e_0-\frac{1647}{32}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0-\frac{65169}{256}e_0^3-\frac{9855}{64}e_0e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad+\frac{1107}{8}e_0\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}-\frac{169203}{256}e_0\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\cos\theta_0(t+c)
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$
(E_4)\left\{\begin{aligned}
&+\Big\{\left[\frac{291}{32}e_0^2-\frac{219}{32}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^2-\frac{4033}{128}e_0^4-\frac{1455}{64}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\left[\frac{399}{16}e_0^2-\frac{327}{16}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^2-\frac{7957}{64}e_0^4-\frac{3891}{64}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad+\frac{12459}{128}e_0^2\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}-\frac{3825}{16}e_0^2\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{31563}{512}e_0^3\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\cos 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

$$
(F_4)\left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&+\Big\{\left[\frac{291}{32}e_0^2-\frac{219}{32}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^2-\frac{4033}{128}e_0^4-\frac{1455}{64}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\left[\frac{399}{16}e_0^2-\frac{327}{16}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^2-\frac{7957}{64}e_0^4-\frac{3891}{64}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad+\frac{12459}{128}e_0^2\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}-\frac{3825}{16}e_0^2\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{31563}{512}e_0^3\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\theta_0=-\frac{\mu^2}{(G)^3}\left\{1+\frac{3}{2}e_0^2+\frac{9}{8}e_0^4+2\frac{n'(G)^3}{\mu^2}-\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}+\frac{9}{8}e_0^2+\frac{3}{8}e'^2\right]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}+\frac{511}{8}\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.
$$

Si de ces formules (E_4), (F_4) on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_4), (B_4), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(G_4)\left\{\begin{aligned}
&a=\frac{(G)^2}{\mu}\Big\{1-e_0^2+\frac{1}{2}e_0^4-\frac{1}{4}e_0^6+\frac{3}{32}e_0^8\\
&\qquad-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\frac{(H)-G)}{(G)}-\frac{3717}{32}e_0^2-\frac{201}{8}e'^2+\frac{69}{16}\left(\frac{(H)-(G)}{(G)}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{3157}{16}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^2+\frac{213}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2+\frac{515295}{512}e_0^4+\frac{18985}{32}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad+\left[20-40\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{1642}{3}e_0^2-\frac{427}{4}e'^2\right]\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\\
&\qquad-\left[\frac{2547}{32}-\frac{6191}{32}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{1970215}{768}e_0^2-\frac{105457}{256}e'^2\right]\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}\\
&\qquad\qquad+\frac{36049}{144}\frac{n'^7(G)^{21}}{\mu^{14}}-\frac{9139753}{27648}\frac{n'^8(G)^{24}}{\mu^{16}}-\frac{81}{16}\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{(G)^4}{\mu^2a'^2}\Big\}
\end{aligned}\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

(G_4)

$$-\frac{(G)^2}{\mu}\Bigg\{\left[\frac{9}{2}e_0-\frac{9}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0-\frac{327}{16}e_0^3-\frac{45}{4}e_0e'^2+\frac{9}{8}\left(\frac{(H)-(G)}{(G)}\right)^2e_0\right.$$

$$\left.+\frac{255}{16}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^3+\frac{45}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0e'^2+\frac{5851}{128}e_0^5+\frac{1635}{32}e_0^3e'^2+\frac{117}{32}e_0e'^4\right]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}$$

$$-\left[9e_0-9\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0-\frac{435}{8}e_0^3-\frac{117}{4}e_0e'^2+\frac{9}{4}\left(\frac{(H)-(G)}{(G)}\right)^2e_0\right.$$

$$\left.+\frac{363}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^3+9\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0e'^2+\frac{10423}{64}e_0^5+\frac{4359}{32}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}$$

$$+\left[\frac{55}{2}e_0-47\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0-\frac{13339}{64}e_0^3-\frac{8785}{128}e_0e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}$$

$$-\left[\frac{172}{3}e_0-\frac{539}{6}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0-\frac{12163}{24}e_0^3-\frac{36091}{192}e_0e'^2\right]\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}$$

$$-\frac{454051}{2304}e_0\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}+\frac{6715585}{3456}e_0\frac{n'^7(G)^{21}}{\mu^{14}}+\frac{5}{2}e_0\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\cdot\frac{(G)^4}{\mu^2a'^2}$$

$$-5e_0\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\cdot\frac{(G)^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)$$

$$-\frac{(G)^2}{\mu}\Bigg\{\left[\frac{81}{16}e_0^2-\frac{81}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0^2-\frac{2619}{64}e_0^4-\frac{405}{16}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}$$

$$-\frac{567}{16}e_0^2\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}+\frac{10845}{64}e_0^2\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}\cos 2\theta_0(t+c);$$

(H_1)

$$\gamma^2=\frac{1}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}\Bigg\{1+e_0^2+\frac{3}{4}e_0^4+\frac{5}{8}e_0^6+\left[5-10\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{2897}{32}e_0^2-25e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}$$

$$-\frac{121}{6}\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}+\frac{7831}{96}\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}\Bigg\{\left[\frac{9}{2}e_0-\frac{9}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0-\frac{147}{16}e_0^3-\frac{45}{4}e_0e'^2\right]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}$$

$$-\left[9e_0-9\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0-\frac{255}{8}e_0^3-\frac{117}{4}e_0e'^2\right]\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}$$

$$+\frac{55}{2}e_0\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}-\frac{172}{3}e_0\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}\cdot\frac{567}{32}e_0^2\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c).$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0 = \frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 - e_0^2 + \frac{1}{2}e_0^4 - \frac{1}{4}e_0^6 + \frac{3}{32}e_0^8 \\
& - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{3717}{32}e_0^2 - \frac{201}{8}e'^2 + \frac{69}{16}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2 + \frac{3157}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^2\right. \\
& \qquad \left. + \frac{213}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{515295}{512}e_0^4 + \frac{18985}{32}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
& + \left[20 - 40\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{1642}{3}e_0^2 - \frac{427}{4}e'^2\right]\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} \\
& - \left[\frac{2547}{32} - \frac{6191}{32}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{1970215}{768}e_0^2 - \frac{105457}{256}e'^2\right]\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}} \\
& + \frac{36049}{144}\frac{n'^7(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}} - \frac{9139753}{27648}\frac{n'^8(\mathrm{G})^{24}}{\mu^{16}} - \frac{81}{16}\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\Bigg\{ & 1 + e_0^2 + \frac{3}{4}e_0^4 + \frac{5}{8}e_0^6 \\
& + \left[5 - 10\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{2897}{32}e_0^2 - 25e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{121}{6}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} + \frac{7831}{96}\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_4), (F_4) (G_4), (H_4), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$
(\mathrm{E}'_4)\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = & \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\gamma_0^2 - \frac{165}{16}e_0^2 - \frac{45}{8}e'^2 + \frac{9}{4}\gamma_0^4 + \frac{129}{8}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{45}{4}\gamma_0^2 e'^2\right. \\
& \qquad \left. + \frac{933}{256}e_0^4 + \frac{825}{32}e_0^2 e'^2 + \frac{117}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \left(\frac{9}{2} - 9\gamma_0^2 - \frac{219}{8}e_0^2 - \frac{117}{8}e'^2 + \frac{9}{2}\gamma_0^4 + \frac{183}{4}\gamma_0^2 e_0^2 + 9\gamma_0^2 e'^2 + \frac{1401}{128}e_0^4 + \frac{1551}{32}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\
& + \left(\frac{55}{4} - 47\gamma_0^2 - \frac{6739}{64}e_0^2 - \frac{8785}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} + \left(\frac{86}{3} - \frac{539}{6}\gamma_0^2 - \frac{5971}{24}e_0^2 - \frac{36091}{384}e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5} \\
& + \frac{45557}{4608}\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{1591849}{6912}\frac{n'^7}{n_0^7} + \frac{5}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{5}{2}\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}
\end{aligned}
\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$(E'_4)\quad \left\{\begin{aligned}
&+\Bigg[e_0-\left(\frac{1971}{64}e_0-\frac{1647}{16}\gamma_0^2 e_0-\frac{17865}{256}e_0^3-\frac{9855}{64}e_0 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{1107}{8}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{169203}{256}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
&+\Bigg[\left(\frac{291}{32}e_0^2-\frac{219}{16}\gamma_0^2 e_0^2-\frac{541}{128}e_0^4-\frac{1455}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad+\left(\frac{399}{16}e_0^2-\frac{327}{8}\gamma_0^2 e_0^2-\frac{775}{64}e_0^4-\frac{3891}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{12459}{128}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{3825}{16}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{31563}{512}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_4)\quad \left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&+\Bigg[\left(\frac{291}{32}e_0^2-\frac{219}{16}\gamma_0^2 e_0^2-\frac{541}{128}e_0^4-\frac{1455}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad+\left(\frac{399}{16}e_0^2-\frac{327}{8}\gamma_0^2 e_0^2-\frac{775}{64}e_0^4-\frac{3891}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{12459}{128}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{3825}{16}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{31563}{512}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_4)\quad \left\{\begin{aligned}
&a=a_0\Big\}\,1-\Bigg[\Bigg(\frac{9}{2}e_0-9\gamma_0^2 e_0-\frac{39}{16}e_0^3-\frac{45}{4}e_0 e'^2+\frac{9}{2}\gamma_0^4 e_0+\frac{39}{8}\gamma_0^2 e_0^3\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{45}{2}\gamma_0^2 e_0 e'^2-\frac{5}{128}e_0^5+\frac{195}{32}e_0^3 e'^2+\frac{117}{32}e_0 e'^4\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad+\Bigg(9e_0-18\gamma_0^2 e_0-\frac{39}{8}e_0^3-\frac{117}{4}e_0 e'^2+9\gamma_0^4 e_0+\frac{39}{4}\gamma_0^2 e_0^3\\
&\qquad\qquad\qquad+18\gamma_0^2 e_0 e'^2-\frac{5}{64}e_0^5-\frac{789}{32}e_0^3 e'^2\Bigg)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad+\left(\frac{55}{2}e_0-94\gamma_0^2 e_0-\frac{1019}{64}e_0^3-\frac{8785}{128}e_0 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad+\left(\frac{172}{3}e_0-\frac{539}{3}\gamma_0^2 e_0-\frac{467}{24}e_0^3-\frac{36091}{192}e_0 e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\
&\qquad\qquad-\frac{262243}{2304}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}-\frac{4680217}{3456}e_0\frac{n'^7}{n_0^7}+\frac{5}{2}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}+5e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
&-\Bigg[\left(\frac{81}{16}e_0^2-\frac{81}{4}\gamma_0^2 e_0^2-\frac{351}{64}e_0^4-\frac{405}{16}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{567}{16}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{10845}{64}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}\Bigg]\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_4)\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2 - \gamma_0^2 + \Big[\Big(\frac{9}{2}\gamma_0^2 e_0 - 9\gamma_0^4 e_0 - \frac{3}{16}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{45}{4}\gamma_0^2 e_0 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad + \Big(9\gamma_0^2 e_0 - 18\gamma_0^4 e_0 - \frac{3}{8}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{117}{4}\gamma_0^2 e_0 e'^2\Big)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad + \frac{55}{2}\gamma_0^2 e_0 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{172}{3}\gamma_0^2 e_0 \frac{n'^5}{n_0^5}\Big]\cos\theta_0(t+c)\\
&\quad + \frac{567}{32}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\Big[1 - 2\frac{n'}{n_0} - \Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\gamma_0^2 + \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{911}{16}\frac{n'^4}{n_0^4}\Big].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Big[&1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2\\
&+ \Big(\frac{49}{32} - \frac{45}{4}\gamma^2 + \frac{27}{8}e^2 - \frac{21}{32}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{7}{16}\frac{n'^3}{n^3} + \frac{1649}{192}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Big]\\
+ \frac{n'^2}{n}\Big[&\frac{63}{8}e - \frac{45}{4}\gamma^2 e - \frac{177}{64}e^3 - \frac{315}{16}ee'^2 + \frac{27}{8}\gamma^4 e + \frac{171}{32}\gamma^2 e^3 + \frac{225}{8}\gamma^2 ee'^2 - \frac{177}{512}e^5\\
&+ \frac{885}{128}e^3 e'^2 - \frac{351}{16}ee'^2\frac{n'}{n} + \Big(\frac{1273}{32}e - \frac{2125}{8}\gamma^2 e - \frac{6631}{128}e^3 - \frac{21907}{512}ee'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}\\
&+ \frac{25}{48}e\frac{n'^3}{n^3} + \frac{645239}{2304}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{75}{8}e\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}&\Big[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 + \frac{15}{16}\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1}{8}\frac{n'^3}{n^3}\Big]\\
+ \frac{n'^2}{n}&\Big[\frac{9}{4}e - \frac{9}{4}\gamma^2 e - \frac{3}{32}e^3 - \frac{45}{8}ee'^2 + \frac{27}{4}ee'^2\frac{n'}{n} + \frac{125}{8}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1}{6}e\frac{n'^3}{n^3}\Big]\cos\theta;
\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_4), (F'_4), (G'_4), (H'_4), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_4)\quad\left\{\begin{aligned}
h+g+l = &-(h)-(g)+2h'+2g'+2l'+(\theta_0-h_0-g_0)(t+c)\\
&+\Bigg[\left(\frac{117}{8}e_0-\frac{99}{4}\gamma_0^2e_0-\frac{411}{64}e_0^3-\frac{585}{16}e_0e'^2+\frac{81}{8}\gamma_0^4e_0+\frac{405}{32}\gamma_0^2e_0^3\right.\\
&\qquad\left.+\frac{495}{8}\gamma_0^2e_0e'^2-\frac{207}{512}e_0^5+\frac{2055}{128}e_0^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\quad+\left(\frac{171}{4}e_0-\frac{153}{2}\gamma_0^2e_0-\frac{645}{32}e_0^3-\frac{2223}{16}e_0e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\quad+\left(\frac{1375}{8}e_0-\frac{1081}{2}\gamma_0^2e_0-\frac{22997}{256}e_0^3-\frac{219625}{512}e_0e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad+\frac{1333}{3}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{1564435}{9216}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{105}{8}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c)\\
&+\left[\frac{4185}{128}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{12501}{64}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_4)\quad\left\{\begin{aligned}
h = &(h)+h_0(t+c)\\
&+\Bigg[\left(\frac{9}{4}e_0-\frac{9}{4}\gamma_0^2e_0-\frac{3}{32}e_0^3-\frac{45}{8}e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}+\left(\frac{9}{2}e_0-\frac{9}{2}\gamma_0^2e_0-\frac{3}{16}e_0^3-\frac{9}{2}e_0e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad+\frac{47}{2}e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{539}{12}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin\theta_0(t+c)\\
&+\frac{405}{64}e_0^2\,\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\theta-h-g+2h'+2g'+2l'.$$

Les six formules (E'_4), (F'_4), (G'_4), (H'_4), (K_4), (L_4) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (116); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$ par

$$\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\gamma^2-\frac{165}{16}e^2-\frac{45}{8}e'^2+\frac{9}{4}\gamma^4+\frac{129}{8}\gamma^2e^2+\frac{45}{4}\gamma^2e'^2+\frac{933}{256}e^4+\frac{825}{32}e^2e'^2+\frac{117}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{9}{2}-9\gamma^2-\frac{219}{8}e^2-\frac{117}{8}e'^2+\frac{9}{2}\gamma^4+\frac{183}{4}\gamma^2e^2+9\gamma^2e'^2+\frac{1401}{128}e^4+\frac{1551}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{55}{4}-47\gamma^2-\frac{6739}{64}e^2-\frac{8785}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{86}{3}-\frac{539}{6}\gamma^2-\frac{5971}{24}e^2-\frac{36091}{384}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{45557}{4608}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{1591849}{6912}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{5}{4}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5}{2}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+\left[e-\left(\frac{1971}{64}e-\frac{1647}{16}\gamma^2e-\frac{17865}{256}e^3-\frac{9855}{64}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left.-\frac{1107}{8}e\frac{n'^5}{n^5}-\frac{169203}{256}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{291}{32}e^2-\frac{219}{16}\gamma^2e^2-\frac{541}{128}e^4-\frac{1455}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{399}{16}e^2-\frac{327}{8}\gamma^2e^2-\frac{775}{64}e^4-\frac{3891}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left.+\frac{12459}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3825}{16}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l'$$

$$+\frac{31563}{512}e^3\frac{n'^4}{n^4}\cos 3(2h+2g+l-2h'-2g'-2l');$$

$e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$ par

$$e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{291}{32}e^2-\frac{219}{16}\gamma^2e^2-\frac{541}{128}e^4-\frac{1455}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{399}{16}e^2-\frac{327}{8}\gamma^2e^2-\frac{775}{64}e^4-\frac{3891}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left.+\frac{12459}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3825}{16}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{31563}{512}e^3\frac{n'^4}{n^4}\sin 3(2h+2g+l-2h'-2g'-2l');$$

a par

$$a\Big\{1-\Bigg[\Bigg(\frac{9}{2}e-9\gamma^2e-\frac{39}{16}e^3-\frac{45}{4}ee'^2+\frac{9}{2}\gamma^4e+\frac{39}{8}\gamma^2e^3+\frac{45}{2}\gamma^2ee'^2-\frac{5}{128}e^5+\frac{195}{32}e^3e'^2+\frac{117}{32}ee'^4\Bigg)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\Bigg(9e-18\gamma^2e-\frac{39}{8}e^3-\frac{117}{4}ee'^2+9\gamma^4e+\frac{39}{4}\gamma^2e^3+18\gamma^2ee'^2-\frac{5}{64}e^5-\frac{789}{32}e^3e'^2\Bigg)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\Bigg(\frac{55}{2}e-94\gamma^2e-\frac{1019}{64}e^3-\frac{8785}{128}ee'^2\Bigg)\frac{n'^4}{n^4}+\Bigg(\frac{172}{3}e-\frac{539}{3}\gamma^2e-\frac{467}{24}e^3-\frac{36091}{192}ee'^2\Bigg)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$-\frac{262243}{2304}e\frac{n'^6}{n^6}-\frac{4680217}{3456}e\frac{n'^7}{n^7}+\frac{5}{2}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+5e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]$$

$$\times\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\Bigg[\Bigg(\frac{81}{16}e^2-\frac{81}{4}\gamma^2e^2-\frac{351}{64}e^4-\frac{405}{16}e^2e'^2\Bigg)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{567}{16}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{10845}{64}e^2\frac{n'^6}{n^6}\Bigg]\cos 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')\Big\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\Bigg[\Bigg(\frac{9}{2}\gamma^2e-9\gamma^4e-\frac{3}{16}\gamma^2e^3-\frac{45}{4}\gamma^2ee'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n^2}+\Bigg(9\gamma^2e-18\gamma^4e-\frac{3}{8}\gamma^2e^3-\frac{117}{4}\gamma^2ee'^2\Bigg)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{55}{2}\gamma^2e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{172}{3}\gamma^2e\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{567}{32}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\Bigg[\Bigg(\frac{117}{8}e-\frac{99}{4}\gamma^2e-\frac{411}{64}e^3-\frac{585}{16}ee'^2+\frac{81}{8}\gamma^4e+\frac{405}{32}\gamma^2e^3+\frac{495}{8}\gamma^2ee'^2$$

$$-\frac{207}{512}e^5+\frac{2055}{128}e^3e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\Bigg(\frac{171}{4}e-\frac{153}{2}\gamma^2e-\frac{645}{32}e^3-\frac{2223}{16}ee'^2\Bigg)\frac{n'^3}{n^3}+\Bigg(\frac{1375}{8}e-\frac{1081}{2}\gamma^2e-\frac{22997}{256}e^3-\frac{219625}{512}ee'^2\Bigg)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{1333}{3}e\frac{n'^5}{n^5}-\frac{1564435}{9216}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{105}{8}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\Bigg[\frac{4185}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{12501}{64}e^2\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\sin 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l');$$

h par

$$\begin{aligned}
&h + \left[\left(\frac{9}{4}e - \frac{9}{4}\gamma^2 e - \frac{3}{32}e^3 - \frac{45}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{9}{2}e - \frac{9}{2}\gamma^2 e - \frac{3}{16}e^3 - \frac{9}{2}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{47}{2}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{539}{12}e\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')\\
&+ \frac{405}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$\begin{aligned}
&e^2 + \left(\frac{81}{16} - \frac{81}{4}\gamma^2 - \frac{4941}{64}e^2 - \frac{405}{16}e'^2 + \frac{243}{8}\gamma^4 + \frac{4293}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{405}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{281835}{1024}e^4 + \frac{24705}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(\frac{81}{4} - 81\gamma^2 - \frac{2835}{8}e^2 - \frac{1863}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{657}{8} - \frac{1665}{4}\gamma^2 - \frac{426177}{256}e^2 - \frac{225657}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \frac{1011}{4}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{503349}{1024}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{45}{8}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\\
&+ \left[\left(\frac{9}{2}e - 9\gamma^2 e - \frac{39}{16}e^3 - \frac{45}{4}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(9e - 18\gamma^2 e - \frac{39}{8}e^3 - \frac{117}{4}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{55}{2}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{172}{3}e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')\\
&+ \frac{81}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l');
\end{aligned}$$

$e^2\cos 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$ * par

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{81}{16} - \frac{81}{4}\gamma^2 - \frac{4941}{64}e^2 - \frac{405}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{81}{4} - 81\gamma^2 - \frac{2835}{8}e^2 - \frac{1863}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{657}{8}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1011}{4}\frac{n'^7}{n^7}\\
&+ \left[\left(\frac{9}{2}e - 9\gamma^2 e - \frac{165}{8}e^3 - \frac{45}{4}ee'^2 + \frac{9}{2}\gamma^4 e + \frac{129}{4}\gamma^2 e^3 + \frac{45}{2}\gamma^2 ee'^2 + \frac{933}{128}e^5 + \frac{825}{16}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\\
&\quad + \left(9e - 18\gamma^2 e - \frac{219}{4}e^3 - \frac{117}{4}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{55}{2}e - 94\gamma^2 e - \frac{6739}{32}e^3 - \frac{8785}{128}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{172}{3}e\frac{n'^5}{n^5} - \frac{273745}{2304}e\frac{n'^6}{n^6} + \frac{5}{2}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$+\left[e^2 + \frac{81}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{891}{16}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{291}{16}e^3 - \frac{219}{8}\gamma^2 e^3 - \frac{541}{64}e^5 - \frac{1455}{32}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{399}{8}e^3\frac{n'^3}{n^3} + \frac{12459}{64}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 3(2h+2g+l-2h'-2g'-2l');$$

$e^2 \sin 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$ par

$$\left[\left(\frac{9}{2}e - 9\gamma^2 e - \frac{165}{8}e^3 - \frac{45}{4}ee'^2 + \frac{9}{2}\gamma^4 e + \frac{129}{4}\gamma^2 e^3 + \frac{45}{2}\gamma^2 ee'^2 + \frac{933}{128}e^5 + \frac{825}{16}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$+\left(9e - 18\gamma^2 e - \frac{219}{4}e^3 - \frac{117}{4}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{55}{2}e - 94\gamma^2 e - \frac{6739}{32}e^3 - \frac{8785}{128}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$\left. + \frac{172}{3}e\frac{n'^5}{n^5} + \frac{45557}{2304}e\frac{n'^6}{n^6} + \frac{5}{2}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[e^2 + \frac{81}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{891}{16}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{291}{16}e^3 - \frac{219}{8}\gamma^2 e^3 - \frac{541}{64}e^5 - \frac{1455}{32}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{399}{8}e^3\frac{n'^3}{n^3} + \frac{12459}{64}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 3(2h+2g+l-2h'-2g'-2l');$$

$e^3 \cos 3(2h+2g+l-2h'-2g'-2l)$ par

$$\frac{729}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{2187}{32}\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\left[\left(\frac{243}{16}e - \frac{243}{4}\gamma^2 e - \frac{23733}{128}e^3 - \frac{1215}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left. + \frac{243}{4}e\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1971}{8}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{27}{4}e^2 - \frac{27}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}e^4 - \frac{135}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{27}{2}e^2 - 27\gamma^2 e^2 - \frac{657}{8}e^4 - \frac{351}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left. + \frac{165}{4}e^2\frac{n'^4}{n^4} + 86e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[e^3 + \frac{9801}{128}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 3(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{873}{32}e^4\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1197}{16}e^4\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos 4(2h+2g+l-2h'-2g'-2l').$$

$e^3 \sin 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$ par

$$\left[\left(\frac{243}{16}e - \frac{243}{4}\gamma^2 e - \frac{23733}{128}e^3 - \frac{1215}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{243}{4}e\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1971}{8}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\left[\left(\frac{27}{4}e^2 - \frac{27}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}e^4 - \frac{135}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{27}{2}e^2 - 27\gamma^2 e^2 - \frac{657}{8}e^4 - \frac{351}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{165}{4}e^2\frac{n'^4}{n^4} + 86e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\left[e^3 + \frac{9801}{128}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\left[\frac{873}{32}e^4\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1197}{16}e^4\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 4(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$e^4 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 4(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$ par

$$\frac{729}{16}e\frac{n'^6}{n^6}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\left[\frac{243}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{243}{2}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\left[\left(9e^3 - 18\gamma^2 e^3 - \frac{165}{4}e^5 - \frac{45}{2}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + 18e^3\frac{n'^3}{n^3} + 55e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+e^4\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 4(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+\frac{291}{8}e^5\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 5(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_4), (F'_4) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_4), (H'_4), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 290)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{81}{64}e^2 - \frac{81}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{351}{256}e^4 - \frac{405}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{81}{16}e^2 - \frac{81}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{351}{64}e^4 - \frac{1863}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} - \frac{657}{32}e^2\frac{n'^6}{n^6} - \frac{1011}{16}e^2\frac{n'^7}{n^7} - \frac{4617}{512}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{11745}{256}\frac{n'^9}{n^9}\right\},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_1 = \sqrt{a\mu}\Bigg\{ & -\left(\frac{9}{4}e - \frac{9}{2}\gamma^2 e - \frac{39}{32}e^3 - \frac{45}{8}ee'^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e + \frac{39}{16}\gamma^2 e^3 + \frac{45}{4}\gamma^2 ee'^2 \right.\\
& \qquad \left. - \frac{5}{256}e^5 + \frac{195}{64}e^3 e'^2 + \frac{117}{64}ee'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
& -\left(\frac{9}{2}e - 9\gamma^2 e - \frac{39}{16}e^3 - \frac{117}{8}ee'^2 + \frac{9}{2}\gamma^4 e + \frac{39}{8}\gamma^2 e^3 + 9\gamma^2 ee'^2 - \frac{5}{128}e^5 - \frac{789}{64}e^3 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
& -\left(\frac{55}{4}e - 47\gamma^2 e - \frac{1019}{128}e^3 - \frac{8785}{256}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{86}{3}e - \frac{539}{6}\gamma^2 e - \frac{467}{48}e^3 - \frac{36091}{384}ee'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
& + \frac{254791}{4608}e\frac{n'^6}{n^6} + \frac{4628701}{6912}e\frac{n'^7}{n^7} - \frac{5}{4}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2} - \frac{5}{2}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{L}_2 = \sqrt{a\mu}\left\{ - \frac{243}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{729}{32}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 290)

$$\begin{aligned}
+\sqrt{a\mu}\Bigg\{ & -\left(\frac{81}{32} - \frac{81}{8}\gamma^2 - \frac{4779}{128}e^2 - \frac{405}{32}e'^2 + \frac{243}{16}\gamma^4 + \frac{4131}{32}\gamma^2 e^2 \right.\\
& \qquad \left. + \frac{405}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{244251}{2048}e^4 + \frac{23895}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
& -\left(\frac{81}{8} - \frac{81}{2}\gamma^2 - \frac{1377}{8}e^2 - \frac{1863}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} - \left(\frac{657}{16} - \frac{1665}{8}\gamma^2 - \frac{415665}{512}e^2 - \frac{225657}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
& - \frac{1011}{8}\frac{n'^7}{n^7} - \frac{537855}{2048}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{45}{16}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 290)

$$\begin{aligned}
+\sqrt{a\mu}\Bigg\{ & -\left(\frac{81}{32} - \frac{243}{16}\gamma^2 - \frac{4779}{128}e^2 - \frac{405}{32}e'^2 + \frac{567}{16}\gamma^4 + \frac{11745}{64}\gamma^2 e^2 \right.\\
& \qquad \left. + \frac{1215}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{244251}{2048}e^4 + \frac{23895}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
& -\left(\frac{81}{8} - \frac{243}{4}\gamma^2 - \frac{1377}{8}e^2 - \frac{1863}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} - \left(\frac{657}{16} - \frac{1161}{4}\gamma^2 - \frac{415665}{512}e^2 - \frac{225657}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
& - \frac{1011}{8}\frac{n'^7}{n^7} - \frac{537855}{2048}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{45}{16}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 et θ_2 à l'aide des formules (41), on trouve

$$\begin{aligned}
\theta_1 = \frac{1}{e}\Bigg\{ & -\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\gamma^2 - \frac{621}{32}e^2 - \frac{45}{8}e'^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 + \frac{477}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{45}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{2015}{256}e^4 + \frac{3105}{64}e^2 e'^2 + \frac{117}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
& -\left(\frac{9}{2} - 9\gamma^2 - \frac{837}{16}e^2 - \frac{117}{8}e'^2 + \frac{9}{2}\gamma^4 + \frac{693}{8}\gamma^2 e^2 + 9\gamma^2 e'^2 + \frac{2951}{128}e^4 + \frac{6993}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}
\end{aligned}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$-\left(\frac{55}{4}-47\gamma^2-\frac{25937}{128}e^2-\frac{8785}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{86}{3}-\frac{539}{6}\gamma^2-\frac{23417}{48}e^2-\frac{36091}{384}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$-\frac{417347}{4608}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{2108555}{6912}\frac{n'^7}{n^7}-\frac{5}{4}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{5}{2}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\theta_2=\frac{1}{e^2}\cdot\left\{\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{81}{8}\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots\ldots)=$$

$$\sqrt{a\mu}\Big\{\left(\frac{81}{32}-\frac{81}{8}\gamma^2-\frac{1485}{64}e^2-\frac{405}{32}e'^2+\frac{243}{16}\gamma^4+\frac{1323}{16}\gamma^2e^2+\frac{405}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{42309}{2048}e^4+\frac{7425}{64}e^2e'^2+\frac{5103}{256}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{81}{8}-\frac{81}{2}\gamma^2-108e^2-\frac{1863}{32}e'^2+\frac{243}{4}\gamma^4+\frac{783}{2}\gamma^2e^2+\frac{2997}{16}\gamma^2e'^2+\frac{50733}{512}e^4+\frac{4239}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{657}{16}-\frac{1665}{8}\gamma^2-\frac{128487}{256}e^2-\frac{225657}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\left(\frac{1011}{8}-\frac{5331}{8}\gamma^2-\frac{218323}{128}e^2-\frac{186429}{256}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{519387}{2048}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{25151}{768}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{45}{16}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 301 à 303) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 4^e opération, et y ajoutant

$$+2n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)-2n'.\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (116) de R, joint à la quantité $+2n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-2n'.\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [4 · · · 1, 116]. Ensuite les valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &+ \Big(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 - \frac{201}{16}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{213}{4}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad + \frac{28549}{1024}e^4 + \frac{501}{4}e^2 e'^2 + \frac{2361}{128}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 - \frac{427}{8}e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 + 146\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 + \frac{10253}{16}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \Big(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 - \frac{105457}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \Big(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 - \frac{397723}{576}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7} \\
&\qquad + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{151103}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \Big(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 - \frac{201}{16}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{213}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{78757}{1024}e^4 + \frac{3077}{64}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 - \frac{427}{8}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 - \frac{105457}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&\qquad + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \Big(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 - \frac{201}{16}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 + \frac{227}{8}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad - \frac{78757}{1024}e^4 + \frac{3077}{64}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 - \frac{427}{8}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 - \frac{105457}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&\qquad + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ 2 + \left(\frac{359}{8} - \frac{375}{2}\gamma^2 + \frac{45371}{128}e^2 - \frac{1395}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(140 - 396\gamma^2 + \frac{18411}{8}e^2 - \frac{3421}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\ + \frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{387}{4} - \frac{1473}{4}\gamma^2 - \frac{22933}{128}e^2 - \frac{1791}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(420 - 1476\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 - \frac{9669}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\ + \frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{33}{4} - \frac{69}{4}\gamma^2 - \frac{771}{8}e^2 - \frac{213}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + (40 - 120\gamma^2 - 399e^2 - 146e'^2)\frac{n'^5}{n^5} \\ + \frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{36549}{128}e^2 - \frac{4939}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{57693}{128}e^2 - \frac{4939}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{757}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4};$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = -\frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{17}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} + \frac{879}{8}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 - \frac{199}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} - \frac{127}{4}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 - \frac{199}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

5^{e} OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (117) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (117) * dans lequel l'argument est $2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Bigg\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 - \frac{201}{8}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{213}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{24341}{512}e^4 + \frac{1785}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 - \frac{327}{4}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 - \frac{220193}{768}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{5644303}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2} \Bigg\} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Bigg\{ -\frac{63}{8}ee' + \frac{63}{4}\gamma^2 ee' + \frac{273}{64}e^3 e' + \frac{1107}{64}ee'^3 - \frac{63}{8}\gamma^4 ee' - \frac{273}{32}\gamma^2 e^3 e' + \frac{35}{512}e^5 e' \\
& \qquad - \left(\frac{27}{32}ee' + \frac{27}{8}\gamma^2 ee' + \frac{1179}{256}e^3 e' - \frac{1107}{128}ee'^3\right)\frac{n'}{n} - \left(\frac{465}{32}ee' - \frac{867}{8}\gamma^2 ee' - \frac{1377}{64}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \frac{167}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{442813}{3072}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{45}{8}ee'\frac{a^2}{a'^2} \Bigg\} \\
& \times \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -3.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (117), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quatre premières opérations.

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

et par suite, en intégrant

$$\mathrm{G} = 2\mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = 2\mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant on trouve

$$(\mathrm{A}_5)\left\{\begin{aligned} a = \frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{ & 1 - e^2 + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{4}e^6 - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{3717}{32}e^2 - \frac{201}{8}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ & + \left[20 - 40\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{1642}{3}e^2 - \frac{427}{4}e^{2}\right]\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} \\ & - \frac{2547}{32}\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}} + \frac{36049}{144}\frac{n'^7(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_5)\quad \gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\left\{1 + e^2 + \frac{3}{4}e^4 + 5\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{121}{6}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, en ayant soin de tenir compte de ce que (G) est négatif, il vient

$$\mathrm{L} = -(\mathrm{G})\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{221}{3}e^2\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_5)\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{n'^2(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{63}{8}e' - \frac{63}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{1029}{64}e^2e' - \frac{1107}{64}e'^3 + \frac{63}{32}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2 e' \\ & + \frac{525}{64}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e^2e' + \frac{6769}{512}e^4e' \\ & - \left[\frac{27}{32}e' + \frac{27}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{531}{256}e^2e' - \frac{1107}{128}e'^3\right]\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ & + \left[\frac{465}{32}e' - \frac{867}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{2781}{32}e^2e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\ & - \frac{167}{32}e'\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6} + \frac{90167}{3072}e'\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{8}e'\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= 2\frac{dh}{dt}+2\frac{dg}{dt}+\frac{dl}{dt}-3n' \\ &= -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}-3n';\end{aligned}$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 4^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_5)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu^2}{(\mathrm{G})^3}\Bigg\{ & 1+\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{8}e^4+3\,\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ & -\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}+\frac{9}{8}e^2+\frac{3}{8}e'^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}+\frac{511}{8}\,\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Bigg\} \\ & +\frac{n'^2(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Bigg\{\frac{63}{8}e'-\frac{63}{8}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'-\frac{3591}{64}e^2e'-\frac{1107}{64}e'^3+\frac{63}{32}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2e' \\ & +\frac{2079}{64}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e^2e'+\frac{46109}{512}e^4e' \\ & -\left[\frac{27}{32}e'+\frac{27}{16}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'+\frac{1377}{256}e^2e'-\frac{1107}{128}e'^3\right]\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ & +\left[\frac{465}{32}e'-\frac{867}{16}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'-\frac{1101}{4}e^2e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\ & -\frac{167}{32}e'\,\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}+\frac{90167}{3072}e'\,\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}+\frac{45}{8}e'\,\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_5), (D_5) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_5)\quad \left\{\begin{aligned}e\cos\theta = & \Bigg[\frac{63}{8}e'-\frac{63}{8}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'-\frac{1911}{32}e_0^2e'-\frac{1107}{64}e'^3+\frac{63}{32}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2e' \\ & +\frac{1407}{32}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^2e'+\frac{80115}{512}e_0^4e'\Bigg]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\ & -\left[\frac{783}{32}e'-\frac{351}{16}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'-\frac{31851}{128}e_0^2e'-\frac{7749}{128}e'^3\right]\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$
(\mathrm{E}_5)\left\{\begin{aligned}
&+\left[\frac{2877}{32}e'-\frac{1857}{16}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e'-\frac{76449}{64}e_0^2\,e'\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&-\frac{35975}{128}e'\,\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}+\frac{1204151}{3072}e'\,\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}+\frac{45}{8}e'\,\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\cdot\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2 a'^2}\\
&+\left\{e_0-\frac{96579}{256}e_0 e'^2\,\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\
&+\left\{\left[\frac{2037}{64}e_0^2\,e'-\frac{1533}{64}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^2\,e'-\frac{28231}{256}e_0^4\,e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{33417}{256}e_0^2\,e'\,\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}+\frac{39663}{64}e_0^2\,e'\,\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_5)\left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta = e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&+\left\{\left[\frac{2037}{64}e_0^2\,e'-\frac{1533}{64}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^2\,e'-\frac{28231}{256}e_0^4\,e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{33417}{256}e_0^2\,e'\,\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}+\frac{39663}{64}e_0^2\,e'\,\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=-\frac{\mu^2}{(\mathrm{G})^3}\left\{1+\frac{3}{2}e_0^2+3\,\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{1}{4}\,\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces formules (E_5), (F_5), on tire la valeur de e^2 et qu'on l'introduise dans les relations (A_5), (B_5), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_5)\left\{\begin{aligned}
&a=\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\left\{1-e_0^2+\frac{1}{2}e_0^4-\frac{1}{4}e_0^6\right.\\
&\qquad-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{3717}{32}e_0^2+\frac{2361}{64}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad+\left[20-40\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{1642}{3}e_0^2+\frac{35665}{128}e'^2\right]\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{2547}{32}\,\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}+\frac{36049}{144}\,\frac{n'^7(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}\right\}
\end{aligned}\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{G}_1)\left\{\begin{aligned}
&-\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{\bigg[\frac{63}{4}e_0e'-\frac{63}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0e'-\frac{2289}{32}e_0^3e'-\frac{1107}{32}e_0e'^3\\
&\qquad+\frac{63}{16}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2e_0e'+\frac{1785}{32}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^3e'+\frac{40957}{256}e_0^5e'\bigg]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\quad-\left[\frac{783}{16}e_0e'-\frac{351}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0e'-\frac{36549}{128}e_0^3e'-\frac{7749}{64}e_0e'^3\right]\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\\
&\quad+\left[\frac{2877}{16}e_0e'-\frac{1857}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0e'-\frac{10635}{8}e_0^3e'\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad-\frac{35975}{64}e_0e'\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{1605901}{1536}e_0e'\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}+\frac{45}{4}e_0e'\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\cdot\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\cdot\frac{3969}{64}e_0^2e'^2\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_1)\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2=\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\left\{1+e_0^2+\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{121}{6}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\Bigg\{\left[\frac{63}{4}e_0e'-\frac{63}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0e'-\frac{1029}{32}e_0^3e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\qquad\qquad-\frac{783}{16}e_0e'\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}+\frac{2877}{16}e_0e'\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0=\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{&1-e_0^2+\frac{1}{2}e_0^4-\frac{1}{4}e_0^6-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{3717}{32}e_0^2+\frac{2361}{64}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&+\left[20-40\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{1642}{3}e_0^2+\frac{35665}{128}e'^2\right]\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}+\frac{36049}{144}\frac{n'^7(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2=\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\left\{1+e_0^2+\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{121}{6}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_5), (F_5), (G_5), (H_5), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$
(E'_5)\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta &= \left(\frac{63}{8}e' - \frac{63}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{1155}{32}e_0^2 e' - \frac{1107}{64}e'^3 + \frac{63}{8}\gamma_0^4 e' + \frac{903}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{6531}{512}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&+ \left(\frac{783}{32}e' - \frac{351}{8}\gamma_0^2 e' - \frac{17757}{128}e_0^2 e' - \frac{7749}{128}e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&+ \left(\frac{2877}{32}e' - \frac{1857}{8}\gamma_0^2 e' - \frac{41925}{64}e_0^2 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{35975}{128}e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{1539815}{3072}e'\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{45}{8}e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\\
&+ \left[e_0 - \frac{96579}{256}e_0 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
&+ \left[\left(\frac{2037}{64}e_0^2 e' - \frac{1533}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{3787}{256}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{33417}{256}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{39663}{64}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$
(F'_5)\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta &= e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&+ \left[\left(\frac{2037}{64}e_0^2 e' - \frac{1533}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{3787}{256}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{33417}{256}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{39663}{64}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$
(G'_5)\left\{\begin{aligned}
a = a_0\Bigg\{1 &- \left[\left(\frac{63}{4}e_0 e' - \frac{63}{2}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{273}{32}e_0^3 e' - \frac{1107}{32}e_0 e'^3 + \frac{63}{4}\gamma_0^4 e_0 e'\right.\right.\\
&\qquad\left. + \frac{273}{16}\gamma_0^2 e_0^3 e' - \frac{35}{256}e_0^5 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&+ \left(\frac{783}{16}e_0 e' - \frac{351}{4}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{2097}{128}e_0^3 e' - \frac{7749}{64}e_0 e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&+ \left(\frac{2877}{16}e_0 e' - \frac{1857}{4}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{1131}{16}e_0^3 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\left. + \frac{35975}{64}e_0 e'\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{1158349}{1536}e_0 e'\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{45}{4}e_0 e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
&- \frac{3969}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c)\Bigg\};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(H'_5)\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 &+ \left[\left(\frac{63}{4}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{63}{2}\gamma_0^4 e_0 e' - \frac{21}{32}\gamma_0^2 e_0^3 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{783}{16}\gamma_0^2 e_0 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{2877}{16}\gamma_0^2 e_0 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0 \left[1 - 3 \frac{n'}{n_0} - \frac{1}{4} \frac{n'^2}{n_0^2} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = - \frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = - \frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} &\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2} - 35 \frac{n'^3}{n^3} \right] \\ + \frac{n'^2}{n} &\left[\frac{441}{16} ee' - \frac{315}{8}\gamma^2 ee' - \frac{1239}{128} e^3 e' - \frac{7749}{128} ee'^3 \right. \\ &\left. + \left(\frac{351}{64} ee' + \frac{297}{16}\gamma^2 ee' + \frac{13023}{512} e^3 e' \right) \frac{n'}{n} + \frac{8835}{64} ee' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{4175}{64} ee' \frac{n'^3}{n^3} \right] \cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = - \frac{n'^2}{n} &\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{33}{8}\frac{n'^2}{n^2} \right] \\ + \frac{n'^2}{n} &\left[\frac{63}{8} ee' - \frac{63}{8}\gamma^2 ee' - \frac{21}{64} e^3 e' - \frac{27}{16} ee' \frac{n'}{n} + \frac{867}{16} ee' \frac{n'^2}{n^2} \right] \cos\theta; \end{aligned}$$

d'où en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_5), (F'_5), (G'_5), (H'_5), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_5) \left\{ \begin{aligned} h + g + l = &-(h) - (g) + 2h' + 2g' + 3l' + (\theta_0 - h_0 - g_0)(t + c) \\ &+ \left[\left(\frac{819}{16} e_0 e' - \frac{693}{8} \gamma_0^2 e_0 e' - \frac{2877}{128} e_0^3 e' - \frac{14391}{128} e_0 e'^3 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \right. \\ &\quad + \left(\frac{14877}{64} e_0 e' - \frac{5967}{16} \gamma_0^2 e_0 e' - \frac{34083}{512} e_0^3 e' \right) \frac{n'^3}{n_0^3} \\ &\quad \left. + \frac{71925}{64} e_0 e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{1115225}{256} e_0 e' \frac{n'^5}{n_0^5} \right] \sin\theta_0 (t + c), \end{aligned} \right.$$

$$(L_5) \left\{ \begin{aligned} h = &(h) + h_0 (t + c) \\ &+ \left[\left(\frac{63}{8} e_0 e' - \frac{63}{8} \gamma_0^2 e_0 e' - \frac{21}{64} e_0^3 e' \right) \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{351}{16} e_0 e' \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{1857}{16} e_0 e' \frac{n'^4}{n^4} \right] \sin\theta_0 (t + c). \end{aligned} \right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\theta-h-g+2h'+2g'+3l'.$$

Les six formules (E'_5), (F'_5), (G'_5), (H'_5), (K_5), (L_5) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (117); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')$ par

$$\left(\frac{63}{8}e'-\frac{63}{4}\gamma^2e'-\frac{1155}{32}e^2e'-\frac{1107}{64}e'^3+\frac{63}{8}\gamma^4e'+\frac{903}{16}\gamma^2e^2e'+\frac{65319}{512}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{783}{32}e'-\frac{351}{8}\gamma^2e'-\frac{17757}{128}e^2e'-\frac{7749}{128}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{2877}{32}e'-\frac{1857}{8}\gamma^2e'-\frac{41925}{64}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{35975}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1539815}{3072}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{45}{8}e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+\left[e-\frac{96579}{256}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[\left(\frac{2037}{64}e^2e'-\frac{1533}{32}\gamma^2e^2e'-\frac{3787}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{33417}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{39663}{64}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos2(2h+2g+l-2h'-2g'-3l');$$

$e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')$ par

$$e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\left[\left(\frac{2037}{64}e^2e'-\frac{1533}{32}\gamma^2e^2e'-\frac{3787}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{33417}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{39663}{64}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin2(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')$$

a par

$$a\Big\{1-\Big[\Big(\frac{63}{4}ee'-\frac{63}{2}\gamma^2ee'-\frac{273}{32}e^3e'-\frac{1107}{32}ee'^3+\frac{63}{4}\gamma^4ee'+\frac{273}{16}\gamma^2e^3e'-\frac{35}{256}e^5e'\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\Big(\frac{783}{16}ee'-\frac{351}{4}\gamma^2ee'-\frac{2097}{128}e^3e'-\frac{7749}{64}ee'^3\Big)\frac{n'^3}{n^3}+\Big(\frac{2877}{16}ee'-\frac{1857}{4}\gamma^2ee'-\frac{1131}{16}e^3e'\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{35975}{64}ee'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{1158349}{1536}ee'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{45}{4}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')$$

$$-\frac{3969}{64}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h+2g+l-2h'-2g'-3l')\Big\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\Big[\Big(\frac{63}{4}\gamma^2ee'-\frac{63}{2}\gamma^4ee'-\frac{21}{32}\gamma^2e^3e'\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\frac{783}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2877}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-3l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\Big[\Big(\frac{819}{16}ee'-\frac{693}{8}\gamma^2ee'-\frac{2877}{128}e^3e'-\frac{14391}{128}ee'^3\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\Big(\frac{14877}{64}ee'-\frac{5967}{16}\gamma^2ee'-\frac{34083}{512}e^3e'\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{71925}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1115225}{256}ee'\frac{n'^5}{n^5}\Big]\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-3l');$$

h par

$$h+\Big[\Big(\frac{63}{8}ee'-\frac{63}{8}\gamma^2ee'-\frac{21}{64}e^3e'\Big)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{351}{16}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1857}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}\Big]\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-3l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2+\Big(\frac{3969}{64}e'^2-\frac{3969}{16}\gamma^2e'^2-\frac{242109}{256}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{49329}{128}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{2063097}{1024}e'^2\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\Big[\Big(\frac{63}{4}ee'-\frac{63}{2}\gamma^2ee'-\frac{273}{32}e^3e'\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\frac{783}{16}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2877}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-3l');$$

$e^2 \cos 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$ * par

$$\frac{3969}{64} e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{49329}{128} e'^2 \frac{n'^5}{n^5}$$

$$+ \left[\left(\frac{63}{4} ee' - \frac{63}{2} \gamma^2 ee' - \frac{1155}{16} e^3 e' - \frac{1107}{32} ee'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{783}{16} ee' - \frac{351}{4} \gamma^2 ee' - \frac{17757}{64} e^3 e' \right) \frac{n'^3}{n^3} \right.$$

$$\left. + \frac{2877}{16} ee' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{35975}{64} ee' \frac{n'^5}{n^5} \right] \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l'$$

$$+ e^2 \cos 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ \left[\frac{2037}{32} e^3 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{33417}{128} e^3 e' \frac{n'^3}{n^3} \right] \cos 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l');$$

$e^2 \sin 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$ par

$$\left[\left(\frac{63}{4} ee' - \frac{63}{2} \gamma^2 ee' - \frac{1155}{16} e^3 e' - \frac{1107}{32} ee'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{783}{16} ee' - \frac{351}{4} \gamma^2 ee' - \frac{17757}{64} e^3 e' \right) \frac{n'^3}{n^3} \right.$$

$$\left. + \frac{2877}{16} ee' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{35975}{64} ee' \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ e^2 \sin 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ \left[\frac{2037}{32} e^3 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{33417}{128} e^3 e' \frac{n'^3}{n^3} \right] \sin 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l');$$

$e^3 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$ par

$$\frac{11907}{64} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ \left[\left(\frac{189}{8} e^2 e' - \frac{189}{4} \gamma^2 e^2 e' - \frac{3465}{32} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} \right.$$

$$\left. + \frac{2349}{32} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{8631}{32} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ e^3 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$\frac{6111}{64} e^4 e' \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 4(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 3l').$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_5), (F'_5) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_5), (H'_5) dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_0 = {} & \text{anciennne valeur de L (page 308)} \\
& + \sqrt{a\mu}\,\Big\{ -\frac{3969}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{49329}{512}e^2e'^2\frac{n'^5}{n^5} \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_1 = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ & -\left(\frac{63}{8}ee' - \frac{63}{4}\gamma^2ee' - \frac{273}{64}e^3e' - \frac{1107}{64}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{783}{32}ee' - \frac{351}{8}\gamma^2ee' - \frac{2097}{256}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& - \frac{2877}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{35975}{128}ee'\frac{n'^5}{n^5} \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_0 = {} & \text{ancienne valeur de G (page 308)} \\
& + \sqrt{a\mu}\,\Big\{ -\left(\frac{3969}{128}e'^2 - \frac{3969}{32}\gamma^2e'^2 - \frac{234171}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{49329}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{2063097}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6} \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_0 = {} & \text{ancienne valeur de H (page 308)} \\
& + \sqrt{a\mu}\,\Big\{ -\left(\frac{3969}{128}e'^2 - \frac{11907}{64}\gamma^2e'^2 - \frac{234171}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{49329}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{2063097}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6} \Big\}.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\begin{aligned}
\theta_1 = \frac{1}{e}\Big\{ & -\left(\frac{63}{8}e' - \frac{63}{4}\gamma^2e' - \frac{4347}{64}e^2e' - \frac{1107}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{783}{32}e' - \frac{351}{8}\gamma^2e' - \frac{68931}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& - \frac{2877}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{35975}{128}e'\frac{n'^5}{n^5} \Big\}.
\end{aligned}$$

De là on conclut

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1 + 2\theta_2\mathrm{L}_2 + \ldots) = \\
& \sqrt{a\mu}\,\Big\{ \left(\frac{3969}{128}e'^2 - \frac{3969}{32}\gamma^2e'^2 - \frac{72765}{256}e^2e'^2 - \frac{69741}{512}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \quad + \left(\frac{49329}{256}e'^2 - \frac{93555}{128}\gamma^2e'^2 - \frac{126441}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{2063097}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1129779}{256}e'^2\frac{n'^7}{n^7} \Big\}.
\end{aligned}$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 317 et 318) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 5^e opération, et y ajoutant

$$+3n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)-3n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (117) de R, joint à la quantité $+3n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-3n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [5 · · · · · · · 1,117]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&+\Big(\frac{37}{16}-\frac{33}{4}\gamma^2-\frac{105}{4}e^2+\frac{2361}{128}e'^2+\frac{69}{8}\gamma^4+\frac{201}{2}\gamma^2e^2-\frac{2265}{32}\gamma^2e'^2\\
&\qquad+\frac{28549}{1024}e^4-\frac{22335}{128}e^2e'^2-\frac{60297}{512}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(10-40\gamma^2-115e^2+\frac{35665}{256}e'^2+60\gamma^4+419\gamma^2e^2-\frac{74867}{128}\gamma^2e'^2\\
&\qquad+\frac{7349}{64}e^4-\frac{732761}{512}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\Big(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{138661}{256}e^2+\frac{1641269}{2048}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+\Big(\frac{36049}{288}-\frac{94481}{144}\gamma^2-\frac{2069437}{1152}e^2+\frac{8577119}{2304}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad+\frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{151103}{1728}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\
&+\Big(\frac{37}{16}-\frac{33}{4}\gamma^2-\frac{753}{64}e^2+\frac{2361}{128}e'^2+\frac{69}{8}\gamma^4+\frac{917}{16}\gamma^2e^2-\frac{2265}{32}\gamma^2e'^2\\
&\qquad-\frac{78757}{1024}e^4-\frac{32273}{512}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(10-40\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+\frac{35665}{256}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\Big(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{1641269}{2048}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$H = \text{[illegible]} - \frac{1}{2}\text{[illegible]} - \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}\text{[illegible]} - \frac{1}{4}\gamma^2\text{[illegible]} - \frac{1}{16}e'\text{[illegible]} - \frac{1}{8}\gamma^2 e'\text{[illegible]} - \frac{5}{128}\text{[illegible]}$$

$$- \Big(\text{[illegible]} - \frac{25}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 - \frac{2361}{128}\text{[illegible]} - \frac{119}{8}\gamma^4 - \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2153}{64}\gamma^2 e'^2$$

$$- \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{32273}{512}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \Big(12 - \frac{52}{3}\gamma^2 - \frac{136}{3}e^2 - \frac{35665}{256}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} - \Big(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 - \frac{1641269}{2048}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$- \frac{36049}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{13131757}{55296}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{81}{32}\frac{n'^2}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

De ces valeurs de L. G. H. on déduit

$$\frac{\text{[illegible]}}{dL} = \frac{1}{\text{[illegible]}}\Big\{2 - \Big(\frac{1359}{8} - \frac{575}{2}\gamma^2 - \frac{25571}{128}\text{[illegible]} - \frac{13977}{64}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \Big(146 - 396\gamma^2 - \frac{15411}{8}e^2 - \frac{162121}{128}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$- \frac{41875}{64}\frac{n'^4}{n^4} - \frac{483281}{288}\frac{n'^5}{n^5}\Big\}.$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{dG} = -\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\Big\{\Big(\frac{387}{4} - \frac{1475}{\text{[illegible]}}\gamma^2 - \frac{22035}{128}e^2 - \frac{\text{[illegible]}}{16}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \Big(420 - 1476\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 - \frac{328947}{64}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$- \frac{126279}{64}\frac{n'^4}{n^4} - \frac{1880475}{288}\frac{n'^5}{n^5}\Big\}.$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{dH} = -\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\Big\{\Big(\frac{33}{4} - \frac{63}{4}\gamma^2 - \frac{771}{8}e^2 - \frac{2215}{32}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \Big(\text{[illegible]} - 120\gamma^2 - 399e^2 - \frac{74867}{128}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$- \frac{6191}{32}\frac{n'^4}{n^4} - \frac{94481}{144}\frac{n'^5}{n^5}\Big\}.$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{dL} = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\Big\{\text{[illegible]} - \Big(\frac{227}{32} - \frac{591}{8}\gamma^2 - \frac{\text{[illegible]}}{128}e^2 - \frac{57067}{256}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{412}{3}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{496405}{768}\frac{n'^4}{n^4}\Big\}.$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} = -\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}\text{[illegible]} - \frac{1}{16}\text{[illegible]}$$

$$- \Big(\frac{327}{32} - \frac{591}{8}\gamma^2 - \frac{57693}{128}e^2 - \frac{57067}{256}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{412}{3}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{496405}{768}\frac{n'^4}{n^4}\Big\}.$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{dH} = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\cdot\frac{757}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2}.$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} = -\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\cdot\frac{57}{4}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}.$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{dG} = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\Big\{1 - 2\text{[illegible]} - \frac{1}{4}e^2 - \text{[illegible]} - \frac{3}{8}\text{[illegible]} - \frac{3}{4}\gamma^2\text{[illegible]} - \frac{5}{16}\text{[illegible]}$$

$$- \Big(\frac{45}{16} - \frac{579}{8}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 - \frac{2377}{128}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{61}{6}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{8021}{192}\frac{n'^4}{n^4}\Big\}.$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\Big\{1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{8}\text{[illegible]} - \frac{5}{16}e'\text{[illegible]} - \Big(\frac{43}{16} - \frac{127}{4}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 - \frac{2377}{128}e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{61}{6}\frac{n'^3}{n^3} + \frac{8021}{192}\frac{n'^4}{n^4}\Big\}.$$

6^{e} OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (121) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (121) *, dans lequel l'argument est $2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{2361}{64}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{2265}{16}\gamma^2 e'^2 \right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{10059}{32}e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{13479}{64}e'^2 \right) \frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{3413605}{3072}e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{5644303}{18432}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2} \right] \frac{a'^2}{a^2} \Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ \frac{9}{8}ee' - \frac{9}{4}\gamma^2 ee' - \frac{39}{64}e^3 e' - \frac{9}{64}ee'^3 + \frac{9}{8}\gamma^4 ee' + \frac{39}{32}\gamma^2 e^3 e' - \frac{5}{512}e^5 e' \\
& \qquad + \left(\frac{27}{32}ee' + \frac{27}{8}\gamma^2 ee' + \frac{1179}{256}e^3 e' + \frac{135}{128}ee'^3 \right) \frac{n'}{n} \\
& \qquad + \left(\frac{63}{32}ee' - \frac{117}{8}\gamma^2 ee' - \frac{195}{64}e^3 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{163}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{591571}{3072}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{5}{8}ee'\frac{a^2}{a'^2} \Big\} \\
& \qquad\qquad \times \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \quad i' = 2, \quad i'' = 2, \quad i''' = -1.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (121), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de la fonction R, avec celles qui y ont été introduites par suite des cinq premières opérations

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$\mathrm{G} = 2\mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = 2\mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_6)\quad \left\{\begin{aligned} a = \frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 - e^2 + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{4}e^6 \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{3717}{32}e^2 + \frac{2361}{64}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ & + \left[20 - 40\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} - \frac{1642}{3}e^2 + \frac{35665}{128}e'^2\right]\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{36049}{144}\frac{n'^7(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_6)\quad \gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\left\{1 + e^2 + \frac{3}{4}e^4 + 5\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{121}{6}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, en ayant soin de tenir compte de ce que (G) est négatif, il vient

$$\mathrm{L} = -(\mathrm{G})\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{221}{3}e^2\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Bigg\{ & \frac{9}{8}e' - \frac{9}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{147}{64}e^2e' - \frac{9}{64}e'^3 + \frac{9}{32}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2e' \\ & + \frac{75}{64}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e^2e' + \frac{967}{512}e^4e' \\ & - \left[\frac{27}{32}e' + \frac{27}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{531}{256}e^2e' + \frac{135}{128}e'^3\right]\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ & + \left[\frac{63}{32}e' - \frac{117}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{381}{32}e^2e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\ & - \frac{163}{32}e'\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6} + \frac{667711}{3072}e'\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{5}{8}e'\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + \frac{dl}{dt} - n' = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \dots$ données à la suite de la 5^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu^2}{(\mathrm{G})^3}\Big\{ & 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e^4 + \frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
& - \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})} + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} + \frac{511}{8}\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\} \\
- \frac{n'^2(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Big\{ & \frac{9}{8}e' - \frac{9}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{513}{64}e^2e' - \frac{9}{64}e'^3 + \frac{9}{32}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2 e' \\
& + \frac{297}{64}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e^2e' + \frac{6587}{512}e^4e' \\
& - \left[\frac{27}{32}e' + \frac{27}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{1377}{256}e^2e' + \frac{135}{128}e'^3\right]\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{63}{32}e' - \frac{117}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{603}{16}e^2e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& - \frac{163}{32}e'\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6} + \frac{667711}{3072}e'\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{5}{8}e'\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_6), (D_6) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_6)\quad \left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = -\Big[& \frac{9}{8}e' - \frac{9}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{273}{32}e_0^2e' - \frac{9}{64}e'^3 + \frac{9}{32}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2 e' \\
& + \frac{201}{32}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^2e' + \frac{11445}{512}e_0^4e'\Big]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{63}{32}e' + \frac{9}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{1371}{128}e_0^2e' + \frac{117}{128}e'^3\right]\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
& - \left[\frac{135}{32}e' - \frac{99}{16}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e' - \frac{3057}{64}e_0^2e'\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(\mathrm{E}_6)\ \left\{\begin{aligned}
&+\frac{1255}{128}e'\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{480319}{3072}e'\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}+\frac{5}{8}e'\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\cdot\frac{(\mathrm{G})^4}{\mu^2 a^2}\\
&+\left\{e_0-\frac{1971}{256}e_0e'^2\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\left\{\left[\frac{291}{64}e_0^2e'-\frac{219}{64}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^2e'-\frac{4033}{256}e_0^4e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1497}{256}e_0^2e'\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}+\frac{399}{16}e_0^2e'\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\cos2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_6)\ \left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&-\left\{\left[\frac{291}{64}e_0^2e'-\frac{219}{64}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^2e'-\frac{4033}{256}e_0^4e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1497}{256}e_0^2e'\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}+\frac{399}{16}e_0^2e'\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\sin2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\theta=-\frac{\mu^2}{(\mathrm{G})^3}\left\{1+\frac{3}{2}e_0^2+\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{1}{4}\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}.
$$

Si de ces formules (E_6), (F_6), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_6), (B_6), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_6)\ \left\{\begin{aligned}
&a=\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\left\{1-e_0^2+\frac{1}{2}e_0^4-\frac{1}{4}e_0^6\right.\\
&\qquad-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{3717}{32}e_0^2+\frac{1221}{32}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad+\left[20-40\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{1642}{3}e_0^2+\frac{4529}{16}e'^2\right]\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{2547}{32}\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}+\frac{36049}{144}\frac{n'^7(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}\right\}\\
&+\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\left\{\left[\frac{9}{4}e_0e'-\frac{9}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0e'-\frac{327}{32}e_0^3e'-\frac{9}{32}e_0e'^3+\frac{9}{16}\left(\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\right)^2e_0e'\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{255}{32}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0^3e'+\frac{5851}{256}e_0^5e'\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\left[\frac{63}{16}e_0e'+\frac{9}{8}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0e'-\frac{1749}{128}e_0^3e'+\frac{117}{64}e_0e'^3\right]\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}
\end{aligned}\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(G_6)\left\{\begin{aligned}
&+\left[\frac{135}{16}e_0e' - \frac{99}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0e' - \frac{1731}{32}e_0^3e'\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad - \frac{1255}{64}e_0e'\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}} + \frac{78883}{1536}e_0e'\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}} - \frac{5}{4}e_0e'\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\cdot\frac{(G)^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta_0(t+c\\
&-\frac{(G)^2}{\mu}\cdot\frac{81}{64}e_0^2e'^2\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\cos2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

$$
(H_6)\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}\Big\{1+e_0^2+\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}-\frac{121}{6}\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}\Big\{\left[\frac{9}{4}e_0e' - \frac{9}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0e' - \frac{147}{32}e_0^3e'\right]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\\
&\qquad\qquad - \frac{63}{16}e_0e'\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6} + \frac{135}{16}e_0e'\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\Big\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0 = \frac{(G)^2}{\mu}\Big\{&1 - e_0^2 + \frac{1}{2}e_0^4 - \frac{1}{4}e_0^6 - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{3717}{32}e_0^2 + \frac{1221}{32}e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\\
&+\left[20 - 40\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{1642}{3}e_0^2 + \frac{4529}{16}e'^2\right]\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}} + \frac{36049}{144}\frac{n'^7(G)^{21}}{\mu^{14}}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\gamma_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}\Big\{1+e_0^2+\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}-\frac{121}{6}\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\}.
$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_6), (F_6), (G_6), (H_6), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$
(E'_6)\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = &-\left(\frac{9}{8}e' - \frac{9}{4}\gamma_0^2e' - \frac{165}{32}e_0^2e' - \frac{9}{64}e'^3 + \frac{9}{8}\gamma_0^4e' + \frac{129}{16}\gamma_0^2e_0^2e' + \frac{933}{512}e_0^4e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&-\left(\frac{63}{32}e' + \frac{9}{8}\gamma_0^2e' - \frac{237}{128}e_0^2e' + \frac{117}{128}e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3} - \left(\frac{135}{32}e' - \frac{99}{8}\gamma_0^2e' - \frac{1437}{64}e_0^2e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&-\frac{1255}{128}e'\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{528271}{3072}e'\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{5}{8}e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\\
&+\left[e_0 - \frac{1971}{256}e_0e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
&-\left[\left(\frac{291}{64}e_0^2e' - \frac{219}{32}\gamma_0^2e_0^2e' - \frac{541}{256}e_0^4e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{1497}{256}e_0^2e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{399}{16}e_0^2e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{F}'_6)\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c) \\ & -\left[\left(\frac{291}{64}e_0^2e' - \frac{219}{32}\gamma_0^2e_0^2e' - \frac{541}{256}e_0^4e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{1497}{256}e_0^2e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{399}{16}e_0^2e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin 2\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_6)\left\{\begin{aligned} a = a_0\Big\{ 1 & + \left[\left(\frac{9}{4}e_0e' - \frac{9}{2}\gamma_0^2e_0e' - \frac{39}{32}e_0^8e' - \frac{9}{32}e_0e'^3 + \frac{9}{4}\gamma_0^4e_0e' + \frac{39}{16}\gamma_0^2e_0^3e' - \frac{5}{256}e_0^5e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\ & + \left(\frac{63}{16}e_0e' + \frac{9}{4}\gamma_0^2e_0e' + \frac{1023}{128}e_0^3e' + \frac{117}{64}e_0e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \left(\frac{135}{16}e_0e' - \frac{99}{4}\gamma_0^2e_0e' + \frac{159}{32}e_0^3e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\ & \left. + \frac{1255}{64}e_0e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{142819}{1536}e_0e'\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{5}{4}e_0e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\cos\theta_0(t+c) \\ & - \frac{81}{64}e_0^2e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c)\Big\};\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_6)\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\left(\frac{9}{4}\gamma_0^2e_0e' - \frac{9}{2}\gamma_0^4e_0e' - \frac{3}{32}\gamma_0^2e_0^3e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{63}{16}\gamma_0^2e_0e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{135}{16}\gamma_0^2e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[1 - \frac{n'}{n_0} - \frac{1}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2} - 35\frac{n'^3}{n^3}\right] \\ - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{63}{16}ee' - \frac{45}{8}\gamma^2ee' - \frac{177}{128}e^3e' - \frac{63}{128}ee'^3\right. \\ \left. + \left(\frac{351}{64}ee' + \frac{297}{16}\gamma^2ee' + \frac{13023}{512}e^3e'\right)\frac{n'}{n} + \frac{1197}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{4075}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{33}{8}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\ - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{8}ee' - \frac{9}{8}\gamma^2ee' - \frac{3}{64}e^3e - \frac{27}{16}ee'\frac{n'}{n} + \frac{117}{16}ee'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_6), (F'_6), (G'_6), (H'_6), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_6)\left\{\begin{aligned} h+g+l &= -(h)-(g)+2h'+2g'+l'+(\theta_0-h_0-g_0)(t+c)\\ &\quad-\left[\left(\frac{117}{16}e_0e'-\frac{99}{8}\gamma_0^2e_0e'-\frac{411}{128}e_0^3e'-\frac{117}{128}e_0e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\ &\quad+\left(\frac{1197}{64}e_0e'+\frac{153}{16}\gamma_0^2e_0e'+\frac{17517}{512}e_0^3e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &\quad\left.+\frac{3375}{64}e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{38905}{256}e_0e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_6)\quad h=(h)+h_0(t+c)-\left[\left(\frac{9}{8}e_0e'-\frac{9}{8}\gamma_0^2e_0e'-\frac{3}{64}e_0^3e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}-\frac{9}{16}e_0e'\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{99}{16}e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\theta-h-g+2h'+2g'+l'.$$

Les six formules (E'_6), (F'_6), (G'_6), (H'_6), (K_6), (L_6) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (121); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du nº **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$ par

$$-\left(\frac{9}{8}e'-\frac{9}{4}\gamma^2e'-\frac{165}{32}e^2e'-\frac{9}{64}e'^3+\frac{9}{8}\gamma^4e'+\frac{129}{16}\gamma^2e^2e'+\frac{933}{512}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{63}{32}e'+\frac{9}{8}\gamma^2e'-\frac{237}{128}e^2e'+\frac{117}{128}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}-\left(\frac{135}{32}e'-\frac{99}{8}\gamma^2e'-\frac{1437}{64}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$-\frac{1255}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{528271}{3072}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{5}{8}e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+\left[e-\frac{1971}{256}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$$

$$-\left[\left(\frac{291}{64}e^2e'-\frac{219}{32}\gamma^2e^2e'-\frac{541}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1497}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{399}{16}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 2(2h+2g+l-2h'-2g'-l'),$$

$e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$ par

$$e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$$
$$-\left[\left(\frac{291}{64}e^2e'-\frac{219}{32}\gamma^2e^2e'-\frac{541}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1497}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{399}{16}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2(2h+2g+l-2h'-2g'-l');$$

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{9}{4}ee'-\frac{9}{2}\gamma^2ee'-\frac{39}{32}e^3e'-\frac{9}{32}ee'^3+\frac{9}{4}\gamma^4ee'+\frac{39}{16}\gamma^2e^3e'-\frac{5}{256}e^5e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\right.$$
$$+\left(\frac{63}{16}ee'+\frac{9}{4}\gamma^2ee'+\frac{1023}{128}e^3e'+\frac{117}{64}ee'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{135}{16}ee'-\frac{99}{4}\gamma^2ee'+\frac{159}{32}e^3e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$\left.+\frac{1255}{64}ee'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{142819}{1536}ee'\frac{n'^6}{n^6}-\frac{5}{4}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$$
$$\left.-\frac{81}{64}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h+2g+l-2h'-2g'-l')\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\left[\left(\frac{9}{4}\gamma^2ee'-\frac{9}{2}\gamma^4ee'-\frac{3}{32}\gamma^2e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{63}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{135}{16}\gamma^2ee'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{117}{16}ee'-\frac{99}{8}\gamma^3ee'-\frac{411}{128}e^3e'-\frac{117}{128}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{1197}{64}ee'+\frac{153}{16}\gamma^2ee'+\frac{17517}{512}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left.+\frac{3375}{64}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{38905}{256}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-l');$$

h par

$$h-\left[\left(\frac{9}{8}ee'-\frac{9}{8}\gamma^2ee'-\frac{3}{64}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{9}{16}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{99}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left(\frac{81}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{4941}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{567}{128}e'^2\frac{n'^5}{n^5} + \frac{13689}{1024}e'^2\frac{n'^6}{n^6}$$

$$-\left[\left(\frac{9}{4}ee' - \frac{9}{2}\gamma^2 ee' - \frac{39}{32}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{63}{16}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{135}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l'$$

$e^2\cos 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$* par

$$\frac{81}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{567}{128}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

$$-\left[\left(\frac{9}{4}ee' - \frac{9}{2}\gamma^2 ee' - \frac{165}{16}e^3 e' - \frac{9}{32}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{63}{16}ee' + \frac{9}{4}\gamma^2 ee' - \frac{237}{64}e^3 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left. + \frac{135}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1255}{64}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+ e^2\cos 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$$

$$-\left[\frac{291}{32}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1497}{128}e^3 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l').$$

$e^2\sin 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$ par

$$-\left[\left(\frac{9}{4}ee' - \frac{9}{2}\gamma^2 ee' - \frac{165}{16}e^3 e' - \frac{9}{32}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{63}{16}ee' + \frac{9}{4}\gamma^2 ee' - \frac{237}{64}e^3 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left. + \frac{135}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1255}{64}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+ e^2\sin 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$$

$$-\left[\frac{291}{32}e^3 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1497}{128}e^3 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l').$$

$e^3 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$ par

$$\frac{243}{64}ee'^2\frac{n'^4}{n^4} \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - l')$$

Cette formule se continue à la page suivante

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$-\left[\left(\frac{27}{8}e^2e' - \frac{27}{4}\gamma^2e^2e' - \frac{495}{32}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{189}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{405}{32}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$$

$$+ e^3\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 3(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$$

$$-\frac{873}{64}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 4(2h+2g+l-2h'-2g'-l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_6), (F'_6) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_6), (H'_6), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$$L_0 = \text{ancienne valeur de L (page 321)} + \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{81}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{567}{512}e^2e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right\},$$

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{9}{8}ee' - \frac{9}{4}\gamma^2ee' - \frac{39}{64}e^3e' - \frac{9}{64}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{63}{32}ee' + \frac{9}{8}\gamma^2ee' + \frac{1023}{256}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{135}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1255}{128}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

$$G_0 = \text{ancienne valeur de G (page 321)} + \sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{81}{128}e'^2 - \frac{81}{32}\gamma^2e'^2 - \frac{4779}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{567}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{13689}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\};$$

$$H_0 = \text{ancienne valeur de H (page 322)} + \sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{81}{128}e'^2 - \frac{243}{64}\gamma^2e'^2 - \frac{4779}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n'} - \frac{567}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{13689}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{\left(\frac{9}{8}e' - \frac{9}{4}\gamma^2e' - \frac{621}{64}e^2e' - \frac{9}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{63}{32}e' + \frac{9}{8}\gamma^2e' - \frac{1971}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{135}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1255}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) =$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{81}{128}e'^2 - \frac{81}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{1485}{256}e^2 e'^2 - \frac{81}{512}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{567}{256}e'^2 - \frac{405}{128}\gamma^2 e'^2 - \frac{783}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\right.$$
$$\left. + \frac{13689}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6} + \frac{2475}{128}e'^2\frac{n'^7}{n^7}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 329 et 330) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 6e opération, et y ajoutant

$$+ n'(L - L_0) - n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (121) de R, joint à la quantité $+n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$- n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication (6 . . . . . 1, 121). Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$L = \sqrt{a\mu}\left\{1 + \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{1221}{64}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{1173}{16}\gamma^2 e'^2\right.\right.$$
$$\left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{11559}{64}e^2 e'^2 - \frac{30189}{256}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + \frac{4529}{32}e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - \frac{9409}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{92449}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{827479}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{8621669}{2304}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$
$$\left. + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{151103}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\};$$

$$
\begin{aligned}
G = \sqrt{a\mu}\,\Big\}\,1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{1221}{64}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{1173}{16}\gamma^2 e'^2\right. \\
&\qquad \left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{16717}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + \frac{4529}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{827479}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H = \sqrt{a\mu}\,\Big\}\,1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{1221}{64}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{1117}{32}\gamma^2 e'^2\right. \\
&\qquad \left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{16717}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + \frac{4529}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{827479}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{.
\end{aligned}
$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dL} = \frac{1}{an}\Big\}\,2 &+ \left(\frac{359}{8} - \frac{375}{2}\gamma^2 + \frac{45371}{128}e^2 + \frac{7245}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(140 - 396\gamma^2 + \frac{18411}{8}e^2 + \frac{19985}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\{,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dG} = -\frac{1}{an}\Big\}&\left(\frac{387}{4} - \frac{1473}{4}\gamma^2 - \frac{22933}{128}e^2 + \frac{5193}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(420 - 1476\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 + 5190\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\{,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dH} = -\frac{1}{an}\Big\}&\left(\frac{33}{4} - \frac{69}{4}\gamma^2 - \frac{771}{8}e^2 + \frac{1173}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(40 - 120\gamma^2 - 399\,e^2 + \frac{9409}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\{,
\end{aligned}
$$

$$\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2ne}\left\{1 - e^2 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{36549}{128}e^2 + \frac{29519}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2ne}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{57693}{128}e^2 + \frac{29519}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left. + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{757}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = -\frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{17}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} + \frac{879}{8}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{1229}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left. + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} - \frac{127}{4}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{1229}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

7^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (88) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (88) * dans lequel l'argument est $2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e'^4\right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2$$
$$- \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{1221}{32}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2e^2\right.$$
$$\left. - \frac{1173}{8}\gamma^2e'^2 + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5205}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (88), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des six premières opérations.

$$
\begin{aligned}
&-\left(15-60\gamma^2-162e^2+\frac{6861}{32}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&-\left(\frac{10915}{192}-\frac{28655}{96}\gamma^2-\frac{568771}{768}e^2+\frac{1722719}{1536}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{5644303}{18432}\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{21}{8}ee'-\frac{21}{4}\gamma^2ee'-\frac{399}{64}e^3e'-\frac{369}{64}ee'^3+\frac{21}{8}\gamma^4ee'+\frac{399}{32}\gamma^2e^3e'+\frac{2247}{512}e^5e'\\
&\qquad+\left(\frac{135}{32}ee'-\frac{243}{8}\gamma^2ee'-\frac{1701}{256}e^3e'-\frac{5535}{128}ee'^3\right)\frac{n'}{n}+\left(\frac{15}{4}ee'-\frac{177}{8}\gamma^2ee'-\frac{993}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&\qquad-\frac{1539}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{307893}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}\Bigg\}\\
&\times\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=3,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=-3.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{3}\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dG}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G=\frac{2}{3}L+(G),\qquad H=\frac{2}{3}L+(H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$
(A.)\quad\left\{
\begin{aligned}
a=\frac{3^2(G)^2}{\mu}\Bigg\{&1+3e^2+\frac{15}{2}e^4+\frac{69}{4}e^6-\left[\frac{37}{8}-\frac{11}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}+\frac{4431}{32}e^2+\frac{1221}{32}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\\
&-\left[20-\frac{40}{3}\frac{(G)-(H)}{(G)}+722e^2+\frac{4529}{16}e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\\
&-\frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}-\frac{36049}{144}\frac{n'^7.3^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(B.)\quad \gamma^2=\frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1-e^2-\frac{3}{4}e^4+5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}+\frac{121}{6}\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\right\}.
$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = 3(\mathrm{G})\left\{1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{21}{8}e^4 + \frac{75}{16}e^6 - \frac{3003}{64}e^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - 221\,e^2\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_7)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{de}{dt} = -\frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Bigg\{&\frac{21}{8}e' - \frac{7}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{21}{64}e^2e' - \frac{369}{64}e'^3 + \frac{7}{96}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2 e' \\
&+ \frac{49}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2e' + \frac{2163}{512}e^4e' \\
&+ \left[\frac{135}{32}e' - \frac{81}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{5859}{256}e^2e' - \frac{5535}{128}e'^3\right]\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{15}{4}e' - \frac{59}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{387}{32}e^2e'\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
&- \frac{1539}{128}e'\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} - \frac{248673}{1024}e'\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\sin\theta.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 3\frac{dl}{dt} - 3n' = -3\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 3n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}$, $\dfrac{da}{d\mathrm{G}}$, $\dfrac{da}{d\mathrm{H}}$, $\dfrac{de}{d\mathrm{L}}$, … données à la suite de la 6^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_7)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\Bigg\{&3 - \frac{27}{2}e^2 + \frac{135}{8}e^4 - 3\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
&- \left[\frac{15}{4} - \frac{13}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{159}{8}e^2 + \frac{45}{8}e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} + \frac{229}{8}\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Bigg\} \\
- \frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Bigg\{&\frac{21}{8}e' - \frac{7}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{1239}{64}e^2e' - \frac{369}{64}e'^3 + \frac{7}{96}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2 e' \\
&- \frac{245}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2e' + \frac{29463}{512}e^4e' \\
&+ \left[\frac{135}{32}e' - \frac{81}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{25137}{256}e^2e' - \frac{5535}{128}e'^3\right]\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{15}{4}e' - \frac{59}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{2001}{32}e^2e'\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
&- \frac{1539}{128}e'\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} - \frac{248673}{1024}e'\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_7), (D_7) correspondent aux équations (23) du chapitre III ; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{3} L\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(E_7)\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \left[\frac{7}{8}e' - \frac{7}{24}\frac{(G)-(H)}{(G)}e' + \frac{357}{32}e_0^2\,e' - \frac{123}{64}e'^3 + \frac{7}{288}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2 e' \right.\\
& \left. - \frac{301}{96}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2\,e' + \frac{32739}{512}e_0^4\,e'\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\\
& + \left[\frac{73}{32}e' - \frac{95}{48}\frac{(G)-(H)}{(G)}e' + \frac{6639}{128}e_0^2\,e' - \frac{2091}{128}e'^3\right]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6}\\
& + \left[\frac{37}{8}e' - \frac{217}{48}\frac{(G)-(H)}{(G)}e' + \frac{4207}{32}e_0^2\,e'\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\\
& + \frac{111}{32}e'\,\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{245905}{3072}e'\,\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\\
& + \left\{e_0 + \frac{1617}{256}e_0\,e'^2\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\
& - \left\{\left[\frac{455}{64}e_0^2\,e' - \frac{133}{64}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2\,e' + \frac{12607}{256}e_0^4\,e'\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\right.\\
& \left. + \frac{7661}{256}e_0^2\,e'\,\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} + \frac{4725}{64}e_0^2\,e'\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(F_7)\left\{
\begin{aligned}
e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c)\\
& - \left\{\left[\frac{455}{64}e_0^2\,e' - \frac{133}{64}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2\,e' + \frac{12607}{256}e_0^4\,e'\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\right.\\
& \left. + \frac{7661}{256}e_0^2\,e'\,\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} + \frac{4725}{64}e_0^2\,e'\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{3^3(G)^3}\left\{3 - \frac{27}{2}e_0^2 - 3\,\frac{n'.3^3(G)^3}{\mu^2} - \frac{15}{4}\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces formules (E_7), (F_7), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_7), (B_7), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(G_7)\left\{
\begin{aligned}
a = \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 3e_0^2 + \frac{15}{2}e_0^4 + \frac{69}{4}e_0^6 \\
& - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{4431}{32}e_0^2 + \frac{2295}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& - \left[20 - \frac{40}{3}\frac{(G)-(H)}{(G)} + 722\,e_0^2 + \frac{34699}{128}e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} \\
& - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} - \frac{36049}{144}\frac{n'^7.3^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}}\Big\} \\
+ \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & \left[\frac{21}{4}e_0e' - \frac{7}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0e' + \frac{1617}{32}e_0^3e' - \frac{369}{32}e_0e'^3\right. \\
& \left. + \frac{7}{48}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2 e_0e' - \frac{483}{32}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^3e' + \frac{76839}{256}e_0^5e'\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{219}{16}e_0e' - \frac{95}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0e' + \frac{25611}{128}e_0^3e' - \frac{6273}{64}e_0e'^3\right]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} \\
& + \left[\frac{111}{4}e_0e' - \frac{217}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0e' + \frac{15507}{32}e_0^3e'\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& + \frac{333}{16}e_0e'\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{369973}{512}e_0e'\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\cos\theta_0(t+c) \\
- \frac{3^2(G)^2}{\mu} & \frac{441}{64}e_0^2e'^2\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(H_7)\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\Big\{ & 1 - e_0^2 - \frac{3}{4}e_0^4 + 5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{121}{6}\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\} \\
- \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\Big\{ & \left[\frac{7}{4}e_0e' - \frac{7}{12}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0e' + \frac{343}{32}e_0^3e'\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\
& + \frac{73}{16}e_0e'\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} + \frac{37}{4}e_0e'\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\Big\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0 = \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 3e_0^2 + \frac{15}{2}e_0^4 + \frac{69}{4}e_0^6 \\
& - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{4431}{32}e_0^2 + \frac{2295}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$\begin{aligned}
-\left[20-\frac{40}{3}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+722\,e_0^2+\frac{34699}{128}\,e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}&\\
-\frac{2547}{32}\,\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}-\frac{36049}{144}\,\frac{n'^7.3^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}&\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2=\frac{1}{6}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1-e_0^2-\frac{3}{4}e_0^4+5\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}+\frac{121}{6}\,\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_7), (F_7), (G_7), (H_7), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_7)\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta=&\left(\frac{7}{8}e'-\frac{7}{4}\gamma_0^2e'+\frac{105}{32}e_0^2e'-\frac{123}{64}e'^3+\frac{7}{8}\gamma_0^4e'-\frac{77}{16}\gamma_0^2e_0^2e'-\frac{4557}{512}e_0^4e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&+\left(\frac{73}{32}e'-\frac{95}{8}\gamma_0^2e'+\frac{2697}{128}e_0^2e'-\frac{2091}{128}e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&+\left(\frac{37}{8}e'-\frac{217}{8}\gamma_0^2e'+\frac{1543}{32}e_0^2e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{111}{32}e'\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{208609}{3072}e'\frac{n'^6}{n_0^6}\\
&+\left[e_0+\frac{1617}{256}e_0e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
&-\left[\left(\frac{455}{64}e_0^2e'-\frac{399}{32}\gamma_0^2e_0^2e'-\frac{3773}{256}e_0^4e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{7661}{256}e_0^2e'\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{4725}{64}e_0^2e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_7)\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta=&\;e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&-\left[\left(\frac{455}{64}e_0^2e'-\frac{399}{32}\gamma_0^2e_0^2e'-\frac{3773}{256}e_0^4e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{7661}{256}e_0^2e'\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{4725}{64}e_0^2e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_7)\left\{\begin{aligned}
a=a_0\Bigg\{1+\Bigg[&\left(\frac{21}{4}e_0e'-\frac{21}{2}\gamma_0^2e_0e'-\frac{399}{32}e_0^3e'-\frac{369}{32}e_0e'^3+\frac{21}{4}\gamma_0^4e_0e'\right.\\
&\qquad\left.+\frac{399}{16}\gamma_0^2e_0^3e'+\frac{2247}{256}e_0^5e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&+\left(\frac{219}{16}e_0e'-\frac{285}{4}\gamma_0^2e_0e'-\frac{3297}{128}e_0^3e'-\frac{6273}{64}e_0e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$(G'_7)\quad \left.\begin{aligned} &\qquad + \left(\frac{111}{4} e_0 e' - \frac{651}{4}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{3141}{32} e_0^3 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\ &\qquad\qquad + \frac{333}{16} e_0 e' \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{320245}{512} e_0 e' \frac{n'^6}{n_0^6}\Bigg]\cos\theta_0(t+c \\ &- \frac{441}{64} e_0^2\, e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c)\Bigg\}; \end{aligned}\right.$$

$$(H'_7)\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\left(\frac{7}{4}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{7}{2}\gamma_0^4 e_0 e' - \frac{105}{32}\gamma_0^2 e_0^3 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{73}{16} e_0 e' \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{37}{4} e_0 e' \frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[3 - 3\frac{n'}{n_0} - \frac{15}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2} - 35\frac{n'^3}{n^3}\right] \\ - \frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{147}{16}ee' - \frac{105}{8}\gamma^2 ee' - \frac{1953}{128}e^3 e' - \frac{2583}{128}ee'^3 \\ + \left(\frac{1755}{64}ee' - \frac{2673}{16}\gamma^2 ee' - \frac{18441}{512}e^3 e'\right)\frac{n'}{n} + \frac{285}{8}ee'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{38475}{256}ee'\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{33}{8}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\ - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{21}{8}ee' - \frac{21}{8}\gamma^2 ee' - \frac{315}{64}e^3 e' + \frac{243}{16}ee'\frac{n'}{n} + \frac{177}{16}ee'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta; \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_7), (F'_7), (G'_7), (H'_7), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_7)\quad \left\{\begin{aligned} &h+g+l = \frac{1}{3}(h) + \frac{1}{3}(g) + \frac{1}{3}(2h' + 2g' + 3l') + \frac{1}{3}(\theta_0 + h_0 + g_0)(t+c) \\ &\qquad - \Bigg[\left(\frac{91}{16}e_0 e' - \frac{77}{8}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{1449}{128}e_0^3 e' - \frac{1599}{128}e_0 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ &\qquad\quad + \left(\frac{1387}{64}e_0 e' - \frac{1615}{16}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{18537}{512}e_0^3 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ &\qquad\qquad + \frac{925}{16}e_0 e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{3441}{64}e_0 e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin\theta_0(t+c \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_7)\left\{\begin{aligned}&h=(h)+h_0(t+c)\\&\quad-\left[\left(\frac{7}{8}e_0\,e'-\frac{7}{8}\gamma_0^2\,e_0\,e'-\frac{105}{64}e_0^3\,e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{95}{16}e_0\,e'\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{217}{16}e_0\,e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{3}\theta+\frac{1}{3}h+\frac{1}{3}g+\frac{1}{3}(2h'+2g'+3l').$$

Les six formules (E'_7), (F'_7), (G'_7), (H'_7), (K_7), (L_7) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (88); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$ par

$$\left(\frac{7}{8}e'-\frac{7}{4}\gamma^2e'+\frac{105}{32}e^2e'-\frac{123}{64}e'^3+\frac{7}{8}\gamma^4e'-\frac{77}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{4557}{512}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{73}{32}e'-\frac{95}{8}\gamma^2e'+\frac{2697}{128}e^2e'-\frac{2091}{128}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{37}{8}e'-\frac{217}{8}\gamma^2e'+\frac{1543}{32}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{111}{32}e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{208609}{3072}e'\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left[e+\frac{1617}{256}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

$$-\left[\frac{455}{64}e^2e'-\frac{399}{32}\gamma^2e^2e'-\frac{3773}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\frac{7661}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{4725}{64}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\cos2(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l');$$

$e \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l')$ par

$$e \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l')$$
$$- \left[\left(\frac{455}{64} e^2 e' - \frac{399}{32} \gamma^2 e^2 e' - \frac{3773}{256} e^4 e'\right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{7661}{256} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{4725}{64} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}\right] \sin 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l');$$

a par

$$a \Bigg\{ 1 + \left[\left(\frac{21}{4} ee' - \frac{21}{2} \gamma^2 ee' - \frac{399}{32} e^3 e' - \frac{369}{32} ee'^3 + \frac{21}{4} \gamma^4 ee' + \frac{399}{16} \gamma^2 e^3 e' + \frac{2247}{256} e^5 e'\right) \frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$+ \left(\frac{219}{16} ee' - \frac{285}{4} \gamma^2 ee' - \frac{3297}{128} e^3 e' - \frac{6273}{64} ee'^3\right) \frac{n'^3}{n^3}$$
$$+ \left(\frac{111}{4} ee' - \frac{651}{4} \gamma^2 ee' - \frac{3141}{32} e^3 e'\right) \frac{n'^4}{n^4}$$
$$\left. + \frac{333}{16} ee' \frac{n'^5}{n^5} - \frac{320245}{512} ee' \frac{n'^6}{n^6}\right] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l')$$
$$- \frac{147}{8} e^2 e'^2 \frac{n'}{n'} \cos 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l') \Bigg\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \left[\left(\frac{7}{4} \gamma^2 ee' - \frac{7}{2} \gamma^4 ee' - \frac{105}{32} \gamma^2 e^3 e'\right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{73}{16} \gamma^2 ee' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{37}{4} ee' \frac{n'^4}{n^4}\right] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l);$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \left[\left(\frac{91}{16} ee' - \frac{77}{8} \gamma^2 ee' - \frac{1449}{128} e^3 e' - \frac{1599}{128} ee'^3\right) \frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$+ \left(\frac{1387}{64} ee' - \frac{1615}{16} \gamma^2 ee' - \frac{18537}{512} e^3 e'\right) \frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left. + \frac{925}{16} ee' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{3441}{64} ee' \frac{n'^5}{n^5}\right] \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l');$$

h par

$$h - \left[\left(\frac{7}{8} ee' - \frac{7}{8} \gamma^2 ee' - \frac{105}{64} e^3 e'\right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{95}{16} ee' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{217}{16} ee' \frac{n'^4}{n^4}\right] \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 3l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2+\left(\frac{49}{64}e'^2-\frac{49}{16}\gamma^2e'^2+\frac{3087}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{511}{128}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{13617}{1024}e'^2\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left[\left(\frac{7}{4}ee'-\frac{7}{2}\gamma^2ee'-\frac{245}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{73}{16}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{37}{4}ee'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l');$$

$e^2\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$* par

$$\frac{49}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{511}{128}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left[\left(\frac{7}{4}ee'-\frac{7}{2}\gamma^2ee'+\frac{105}{16}e^3e'-\frac{123}{32}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{73}{16}ee'-\frac{95}{4}\gamma^2ee'+\frac{2697}{64}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left.+\frac{37}{4}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{111}{16}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

$$+e^2\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

$$-\left[\frac{455}{32}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7661}{128}e^3e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos 3(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l');$$

$e^2\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$ par

$$\left[\left(\frac{7}{4}ee'-\frac{7}{2}\gamma^2ee'+\frac{105}{16}e^3e'-\frac{123}{32}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{73}{16}ee'-\frac{95}{4}\gamma^2ee'+\frac{2697}{64}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left.+\frac{37}{4}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{111}{16}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

$$+e^2\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

$$-\left[\frac{455}{32}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7661}{128}e^3e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 3(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l');$$

$e^3\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$ par

$$\frac{147}{64}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\cdot\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$+\left[\left(\frac{21}{8}e^2e'-\frac{21}{4}\gamma^2e^2e'+\frac{315}{32}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left.+\frac{219}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{111}{8}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

$$+e^3.\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l')$$

$$-\frac{1365}{64}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}4(2h+2g+3l-2h'-2g'-3l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_7), (F'_7) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_7), (H'_7) dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = anciennne valeur de L (page 333)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{441}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{4599}{512}e^2e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right\},$$

$$L_1=\sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{21}{8}ee'-\frac{21}{4}\gamma^2ee'-\frac{399}{64}e^3e'-\frac{369}{64}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{219}{32}ee'-\frac{285}{8}\gamma^2ee'-\frac{3297}{256}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left.+\frac{111}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{333}{32}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 334)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{49}{128}e'^2-\frac{49}{32}\gamma^2e'^2+\frac{4753}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{511}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{13617}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\};$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 334)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{49}{128}e'^2-\frac{147}{64}\gamma^2e'^2+\frac{4753}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{511}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{13617}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1=\frac{1}{e}\left\{-\left(\frac{7}{8}e'-\frac{7}{4}\gamma^2e'+\frac{665}{64}e^2e'-\frac{123}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{73}{32}e'-\frac{95}{8}\gamma^2e'+\frac{13055}{256}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left.-\frac{37}{8}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{111}{32}e'\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) =$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{ -\left(\frac{147}{128}e'^2 - \frac{147}{32}\gamma^2 e'^2 + \frac{2793}{256}e^2 e'^2 - \frac{2583}{512}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} \right.$$
$$\left. -\left(\frac{1533}{256}e'^2 - \frac{5523}{128}\gamma^2 e'^2 + \frac{11487}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} - \frac{40851}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6} - \frac{5217}{128}e'^2\frac{n'^7}{n^7}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du nº **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 342 et 343) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 7ᵉ opération, et y ajoutant

$$+ n'(L - L_0) - n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (88) de R, joint à la quantité $+ n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$- n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1), et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [7 . . . 1, 88]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$L = \sqrt{a\mu}\left\{ 1 + \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{2295}{128}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{2199}{32}\gamma^2 e'^2 \right.\right.$$
$$\left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{24735}{128}e^2 e'^2 - \frac{57795}{512}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + \frac{34699}{256}e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - \frac{69749}{128}\gamma^2 e'^2 \right.$$
$$\left. + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{790139}{512}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{1614107}{2048}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{8527763}{2304}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$
$$\left. + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{151103}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\};$$

$$G = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{2295}{128}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{2199}{32}\gamma^2 e'^2\right.$$

$$\left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{41911}{512}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + \frac{34699}{256}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{1614107}{2048}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$H = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{2295}{128}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{1891}{64}\gamma^2 e'^2\right.$$

$$\left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{41911}{512}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + \frac{34699}{256}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{1614107}{2048}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{dL} = \frac{1}{an}\Big\{2 + \left(\frac{359}{8} - \frac{375}{2}\gamma^2 + \frac{45371}{128}e^2 + \frac{19635}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(140 - 396\gamma^2 + \frac{18411}{8}e^2 + \frac{234955}{128}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{dG} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{387}{4} - \frac{1473}{4}\gamma^2 - \frac{22933}{128}e^2 + \frac{2817}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(420 - 1476\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 + \frac{360195}{64}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+ \frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{dH} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{33}{4} - \frac{69}{4}\gamma^2 - \frac{771}{8}e^2 + \frac{2199}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(40 - 120\gamma^2 - 399e^2 + \frac{69749}{128}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+ \frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\left\{1 - e^2 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{36549}{128}e^2 + \frac{57029}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\Bigg\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{57693}{128}e^2 + \frac{57029}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}&\\ + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\}&,\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{757}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = -\frac{1}{a^2 n\gamma}\cdot\frac{17}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\Bigg\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} + \frac{879}{8}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{2507}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}&\\ + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\}&,\end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} - \frac{127}{4}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{2507}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

8^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (92) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (92)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}\mathrm{R} = {}&\frac{\mu}{2a}\\ &+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2\\ &\qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2\\ &\qquad - \Bigg(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{2295}{64}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{2199}{16}\gamma^2 e'^2\\ &\qquad\qquad + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5499}{16}e^2 e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n^2}\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (92), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des sept premières opérations.

$$-\left(15-60\gamma^2-162e^2+\frac{13029}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\left(\frac{10915}{192}-\frac{28655}{96}\gamma^2-\frac{568771}{768}e^2+\frac{3349219}{3072}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$-\frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{5644303}{18432}\frac{n'^6}{n^6}+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{-\frac{3}{8}ee'+\frac{3}{4}\gamma^2ee'+\frac{57}{64}e^3e'+\frac{3}{64}ee'^3-\frac{3}{8}\gamma^4ee'-\frac{57}{32}\gamma^2e^3e'-\frac{321}{512}e^5e'$$

$$-\left(\frac{135}{32}ee'-\frac{243}{8}\gamma^2ee'-\frac{1701}{256}e^3e'+\frac{675}{128}ee'^3\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{3}{2}ee'-\frac{87}{8}\gamma^2ee'-\frac{129}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{387}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{49341}{1024}ee'\frac{n'^4}{n^4}\Bigg\}$$

$$\times\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=3,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=-1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{3}\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dG}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G=\frac{2}{3}L+(G),\qquad H=\frac{2}{3}L+(H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_8)\left\{\begin{aligned}a=\frac{3^2(G)^2}{\mu}\Bigg\{&1+3e^2+\frac{15}{2}e^4+\frac{69}{4}e^6\\&-\left[\frac{37}{8}-\frac{11}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}+\frac{4431}{32}e^2+\frac{2295}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\\&-\left[20-\frac{40}{3}\frac{(G)-(H)}{(G)}+722e^2+\frac{34699}{128}e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\\&-\frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}-\frac{36049}{144}\frac{n'^7.3^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

$$(B_8)\quad\gamma^2=\frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\Bigg\{1-e^2-\frac{3}{4}e^4+5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}+\frac{121}{6}\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = 3(\mathrm{G})\left\{1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{21}{8}e^4 + \frac{75}{16}e^6 - \frac{3003}{64}e^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - 221\,e^2\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_8)\left\{\begin{aligned}
\frac{de}{dt} = \frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Bigg\{&\frac{3}{8}e' - \frac{1}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{3}{64}e^2e' - \frac{3}{64}e'^3 + \frac{1}{96}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2e' \\
&+ \frac{7}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2e' + \frac{309}{512}e^4e' \\
&+ \left[\frac{135}{32}e' - \frac{81}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{5859}{256}e^2e' + \frac{675}{128}e'^3\right]\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{3}{2}e' - \frac{29}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{423}{32}e^2e'\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
&- \frac{387}{128}e'\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} - \frac{40881}{1024}e'\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\sin\theta.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 3\frac{dl}{dt} - n' = -3\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}, \dfrac{da}{d\mathrm{G}}, \dfrac{da}{d\mathrm{H}}, \dfrac{de}{d\mathrm{L}}, \cdots$ données à la suite de la 7^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_8)\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\Bigg\{&3 - \frac{27}{2}e^2 + \frac{135}{8}e^4 - \frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
&- \left[\frac{15}{4} - \frac{13}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{159}{8}e^2 + \frac{45}{8}e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} + \frac{229}{8}\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^5}\Bigg\} \\
+ \frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Bigg\{&\frac{3}{8}e' - \frac{1}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{177}{64}e^2e' - \frac{3}{64}e'^3 + \frac{1}{96}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2e' \\
&- \frac{35}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2e' + \frac{4209}{512}e^4e' \\
&+ \left[\frac{135}{32}e' - \frac{81}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{25137}{256}e^2e' + \frac{675}{128}e'^3\right]\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{3}{2}e' - \frac{29}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{1605}{32}e^2e'\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
&- \frac{387}{128}e'\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} - \frac{40881}{1024}e'\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_8), (D_8) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre chose que } \frac{1}{3}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs, par leur forme, dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(E_8)\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\Big[\frac{1}{8}e' - \frac{1}{24}\frac{(G)-(H)}{(G)}e' + \frac{51}{32}e_0^2 e' - \frac{1}{64}e'^3 + \frac{1}{288}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2 e' \\ &\qquad - \frac{43}{96}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2 e' + \frac{4677}{512}e_0^4 e'\Big]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\ &-\left[\frac{139}{96}e' - \frac{245}{144}\frac{(G)-(H)}{(G)}e' + \frac{4319}{128}e_0^2 e' + \frac{673}{384}e'^3\right]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} \\ &-\left[\frac{41}{36}e' - \frac{587}{432}\frac{(G)-(H)}{(G)}e' + \frac{857}{24}e_0^2 e'\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\ &-\frac{1021}{864}e'\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} + \frac{1051963}{82944}e'\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} \\ &+\left\{e_0 + \frac{33}{256}e_0 e'^2\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+e) \\ &+\Big\{\left[\frac{65}{64}e_0^2 e' - \frac{19}{64}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2 e' + \frac{1801}{256}e_0^4 e'\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\ &\qquad + \frac{14903}{768}e_0^2 e'\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} + \frac{1429}{72}e_0^2 e'\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

$$(F_8)\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\; e_0\sin\theta_0(t+c) \\ &+\Big\{\left[\frac{65}{64}e_0^2 e' - \frac{19}{64}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2 e' + \frac{1801}{256}e_0^4 e'\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\ &\qquad + \frac{14903}{768}e_0^2 e'\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} + \frac{1429}{72}e_0^2 e'\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\Big\}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{3^3(G)^3}\left\{3 - \frac{27}{2}e_0^2 - \frac{n'.3^3(G)^3}{\mu^2} - \frac{15}{4}\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces formules (E_8), (F_8), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_8), (B_8), on en déduit les valeurs de a et γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_8)\quad \left\{\begin{aligned}
a = {} & \frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{1+3e_0^2+\frac{15}{2}e_0^4+\frac{69}{4}e_0^6-\left[\frac{37}{8}-\frac{11}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{4431}{32}e_0^2+\frac{573}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
& -\left[20-\frac{40}{3}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+722e_0^2+270e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} \\
& -\frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}-\frac{36049}{144}\frac{n'^7.3^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}\Big\} \\
& -\frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{\left[\frac{3}{4}e_0e'-\frac{1}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0e'+\frac{231}{32}e_0^3e'-\frac{3}{32}e_0e'^3+\frac{1}{48}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2e_0e'\right. \\
& \left.-\frac{69}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^3e'+\frac{10977}{256}e_0^5e'\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& +\left[\frac{139}{16}e_0e'-\frac{245}{24}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0e'+\frac{16571}{128}e_0^3e'+\frac{673}{64}e_0e'^3\right]\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
& +\left[\frac{41}{6}e_0e'-\frac{587}{72}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0e'+\frac{388}{3}e_0^3e'\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
& +\frac{1021}{144}e_0e'\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{1530511}{13824}e_0e'\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\cos\theta_0(t+c) \\
& -\frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\cdot\frac{9}{64}e_0^2e'^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_8)\quad \left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & \frac{1}{6}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\Big\{1-e_0^2-\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}+\frac{121}{6}\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\Big\} \\
& +\frac{1}{6}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\Big\{\left[\frac{1}{4}e_0e'-\frac{1}{12}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0e'+\frac{49}{32}e_0^3e'\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& +\frac{139}{48}e_0e'\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}+\frac{41}{18}e_0e'\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = {} & \frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{1+3e_0^2+\frac{15}{2}e_0^4+\frac{69}{4}e_0^6-\left[\frac{37}{8}-\frac{11}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{4431}{32}e_0^2+\frac{573}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
& -\left[20-\frac{40}{3}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+722e_0^2+270e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} \\
& -\frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}-\frac{36049}{144}\frac{n'^7.3^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{6}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\Big\{1-e_0^2-\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}+\frac{121}{6}\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\Big\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2 ; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_8), (F_8) (G_8), (H_8), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_8)\quad \left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\left(\frac{1}{8}e' - \frac{1}{4}\gamma_0^2 e' + \frac{15}{32}e_0^2 e' - \frac{1}{64}e'^3 + \frac{1}{8}\gamma_0^4 e' - \frac{11}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{651}{512}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &-\left(\frac{139}{96}e' - \frac{245}{24}\gamma_0^2 e' + \frac{1817}{128}e_0^2 e' + \frac{673}{384}e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &-\left(\frac{41}{36}e' - \frac{587}{72}\gamma_0^2 e' + \frac{365}{24}e_0^2 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{1021}{864}e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{908107}{82944}e'\frac{n'^6}{n_0^6}\\ &+\left[e_0 + \frac{33}{256}e_0 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)\\ &+\left[\left(\frac{65}{64}e_0^2 e' - \frac{57}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{539}{256}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{14903}{768}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{1429}{72}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_8)\quad \left\{\begin{aligned} e\sin\theta = {}& e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &+\left[\left(\frac{65}{64}e_0^2 e' - \frac{57}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{539}{256}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{14903}{768}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{1429}{72}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_8)\quad \left\{\begin{aligned} a = a_0\Bigg\{1 - \Bigg[&\left(\frac{3}{4}e_0 e' - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{57}{32}e_0^3 e' - \frac{3}{32}e_0 e'^3 + \frac{3}{4}\gamma_0^4 e_0 e' + \frac{57}{16}\gamma_0^2 e_0^3 e' + \frac{321}{256}e_0^5 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &+\left(\frac{139}{16}e_0 e' - \frac{245}{4}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{1777}{128}e_0^3 e' + \frac{673}{64}e_0 e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &+\left(\frac{41}{6}e_0 e' - \frac{587}{12}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{85}{6}e_0^3 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\ &+\frac{1021}{144}e_0 e'\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{1338703}{13824}e_0 e'\frac{n'^6}{n_0^6}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\ &-\frac{9}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c)\Bigg\}; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_8)\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\left(\frac{1}{4}\gamma_0^2 e_0 e' - \frac{1}{2}\gamma_0^4 e_0 e' - \frac{15}{32}\gamma_0^2 e_0^3 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{139}{48}\gamma_0^2 e_0 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{41}{18}\gamma_0^2 e_0 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[3 - \frac{n'}{n_0} - \frac{15}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2} - 35\frac{n'^3}{n^3}\right]\\ + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{21}{16}ee' - \frac{15}{8}\gamma^2 ee' - \frac{279}{128}e^3e' - \frac{21}{128}ee'^3\right.\\ \left. + \left(\frac{1755}{64}ee' - \frac{2673}{16}\gamma^2 ee' - \frac{18441}{512}e^3e'\right)\frac{n'}{n} + \frac{57}{4}ee'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9675}{256}ee'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{33}{8}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\ + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{8}ee' - \frac{3}{8}\gamma^2 ee' - \frac{45}{64}e^3e' + \frac{243}{16}ee'\frac{n'}{n} + \frac{87}{16}ee'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_8), (F'_8), (G'_8), (H'_8), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_8)\left\{\begin{aligned} h+g+l = \frac{1}{3}(h) + \frac{1}{3}(g) + \frac{1}{3}(2h'+2g'+l') + \frac{1}{3}(\theta_0 + h_0 + g_0)(t+c)\\ + \left[\left(\frac{13}{16}e_0e' - \frac{11}{8}\gamma_0^2 e_0e' - \frac{207}{128}e_0^3e' - \frac{13}{128}e_0e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\ + \left(\frac{2641}{192}e_0e' - \frac{4165}{48}\gamma_0^2 e_0e' - \frac{9977}{512}e_0^3e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ \left. + \frac{1025}{72}e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{31651}{1728}e_0e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_8)\left\{\begin{aligned} h = (h) + h_0(t+c)\\ + \left[\left(\frac{1}{8}e_0e' - \frac{1}{8}\gamma_0^2 e_0e' - \frac{15}{64}e_0^3e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{245}{48}e_0e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{587}{144}e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{3}\theta+\frac{1}{3}h+\frac{1}{3}g+\frac{1}{3}(2h'+2g'+l').$$

Les six formules (E'_8), (F'_8), (G'_8), (H'_8), (K_8), (L_8) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (92); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-l')$ par

$$-\left(\frac{1}{8}e'-\frac{1}{4}\gamma^2e'+\frac{15}{32}e^2e'-\frac{1}{64}e'^3+\frac{1}{8}\gamma^4e'-\frac{11}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{651}{512}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{139}{96}e'-\frac{245}{24}\gamma^2e'+\frac{1817}{128}e^2e'+\frac{673}{384}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{41}{36}e'-\frac{587}{72}\gamma^2e'+\frac{365}{24}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1021}{864}e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{908107}{82944}e'\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left[e+\frac{33}{256}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-l')$$

$$+\left[\left(\frac{65}{64}e^2e'-\frac{57}{32}\gamma^2e^2e'-\frac{539}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left.+\frac{14903}{768}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1429}{72}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-l'),$$

$e\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-l')$ par

$e\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-l')$

$$+\left[\left(\frac{65}{64}e^2e'-\frac{57}{32}\gamma^2e^2e'-\frac{539}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left.+\frac{14903}{768}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1429}{72}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-l'),$$

a par

$$\begin{aligned} a \Big\{ 1 - \Big[& \left(\frac{3}{4} ee' - \frac{3}{2}\gamma^2 ee' - \frac{57}{32} e^3 e' - \frac{3}{32} ee'^3 + \frac{3}{4}\gamma^4 ee' + \frac{57}{16}\gamma^2 e^3 e' + \frac{321}{256} e^5 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & + \left(\frac{139}{16} ee' - \frac{245}{4}\gamma^2 ee' - \frac{1777}{128} e^3 e' + \frac{673}{64} ee'^3\right)\frac{n'^3}{n^3} \\ & + \left(\frac{41}{6} ee' - \frac{587}{12}\gamma^2 ee' - \frac{85}{6} e^3 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & \qquad + \frac{1021}{144} ee' \frac{n'^5}{n^5} - \frac{1338703}{13824} ee' \frac{n'^6}{n^6}\Big] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l') \\ & - \frac{9}{64} e^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} \cos 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l') \Big\}; \end{aligned}$$

γ^2 par

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \Big[& \left(\frac{1}{4}\gamma^2 ee' - \frac{1}{2}\gamma^4 ee' - \frac{15}{32}\gamma^2 e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & \qquad + \frac{139}{48}\gamma^2 ee' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{41}{18}\gamma^2 ee' \frac{n'^4}{n^4}\Big] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l'); \end{aligned}$$

$h + g + l$ par

$$\begin{aligned} h + g + l + \Big[& \left(\frac{13}{16} ee' - \frac{11}{8}\gamma^2 ee' - \frac{207}{128} e^3 e' - \frac{13}{128} ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & + \left(\frac{2641}{192} ee' - \frac{4165}{48}\gamma^2 ee' - \frac{9977}{512} e^3 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \\ & \qquad + \frac{1025}{72} ee' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{31651}{1728} ee' \frac{n'^5}{n^5}\Big] \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l'); \end{aligned}$$

h par

$$h + \left[\left(\frac{1}{8} ee' - \frac{1}{8}\gamma^2 ee' - \frac{15}{64} e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{245}{48} ee' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{587}{144} ee' \frac{n'^4}{n^4}\right] \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$\begin{aligned} & e^2 + \left(\frac{1}{64} e'^2 - \frac{1}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{63}{256} e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{139}{384} e'^2 \frac{n'^5}{n^5} + \frac{7315}{3072} e'^2 \frac{n'^6}{n^6} \\ & - \left[\left(\frac{1}{4} ee' - \frac{1}{2}\gamma^2 ee' - \frac{35}{32} e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{139}{48} ee' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{41}{18} ee' \frac{n'^4}{n^4}\right] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l'). \end{aligned}$$

$e^2 \cos 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l')$ * par

$$\frac{1}{64} e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{139}{384} e'^2 \frac{n'^5}{n^5}$$

$$- \left[\left(\frac{1}{4} ee' - \frac{1}{2} \gamma^2 ee' + \frac{15}{16} e^3 e' - \frac{1}{32} ee'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{139}{48} ee' - \frac{245}{12} \gamma^2 ee' + \frac{1817}{64} e^3 e' \right) \frac{n'^3}{n^3} \right.$$

$$\left. + \frac{41}{18} ee' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1021}{432} ee' \frac{n'^5}{n^5} \right] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l'$$

$$+ e^2 \cos 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+ \left[\frac{65}{32} e^3 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{14903}{384} e^3 e' \frac{n'^3}{n^3} \right] \cos 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l');$$

$e^2 \sin 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l')$ par

$$- \left[\left(\frac{1}{4} ee' - \frac{1}{2} \gamma^2 ee' + \frac{15}{16} e^3 e' - \frac{1}{32} ee'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{139}{48} ee' - \frac{245}{12} \gamma^2 ee' + \frac{1817}{64} e^3 e' \right) \frac{n'^3}{n^3} \right.$$

$$\left. + \frac{41}{18} ee' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1021}{432} ee' \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l'$$

$$+ e^2 \sin 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+ \left[\frac{65}{32} e^3 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{14903}{384} e^3 e' \frac{n'^3}{n^3} \right] \sin 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l');$$

$e^3 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l')$ par

$$\frac{3}{64} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l')$$

$$- \left[\left(\frac{3}{8} e^2 e' - \frac{3}{4} \gamma^2 e^2 e' + \frac{45}{32} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} \right.$$

$$\left. + \frac{139}{32} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{41}{12} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g - l$$

$$+ e^3 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l')$$

$$+ \frac{195}{64} e^4 e' \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 4(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - l').$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_8), (F'_8) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_8), (H'_8), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$$L_0 = \text{ancienne valeur de L (page 346)}$$
$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{9}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{417}{512}e^2e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{3}{8}ee'-\frac{3}{4}\gamma^2ee'-\frac{57}{64}e^3e'-\frac{3}{64}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{139}{32}ee'-\frac{245}{8}\gamma^2ee'-\frac{1777}{256}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left.-\frac{41}{12}ee'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1021}{288}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

$$G_0 = \text{ancienne valeur de G (page 347)}$$
$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{128}e'^2-\frac{1}{32}\gamma^2e'^2+\frac{97}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{139}{768}e'^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{7315}{6144}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\};$$

$$H_0 = \text{ancienne valeur de H (page 347)}$$
$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{1}{128}e'^2-\frac{3}{64}\gamma^2e'^2+\frac{97}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{139}{768}e'^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{7315}{6144}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{\left(\frac{1}{8}e'-\frac{1}{4}\gamma^2e'+\frac{95}{64}e^2e'-\frac{1}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{139}{96}e'-\frac{245}{24}\gamma^2e'+\frac{25805}{768}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left.+\frac{41}{36}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1021}{864}e'\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1L_1+2\theta_2L_2+\ldots)=$$
$$\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{3}{128}e'^2-\frac{3}{32}\gamma^2e'^2+\frac{57}{256}e^2e'^2-\frac{3}{512}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{139}{256}e'^2-\frac{629}{128}\gamma^2e'^2+\frac{1081}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\right.$$
$$\left.-\frac{7315}{2048}e'^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{12419}{2304}e'^2\frac{n'^7}{n^7}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29** et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 355 et 356) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 8^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{1}{3}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)-\frac{1}{3}n'.\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (92) de R, joint à la quantité $+\frac{1}{3}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{1}{3}n'.\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication (8 . . . . . [illegible]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&+\Big(\frac{37}{16}-\frac{33}{4}\gamma^2-\frac{105}{4}e^2+\frac{573}{32}e'^2+\frac{69}{8}\gamma^4+\frac{201}{2}\gamma^2e^2-\frac{549}{8}\gamma^2e'^2\\&\qquad+\frac{28549}{1024}e^4-\frac{387}{2}e^2e'^2-\frac{903}{8}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\&+\Big(10-40\gamma^2-115e^2+135e'^2+60\gamma^4+419\gamma^2e^2-540\gamma^2e'^2+\frac{7349}{64}e^4-\frac{3105}{2}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}\\&+\Big(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{138661}{256}e^2+\frac{200849}{256}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\&+\Big(\frac{36049}{288}-\frac{94481}{144}\gamma^2-\frac{2069437}{1152}e^2+\frac{177403}{48}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}\\&\qquad+\frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{151103}{1728}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\&+\Big(\frac{37}{16}-\frac{33}{4}\gamma^2-\frac{753}{64}e^2+\frac{573}{32}e'^2+\frac{69}{8}\gamma^4+\frac{917}{16}\gamma^2e^2-\frac{549}{8}\gamma^2e'^2-\frac{78757}{1024}e^4-\frac{10521}{128}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\&+\Big(10-40\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\Big(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{200849}{256}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\&\qquad+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{573}{32}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{471}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{10521}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{200849}{256}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ & 2 + \left(\frac{359}{8} - \frac{375}{2}\gamma^2 + \frac{45371}{128}e^2 + \frac{4935}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(140 - 396\,\gamma^2 + \frac{18411}{8}e^2 + 1890\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{387}{4} - \frac{1473}{4}\gamma^2 - \frac{22933}{128}e^2 + \frac{5643}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(420 - 1476\,\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 + 5670\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{33}{4} - \frac{69}{4}\gamma^2 - \frac{771}{8}e^2 + \frac{549}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + (40 - 120\,\gamma^2 - 399\,e^2 + 540\,e'^2)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{36549}{128}e^2 + \frac{14247}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\begin{aligned}
\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{57693}{128}e^2 + \frac{14247}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{757}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = -\frac{1}{a^2 n\gamma}\cdot\frac{17}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\
& + \left(\frac{43}{16} + \frac{879}{8}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{627}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} - \frac{127}{4}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{627}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

9ᵉ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (12) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (12) *, dans lequel l'argument est $l + l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{573}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{549}{4}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5505}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{415999}{384}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{5644303}{18432}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\frac{3}{4}ee' + \frac{9}{2}\gamma^2 ee' + \frac{3}{32}e^3 e' - \frac{27}{32}ee'^3 - \frac{9}{2}\gamma^4 ee' - \frac{9}{16}\gamma^2 e^3 e' - \frac{1}{256}e^5 e' \\
& \qquad + \left(\frac{21}{16}ee' - \frac{63}{4}\gamma^2 ee' + \frac{51}{128}e^3 e' + \frac{63}{32}ee'^3\right)\frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{375}{16}ee' - \frac{297}{4}\gamma^2 ee' - \frac{8319}{128}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9159}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{136807}{192}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{45}{32}ee'\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& \qquad\qquad \times \cos(l + l').
\end{aligned}$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \quad i' = 0, \quad i'' = 0, \quad i''' = 1.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (12), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des huit premières opérations.

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième ; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(\mathrm{A}_9)\quad \left\{\begin{aligned} a = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 + e^2 + e^4 + e^6 \\ & - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e^2 + \frac{573}{16}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} \\ & - \left(20 - 80\gamma^2 + \frac{262}{3}e^2 + 270e'^2\right)\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{36049}{144}\frac{n'^7\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = \mathrm{G}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{221}{3}e^2\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\Bigg\{ & \frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{32}e^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{27}{16}\gamma^2 e^2 e' + \frac{61}{256}e^4 e' \\ & - \left(\frac{21}{16}e' - \frac{63}{4}\gamma^2 e' + \frac{387}{128}e^2 e' + \frac{63}{32}e'^3\right)\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} \\ & + \left(\frac{375}{16}e' - \frac{297}{4}\gamma^2 e' + \frac{2181}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ & + \frac{9159}{64}e'\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} + \frac{279959}{384}e'\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{32}e'\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dl}{dt} + n' = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} + n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, $\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}}$, données à la suite de la 8^e opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$
(\mathrm{D}_9)\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\Bigg\{ & 1 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} \\
& - \left(\frac{7}{4} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{27}{8}e^2 + \frac{21}{8}e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} - \frac{141}{8}\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Bigg\} \\
& + \frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Bigg\{\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{99}{32}e^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{297}{16}\gamma^2 e^2 e' + \frac{1097}{256}e^4 e' \\
& - \left(\frac{21}{16}e' - \frac{63}{4}\gamma^2 e' + \frac{1665}{128}e^2 e' + \frac{63}{32}e'^3\right)\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} \\
& + \left(\frac{375}{16}e' - \frac{297}{4}\gamma^2 e' + \frac{15543}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\
& + \frac{9159}{64}e'\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} + \frac{279959}{384}e'\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{32}e'\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_9), (D_9) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(\mathrm{E}_9)\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = & -\left(\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{63}{16}e_0^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{189}{8}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{2415}{256}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\
& + \left(\frac{33}{16}e' - \frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{1161}{64}e_0^2 e' + \frac{45}{16}e'^3\right)\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} \\
& - \left(\frac{429}{16}e' - \frac{441}{4}\gamma^2 e' + \frac{11505}{64}e_0^2 e'\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} \\
& - \frac{1803}{16}e'\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{259781}{384}e'\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{45}{32}e'\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2 a'^2} \\
& + \left[e_0 + \frac{135}{64}e_0 e'^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right]\cos\theta_0(t+c) \\
& + \Bigg[\left(\frac{81}{32}e_0^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{943}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\
& \qquad - \frac{1359}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} + \frac{14079}{128}e_0^2 e'\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Bigg]\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$(\mathrm{F}_9)\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c)\\ & +\left[\left(\frac{81}{32}e_0^2e' - \frac{243}{16}\gamma^2e_0^2e' + \frac{943}{128}e_0^4e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right.\\ & \qquad\left. - \frac{1359}{128}e_0^2e'\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} + \frac{14079}{128}e_0^2e'\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right]\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left\{1 - \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{7}{4}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces formules (E_9), (F_9), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans la relation (A_9), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$(\mathrm{G}_9)\left\{\begin{aligned} a = {} & \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6\right.\\ & \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{141}{4}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\ & \qquad\left. - \left(20 - 80\gamma^2 + \frac{262}{3}e_0^2 + \frac{8739}{32}e'^2\right)\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{36049}{144}\frac{n'^7\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\right\}\\ & - \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{\left(\frac{3}{2}e_0e' - 9\gamma^2e_0e' + \frac{93}{16}e_0^3e' + \frac{27}{16}e_0e'^3 + 9\gamma^4e_0e' - \frac{279}{8}\gamma^2e_0^3e' + \frac{1825}{128}e_0^5e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right.\\ & \qquad - \left(\frac{33}{8}e_0e' - \frac{81}{2}\gamma^2e_0e' + \frac{1491}{64}e_0^3e' + \frac{45}{8}e_0e'^3\right)\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\ & \qquad + \left(\frac{429}{8}e_0e' - \frac{441}{2}\gamma^2e_0e' + \frac{15795}{64}e_0^3e'\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\ & \qquad\qquad\left. + \frac{1803}{8}e_0e'\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{32071}{24}e_0e'\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} + \frac{45}{16}e_0e'\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2a'^2}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\ & - \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\cdot\frac{9}{16}e_0^2e'^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6\\ & - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{141}{4}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\ & - \left(20 - 80\gamma^2 + \frac{262}{3}e_0^2 + \frac{8739}{32}e'^2\right)\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{36049}{144}\frac{n'^7\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}. \end{aligned}$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_9), (F_9), (G_9), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_9)\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = &-\left(\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{27}{16}e_0^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{81}{8}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{33}{256}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&+\left(\frac{33}{16}e' - \frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{567}{64}e_0^2 e' + \frac{45}{16}e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3} - \left(\frac{429}{16}e' - \frac{441}{4}\gamma^2 e' + \frac{1209}{64}e_0^2 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&-\frac{1803}{16}e'\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{263777}{384}e'\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{45}{32}e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\\
&+\left[e_0 + \frac{135}{64}e_0 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{81}{32}e_0^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{29}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{1359}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{14079}{128}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_9)\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta = {}& e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{81}{32}e_0^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{29}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{1359}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{14079}{128}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_9)\left\{\begin{aligned}
a = a_0\Big\{1 &- \Big[\left(\frac{3}{2}e_0 e' - 9\gamma^2 e_0 e' - \frac{3}{16}e_0^3 e' + \frac{27}{16}e_0 e'^3 + 9\gamma^4 e_0 e' + \frac{9}{8}\gamma^2 e_0^3 e' + \frac{1}{128}e_0^5 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\quad - \left(\frac{33}{8}e_0 e' - \frac{81}{2}\gamma^2 e_0 e' + \frac{39}{64}e_0^3 e' + \frac{45}{8}e_0 e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\quad + \left(\frac{429}{8}e_0 e' - \frac{441}{2}\gamma^2 e_0 e' - \frac{8229}{64}e_0^3 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad + \frac{1803}{8}e_0 e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{32737}{24}e_0 e'\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{45}{16}e_0 e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big]\cos\theta_0(t+c)\\
&- \frac{9}{16}e_0^2 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c)\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[1 + \frac{n'}{n_0} - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2} - 35\frac{n'^3}{n^3}\right] \\
+ \frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{21}{8}ee' - \frac{45}{4}\gamma^2 ee' - \frac{9}{64}e^3e' + \frac{189}{64}ee'^3 \\
- \left(\frac{273}{32}ee' - \frac{693}{8}\gamma^2 ee' + \frac{603}{256}e^3e'\right)\frac{n'}{n} + \frac{7125}{32}ee'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{228975}{128}ee'\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{33}{8}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\
+ \frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{4}ee' - \frac{9}{2}\gamma^2 ee' + \frac{27}{32}e^3e' - \frac{63}{8}ee'\frac{n'}{n} + \frac{297}{8}ee'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;
\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_9), (F'_9), (G'_9), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_9)\quad\left\{\begin{aligned}
h+g+l = (h) + (g) - l' + (\theta_0 + h_0 + g_0)(t+c) \\
+ \Bigg[\left(\frac{39}{8}e_0e' - \frac{99}{4}\gamma^2 e_0e' - \frac{27}{64}e_0^3e' + \frac{351}{64}e_0e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
- \left(\frac{627}{32}e_0e' - \frac{1377}{8}\gamma^2 e_0e' + \frac{729}{256}e_0^3e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\
+ \frac{10725}{32}e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{55893}{32}e_0e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(L_9)\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[\left(\frac{9}{4}e_0e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e_0e' + \frac{27}{32}e_0^3e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{81}{8}e_0e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{441}{8}e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \theta + h + g - l'.$$

Les cinq formules (E'_9), (F'_9), (G'_9), (K_9), (L_9), jointes à la condition que γ

est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (12); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(l+l')$ par

$$-\left(\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{27}{16}e^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{81}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{33}{256}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{33}{16}e' - \frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{567}{64}e^2 e' + \frac{45}{16}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3} - \left(\frac{429}{16}e' - \frac{441}{4}\gamma^2 e' + \frac{1209}{64}e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$-\frac{1803}{16}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{263777}{384}e'\frac{n'^6}{n^6} - \frac{45}{32}e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+\left[e + \frac{135}{64}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(l+l')$$

$$+\left[\left(\frac{81}{32}e^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{29}{128}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1359}{128}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{14079}{128}e^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 2(l+l').$$

$e\sin(l+l')$ par

$$e\sin(l+l')$$

$$+\left[\left(\frac{81}{32}e^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{29}{128}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1359}{128}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{14079}{128}e^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2(l+l');$$

a par

$$a\Bigg\{1 - \Bigg[\left(\frac{3}{2}ee' - 9\gamma^2 ee' - \frac{3}{16}e^3 e' + \frac{27}{16}ee'^3 + 9\gamma^4 ee' + \frac{9}{8}\gamma^2 e^3 e' + \frac{1}{128}e^5 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{33}{8}ee' - \frac{81}{2}\gamma^2 ee' + \frac{39}{64}e^3 e' + \frac{45}{8}ee'^3\right)\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{429}{8}ee' - \frac{441}{2}\gamma^2 ee' - \frac{8229}{64}e^3 e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{1803}{8}ee'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{32737}{24}ee'\frac{n'^6}{n^6} + \frac{45}{16}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(l+l$$

$$-\frac{9}{16}e^2 e'^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(l+l')\Bigg\};$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{39}{8}ee'-\frac{99}{4}\gamma^2ee'-\frac{27}{64}e^3e'+\frac{351}{64}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{627}{32}ee'-\frac{1377}{8}\gamma^2ee'+\frac{729}{256}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left.+\frac{10725}{32}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{55893}{32}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(l+l');$$

h par

$$h+\left[\left(\frac{9}{4}ee'-\frac{9}{2}\gamma^2ee'+\frac{27}{32}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{8}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{441}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(l+l').$$

γ ne change pas.

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2+\left(\frac{9}{16}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{297}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{99}{32}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{11385}{256}e'^2\frac{n'^6}{n^6}$$
$$-\left[\left(\frac{3}{2}ee'-9\gamma^2ee'-\frac{27}{16}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{33}{8}ee'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{429}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(l+l'):$$

$e^2\cos 2(l+l')$ * par

$$\frac{9}{16}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{99}{32}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$
$$-\left[\left(\frac{3}{2}ee'-9\gamma^2ee'+\frac{27}{8}e^3e'+\frac{27}{16}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{33}{8}ee'-\frac{81}{2}\gamma^2ee'+\frac{567}{32}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left.+\frac{429}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1803}{8}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(l+l')$$
$$+e^2\cos 2(l+l')$$
$$+\left[\frac{81}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1359}{64}e^3e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos 3(l+l');$$

$e^2\sin 2(l+l')$ par

$$-\left[\left(\frac{3}{2}ee'-9\gamma^2ee'+\frac{27}{8}e^3e'+\frac{27}{16}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{33}{8}ee'-\frac{81}{2}\gamma^2ee'+\frac{567}{32}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left.+\frac{429}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1803}{8}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(l+l')$$
$$+e^2\sin 2(l+l')$$
$$+\left[\frac{81}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1359}{64}e^3e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 3(l+l');$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$e^3 \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 3(l+l')$ par

$$\frac{27}{16} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4} \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (l+l')$$

$$-\left[\left(\frac{9}{4} e^2 e' - \frac{27}{2}\gamma^2 e^2 e' + \frac{81}{16} e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{99}{16} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{1287}{16} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}\right] \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 2(l+l')$$

$$+ e^3 \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 3(l+l')$$

$$+ \frac{243}{32} e^4 e' \frac{n'^2}{n^2} \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 4(l+l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_9), (F'_9) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celle de a donnée par la formule (G'_9), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 359)

$$+ \sqrt{a\mu}\left\{ - \frac{9}{64} e^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{99}{128} e^2 e'^2 \frac{n'^5}{n^5} \right\},$$

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{ - \left(\frac{3}{4} ee' - \frac{9}{2}\gamma^2 ee' - \frac{3}{32} e^3 e' + \frac{27}{32} ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{33}{16} ee' - \frac{81}{4}\gamma^2 ee' + \frac{39}{128} e^3 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \right.$$
$$\left. - \frac{429}{16} ee' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{1803}{16} ee' \frac{n'^5}{n^5} \right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 359)

$$+ \sqrt{a\mu}\left\{ - \left(\frac{9}{32} e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{387}{128} e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{99}{64} e'^2 \frac{n'^5}{n^5} - \frac{11385}{512} e'^2 \frac{n'^6}{n^6} \right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 360)

$$+ \sqrt{a\mu}\left\{ - \left(\frac{9}{32} e'^2 - \frac{63}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{387}{128} e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{99}{64} e'^2 \frac{n'^5}{n^5} - \frac{11385}{512} e'^2 \frac{n'^6}{n^6} \right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{ \left(\frac{3}{4} e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{135}{32} e^2 e' + \frac{27}{32} e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{33}{16} e' - \frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{2493}{128} e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \right.$$
$$\left. + \frac{429}{16} e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1803}{16} e' \frac{n'^5}{n^5} \right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) =$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{ -\left(\frac{9}{32}e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{99}{64}e^2 e'^2 + \frac{81}{128}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{99}{64}e'^2 - \frac{783}{32}\gamma^2 e'^2 + \frac{747}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \right.$$
$$\left. - \frac{11385}{512}e'^2\frac{n'^6}{n^6} - \frac{7479}{256}e'^2\frac{n'^7}{n^7}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 367 et 368) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 9^e opération, et y ajoutant

$$-n'(L - L_0) + n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (12) de R, joint à la quantité $-n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$+n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [9 . . . . . . 1, 12]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$L = \sqrt{a\mu}\left\{ 1 + \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{141}{8}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{261}{4}\gamma^2 e'^2 \right.\right.$$
$$\left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{3123}{16}e^2 e'^2 - \frac{14529}{128}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + \frac{8739}{64}e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - \frac{18063}{32}\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{197127}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{390313}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{2816011}{768}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$
$$\left. + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{151103}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\};$$

$$\begin{aligned}
G = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{141}{8}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{261}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{2727}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + \frac{8739}{64}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{390313}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\,\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{141}{8}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{51}{2}\gamma^2 e'^2 - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{2727}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + \frac{8739}{64}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{390313}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dL} = \frac{1}{an}\Big\{ & 2 + \left(\frac{359}{8} - \frac{375}{2}\gamma^2 + \frac{45371}{128}e^2 + \frac{645}{2}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(140 - 396\gamma^2 + \frac{18411}{8}e^2 + \frac{57303}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dG} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{387}{4} - \frac{1473}{4}\gamma^2 - \frac{22933}{128}e^2 + \frac{1431}{2}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(420 - 1476\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 + \frac{22383}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dH} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{33}{4} - \frac{69}{4}\gamma^2 - \frac{771}{8}e^2 + \frac{261}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(40 - 120\gamma^2 - 399e^2 + \frac{18063}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{36549}{128}e^2 + \frac{3519}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{57693}{128}e^2 + \frac{3519}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{757}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = -\frac{1}{a^2 n\gamma}\cdot\frac{17}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} + \frac{879}{8}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{159}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left. + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} - \frac{127}{4}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{159}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

10$^{\text{e}}$ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (8) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (8) * dans lequel l'argument est $l - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4\right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$
$$- \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{141}{4}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2\right.$$
$$\left. - \frac{261}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{2775}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$- \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{3285}{16}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$- \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{799625}{768}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{5644303}{18432}\frac{n'^6}{n^6}$$
$$\left. + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\right\}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (8), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des neuf premières opérations.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\frac{3}{4}ee' + \frac{9}{2}\gamma^2 ee' + \frac{3}{32}e^3e' - \frac{27}{32}ee'^3 - \frac{9}{2}\gamma^4 ee' - \frac{9}{16}\gamma^2 e^3 e' - \frac{1}{256}e^5 e'$$

$$- \left(\frac{21}{16}ee' - \frac{63}{4}\gamma^2 ee' + \frac{51}{128}e^3e' + \frac{63}{32}ee'^3\right)\frac{n'}{n} - \left(\frac{93}{4}ee' - 72\gamma^2 ee' - \frac{8385}{128}e^3e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \frac{2733}{32}ee'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{100921}{384}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{45}{32}ee'\frac{a^2}{a'^2}\Big\}$$

$$\times \cos(l - l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \qquad i' = 0, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = -1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dG}{dt} = 0, \qquad \frac{dH}{dt} = 0;$$

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(A_{10})\left\{\begin{aligned} a = \frac{G^2}{\mu}\Big\{ & 1 + e^2 + e^4 + e^6 - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e^2 + \frac{141}{4}e'^2\right)\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} \\ & - \left(20 - 80\gamma^2 + \frac{262}{3}e^2 + \frac{8739}{32}e'^2\right)\frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6 G^{18}}{\mu^{12}} - \frac{36049}{144}\frac{n'^7 G^{21}}{\mu^{14}}\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$L = G\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} - \frac{221}{3}e^2\frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{10})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{n'^2 G^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{32}e^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{27}{16}\gamma^2 e^2 e' + \frac{61}{256}e^4 e' \\ & + \left(\frac{21}{16}e' - \frac{63}{4}\gamma^2 e' + \frac{387}{128}e^2 e' + \frac{63}{32}e'^3\right)\frac{n' G^3}{\mu^2} + \left(\frac{93}{4}e' - 72\gamma^2 e' + \frac{2031}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^2 G^6}{\mu^4} \\ & + \frac{2733}{32}e'\frac{n'^3 G^9}{\mu^6} + \frac{53633}{192}e'\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{32}e'\frac{G^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dl}{dt} - n' = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \frac{d\gamma}{d\mathrm{L}}$ données à la suite de la 9^e opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{10})\left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\Big\{ & 1 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 - \frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} - \left(\frac{7}{4} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{27}{8}e^2 + \frac{21}{8}e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} - \frac{141}{8}\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Big\} \\ & + \frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Big\{\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{99}{32}e^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{297}{16}\gamma^2 e^2 e' + \frac{1097}{256}e^4 e' \\ & \qquad + \left(\frac{21}{16}e' - \frac{63}{4}\gamma^2 e' + \frac{1665}{128}e^2 e' + \frac{63}{32}e'^3\right)\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} \\ & \qquad + \left(\frac{93}{4}e' - 72\gamma^2 e' + \frac{15021}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ & \qquad\qquad + \frac{2733}{32}e'\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} + \frac{53633}{192}e'\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{32}e'\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{10}), (D_{10}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{10})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = & -\left(\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{63}{16}e_0^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{189}{8}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{2415}{256}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ & - \left(\frac{33}{16}e' - \frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{1161}{64}e_0^2 e' + \frac{45}{16}e'^3\right)\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} - \left(\frac{213}{8}e' - 108\gamma^2 e' + \frac{11301}{64}e_0^2 e'\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} \\ & - \frac{7401}{64}e'\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{10915}{24}e'\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{45}{32}e'\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2 a'^2} \\ & + \left[e_0 + \frac{135}{64}e_0 e'^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right]\cos\theta_0(t+c) \\ & + \Big[\left(\frac{81}{32}e_0^3 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{943}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ & \qquad + \frac{1359}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} + \frac{13857}{128}e_0^2 e'\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Big]\cos 2\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{F}_{10})\left\{
\begin{aligned}
e\sin\theta &= e_0 \sin\theta_0(t+c)\\
&\quad+\Bigg[\left(\frac{81}{32}e_0^2\,e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e_0^2\,e' + \frac{943}{128}e_0^4\,e'\right)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&\qquad\qquad+\frac{1359}{128}e_0^2\,e'\,\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6} + \frac{13857}{128}e_0^2\,e'\,\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Bigg]\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\theta_0 = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left\{1 - \frac{3}{2}e_0^2 - \frac{n'\,\mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{7}{4}\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right\}.
$$

Si de ces formules (E_{10}), (F_{10}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans la relation (A_{10}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$
(\mathrm{G}_{10})\left\{
\begin{aligned}
a = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6\\
&- \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&- \left(20 - 80\gamma^2 + \frac{262}{3}e_0^2 + 270\,e'^2\right)\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{36049}{144}\frac{n'^7\,\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}\\
- \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{ & \bigg(\frac{3}{2}e_0\,e' - 9\gamma^2 e_0\,e' + \frac{93}{16}e_0^3\,e' + \frac{27}{16}e_0\,e'^3\\
&\qquad + 9\gamma^4 e_0\,e' - \frac{279}{8}\gamma^2\,e_0^3\,e' + \frac{1825}{128}e_0^5\,e'\bigg)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&+ \left(\frac{33}{8}e_0\,e' - \frac{81}{2}\gamma^2 e_0\,e' + \frac{1491}{64}e_0^3\,e' + \frac{45}{8}e_0\,e'^3\right)\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&+ \left(\frac{213}{4}e_0\,e' - 216\gamma^2 e_0\,e' + \frac{15561}{64}e_0^3\,e'\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad + \frac{7401}{32}e_0\,e'\,\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{171427}{192}e_0\,e'\,\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} + \frac{45}{16}e_0\,e'\,\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2\,a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)\\
- \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}&\cdot\frac{9}{16}e_0^2\,e'^2\,\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0 = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6\\
&- \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&- \left(20 - 80\gamma^2 + \frac{262}{3}e_0^2 + 270\,e'^2\right)\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{36049}{144}\frac{n'^7\,\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0 ; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{10}), (F_{10}), (G_{10}). et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{10})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\left(\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e' + \frac{27}{16}e_0^2 e' + \frac{27}{32}e'^3 + \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{81}{8}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{33}{256}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &-\left(\frac{33}{16}e' - \frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{567}{64}e_0^2 e' + \frac{45}{16}e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &-\left(\frac{213}{8}e' - 108\gamma^2 e' + \frac{1077}{64}e_0^2 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{7401}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{44659}{96}e'\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{45}{32}e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\\ &+\left[e_0 + \frac{135}{64}e_0 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)\\ &+\left[\left(\frac{81}{32}e_0^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{29}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{1359}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{13857}{128}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{10})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\; e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &+\left[\left(\frac{81}{32}e_0^2 e' - \frac{243}{16}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{29}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{1359}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{13857}{128}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{10})\left\{\begin{aligned} a = a_0\Big\{1 - &\left[\left(\frac{3}{2}e_0 e' - 9\gamma^2 e_0 e' - \frac{3}{16}e_0^3 e' + \frac{27}{16}e_0 e'^3 + 9\gamma^4 e_0 e'\right.\right.\\ &\qquad\left. + \frac{9}{8}\gamma^2 e_0^3 e' + \frac{1}{128}e_0^5 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &+\left(\frac{33}{8}e_0 e' - \frac{81}{2}\gamma^2 e_0 e' + \frac{39}{64}e_0^3 e' + \frac{45}{8}e_0 e'^3\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &+\left(\frac{213}{4}e_0 e' - 216\gamma^2 e_0 e' - \frac{8295}{64}e_0^3 e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\ &\left.+ \frac{7401}{32}e_0 e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{176755}{192}e_0 e'\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{45}{16}e_0 e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\cos\theta_0(t+c)\\ &- \frac{9}{16}e_0^2 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[1 - \frac{n'}{n_0} - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt}=-\frac{dR}{dL}-\frac{dR}{dG}-\frac{dR}{dH},\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt}=n-\frac{n'^2}{n}&\left[1-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{9}{8}e^2+\frac{3}{2}e'^2-\frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}-35\frac{n'^3}{n^3}\right]\\ &+\frac{n'^2}{n}\left[\frac{21}{8}ee'-\frac{45}{4}\gamma^2ee'-\frac{9}{64}e^3e'+\frac{189}{64}ee'^3\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{273}{32}ee'-\frac{693}{8}\gamma^2ee'+\frac{603}{256}e^3e'\right)\frac{n'}{n}+\frac{1767}{8}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{68325}{64}ee'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt}=-\frac{n'^2}{n}&\left[\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{8}e'^2-\frac{33}{8}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\ &+\frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{4}ee'-\frac{9}{2}\gamma^2ee'+\frac{27}{32}e^3e'+\frac{63}{8}ee'\frac{n'}{n}+36ee'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{10}), (F'_{10}), (G'_{10}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{10})\left\{\begin{aligned}h+g+l&=(h)+(g)+l'+(\theta_0+h_0+g_0)(t+c)\\ &+\left[\left(\frac{39}{8}e_0e'-\frac{99}{4}\gamma^2e_0e'-\frac{27}{64}e_0^3e'+\frac{351}{64}e_0e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\ &\qquad+\left(\frac{627}{32}e_0e'-\frac{1377}{8}\gamma^2e_0e'+\frac{729}{256}e_0^3e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &\qquad\qquad\left.+\frac{5325}{16}e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{229431}{128}e_0e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_{10})\left\{\begin{aligned}h&=(h)+h_0(t+c)\\ &+\left[\left(\frac{9}{4}e_0e'-\frac{9}{2}\gamma^2e_0e'+\frac{27}{32}e_0^3e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{81}{8}e_0e'\frac{n'^3}{n_0^3}+54e_0e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° 21); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h + g + l$ vient de ce que l'on a

$$h + g + l = \theta + h + g + l'.$$

Les cinq formules (E'_{10}), (F'_{10}), (G'_{10}), (K_{10}), (L_{10}), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (8); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e \cos(l - l')$ par

$$- \left(\frac{3}{4} e' - \frac{9}{2} \gamma^2 e' + \frac{27}{16} e^2 e' + \frac{27}{32} e'^3 + \frac{9}{2} \gamma^4 e' - \frac{81}{8} \gamma^2 e^2 e' - \frac{33}{256} e^4 e'\right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \left(\frac{33}{16} e' - \frac{81}{4} \gamma^2 e' + \frac{567}{64} e^2 e' + \frac{45}{16} e'^3\right) \frac{n'^3}{n^3} - \left(\frac{213}{8} e' - 108 \gamma^2 e' + \frac{1077}{64} e^2 e'\right) \frac{n'^4}{n^4}$$

$$- \frac{7401}{64} e' \frac{n'^5}{n^5} - \frac{44659}{96} e' \frac{n'^6}{n^6} - \frac{45}{32} e' \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2}$$

$$+ \left[e + \frac{135}{64} e e'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right] \cos(l - l')$$

$$+ \left[\left(\frac{81}{32} e^2 e' - \frac{243}{16} \gamma^2 e^2 e' - \frac{29}{128} e^4 e'\right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{1359}{128} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{13857}{128} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}\right] \cos 2(l - l');$$

$e \sin(l - l')$ par

$$e \sin(l - l')$$

$$+ \left[\left(\frac{81}{32} e^2 e' - \frac{243}{16} \gamma^2 e^2 e' - \frac{29}{128} e^4 e'\right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{1359}{128} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{13857}{128} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4}\right] \sin 2(l - l');$$

a par

$$a \left\{ 1 - \Big[\left(\frac{3}{2} e e' - 9 \gamma^2 e e' - \frac{3}{16} e^3 e' + \frac{27}{16} e e'^3 + 9 \gamma^4 e e' + \frac{9}{8} \gamma^2 e^3 e' + \frac{1}{128} e^5 e'\right) \frac{n'^2}{n^2} \right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{33}{8}ee' - \frac{81}{2}\gamma^2 ee' + \frac{39}{64}e^3 e' + \frac{45}{8}ee'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{213}{4}ee' - 216\,\gamma^2 ee' - \frac{8295}{64}e^3 e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{7401}{32}ee'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{176755}{192}ee'\frac{n'^6}{n^6} + \frac{45}{16}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(l-l')$$

$$-\frac{9}{16}e^2 e'^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(l-l')\ \Big\};$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\Bigg[\left(\frac{39}{8}ee' - \frac{99}{4}\gamma^2 ee' - \frac{27}{64}e^3 e' + \frac{351}{64}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{627}{32}ee' - \frac{1377}{8}\gamma^2 ee' + \frac{729}{256}e^3 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{5325}{16}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{229431}{128}ee'\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\sin(l-l');$$

h par

$$h+\Bigg[\left(\frac{9}{4}ee' - \frac{9}{2}\gamma^2 ee' + \frac{27}{32}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{81}{8}ee'\frac{n'^3}{n^3} + 54\,ee'\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(l-l').$$

γ ne change pas.

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left(\frac{9}{16}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{297}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{99}{32}e'^2\frac{n'^5}{n^5} + \frac{11313}{256}e'^2\frac{n'^6}{n^6}$$

$$-\Bigg[\left(\frac{3}{2}ee' - 9\gamma^2 ee' - \frac{27}{16}e^3 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{33}{8}ee'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{213}{4}ee'\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\cos(l-l');$$

$e^2\cos 2(l-l')$* par

$$\frac{9}{16}e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{99}{32}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$-\left[\left(\frac{3}{2}ee' - 9\gamma^2 ee' + \frac{27}{8}e^3e' + \frac{27}{16}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{33}{8}ee' - \frac{81}{2}\gamma^2 ee' + \frac{567}{32}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left. + \frac{213}{4}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{7401}{32}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(l-l')$$
$$+ e^2\cos 2(l-l')$$
$$+\left[\frac{81}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1359}{64}e^3e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos 3(l-l');$$

$e^2 \sin 2(l-l')$ par

$$-\left[\left(\frac{3}{2}ee' - 9\gamma^2 ee' + \frac{27}{8}e^3e' + \frac{27}{16}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{33}{8}ee' - \frac{81}{2}\gamma^2 ee' + \frac{567}{32}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left. + \frac{213}{4}ee'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{7401}{32}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(l-l')$$
$$+ e^2\sin 2(l-l')$$
$$+\left[\frac{81}{16}e^3e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1359}{64}e^3e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 3(l-l');$$

$e^3 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 3(l-l')$ par

$$\frac{27}{16}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(l-l')$$
$$-\left[\left(\frac{9}{4}e^2e' - \frac{27}{2}\gamma^2e^2e' + \frac{81}{16}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{99}{16}e^2e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{639}{8}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(l-l')$$
$$+ e^3\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(l-l')$$
$$+\frac{243}{32}e^4e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}4(l-l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{10}), (F'_{10}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celle de a donnée par la formule (G'_{10}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

$$L_0 = \text{ancienne valeur de L (page 370)}$$
$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{9}{64}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{99}{128}e^2e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right\},$$

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{3}{4}ee' - \frac{9}{2}\gamma^2ee' - \frac{3}{32}e^3e' + \frac{27}{32}ee'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{33}{16}ee' - \frac{81}{4}\gamma^2ee' + \frac{39}{128}e^3e'\right)\frac{n'^3}{n^3} - \frac{213}{8}ee'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{7401}{64}ee'\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 371)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{9}{32}e'^2-\frac{27}{8}\gamma^2e'^2+\frac{387}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{99}{64}e'^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{11313}{512}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\};$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 371)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{9}{32}e'^2-\frac{63}{16}\gamma^2e'^2+\frac{387}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{99}{64}e'^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{11313}{512}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide des formules (41), on trouve

$$\theta_1=\frac{1}{e}\left\{\left(\frac{3}{4}e'-\frac{9}{2}\gamma^2e'+\frac{135}{32}e^2e'+\frac{27}{32}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{33}{16}e'-\frac{81}{4}\gamma^2e'+\frac{2493}{128}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{213}{8}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{7401}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1L_1+2\theta_2L_2+\ldots\ldots)=$$
$$\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{9}{32}e'^2-\frac{27}{8}\gamma^2e'^2+\frac{99}{64}e^2e'^2+\frac{81}{128}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{99}{64}e'^2-\frac{783}{32}\gamma^2e'^2+\frac{747}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}-\frac{11313}{512}e'^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{36261}{256}e'^2\frac{n'^7}{n^7}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 378 et 379) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 10$^{\text{e}}$ opération, et y ajoutant

$$+n'(L-L_0)-n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1L_1+2\theta_2L_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (8) de R, joint à la quantité $+n'(L-L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1L_1+2\theta_2L_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [10. . . . . . . 1, 8]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\,\Bigg\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 - \frac{7305}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{151103}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\,\Bigg\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8\\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right.\\
&\qquad \left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\,\Bigg\{ 1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8\\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2 \right.\\
&\qquad \left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{13131757}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ 2 + \left(\frac{359}{8} - \frac{375}{2}\gamma^2 + \frac{45371}{128}e^2 + \frac{5385}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(140 - 396\gamma^2 + \frac{18411}{8}e^2 + 1890\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+ \frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{387}{4} - \frac{1473}{4}\gamma^2 - \frac{22933}{128}e^2 + \frac{5805}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(420 - 1476\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 + 5670\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+ \frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{33}{4} - \frac{69}{4}\gamma^2 - \frac{771}{8}e^2 + \frac{495}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + (40 - 120\gamma^2 - 399\,e^2 + 540\,e'^2)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+ \frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{36549}{128}e^2 + \frac{13905}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6$$
$$+ \left(\frac{927}{32} - \frac{691}{8}\gamma^2 - \frac{57693}{128}e^2 + \frac{13905}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{757}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = -\frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{17}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6$$
$$+ \left(\frac{43}{16} + \frac{879}{8}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} - \frac{127}{4}\gamma^2 - \frac{1427}{64}e^2 + \frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

11^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître une seconde fois le terme (7) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (7)[*] dans lequel l'argument est l, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162 e^2 + \frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad\qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{5644303}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2} \Big\} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ - \left(\frac{31}{4}e - 24\gamma^2 e - \frac{2795}{128}e^3 + \frac{465}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{57}{2}e - 101\gamma^2 e - \frac{5375}{64}e^3 + \frac{1539}{4}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \frac{14591}{128}e\frac{n'^4}{n^4} - \frac{15955}{48}e\frac{n'^5}{n^5} \Big\} \cos l.
\end{aligned}$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \qquad i' = 0, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0;$$

---

[*] Il ne faut prendre pour le terme (1), dans le chapitre IV, que la partie qui existait dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des dix premières opérations; et dans le terme (7), que les parties qui proviennent des opérations effectuées après la 1re jusqu'à la 10^e inclusivement.

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(\mathrm{A}_{11})\qquad a = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e^2 + e^4 + e^6 - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - 20\,\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\,\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = \mathrm{G}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{11})\left\{\begin{aligned}\frac{de}{dt} = \frac{n'^4\mathrm{G}^9}{\mu^6}\Big\{&\frac{31}{4} - 24\gamma^2 + \frac{677}{128}e^2 + \frac{465}{8}e'^2 + \left(\frac{57}{2} - 101\,\gamma^2 + \frac{3745}{64}e^2 + \frac{1539}{4}e'^2\right)\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2}\\ &+ \frac{14591}{128}\,\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} + \frac{15955}{48}\,\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\Big\}\sin l.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a $\dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}$; en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}$, $\dfrac{de}{d\mathrm{L}}$, $\dfrac{d\gamma}{d\mathrm{L}}$, données à la suite de la 10^e opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{11})\left\{\begin{aligned}\frac{dl}{dt} = {}&\frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left\{1 - \frac{3}{2}e^2 - \frac{7}{4}\,\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right\}\\ &+ \frac{n'^4\mathrm{G}^9}{\mu^6}\cdot\frac{1}{e}\Big\{\frac{31}{4} - 24\gamma^2 + \frac{5007}{128}e^2 + \frac{465}{8}e'^2 + \left(\frac{57}{2} - 101\,\gamma^2 + \frac{16707}{64}e^2 + \frac{1539}{4}e'^2\right)\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2}\\ &+ \frac{14591}{128}\,\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} + \frac{15955}{48}\,\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\Big\}\cos l.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{11}), (D_{11}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction, et aussi en ce que l y est mis à la place de θ. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(\mathrm{E}_{11})\left\{\begin{aligned}
e\cos l = &-\left(\frac{31}{4} - 24\gamma^2 + \frac{2909}{64}e_0^2 + \frac{465}{8}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&-\left(\frac{57}{2} - 101\gamma^2 + \frac{7849}{32}e_0^2 + \frac{1539}{4}e'^2\right)\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{16327}{128}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{18349}{48}\frac{n'^7\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\\
&+ e_0\cos l_0(t+c)\\
&+\left[\frac{3653}{128}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{9217}{64}e_0^2\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right]\cos 2\,l_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{11})\left\{\begin{aligned}
e\sin l = &\;e_0\sin l_0(t+c)\\
&+\left[\frac{3653}{128}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{9217}{64}e_0^2\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right]\sin 2\,l_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et l_0 a pour valeur

$$
l_0 = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left\{1 - \frac{3}{2}e_0^2 - \frac{7}{4}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right\}.
$$

Si de ces formules (E_{11}), (F_{11}) on tire la valeur de e^2 et qu'on l'introduise dans la relation (A_{11}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$
(\mathrm{G}_{11})\left\{\begin{aligned}
a = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{&1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6\\
&-\left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - 20\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}\\
-\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{&\left(\frac{31}{2}e_0 - 48\gamma^2e_0 + \frac{4149}{64}e_0^3 + \frac{465}{4}e_0e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&+\left(57e_0 - 202\gamma^2e_0 + \frac{10129}{32}e_0^3 + \frac{1539}{2}e_0e'^2\right)\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\\
&+\frac{16327}{64}e_0\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} + \frac{18349}{24}e_0\frac{n'^7\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}\cos l_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{G^2}{\mu} \Big\{ 1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32} e_0^2 + \frac{555}{16} e'^2 \right) \frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} - 20\, \frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32} \frac{n'^6 G^{18}}{\mu^{12}} \Big\}.$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{11}), (F_{11}), (G_{11}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{11})\quad \left\{ \begin{aligned} e \cos l = &- \left(\frac{31}{4} - 24\gamma^2 - \frac{67}{64} e_0^2 + \frac{465}{8} e'^2 \right) \frac{n'^4}{n_0^4} \\ &- \left(\frac{57}{2} - 101\gamma^2 + \frac{1009}{32} e_0^2 + \frac{1539}{4} e'^2 \right) \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{16327}{128} \frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{18349}{48} \frac{n'^7}{n_0^7} \\ &+ e_0 \cos l_0 (t + c) \\ &+ \left[\frac{3653}{128} e_0^2 \, \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{9217}{64} e_0^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \right] \cos 2 l_0 (t + c). \end{aligned} \right.$$

$$(F'_{11})\quad \left\{ \begin{aligned} e \sin l = &\; e_0 \sin l_0 (t + c) \\ &+ \left[\frac{3653}{128} e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{9217}{64} e_0^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \right] \sin 2 l_0 (t + c), \end{aligned} \right.$$

$$(G'_{11})\quad \left\{ \begin{aligned} a = a_0 \Big\{ 1 - \Big[&\left(\frac{31}{2} e_0 - 48\gamma^2 e_0 - \frac{2795}{64} e_0^3 + \frac{465}{4} e_0 e'^2 \right) \frac{n'^4}{n_0^4} \\ &+ \left(57 e_0 - 202\gamma^2 e_0 - \frac{5375}{32} e_0^3 + \frac{1539}{2} e_0 e'^2 \right) \frac{n'^5}{n_0^5} \\ &\qquad\qquad + \frac{16327}{64} e_0 \frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{18349}{24} e_0 \frac{n'^7}{n_0^7} \Big] \cos l_0 (t + c) \Big\}. \end{aligned} \right.$$

La valeur de l_0 deviendra de même

$$l_0 = n_0 \left[1 - \frac{7}{4} \frac{n'^2}{n_0^2} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h + g + l)}{dt} = - \frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = - \frac{dR}{dH};$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$+ \frac{n'^4}{n^3}\left[\frac{589}{8}e - 204\gamma^2 e - \frac{47267}{256}e^3 + \frac{8835}{16}ee'^2 + \frac{1425}{4}e\frac{n'}{n} + \frac{452321}{256}e\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos l,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^4}{n^3}\left[12e + \frac{101}{2}e\frac{n'}{n}\right]\cos l;$$

d'où, en remplaçant a, e, l par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{11}), (F'_{11}), (G'_{11}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{11})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= (h)+(g)+(h_0+g_0+l_0)(t+c) \\ &\quad + \left[\left(\frac{775}{8}e_0 - 276\gamma^2 e_0 - \frac{64037}{256}e_0^3 + \frac{11625}{16}e_0 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1767}{4}e_0\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{604099}{256}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\sin l_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{11})\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[12e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{101}{2}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin l_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme l_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin.

Les cinq formules (E'_{11}), (F'_{11}), (G'_{11}), (K_{11}), (L_{11}), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (7) ; dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos l$ par

$$-\left(\frac{31}{4} - 24\gamma^2 - \frac{67}{64}e^2 + \frac{465}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{57}{2} - 101\gamma^2 + \frac{1009}{32}e^2 + \frac{1539}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} - \frac{16327}{128}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{18349}{48}\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+ e\cos l$$

$$+ \left[\frac{3653}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9217}{64}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2l;$$

$e \sin l$ par

$$e \sin l$$

$$+ \left[\frac{3653}{128} e^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{9217}{64} e^2 \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin 2l;$$

a par

$$a \left\{ 1 - \left[\left(\frac{31}{2} e - 48 \gamma^2 e - \frac{2795}{64} e^3 + \frac{465}{4} ee'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(57 e - 202 \gamma^2 e - \frac{5375}{32} e^3 + \frac{1539}{2} ee'^2 \right) \frac{n'^5}{n^5} + \frac{16327}{64} e \frac{n'^6}{n^6} + \frac{18349}{24} e \frac{n'^7}{n^7} \right] \cos l \right\};$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l + \left[\left(\frac{775}{8} e - 276 \gamma^2 e - \frac{64037}{256} e^3 + \frac{11625}{16} ee'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1767}{4} e \frac{n'^5}{n^5} + \frac{604099}{256} e \frac{n'^6}{n^6} \right] \sin l;$$

h par

$$h + \left[12 e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{101}{2} e \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin l.$$

γ ne change pas.

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \frac{961}{16} \frac{n'^8}{n^8} - \left[\frac{31}{2} e \frac{n'^4}{n^4} + 57 e \frac{n'^5}{n^5} \right] \cos l;$$

$e^2 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2l$* par

$$-\left[\left(\frac{31}{2} e - 48 \gamma^2 e - \frac{67}{32} e^3 + \frac{465}{4} ee'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} + 57 e \frac{n'^5}{n^5} + \frac{16327}{64} e \frac{n'^6}{n^6} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} l$$

$$+ e^2 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2l$$

$$+ \frac{3653}{64} e^3 \frac{n'^4}{n^4} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 3l.$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{11}), (F'_{11}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celle de a donnée par la formule (G'_{11}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 382),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{31}{4}e\frac{n'^4}{n^4} - \frac{57}{2}e\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 382)

$$-\sqrt{a\mu}\,\frac{961}{32}\,\frac{n'^8}{n^8};$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 382)

$$-\sqrt{a\mu}\,\frac{961}{32}\,\frac{n'^8}{n^8}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{\frac{31}{4}\,\frac{n'^4}{n^4} + \frac{57}{2}\,\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{961}{32}\,\frac{n'^8}{n^8} - \frac{1767}{8}\,\frac{n'^9}{n^9}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 388 et 389) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 11ᵉ opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (7) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1), et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [11 · · · · 1,7]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\,\Bigg\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right. \\
&\qquad \left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 - \frac{7305}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7} \\
&\qquad + \frac{11471149}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{532775}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\,\Bigg\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
&\qquad + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11471149}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\,\Bigg\{ 1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
&\qquad + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11471149}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Les valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, ..., qui se déduisent de ces relations entre L, G, H et a, e, γ, sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10^e opération (page 383).

12^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (13) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (13)*, dans lequel l'argument est $l + 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \Big(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \Big(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} - \Big(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4537231}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \Big[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\Big]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ -\frac{9}{8}ee'^2 + \frac{27}{4}\gamma^2 ee'^2 + \frac{9}{64}e^3 e'^2 - \frac{7}{8}ee'^4 \\
& \qquad + \Big(\frac{189}{64}ee'^2 - \frac{567}{16}\gamma^2 ee'^2 + \frac{459}{512}e^3 e'^2\Big)\frac{n'}{n} + \frac{25671}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{95533}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}\Big\} \\
& \times \cos(l + 2l').
\end{aligned}$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \qquad i' = 0, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 2.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (13), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des onze premières opérations.

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dG}{dt} = 0, \qquad \frac{dH}{dt} = 0;$$

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(\mathrm{A}_{12}) \quad a = \frac{G^2}{\mu} \left\{ 1 + e^2 + e^4 + e^6 - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32} e^2 + \frac{555}{16} e'^2 \right) \frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} - 20 \frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32} \frac{n'^6 G^{18}}{\mu^{12}} \right\}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$L = G \left\{ 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 - \frac{1001}{64} e^2 \frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} \right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{12}) \left\{ \begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{n'^2 G^3}{\mu^2} \Bigg\{ & \frac{9}{8} e'^2 - \frac{27}{4} \gamma^2 e'^2 + \frac{27}{64} e^2 e'^2 + \frac{7}{8} e'^4 \\ & - \left(\frac{189}{64} e'^2 - \frac{567}{16} \gamma^2 e'^2 + \frac{3483}{512} e^2 e'^2 \right) \frac{n' G^3}{\mu^2} - \frac{25671}{256} e'^2 \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} - \frac{95533}{256} e'^2 \frac{n'^3 G^9}{\mu^6} \Bigg\} \sin\theta. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dl}{dt} + 2n' = -\frac{dR}{dL} + 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{dL}$, $\dfrac{de}{dL}$, $\dfrac{d\gamma}{dL}$, données à la suite de la 10^e opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{12}) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = & \frac{\mu^2}{G^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} e^2 + 2 \frac{n' G^3}{\mu^2} - \frac{7}{4} \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} \right\} \\ & + \frac{n'^2 G^3}{\mu^2} \cdot \frac{1}{e} \Bigg\{ \frac{9}{8} e'^2 - \frac{27}{4} \gamma^2 e'^2 + \frac{297}{64} e^2 e'^2 + \frac{7}{8} e'^4 - \left(\frac{189}{64} e'^2 - \frac{567}{16} \gamma^2 e'^2 + \frac{14985}{512} e^2 e'^2 \right) \frac{n' G^3}{\mu^2} \\ & \qquad - \frac{25671}{256} e'^2 \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} - \frac{95533}{256} e'^2 \frac{n'^3 G^9}{\mu^6} \Bigg\} \cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{12}), (D_{12}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{12})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\left(\frac{9}{8}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{189}{32}e_0^2 e'^2 + \frac{7}{8}e'^4\right)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\ &+\left(\frac{333}{64}e'^2 - \frac{783}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{11637}{256}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6} + \frac{22503}{256}e'^2\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{26429}{128}e'^2\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\\ &+ e_0\cos\theta_0(t+c)\\ &+\left[\frac{243}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4} - \frac{13635}{512}e_0^2 e'^2\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6}\right]\cos 2\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{12})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\; e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &+\left[\frac{243}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4} - \frac{13635}{512}e_0^2 e'^2\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6}\right]\sin 2\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left\{1 - \frac{3}{2}e_0^2 + 2\frac{n'\,\mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{7}{4}\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces formules (E_{12}), (F_{12}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans la relation (A_{12}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$(\mathrm{G}_{12})\left\{\begin{aligned} a = &\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - 20\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\}\\ &-\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{\left(\frac{9}{4}e_0 e'^2 - \frac{27}{2}\gamma^2 e_0 e'^2 + \frac{279}{32}e_0^3 e'^2 + \frac{7}{4}e_0 e'^4\right)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right.\\ &\qquad-\left(\frac{333}{32}e_0 e'^2 - \frac{783}{8}\gamma^2 e_0 e'^2 + \frac{14967}{256}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\ &\qquad\left.-\frac{22503}{128}e_0 e'^2\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{26429}{64}e_0 e'^2\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - 20\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{12}), (F_{12}),

(G_{12}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{12})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\left(\frac{9}{8}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{81}{32}e_0^2 e'^2 + \frac{7}{8}e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \left(\frac{333}{64}e'^2 - \frac{783}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{5643}{256}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ &+ \frac{22503}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{26429}{128}e'^2\frac{n'^5}{n_0^5} \\ &+ e_0\cos\theta_0(t+c) \\ &+ \left[\frac{243}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{13635}{512}e_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{12})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\; e_0\sin\theta_0(t+c) \\ &+ \left[\frac{243}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{13635}{512}e_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{12})\left\{\begin{aligned} a = a_0\Bigg\{1 - \Bigg[&\left(\frac{9}{4}e_0 e'^2 - \frac{27}{2}\gamma^2 e_0 e'^2 - \frac{9}{32}e_0^3 e'^2 + \frac{7}{4}e_0 e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ &- \left(\frac{333}{32}e_0 e'^2 - \frac{783}{8}\gamma^2 e_0 e'^2 + \frac{315}{256}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ &- \frac{22503}{128}e_0 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{26429}{64}e_0 e'^2\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[1 + 2\frac{n'}{n_0} - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}&\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\ &+ \frac{n'^2}{n}\left[\frac{63}{16}ee'^2 - \frac{135}{8}\gamma^2 ee'^2 - \frac{27}{128}e^3 e'^2 - \frac{2457}{128}ee'^2\frac{n'}{n} - \frac{487749}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{27}{8}ee'^2 - \frac{567}{32}ee'^2\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{12}), (F'_{12}), (G'_{12}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{12})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= (h)+(g)-2l'+(\theta_0+h_0+g_0)(t+c)\\ &\quad+\left[\left(\frac{117}{16}e_0e'^2-\frac{297}{8}\gamma^2e_0e'^2-\frac{81}{128}e_0^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{6327}{128}e_0e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}-\frac{562575}{512}e_0e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_{12})\quad h=(h)+h_0(t+c)+\left[\frac{27}{8}e_0e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}-\frac{783}{32}e_0e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\theta+h+g-2l'.$$

Les cinq formules (E'_{12}), (F'_{12}), (G'_{12}), (K_{12}), (L_{12}), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (13); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(l+2l')$ par

$$-\left(\frac{9}{8}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{81}{32}e^2e'^4+\frac{7}{8}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{333}{64}e'^2-\frac{783}{16}\gamma^2e'^2+\frac{5643}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{22503}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{26429}{128}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+e\cos(l+2l')$$

$$+\left[\frac{243}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{13635}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos2(l+2l');$$

$e \sin(l + 2l')$ par

$$e \sin(l + 2l')$$

$$+ \left[\frac{243}{64} e^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{13635}{512} e^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \sin 2(l + 2l');$$

a par

$$a \left\{ 1 - \left[\left(\frac{9}{4} ee'^2 - \frac{27}{2} \gamma^2 ee'^2 - \frac{9}{32} e^3 e'^2 + \frac{7}{4} ee'^4\right) \frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{333}{32} ee'^2 - \frac{783}{8} \gamma^2 ee'^2 + \frac{315}{256} e^3 e'^2\right) \frac{n'^3}{n^3} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{22503}{128} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{26429}{64} ee'^2 \frac{n'^5}{n^5}\right] \cos(l + 2l') \right\};$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l + \left[\left(\frac{117}{16} ee'^2 - \frac{297}{8} \gamma^2 ee'^2 - \frac{81}{128} e^3 e'^2\right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{6327}{128} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{562575}{512} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right] \sin(l + 2l');$$

h par

$$h + \left[\frac{27}{8} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{783}{32} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \sin(l + 2l').$$

γ ne change pas.

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 - \left[\frac{9}{4} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{333}{32} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \cos(l + 2l');$$

$e^3 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(l + 2l')$ * par

$$- \left[\left(\frac{9}{4} ee'^2 - \frac{27}{2} \gamma^2 ee'^2 + \frac{81}{16} e^3 e'^2\right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{333}{32} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{22503}{128} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right] \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} (l + 2l')$$

$$+ e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(l + 2l')$$

$$+ \frac{243}{32} e^3 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 3(l + 2l').$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{12}), (F'_{12}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celle de a donnée par la formule (G'_{12}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 391),

$$L_1 = -\sqrt{a\mu}\cdot\frac{9}{8}ee'^2\frac{n'^2}{n^2};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 391);

H_0 = ancienne valeur de H (page 391).

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\cdot\frac{9}{8}e'^2\frac{n'^2}{n^2}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = -\sqrt{a\mu}\cdot\frac{81}{128}e'^4\frac{n'^4}{n^4}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29** et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 396 et 397) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 12^e^ opération, et y ajoutant

$$-2n'(L - L_0) + 2n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (13) de R, joint à la quantité $-2n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$+2n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et d'une nouvelle partie qui est donnée dans le chapitre IV avec l'indication (12 . . . 1, 13). Ensuite la nouvelle valeur de L, sera

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 - \frac{14691}{128}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad + \frac{11471149}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{532775}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

Quant aux valeurs de G et de H, elles sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 11^e opération (page 391). Les valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, ... sont aussi les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10^e opération (page 383).

13^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (9) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (9) *, dans lequel l'argument est $l - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = &\frac{\mu}{2a}\\
&+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2\\
&\qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2
\end{aligned}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (9), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des douze premières opérations.

$$-\left(\frac{37}{8}-\frac{33}{2}\gamma^2-\frac{373}{8}e^2+\frac{555}{16}e'^2+\frac{69}{4}\gamma^4+\frac{351}{2}\gamma^2e^2-\frac{495}{4}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.+\frac{24341}{512}e^4-\frac{5595}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\left(15-60\gamma^2-162e^2+\frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$-\left(\frac{10915}{192}-\frac{28655}{96}\gamma^2-\frac{568771}{768}e^2+\frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{4537231}{18432}\frac{n'^6}{n^6}$$
$$+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{-\frac{9}{8}ee'^2+\frac{27}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{9}{64}e^3e'^2-\frac{7}{8}ee'^4$$
$$-\left(\frac{189}{64}ee'^2-\frac{567}{16}\gamma^2ee'^2+\frac{459}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}-\frac{36273}{256}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{71357}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}\Bigg\}$$
$$\times\cos(l-2l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=1,\qquad i'=0,\qquad i''=0,\qquad i'''=-2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dG}{dt}=0,\qquad \frac{dH}{dt}=0;$$

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(A_{13})\quad a=\frac{G^2}{\mu}\Bigg\{1+e^2+e^4+e^6-\left(\frac{37}{8}-\frac{33}{2}\gamma^2+\frac{357}{32}e^2+\frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4G^{12}}{\mu^8}-20\frac{n'^5G^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6G^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$L=G\Bigg\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6-\frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4G^{12}}{\mu^8}\Bigg\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{13}) \left\{ \begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{n'^2 G^3}{\mu^2} \Big\{ & \frac{9}{8} e'^2 - \frac{27}{4} \gamma^2 e'^2 + \frac{27}{64} e^2 e'^2 + \frac{7}{8} e'^4 \\ & + \left(\frac{189}{64} e'^2 - \frac{567}{16} \gamma^2 e'^2 + \frac{3483}{512} e^2 e'^2 \right) \frac{n' G^3}{\mu^2} + \frac{36273}{256} e'^2 \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} + \frac{71357}{128} e'^2 \frac{n'^3 G^9}{\mu^6} \Big\} \sin\theta. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dl}{dt} - 2n' = -\frac{dR}{dL} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{de}{dL}$, $\frac{d\gamma}{dL}$ données à la suite de la 10ᵉ opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{13}) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{G^3} & \Big\{ 1 - \frac{3}{2} e^2 - 2 \frac{n' G^3}{\mu^2} - \frac{7}{4} \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} \Big\} \\ & + \frac{n'^2 G^3}{\mu^2} \cdot \frac{1}{e} \Big\{ \frac{9}{8} e'^2 - \frac{27}{4} \gamma^2 e'^2 + \frac{297}{64} e^2 e'^2 + \frac{7}{8} e'^4 \\ & \qquad + \left(\frac{189}{64} e'^2 - \frac{567}{16} \gamma^2 e'^2 + \frac{14985}{512} e^2 e'^2 \right) \frac{n' G^3}{\mu^2} \\ & \qquad + \frac{36273}{256} e'^2 \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} + \frac{71357}{128} e'^2 \frac{n'^3 G^9}{\mu^6} \Big\} \cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{13}), (D_{13}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre chose que L) a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs, par leur forme, dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{13}) \left\{ \begin{aligned} e\cos\theta = & - \left(\frac{9}{8} e'^2 - \frac{27}{4} \gamma^2 e'^2 + \frac{189}{32} e_0^2 e'^2 + \frac{7}{8} e'^4 \right) \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} \\ & - \left(\frac{333}{64} e'^2 - \frac{783}{16} \gamma^2 e'^2 + \frac{11637}{256} e_0^2 e'^2 \right) \frac{n'^3 G^9}{\mu^6} - \frac{39441}{256} e'^2 \frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} - \frac{223927}{256} e'^2 \frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}} \\ & + e_0 \cos\theta_0 (t + c) \\ & + \left[\frac{243}{64} e_0^2 e'^2 \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} + \frac{13635}{512} e_0^2 e'^2 \frac{n'^3 G^9}{\mu^6} \right] \cos 2\theta_0 (t + c), \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{F}_{13}) \quad e\sin\theta = e_0 \sin\theta_0 (t + c) + \left[\frac{243}{64} e_0^2 e'^2 \frac{n'^2 G^6}{\mu^4} + \frac{13635}{512} e_0^2 e'^2 \frac{n'^3 G^9}{\mu^6} \right] \sin 2\theta_0 (t + c).$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{G^3}\left\{1 - \frac{3}{2}e_0^2 - 2\frac{n' G^3}{\mu^2} - \frac{7}{4}\frac{n'^2 G^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces formules (E_{13}), (F_{13}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans la relation (A_{13}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$(G_{13})\left\{\begin{aligned}
a = {} & \frac{G^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} - 20\frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6 G^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\
& - \frac{G^2}{\mu}\left\{\left(\frac{9}{4}e_0 e'^2 - \frac{27}{2}\gamma^2 e_0 e'^2 + \frac{279}{32}e_0^3 e'^2 + \frac{7}{4}e_0 e'^4\right)\frac{n'^2 G^6}{\mu^4}\right. \\
& \quad + \left(\frac{333}{32}e_0 e'^2 - \frac{783}{8}\gamma^2 e_0 e'^2 + \frac{14967}{256}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^3 G^9}{\mu^6} \\
& \quad \left. + \frac{39441}{128}e_0 e'^2\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} + \frac{223927}{128}e_0 e'^2\frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t + c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{G^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 + \frac{357}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right)\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} - 20\frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6 G^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{13}), (F_{13}), (G_{13}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{13})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & -\left(\frac{9}{8}e'^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{81}{32}e_0^2 e'^2 + \frac{7}{8}e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& -\left(\frac{333}{64}e'^2 - \frac{783}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{5643}{256}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{39441}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{223927}{256}e'^2\frac{n'^5}{n_0^5} \\
& + e_0\cos\theta_0(t + c) \\
& + \left[\frac{243}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{13635}{512}e_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos 2\theta_0(t + c),
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{13})\quad e\sin\theta = e_0\sin\theta_0(t + c) + \left[\frac{243}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{13635}{512}e_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin 2\theta_0(t + c),$$

$$(G'_{13})\quad a = a_0 \Big\{ 1 - \Big[\Big(\frac{9}{4} e_0 e'^2 - \frac{27}{2}\gamma^2 e_0 e'^2 - \frac{9}{32} e_0^3 e'^2 + \frac{7}{4} e_0 e'^4 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} + \Big(\frac{333}{32} e_0 e'^2 - \frac{783}{8}\gamma^2 e_0 e'^2 + \frac{315}{256} e_0^3 e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{39441}{128} e_0 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{223927}{128} e_0 e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \Big] \cos\theta_0 (t + c) \Big\}.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0 \left[1 - 2\frac{n'}{n_0} - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n_0^2} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH}.$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2} \right] + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{63}{16} ee'^2 - \frac{135}{8}\gamma^2 ee'^2 - \frac{27}{128} e^3 e'^2 + \frac{2457}{128} ee'^2 \frac{n'}{n} + \frac{689187}{512} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} \right] \cos\theta;$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{27}{8} ee'^2 + \frac{567}{32} ee'^2 \frac{n'}{n} \right] \cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{13}), (F'_{13}), (G'_{13}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{13})\quad h + g + l = (h) + (g) + 2l' + (\theta_0 + h_0 + g_0)(t + c) + \Big[\Big(\frac{117}{16} e_0 e'^2 - \frac{297}{8}\gamma^2 e_0 e'^2 - \frac{81}{128} e_0^3 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{6327}{128} e_0 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{986025}{512} e_0 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \Big] \sin\theta_0 (t + c),$$

$$(L_{13})\quad h = (h) + h_0(t + c) + \left[\frac{27}{8} e_0 e'^2 \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{783}{32} e_0 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3} \right] \sin\theta_0 (t + c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont deux quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce l'on a

$$h+g+l=\theta+h+g+2l'.$$

Les cinq formules (E'_{13}), (F'_{13}), (G'_{13}), (K_{13}), (L_{13}), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (9); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du nº **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(l-2l')$ par

$$-\left(\frac{9}{8}e'^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{81}{32}e^2e'^2+\frac{7}{8}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{333}{64}e'^2-\frac{783}{16}\gamma^2e'^2+\frac{5643}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\frac{39441}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{223927}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+e\cos(l-2l')$$

$$+\left[\frac{243}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{13635}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos2(l-2l');$$

$e\sin(l-2l')$ par

$$e\sin(l-2l')$$

$$+\left[\frac{243}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{13635}{512}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin2(l-2l');$$

a par

$$a\left\{1-\left[\left(\frac{9}{4}ee'^2-\frac{27}{2}\gamma^2ee'^2-\frac{9}{32}e^3e'^2+\frac{7}{4}ee'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{333}{32}ee'^2-\frac{783}{8}\gamma^2ee'^2+\frac{315}{256}e^3e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{39441}{128}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{223927}{128}ee'^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(l-2l')\right\};$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{117}{16}ee'^2-\frac{297}{8}\gamma^2ee'^2-\frac{81}{128}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{6327}{128}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{986025}{512}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(l-2l');$$

h par

$$h + \left[\frac{27}{8} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{783}{32} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \sin(l - 2l').$$

γ ne change pas.

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 - \left[\frac{9}{4} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{333}{32} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \cos(l - 2l');$$

$e^2 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2(l - 2l')$ * par

$$- \left[\left(\frac{9}{4} ee'^2 - \frac{27}{2}\gamma^2 ee'^2 + \frac{81}{16} e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{333}{32} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{39441}{128} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (l - 2l')$$

$$+ e^2 . \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2(l - 2l')$$

$$+ \frac{243}{32} e^3 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 3(l - 2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{13}), (F'_{13}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celle de a donnée par la formule (G'_{13}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

$L_0 =$ anciennne valeur de L (page 399),

$$L_1 = -\sqrt{a\mu} \cdot \frac{9}{8} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 391);

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 391).

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\cdot\frac{9}{8}e'^2\frac{n'^2}{n^2}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = -\sqrt{a\mu}\cdot\frac{81}{128}e'^4\frac{n'^4}{n^4}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 404 et 405) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 13ᵉ opération, et y ajoutant

$$+2n'(L - L_0) - 2n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (9) de R, joint à la quantité $+2n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-2n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et d'une nouvelle partie qui est donnée dans le chapitre IV avec l'indication [13 . . . . . 1, 9]. Ensuite la nouvelle valeur de L sera

$$\begin{aligned}
L = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &+ \Big(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 - \frac{3693}{32}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \Big(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \Big(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11471149}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{532775}{1728}\frac{n'^9}{n^9} \\
&\qquad + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

Quant aux valeurs de G et de H, elles sont les données à la suite de la 11^e opération (page 391). Les v $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... sont aussi les mêmes que celles qui ont été données à la su été 10^e opération (page 383).

14^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître une seconde fois le terme (87) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (87) * dans lequel l'argument est $2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4537231}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\left(\frac{9}{16}e - \frac{9}{2}\gamma^2 e + \frac{15}{64}e^3 - \frac{207}{32}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{9}{8}e - 9\gamma^2 e + \frac{69}{32}e^3 + \frac{2205}{32}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad + \frac{31921}{512}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{118073}{384}e\frac{n'^5}{n^5}\Big\} \\
& \times \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}
$$

---

* Il ne faut prendre pour le terme (1), dans le chapitre IV, que la partie qui existait dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des treize premières opérations; et dans le terme (87) que les parties qui proviennent des opérations effectuées après la 2^e jusqu'à la 13^e inclusivement.

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 3, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{3}\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$\mathrm{G} = \frac{2}{3}\mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = \frac{2}{3}\mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{14})\left\{\begin{aligned} a = \frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 3e^2 + \frac{15}{2}e^4 + \frac{69}{4}e^6 \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{4431}{32}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ & - 20\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{14})\quad \gamma^2 = \frac{1}{6}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\Big\{1 - e^2 - \frac{3}{4}e^4 + 5\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = 3(\mathrm{G})\Big\{1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{21}{8}e^4 + \frac{75}{16}e^6 - \frac{3003}{64}e^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{14})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{n'^4.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Big\{ & \frac{9}{16} - \frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{429}{64}e^2 - \frac{207}{32}e'^2 \\ & + \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{645}{32}e^2 + \frac{2205}{32}e'^2\right)\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ & - \frac{31921}{512}\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \frac{118073}{384}\frac{n'^3.3^9.(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 3\frac{dl}{dt} - 2n' = -3\frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dG} - 2\frac{dR}{dH} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... données à la suite de la 10^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{14})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\Bigg\{ & 3 - \frac{27}{2}e^2 - 2\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \frac{15}{4}\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\Bigg\} \\ & + \frac{n'^4.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\cdot\frac{1}{e}\Bigg\{\frac{9}{16} - \frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1539}{64}e^2 - \frac{207}{32}e'^2 \\ & \qquad + \left(\frac{9}{8} - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{2187}{32}e^2 + \frac{2205}{32}e'^2\right)\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ & \qquad\qquad - \frac{31921}{512}\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \frac{118073}{384}\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Bigg\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{14}), (D_{14}) correspondent aux équations (23) du chapitre III ; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{3}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{14})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = & -\left[\frac{3}{16} - \frac{1}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{109}{16}e_0^2 - \frac{69}{32}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ & - \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{571}{24}e_0^2 + \frac{689}{32}e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} \\ & + \frac{31049}{1536}\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}} + \frac{88585}{768}\frac{n'^7.3^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}} \\ & + e_0\cos\theta_0(t+c) \\ & + \left\{\frac{239}{64}e_0^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{613}{48}e_0^2\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{14})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = & \; e_0\sin\theta_0(t+c) \\ & + \left\{\frac{239}{64}e_0^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{613}{48}e_0^2\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{3^3(G)^3}\left\{3 - \frac{27}{2}e_0^2 - 2\frac{n'.3^3(G)^3}{\mu^2} - \frac{15}{4}\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\right\}$$

Si de ces deux formules (E_{14}), (F_{14}) on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{14}), (B_{14}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{14})\left\{\begin{aligned} a = {}& \frac{3^2(G)^2}{\mu}\left\{1 + 3e_0^2 + \frac{15}{2}e_0^4 + \frac{69}{4}e_0^6\right. \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{4431}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\ & \left. - 20\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\ & - \frac{3^2(G)^2}{\mu}\left\{\left[\frac{9}{8}e_0 - \frac{3}{2}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{771}{32}e_0^3 - \frac{207}{16}e_0e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right. \\ & + \left[3e_0 - 4\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{649}{8}e_0^3 + \frac{2067}{16}e_0e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} \\ & \left. - \frac{31049}{256}e_0\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} - \frac{88585}{128}e_0\frac{n'^7.3^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}}\right\}\cos\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(H_{14})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = {}& \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 - e_0^2 - \frac{3}{4}e_0^4 + 5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\} \\ & + \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{\frac{3}{8}e_0\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + e_0\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = {}& \frac{3^2(G)^2}{\mu}\left\{1 + 3e_0^2 + \frac{15}{2}e_0^4 + \frac{69}{4}e_0^6\right. \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{4431}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\ & \left. - 20\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\right\}, \end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 - e_0^2 - \frac{3}{4}e_0^4 + 5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{14}), (F_{14}), (G_{14}), (H_{14}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$
(E'_{14})\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = &-\left(\frac{3}{16}-\frac{3}{2}\gamma_0^2+\frac{55}{16}e_0^2-\frac{69}{32}\,e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&-\left(\frac{1}{2}-4\gamma_0^2+\frac{301}{24}e_0^2+\frac{689}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{31049}{1536}\,\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{88585}{768}\,\frac{n'^7}{n_0^7}\\
&+e_0\cos\theta_0(t+c)\\
&+\left[\frac{239}{64}e_0^2\,\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{613}{48}e_0^2\,\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(F'_{14})\left\{
\begin{aligned}
e\sin\theta = {}&e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&+\left[\frac{239}{64}e_0^2\,\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{613}{48}e_0^2\,\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(G'_{14})\left\{
\begin{aligned}
a = a_0\Big\{1 - \Big[&\left(\frac{9}{8}e_0-9\gamma_0^2e_0+\frac{15}{32}e_0^3-\frac{207}{16}e_0e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&+\left(3e_0-24\gamma_0^2e_0+\frac{37}{8}e_0^3+\frac{2067}{16}e_0e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\
&-\frac{31049}{256}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}-\frac{88585}{128}e_0\frac{n'^7}{n_0^7}\Big]\cos\theta_0(t+c)\Big\},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(H'_{14})\quad \gamma^2=\gamma_0^2+\left[\frac{3}{8}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c).
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$
\theta_0=n_0\left[3-2\frac{n'}{n_0}-\frac{15}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].
$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{d(h+g+l)}{dt}=-\frac{dR}{dL}-\frac{dR}{dG}-\frac{dR}{dH},\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{dR}{dH}.
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\ + \frac{n'^4}{n^3}\left[\frac{171}{32}e - \frac{153}{4}\gamma^2 e + \frac{33}{16}e^3 - \frac{3933}{64}ee'^2 + \frac{225}{16}e\frac{n'}{n} - \frac{989551}{1024}e\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^4}{n^3}\left[\frac{9}{4}e + \frac{9}{2}e\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{14}), (F'_{14}), (G'_{14}), (H'_{14}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{14})\left\{\begin{aligned}h+g+l = \frac{1}{3}(h) + \frac{1}{3}(g) + \frac{1}{3}(2h'+2g'+2l') + \frac{1}{3}(\theta_0 + h_0 + g_0)(t+c)\\ + \Big[\left(\frac{75}{32}e_0 - \frac{69}{4}\gamma_0^2 e_0 + \frac{59}{64}e_0^3 - \frac{1725}{64}e_0 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\ + \frac{31}{4}e_0\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{1148813}{3072}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}\Big]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_{14})\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[\frac{3}{4}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + 2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{3}\theta + \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}g + \frac{1}{3}(2h'+2g'+2l').$$

Les six formules (E'_{14}), (F'_{14}), (G'_{14}), (H'_{14}), (K_{14}), (L_{14}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (87); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$ par

$$-\left(\frac{3}{16}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{55}{16}e^2-\frac{69}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{1}{2}-4\gamma^2+\frac{301}{24}e^2+\frac{689}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{31049}{1536}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{88585}{768}\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+e\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{239}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{613}{48}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

$e\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$ par

$$e\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{239}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{613}{48}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

a par

$$a\left\{1-\left[\left(\frac{9}{8}e-9\gamma^2 e+\frac{15}{32}e^3-\frac{207}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(3e-24\gamma^2 e+\frac{37}{8}e^3+\frac{2067}{16}ee'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{31049}{256}e\frac{n'^6}{n^6}-\frac{88585}{128}e\frac{n'^7}{n^7}\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\frac{3}{8}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}+\gamma^2 e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{75}{32}e-\frac{69}{4}\gamma^2 e+\frac{59}{64}e^3-\frac{1725}{64}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left.+\frac{31}{4}e\frac{n'^5}{n^5}-\frac{1148813}{3072}e\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

h par

$$h+\left[\frac{3}{4}e\frac{n'^4}{n^4}+2e\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2+\frac{9}{256}\frac{n'^8}{n^8}-\left[\frac{3}{8}e\frac{n'^4}{n^4}+e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l');$$

$e^2 \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$ [*] par

$$-\left[\left(\frac{3}{8}e - 3\gamma^2 e + \frac{55}{8}e^3 - \frac{69}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + e\frac{n'^5}{n^5} - \frac{31049}{768}e\frac{n'^6}{n^6}\right] \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ e^2 \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \frac{239}{32}e^3\frac{n'^4}{n^4} \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{14}), (F'_{14}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{14}), (H'_{14}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 406),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{9}{16}e\frac{n'^4}{n^4} - \frac{3}{2}e\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 391)

$$-\sqrt{a\mu} \cdot \frac{9}{512}\frac{n'^8}{n^8};$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 391)

$$-\sqrt{a\mu} \cdot \frac{9}{512}\frac{n'^8}{n^8}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{\frac{3}{16}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1}{2}\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

---

[*] *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{27}{512}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{9}{32}\frac{n'^9}{n^9}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (page 413) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 14^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{2}{3}n'(L - L_0) - \frac{2}{3}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (87) de R, joint à la quantité $+\frac{2}{3}n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{2}{3}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [1, ... 1,87]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
L = \sqrt{a\mu}\Bigg\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2\right.\\
&\qquad\left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 - \frac{3693}{32}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}\\
&+ \frac{11468233}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{533261}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$G = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11468233}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\;\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$H = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2\right.$$

$$\left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11468233}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, . . . , qui se déduisent de ces relations entre L, G, H et a, e, γ, sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10^e^ opération (page 383).

15^e^ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (89) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (89) * dans lequel l'argument est $2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 4l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4$$

$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (89), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quatorze premières opérations.

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{37}{8}-\frac{33}{2}\gamma^2-\frac{373}{8}e^2+\frac{555}{16}e'^2+\frac{69}{4}\gamma^4+\frac{351}{2}\gamma^2e^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{495}{4}\gamma^2e'^2+\frac{24341}{512}e^4-\frac{5595}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&-\left(15-60\gamma^2-162e^2+\frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&-\left(\frac{10915}{192}-\frac{28655}{96}\gamma^2-\frac{568771}{768}e^2+\frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{4535287}{18432}\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad\qquad+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\\
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{51}{8}ee'^2-\frac{51}{4}\gamma^2ee'^2-\frac{969}{64}e^3e'^2-\frac{115}{8}ee'^4\\
&\qquad+\left(\frac{2295}{128}ee'^2-\frac{4131}{32}\gamma^2ee'^2-\frac{28917}{1024}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{19275}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{19413}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}\Bigg\}\\
&\qquad\times\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=3,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=-4.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{3}\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dG}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G=\frac{2}{3}L+(G),\qquad H=\frac{2}{3}L+(H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$
(A_{15})\left\{
\begin{aligned}
a=\frac{3^2(G)^2}{\mu}\Bigg\{&1+3e^2+\frac{15}{2}e^4+\frac{69}{4}e^6\\
&-\left[\frac{37}{8}-\frac{11}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}+\frac{4431}{32}e^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\\
&-20\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(B_{15})\quad \gamma^2=\frac{1}{6}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1-e^2-\frac{3}{4}e^4+5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.
$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = 3(\mathrm{G})\left\{1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{21}{8}e^4 + \frac{75}{16}e^6 - \frac{3003}{64}e^2\frac{n'^4 . 3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{15})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2 . 3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Bigg\{&\frac{51}{8}e'^2 - \frac{17}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{51}{64}e^2e'^2 - \frac{115}{8}e'^4 \\ &+ \left(\frac{2295}{128}e'^2 - \frac{1377}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{99603}{1024}e^2e'^2\right)\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ &+ \frac{19275}{512}e'^2\frac{n'^2 . 3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} + \frac{19413}{256}e'^2\frac{n'^3 . 3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Bigg\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 3\frac{dl}{dt} - 4n' = -3\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 4n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}, \dfrac{da}{d\mathrm{G}}, \dfrac{da}{d\mathrm{H}}, \dfrac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 10ᵉ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{15})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}&\left\{3 - \frac{27}{2}e^2 - 4\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \frac{15}{4}\frac{n'^2 . 3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\} \\ -\frac{n'^2 . 3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Bigg\{&\frac{51}{8}e'^2 - \frac{17}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{3009}{64}e^2e'^2 - \frac{115}{8}e'^4 \\ &+ \left(\frac{2295}{128}e'^2 - \frac{1377}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{427329}{1024}e^2e'^2\right)\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ &+ \frac{19275}{512}e'^2\frac{n'^2 . 3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} + \frac{19413}{256}e'^2\frac{n'^3 . 3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Bigg\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{15}), (D_{15}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{3}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(E_{15})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \left[\frac{17}{8}e'^2 - \frac{17}{24}\frac{(G)-(H)}{(G)}e'^2 + \frac{867}{32}e_0^2\,e'^2 - \frac{115}{24}e'^4\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{3383}{384}e'^2 - \frac{4675}{576}\frac{(G)-(H)}{(G)}e'^2 + \frac{103003}{512}e_0^2\,e'^2\right]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} \\
& + \frac{124193}{4608}e'^2\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{998441}{13824}e'^2\,\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} \\
& + e_0\cos\theta_0(t+c) \\
& - \left\{\frac{1105}{64}e_0^2\,e'^2\,\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} + \frac{356371}{3072}e_0^2\,e'^2\,\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6}\right\}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(F_{15})\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c) \\
& - \left\{\frac{1105}{64}e_0^2\,e'^2\,\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} + \frac{356371}{3072}e_0^2\,e'^2\,\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{3^3(G)^3}\left\{3 - \frac{27}{2}e_0^2 - 4\,\frac{n'.3^3(G)^3}{\mu^2} - \frac{15}{4}\,\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces deux formules (E_{15}), (F_{15}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{15}), (B_{15}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{15})\left\{\begin{aligned}
a = {} & \frac{3^2(G)^2}{\mu}\left\{1 + 3e_0^2 + \frac{15}{2}e_0^4 + \frac{69}{4}e_0^6\right. \\
& \qquad - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{4431}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad \left. - 20\,\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\,\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\
& + \frac{3^2(G)^2}{\mu}\left\{\left[\frac{51}{4}e_0\,e'^2 - \frac{17}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0\,e'^2 + \frac{3927}{32}e_0^3\,e'^2 - \frac{115}{4}e_0\,e'^4\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\right. \\
& \qquad + \left[\frac{3383}{64}e_0\,e'^2 - \frac{4675}{96}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0\,e'^2 + \frac{396967}{512}e_0^3\,e'^2\right]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{124193}{768}e_0\,e'^2\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{998441}{2304}e_0\,e'^2\,\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{15})\left\{\begin{aligned}&\gamma^2 = \frac{1}{6}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1 - e_0^2 - \frac{3}{4}e_0^4 + 5\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\\ &\qquad -\frac{1}{6}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{\frac{17}{4}e_0 e'^2\,\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} + \frac{3383}{192}e_0 e'^2\,\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}a_0 = \frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}&\left\{1 + 3e_0^2 + \frac{15}{2}e_0^4 + \frac{69}{4}e_0^6\right.\\ &-\left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{4431}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\ &\left.\qquad\qquad -20\,\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\,\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\right\},\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{6}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1 - e_0^2 - \frac{3}{4}e_0^4 + 5\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{15}), (F_{15}), (G_{15}), (H_{15}) et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{15})\left\{\begin{aligned}e\cos\theta = &\left(\frac{17}{8}e'^2 - \frac{17}{4}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{255}{32}e_0^2 e'^2 - \frac{115}{24}e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &+\left(\frac{3383}{384}e'^2 - \frac{4675}{96}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{42109}{512}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{124193}{4608}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{998441}{13824}e'^2\frac{n'^5}{n_0^5}\\ &+ e_0\cos\theta_0(t+c)\\ &-\left[\frac{1105}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{356371}{3072}e_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos 2\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{15})\left\{\begin{aligned}e\sin\theta = &\;e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &-\left[\frac{1105}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{356371}{3072}e_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin 2\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{15})\left\{\begin{aligned} a = a_0 \Big\{ 1 + \Bigg[&\left(\frac{51}{4} e_0 e'^2 - \frac{51}{2} \gamma_0^2 e_0 e'^2 - \frac{969}{32} e_0^3 e'^2 - \frac{115}{4} e_0 e'^4\right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ &+ \left(\frac{3383}{64} e_0 e'^2 - \frac{4675}{16} \gamma_0^2 e_0 e'^2 - \frac{49589}{512} e_0^3 e'^2\right) \frac{n'^3}{n_0^3} \\ &+ \frac{124193}{768} e_0 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{998441}{2304} e_0 e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \Bigg] \cos\theta_0 (t + c); \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{15})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\frac{17}{4} \gamma_0^2 e_0 e'^2 \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{3383}{192} \gamma_0^2 e_0 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3}\right] \cos\theta_0 (t + c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0 \left[3 - 4 \frac{n'}{n_0} - \frac{15}{4} \frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h + g + l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h + g + l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} &\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{259}{16} \frac{n'^2}{n^2}\right] \\ - \frac{n'^2}{n} &\left[\frac{357}{16} ee'^2 - \frac{255}{8} \gamma^2 ee'^2 - \frac{4743}{128} e^3 e'^2 + \frac{29835}{256} ee'^2 \frac{n'}{n} + \frac{366225}{1024} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2}\right] \cos\theta, \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} - \frac{n'^2}{n} \left[\frac{51}{8} ee'^2 + \frac{4131}{64} ee'^2 \frac{n'}{n}\right] \cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{15}), (F'_{15}), (G'_{15}), (H'_{15}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{15})\left\{\begin{aligned} h + g + l = \frac{1}{3}(h) + \frac{1}{3}(g) + \frac{1}{3}(2h' + 2g' + 4l') &+ \frac{1}{3}(\theta_0 + h_0 + g_0)(t + c) \\ - \Bigg[&\left(\frac{221}{16} e_0 e'^2 - \frac{187}{8} \gamma_0^2 e_0 e'^2 - \frac{3519}{128} e_0^3 e'^2\right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ &+ \frac{64277}{768} e_0 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{3104825}{9216} e_0 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \Bigg] \sin\theta_0 (t + c). \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{15})\quad h = (h) + h_0 (t + c) - \left[\frac{17}{8} e_0 e'^2 \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{4675}{192} e_0 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3}\right] \sin\theta_0 (t + c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{3}\theta+\frac{1}{3}h+\frac{1}{3}g+\frac{1}{3}(2h'+2g'+4l').$$

Les six formules (E'_{15}), (F'_{15}), (G'_{15}), (H'_{15}), (K_{15}), (L_{15}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (89); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l')$ par

$$\left(\frac{17}{8}e'^2-\frac{17}{4}\gamma^2e'^2+\frac{255}{32}e^2e'^2-\frac{115}{24}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{3383}{384}e'^2-\frac{4675}{96}\gamma^2e'^2+\frac{42109}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{124193}{4608}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{998441}{13824}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+e\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l')$$

$$-\left[\frac{1105}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{356371}{3072}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l');$$

$e\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l')$ par

$$e\sin(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l')$$

$$-\left[\frac{1105}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{356371}{3072}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l');$$

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{51}{4}ee'^2-\frac{51}{2}\gamma^2ee'^2-\frac{969}{32}e^3e'^2-\frac{115}{4}ee'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{3383}{64}ee'^2-\frac{4675}{16}\gamma^2ee'^2-\frac{49589}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{124193}{768}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{998441}{2304}ee'^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+3l-2h'-2g'-4l')\right\},$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \left[\frac{17}{4}\gamma^2 ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{3383}{192}\gamma^2 ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 4l');$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \left[\left(\frac{221}{16} ee'^2 - \frac{187}{8}\gamma^2 ee'^2 - \frac{3519}{128} e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{64277}{768} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{3104825}{9216} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right] \sin(2h + 2g + 3l - 2h - 2g' - 4l');$$

h par

$$h - \left[\frac{17}{8} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{4675}{192} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \sin(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 4l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left[\frac{17}{4} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{3383}{192} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \cos(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 4l');$$

$e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 4l')$* par

$$\left[\left(\frac{17}{4} ee'^2 - \frac{17}{2}\gamma^2 ee'^2 + \frac{255}{16} e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{3383}{192} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{124193}{2304} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right] \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} (2h + 2g + 3l - 2h' - 2g - 4l')$$

$$+ e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$- \frac{1105}{32} e^3 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 3(2h + 2g + 3l - 2h' - 2g' - 4l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{15}), (F'_{15}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les for-

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

mules (G'_{15}), (H'_{15}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 415),

$$L_1 = \sqrt{a\mu} \cdot \frac{51}{8} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 416);

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 416).

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide des formules (41), on trouve

$$\theta_1 = -\frac{1}{e} \cdot \frac{17}{8} e'^2 \frac{n'^2}{n^2}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots\ldots) = -\sqrt{a\mu} \cdot \frac{867}{128} e'^4 \frac{n'^4}{n^4}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 422 et 423) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 15^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{4}{3} n' (L - L_0) - \frac{4}{3} n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (89) de R, joint à la quantité $+\frac{4}{3} n' (L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{4}{3} n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et d'une nouvelle partie qui est donnée dans le chapitre IV avec l'indication (15. . . . . 1,89. Ensuite la nouvelle valeur de L, sera

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2\right.\\
&\qquad \left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 - \frac{15639}{128}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad + \frac{11468233}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{533261}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

Quant aux valeurs de G et de H, elles sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 14e opération (page 416). Les valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$,... sont aussi les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10e opération (page 383).

16e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (118) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (118) * dans lequel l'argument est $2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 4l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a}\\
+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{&\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2\\
&+ \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (118), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quinze premières opérations.

$$-\left(\frac{37}{8}-\frac{33}{2}\gamma^2-\frac{373}{8}e^2+\frac{555}{16}e'^2+\frac{69}{4}\gamma^4+\frac{351}{2}\gamma^2e^2-\frac{495}{4}\gamma^2e'^2+\frac{24341}{512}e^4-\frac{5595}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(15-60\gamma^2-162e^2+\frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\left(\frac{10915}{192}-\frac{28655}{96}\gamma^2-\frac{568771}{768}e^2+\frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$-\frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{4535287}{18432}\frac{n'^6}{n^6}+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{-\frac{153}{8}ee'^2+\frac{153}{4}\gamma^2ee'^2+\frac{663}{64}e^3e'^2+\frac{345}{8}ee'^4$$

$$-\left(\frac{459}{128}ee'^2+\frac{459}{32}\gamma^2ee'^2+\frac{20043}{1024}e^3e'^2\right)\frac{n'}{n}-\frac{34385}{512}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{6859}{1536}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}\Bigg\}$$

$$\times\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-4l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=1,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=-4.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dG}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dH}{dt},$$

et par suite, en intégrant,

$$G=2L+(G),\qquad H=2L+(H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{16})\left\{\begin{aligned}a=\frac{(G)^2}{\mu}\Bigg\{&1-e^2+\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{4}e^6\\&-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}-\frac{3717}{32}e^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}+20\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\},\end{aligned}\right.$$

$$(B_{16})\quad\gamma^2=\frac{1}{2}\frac{(H)-(G)}{(G)}\left\{1+e^2+\frac{3}{4}e^4+5\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, en ayant soin de tenir compte de ce que (G) est négatif, il vient

$$L=-(G)\left\{1-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{16})\left\{\begin{aligned}
\frac{de}{dt} = \frac{n'^2(G)^3}{\mu^2}\Big\{&\frac{153}{8}e'^2 - \frac{153}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2 - \frac{2499}{64}e^2e'^2 - \frac{345}{8}e'^4 \\
&- \left(\frac{459}{128}e'^2 + \frac{459}{64}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2 + \frac{9027}{1024}e^2e'^2\right)\frac{n'(G)^3}{\mu^2} \\
&+ \frac{34385}{512}e'^2\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4} + \frac{6859}{1536}e'^2\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + \frac{dl}{dt} - 4n' = -\frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dG} - 2\frac{dR}{dH} - 4n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}, \frac{da}{dG}, \frac{da}{dH}, \frac{de}{dL}, \ldots$ données à la suite de la 10^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(D_{16})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = &-\frac{\mu^2}{(G)^3}\Big\{1 + \frac{3}{2}e^2 + 4\frac{n'(G)^3}{\mu^2} - \frac{1}{4}\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\Big\} \\
&+ \frac{n'^2(G)^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Big\{\frac{153}{8}e'^2 - \frac{153}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2 - \frac{8721}{64}e^2e'^2 - \frac{345}{8}e'^4 \\
&\qquad - \left(\frac{459}{128}e'^2 + \frac{459}{64}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2 + \frac{23409}{1024}e^2e'^2\right)\frac{n'(G)^3}{\mu^2} \\
&\qquad + \frac{34385}{512}e'^2\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4} + \frac{6859}{1536}e'^2\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{16}), (D_{16}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(E_{16})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = &\left[\frac{153}{8}e'^2 - \frac{153}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2 - \frac{4641}{32}e_0^2e'^2 - \frac{345}{8}e'^4\right]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4} \\
&- \left[\frac{10251}{128}e'^2 - \frac{4437}{64}\frac{(H)-(G)}{(G)}e'^2 - \frac{411927}{512}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6} \\
&+ \frac{200849}{512}e'^2\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8} - \frac{1217041}{768}e'^2\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}} \\
&+ e_0\cos\theta_0(t+c) \\
&+ \Big\{\frac{4947}{64}e_0^2e'^2\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4} - \frac{432429}{1024}e_0^2e'^2\frac{n'^3(G)^9}{\mu^6}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{16})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta &= e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &+\left\{\frac{4947}{64}e_0^2e'^2\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}-\frac{432429}{1024}e_0^2e'^2\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=-\frac{\mu^2}{(\mathrm{G})^3}\left\{1+\frac{3}{2}e_0^2+4\frac{n'(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{1}{4}\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces deux formules (E_{16}), (F_{16}) on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{16}), (B_{16}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{16})\left\{\begin{aligned} a=\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}&\left\{1-e_0^2+\frac{1}{2}e_0^4-\frac{1}{4}e_0^6\right.\\ &\left.-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{3717}{32}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}+20\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\right\}\\ -\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}&\left\{\left[\frac{153}{4}e_0e'^2-\frac{153}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0e'^2-\frac{5559}{32}e_0^3e'^2-\frac{345}{4}e_0e'^4\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right.\\ &-\left[\frac{10251}{64}e_0e'-\frac{4437}{32}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}e_0e'^2+\frac{473433}{512}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\\ &\left.+\frac{200849}{256}e_0e'^2\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{1217041}{384}e_0e'^2\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{16})\left\{\begin{aligned} \gamma^2&=\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\left\{1+e_0^2+\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\\ &+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\left\{\frac{153}{4}e_0e'^2\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}-\frac{10251}{64}e_0e'^2\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0=\frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}&\left\{1-e_0^2+\frac{1}{2}e_0^4-\frac{1}{4}e_0^6\right.\\ &\left.-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{3717}{32}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}+20\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\right\},\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2=\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}\left\{1+e_0^2+\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2 ; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{16}), (F_{16}), (G_{16}), (H_{16}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{16})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = {} & \left(\frac{153}{8}e'^2 - \frac{153}{4}\gamma_0^2\,e'^2 - \frac{2805}{32}e_0^2\,e'^2 - \frac{345}{8}e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{10251}{128}e'^2 - \frac{4437}{32}\gamma_0^2\,e'^2 - \frac{227409}{512}e_0^2\,e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{200849}{512}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{1217041}{768}e'^2\frac{n'^5}{n_0^5} \\ & + e_0\cos\theta_0(t+c) \\ & + \left[\frac{4947}{64}e_0^2\,e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{432429}{1024}e_0^2\,e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{16})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c) \\ & + \left[\frac{4947}{64}e_0^2\,e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{432429}{1024}e_0^2\,e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{16})\left\{\begin{aligned} a = a_0\Bigg\{ 1 - \Bigg[& \left(\frac{153}{4}e_0\,e'^2 - \frac{153}{2}\gamma_0^2\,e_0\,e'^2 - \frac{663}{32}e_0^3\,e'^2 - \frac{345}{4}e_0\,e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{10251}{64}e_0\,e'^2 - \frac{4437}{16}\gamma_0^2\,e_0\,e'^2 - \frac{22389}{512}e_0^3\,e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \frac{200849}{256}e_0\,e'^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{1217041}{384}e_0\,e'^2\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\Bigg\}; \end{aligned}\right.$$

$$(H'_{16})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\frac{153}{4}\gamma_0^2\,e_0\,e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{10251}{64}\gamma_0^2\,e_0\,e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[1 - 4\frac{n'}{n_0} - \frac{1}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$+ \frac{n'^2}{n}\left[\frac{1071}{16}ee'^2 - \frac{765}{8}\gamma^2 ee'^2 - \frac{3009}{128}e^3 e'^2 + \frac{5967}{256}ee'^2\frac{n'}{n} + \frac{653315}{1024}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{153}{8}ee'^2 - \frac{459}{64}ee'^2\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{16}), (F'_{16}), (G'_{16}), (H'_{16}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{16})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= -(h)-(g)+2h'+2g'+4l'+(\theta_0-h_0-g_0)(t+c) \\ &+\left[\left(\frac{1989}{16}e_0 e'^2 - \frac{1683}{8}\gamma_0^2 e_0 e'^2 - \frac{6987}{128}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\ &\left.+\frac{194769}{256}e_0 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{5021225}{1024}e_0 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(L_{16})\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[\frac{153}{8}e_0 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{4437}{64}e_0 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \theta - h - g + 2h' + 2g' + 4l'.$$

Les six formules (E'_{16}), (F'_{16}), (G'_{16}), (H'_{16}), (K_{16}), (L_{16}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (118) ; dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-4l')$ par

$$\left(\frac{153}{8}e'^2-\frac{153}{4}\gamma^2e'^2-\frac{2805}{32}e^2e'^2-\frac{345}{8}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{10251}{128}e'^2-\frac{4437}{32}\gamma^2e'^2-\frac{227409}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{200849}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1217041}{768}e'^2\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+e\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-4l')$$

$$+\left[\frac{4947}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{432429}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos2(2h+2g+l-2h'-2g'-4l');$$

$e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-4l')$ par

$$e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-4l')$$

$$+\left[\frac{4947}{64}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{432429}{1024}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin2(2h+2g+l-2h'-2g'-4l');$$

a par

$$a\Bigg\{1-\Bigg[\left(\frac{153}{4}ee'^2-\frac{153}{2}\gamma^2ee'^2-\frac{663}{32}e^3e'^2-\frac{345}{4}ee'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{10251}{64}ee'^2-\frac{4437}{16}\gamma^2ee'^2-\frac{22389}{512}e^3e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{200849}{256}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1217041}{384}ee'^2\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-4l')\Bigg\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\frac{153}{4}\gamma^2ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{10251}{64}\gamma^2ee'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-4l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\Bigg[\left(\frac{1989}{16}ee'^2-\frac{1683}{8.}\gamma^2ee'^2-\frac{6987}{128}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\frac{194769}{256}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{5021225}{1024}ee'^2\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-4l');$$

h par

$$h+\left[\frac{153}{8}ee'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{4437}{64}ee'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-4l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left[\frac{153}{4} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{10251}{64} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3}\right] \cos(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 4l');$$

$e^2 \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 4l')$* par

$$\left[\left(\frac{153}{4} ee'^2 - \frac{153}{2} \gamma^2 ee'^2 - \frac{2805}{16} e^3 e'^2\right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{10251}{64} ee'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{200849}{256} ee'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right] \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$+ e^2 \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 2(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 4l')$$

$$+ \frac{4947}{32} e^3 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 3(2h + 2g + l - 2h' - 2g' - 4l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{16}), (F'_{16}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{16}), (H'_{16}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 425),

$$L_1 = -\sqrt{a\mu} \cdot \frac{153}{8} ee'^2 \frac{n'^2}{n^2};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 416);

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 416).

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e} \cdot \frac{153}{8} e'^2 \frac{n'^2}{n^2}.$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = -\sqrt{a\mu} \cdot \frac{23409}{128} e'^4 \frac{n'^4}{n^4}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (page 431) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 16^e opération, et y ajoutant

$$+4n'(L - L_0) - 4n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (118) de R, joint à la quantité $+4n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-4n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots)$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1), et d'une nouvelle partie qui est donnée dans le chapitre IV avec l'indication [16 . . . 1, 118]. Ensuite la nouvelle valeur de L, sera

$$\begin{aligned} L = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ &+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\ &+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\ &+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7} \\ &+ \frac{11468233}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{533261}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}. \end{aligned}$$

Quant aux valeurs de G et de H, elles sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 14^e opération (page 416). Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... sont aussi les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10^e opération (page 383).

17^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (236) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (236)*, dans lequel l'argument est $4h+4g+3l-4h'-4g'-4l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{2}\gamma^4-\frac{9}{4}\gamma^2e^2-\frac{9}{4}\gamma^2e'^2+\frac{9}{16}e^2e'^2+\frac{15}{32}e'^4+\frac{9}{4}\gamma^4e^2 \\
& \qquad +\frac{9}{4}\gamma^4e'^2-\frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2 \\
& \qquad -\left(\frac{37}{8}-\frac{33}{2}\gamma^2-\frac{373}{8}e^2+\frac{555}{16}e'^2+\frac{69}{4}\gamma^4+\frac{351}{2}\gamma^2e^2-\frac{495}{4}\gamma^2e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left.+\frac{24341}{512}e^4-\frac{5595}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad -\left(15-60\gamma^2-162e^2+\frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}-\left(\frac{10915}{192}-\frac{28655}{96}\gamma^2-\frac{568771}{768}e^2+\frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad -\frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{4535287}{18432}\frac{n'^6}{n^6}+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\left(\frac{69}{16}e-\frac{69}{4}\gamma^2e-\frac{2259}{128}e^3-\frac{1173}{32}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{35}{2}e-70\gamma^2e-\frac{1995}{32}e^3-\frac{4243}{16}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad +\frac{59513}{768}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{8209}{36}e\frac{n'^5}{n^5}-\frac{105}{32}e\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\} \\
& \times\cos(4h+4g+3l'-4h'-4g'-4l').
\end{aligned}$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=3,\qquad i'=4,\qquad i''=4,\qquad i'''=-4.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (236), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des seize premières opérations.

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{3}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{4}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{4}\frac{dH}{dt},$$

et par suite, en intégrant,

$$G = \frac{4}{3}L + (G), \qquad H = \frac{4}{3}L + (H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{17})\left\{\begin{aligned} a = \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & 1 - 3e^2 + 6e^4 - \frac{21}{2}e^6 \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{7791}{32}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\ & + 20\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(B_{17})\quad \gamma^2 = \frac{1}{6}\frac{(H)-(G)}{(G)}.\Big\{1 + 2e^2 + \frac{3}{2}e^4 + 5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\Big\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, en ayant soin de tenir compte de ce que (G) est négatif, il vient

$$L = -3(G)\Big\{1 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 - \frac{39}{16}e^6 + \frac{3003}{64}e^2\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{17})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2.3^4(G)^3}{\mu^2}\Big\{ & \left[\frac{69}{16} - \frac{23}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{9159}{128}e^2 - \frac{1173}{32}e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4} \\ & - \left[\frac{35}{2} - \frac{35}{3}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{11515}{32}e^2 - \frac{4243}{16}e'^2\right]\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6} \\ & + \frac{59513}{768}\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} - \frac{8209}{36}\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{105}{32}\frac{3^4(G)^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 4\frac{dh}{dt} + 4\frac{dg}{dt} + 3\frac{dl}{dt} - 4n' = -3\frac{dR}{dL} - 4\frac{dR}{dG} - 4\frac{dR}{dH} - 4n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 10$^{\text{e}}$ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{17})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = &-\frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\left\{3+\frac{27}{2}e^2+4\,\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{9}{4}\,\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}\\
&-\frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\left\{\left[\frac{69}{16}-\frac{23}{8}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{30237}{128}e^2-\frac{1173}{32}e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right.\\
&\qquad-\left[\frac{35}{2}-\frac{35}{3}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{37345}{32}e^2-\frac{4243}{16}e'^2\right]\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\\
&\qquad\left.+\frac{59513}{768}\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{8209}{36}\,\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{105}{32}\,\frac{3^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2 a'^2}\right\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{17}), (D_{17}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{3}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{17})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = &-\left[\frac{23}{16}-\frac{23}{24}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{4111}{64}e_0^2-\frac{391}{32}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&+\left[\frac{31}{4}-\frac{31}{6}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{3279}{8}e_0^2-\frac{1675}{16}e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\\
&-\frac{85805}{2304}\,\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}+\frac{75731}{576}\,\frac{n'^7.3^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}+\frac{35}{32}\,\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\cdot\frac{3^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}-\frac{35}{24}\,\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\cdot\frac{3^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\\
&+e_0\cos\theta_0(t+c)\\
&-\left\{\frac{4341}{128}e_0^2\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{1717}{8}e_0^2\,\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{17})\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta = &\;e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&-\left\{\frac{4341}{128}e_0^2\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{1717}{8}e_0^2\,\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = -\frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\left\{3+\frac{27}{2}e_0^2+4\,\frac{n'.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{9}{4}\,\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces deux formules (E_{17}), (F_{17}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{17}), (B_{17}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(G_{17})\left\{
\begin{aligned}
a = \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & 1 - 3e_0^2 + 6e_0^4 - \frac{21}{2}e_0^6 \\
& - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{7791}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& + 20\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\} \\
+ \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & \left[\frac{69}{8}e_0 - \frac{23}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0 - \frac{13851}{64}e_0^3 - \frac{1173}{16}e_0e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& - \left[\frac{93}{2}e_0 - 31\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0 - \frac{2715}{2}e_0^3 - \frac{5025}{8}e_0e'^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} \\
& + \frac{85805}{384}e_0\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} - \frac{75731}{96}e_0\frac{n'^7.3^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}} \\
& - \frac{105}{16}e_0\frac{n'^2.3^6(G)^6}{\mu^4}\cdot\frac{3^4(G)^4}{\mu^2a'^2} + \frac{35}{4}e_0\frac{n'^3.3^9(G)^9}{\mu^6}\cdot\frac{3^4(G)^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(H_{17})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = & \frac{1}{6}\frac{(H)-(G)}{(G)}\left\{1 + 2e_0^2 + \frac{3}{2}e_0^4 + 5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\} \\
& - \frac{1}{6}\frac{(H)-(G)}{(G)}\left\{\frac{23}{4}e_0\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} - 31e_0\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t-c).
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0 = \frac{3^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & 1 - 3e_0^2 + 6e_0^4 - \frac{21}{2}e_0^6 \\
& - \left[\frac{37}{8} - \frac{11}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{7791}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& + 20\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\gamma_0^2 = \frac{1}{6}\frac{(H)-(G)}{(G)}\left\{1 + 2e_0^2 + \frac{3}{2}e_0^4 + 5\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.
$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les

formules (E_{17}), (F_{17}), (G_{17}), (H_{17}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{17})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\left(\frac{23}{16}-\frac{23}{4}\gamma_0^2-\frac{2455}{64}e_0^2-\frac{391}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}-\left(\frac{31}{4}-31\gamma_0^2-\frac{471}{2}e_0^2-\frac{1675}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\ &-\frac{85805}{2304}\frac{n'^6}{n_0^6}-\frac{75731}{576}\frac{n'^7}{n_0^7}+\frac{35}{32}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}+\frac{35}{24}\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\\ &+e_0\cos\theta_0(t+c)\\ &-\left[\frac{4341}{128}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{1717}{8}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos 2\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{17})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\ e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &-\left[\frac{4341}{128}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{1717}{8}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{17})\left\{\begin{aligned} a = a_0\Big\{1+\Big[&\left(\frac{69}{8}e_0-\frac{69}{2}\gamma_0^2e_0-\frac{2259}{64}e_0^3-\frac{1173}{16}e_0e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\ &+\left(\frac{93}{2}e_0-186\gamma_0^2e_0-\frac{687}{4}e_0^3-\frac{5025}{8}e_0e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\ &+\frac{85805}{384}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{75731}{96}e_0\frac{n'^7}{n_0^7}-\frac{105}{16}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}-\frac{35}{4}e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big]\cos\theta_0(t+c)\Big\};\end{aligned}\right.$$

$$(H'_{17})\quad \gamma^2=\gamma_0^2-\left[\frac{23}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+31\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0=n_0\left[3-4\frac{n'}{n_0}-\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt}=-\frac{dR}{dL}-\frac{dR}{dG}-\frac{dR}{dH},\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$- \frac{n'^2}{n}\left[\left(\frac{1311}{32}e - \frac{1173}{8}\gamma^2 e - \frac{38265}{256}e^3 - \frac{22287}{64}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{875}{4}e\frac{n'^3}{n^3} + \frac{1844903}{1536}e\frac{n'^4}{n^4} - \frac{1575}{64}e\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{n'^4}{n^3}\left[\frac{69}{8}e + 35\,e\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{17}), (F'_{17}), (G'_{17}), (H'_{17}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{17})\left\{\begin{aligned} h+g+l = & -\frac{1}{3}(h) - \frac{1}{3}(g) + \frac{1}{3}(4h' + 4g' + 4l') + \frac{1}{3}(\theta_0 - h_0 - g_0)(t+c) \\ & - \left[\left(\frac{575}{32}e_0 - \frac{529}{8}\gamma_0^2 e_0 - \frac{17273}{256}e_0^3 - \frac{9775}{64}e_0 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\right. \\ & \left. + \frac{961}{8}e_0\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{3174785}{4608}e_0\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{735}{64}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{17})\quad h = (h) + h_0(t+c) - \left[\frac{23}{8}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{31}{2}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h + g + l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{3}\theta - \frac{1}{3}h - \frac{1}{3}g + \frac{1}{3}(4h' + 4g' + 4l').$$

Les six formules (E'_{17}), (F'_{17}), (G'_{17}), (H'_{17}), (K_{17}), (L_{17}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (236); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante:

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l')$ par

$$-\left(\frac{23}{16}-\frac{23}{4}\gamma^2-\frac{2455}{64}e^2-\frac{391}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{31}{4}-31\gamma^2-\frac{471}{2}e^2-\frac{1675}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$-\frac{85805}{2304}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{75731}{576}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{35}{32}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{35}{24}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+e\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l')$$

$$-\left[\frac{4341}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1717}{8}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l');$$

$e\sin(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l')$ par

$$e\sin(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l')$$

$$-\left[\frac{4341}{128}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1717}{8}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l');$$

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{69}{8}e-\frac{69}{2}\gamma^2e-\frac{2259}{64}e^3-\frac{1173}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.\right.$$

$$+\left(\frac{93}{2}e-186\gamma^2e-\frac{687}{4}e^3-\frac{5025}{8}ee'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{85805}{384}e\frac{n'^6}{n^6}$$

$$\left.\left.+\frac{75731}{96}e\frac{n'^7}{n^7}-\frac{105}{16}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{35}{4}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l')\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\left[\frac{23}{4}\gamma^2e\frac{n'^4}{n^4}+31\gamma^2e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{575}{32}e-\frac{529}{8}\gamma^2e-\frac{17273}{256}e^3-\frac{9775}{64}ce'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left.+\frac{961}{8}e\frac{n'^5}{n^5}+\frac{3174785}{4608}e\frac{n'^6}{n^6}-\frac{735}{64}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\sin(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l');$$

h par

$$h-\left[\frac{23}{8}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{31}{2}e\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(4h+4g+3l-4h'-4g'-4l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \frac{529}{256}\frac{n'^8}{n^8}$$

$$- \left[\frac{23}{8} e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{31}{2} e \frac{n'^5}{n^5}\right] \cos(4h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 4l');$$

$e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(4h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 4l')$* par

$$- \left[\left(\frac{23}{8} e - \frac{23}{2}\gamma^2 e - \frac{2455}{32} e^3 - \frac{391}{16} e e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left. + \frac{31}{2} e \frac{n'^5}{n^5} + \frac{85805}{1152} e \frac{n'^6}{n^6} - \frac{35}{16} e \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2}\right] \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} (4h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 4l')$$

$$+ e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(4h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 4l')$$

$$- \frac{4341}{64} e^3 \frac{n'^4}{n^4} \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 3(4h + 4g + 3l - 4h' - 4g' - 4l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{17}), (F'_{17}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{17}), (H'_{17}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 433),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{\frac{69}{16} e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{93}{4} e \frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 416)

$$- \sqrt{a\mu} \cdot \frac{529}{512}\frac{n'^8}{n^8};$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 416)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{529}{512}\frac{n'^8}{n^8}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{\frac{23}{16}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{31}{4}\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{\frac{1587}{512}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{2139}{64}\frac{n'^9}{n^9}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29** et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (page 440) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 17^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{4}{3}n'(L - L_0) - \frac{4}{3}n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots)..$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (236) de R, joint à la quantité $+\frac{4}{3}n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{4}{3}n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [17· · · 1,236]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H, seront

$$\begin{aligned}L = \sqrt{a\mu}\Big\{1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2\right. \\ &\qquad\left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ &+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{138661}{256}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left(\frac{36049}{288}-\frac{94481}{144}\gamma^2-\frac{2069437}{1152}e^2+\frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{11639629}{55296}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{118877}{432}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}:$$

$$G=\sqrt{a\mu}\Bigg\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{37}{16}-\frac{33}{4}\gamma^2-\frac{753}{64}e^2+\frac{555}{32}e'^2+\frac{69}{8}\gamma^4+\frac{917}{16}\gamma^2e^2-\frac{495}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{78757}{1024}e^4-\frac{11295}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(10-40\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{11639629}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\};$$

$$H=\sqrt{a\mu}\Bigg\{1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{37}{16}-\frac{23}{8}\gamma^2-\frac{753}{64}e^2+\frac{555}{32}e'^2-\frac{119}{8}\gamma^4+\frac{235}{32}\gamma^2e^2-\frac{345}{16}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{78757}{1024}e^4-\frac{11295}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(10-\frac{59}{3}\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{2547}{64}-\frac{1319}{12}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{11639629}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ..., qui se déduisent de ces relations entre L, G, H et a, e, γ, sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10^{e} opération (page 383).

18e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (222) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (222) *, dans lequel l'argument est $4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Bigg\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \Big(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \Big(15 - 60\gamma^2 - 162 e^2 + \frac{405}{2}e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \Big(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4} - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4649551}{18432}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \Big[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2} \Big] \frac{a^2}{a'^2} \Bigg\} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Bigg\{ \Big(\frac{45}{16}e - \frac{45}{4}\gamma^2 e + \frac{255}{64}e^3 - \frac{765}{32}ee'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} + \Big(6e - 24\gamma^2 e + \frac{1703}{64}e^3 - \frac{3921}{16}ee'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad\qquad + \frac{6743}{256}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1469}{24}e\frac{n'^5}{n^5} + \frac{35}{32}e\frac{a^2}{a'^2} \Bigg\} \\
& \times \cos(4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 5, \quad i' = 4, \quad i'' = 4, \quad i''' = -4.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (222), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des dix-sept premières opérations.

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{5}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{4}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{4}\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G = \frac{4}{5}L + (G), \qquad H = \frac{4}{5}L + (H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{18})\left\{\begin{aligned} a = \frac{5^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 5e^2 + 20e^4 + \frac{145}{2}e^6 \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{20}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{8505}{32}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\ & - 20\frac{n'^5.5^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.5^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(B_{18})\quad \gamma^2 = \frac{1}{10}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 - 2e^2 - \frac{3}{2}e^4 + 5\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$L = 5(G)\left\{1 + \frac{5}{2}e^2 + \frac{55}{8}e^4 + \frac{305}{16}e^6 - \frac{5005}{64}e^2\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{18})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2.5^3(G)^3}{\mu^2}\Big\{ & \left[\frac{45}{16} - \frac{9}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{3765}{64}e^2 - \frac{765}{32}e'^2\right]\frac{n'^2.5^6(G)^6}{\mu^4} \\ & + \left[6 - \frac{12}{5}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{12071}{64}e^2 - \frac{3921}{16}e'^2\right]\frac{n'^3.5^9(G)^9}{\mu^6} \\ & + \frac{6743}{256}\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{1469}{24}\frac{n'^5.5^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} + \frac{35}{32}\frac{5^4(G)^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 4\frac{dh}{dt} + 4\frac{dg}{dt} + 5\frac{dl}{dt} - 4n' = -5\frac{dR}{dL} - 4\frac{dR}{dG} - 4\frac{dR}{dH} - 4n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$,… données à la suite de la 10ᵉ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{18})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{5^3(\mathrm{G})^3}&\left\{5 - \frac{75}{2}e^2 - 4\frac{n'.5^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \frac{23}{4}\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\} \\
&- \frac{n'^2.5^3(\mathrm{G})^2}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\left\{\left[\frac{45}{16} - \frac{9}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{13275}{64}e^2 - \frac{765}{32}e'^2\right]\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right. \\
&\qquad + \left[6 - \frac{12}{5}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{40437}{64}e^2 - \frac{3921}{16}e'^2\right]\frac{n'^3.5^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
&\qquad \left. + \frac{6743}{256}\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{1469}{24}\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} + \frac{35}{32}\frac{5^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2 a'^2}\right\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{18}), (D_{18}) correspondent aux équations (23) du chapitre III ; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{5}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{18})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = &\left[\frac{9}{16} - \frac{9}{40}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{561}{16}e_0^2 - \frac{153}{32}e'^2\right]\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
&+ \left[\frac{33}{20} - \frac{33}{50}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{4315}{32}e_0^2 - \frac{4227}{80}e'^2\right]\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} + \frac{46303}{6400}\frac{n'^6.5^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}} \\
&+ \frac{478249}{24000}\frac{n'^7.5^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}} + \frac{7}{32}\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\cdot\frac{5^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2 a'^2} + \frac{7}{40}\frac{n'^3.5^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\cdot\frac{5^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2 a'^2} \\
&+ e_0\cos\theta_0(t+c) \\
&- \left\{\frac{1221}{64}e_0^2\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{23027}{320}e_0^2\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{18})\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta = &\ e_0\sin\theta_0(t+c) \\
&- \left\{\frac{1221}{64}e_0^2\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{23027}{320}e_0^2\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{5^3(\mathrm{G})^3}\left\{5 - \frac{75}{2}e_0^2 - 4\,\frac{n'.5^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \frac{23}{4}\,\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces deux formules (E_{18}), (F_{18}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{18}), (B_{18}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{18})\left\{\begin{aligned}
a = \frac{5^2(\mathrm{G})^2}{\mu}&\left\{1 + 5e_0^2 + 20e_0^4 + \frac{145}{2}e_0^6\right. \\
&- \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{20}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{8505}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
&\left.- 20\,\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\,\frac{n'^6.5^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\
+ \frac{5^2(\mathrm{G})^2}{\mu}&\left\{\left[\frac{45}{8}e_0 - \frac{9}{4}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0 + \frac{6555}{32}e_0^3 - \frac{765}{16}e_0e'^2\right]\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right. \\
&+ \left[\frac{33}{2}e_0 - \frac{33}{5}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0 + \frac{24347}{32}e_0^3 - \frac{4227}{8}e_0e'^2\right]\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} \\
&+ \frac{46303}{640}e_0\,\frac{n'^6.5^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}} + \frac{478249}{2400}e_0\,\frac{n'^7.5^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}} \\
&\left.+ \frac{35}{16}e_0\,\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\cdot\frac{5^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2} + \frac{7}{4}e_0\,\frac{n'^3.5^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\cdot\frac{5^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\right\}\cos\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{18})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 &= \frac{1}{10}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1 - 2e_0^2 - \frac{3}{2}e_0^4 + 5\,\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\} \\
&- \frac{1}{10}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{\frac{9}{4}e_0\,\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{33}{5}e_0\,\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{5^2(\mathrm{G})^2}{\mu}&\left\{1 + 5e_0^2 + 20e_0^4 + \frac{145}{2}e_0^6\right. \\
&- \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{20}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{8505}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
&\left.- 20\,\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\,\frac{n'^6.5^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\right\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{10}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1 - 2e_0^2 - \frac{3}{2}e_0^4 + 5\,\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{18}), (F_{18}), (G_{18}), (H_{18}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{18})\quad \left\{\begin{aligned} e\cos\theta = {} & \left(\frac{9}{16} - \frac{9}{4}\gamma_0^2 + \frac{291}{16}e_0^2 - \frac{153}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} + \left(\frac{33}{20} - \frac{33}{5}\gamma_0^2 + \frac{2335}{32}e_0^2 - \frac{4227}{80}e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5} \\ & + \frac{46303}{6400}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{478249}{24000}\frac{n'^7}{n_0^7} + \frac{7}{32}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{7}{40}\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} \\ & + e_0\cos\theta_0(t+c) \\ & - \left[\frac{1221}{64}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{23027}{320}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{18})\quad \left\{\begin{aligned} e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c) \\ & - \left[\frac{1221}{64}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{23027}{320}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{18})\quad \left\{\begin{aligned} a = a_0 \Big\{ 1 + \Bigg[& \left(\frac{45}{8}e_0 - \frac{45}{2}\gamma_0^2 e_0 + \frac{255}{32}e_0^3 - \frac{765}{16}e_0 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\ & + \left(\frac{33}{2}e_0 - 66\gamma_0^2 e_0 + \frac{1907}{32}e_0^3 - \frac{4227}{8}e_0 e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5} \\ & + \frac{46303}{640}e_0\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{478249}{2400}e_0\frac{n'^7}{n_0^7} + \frac{35}{16}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{7}{4}e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\Big\}; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{18})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\frac{9}{4}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{33}{5}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[5 - 4\frac{n'}{n_0} - \frac{23}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$- \frac{n'^2}{n}\left[\left(\frac{855}{32}e - \frac{765}{8}\gamma^2 e + \frac{1095}{32}e^3 - \frac{14535}{64}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left. + 75e\frac{n'^3}{n^3} + \frac{209033}{512}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{525}{64}e\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{n'^4}{n^3}\left[\frac{45}{8}e + 12e\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{18}), (F'_{18}), (G'_{18}), (H'_{18}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{18})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= \frac{1}{5}(h) + \frac{1}{5}(g) + \frac{1}{5}(4h' + 4g' + 4l') + \frac{1}{5}(\theta_0 + h_0 + g_0)(t+c) \\ &- \left[\left(\frac{225}{32}e_0 - \frac{207}{8}\gamma_0^2 e_0 + \frac{591}{64}e_0^3 - \frac{3825}{64}e_0 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\right. \\ &\left. + \frac{1023}{40}e_0\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{1713211}{12800}e_0\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{147}{64}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{18})\quad h = (h) + h_0(t+c) - \left[\frac{9}{8}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{33}{10}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t-c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h + g + l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{5}\theta + \frac{1}{5}h + \frac{1}{5}g + \frac{1}{5}(4h' + 4g' + 4l').$$

Les six formules (E'_{18}), (F'_{18}), $G'_{18})$, (H'_{18}), (K_{18}), (L_{18}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (222); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')$ par

$$\left(\frac{9}{16}-\frac{9}{4}\gamma^2+\frac{291}{16}e^2-\frac{153}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(\frac{33}{20}-\frac{33}{5}\gamma^2+\frac{2335}{32}e^2-\frac{4227}{80}e'^2\right)\frac{n'}{n^5}$$

$$+\frac{46303}{6400}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{478249}{24000}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{7}{32}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{7}{40}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+e\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')$$

$$-\left[\frac{1221}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{23027}{320}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l');$$

$e\sin(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')$ par

$$e\sin(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')$$

$$-\left[\frac{1221}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{23027}{320}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(4h+4g+5l-4g'-4h'-4l');$$

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{45}{8}e-\frac{45}{2}\gamma^2e+\frac{255}{32}e^3-\frac{765}{16}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.\right.$$

$$+\left(\frac{33}{2}e-66\gamma^2e+\frac{1907}{32}e^3-\frac{4227}{8}ee'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{46303}{640}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{478249}{2400}e\frac{n'^7}{n^7}+\frac{35}{16}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$\left.\left.+\frac{7}{4}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\left[\frac{9}{4}\gamma^2e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{33}{5}\gamma^2e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{225}{32}e-\frac{207}{8}\gamma^2e+\frac{591}{64}e^3-\frac{3825}{64}ee'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left.+\frac{1023}{40}e\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1713211}{12800}e\frac{n'^6}{n^6}+\frac{147}{64}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\sin(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l');$$

h par

$$h - \left[\frac{9}{8} e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{33}{10} e \frac{n'^5}{n^5}\right] \sin(4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \frac{81}{256} \frac{n'^8}{n^8}$$

$$+ \left[\frac{9}{8} e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{33}{10} e \frac{n'^5}{n^5}\right] \cos(4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l');$$

$e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\} 2(4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l')$ * par

$$\left[\left(\frac{9}{8} e - \frac{9}{2} \gamma^2 e + \frac{291}{8} e^3 - \frac{153}{16} e e'^2\right) \frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left. + \frac{33}{10} e \frac{n'^5}{n^5} + \frac{46303}{3200} e \frac{n'^6}{n^6} + \frac{7}{16} e \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2}\right] \cdot \left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\} (4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l')$$

$$+ e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\} 2(4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l')$$

$$- \frac{1221}{32} e^3 \frac{n'^4}{n^4} \cdot \left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\} 3(4h + 4g + 5l - 4h' - 4g' - 4l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{18}), (F'_{18}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{18}), (H'_{18}), dans les expressions de L, G, H, en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0, et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 442),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{\frac{45}{16} e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{33}{4} e \frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve explique.

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 443)

$$-\sqrt{a\mu}\,\frac{81}{512}\,\frac{n'^8}{n^8};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 443)

$$-\sqrt{a\mu}\,\frac{81}{512}\,\frac{n'^8}{n^8}.$$

D'ailleurs en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41) on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{-\frac{9}{16}\,\frac{n'^4}{n^4} - \frac{33}{20}\,\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{405}{512}\,\frac{n'^8}{n^8} - \frac{297}{64}\,\frac{n'^9}{n^9}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 450 et 451) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 18^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{4}{5}n'(L - L_0) - \frac{4}{5}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (222) de R, joint à la quantité $+\frac{4}{5}n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{4}{5}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV, avec l'indication [18 · · · 1, 222]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$L = \sqrt{a\mu}\left\{1 + \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right.\right.$$
$$\left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(10-40\gamma^2-115e^2+135e'^2+60\gamma^4+419\gamma^2e^2-540\gamma^2e'^2+\frac{7349}{64}e^4-\frac{3105}{2}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{138661}{256}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left(\frac{36049}{288}-\frac{94481}{144}\gamma^2-\frac{2069437}{1152}e^2+\frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{483527}{1728}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{45}{4}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\};$$

$$G=\sqrt{a\mu}\Bigg\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{37}{16}-\frac{33}{4}\gamma^2-\frac{753}{64}e^2+\frac{555}{32}e'^2+\frac{69}{8}\gamma^4+\frac{917}{16}\gamma^2e^2-\frac{495}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{78757}{1024}e^4-\frac{11295}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(10-40\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\};$$

$$H=\sqrt{a\mu}\Bigg\{1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{37}{16}-\frac{23}{8}\gamma^2-\frac{753}{64}e^2+\frac{555}{32}e'^2-\frac{119}{8}\gamma^4+\frac{235}{32}\gamma^2e^2-\frac{345}{16}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{78757}{1024}e^4-\frac{11295}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(10-\frac{59}{3}\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{2547}{64}-\frac{1319}{12}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ..., qui se déduisent de ces relations entre L, G, H et a, e, γ, sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10^e opération (page 383).

19ᵉ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (385) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (385)*, dans lequel l'argument est $3h + 3g + 4l - 3h' - 3g' - 3l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2 \right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad\qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4620391}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^3}{a'^4}\Big\{\frac{15}{16}e - \frac{45}{16}\gamma^2 e - \frac{285}{64}e^3 - \frac{45}{8}ee'^2 - \frac{2565}{64}ee'^2\frac{n'}{n} + \frac{93}{32}e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{7}{8}e\frac{n'^3}{n^3}\Big\} \\
& \qquad \times \cos(3h + 3g + 4l - 3h' - 3g' - 3l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 4, \qquad i' = 3, \qquad i'' = 3, \qquad i''' = -3.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{4}\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{3}\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{1}{3}\frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (385), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des dix-huit premieres opérations.

et par suite, en intégrant,

$$\mathrm{G} = \frac{3}{4}\mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = \frac{3}{4}\mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{19})\left\{\begin{aligned} a = \frac{4^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 4e^2 + 13e^4 + \frac{77}{2}e^6 \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1617}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.4^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ & - 20\frac{n'^5.4^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.4^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{19})\quad \gamma^2 = \frac{1}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1 - \frac{3}{2}e^2 - \frac{9}{8}e^4 + 5\frac{n'^4.4^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = 4(\mathrm{G})\left\{1 + 2e^2 + \frac{9}{2}e^4 + \frac{41}{4}e^6 - \frac{1001}{16}e^2\frac{n'^4.4^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{19})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2.4^5(\mathrm{G})^5}{\mu^3 a'}\Big\{ & \frac{15}{16} - \frac{45}{128}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{165}{64}e^2 - \frac{45}{8}e'^2 \\ & - \frac{2565}{64}e'^2\frac{n'.4^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} + \frac{93}{32}\frac{n'^2.4^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \frac{7}{8}\frac{n'^3.4^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 3\frac{dh}{dt} + 3\frac{dg}{dt} + 4\frac{dl}{dt} - 3n' = -4\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 3\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 3\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 3n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}, \dfrac{da}{d\mathrm{G}}, \dfrac{da}{d\mathrm{H}}, \dfrac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 10^e^ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{19})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = {} & \frac{\mu^2}{4^3(\mathrm{G})^3}\left\{4 - 24e^2 - 3\frac{n'.4^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \frac{19}{4}\frac{n'^2.4^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\} \\ & - \frac{n'^2.4^5(\mathrm{G})^5}{\mu^3 a'}.\frac{1}{e}\Big\{\frac{15}{16} - \frac{45}{128}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1035}{64}e^2 - \frac{45}{8}e'^2 \\ & - \frac{2565}{64}e'^2\frac{n'.4^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} + \frac{93}{32}\frac{n'^2.4^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \frac{7}{8}\frac{n'^3.4^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{19}), (D_{19}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre chose que } \frac{1}{4}L\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs, par leur forme, dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(E_{19})\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \left[\frac{15}{64} - \frac{45}{512}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{165}{32}e_0^2 - \frac{45}{32}e'^2\right]\frac{n'^2.4^8(G)^8}{\mu^5 a'} \\
& + \left[\frac{45}{256} - \frac{135}{2048}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{765}{128}e_0^2 - \frac{2835}{256}e'^2\right]\frac{n'^3.4^{11}(G)^{11}}{\mu^7 a'} \\
& + \frac{291}{256}\frac{n'^4.4^{14}(G)^{14}}{\mu^9 a'} + \frac{3451}{4096}\frac{n'^5.4^{17}(G)^{17}}{\mu^{11} a'} \\
& + e_0\cos\theta_0(t+c) \\
& - \left\{\frac{795}{256}e_0^2\frac{n'^2.4^8(G)^8}{\mu^5 a'} + \frac{3465}{1024}e_0^2\frac{n'^3.4^{11}(G)^{11}}{\mu^7 a'}\right\}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(F_{19})\left\{
\begin{aligned}
e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c) \\
& - \left\{\frac{795}{256}e_0^2\frac{n'^2.4^8(G)^8}{\mu^5 a'} + \frac{3465}{1024}e_0^2\frac{n'^3.4^{11}(G)^{11}}{\mu^7 a'}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\theta_0 = \frac{\mu^2}{4^3(G)^3}\left\{4 - 24e_0^2 - 3\frac{n'.4^3(G)^3}{\mu^2} - \frac{19}{4}\frac{n'^2.4^6(G)^6}{\mu^4}\right\}.
$$

Si de ces deux formules (E_{19}), (F_{19}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{19}), (B_{19}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(G_{19})\left\{
\begin{aligned}
a = \frac{4^2(G)^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 + 4e_0^2 + 13e_0^4 + \frac{77}{2}e_0^6 \\
& - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{1617}{8}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.4^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& - 20\frac{n'^5.4^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6.4^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}
\end{aligned}
\right.
$$

Cette formule se continue a la page suivante

$$(G_{19})\left\{\begin{aligned}&+\frac{4^2(G)^2}{\mu}\Big\{\left[\frac{15}{8}e_0-\frac{45}{64}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0+\frac{915}{32}e_0^3-\frac{45}{4}e_0e'^2\right]\frac{n'^2.4^8(G)^8}{\mu^5a'}\\&\qquad+\left[\frac{45}{32}e_0-\frac{135}{256}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0+\frac{3825}{128}e_0^3-\frac{2835}{32}e_0e'^2\right]\frac{n'^3.4^{11}(G)^{11}}{\mu^7a'}\\&\qquad\qquad+\frac{291}{32}e_0\frac{n'^4.4^{14}(G)^{14}}{\mu^9a'}+\frac{3451}{512}e_0\frac{n'^5.4^{17}(G)^{17}}{\mu^{11}a'}\Big\}\cos\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$(H_{19})\left\{\begin{aligned}&\gamma^2=\frac{1}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1-\frac{3}{2}e_0^2-\frac{9}{8}e_0^4+5\frac{n'^4.4^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}\\&-\frac{1}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{\frac{45}{64}e_0\frac{n'^2.4^8(G)^8}{\mu^5a'}+\frac{135}{256}e_0\frac{n'^3.4^{11}(G)^{11}}{\mu^7a'}\right\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}a_0=\frac{4^2(G)^2}{\mu}\Big\{&1+4e_0^2+13e_0^4+\frac{77}{2}e_0^6\\&-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}+\frac{1617}{8}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.4^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\\&\qquad-20\frac{n'^5.4^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6.4^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\};\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2=\frac{1}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1-\frac{3}{2}e_0^2-\frac{9}{8}e_0^4+5\frac{n'^4.4^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{19}), (F_{19}), (G_{19}), (H_{19}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{19})\left\{\begin{aligned}&e\cos\theta=\left(\frac{15}{64}-\frac{45}{64}\gamma_0^2+\frac{45}{32}e_0^2-\frac{45}{32}e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\\&\quad+\left(\frac{45}{256}-\frac{135}{256}\gamma_0^2+\frac{135}{64}e_0^2-\frac{2835}{256}e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{291}{256}\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{3451}{4096}\frac{n'^5}{n_0^5}\cdot\frac{a_0}{a'}\\&\quad+e_0\cos\theta_0(t+c)\\&\quad-\left[\frac{795}{256}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{3465}{1024}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{19})\left\{\begin{aligned}&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\&\quad-\left[\frac{795}{256}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{3465}{1024}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{G}'_{19})\left\{\begin{aligned}
a = a_0 \Big\{ 1 + \Big[&\left(\frac{15}{8} e_0 - \frac{45}{8} \gamma_0^2 e_0 - \frac{285}{32} e_0^3 - \frac{45}{4} e_0 e'^2\right) \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0}{a'} \\
&+ \left(\frac{45}{32} e_0 - \frac{135}{32} \gamma_0^2 e_0 - \frac{855}{128} e_0^3 - \frac{2835}{32} e_0 e'^2\right) \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0}{a'} \\
&+ \frac{291}{32} e_0 \frac{n'^4}{n_0^4} \cdot \frac{a_0}{a'} + \frac{3451}{512} e_0 \frac{n'^5}{n_0^5} \cdot \frac{a_0}{a'} \Big] \cos \theta_0 (t + c) \Big\},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{H}'_{19}) \quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\frac{45}{64} \gamma_0^2 e_0 \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0}{a'} + \frac{135}{256} \gamma_0^2 e_0 \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0}{a'} \right] \cos \theta_0 \, (t + c).
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$
\theta_0 = n_0 \left[4 - 3 \frac{n'}{n_0} - \frac{19}{4} \frac{n'^2}{n_0^2} \right].
$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{d(h + g + l)}{dt} = - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{d(h + g + l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} &\left[1 - \frac{9}{2} \gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{259}{16} \frac{n'^2}{n^2} \right] \\
&- \frac{n'^2}{n} \cdot \frac{a}{a'} \left[\frac{165}{32} e - \frac{405}{32} \gamma^2 e - \frac{1275}{64} e^3 - \frac{495}{16} e e'^2 + \frac{2139}{64} e \frac{n'^2}{n^2} \right] \cos \theta,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dh}{dt} = - \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} - \frac{45}{32} e \frac{n'^2}{n} \cdot \frac{a}{a'} \cos \theta ;
$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{19}), (F'_{19}), (G'_{19}), (H'_{19}), puis intégrant, nous tirerons

$$
(\mathrm{K}_{19})\left\{\begin{aligned}
h + g + l = \frac{1}{4}(h) + \frac{1}{4}(g) + \frac{1}{4}(3h' + 3g' + 3l') + \frac{1}{4}(\theta_0 + h_0 + g_0)(t + c) \\
- \Big[\left(\frac{255}{128} e_0 - \frac{675}{128} \gamma_0^2 e_0 - \frac{1065}{128} e_0^3 - \frac{765}{64} e_0 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0}{a'} \\
+ \frac{1035}{512} e_0 \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0}{a'} + \frac{8439}{512} e_0 \frac{n'^4}{n_0^4} \cdot \frac{a_0}{a'} \Big] \sin \theta_0 (t + c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{L}_{19}) \quad h = (h) + h_0 (t + c) - \left[\frac{45}{128} e_0 \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0}{a'} + \frac{135}{512} e_0 \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0}{a'} \right] \sin \theta_0 (t + c).
$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{4}\theta+\frac{1}{4}h+\frac{1}{4}g+\frac{1}{4}(3h'+3g+3l').$$

Les six formules (E'_{19}), (F'_{19}), (G'_{19}), (H'_{19}), (K_{19}), (L_{19}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (385); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')$ par

$$\left(\frac{15}{64}-\frac{45}{64}\gamma^2+\frac{45}{32}e^2-\frac{45}{32}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\left(\frac{45}{256}-\frac{135}{256}\gamma^2+\frac{135}{64}e^2-\frac{2835}{256}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$+\frac{291}{256}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{3451}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$+e\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')$$

$$-\left[\frac{795}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{3465}{1024}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos 2(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l');$$

$e\sin(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')$ par

$$e\sin(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')$$

$$-\left[\frac{795}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{3465}{1024}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin 2(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l');$$

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{15}{8}e-\frac{45}{8}\gamma^2e-\frac{285}{32}e^3-\frac{45}{4}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\left(\frac{45}{32}e-\frac{135}{32}\gamma^2e-\frac{855}{128}e^3-\frac{2835}{32}ee'^2\right)\frac{n'}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{291}{32}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{3451}{512}e\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \left[\frac{45}{64}\gamma e \frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{135}{256}\gamma^2 e \frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{255}{128}e - \frac{675}{128}\gamma^2 e - \frac{1065}{128}e^3 - \frac{765}{64}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$
$$\left.+\frac{1035}{512}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{8439}{512}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l');$$

h par

$$h - \left[\frac{45}{128}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{135}{512}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \frac{225}{4096}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$
$$+\left[\frac{15}{32}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{45}{128}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l');$$

$e^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')$ * par

$$\left[\left(\frac{15}{32}e - \frac{45}{32}\gamma^2 e + \frac{45}{16}e^3 - \frac{45}{16}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$
$$\left.+\frac{45}{128}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{291}{128}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(3h+3g+4l-3h'-3g-3l')$$
$$+e^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l')$$
$$-\frac{795}{128}e^3\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(3h+3g+4l-3h'-3g'-3l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{19}), (F'_{19}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les for-

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

mules (G'_{19}), (H'_{19}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 452),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{\frac{15}{16}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{45}{64}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 453)

$$-\sqrt{a\mu}\,\frac{225}{8192}\,\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 453)

$$-\sqrt{a\mu}\,\frac{225}{8192}\,\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{-\frac{15}{64}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} - \frac{45}{256}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{225}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} - \frac{675}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 459 et 460) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 19^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{3}{4}n'(L - L_0) - \frac{3}{4}n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (385) de R, joint à la quantité $+\frac{3}{4}n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{3}{4}n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [19, . . . 1,385]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right. \\
&\qquad \left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{483527}{1728}\frac{n'^9}{n^9} \\
&+ \frac{4959}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{45405}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4959}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4959}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, .., qui se déduisent de ces relations entre L, G, H et a, e, γ, sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10^e opération (page 383).

20^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (399) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (399)* dans lequel l'argument est $3h + 3g + 2l - 3h' - 3g' - 3l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2\right. \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad \left. - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4620391}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4959}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\right\} \\
& + m'\frac{a^3}{a'^4}\left\{-\frac{45}{16}e + \frac{135}{16}\gamma^2 e + \frac{165}{32}e^3 + \frac{135}{8}ee'^2 + \frac{2025}{64}ee'^2\frac{n'}{n} - \frac{1143}{256}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{6611}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}\right\} \\
& \times \cos(3h + 3g + 2l - 3h' - 3g' - 3l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 2, \quad i' = 3, \quad i'' = 3, \quad i''' = -3.$$

---

[*] Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (399), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des dix-neuf premières opérations.

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G = \frac{3}{2}L - (G), \qquad H = \frac{3}{2}L - (H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} a = \frac{2^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & 1 - 2e^2 - \frac{5}{2}e^4 - \frac{11}{4}e^6 \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{2877}{16}e^2 - \frac{555}{16}e^4\right]\frac{n'^2.2^6(G)^6}{\mu^4} \\ & - 20\frac{n'^3.2^9(G)^9}{\mu^6} - \frac{2547}{32}\frac{n'^4.2^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\Big\}, \end{aligned} \right.$$

$$(B) \quad \gamma^2 = \frac{1}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}\left\{1 - \frac{3}{2}e^2 - \frac{9}{8}e^4 - 5\frac{n'^2.2^6(G)^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, en ayant soin de tenir compte de ce que (G) est négatif, il vient

$$L = -2(G)\left\{1 - e^2 - \frac{3}{4}e^4 - \frac{5}{8}e^6 - \frac{1001}{32}e^2\frac{n'^2.2^6(G)^6}{\mu^4}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dL}{dt} = \frac{n'^2.2^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & \frac{45}{16} - \frac{135}{64}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{285}{16}e^2 - \frac{135}{8}e^4 \\ & - \frac{2025}{64}e^2\frac{n'.2^3(G)^3}{\mu^2} - \frac{1143}{256}\frac{n'^2.2^6(G)^6}{\mu^4} - \frac{6611}{1024}\frac{n'^3.2^9(G)^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 3\frac{dl}{dt} - 3\frac{dg}{dt} - 2\frac{dh}{dt} - 3n' = -2\frac{dR}{dL} - 3\frac{dR}{dG} - 3\frac{dR}{dH} - 3n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... données à la suite de la 10^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{20})\left\{\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} = &-\frac{\mu^2}{2^3(\mathrm{G})^3}\left\{2+6e^2+3\,\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{5}{4}\,\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}\\ &+\frac{n'^2.2^5(\mathrm{G})^5}{\mu\,a'}\cdot\frac{1}{e}\left\{\frac{45}{16}-\frac{135}{64}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{495}{8}e^2-\frac{135}{8}e'^2\right.\\ &\qquad\left.+\frac{2025}{64}e'^2\,\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}+\frac{1143}{256}\,\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}+\frac{6611}{1024}\,\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\cos\vartheta.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{20}), (D_{20}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{20})\left\{\begin{aligned}e\cos\vartheta = &\left[\frac{45}{32}-\frac{135}{128}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{1815}{64}e_0^2-\frac{135}{16}e'^2\right]\frac{n'^2.2^5(\mathrm{G})^5}{\mu^5\,a'}\\ &-\left[\frac{135}{64}-\frac{405}{256}\,\frac{(\mathrm{H})-(\mathrm{G})}{(\mathrm{G})}-\frac{7065}{128}e_0^2-\frac{3645}{128}e'^2\right]\frac{n'^3.2^{11}(\mathrm{G})^{11}}{\mu^7\,a'}\\ &+\frac{3213}{512}\,\frac{n'^4.2^{14}(\mathrm{G})^{14}}{\mu^9\,a'}-\frac{15367}{2048}\,\frac{n'^5.2^{17}(\mathrm{G})^{17}}{\mu^{11}\,a'}\\ &+e_0\cos\vartheta_0(t+c)\\ &+\left\{\frac{975}{64}e_0^2\,\frac{n'^2.2^8(\mathrm{G})^8}{\mu^5\,a'}-\frac{3735}{128}e_0^2\,\frac{n'^3.2^{11}(\mathrm{G})^{11}}{\mu^7\,a'}\right\}\cos2\vartheta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{20})\left\{\begin{aligned}e\sin\vartheta = &\,e_0\sin\vartheta_0(t+c)\\ &+\left\{\frac{975}{64}e_0^2\,\frac{n'^2.2^8(\mathrm{G})^8}{\mu^5\,a'}-\frac{3735}{128}e_0^2\,\frac{n'^3.2^{11}(\mathrm{G})^{11}}{\mu^7\,a'}\right\}\sin2\vartheta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et ϑ_0 a pour valeur

$$\vartheta_0 = -\frac{\mu^2}{2^3(\mathrm{G})^3}\left\{2+6e_0^2+3\,\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{5}{4}\,\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces deux formules (E_{20}), (F_{20}) on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{20}), (B_{20}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(G_{20})\left\{
\begin{aligned}
a = {} & \frac{2^2(G)^2}{\mu}\Big\{ 1 - 2e_0^2 + \frac{5}{2}e_0^4 - \frac{11}{4}e_0^6 \\
& \qquad - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{2877}{16}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad + 20\frac{n'^5 . 2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6 . 2^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} \Big\} \\
& - \frac{2^2(G)^2}{\mu}\Big\{ \left[\frac{45}{8}e_0 - \frac{135}{32}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0 - \frac{1065}{16}e_0^3 - \frac{135}{4}e_0 e'^2\right]\frac{n'^2 . 2^8(G)^8}{\mu^5 a'} \\
& \qquad - \left[\frac{135}{16}e_0 - \frac{405}{64}\frac{(H)-(G)}{(G)}e_0 - \frac{4005}{32}e_0^3 - \frac{3645}{32}e_0 e'^2\right]\frac{n'^3 . 2^{11}(G)^{11}}{\mu^7 a'} \\
& \qquad\qquad + \frac{3213}{128}e_0\frac{n'^4 . 2^{14}(G)^{14}}{\mu^9 a'} - \frac{15367}{512}e_0\frac{n'^5 . 2^{17}(G)^{17}}{\mu^{11} a'} \Big\} \cos\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(H_{20})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & \frac{1}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}\Big\{ 1 + \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{9}{8}e_0^4 + 5\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \Big\} \\
& + \frac{1}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}\Big\{ \frac{135}{32}e_0\frac{n'^2 . 2^8(G)^8}{\mu^5 a'} - \frac{405}{64}e_0\frac{n'^3 . 2^{11}(G)^{11}}{\mu^7 a'} \Big\} \cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0 = {} & \frac{2^2(G)^2}{\mu}\Big\{ 1 - 2e_0^2 + \frac{5}{2}e_0^4 - \frac{11}{4}e_0^6 \\
& \qquad - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{8}\frac{(H)-(G)}{(G)} - \frac{2877}{16}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad + 20\frac{n'^5 . 2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6 . 2^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} \Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\gamma_0^2 = \frac{1}{4}\frac{(H)-(G)}{(G)}\Big\{ 1 + \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{9}{8}e_0^4 + 5\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \Big\}.
$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les

formules (E_{20}), (F_{20}), (G_{20}), (H_{20}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$
(E'_{20})\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \left(\frac{45}{32} - \frac{135}{32}\gamma_0^2 - \frac{1095}{64}e_0^2 - \frac{135}{16}e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} \\
& + \left(\frac{135}{64} - \frac{405}{64}\gamma_0^2 - \frac{4095}{128}e_0^2 - \frac{3645}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{3213}{512}\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{15367}{2048}\frac{n'^5}{n_0^5}\cdot\frac{a_0}{a'} \\
& + e_0\cos\theta_0(t+c) \\
& + \left[\frac{975}{64}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{3735}{128}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(F'_{20})\left\{
\begin{aligned}
e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c) \\
& + \left[\frac{975}{64}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{3735}{128}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(G'_{20})\left\{
\begin{aligned}
a = a_0\Bigg\{1 - \Bigg[& \left(\frac{45}{8}e_0 - \frac{135}{8}\gamma_0^2 e_0 - \frac{165}{16}e_0^3 - \frac{135}{4}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} \\
& + \left(\frac{135}{16}e_0 - \frac{405}{16}\gamma_0^2 e_0 - \frac{495}{32}e_0^3 - \frac{3645}{32}e_0 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\ \frac{a_0}{a'} \\
& + \frac{3213}{128}e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{15367}{512}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\cdot\frac{a_0}{a'}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\Bigg\},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(H'_{20})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\frac{135}{32}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{405}{64}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos\theta_0(t+c).
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$
\theta_0 = n_0\left[2 - 3\frac{n'}{n_0} - \frac{5}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].
$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$+ \frac{n'^2}{n}\cdot\frac{a}{a'}\left[\frac{495}{32}e - \frac{1215}{32}\gamma^2 e - \frac{2925}{128}e^3 - \frac{1485}{16}ee'^2 + \frac{26289}{512}e\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{135}{32}e\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{a}{a'}\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{20}), (F'_{20}), (G'_{20}), (H'_{20}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{20})\left\{\begin{aligned} h+g+l = {} & -\frac{1}{2}(h) - \frac{1}{2}(g) + \frac{1}{2}(3h' + 3g' + 3l') + \frac{1}{2}(\theta_0 - h_0 - g_0)(t+c) \\ & + \left[\left(\frac{765}{64}e_0 - \frac{2025}{64}\gamma_0^2 e_0 - \frac{4905}{256}e_0^3 - \frac{2295}{32}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\right. \\ & \left. + \frac{3105}{128}e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{93177}{1024}e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{20})\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[\frac{135}{64}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{405}{128}e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}(3h' + 3g' + 3l').$$

Les six formules (E'_{20}), (F'_{20}), (G'_{20}), (H'_{20}), (K_{20}), (L_{20}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (399); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$ par

$$\left(\frac{45}{32}-\frac{135}{32}\gamma^2-\frac{1095}{64}e^2-\frac{135}{16}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\left(\frac{135}{64}-\frac{405}{64}\gamma^2-\frac{4095}{128}e^2-\frac{3645}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$+\frac{3213}{512}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{15367}{2048}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$+e\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\left[\frac{975}{64}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{3735}{128}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos2(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l');$$

$e\sin(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$ par

$$e\sin(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$$

$$+\left[\frac{975}{64}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{3735}{128}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin2(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l');$$

a par

$$\begin{aligned}a\Bigg\{1-\Bigg[&\left(\frac{45}{8}e-\frac{135}{8}\gamma^2e-\frac{165}{16}e^3-\frac{135}{4}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\\&+\left(\frac{135}{16}e-\frac{405}{16}\gamma^2e-\frac{495}{32}e^3-\frac{3645}{32}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\\&+\frac{3213}{128}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{15367}{512}e\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}\Bigg]\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')\Bigg\};\end{aligned}$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\frac{135}{32}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{405}{64}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l');$$

$h+g+l$ par

$$\begin{aligned}h+g+l+\Bigg[&\left(\frac{765}{64}e-\frac{2025}{64}\gamma^2e-\frac{4905}{256}e^3-\frac{2295}{32}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\\&+\frac{3105}{128}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{}{a'}+\frac{93177}{1024}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\Bigg]\sin(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l');\end{aligned}$$

h par

$$h+\left[\frac{135}{64}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{405}{128}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \frac{2025}{1024}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$+\left[\frac{45}{16}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{135}{32}e\frac{n'}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l');$$

$e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$ * par

$$\left[\left(\frac{45}{16}e - \frac{135}{16}\gamma^2 e - \frac{1095}{32}e^3 - \frac{135}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$

$$\left. + \frac{135}{32}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{3213}{512}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$$

$$+ e^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l')$$

$$+ \frac{975}{32}e^3\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 3(3h+3g+2l-3h'-3g'-3l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{20}), (F'_{20}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{20}), (H'_{20}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 462),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{45}{16}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} - \frac{135}{32}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 462)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{2025}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2};$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

H_0 = ancienne valeur de H (page 462)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{2025}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1=\frac{1}{e}\left\{-\frac{45}{32}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{135}{64}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1+2\theta_2 L_2+\ldots)=\sqrt{a\mu}\left\{\frac{2025}{1024}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{6075}{1024}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (page 469) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 20^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{3}{2}n'(L-L_0)-\frac{3}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1+2\theta_2 L_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (399) de R, joint à la quantité $+\frac{3}{2}n'(L-L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{3}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1+2\theta_2 L_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [20 . . . . . 1, 399]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$L=\sqrt{a\mu}\left\{1+\left(\frac{37}{16}-\frac{33}{4}\gamma^2-\frac{105}{4}e^2+\frac{555}{32}e'^2+\frac{69}{8}\gamma^4+\frac{201}{2}\gamma^2e^2-\frac{495}{8}\gamma^2e'^2\right.\right.$$
$$\left.+\frac{28549}{1024}e^4-\frac{1575}{8}e^2e'^2+\frac{3885}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\left(10-40\gamma^2-115e^2+135e'^2+60\gamma^4+419\gamma^2e^2-540\gamma^2e'^2+\frac{7349}{64}e^4-\frac{3105}{2}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$+\left(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{138661}{256}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left(\frac{36049}{288}-\frac{94481}{144}\gamma^2-\frac{2069437}{1152}e^2+\frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{483527}{1728}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{9009}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{69705}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\Big\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{37}{16}-\frac{33}{4}\gamma^2-\frac{753}{64}e^2+\frac{555}{32}e'^2+\frac{69}{8}\gamma^4+\frac{917}{16}\gamma^2e^2-\frac{495}{8}\gamma^2e'^2-\frac{78757}{1024}e^4-\frac{11295}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(10-40\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{2547}{64}-\frac{6191}{32}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{9009}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$\mathrm{H}=\sqrt{a\mu}\Big\{1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{37}{16}-\frac{23}{8}\gamma^2-\frac{753}{64}e^2+\frac{555}{32}e'^2-\frac{119}{8}\gamma^4+\frac{235}{32}\gamma^2e^2-\frac{345}{16}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{78757}{1024}e^4-\frac{11295}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(10-\frac{59}{3}\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{2547}{64}-\frac{1319}{12}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{9009}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, ..., qui se déduisent de ces relations entre L, G, H et a, e, γ, sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10e opération (page 383).

21e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (316) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (316) * dans lequel l'argument est $h+g+2l-h'-g'-l'$, et supposons que R

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (316), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt premières opérations.

se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2 \\
& \qquad - \Big(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2e^2 \\
& \qquad\qquad - \frac{495}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \Big(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} - \Big(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4620391}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \Big[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{9009}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\Big]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^3}{a'^4}\Big\{-\frac{3}{16}e + \frac{33}{16}\gamma^2e + \frac{3}{8}e^3 - \frac{3}{8}ee'^2 + \frac{99}{64}ee'^2\frac{n'}{n} - \frac{933}{64}e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{50405}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}\Big\} \\
& \qquad\qquad \times \cos(h + g + 2l - h' - g' - l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 2, \qquad i' = 1, \qquad i'' = 1, \qquad i''' = -1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$\mathrm{G} = \frac{1}{2}\mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = \frac{1}{2}\mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$
(\mathrm{A}_{21})\left\{
\begin{aligned}
a = {} & \frac{2^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{1 + 2e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \frac{23}{4}e^6 \\
& - \Big[\frac{37}{8} - \frac{33}{8}\frac{(\mathrm{G}) - (\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1197}{16}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\Big]\frac{n'^4 . 2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad - 20\frac{n'^5 . 2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6 . 2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Big\},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(\mathrm{B}_{21})\quad \gamma^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{8}e^4+5\,\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = 2(\mathrm{G})\left\{1+e^2+\frac{5}{4}e^4+\frac{13}{8}e^6-\frac{1001}{32}e^2\,\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{21})\left\{\begin{aligned}\frac{de}{dt} = \frac{n'^2.2^5(\mathrm{G})^5}{\mu^3a'}&\left\{\frac{3}{16}-\frac{33}{64}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{9}{32}e^2+\frac{3}{8}e'^2\right.\\ &\left.-\frac{99}{64}e'^2\,\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}+\frac{933}{64}\,\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}+\frac{50405}{1024}\,\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\sin\theta\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{dh}{dt}+\frac{dg}{dt}+2\frac{dl}{dt}-n'=-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}-n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 10^e^ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{21})\left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\mu^2}{2^3(\mathrm{G})^3}\left\{2-6e^2-\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{11}{4}\,\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}\\ &+\frac{n'^2.2^5(\mathrm{G})^5}{\mu^3a'}\cdot\frac{1}{e}\left\{\frac{3}{16}-\frac{33}{64}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{57}{32}e^2+\frac{3}{8}e'^2\right.\\ &\left.-\frac{99}{64}e'^2\,\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}+\frac{933}{64}\,\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}+\frac{50405}{1024}\,\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{21}), (D_{21}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{21})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\left[\frac{3}{32}-\frac{33}{128}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{69}{64}e_0^2+\frac{3}{16}e'^2\right]\frac{n'^2.2^8(\mathrm{G})^8}{\mu^5 a'}\\ &-\left[\frac{3}{64}-\frac{33}{256}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{105}{128}e_0^2-\frac{87}{128}e'^2\right]\frac{n'^3.2^{11}(\mathrm{G})^{11}}{\mu^7 a'}\\ &-\frac{1905}{256}\frac{n'^4.2^{14}(\mathrm{G})^{14}}{\mu^9 a'}-\frac{58157}{2048}\frac{n'^5.2^{17}(\mathrm{G})^{17}}{\mu^{11} a'}\\ &+e_0\cos\theta_0(t+c)\\ &+\left\{\frac{21}{32}e_0^2\frac{n'^2.2^8(\mathrm{G})^8}{\mu^5 a'}+\frac{15}{32}e_0^2\frac{n'^3.2^{11}(\mathrm{G})^{11}}{\mu^7 a'}\right\}\cos 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{21})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\ e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &+\left\{\frac{21}{32}e_0^2\frac{n'^2.2^8(\mathrm{G})^8}{\mu^5 e'}+\frac{15}{32}e_0^2\frac{n'^3.2^{11}(\mathrm{G})^{11}}{\mu^7 a'}\right\}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=\frac{\mu^2}{2^3(\mathrm{G})^3}\left\{2-6e_0^2-\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{11}{4}\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces deux formules (E_{21}), (F_{21}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{21}), (B_{21}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{21})\left\{\begin{aligned} a = &\ \frac{2^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\left\{1+2e_0^2+\frac{7}{2}e_0^4+\frac{23}{4}e_0^6\right.\\ &\qquad-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{1197}{16}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^3.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\ &\qquad\left.-20\frac{n'^4.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^5.2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\right\}\\ &-\frac{2(\mathrm{G})^2}{\mu}\left\{\left[\frac{3}{8}e_0-\frac{33}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0+3e_0^3+\frac{3}{4}e_0e'^2\right]\frac{n'^2.2^8(\mathrm{G})^8}{\mu^5 a'}\right.\\ &\qquad+\left[\frac{3}{16}e_0-\frac{33}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0+\frac{33}{16}e_0^3-\frac{87}{32}e_0e'^2\right]\frac{n'^3.2^{11}(\mathrm{G})^{11}}{\mu^7 a'}\\ &\qquad\left.+\frac{1905}{64}e_0\frac{n'^4.2^{14}(\mathrm{G})^{14}}{\mu^9 a'}+\frac{58157}{512}e_0\frac{n'^5.2^{17}(\mathrm{G})^{17}}{\mu^{11} a'}\right\}\cos\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{H}_{21})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 &= \frac{1}{4}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1 - \frac{1}{2}e_0^2 - \frac{3}{8}e_0^4 + 5\,\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\\
&+ \frac{1}{4}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{\frac{3}{32}e_0\,\frac{n'^2.2^8(\mathrm{G})^8}{\mu^5 a'} + \frac{3}{64}e_0\,\frac{n'^3.2^{11}(\mathrm{G})^{11}}{\mu^7 a'}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0 = \frac{2^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\bigg\{&1 + 2e_0^2 + \frac{7}{2}e_0^4 + \frac{23}{4}e_0^6\\
&- \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{8}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1197}{16}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&- 20\,\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\,\frac{n'^6.2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\gamma_0^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1 - \frac{1}{2}e_0^2 - \frac{3}{8}e_0^4 + 5\,\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}.
$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2 ; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{21}), (F_{21}), (G_{21}), (H_{21}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}},$$

$$
(\mathrm{E}'_{21})\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = &- \left(\frac{3}{32} - \frac{33}{32}\gamma_0^2 + \frac{21}{64}e_0^2 + \frac{3}{16}e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\\
&- \left(\frac{3}{64} - \frac{33}{64}\gamma_0^2 + \frac{39}{128}e_0^2 - \frac{87}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'} - \frac{1905}{256}\,\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'} - \frac{58157}{2048}\,\frac{n'^5}{n_0^5}\cdot\frac{a_0}{a'}\\
&+ e_0\cos\theta_0(t+c)\\
&+ \left[\frac{21}{32}e_0^2\,\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{15}{32}e_0^2\,\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}'_{21})\left\{
\begin{aligned}
e\sin\theta = &\; e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&+ \left[\frac{21}{32}e_0^2\,\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{15}{32}e_0^2\,\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{G}'_{21})\left\{\begin{aligned} a = a_0 \Big\{ \mathrm{I} - \Big[& \left(\frac{3}{8} e_0 - \frac{33}{8} \gamma_0^2 e_0 - \frac{3}{4} e_0^3 + \frac{3}{4} e_0 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0}{a'} \\ & + \left(\frac{3}{16} e_0 - \frac{33}{16} \gamma_0^2 e_0 - \frac{3}{8} e_0^3 - \frac{87}{32} e_0 e'^2 \right) \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0}{a'} \\ & + \frac{1905}{64} e_0 \frac{n'^4}{n_0^4} \cdot \frac{a_0}{a'} + \frac{58157}{512} e_0 \frac{n'^5}{n_0^5} \cdot \frac{a_0}{a'} \Big] \cos \theta_0 (t + c) \Big\}; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{21}) \quad \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\frac{3}{32} \gamma_0^2 e_0 \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0}{a'} + \frac{3}{64} \gamma_0^2 e_0 \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0}{a'} \right] \cos \theta_0 (t + c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0 \left[2 - \frac{n'}{n_0} - \frac{11}{4} \frac{n'^2}{n_0^2} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h + g + l)}{dt} = - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h + g + l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} & \left[\mathrm{I} - \frac{9}{2} \gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{259}{16} \frac{n'^2}{n^2} \right] \\ + \frac{n'^2}{n} \cdot \frac{a}{a'} & \left[\frac{33}{32} e - \frac{297}{32} \gamma^2 e - \frac{213}{128} e^3 + \frac{33}{16} e e'^2 + \frac{21459}{128} e \frac{n'^2}{n^2} \right] \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} + \frac{33}{32} e \frac{n'^2}{n} \cdot \frac{a}{a'} \cos \theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{21}), (F'_{21}), (G'_{21}), (H'_{21}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{21})\left\{\begin{aligned} h + g + l = \frac{\mathrm{I}}{2}(h) + \frac{\mathrm{I}}{2}(g) + \frac{\mathrm{I}}{2}(h' + g' + l') + \frac{\mathrm{I}}{2}(\theta_0 + h_0 + g_0)(t + c) & \\ + \Big[\left(\frac{51}{64} e_0 - \frac{495}{64} \gamma_0^2 e_0 - \frac{357}{256} e_0^3 + \frac{51}{32} e_0 e'' \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0}{a'} & \\ + \frac{69}{128} e_0 \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0}{a'} + \frac{55245}{512} e_0 \frac{n'^4}{n_0^4} \cdot \frac{a_0}{a'} \Big] \sin \theta_0 (t + c), & \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{21}) \quad h = (h) + h_0 (t + c) + \left[\frac{33}{64} e_0 \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0}{a'} + \frac{33}{128} e_0 \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0}{a'} \right] \sin \theta_0 (t + c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}(h'+g'+l').$$

Les six formules (E'_{21}), (F'_{21}), (G'_{21}), (H'_{21}), (K_{21}), (L_{21}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (316); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du nº **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(h+g+2l-h'-g'-l')$ par

$$-\left(\frac{3}{32}-\frac{33}{32}\gamma^2+\frac{21}{64}e^2+\frac{3}{16}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}-\left(\frac{3}{64}-\frac{33}{64}\gamma^2+\frac{39}{128}e^2-\frac{87}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$-\frac{1905}{256}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{58157}{2048}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$+e\cos(h+g+2l-h'-g'-l')$$

$$+\left[\frac{21}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{15}{32}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos 2(h+g+2l-h'-g'-l');$$

$e\sin(h+g+2l-h'-g'-l')$ par

$$e\sin(h+g+2l-h'-g'-l')$$

$$+\left[\frac{21}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{15}{32}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin 2(h+g+2l-h'-g'-l');$$

a par

$$a\left\{1-\left[\left(\frac{3}{8}e-\frac{33}{8}\gamma^2 e-\frac{3}{4}e^3+\frac{3}{4}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\left(\frac{3}{16}e-\frac{33}{16}\gamma^2 e-\frac{3}{8}e^3-\frac{87}{32}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1905}{64}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{58157}{512}e\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g+2l-h'-g'-l')\right\},$$

γ^2 par

$$\gamma^2 + \left[\frac{3}{32}\gamma^2 e \frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{3}{64}\gamma^2 e \frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g+2l-h'-g'-l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{51}{64}e - \frac{495}{64}\gamma^2 e - \frac{357}{256}e^3 + \frac{51}{32}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$
$$\left. + \frac{69}{128}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{55245}{512}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(h+g+2l-h'-g'-l'),$$

h par

$$h + \left[\frac{33}{64}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{33}{128}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(h+g+2l-h'-g'-l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \frac{9}{1024}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$
$$-\left[\frac{3}{16}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{3}{32}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g+2l-h'-g'-l');$$

$e^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(h+g+2l-h'-g'-l')^*$ par

$$-\left[\left(\frac{3}{16}e - \frac{33}{16}\gamma^2 e + \frac{21}{32}e^3 + \frac{3}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$
$$\left. + \frac{3}{32}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{1905}{128}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(h+g+2l-h'-g'-l')$$
$$+e^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(h+g+2l-h'-g'-l')$$
$$+\frac{21}{16}e^3\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(h+g+2l-h'-g'-l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{21}), (F'_{21}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les for-

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

mules (G'_{21}), (H'_{21}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 471),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{3}{16}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} - \frac{3}{32}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 472)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{9}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}.$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 472)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{9}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\cdot\left\{\frac{3}{32}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{3}{64}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots\ldots) = \sqrt{a\mu}\cdot\left\{-\frac{9}{1024}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} - \frac{9}{1024}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 478 et 479) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 21^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{1}{2}n'(L - L_0) - \frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (316) de R, joint à la quantité $+\frac{1}{2}n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [21··· 1, 316]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H, seront

$$L = \sqrt{a\mu}\Big\}1 + \Big(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{201}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2$$

$$+ \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \Big(10 - 40\gamma^2 - 115 e^2 + 135 e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+ \Big(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \Big(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+ \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{483527}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{69669}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$G = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \Big(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 + \frac{917}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2$$

$$- \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \Big(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$H = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \Big(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - \frac{119}{8}\gamma^4 + \frac{235}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2$$

$$- \frac{78757}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \Big(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ..., qui se déduisent de ces relations entre L, G, H, et a, e, γ, sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 10ᵉ opération (page 383).

22ᵉ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (44) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (44) *, dans lequel l'argument est $2g + 3l$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{351}{2}\gamma^2e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad\qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4620391}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{8991}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{3}{2}\gamma^2e - \frac{3}{2}\gamma^4e - \frac{57}{16}\gamma^2e^3 + \frac{9}{4}\gamma^2ee'^2 + \frac{21}{8}\gamma^2e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{3}{2}\gamma^2e\frac{n'^3}{n^3}\right\}\cos(2g + 3l).
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 3, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{3}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dG}{dt}, \qquad \frac{dH}{dt} = 0.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (44), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt et une premières opérations.

La seconde de ces équations montre que H est constant, et si l'on intègre la première, il vient

$$\mathrm{G} = \frac{2}{3}\mathrm{L} + (\mathrm{G}),$$

(G) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie H aux variables a, e, γ, peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{22})\left\{\begin{aligned} a = \frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{ &1 + 3e^2 + \frac{15}{2}e^4 + \frac{69}{4}e^6 \\ &- \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G}) - \mathrm{H}}{3(\mathrm{G})} + \frac{4167}{32}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ &- 20\,\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\,\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{22})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = {} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3(\mathrm{G}) - \mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}\left\{1 - e^2 - \frac{3}{4}e^4 + 5\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{841}{64}e^2\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = 3(\mathrm{G})\left\{1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{21}{8}e^4 + \frac{75}{16}e^6 - \frac{3003}{64}e^2\,\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{22})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Bigg\{ &\frac{3}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G}) - \mathrm{H}}{3(\mathrm{G})} + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{8}\left(\frac{3(\mathrm{G}) - \mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}\right)^2 - \frac{45}{32}\cdot\frac{3(\mathrm{G}) - \mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e^2 \\ &+ \frac{9}{8}\cdot\frac{3(\mathrm{G}) - \mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{9}{32}e^4 + \frac{9}{8}e^2e'^2 \\ &+ \left[\frac{21}{16}\cdot\frac{3(\mathrm{G}) - \mathrm{H}}{3(\mathrm{G})} + \frac{21}{16}e^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\ &- \left[\frac{3}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G}) - \mathrm{H}}{3(\mathrm{G})} + \frac{3}{4}e^2\right]\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Bigg\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dg}{dt} + 3\frac{dl}{dt} = -3\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}};$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, ... données à la suite de la 10^e^ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$
(\mathrm{D}_{22})\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\Big\{3-\frac{27}{2}e^2-\frac{9}{4}\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\Big\}\\
&-\frac{n'^2.3^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Big\{\frac{3}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}+\frac{9}{4}e^2-\frac{3}{8}\left(\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}\right)^2+\frac{33}{32}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e^2\\
&\qquad+\frac{9}{8}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e'^2+\frac{213}{32}e^4+\frac{27}{8}e^2e'^2\\
&\qquad+\left[\frac{21}{16}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}+\frac{63}{16}e^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\qquad\qquad-\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}+\frac{9}{4}e^2\right]\frac{n'^3.3^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{22}), (D_{22}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{3}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(\mathrm{E}_{22})\quad\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta &= \Big[\frac{1}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}+\frac{1}{2}e_0^2-\frac{1}{8}\left(\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}\right)^2+\frac{35}{16}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e_0^2\\
&\qquad+\frac{3}{8}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e'^2+\frac{145}{32}e_0^4+\frac{3}{4}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&+\left[\frac{5}{8}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}+\frac{5}{4}e_0^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}+\frac{1}{2}e_0^2\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\\
&+\left\{e_0+\left[\frac{1}{8}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0+\frac{1}{8}e_0^3\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\Big\{\left[\frac{1}{4}e_0^2+\frac{49}{32}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0^2+\frac{53}{16}e_0^4+\frac{3}{8}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\qquad+\frac{5}{8}e_0^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{1}{4}e_0^2\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{1}{16}e_0^3\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\cos 3\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{22})\quad\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta &= e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad-\Bigg\{\left[\frac{1}{4}e_0^2+\frac{49}{32}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0^2+\frac{53}{16}e_0^4+\frac{3}{8}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\qquad\qquad+\frac{5}{8}e_0^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{1}{4}e_0^2\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&\quad+\frac{1}{16}e_0^3\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\theta_0=\frac{\mu^2}{3^3(\mathrm{G})^3}\left\{3-\frac{27}{2}e_0^2-\frac{9}{4}\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\}.
$$

Si de ces deux formules (E_{22}), (F_{22}) on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{22}), (B_{22}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_{22})\quad\left\{\begin{aligned}
a &= \frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{1+3e_0^2+\frac{15}{2}e_0^4+\frac{69}{4}e_0^6\\
&\qquad-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}+\frac{4167}{32}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad-20\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6.3^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}\\
&\quad+\frac{3^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0+\frac{3}{2}e_0^3-\frac{3}{4}\left(\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}\right)^2e_0\right.\\
&\qquad\left.+\frac{183}{16}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0^3+\frac{9}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0e'^2+\frac{237}{16}e_0^5+\frac{9}{4}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\qquad+\left[\frac{15}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0+\frac{15}{4}e_0^3\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad-\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}+\frac{3}{2}e_0^3\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{H}_{22})\quad\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}\left\{1-e_0^2-\frac{3}{4}e_0^4+5\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4+\frac{5}{16}e_0^6-\frac{841}{64}e_0^2\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\quad+\Bigg\{\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0+\frac{1}{4}e_0^3-\frac{3}{8}\left(\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}\right)^2e_0+\frac{25}{32}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0^3\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{8}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0e'^2+\frac{51}{32}e_0^5+\frac{3}{8}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^2.3^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\quad+\left[\frac{5}{8}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0+\frac{5}{8}e_0^3\right]\frac{n'^4.3^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad-\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{3(\mathrm{G})-\mathrm{H}}{3(\mathrm{G})}e_0+\frac{1}{4}e_0^3\right]\frac{n'^5.3^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)
\end{aligned}\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{3^2(G)^2}{\mu}\left\{1 + 3e_0^2 + \frac{15}{2}e_0^4 + \frac{69}{4}e_0^6 - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\cdot\frac{3(G)-H}{3(G)} + \frac{4167}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \right.$$
$$\left. - 20\,\frac{n'^5.3^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\,\frac{n'^6.3^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\right\},$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3(G)-H}{3(G)}\left\{1 - e_0^2 - \frac{3}{4}e_0^4 + 5\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\} + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{5}{16}e_0^6 - \frac{841}{64}e_0^2\,\frac{n'^4.3^{12}(G)^{12}}{\mu^8}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et H en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et H par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{22}), (F_{22}), (G_{22}), (H_{22}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{22})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = {} & \left(\frac{1}{2}\gamma_0^2 + \frac{1}{4}e_0^2 - \frac{1}{2}\gamma_0^4 + \frac{7}{8}\gamma_0^2e_0^2 + \frac{3}{4}\gamma_0^2e'^2 - \frac{15}{32}e_0^4 + \frac{3}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{5}{4}\gamma_0^2 + \frac{5}{8}e_0^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} - \left(\frac{1}{2}\gamma_0^2 + \frac{1}{4}e_0^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5} \\ & + \left[e_0 + \frac{1}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c) \\ & - \left[\frac{1}{4}e_0^2 + \frac{49}{16}\gamma_0^2e_0^2 - \frac{15}{32}e_0^4 + \frac{3}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{5}{8}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{1}{4}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos 2\theta_0(t+c) \\ & + \frac{1}{16}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 3\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{22})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c) \\ & - \left[\left(\frac{1}{4}e_0^2 + \frac{49}{16}\gamma_0^2e_0^2 - \frac{15}{32}e_0^4 + \frac{3}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{5}{8}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{1}{4}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+c) \\ & + \frac{1}{16}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 3\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{22})\left\{\begin{aligned} a = a_0\Big\{1 + \Big[& \left(3\gamma_0^2e_0 - 3\gamma_0^4e_0 - \frac{57}{8}\gamma_0^2e_0^3 + \frac{9}{2}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \frac{15}{2}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4} - 3\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\Big]\cos\theta_0(t+c)\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(H'_{22})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\left(\frac{1}{2}\gamma_0^2e_0 - \frac{3}{2}\gamma_0^4e_0 - \frac{15}{16}\gamma_0^2e_0^3 + \frac{3}{4}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{5}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{1}{2}\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[3 - \frac{9}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}&\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\,\frac{n'^2}{n^2}\right]\\ &- \frac{n'^2}{n}\left[\frac{15}{4}\gamma^2 e - \frac{9}{4}\gamma^4 e - \frac{189}{32}\gamma^2 e^3 + \frac{45}{8}\gamma^2 ee'^2 + \frac{357}{16}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4}e - \frac{3}{2}\gamma^2 e - \frac{45}{32}e^3 + \frac{9}{8}ee'^2 + \frac{21}{16}e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{3}{4}e\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta:$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{22}), (F'_{22}), (G'_{22}), (H'_{22}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{22})\begin{cases} h+g+l = (h) + \frac{1}{3}(g) + \frac{1}{3}(\theta_0 + 3h_0 + g_0)(t+c) \\ \qquad - \left[\left(\frac{11}{4}\gamma_0^2 e_0 - \frac{9}{4}\gamma_0^4 e_0 - \frac{177}{32}\gamma_0^2 e_0^3 + \frac{33}{8}\gamma_0^2 e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{115}{8}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c);\end{cases}$$

$$(\mathrm{L}_{22})\begin{cases} h = (h) + h_0(t+c) \\ \quad + \left[\left(\frac{1}{4}e_0 - \frac{1}{2}\gamma_0^2 e_0 - \frac{15}{32}e_0^3 + \frac{3}{8}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{5}{8}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{1}{4}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c) \\ \quad - \frac{1}{32}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c).\end{cases}$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La

forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{3}\theta+h+\frac{1}{3}g.$$

Les six formules (E'_{22}), (F'_{22}), (G'_{22}), (H'_{22}), (K_{22}), (L_{22}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (44); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2g+3l)$ par

$$\left(\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}\gamma^4+\frac{7}{8}\gamma^2e^2+\frac{3}{4}\gamma^2e'^2-\frac{15}{32}e^4+\frac{3}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{5}{4}\gamma^2+\frac{5}{8}e^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{4}e^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left[e+\frac{1}{4}\gamma^2e\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2g+3l)$$

$$-\left[\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{49}{16}\gamma^2e^2-\frac{15}{32}e^4+\frac{3}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1}{4}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos2(2g+3l)$$

$$+\frac{1}{16}e^3\frac{n'^4}{n^4}\cos3(2g+3l);$$

$e\sin(2g+3l)$ par

$$e\sin(2g+3l)$$

$$-\left[\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{49}{16}\gamma^2e^2-\frac{15}{32}e^4+\frac{3}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1}{4}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin2(2g+3l)$$

$$+\frac{1}{16}e^3\frac{n'^4}{n^4}\sin3(2g+3l);$$

a par

$$a\left\{1+\left[\left(3\gamma^2e-3\gamma^4e-\frac{57}{8}\gamma^2e^3+\frac{9}{2}\gamma^2ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{15}{2}\gamma^2e\frac{n'^4}{n^4}-3\gamma^2e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2g+3l)\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\left(\frac{1}{2}\gamma^2e-\frac{3}{2}\gamma^4e-\frac{15}{16}\gamma^2e^3+\frac{3}{4}\gamma^2ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{5}{4}\gamma^2e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1}{2}\gamma^2e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2g+3l);$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \left[\left(\frac{11}{4}\gamma^2 e - \frac{9}{4}\gamma^4 e - \frac{177}{32}\gamma^2 e^3 + \frac{33}{8}\gamma^2 ee'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{115}{8}\gamma^2 e \, \frac{n'^4}{n^4} \right] \sin(2g + 3l);$$

h par

$$h + \left[\left(\frac{1}{4} e - \frac{1}{2}\gamma^2 e - \frac{15}{32} e^3 + \frac{3}{8} ee'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{5}{8} e \frac{n'^4}{n^4} - \frac{1}{4} e \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin(2g + 3l)$$

$$- \frac{1}{32} e^2 \frac{n'^4}{n^4} \sin 2(2g + 3l).$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left(\frac{1}{4}\gamma^4 + \frac{1}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{1}{8} e^4 \right) \frac{n'^4}{n^4} + \gamma^2 e \frac{n'^2}{n^2} \cos(2g + 3l);$$

$e^2 \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} l$* par

$$\left[\left(\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{11}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{3}{4}\gamma^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{5}{4}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{1}{2}\gamma^2 \frac{n'^5}{n^5} \right] \cdot \begin{Bmatrix} +\cos \\ -\sin \end{Bmatrix} (2g + 2l)$$

$$+ \left[e + \left(\frac{1}{4}\gamma^2 e + \frac{1}{16} e^3 \right) \frac{n'^4}{n^4} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} l$$

$$- \frac{13}{16}\gamma^2 e^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (2g + 4l);$$

$e^2 \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2l$ par

$$\left[\left(\gamma^2 e - \gamma^4 e - \frac{11}{4}\gamma^2 e^3 + \frac{3}{2}\gamma^2 ee'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{5}{2}\gamma^2 e \frac{n'^4}{n^4} \right] \cdot \begin{Bmatrix} +\cos \\ -\sin \end{Bmatrix} (2g + l)$$

$$+ e^2 \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2l$$

$$- \frac{13}{8}\gamma^2 e^3 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (2g + 5l);$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$\gamma \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (g + l)$ par

$$\left[\left(\frac{1}{4} \gamma e + \frac{3}{4} \gamma^3 e - \frac{15}{32} \gamma e^3 + \frac{3}{8} \gamma e e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{5}{8} \gamma e \frac{n'^4}{n^4} - \frac{1}{4} \gamma e \frac{n'^5}{n^5} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} + \cos \\ - \sin \end{matrix} \right\} (g + 2l)$$

$$+ \left[\gamma - \frac{1}{32} \gamma e^2 \frac{n'^4}{n^4} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (g + l)$$

$$- \frac{3}{2} \gamma^3 e \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (3g + 4l);$$

$\gamma^2 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2(g + l)$ par

$$\left[\left(\frac{1}{2} \gamma^2 e + \frac{3}{2} \gamma^4 e - \frac{15}{16} \gamma^2 e^3 + \frac{3}{4} \gamma^2 e e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{5}{4} \gamma^2 e \frac{n'^4}{n^4} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} + \cos \\ - \sin \end{matrix} \right\} l$$

$$+ \gamma^2 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (2g + 2l)$$

$$- 3 \gamma^4 e \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (4g + 5l).$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{22}), (F'_{22}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{22}), (H'_{22}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 481),

$$L_1 = \sqrt{a \mu} \cdot \frac{3}{2} \gamma^2 e \frac{n'^2}{n^2};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 481)

$$+ \sqrt{a \mu} \left(- \frac{1}{8} \gamma^4 - \frac{1}{4} \gamma^2 e^2 - \frac{1}{16} e^4 \right) \frac{n'^4}{n^4};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 481)

$$+ \sqrt{a \mu} \left(- \frac{1}{8} \gamma^4 - \frac{1}{4} \gamma^2 e^2 - \frac{1}{16} e^4 \right) \frac{n'^4}{n^4}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left(-\frac{3}{8}\gamma^4 - \frac{3}{8}\gamma^2 e^2\right)\frac{n'^4}{n^4}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 488 et 489) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 22^e opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (44) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1), et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [22 . . . 1, 44]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H, seront

$$\begin{aligned}
L = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{33}{4}\gamma^4 + \frac{801}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right.\\
&\qquad\left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 419\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}\\
&+ \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{483527}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{69669}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8\\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{33}{4}\gamma^4 + \frac{909}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{78821}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\ & + \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - 15\gamma^4 + \frac{227}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{78821}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \left(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\ & + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ & 2 + \left(\frac{359}{8} - 186\gamma^2 + \frac{45371}{128}e^2 + \frac{5385}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(140 - 396\gamma^2 + \frac{18411}{8}e^2 + 1890 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\ & + \frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{387}{4} - \frac{735}{2}\gamma^2 - \frac{22981}{128}e^2 + \frac{5805}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(420 - 1476\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 + 5670 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\ & + \frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{33}{4} - \frac{33}{2}\gamma^2 - 96 e^2 + \frac{495}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + (40 - 120\gamma^2 - 399 e^2 + 540 e'^2)\frac{n'^5}{n^5} \\ & + \frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{927}{32} - \frac{693}{8}\gamma^2 - \frac{36581}{128}e^2 + \frac{13905}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \left(\frac{927}{32} - \frac{693}{8}\gamma^2 - \frac{57717}{128}e^2 + \frac{13905}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{759}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4}.$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = -\frac{1}{a^2 n\gamma}\cdot\frac{33}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} + \frac{877}{8}\gamma^2 - \frac{1419}{64}e^2 + \frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} - \frac{63}{2}\gamma^2 - \frac{1419}{64}e^2 + \frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

23^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (58) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (58)*, dans lequel l'argument est $2g+l$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \Big(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{33}{2}\gamma^4 + \frac{699}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \Big(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} - \Big(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4620391}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \Big[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{8991}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\Big]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ -\frac{9}{2}\gamma^2 e + \frac{9}{2}\gamma^4 e + \frac{39}{16}\gamma^2 e^3 - \frac{27}{4}\gamma^2 e e'^2 - 8\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{7}{2}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}\Big\}\cos(2g+l).
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dt}, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (58), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt-deux premières opérations.

La seconde de ces équations montre que H est constant ; et si l'on intègre la première, il vient

$$\mathrm{G} = 2\mathrm{L} + (\mathrm{G}),$$

(G) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie H aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e ; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{23})\left\{\begin{aligned} a = \frac{(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{ & 1 - e^2 + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{4}e^6 \\ & - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})} - \frac{4341}{32}e^2 + \frac{555}{16}e^{\prime 2}\right]\frac{n^{\prime 4}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + 20\frac{n^{\prime 5}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n^{\prime 6}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Big\};\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{23})\quad \gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}\Big\{1 + e^2 + \frac{3}{4}e^4 + 5\frac{n^{\prime 4}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\} - \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}e^4 - \frac{5}{16}e^6 + \frac{841}{64}e^2\frac{n^{\prime 4}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, en ayant soin de tenir compte de ce que (G) est négatif, il vient

$$\mathrm{L} = -(\mathrm{G})\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1001}{64}e^2\frac{n^{\prime 4}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{23})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{n^{\prime 2}(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{9}{4}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})} - \frac{9}{4}e^2 - \frac{9}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}\right)^2 - \frac{3}{32}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e^2 \\ & + \frac{27}{8}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e^{\prime 2} + \frac{57}{32}e^4 - \frac{27}{8}e^2e^{\prime 2} \\ & + \left[4\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})} - 4e^2\right]\frac{n^{\prime 2}(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \left[\frac{7}{4}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})} - \frac{7}{4}e^2\right]\frac{n^{\prime 3}(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dg}{dt} + \frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}},$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}$, $\dfrac{da}{d\mathrm{G}}$, $\dfrac{de}{d\mathrm{L}}$, ... données à la suite de la

22^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$
(\mathrm{D}_{23})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = &-\frac{\mu^2}{(\mathrm{G})^3}\left\{1+\frac{3}{2}e^2+\frac{5}{4}\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\} \\
&+\frac{n'^2(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\left\{\frac{9}{4}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}-\frac{27}{4}e^2-\frac{9}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}\right)^2-\frac{81}{32}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e^2\right. \\
&\qquad\qquad+\frac{27}{8}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e'^2+\frac{357}{32}e^4-\frac{81}{8}e^2e'^2 \\
&\left.+\left[4\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}-12e^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}-\left[\frac{7}{4}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}-\frac{21}{4}e'^2\right]\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{23}), (D_{23}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(\mathrm{E}_{23})\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = &\left[\frac{9}{4}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}-\frac{9}{2}e_0^2-\frac{9}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}\right)^2-\frac{129}{16}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e_0^2\right. \\
&\qquad\left.+\frac{27}{8}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e'^2+\frac{531}{32}e_0^4-\frac{27}{4}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
&+\left[\frac{19}{16}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}-\frac{19}{8}e_0^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\left[\frac{7}{4}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}-\frac{7}{2}e_0^2\right]\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} \\
&+\left\{e_0-\left[\frac{81}{8}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e_0-\frac{81}{8}e_0^3\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+c) \\
&+\left\{\left[\frac{9}{4}e_0^2+\frac{147}{32}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e_0^2-\frac{183}{16}e_0^4+\frac{27}{8}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{19}{16}e_0^2\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{7}{4}e_0^2\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos 2\theta_0(t+c) \\
&+\frac{81}{16}e_0^3\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\cos 3\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{23})\left\{
\begin{aligned}
e\sin\theta = &\,e_0\sin\theta_0(t+c) \\
&+\left\{\left[\frac{9}{4}e_0^2+\frac{147}{32}\frac{(\mathrm{G})+\mathrm{H}}{(\mathrm{G})}e_0^2-\frac{183}{16}e_0^4+\frac{27}{8}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{19}{16}e_0^2\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}-\frac{7}{4}e_0^2\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\sin 2\theta_0(t+c) \\
&+\frac{81}{16}e_0^3\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = -\frac{\mu^2}{(G)^3}\left\{1 + \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{5}{4}\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces deux formules (E_{23}), (F_{23}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{23}), (B_{23}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{23})\left\{\begin{aligned}
a = \frac{(G)^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 - e_0^2 + \frac{1}{2}e_0^4 - \frac{1}{4}e_0^6 \\
& - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\frac{(G)+H}{(G)} - \frac{4341}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8} + 20\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\} \\
- \frac{(G)^2}{\mu}\Bigg\{ & \Bigg[\frac{9}{2}\frac{(G)+H}{(G)}e_0 - \frac{9}{2}e_0^3 - \frac{9}{4}\left(\frac{(G)+H}{(G)}\right)^2 e_0 - \frac{183}{16}\frac{(G)+H}{(G)}e_0^3 \\
& \quad + \frac{27}{4}\frac{(G)+H}{(G)}e_0e'^2 + \frac{237}{16}e_0^5 - \frac{27}{4}e_0^3e'^2\Bigg]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{19}{8}\frac{(G)+H}{(G)}e_0 - \frac{19}{8}e_0^3\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8} \\
& - \left[\frac{7}{2}\frac{(G)+H}{(G)}e_0 - \frac{7}{2}e_0^3\right]\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(H_{23})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{(G)+H}{(G)}\left\{1 + e_0^2 + \frac{3}{4}e_0^4 + 5\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\right\} & - \frac{1}{2}e_0^2 - \frac{3}{8}e_0^4 - \frac{5}{16}e_0^6 + \frac{841}{64}e_0^2\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8} \\
- \Bigg\{\Bigg[\frac{9}{4}\frac{(G)+H}{(G)}e_0 - \frac{9}{4}e_0^3 - \frac{27}{8}\left(\frac{(G)+H}{(G)}\right)^2 e_0 + \frac{69}{32}\frac{(G)+H}{(G)}e_0^3 & \\
+ \frac{27}{8}\frac{(G)+H}{(G)}e_0e'^2 + \frac{57}{32}e_0^5 - \frac{27}{8}e_0^3e'^2\Bigg]\frac{n'^2(G)^6}{\mu^4} & \\
+ \left[\frac{19}{16}\frac{(G)+H}{(G)}e_0 - \frac{19}{16}e_0^3\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8} - \left[\frac{7}{4}\frac{(G)+H}{(G)}e_0 - \frac{7}{4}e_0^3\right]\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c). &
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{(G)^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 - e_0^2 + \frac{1}{2}e_0^4 - \frac{1}{4}e_0^6 \\
& - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\frac{(G)+H}{(G)} - \frac{4341}{32}e_0^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8} + 20\frac{n'^5(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6(G)^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(G)+H}{(G)}\left\{1 + e_0^2 + \frac{3}{4}e_0^4 + 5\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}\right\} - \frac{1}{2}e_0^2 - \frac{3}{8}e_0^4 - \frac{5}{16}e_0^6 + \frac{841}{64}e_0^2\frac{n'^4(G)^{12}}{\mu^8}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et H en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et H par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{23}), (F_{23}), (G_{23}), (H_{23}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{23})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \left(\frac{9}{2}\gamma_0^2-\frac{9}{4}e_0^2-\frac{9}{2}\gamma_0^4-\frac{93}{8}\gamma_0^2e_0^2+\frac{27}{4}\gamma_0^2e'^2+\frac{3}{32}e_0^4-\frac{27}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
& +\left(\frac{19}{8}\gamma_0^2-\frac{19}{16}e_0^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\left(\frac{7}{2}\gamma_0^2-\frac{7}{4}e_0^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\
& +\left[e_0-\frac{81}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
& +\left[\left(\frac{9}{4}e_0^2+\frac{147}{16}\gamma_0^2e_0^2-\frac{3}{32}e_0^4+\frac{27}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{19}{16}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{7}{4}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos 2\theta_0(t+c)\\
& +\frac{81}{16}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{23})\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta = {} & e_0\sin\theta_0(t+c)\\
& +\left[\left(\frac{9}{4}e_0^2+\frac{147}{16}\gamma_0^2e_0^2-\frac{3}{32}e_0^4+\frac{27}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{19}{16}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{7}{4}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+c)\\
& +\frac{81}{16}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{23})\left\{\begin{aligned}
a = a_0\Bigg\{1-\Bigg[& \left(9\gamma_0^2e_0-9\gamma_0^4e_0-\frac{39}{8}\gamma_0^2e_0^3+\frac{27}{2}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
& +\frac{19}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+7\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\Bigg\};
\end{aligned}\right.$$

$$(H'_{23})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2-\Bigg[& \left(\frac{9}{2}\gamma_0^2e_0-\frac{27}{2}\gamma_0^4e_0-\frac{3}{16}\gamma_0^2e_0^3+\frac{27}{4}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
& +\frac{19}{8}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{7}{2}\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[1+\frac{5}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\ + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{45}{4}\gamma^2 e - \frac{27}{4}\gamma^4 e - \frac{171}{32}\gamma^2 e^3 + \frac{135}{8}\gamma^2 ee'^2 + 68\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{4}e - \frac{9}{2}\gamma^2 e - \frac{3}{32}e^3 + \frac{27}{8}ee'^2 + 4e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{7}{4}e\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{23}), (F'_{23}), (G'_{23}), (H'_{23}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{23})\left\{\begin{aligned} h+g+l = (h) - (g) + (\theta_0 + h_0 - g_0)(t+c) \\ + \left[\left(\frac{99}{4}\gamma_0^2 e_0 - \frac{81}{4}\gamma_0^4 e_0 - \frac{405}{32}\gamma_0^2 e_0^3 + \frac{297}{8}\gamma_0^2 e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{437}{16}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{23})\left\{\begin{aligned} h = (h) + h_0(t+c) \\ - \left[\left(\frac{9}{4}e_0 - \frac{9}{2}\gamma_0^2 e_0 - \frac{3}{32}e_0^3 + \frac{27}{8}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{19}{16}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{7}{4}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c) \\ - \frac{81}{32}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \theta + h - g.$$

Les six formules (E'_{23}), (F'_{23}), (G'_{23}), (H'_{23}), (K_{23}), (L_{23}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (58); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e \cos(2g+l)$ par

$$\left(\frac{9}{2}\gamma^2 - \frac{9}{4}e^2 - \frac{9}{2}\gamma^4 - \frac{93}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 - \frac{27}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{19}{8}\gamma^2 - \frac{19}{16}e^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{7}{2}\gamma^2 - \frac{7}{4}e^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+ \left[e - \frac{81}{4}\gamma^2 e \frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2g+l)$$

$$+ \left[\left(\frac{9}{4}e^2 + \frac{147}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{19}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{4}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(2g+l)$$

$$+ \frac{81}{16}e^3\frac{n'^4}{n^4}\cos 3(2g+l);$$

$e \sin(2g+l)$ par

$$e\sin(2g+l)$$

$$+ \left[\left(\frac{9}{4}e^2 + \frac{147}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{19}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{4}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2g+l)$$

$$+ \frac{81}{16}e^3\frac{n'^4}{n^4}\sin 3(2g+l).$$

a par

$$a\left\{1 - \left[\left(9\gamma^2 e - 9\gamma^4 e - \frac{39}{8}\gamma^2 e^3 + \frac{27}{2}\gamma^2 e e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{19}{4}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4} + 7\gamma^2 e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2g+l)\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \left[\left(\frac{9}{2}\gamma^2 e - \frac{27}{2}\gamma^4 e - \frac{3}{16}\gamma^2 e^3 + \frac{27}{4}\gamma^2 e e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{19}{8}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{2}\gamma^2 e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2g+l);$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l + \left[\left(\frac{99}{4}\gamma^2 e - \frac{81}{4}\gamma^4 e - \frac{405}{32}\gamma^2 e^3 + \frac{297}{8}\gamma^2 e e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{437}{16}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2g+l);$$

h par

$$h - \left[\left(\frac{9}{4} e - \frac{9}{2} \gamma^2 e - \frac{3}{32} e^3 + \frac{27}{8} e e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{19}{16} e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{4} e \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin(2g + l)$$

$$- \frac{81}{32} e^2 \frac{n'^4}{n^4} \sin 2(2g + l).$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left(\frac{81}{4} \gamma^4 - \frac{81}{2} \gamma^2 e^2 + \frac{81}{8} e^4 \right) \frac{n'^4}{n^4} + 9 \gamma^2 e \frac{n'^2}{n^2} \cos(2g + l);$$

$e . \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} l$ * par

$$\left[\left(\frac{9}{2} \gamma^2 - \frac{9}{2} \gamma^4 + \frac{69}{8} \gamma^2 e^2 + \frac{27}{4} \gamma^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{19}{8} \gamma^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{2} \gamma^2 \frac{n'^5}{n^5} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (2g + 2l)$$

$$+ \left[e - \left(\frac{81}{4} \gamma^2 e - \frac{81}{16} e^3 \right) \frac{n'^4}{n^4} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} l$$

$$- \frac{177}{16} \gamma^2 e^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{ \begin{matrix} + \cos \\ - \sin \end{matrix} \right\} 2g;$$

$e^2 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2l$ par

$$\left[\left(9 \gamma^2 e - 9 \gamma^4 e + \frac{69}{4} \gamma^2 e^3 + \frac{27}{2} \gamma^2 e e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{19}{4} \gamma^2 e \frac{n'^4}{n^4} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (2g + 3l)$$

$$+ e^2 \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} 2l$$

$$- \frac{177}{8} \gamma^2 e^3 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \left\{ \begin{matrix} + \cos \\ - \sin \end{matrix} \right\} (2g - l);$$

$\gamma \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (g + l)$ par

$$- \left[\left(\frac{9}{4} \gamma e + \frac{27}{4} \gamma^3 e - \frac{3}{32} \gamma e^3 + \frac{27}{8} \gamma e e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{19}{16} \gamma e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{7}{4} \gamma e \frac{n'^5}{n^5} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} + \cos \\ - \sin \end{matrix} \right\} g$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$+\left[\gamma-\frac{81}{32}\gamma e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(g+l)$$

$$+\frac{27}{2}\gamma^3 e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(3g+2l);$$

$$\gamma^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(g+l)\ \text{par}$$

$$-\left[\left(\frac{9}{2}\gamma^2 e+\frac{27}{2}\gamma^4 e-\frac{3}{16}\gamma^2 e^3+\frac{27}{4}\gamma^2 ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{19}{8}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}l$$

$$+\gamma^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2g+2l)$$

$$+27\gamma^4 e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(4g+3l).$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{23}), (F'_{23}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{23}), (H'_{23}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 491),

$$L_1=-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{9}{2}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2},$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 491)

$$+\sqrt{a\mu}\left(-\frac{81}{8}\gamma^4+\frac{81}{4}\gamma^2 e^2-\frac{81}{16}e^4\right)\frac{n'^4}{n^4};$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 492)

$$+\sqrt{a\mu}\left(-\frac{81}{8}\gamma^4+\frac{81}{4}\gamma^2 e^2-\frac{81}{16}e^4\right)\frac{n'^4}{n^4}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1=\frac{1}{e}\left(-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{9}{2}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left(\frac{81}{8}\gamma^4 - \frac{81}{8}\gamma^2 e^2\right)\frac{n'^4}{n^4}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pag. 499 et 500) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 23ᵉ opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (58) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV, avec l'indication [23 . . . . 1, 58]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
L = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{147}{8}\gamma^4 + 90\,\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2\right.\\
&\qquad \left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\,\gamma^2 - 115\,e^2 + 135\,e'^2 + 60\,\gamma^4 + 419\,\gamma^2 e^2 - 540\,\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{483527}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{69669}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8\\
&+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{147}{8}\gamma^4 + \frac{909}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2\right.\\
&\qquad \left. - \frac{84005}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(10 - 40\,\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\ & + \Big(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - \frac{201}{8}\gamma^4 + \frac{875}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2 \\ & \qquad - \frac{84005}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \Big(10 - \frac{59}{3}\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135\,e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{2547}{64} - \frac{1319}{12}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\ & + \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ & 2 + \Big(\frac{359}{8} - \frac{291}{2}\gamma^2 + \frac{45371}{128}e^2 + \frac{5385}{16}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} + \Big(140 - 396\gamma^2 + \frac{18411}{8}e^2 + 1890\,e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\ & + \frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \Big(\frac{387}{4} - \frac{1227}{4}\gamma^2 - \frac{24277}{128}e^2 + \frac{5805}{8}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} + \Big(420 - 1476\gamma^2 - \frac{5997}{8}e^2 + 5670\,e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\ & + \frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \Big(\frac{33}{4} - \frac{147}{4}\gamma^2 - \frac{687}{8}e^2 + \frac{495}{8}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} + \Big(40 - 120\gamma^2 - 399\,e^2 + 540\,e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\ & + \frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{1 - e^2 + \Big(\frac{927}{32} - \frac{531}{8}\gamma^2 - \frac{39173}{128}e^2 + \frac{13905}{64}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \Big(\frac{927}{32} - \frac{531}{8}\gamma^2 - \frac{60957}{128}e^2 + \frac{13905}{64}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{597}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 n\gamma}\cdot 6\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\Big\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} + \frac{391}{8}\gamma^2 - \frac{771}{64}e^2 + \frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{43}{16} - \frac{207}{4}\gamma^2 - \frac{771}{64}e^2 + \frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

24^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (175) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (175)*, dans lequel l'argument est $2h + l - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2$$

$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

$$- \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{147}{4}\gamma^4 + \frac{309}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2\right.$$

$$\left. + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \left(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$- \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4620391}{18432}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{8991}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\frac{3}{2}\gamma^2 e + \frac{3}{2}\gamma e + \frac{3}{16}\gamma^2 e^3 + \frac{15}{4}\gamma^2 ee'^2 + \frac{117}{4}\gamma^2 ee'^2\frac{n'}{n} - \frac{39}{4}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{73}{2}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n}\Big\}$$

$$\times \cos(2h + l - 2h' - 2g' - 2l').$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (175), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt-trois premières opérations.

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 1, \quad i' = 0, \quad i'' = 2, \quad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt}, \qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0.$$

La seconde de ces équations montre que G est constant ; et si l'on intègre la première, il vient

$$\mathrm{H} = 2\mathrm{L} + (\mathrm{H}),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie G aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{24})\left\{\begin{aligned} a = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Big\{ 1 + e^2 + e^4 + e^6 - \left[\frac{37}{8} + \frac{33}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}} + \frac{621}{32}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} \\ - 20\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{24})\quad \gamma^2 = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big\{1 + 5\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Big\} - \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}e^4 - \frac{5}{16}e^6 + \frac{841}{64}e^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = \mathrm{G}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{24})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\Big\{\frac{3}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}} + \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\right)^2 + \frac{33}{32}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e^2 \\ - \frac{15}{8}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e'^2 + \frac{39}{32}e^4 - \frac{15}{8}e^2e'^2 \\ - \left[\frac{117}{8}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e'^2 + \frac{117}{8}e^2e'^2\right]\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} + \left[\frac{39}{8}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}} + \frac{39}{8}e^2\right]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu} \\ - \left[\frac{73}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}} + \frac{73}{4}e^2\right]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^4}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + \frac{dl}{dt} - 2n' = -\frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dH} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, … données à la suite de la 23^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(D_{24})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = {} & \frac{\mu^2}{G^3}\left\{1 - \frac{3}{2}e^2 - 2\frac{n'G^3}{\mu^2} - \frac{13}{4}\frac{n'^2G^6}{\mu^4}\right\} \\
& - \frac{n'^2G^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\left\{\frac{3}{4}\frac{G+(H)}{G} + \frac{9}{4}e^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{G+(H)}{G}\right)^2 + \frac{171}{32}\frac{G+(H)}{G}e^2\right. \\
& \qquad - \frac{15}{8}\frac{G+(H)}{G}e'^2 + \frac{267}{32}e^4 - \frac{45}{8}e^2e'^2 \\
& \qquad - \left[\frac{117}{8}\frac{G+(H)}{G}e'^2 + \frac{351}{8}e^2e'^2\right]\frac{n'G^3}{\mu^2} + \left[\frac{39}{8}\frac{G+(H)}{G} + \frac{117}{8}e^2\right]\frac{n'^2G^6}{\mu^4} \\
& \qquad \left. - \left[\frac{73}{4}\frac{G+(H)}{G} + \frac{219}{4}e^2\right]\frac{n'^3G^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{24}), (D_{24}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que L) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(E_{24})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \left[\frac{3}{4}\frac{G+(H)}{G} + \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{G+(H)}{G}\right)^2 + \frac{87}{16}\frac{G+(H)}{G}e_0^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{15}{8}\frac{G+(H)}{G}e'^2 + \frac{261}{32}e_0^4 - \frac{15}{4}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2G^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{3}{2}\frac{G+(H)}{G} + 3e_0^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{G+(H)}{G}\right)^2 + \frac{123}{8}\frac{G+(H)}{G}e_0^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{147}{8}\frac{G+(H)}{G}e'^2 + \frac{369}{16}e_0^4 - \frac{147}{4}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^3G^9}{\mu^6} \\
& + \left[\frac{165}{16}\frac{G+(H)}{G} + \frac{165}{8}e_0^2\right]\frac{n'^4G^{12}}{\mu^8} + \left[\frac{29}{4}\frac{G+(H)}{G} + \frac{29}{2}e_0^2\right]\frac{n'^5G^{15}}{\mu^{10}} \\
& + \left\{e_0 + \left[\frac{9}{8}\frac{G+(H)}{G}e_0 + \frac{9}{8}e_0^3\right]\frac{n'^4G^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+c)
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$
(\mathrm{E}_{24})\left\{\begin{aligned}
&-\Big\{\Big[\frac{3}{4}e_0^2+\frac{105}{32}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2+\frac{93}{16}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&\quad+\Big[\frac{3}{2}e_0^2+\frac{141}{16}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2+\frac{129}{8}e_0^4-\frac{147}{8}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad+\frac{165}{16}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\frac{29}{4}e_0^2\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{9}{16}e_0^3\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\cos 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{24})\left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&-\Big\{\Big[\frac{3}{4}e_0^2+\frac{105}{32}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2+\frac{93}{16}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&\quad+\Big[\frac{3}{2}e_0^2+\frac{141}{16}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2+\frac{129}{8}e_0^4-\frac{147}{8}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad+\frac{165}{16}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\frac{29}{4}e_0^2\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{9}{16}e_0^3\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=\frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\Big\{1-\frac{3}{2}e_0^2-2\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2}-\frac{13}{4}\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\Big\}.$$

Si de ces deux formules (E_{24}), (F_{24}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{24}), (B_{24}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_{24})\left\{\begin{aligned}
&a=\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Big\{1+e_0^2+e_0^4+e_0^6-\Big[\frac{37}{8}+\frac{33}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{621}{32}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\Big]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad\qquad-20\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\\
&+\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Big\{\Big[\frac{3}{2}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{3}{2}e_0^3+\frac{3}{4}\Big(\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big)^2e_0+\frac{117}{16}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^3\\
&\qquad\qquad-\frac{15}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0e'^2+\frac{123}{16}e_0^5-\frac{15}{4}e_0^3e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&\quad+\Big[3\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+3e_0^3+\frac{3}{2}\Big(\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big)^2e_0+\frac{153}{8}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^3\\
&\qquad\qquad-\frac{147}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0e'^2+\frac{159}{8}e_0^5-\frac{147}{4}e_0^3e'^2\Big]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&\quad+\Big[\frac{165}{8}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{165}{8}e_0^3\Big]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\Big[\frac{29}{2}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{29}{2}e_0^3\Big]\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{H}_{24})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = &-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\left\{1+5\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right\}-\frac{1}{2}e_0^2-\frac{3}{8}e_0^4-\frac{5}{16}e_0^6+\frac{841}{64}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&-\left\{\left[\frac{3}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{3}{4}e_0^3+\frac{3}{8}\left(\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\right)^2e_0+\frac{105}{32}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^3\right.\right.\\
&\qquad\left.-\frac{15}{8}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0e'^2+\frac{111}{32}e_0^5-\frac{15}{8}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&+\left[\frac{3}{2}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{3}{2}e_0^3+\frac{3}{4}\left(\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\right)^2e_0+\frac{141}{16}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^3\right.\\
&\qquad\left.-\frac{147}{8}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0e'^2+\frac{147}{16}e_0^5-\frac{147}{8}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&\left.+\left[\frac{165}{16}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{165}{16}e_0^3\right]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\left[\frac{29}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{29}{4}e_0^3\right]\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$a_0=\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1+e_0^2+e_0^4+e_0^6-\left[\frac{37}{8}+\frac{33}{4}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{621}{32}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}-20\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\},$$

$$\gamma_0^2=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{G}+(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\left\{1+5\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right\}-\frac{1}{2}e_0^2-\frac{3}{8}e_0^4-\frac{5}{16}e_0^6+\frac{841}{64}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}.$$

De ces relations nous pouvons tirer G et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer G et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{24}), (F_{24}), (G_{24}), (H_{24}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{24})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = &-\left(\frac{3}{2}\gamma_0^2-\frac{3}{4}e_0^2-\frac{3}{2}\gamma_0^4+\frac{39}{8}\gamma_0^2e_0^2-\frac{15}{4}\gamma_0^2e'^2-\frac{9}{32}e_0^4+\frac{15}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&-\left(3\gamma_0^2-\frac{3}{2}e_0^2-3\gamma_0^4+\frac{57}{4}\gamma_0^2e_0^2-\frac{147}{4}\gamma_0^2e'^2-\frac{9}{16}e_0^4+\frac{147}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&-\left(\frac{165}{8}\gamma_0^2-\frac{165}{16}e_0^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}-\left(\frac{29}{2}\gamma_0^2-\frac{29}{4}e_0^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\
&+\left[e_0-\frac{9}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(E'_{24})\left\{\begin{aligned}
&\qquad -\left[\left(\frac{3}{4}e_0^2-\frac{105}{16}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{32}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\quad \left.+\left(\frac{3}{2}e_0^2-\frac{141}{8}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{16}e_0^4-\frac{147}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{165}{16}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{29}{4}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos 2\theta_0(t+c)\\
&\qquad +\frac{9}{16}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{24})\left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&\qquad -\left[\left(\frac{3}{4}e_0^2-\frac{105}{16}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{32}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\quad \left.+\left(\frac{3}{2}e_0^2-\frac{141}{8}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{16}e_0^4-\frac{147}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{165}{16}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{29}{4}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+c)\\
&\qquad +\frac{9}{16}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{24})\left\{\begin{aligned}
&a=a_0\left\{1-\left[\left(3\gamma_0^2e_0-3\gamma_0^4e_0-\frac{3}{8}\gamma_0^2e_0^3-\frac{15}{2}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\right.\\
&\qquad\qquad +\left(6\gamma_0^2e_0-6\gamma_0^4e_0-\frac{3}{4}\gamma_0^2e_0^3-\frac{147}{2}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left.+\frac{165}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+29\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\};
\end{aligned}\right.$$

$$(H'_{24})\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2=\gamma_0^2+\left[\left(\frac{3}{2}\gamma_0^2e_0-\frac{3}{2}\gamma_0^4e_0+\frac{9}{16}\gamma_0^2e_0^3-\frac{15}{4}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\quad +\left(3\gamma_0^2e_0-3\gamma_0^4e_0+\frac{9}{8}\gamma_0^2e_0^3-\frac{147}{4}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad\qquad \left.+\frac{165}{8}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{29}{2}\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0=n_0\left[1-2\frac{n'}{n_0}-\frac{13}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\ + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{15}{4}\gamma^2 e - \frac{9}{4}\gamma^4 e - \frac{27}{32}\gamma^2 e^3 - \frac{75}{8}\gamma^2 ee'^2 + \frac{663}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4}e - \frac{3}{2}\gamma^2 e + \frac{9}{32}e^3 - \frac{15}{8}ee'^2 - \frac{117}{8}ee'^2\frac{n'}{n} + \frac{39}{8}e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{73}{4}e\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{24}), (F'_{24}), (G'_{24}), (H'_{24}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{24})\left\{\begin{aligned}h+g+l = -(h)+(g)+2h'+2g'+2l'+(\theta_0-h_0+g_0)(t+c)\\ +\left[\left(\frac{33}{4}\gamma_0^2 e_0 - \frac{27}{4}\gamma_0^4 e_0 - \frac{45}{32}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{165}{8}\gamma_0^2 e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\ \left. + \frac{51}{2}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{3795}{16}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_{24})\left\{\begin{aligned}h = (h) + h_0(t+c)\\ -\left[\left(\frac{3}{4}e_0 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0 + \frac{9}{32}e_0^3 - \frac{15}{8}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\ \left. +\left(\frac{3}{2}e_0 - 3\gamma_0^2 e_0 + \frac{9}{16}e_0^3 - \frac{147}{8}e_0 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{165}{16}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{29}{4}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c)\\ + \frac{9}{32}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \theta - h + g + 2h' + 2g' + 2l'.$$

Les six formules (E'_{24}), (F'_{24}), $G'_{24})$, (H'_{24}), (K_{24}), (L_{24}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (175); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e \cos(2h + l - 2h' - 2g' - 2l')$ par

$$- \left(\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 + \frac{39}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{9}{32}e^4 + \frac{15}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \left(3\gamma^2 - \frac{3}{2}e^2 - 3\gamma^4 + \frac{57}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{147}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{9}{16}e^4 + \frac{147}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$- \left(\frac{165}{8}\gamma^2 - \frac{165}{16}e^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{29}{2}\gamma^2 - \frac{29}{4}e^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+ \left[e - \frac{9}{4}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$- \left[\left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{105}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{32}e^4 - \frac{15}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{2}e^2 - \frac{141}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{16}e^4 - \frac{147}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{165}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{29}{4}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(2h + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \frac{9}{16}e^3\frac{n'^4}{n^4}\cos 3(2h + l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$e \sin(2h + l - 2h' - 2g' - 2l')$ par

$$e \sin(2h + l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$- \left[\left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{105}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{32}e^4 - \frac{15}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{2}e^2 - \frac{141}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{16}e^4 - \frac{147}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{165}{16}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{29}{4}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h + l - 2g' - 2h' - 2l')$$

$$+ \frac{9}{16}e^3\frac{n'^4}{n^4}\sin 3(2h + l - 2h' - 2g' - 2l');$$

a par

$$a\left\{1 - \left[\left(3\gamma^2 e - 3\gamma^4 e - \frac{3}{8}\gamma^2 e^3 - \frac{15}{2}\gamma^2 e e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\right.$$

$$+ \left(6\gamma^2 e - 6\gamma^4 e - \frac{3}{4}\gamma^2 e^3 - \frac{147}{2}\gamma^2 e e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$\left.\left. + \frac{165}{4}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4} + 29\gamma^2 e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h + l - 2h' - 2g' - 2l')\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2 + \Bigg[\left(\frac{3}{2}\gamma^2 e - \frac{3}{2}\gamma^4 e + \frac{9}{16}\gamma^2 e^3 - \frac{15}{4}\gamma^2 e e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+ \left(3\gamma^2 e - 3\gamma^4 e + \frac{9}{8}\gamma^2 e^3 - \frac{147}{4}\gamma^2 e e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+ \frac{165}{8}\gamma^2 e \frac{n'^4}{n^4} + \frac{29}{2}\gamma^2 e \frac{n'^5}{n^5}\Bigg] \cos(2h + l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l + \Bigg[\left(\frac{33}{4}\gamma^2 e - \frac{27}{4}\gamma^4 e - \frac{45}{32}\gamma^2 e^3 - \frac{165}{8}\gamma^2 e e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+ \frac{51}{2}\gamma^2 e \frac{n'^3}{n^3} + \frac{3795}{16}\gamma^2 e \frac{n'^4}{n^4}\Bigg] \sin(2h + l - 2h' - 2g' - 2l');$$

h par

$$h - \Bigg[\left(\frac{3}{4}e - \frac{3}{2}\gamma^2 e + \frac{9}{32}e^3 - \frac{15}{8}e e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+ \left(\frac{3}{2}e - 3\gamma^2 e + \frac{9}{16}e^3 - \frac{147}{8}e e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{165}{16}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{29}{4}e\frac{n'^5}{n^5}\Bigg] \sin(2h + l - 2h' - 2g' - 2l')$$
$$+ \frac{9}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2h + l - 2h' - 2g' - 2l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left(\frac{9}{4}\gamma^4 - \frac{9}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{8}e^4\right)\frac{n'^4}{n^4} - \left[3\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} + 6\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2h + l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$e \cdot \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} l$ * par

$$-\Bigg[\left(\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 + \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+ \left(3\gamma^2 - 3\gamma^4 + \frac{45}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{147}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{165}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{29}{2}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}\Bigg] \cdot \begin{Bmatrix}+\cos\\ -\sin\end{Bmatrix}(2h - 2h' - 2g' - 2l')$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$+\Big[e-\Big(\frac{9}{4}\gamma^2 e-\frac{9}{16}e^3\Big)\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} l$$

$$+\Big[\frac{81}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{117}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}\Big]\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\sin(2h+2l-2h'-2g'-2l');$$

$e^2\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 2l$ par

$$\begin{aligned}-\Big[\Big(3\gamma^2 e-3\gamma^4 e+\frac{27}{4}\gamma^2 e^3-\frac{15}{2}\gamma^2 ee'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}&\\ +6\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{165}{4}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cdot\begin{Bmatrix}+\cos\\ -\sin\end{Bmatrix}(2h-l-2h'-2g'-2l')&\end{aligned}$$

$$+e^2\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 2l$$

$$+\frac{81}{8}\gamma^2 e^3\frac{n'^2}{n^2}\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(2h+3l-2h'-2g'-2l');$$

$\gamma\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(g+l)$ par

$$\begin{aligned}\Big[\Big(\frac{3}{4}\gamma e+3\gamma^3 e+\frac{9}{32}\gamma e^3-\frac{15}{8}\gamma ee'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}&\\ +\Big(\frac{3}{2}\gamma e+\frac{21}{2}\gamma^3 e+\frac{9}{16}\gamma e^3-\frac{147}{8}\gamma ee'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}&\\ +\frac{165}{16}\gamma e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{29}{4}\gamma e\frac{n'^5}{n^5}\Big]\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(2h+g+2l-2h'-2g'-2l')&\end{aligned}$$

$$+\Big[\gamma-\frac{9}{32}\gamma e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(g+l)$$

$$-\Big[\frac{15}{4}\gamma^3 e\frac{n'^2}{n^2}+12\gamma^3 e\frac{n'^3}{n^3}\Big]\cdot\begin{Bmatrix}+\cos\\ -\sin\end{Bmatrix}(2h-g-2h'-2g'-2l');$$

$\gamma^2\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} 2(g+l)$ par

$$\begin{aligned}\Big[\Big(\frac{3}{2}\gamma^2 e+6\gamma^4 e+\frac{9}{16}\gamma^2 e^3-\frac{15}{4}\gamma^2 ee'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}&\\ +3\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{165}{8}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')&\end{aligned}$$

$$+\gamma^2\cdot\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(2g+2l)$$

$$-\frac{15}{2}\gamma^4 e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\begin{Bmatrix}+\cos\\ -\sin\end{Bmatrix}(2h-2g-l-2h'-2g'-2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{24}), (F'_{24}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{24}), (H'_{24}), dans les expressions de L, G, H, en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0, et n_0,

$$L_0 = \text{ancienne valeur de L (page 502)},$$

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{3}{2}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} - 3\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

$$G_0 = \text{ancienne valeur de G (page 502)}$$

$$+\sqrt{a\mu}\left(-\frac{9}{8}\gamma^4 + \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{16}e^4\right)\frac{n'^4}{n^4};$$

$$H_0 = \text{ancienne valeur de H (page 503)}$$

$$+\sqrt{a\mu}\left(-\frac{9}{8}\gamma^4 + \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{16}e^4\right)\frac{n'^4}{n^4}.$$

D'ailleurs en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{\left(\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + (3\gamma^2 - 3e^2)\frac{n'^3}{n^3}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{\left(-\frac{9}{8}\gamma^4 + \frac{9}{8}\gamma^2 e^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(-\frac{9}{2}\gamma^4 + \frac{9}{2}\gamma^2 e^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du nº **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 511 et 512) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 24ᵉ opération, et y ajoutant

$$+2n'(L - L_0) - 2n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (175) de R, joint à la quantité $+2n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-2n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV, avec l'indication [24 . . . 1, 175]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\Big\{1 + \Big(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{729}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2$$

$$+ \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \Big(10 - 40\gamma^2 - 115 e^2 + 135 e'^2 + \frac{111}{2}\gamma^4 + \frac{847}{2}\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+ \Big(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \Big(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+ \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{483527}{1728}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{69669}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \Big(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{69}{4}\gamma^4 + \frac{945}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2$$

$$- \frac{84581}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \Big(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \Big(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - \frac{57}{2}\gamma^4 + \frac{1019}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2$$

$$- \frac{84581}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(10-\frac{59}{3}\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{2547}{64}-\frac{1319}{12}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{an}\Big\{2+\left(\frac{359}{8}-150\,\gamma^2+\frac{45371}{128}e^2+\frac{5385}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(140-414\gamma^2+\frac{18411}{8}e^2+1890\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{387}{4}-\frac{627}{2}\gamma^2-\frac{24133}{128}e^2+\frac{5805}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(420-1503\,\gamma^2-\frac{5961}{8}e^2+5670\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}}=-\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{33}{4}-\frac{69}{2}\gamma^2-87\,e^2+\frac{495}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(40-111\,\gamma^2-\frac{807}{2}e^2+540\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-e^2+\left(\frac{927}{32}-\frac{513}{8}\gamma^2-\frac{39461}{128}e^2+\frac{13905}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6+\left(\frac{927}{32}-\frac{513}{8}\gamma^2-\frac{61317}{128}e^2+\frac{13905}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}}=\frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{579}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{57}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}}=\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1-2\gamma^2+\frac{1}{2}e^2-\gamma^2e^2+\frac{3}{8}e^4-\frac{3}{4}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6+\left(\frac{43}{16}+\frac{337}{8}\gamma^2-\frac{699}{64}e^2+\frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}}=-\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6+\left(\frac{43}{16}-54\,\gamma^2-\frac{699}{64}e^2+\frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

25^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (188) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (188)*, dans lequel l'argument est $2h - l - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2\right. \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{69}{2}\gamma^4 + \frac{627}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(15 - 60\gamma^2 - 162 e^2 + \frac{405}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4620391}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{8991}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\right\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{2}\gamma^2 e + \frac{3}{2}\gamma^4 e + \frac{3}{16}\gamma^2 e^3 + \frac{15}{4}\gamma^2 e e'^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e e'^2\frac{n'}{n} - \frac{111}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{319}{4}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}\right\} \\
& \qquad\qquad \times \cos(2h - l - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = -1, \quad i' = 0, \quad i'' = 2, \quad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$-\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt}, \qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (188), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt-quatre premières opérations.

La seconde de ces équations montre que G est constant, et si l'on intègre la première, il vient

$$\mathrm{H} = -2\mathrm{L} + (\mathrm{H}),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie G aux variables a, e, γ peuvent être régardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{25})\quad a = \frac{\mathrm{G}^7}{\mu}\Big\{1 + e^2 + e^4 + e^6 - \left[\frac{37}{8} - \frac{33}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}} + \frac{93}{32}e^2 + \frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - 20\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\Big\},$$

$$(\mathrm{B}_{25})\quad \gamma^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big\{1 + 5\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Big\} + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{841}{64}e^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = \mathrm{G}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{1001}{64}e^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{25})\quad \begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\Big\{&\frac{3}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}} + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{8}\left(\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\right)^2 - \frac{15}{32}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e^2 \\ &- \frac{15}{8}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e'^2 + \frac{15}{32}e^4 - \frac{15}{8}e^2e'^2 \\ &+ \left[\frac{9}{8}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e'^2 + \frac{9}{8}e^2e'^2\right]\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} + \left[\frac{111}{16}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}} + \frac{111}{16}e^2\right]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ &+ \left[\frac{319}{8}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}} + \frac{319}{8}e^2\right]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} - \frac{dl}{dt} - 2n' = \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{L}}$, $\dfrac{da}{d\mathrm{H}}$, $\dfrac{de}{d\mathrm{L}}$, ... données à la suite de la

24^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$
(\mathrm{D}_{25})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = &-\frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\Big\{1-\frac{3}{2}e^2+2\,\frac{n'\,\mathrm{G}^3}{\mu^2}-\frac{1}{4}\,\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\Big\}\\
&-\frac{n'^2\,\mathrm{G}^3}{\mu^2}\cdot\frac{1}{e}\Big\{\frac{3}{4}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{9}{4}e^2-\frac{3}{8}\Big(\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big)^2+\frac{27}{32}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e^2\\
&\qquad-\frac{15}{8}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e'^2+\frac{147}{32}e^4-\frac{45}{8}e^2e'^2\\
&\qquad+\Big[\frac{9}{8}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e'^2+\frac{27}{8}e^2e'^2\Big]\frac{n'\,\mathrm{G}^3}{\mu^2}+\Big[\frac{111}{16}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{333}{16}e^2\Big]\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&\qquad+\Big[\frac{319}{8}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{957}{8}e^2\Big]\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{25}), (D_{25}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que $-\mathrm{L}$) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs, par leur forme, dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$
(\mathrm{E}_{25})\left\{
\begin{aligned}
e\cos\theta = &-\Big[\frac{3}{4}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{3}{2}e_0^2-\frac{3}{8}\Big(\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big)^2+\frac{39}{16}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2\\
&\qquad-\frac{15}{8}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e'^2+\frac{189}{32}e_0^4-\frac{15}{4}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&+\Big[\frac{3}{2}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+3e_0^2-\frac{3}{4}\Big(\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big)^2+\frac{75}{8}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2\\
&\qquad-\frac{39}{8}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e'^2+\frac{297}{16}e_0^4-\frac{39}{4}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&-\Big[\frac{81}{8}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{81}{4}e_0^2\Big]\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}-\Big[\frac{77}{4}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{77}{2}e_0^2\Big]\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\\
&+\Big\{e_0+\Big[\frac{9}{8}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{9}{8}e_0^3\Big]\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\Big\}\cos\theta_0(t+c)\\
&+\Big\{\Big[\frac{3}{4}e_0^2+\frac{57}{32}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2+\frac{69}{16}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\Big[\frac{3}{2}e_0^2+\frac{93}{16}\cdot\frac{3\,\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2+\frac{105}{8}e_0^4-\frac{39}{8}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&\qquad+\frac{81}{8}e_0^2\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\frac{77}{4}e_0^2\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{9}{16}e_0^3\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\cos 3\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{F}_{25})\quad\left\{\begin{aligned}
e\sin\theta &= e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad+\Big\{\frac{3}{4}e_0^2+\frac{57}{32}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2+\frac{69}{16}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\Big[\frac{3}{2}e_0^2+\frac{93}{16}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^2+\frac{105}{8}e_0^4-\frac{39}{8}e_0^2e'^2\Big]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad+\frac{81}{8}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\frac{77}{4}e_0^2\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&\quad+\frac{9}{16}e_0^3\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=-\frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\Big\{1-\frac{3}{2}e_0^2+2\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2}-\frac{1}{4}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\Big\}.$$

Si de ces deux formules (E_{25}), (F_{25}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{25}), (B_{25}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{25})\quad\left\{\begin{aligned}
a &= \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Big\{1+e_0^2+e_0^4+e_0^6-\Big[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{93}{32}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\Big]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad-20\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\\
&\quad-\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Big\{\Big[\frac{3}{2}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{3}{2}e_0^3-\frac{3}{4}\Big(\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big)^2e_0+\frac{69}{16}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^3\\
&\qquad\qquad-\frac{15}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0e'^2+\frac{99}{16}e_0^5-\frac{15}{4}e_0^3e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\Big[3\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+3e_0^3-\frac{3}{2}\Big(\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\Big)^2e_0+\frac{105}{8}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^3\\
&\qquad\qquad-\frac{39}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0e'^2+\frac{135}{8}e_0^5-\frac{39}{4}e_0^3e'^2\Big]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
&\quad+\Big[\frac{81}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{81}{4}e_0^3\Big]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\Big[\frac{77}{2}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{77}{2}e_0^3\Big]\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{25})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\left\{1+5\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right\}+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4+\frac{5}{16}e_0^6-\frac{841}{64}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\
& -\left\{\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{3}{4}e_0^3-\frac{3}{8}\left(\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\right)^2e_0+\frac{57}{32}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^3\right.\right.\\
& \qquad\left.-\frac{15}{8}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0e'^2+\frac{87}{32}e_0^5-\frac{15}{8}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\
& -\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{3}{2}e_0^3-\frac{3}{4}\left(\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\right)^2e_0+\frac{93}{16}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0^3\right.\\
& \qquad\left.-\frac{39}{8}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0e'^2+\frac{123}{16}e_0^5-\frac{39}{8}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\
& \left.+\left[\frac{81}{8}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{81}{8}e_0^3\right]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}+\left[\frac{77}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}e_0+\frac{77}{4}e_0^3\right]\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = {} & \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1+e_0^2+e_0^4+e_0^6-\left[\frac{37}{8}-\frac{33}{4}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}+\frac{93}{32}e_0^2+\frac{555}{16}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right.\\
& \qquad\left.-20\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2547}{32}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\},\\
\gamma_0^2 = {} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3\mathrm{G}-(\mathrm{H})}{\mathrm{G}}\left\{1+5\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right\}+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4+\frac{5}{16}e_0^6-\frac{841}{64}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}.
\end{aligned}$$

De ces relations nous pouvons tirer G et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer G et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{25}), (F_{25}), (G_{25}), (H_{25}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{25})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & -\left(\frac{3}{2}\gamma_0^2+\frac{3}{4}e_0^2-\frac{3}{2}\gamma_0^4+\frac{15}{8}\gamma_0^2e_0^2-\frac{15}{4}\gamma_0^2e'^2+\frac{9}{32}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
& +\left(3\gamma_0^2+\frac{3}{2}e_0^2-3\gamma_0^4+\frac{33}{4}\gamma_0^2e_0^2-\frac{39}{4}\gamma_0^2e'^2+\frac{9}{16}e_0^4-\frac{39}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
& -\left(\frac{81}{4}\gamma_0^2+\frac{81}{8}e_0^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}-\left(\frac{77}{2}\gamma_0^2+\frac{77}{4}e_0^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5}\\
& +\left[e_0+\frac{9}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c)
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$(\mathrm{E}'_{25})\left\{\begin{aligned}
&+\left[\left(\frac{3}{4}e_0^2+\frac{57}{16}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{32}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{3}{2}e_0^2+\frac{93}{8}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{16}e_0^4-\frac{39}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{81}{8}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{77}{4}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{9}{16}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 3\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{25})\left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{3}{4}e_0^2+\frac{57}{16}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{32}e_0^4-\frac{15}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{3}{2}e_0^2+\frac{93}{8}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{16}e_0^4-\frac{39}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{81}{8}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{77}{4}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin 2\theta_0(t+c)\\
&+\frac{9}{16}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 3\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{25})\left\{\begin{aligned}
&a=a_0\left\{1-\left[\left(3\gamma_0^2e_0-3\gamma_0^4e_0-\frac{3}{8}\gamma_0^2e_0^3-\frac{15}{2}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\right.\\
&\qquad-\left(6\gamma_0^2e_0-6\gamma_0^4e_0-\frac{3}{4}\gamma_0^2e_0^3-\frac{39}{2}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad\left.\left.+\frac{81}{2}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+77\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{25})\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2=\gamma_0^2-\left[\left(\frac{3}{2}\gamma_0^2e_0-\frac{3}{2}\gamma_0^4e_0+\frac{9}{16}\gamma_0^2e_0^3-\frac{15}{4}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left(3\gamma_0^2e_0-3\gamma_0^4e_0+\frac{9}{8}\gamma_0^2e_0^3-\frac{39}{4}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{81}{4}\gamma_0^2e_0\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{77}{2}\gamma_0^2e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0=-n_0\left[1+2\frac{n'}{n_0}-\frac{1}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt}=-\frac{dR}{dL}-\frac{dR}{dG}-\frac{dR}{dH},\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{259}{16}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$+ \frac{n'^2}{n}\left[\frac{15}{4}\gamma^2 e - \frac{9}{4}\gamma^4 e - \frac{27}{32}\gamma^2 e^3 - \frac{75}{8}\gamma^2 e e'^2 + \frac{1887}{16}\gamma^2 e \frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta.$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4}e - \frac{3}{2}\gamma^2 e + \frac{9}{32}e^3 - \frac{15}{8}ee'^2 + \frac{9}{8}ee'^2\frac{n'}{n} + \frac{111}{16}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{319}{8}e\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{25}), (F'_{25}), (G'_{25}), (H'_{25}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{25})\left\{\begin{aligned}
h+g+l &= 3(h)+(g)-2h'-2g'-2l'+(-\theta_0+3h_0+g_0)(t+c)\\
&\quad -\left[\left(\frac{33}{4}\gamma_0^2 e_0 - \frac{27}{4}\gamma_0^4 e_0 - \frac{45}{32}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{165}{8}\gamma_0^2 e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad \left. - \frac{51}{2}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{1863}{8}\gamma_0^2 e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(L_{25})\left\{\begin{aligned}
h &= (h)+h_0(t+c)\\
&\quad +\left[\left(\frac{3}{4}e_0 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0 + \frac{9}{32}e_0^3 - \frac{15}{8}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad \left. -\left(\frac{3}{2}e_0 - 3\gamma_0^2 e_0 + \frac{9}{16}e_0^3 - \frac{39}{8}e_0 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{81}{8}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{77}{4}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad +\frac{9}{32}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = -\theta + 3h + g - 2h' - 2g' - 2l'.$$

Les six formules (E'_{26}), (F'_{25}), (G'_{25}), (H'_{25}), (K_{25}), (L_{25}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (188); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(2h-l-2h'-2g'-2l')$ par

$$-\left(\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^4+\frac{15}{8}\gamma^2e^2-\frac{15}{4}\gamma^2e'^2+\frac{9}{32}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(3\gamma^2+\frac{3}{2}e^2-3\gamma^4+\frac{33}{4}\gamma^2e^2-\frac{39}{4}\gamma^2e'^2+\frac{9}{16}e^4-\frac{39}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{81}{4}\gamma^2+\frac{81}{8}e^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\left(\frac{77}{2}\gamma^2+\frac{77}{4}e^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left[e+\frac{9}{4}\gamma^2e\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h-l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{57}{16}\gamma^2e^2+\frac{9}{32}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{3}{2}e^2+\frac{93}{8}\gamma^2e^2+\frac{9}{16}e^4-\frac{39}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{81}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{77}{4}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 2(2h-l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{9}{16}e^3\frac{n'^4}{n^4}\cos 3(2h-l-2h'-2g'-2l');$$

$e\sin(2h-l-2h'-2g'-2l')$ par

$$e\sin(2h-l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{57}{16}\gamma^2e^2+\frac{9}{32}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{3}{2}e^2+\frac{93}{8}\gamma^2e^2+\frac{9}{16}e^4-\frac{39}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{81}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{77}{4}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h-l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{9}{16}e^3\frac{n'^4}{n^4}\sin 3(2h-l-2h'-2g'-2l');$$

a par

$$a\left\{1-\left[\left(3\gamma^2e-3\gamma^4e-\frac{3}{8}\gamma^2e^3-\frac{15}{2}\gamma^2ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\right.$$
$$-\left(6\gamma^2e-6\gamma^4e-\frac{3}{4}\gamma^2e^3-\frac{39}{2}\gamma^2ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left.\left.+\frac{81}{2}\gamma^2e\frac{n'^4}{n^4}+77\gamma^2e\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h-l-2h'-2g'-2l')\right\};$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \Bigg[\left(\frac{3}{2}\gamma^2 e - \frac{3}{2}\gamma^4 e + \frac{9}{16}\gamma^2 e^3 - \frac{15}{4}\gamma^2 ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \left(3\gamma^2 e - 3\gamma^4 e + \frac{9}{8}\gamma^2 e^3 - \frac{39}{4}\gamma^2 ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \frac{81}{4}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{77}{2}\gamma^2 e\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\cos(2h - l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \Bigg[\left(\frac{33}{4}\gamma^2 e - \frac{27}{4}\gamma^4 e - \frac{45}{32}\gamma^2 e^3 - \frac{165}{8}\gamma^2 ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \frac{51}{2}\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3} + \frac{1863}{8}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(2h - l - 2h' - 2g' - 2l');$$

h par

$$h + \Bigg[\left(\frac{3}{4}e - \frac{3}{2}\gamma^2 e + \frac{9}{32}e^3 - \frac{15}{8}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \left(\frac{3}{2}e - 3\gamma^2 e + \frac{9}{16}e^3 - \frac{39}{8}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{81}{8}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{77}{4}e\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\sin(2h - l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \frac{9}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2h - l - 2h' - 2g' - 2l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left(\frac{9}{4}\gamma^4 + \frac{9}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{8}e^4\right)\frac{n'^4}{n^4} - \left[3\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} - 6\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2h - l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$e \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} l$* par

$$- \Bigg[\left(\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 + \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \left(3\gamma^2 - 3\gamma^4 + \frac{45}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{39}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{81}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{77}{2}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}\Bigg] \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2h - 2h' - 2g - 2l')$$

Cette formule se continue a la page suivante.

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$+\left[e+\left(\frac{9}{4}\gamma^2 e+\frac{9}{16}e^3\right)\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} l$$

$$+\left[\frac{81}{16}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{117}{8}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}+\cos\\ -\sin\end{matrix}\right\}(2h-2l-2h'-2g'-2l');$$

$+e^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2l$ par

$$-\left[\left(3\gamma^2 e-3\gamma^4 e+\frac{27}{4}\gamma^2 e^3-\frac{15}{2}\gamma^2 ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-6\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{81}{2}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2h+l-2h'-2g'-2l')$$

$$+e^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2l$$

$$+\frac{81}{8}\gamma^2 e^3\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}+\cos\\ -\sin\end{matrix}\right\}(2h-3l-2h'-2g'-2l');$$

$\gamma\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(g+l)$ par

$$\begin{aligned}-\Bigg[&\left(\frac{3}{4}\gamma e+3\gamma^3 e+\frac{9}{32}\gamma e^3-\frac{15}{8}\gamma ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\ &-\left(\frac{3}{2}\gamma e+\frac{21}{2}\gamma^3 e+\frac{9}{16}\gamma e^3-\frac{39}{8}\gamma ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\ &\qquad+\frac{81}{8}\gamma e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{77}{4}\gamma e\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2h+g-2h'-2g'-2l')\end{aligned}$$

$$+\left[\gamma-\frac{9}{32}\gamma e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(g+l)$$

$$+\left[\frac{15}{4}\gamma^3 e\frac{n'^2}{n^2}-12\gamma^3 e\frac{n'^3}{n^3}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}+\cos\\ -\sin\end{matrix}\right\}(2h-g-2l-2h'-2g'-2l');$$

$\gamma^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(g+l)$ par

$$\begin{aligned}-\Bigg[&\left(\frac{3}{2}\gamma^2 e+6\gamma^4 e+\frac{9}{16}\gamma^2 e^3-\frac{15}{4}\gamma ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\ &\qquad-3\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{81}{4}\gamma^2 e\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')\end{aligned}$$

$$+\gamma^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(2g+2l)$$

$$+\frac{15}{2}\gamma^4 e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\left\{\begin{matrix}+\cos\\ -\sin\end{matrix}\right\}(2h-2g-3l-2h'-2g'-2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{25}), (F'_{25}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{25}), (H'_{25}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 515),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{3}{2}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2} + 3\gamma^2 e\frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 515)

$$+\sqrt{a\mu}\left(-\frac{9}{8}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{16}e^4\right)\frac{n'^4}{n^4};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 515)

$$+\sqrt{a\mu}\left(-\frac{9}{8}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{16}e^4\right)\frac{n'^4}{n^4}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\left\{\left(\frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - (3\gamma^2 + 3e^2)\frac{n'^3}{n^3}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{9}{8}\gamma^4 + \frac{9}{8}\gamma^2 e^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{9}{2}\gamma^4 + \frac{9}{2}\gamma^2 e^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 524 et 525) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 25^e^ opération, et y ajoutant

$$-2n'(L - L_0) + 2n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (188) de R, joint à la quantité $-2n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$+2n'.\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [25 . . . 1,188]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$L = \sqrt{a\mu}\,\Big\{1 + \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{105}{4}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{129}{8}\gamma^4 + 90\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right.$$
$$\left. + \frac{28549}{1024}e^4 - \frac{1575}{8}e^2 e'^2 + \frac{3885}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+ \left(10 - 40\gamma^2 - 115e^2 + 135e'^2 + 60\gamma^4 + 428\gamma^2 e^2 - 540\gamma^2 e'^2 + \frac{7349}{64}e^4 - \frac{3105}{2}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+ \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{138661}{256}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$+ \left(\frac{36049}{288} - \frac{94481}{144}\gamma^2 - \frac{2069437}{1152}e^2 + \frac{676807}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{483527}{1728}\frac{n'^9}{n^9}$$
$$+ \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{69669}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$G = \sqrt{a\mu}\,\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8$$
$$+ \left(\frac{37}{16} - \frac{33}{4}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 + \frac{129}{8}\gamma^4 + \frac{909}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{8}\gamma^2 e'^2 \right.$$
$$\left. - \frac{85157}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+ \left(10 - 40\gamma^2 - \frac{139}{3}e^2 + 135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{2547}{64} - \frac{6191}{32}\gamma^2 - \frac{335561}{1536}e^2 + \frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$+ \frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$H = \sqrt{a\mu}\,\Big\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8$$
$$+ \left(\frac{37}{16} - \frac{23}{8}\gamma^2 - \frac{753}{64}e^2 + \frac{555}{32}e'^2 - \frac{219}{8}\gamma^4 + \frac{1019}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{345}{16}\gamma^2 e'^2 \right.$$
$$\left. - \frac{85157}{1024}e^4 - \frac{11295}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(10-\frac{59}{3}\gamma^2-\frac{139}{3}e^2+135e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{2547}{64}-\frac{1319}{12}\gamma^2-\frac{335561}{1536}e^2+\frac{47375}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{36049}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{11595889}{55296}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{8991}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{an}\Big\{2+\left(\frac{359}{8}-\frac{291}{2}\gamma^2+\frac{45371}{128}e^2+\frac{5385}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(140-432\gamma^2+\frac{18411}{8}e^2+1890e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{41875}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{483281}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{387}{4}-\frac{1245}{4}\gamma^2-\frac{24277}{128}e^2+\frac{5805}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(420-1512\gamma^2-\frac{5925}{8}e^2+5670e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{126279}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1880475}{288}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}}=-\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{33}{4}-\frac{129}{4}\gamma^2-\frac{687}{8}e^2+\frac{495}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+(40-120\gamma^2-408e^2+540e'^2)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{6191}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{94481}{144}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-e^2+\left(\frac{927}{32}-\frac{531}{8}\gamma^2-\frac{39749}{128}e^2+\frac{13905}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6+\left(\frac{927}{32}-\frac{531}{8}\gamma^2-\frac{61533}{128}e^2+\frac{13905}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}}=\frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{597}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{33}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}}=\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1-2\gamma^2+\frac{1}{2}e^2-\gamma^2e^2+\frac{3}{8}e^4-\frac{3}{4}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6+\left(\frac{43}{16}+\frac{319}{8}\gamma^2-\frac{627}{64}e^2+\frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}}=-\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6+\left(\frac{43}{16}-\frac{207}{4}\gamma^2-\frac{627}{64}e^2+\frac{645}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

26e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (76) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (76)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2 \\
& \qquad - \Big(\frac{37}{8} - \frac{33}{2}\gamma^2 - \frac{373}{8}e^2 + \frac{555}{16}e'^2 + \frac{129}{4}\gamma^4 + \frac{309}{2}\gamma^2e^2 - \frac{495}{4}\gamma^2e'^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{24341}{512}e^4 - \frac{5595}{16}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \Big(15 - 60\gamma^2 - 162e^2 + \frac{405}{2}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} - \Big(\frac{10915}{192} - \frac{28655}{96}\gamma^2 - \frac{568771}{768}e^2 + \frac{191867}{192}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad - \frac{45041}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4620391}{18432}\frac{n'^6}{n^6} + \Big[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{8991}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\Big]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{8}e'^2 + \frac{3}{4}\gamma^4 + \frac{15}{4}\gamma^2e^2 + \frac{15}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{69}{64}e^4 + \frac{75}{16}e^2e'^2 + \frac{39}{64}e'^4 \\
& \qquad - \frac{15}{8}\gamma^4e^2 - \frac{15}{8}\gamma^4e'^2 - \frac{69}{32}\gamma^2e^4 - \frac{75}{8}\gamma^2e^2e'^2 - \frac{65}{384}e^6 - \frac{345}{128}e^4e'^2 \\
& \qquad - \Big(9e'^2 - \frac{117}{2}\gamma^2e'^2 - \frac{99}{8}e^2e'^2 + \frac{225}{32}e'^4\Big)\frac{n'}{n} \\
& \qquad + \Big(\frac{3}{4} - 6\gamma^2 - 6e^2 - \frac{105}{8}e'^2 + \frac{27}{4}\gamma^4 + 45\gamma^2e^2 + \frac{501}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{2367}{256}e^4 + \frac{123}{16}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \frac{1}{4}e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \Big(\frac{1141}{128} - \frac{4243}{64}\gamma^2 - \frac{72103}{512}e^2 + \frac{123793}{384}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{491}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{268421}{2304}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad + \Big[\frac{5}{16} - 5\gamma^2 + \frac{5}{16}e^2 + \frac{5}{16}e'^2 - \frac{7081}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\Big]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& \times \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}
$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (76), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt-cinq premières opérations.

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 2, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$\mathrm{G} = \mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = \mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent etre regardées comme déterminant e et γ en fonction de a; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{26})\left\{\begin{aligned} e^2 = -2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}\bigg\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} + \left[\frac{927}{32} - \frac{531}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}} + \frac{62415}{128}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} + \frac{13905}{64}e'^2\right]\frac{n'^4}{n^4} \\ + \frac{412}{3}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{496405}{768}\frac{n'^6}{n^6}\bigg\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{26})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\bigg\{ 1 - \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} + \frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu} - \frac{(\mathrm{G})^3}{a\mu\sqrt{a\mu}} \\ + \left[\frac{43}{16} - \frac{87}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}} - \frac{75}{8}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} + \frac{645}{32}e'^2\right]\frac{n'^4}{n^4} + \frac{61}{6}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8021}{192}\frac{n'^6}{n^6}\bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace e^2 et γ^2 par leurs valeurs en a dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\left\{ 1 + \left[\frac{37}{16} - \frac{33}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}} + \frac{105}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} + \frac{555}{32}e'^2\right]\frac{n'^4}{n^4} + 10\frac{n'^5}{n^5} + \frac{2547}{64}\frac{n'^6}{n^6}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{26})\left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} = -a\frac{n'^2}{n}\bigg\{ 3 - 3\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}} + 15\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} - \frac{15}{2}e'^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2 - 12\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} \\ + \frac{15}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'^2 + \frac{99}{4}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu} - \frac{75}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'^2 + \frac{39}{16}e'^4 + \frac{9}{4}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} \end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$(\mathrm{C}_{26})\left\{\begin{aligned}
&-\frac{15}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2 e'^2-\frac{51}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}+30\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'^2+\frac{68}{3}\frac{(\mathrm{G})^3}{a\mu\sqrt{a\mu}}\\
&-\frac{495}{8}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}e'^2-\left[36e'^2-117\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'^2+99\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'^2+\frac{225}{8}e'^4\right]\frac{n'}{n}\\
&+\left[3-12\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}+48\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}-\frac{105}{2}e'^2+\frac{27}{4}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.-168\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}+\frac{501}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'^2+\frac{2751}{16}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}-\frac{123}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'^2\right]\frac{n'^2}{n^2}\\
&-e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\left[\frac{1745}{32}-\frac{3137}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}+\frac{49907}{64}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}-\frac{80503}{96}e'^2\right]\frac{n'^4}{n^4}-\frac{2389}{6}\frac{n'^5}{n^5}\\
&\qquad-\frac{545069}{288}\frac{n'^6}{n^6}+\left[\frac{5}{4}-10\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}-\frac{5}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}+\frac{5}{4}e'^2-\frac{7081}{256}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\sin\theta.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt}=2\frac{dh}{dt}+2\frac{dg}{dt}+2\frac{dl}{dt}-2n'=-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}-2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$,… données à la suite de la 25ᵉ opération, et remplaçant e^2 et γ^2 par leurs valeurs en a, on trouve

$$(\mathrm{D}_{26})\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt}=2n-2n'-\frac{n'^2}{n}\Bigg\{2-\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}-\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}+3e'^2+\frac{3}{2}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2\\
&\qquad+12\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}-\frac{27}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'^2-\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}-\frac{27}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'^2\\
&\qquad-\left[\frac{259}{8}-\frac{99}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}+\frac{837}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}+\frac{3885}{16}e'^2\right]\frac{n'^2}{n^2}\\
&\qquad\qquad-70\frac{n'^3}{n^3}-\frac{35233}{96}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{4}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\\
&-\frac{n'^2}{n}\Bigg\{6-\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}+\frac{45}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}-15e'^2+\frac{3}{4}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2-12\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}\\
&\qquad+\frac{45}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'^2+\frac{99}{4}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}-\frac{225}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'^2+\frac{39}{8}e'^4
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{D}_{26})\left\{\begin{aligned}
&-\left[126e'^2-351\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'^2+297\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'^2\right]\frac{n'}{n}\\
&+\left[15-54\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}+216\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}-\frac{525}{2}e'^2\right]\frac{n'^2}{n^2}-\frac{13}{2}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{839}{8}\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad-\frac{2191}{12}\frac{n'^5}{n^5}+5\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{26}), (D_{26}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable a dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{26})\left\{\begin{aligned}
a=a_0&\\
+a_0\Bigg\{&\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{15}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{15}{4}e'^2+\frac{3}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2-6\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\right.\\
&\quad+\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{99}{8}\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}-\frac{75}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{39}{32}e'^4+\frac{9}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\\
&\quad-\frac{15}{16}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2e'^2-\frac{51}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}+15\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2\\
&\qquad\left.+\frac{34}{3}\frac{(\mathrm{G})^3}{a_0\mu\sqrt{a_0\mu}}-\frac{495}{16}\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}e'^2\right]\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&+\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{15}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{87}{4}e'^2+\frac{3}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2-6\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{249}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{99}{8}\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}-\frac{273}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2-\frac{411}{32}e'^4\right]\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&+\left[\frac{9}{2}-\frac{99}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{285}{8}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{99}{2}e'^2+\frac{69}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2\right.\\
&\quad\left.-\frac{201}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{1539}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{2967}{32}\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}-\frac{825}{8}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2\right]\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&+\left[6-\frac{69}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{159}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{139}{2}e'^2\right]\frac{n'^5}{n_0^5}
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$-\left[\frac{22933}{512}-\frac{42799}{512}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{422159}{512}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{656521}{3072}e'^2\right]\frac{n'^6}{n_0^6}-\frac{510365}{1536}\,\frac{n'^7}{n_0^7}-\frac{8184829}{4608}\,\frac{n'^8}{n_0^8}$$

$$+\left[\frac{5}{8}-5\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{5}{4}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{5}{8}e'^2\right]\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}+\frac{5}{8}\,\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}-\frac{6441}{512}\,\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big\}\cos\theta_0(t+c)$$

$$-a_0\Big\{\left[\frac{9}{16}-\frac{9}{8}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{45}{8}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{45}{16}e'^2+\frac{27}{32}\left(\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{81}{8}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{45}{8}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{747}{32}\,\frac{(G)^2}{a_0\mu}-\frac{225}{8}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2\right]\frac{n'^4}{n_0^4}$$

(E_{26})

$$+\left[\frac{63}{32}-\frac{63}{16}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{315}{16}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{747}{32}e'^2\right]\frac{n'^5}{n_0^5}$$

$$+\left[\frac{261}{32}-\frac{3249}{128}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{11295}{128}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{1611}{16}e'^2\right]\frac{n'^6}{n_0^6}$$

$$+\frac{711}{32}\,\frac{n'^7}{n_0^7}+\frac{23241}{256}\,\frac{n'^8}{n_0^8}-\frac{15}{64}\,\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c)$$

$$+a_0\Big\{\left[\frac{189}{512}-\frac{567}{512}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{2835}{512}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{2835}{1024}e'^2\right]\frac{n'^6}{n_0^6}$$

$$+\frac{999}{512}\,\frac{n'^7}{n_0^7}+\frac{4941}{512}\,\frac{n'^8}{n_0^8}\Big\}\cos 3\theta_0(t+c)$$

$$-a_0\,\frac{621}{2048}\,\frac{n'^8}{n_0^8}\cos 4\theta_0(t+c);$$

$$\theta=\theta_0(t+c)$$

$$-\Big\{\left[\frac{21}{4}-\frac{9}{2}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{45}{2}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{105}{8}e'^2+\frac{15}{16}\left(\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2\right.$$

$$\left.-15\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{45}{4}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{495}{16}\,\frac{(G)^2}{a_0\mu}-\frac{225}{4}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{273}{64}e'^4\right]\frac{n'^2}{n_0^2}$$

$$+\left[\frac{15}{2}-\frac{27}{4}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{135}{4}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{435}{4}e'^2+\frac{3}{2}\left(\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2\right.$$

(F_{26})

$$\left.-24\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{2241}{8}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{99}{2}\,\frac{(G)^2}{a_0\mu}-\frac{2457}{8}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2\right]\frac{n'^3}{n_0^3}$$

$$+\left[\frac{117}{4}-\frac{297}{4}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{855}{4}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{1287}{4}e'^2\right]\frac{n'^4}{n_0^4}$$

$$+\left[48-\frac{1035}{8}\,\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{2385}{8}\,\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}-556\,e'^2\right]\frac{n'^5}{n_0^5}$$

$$-\frac{78157}{1024}\,\frac{n'^6}{n_0^6}-\frac{1869385}{1536}\,\frac{n'^7}{n_0^7}+\frac{55}{16}\,\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}+\frac{35}{8}\,\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big\}\sin\theta_0(t+c)$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{F}_{26})\left\{\begin{aligned}
&+\Big\{\Big[\frac{477}{128}-\frac{27}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{135}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{2385}{128}e'^2\Big]\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad+\Big[\frac{45}{4}-\frac{1323}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{6615}{64}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{603}{4}e'^2\Big]\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{171}{4}\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{7497}{64}\frac{n'^7}{n_0^7}\Big\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&-\Big\{\frac{3555}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{8145}{512}\frac{n'^7}{n_0^7}\Big\}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

a_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration; n_0 est mis pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=n_0\Big\{2-2\frac{n'}{n_0}-\Big[2-\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+3e'^2\Big]\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{451}{32}\frac{n'^4}{n_0^4}\Big\}.$$

Si l'on prend la valeur de a donnée par la formule (E_{26}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{26}), (B_{26}), on en déduit les valeurs de e^2 et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{26})\left\{\begin{aligned}
&e^2=-2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\Big\{1+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\Big[\frac{1881}{64}-\frac{1089}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{63027}{128}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{6885}{32}e'^2\Big]\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad+\frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n_0^6}\Big\}\\
&\quad+2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\Big\{\Big[\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{16}\Big(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\Big)^2\\
&\qquad\qquad-\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{15}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{159}{16}\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}-\frac{45}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2\Big]\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad\qquad+\Big[\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{87}{8}e'^2\Big]\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad+\Big[\frac{9}{4}-\frac{99}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{321}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{99}{4}e'^2\Big]\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad+3\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{266527}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{5}{16}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big\}\cos\theta_0(t+c)\\
&\quad-2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\Big\{\Big[\frac{45}{64}-\frac{45}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{63}{8}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{225}{64}e'^2\Big]\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad+\frac{117}{64}\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{225}{32}\frac{n'^6}{n_0^6}\Big\}\cos 2\theta_0(t+c)\\
&\quad+2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\cdot\frac{783}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6}\cos 3\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{H}_{26})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1-\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}-\frac{(\mathrm{G})^3}{a_0\mu\sqrt{a_0\mu}}\right. \\
& \qquad \left.+\left[\frac{199}{64}-\frac{375}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{201}{32}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{1155}{64}e'^2\right]\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{2147}{48}\frac{n'^6}{n_0^6}\right\} \\
& -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{\left[\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{9}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{16}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\right)^2\right.\right. \\
& \qquad \left.-\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{15}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}-\frac{45}{8}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'^2\right]\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \qquad +\left[\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{9}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{87}{8}e'^2\right]\frac{n'^3}{n_0^3} \\
& \qquad +\left[\frac{9}{4}-\frac{99}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{213}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{99}{4}e'^2\right]\frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \qquad \left.+3\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{44503}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{5}{16}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right\}\cos\theta_0(t+c) \\
& +\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{\left[\frac{45}{64}-\frac{45}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{171}{32}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{225}{64}e'^2\right]\frac{n'^4}{n_0^4}\right. \\
& \qquad \left.+\frac{117}{64}\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{225}{32}\frac{n'^6}{n_0^6}\right\}\cos 2\theta_0(t+c) \\
& -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\cdot\frac{783}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6}\cos 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons maintenant par e_0^2 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour e^2 et γ^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
e_0^2 = -2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\left[\frac{1881}{64}-\frac{1089}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{63027}{128}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{6885}{32}e'^2\right]\frac{n'^4}{n_0^4}\right. \\
\left.+\frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n_0^6}\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1-\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}-\frac{(\mathrm{G})^3}{a_0\mu\sqrt{a_0\mu}}+\left[\frac{199}{64}-\frac{375}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}-\frac{201}{32}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{1155}{64}e'^2\right]\frac{n'^4}{n_0^4}\right. \\
\left.+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{2147}{48}\frac{n'^6}{n_0^6}\right\}.
\end{aligned}
$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de e_0^2 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{26}), (F_{26}), (G_{26}), (H_{26}), et elles deviendront

$$
(E'_{26})\left\{
\begin{aligned}
a = a_0 \Big\{ 1 + \Big[\Big(& \frac{3}{2} - 3\gamma_0^2 - \frac{15}{4}e_0^2 - \frac{15}{4}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma_0^4 + \frac{15}{2}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{15}{2}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{69}{32}e_0^4 \\
& + \frac{75}{8}e_0^2 e'^2 + \frac{39}{32}e'^4 - \frac{15}{4}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{15}{4}\gamma_0^4 e'^2 - \frac{69}{16}\gamma_0^2 e_0^4 \\
& - \frac{75}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 - \frac{65}{192}e_0^6 - \frac{345}{64}e_0^4 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \Big(\frac{3}{2} - 3\gamma_0^2 - \frac{15}{4}e_0^2 - \frac{87}{4}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma_0^4 + \frac{15}{2}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{249}{2}\gamma_0^2 e'^2 \\
& + \frac{69}{32}e_0^4 + \frac{273}{8}e_0^2 e'^2 - \frac{411}{32}e'^4 \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& + \Big(\frac{9}{2} - \frac{99}{4}\gamma_0^2 - \frac{285}{16}e_0^2 - \frac{99}{2}e'^2 + \frac{69}{2}\gamma_0^4 + \frac{903}{8}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{1539}{4}\gamma_0^2 e'^2 \\
& + \frac{2397}{128}e_0^4 + \frac{825}{16}e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& + \Big(6 - \frac{69}{2}\gamma_0^2 - \frac{159}{8}e_0^2 - \frac{139}{2}e'^2 \Big) \frac{n'^5}{n_0^5} \\
& - \Big(\frac{22933}{512} - \frac{45187}{256}\gamma_0^2 - \frac{535019}{1024}e_0^2 - \frac{656521}{3072}e'^2 \Big) \frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{510365}{1536}\frac{n'^7}{n_0^7} - \frac{8184829}{4608}\frac{n'^8}{n_0^8} \\
& + \Big(\frac{5}{8} - 10\gamma_0^2 + \frac{5}{8}e_0^2 + \frac{5}{8}e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{5}{8}\frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} - \frac{6441}{512}\frac{n'^4}{n_0^4} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Big] \cos\theta_0(t+c) \\
- \Big[\Big(& \frac{9}{16} - \frac{9}{4}\gamma_0^2 - \frac{45}{16}e_0^2 - \frac{45}{16}e'^2 + \frac{27}{8}\gamma_0^4 + \frac{45}{4}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{45}{4}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{657}{128}e_0^4 + \frac{225}{16}e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& + \Big(\frac{63}{32} - \frac{63}{8}\gamma_0^2 - \frac{315}{32}e_0^2 - \frac{747}{32}e'^2 \Big) \frac{n'^5}{n_0^5} + \Big(\frac{261}{32} - \frac{3249}{64}\gamma_0^2 - \frac{11295}{256}e_0^2 - \frac{1611}{16}e'^2 \Big) \frac{n'^6}{n_0^6} \\
& + \frac{711}{32}\frac{n'^7}{n_0^7} + \frac{23241}{256}\frac{n'^8}{n_0^8} - \frac{15}{64}\frac{n'^4}{n_0^4} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Big] \cos 2\theta_0(t+c) \\
+ \Big[\Big(& \frac{189}{512} - \frac{567}{256}\gamma_0^2 - \frac{2835}{1024}e_0^2 - \frac{2835}{1024}e'^2 \Big) \frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{999}{512}\frac{n'^7}{n_0^7} + \frac{4941}{512}\frac{n'^8}{n_0^8} \Big] \cos 3\theta_0(t+c) \\
- & \frac{621}{2048}\frac{n'^8}{n_0^8} \cos 4\theta_0(t+c) \Big\};
\end{aligned}
\right.
$$

(F'_{26})

$$\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& -\Bigg[\left(\frac{21}{4} - 9\gamma_0^2 - \frac{45}{4}e_0^2 - \frac{105}{8}e'^2 + \frac{15}{4}\gamma_0^4 + \frac{39}{2}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{45}{2}\gamma_0^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{315}{64}e_0^4 + \frac{225}{8}e_0^2 e'^2 + \frac{273}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \quad + \left(\frac{15}{2} - \frac{27}{2}\gamma_0^2 - \frac{135}{8}e_0^2 - \frac{435}{4}e'^2 + 6\gamma_0^4 + \frac{123}{4}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{2241}{4}\gamma_0^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{261}{32}e_0^4 + \frac{2457}{16}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\
& \quad + \left(\frac{117}{4} - \frac{297}{2}\gamma_0^2 - \frac{855}{8}e_0^2 - \frac{1287}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} + \left(48 - \frac{1035}{4}\gamma_0^2 - \frac{2385}{16}e_0^2 - 556\,e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5} \\
& \quad - \frac{78157}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{1869385}{1536}\frac{n'^7}{n_0^7} + \frac{55}{16}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{35}{8}\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\
& + \Bigg[\left(\frac{477}{128} - \frac{27}{2}\gamma_0^2 - \frac{135}{8}e_0^2 - \frac{2385}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \quad + \left(\frac{45}{4} - \frac{1323}{32}\gamma_0^2 - \frac{6615}{128}e_0^2 - \frac{603}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{171}{4}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{7497}{64}\frac{n'^7}{n_0^7}\Bigg]\sin 2\theta_0(t+c) \\
& - \left[\frac{3555}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{8145}{512}\frac{n'^7}{n_0^7}\right]\sin 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}$$

(G'_{26})

$$\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 & - \Bigg[\left(\frac{3}{4}e_0^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{33}{16}e_0^4 - \frac{15}{8}e_0^2 e'^2 + \frac{3}{4}\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{33}{8}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{15}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{93}{64}e_0^6 + \frac{165}{32}e_0^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \quad + \left(\frac{3}{4}e_0^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{33}{16}e_0^4 - \frac{87}{8}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \left(\frac{9}{4}e_0^2 - \frac{99}{8}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{303}{32}e_0^4 - \frac{99}{4}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \quad + 3e_0^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{289099}{1024}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{5}{16}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c) \\
& + \left[\left(\frac{45}{64}e_0^2 - \frac{45}{16}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{963}{256}e_0^4 - \frac{225}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{117}{64}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{225}{32}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\cos 2\theta_0(t+c) \\
& - \frac{783}{1024}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}\cos 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}$$

(H'_{26})

$$\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 & - \Bigg[\Bigg(\frac{3}{4}\gamma_0^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^4 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{15}{8}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{3}{4}\gamma_0^6 + 3\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{15}{4}\gamma_0^4 e'^2 \\
& \qquad + \frac{27}{64}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{15}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2}
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(\mathrm{H}'_{26})\left\{
\begin{aligned}
&+\left(\frac{3}{4}\gamma_0^2-\frac{3}{2}\gamma_0^4-\frac{3}{2}\gamma_0^2e_0^2-\frac{87}{8}\gamma_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\left(\frac{9}{4}\gamma_0^2-\frac{99}{8}\gamma_0^4-\frac{249}{32}\gamma_0^2e_0^2-\frac{99}{4}\gamma_0^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad+3\gamma_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{46891}{1024}\gamma_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{5}{16}\gamma_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{45}{64}\gamma_0^2-\frac{45}{16}\gamma_0^4-\frac{387}{128}\gamma_0^2e_0^2-\frac{225}{64}\gamma_0^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{117}{64}\gamma_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{225}{32}\gamma_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\cos 2\theta_0(t+c)\\
&-\frac{783}{1024}\gamma_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}\cos 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$
\theta_0=n_0\left[2-2\frac{n'}{n_0}-\left(2-9\gamma_0^2+\frac{9}{4}e_0^2+3e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{451}{32}\frac{n'^4}{n_0^4}\right].
$$

Calculons maintenant les valeurs de g et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{dg}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}},\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{dg}{dt}={}&\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{2}-\frac{15}{2}\gamma^2+\frac{9}{8}e^2+\frac{9}{4}e'^2+\frac{293}{8}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\
&-\frac{n'^2}{n}\Bigg[3-\frac{21}{4}\gamma^2-\frac{75}{16}e^2-\frac{15}{2}e'^2+\frac{9}{4}\gamma^4+\frac{63}{8}\gamma^2e^2+\frac{105}{8}\gamma^2e'^2+\frac{73}{32}e^4+\frac{375}{32}e^2e'^2\\
&\qquad+\frac{9}{2}e'^2\frac{n'}{n}+\left(9-\frac{309}{4}\gamma^2-\frac{1407}{64}e^2+\frac{189}{4}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{53759}{256}\frac{n'^4}{n^4}-\frac{25}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dh}{dt}={}&-\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{8}e'^2-\frac{33}{8}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\
&-\frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{3}{2}e^2-\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{2}\gamma^2e^2+\frac{15}{8}\gamma^2e'^2+\frac{27}{64}e^4+\frac{15}{4}e^2e'^2-\frac{117}{4}e'^2\frac{n'}{n}\\
&\qquad+\left(3-\frac{27}{4}\gamma^2-21e^2-\frac{501}{8}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2917}{128}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{5}{2}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta;
\end{aligned}
$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules

(E'_{26}), (F'_{26}), (G'_{26}), (H'_{26}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{26})\left\{\begin{aligned}
g = (g) &+ g_0(t+c) \\
&- \Bigg[\left(\frac{3}{2} - \frac{21}{8}\gamma_0^2 - \frac{75}{32}e_0^2 - \frac{15}{4}e'^2 + \frac{9}{8}\gamma_0^4 + \frac{63}{16}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{105}{16}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{73}{64}e_0^4 + \frac{375}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&\quad + \left(\frac{3}{2} - \frac{21}{8}\gamma_0^2 - \frac{75}{32}e_0^2 - \frac{3}{2}e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \left(\frac{93}{16} - \frac{333}{8}\gamma_0^2 - \frac{1359}{128}e_0^2 + \frac{357}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
&\quad + \frac{45}{8}\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{3331}{128}\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{25}{16}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg] \sin\theta_0(t+c) \\
&+ \Bigg[\left(\frac{9}{8} - \frac{531}{128}\gamma_0^2 - \frac{2205}{512}e_0^2 - \frac{45}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{99}{32}\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{5535}{512}\frac{n'^6}{n_0^6}\Bigg] \sin 2\theta_0(t+c) \\
&- \frac{549}{512}\frac{n'^6}{n_0^6} \sin 3\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{26})\left\{\begin{aligned}
h = (h) &+ h_0(t+c) \\
&- \Bigg[\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8}\gamma_0^2 - \frac{3}{4}e_0^2 - \frac{15}{16}e'^2 + \frac{3}{4}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{15}{16}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{27}{128}e_0^4 + \frac{15}{8}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&\quad + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8}\gamma_0^2 - \frac{3}{4}e_0^2 - \frac{249}{16}e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \left(\frac{99}{32} - \frac{69}{8}\gamma_0^2 - \frac{201}{16}e_0^2 - \frac{1539}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
&\quad + \frac{69}{16}\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{8117}{2048}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{5}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg] \sin\theta_0(t+c) \\
&+ \Bigg[\left(\frac{9}{32} - \frac{99}{128}\gamma_0^2 - \frac{315}{256}e_0^2 - \frac{45}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{99}{128}\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{2745}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6}\Bigg] \sin 2\theta_0(t+c) \\
&- \frac{549}{2048}\frac{n'^6}{n_0^6} \sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

(g) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration; g_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin.

Les six formules (E'_{26}), (F'_{26}), (G'_{26}), (H'_{26}), (K_{26}), (L_{26}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (76). La valeur de $h+g+l$ se déduit de la formule (F'_{26}) au moyen de la relation

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + h' + g' + l'.$$

Dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du nº **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$
\begin{aligned}
a \Big\{ 1 + \Big[\Big(& \frac{3}{2} - 3\gamma^2 - \frac{15}{4}e^2 - \frac{15}{4}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 + \frac{15}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{69}{32}e^4 + \frac{75}{8}e^2 e'^2 + \frac{39}{32}e'^4 - \frac{15}{4}\gamma^4 e^2 \\
& - \frac{15}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{69}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{75}{4}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{65}{192}e^6 - \frac{345}{64}e^4 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \\
& + \Big(\frac{3}{2} - 3\gamma^2 - \frac{15}{4}e^2 - \frac{87}{4}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 + \frac{15}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{249}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{69}{32}e^4 + \frac{273}{8}e^2 e'^2 - \frac{411}{32}e'^4 \Big) \frac{n'^3}{n^3} \\
& + \Big(\frac{9}{2} - \frac{99}{4}\gamma^2 - \frac{285}{16}e^2 - \frac{99}{2}e'^2 + \frac{69}{2}\gamma^4 + \frac{903}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{1539}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{2397}{128}e^4 + \frac{825}{16}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4} \\
& + \Big(6 - \frac{69}{2}\gamma^2 - \frac{159}{8}e^2 - \frac{139}{2}e'^2 \Big) \frac{n'^5}{n^5} - \Big(\frac{22933}{512} - \frac{45187}{256}\gamma^2 - \frac{535019}{1024}e^2 - \frac{656521}{3072}e'^2 \Big) \frac{n'^6}{n^6} \\
& - \frac{510365}{1536}\frac{n'^7}{n^7} - \frac{8184829}{4608}\frac{n'^8}{n^8} + \Big(\frac{5}{8} - 10\gamma^2 + \frac{5}{8}e^2 + \frac{5}{8}e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{5}{8}\frac{n'^3}{n^3} \cdot \frac{a^2}{a'^2} - \frac{6441}{512}\frac{n'^4}{n^4} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Big] \\
& \times \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l') \\
- \Big[\Big(& \frac{9}{16} - \frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{45}{16}e^2 - \frac{45}{16}e'^2 + \frac{27}{8}\gamma^4 + \frac{45}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{45}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{657}{128}e^4 + \frac{225}{16}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4} \\
& + \Big(\frac{63}{32} - \frac{63}{8}\gamma^2 - \frac{315}{32}e^2 - \frac{747}{32}e'^2 \Big) \frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{261}{32} - \frac{3249}{64}\gamma^2 - \frac{11295}{256}e^2 - \frac{1611}{16}e'^2 \Big) \frac{n'^6}{n^6} \\
& + \frac{711}{32}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{23241}{256}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{15}{64}\frac{n'^4}{n^4} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Big] \\
& \times \cos 2(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l') \\
+ \Big[\Big(& \frac{189}{512} - \frac{567}{256}\gamma^2 - \frac{2835}{1024}e^2 - \frac{2835}{1024}e'^2 \Big) \frac{n'^6}{n^6} \\
& + \frac{999}{512}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{4941}{512}\frac{n'^8}{n^8} \Big] \cos 3(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l') \\
- & \frac{621}{2048}\frac{n'^8}{n^8} \cos 4(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l') \Big\};
\end{aligned}
$$

e^2 par

$$e^2 - \Big[\Big(\frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 e^2 - \frac{33}{16} e^4 - \frac{15}{8} e^2 e'^2 + \frac{3}{4} \gamma^4 e^2 + \frac{33}{8} \gamma^2 e^4 + \frac{15}{4} \gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{93}{64} e^6 + \frac{165}{32} e^4 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \Big(\frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 e^2 - \frac{33}{16} e^4 - \frac{87}{8} e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3} + \Big(\frac{9}{4} e^2 - \frac{99}{8} \gamma^2 e^2 - \frac{303}{32} e^4 - \frac{99}{4} e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ 3 e^2 \frac{n'^5}{n^5} - \frac{289099}{1024} e^2 \frac{n'^6}{n^6} + \frac{5}{16} e^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Big]$$

$$\times \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \Big[\Big(\frac{45}{64} e^2 - \frac{45}{16} \gamma^2 e^2 - \frac{963}{256} e^4 - \frac{225}{64} e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{117}{64} e^2 \frac{n'^5}{n^5} + \frac{225}{32} e^2 \frac{n'^6}{n^6} \Big] \cos 2(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l$$

$$- \frac{783}{1024} e^2 \frac{n'^6}{n^6} \cos 3(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l');$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \Big[\Big(\frac{3}{4} \gamma^2 - \frac{3}{2} \gamma^4 - \frac{3}{2} \gamma^2 e^2 - \frac{15}{8} \gamma^2 e'^2 + \frac{3}{4} \gamma^6 + 3 \gamma^4 e^2 + \frac{15}{4} \gamma^4 e'^2 + \frac{27}{64} \gamma^2 e^4 + \frac{15}{4} \gamma^2 e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \Big(\frac{3}{4} \gamma^2 - \frac{3}{2} \gamma^4 - \frac{3}{2} \gamma^2 e^2 - \frac{87}{8} \gamma^2 e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3} + \Big(\frac{9}{4} \gamma^2 - \frac{99}{8} \gamma^4 - \frac{249}{32} \gamma^2 e^2 - \frac{99}{4} \gamma^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ 3 \gamma^2 \frac{n'^5}{n^5} - \frac{46891}{1024} \gamma^2 \frac{n'^6}{n^6} + \frac{5}{16} \gamma^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Big]$$

$$\times \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \Big[\Big(\frac{45}{64} \gamma^2 - \frac{45}{16} \gamma^4 - \frac{387}{128} \gamma^2 e^2 - \frac{225}{64} \gamma^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{117}{64} \gamma^2 \frac{n'^5}{n^5} + \frac{225}{32} \gamma^2 \frac{n'^6}{n^6} \Big] \cos 2(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$- \frac{783}{1024} \gamma^2 \frac{n'^6}{n^6} \cos 3(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 2l');$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \Big[\Big(\frac{21}{8} - \frac{9}{2} \gamma^2 - \frac{45}{8} e^2 - \frac{105}{16} e'^2 + \frac{15}{8} \gamma^4 + \frac{39}{4} \gamma^2 e^2 + \frac{45}{4} \gamma^2 e'^2$$

$$+ \frac{515}{128} e^4 + \frac{225}{16} e^2 e'^2 + \frac{273}{128} e'^4 \Big) \frac{n'^2}{n^2}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\biggl(\frac{15}{4}-\frac{27}{4}\gamma^2-\frac{135}{16}e^2-\frac{435}{8}e'^2+3\gamma^4+\frac{123}{8}\gamma^2e^2$$

$$+\frac{2241}{8}\gamma^2e'^2+\frac{261}{64}e^4+\frac{2457}{32}e^2e'^2\biggr)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\biggl(\frac{117}{8}-\frac{297}{4}\gamma^2-\frac{855}{16}e^2-\frac{1287}{8}e'^2\biggr)\frac{n'^4}{n^4}+\biggl(24-\frac{1035}{8}\gamma^2-\frac{2385}{32}e^2-278e'^2\biggr)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$-\frac{78157}{2048}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{1869385}{3072}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{55}{32}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{35}{16}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\biggr]$$

$$\times\sin(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\biggl[\biggl(\frac{477}{256}-\frac{27}{4}\gamma^2-\frac{135}{16}e^2-\frac{2385}{256}e'^2\biggr)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\biggl(\frac{45}{8}-\frac{1323}{64}\gamma^2-\frac{6615}{256}e^2-\frac{603}{8}e'^2\biggr)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{171}{8}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{7497}{128}\frac{n'^7}{n^7}\biggr]\sin 2(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\biggl[\frac{3555}{2048}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{8145}{1024}\frac{n'^7}{n^7}\biggr]\sin 3(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l');$$

g par

$$g-\biggl[\biggl(\frac{3}{2}-\frac{21}{8}\gamma^2-\frac{75}{32}e^2-\frac{15}{4}e'^2+\frac{9}{8}\gamma^4+\frac{63}{16}\gamma^2e^2+\frac{105}{16}\gamma^2e'^2+\frac{73}{64}e^4+\frac{375}{64}e^2e'^2\biggr)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\biggl(\frac{3}{2}-\frac{21}{8}\gamma^2-\frac{75}{32}e^2-\frac{3}{2}e'^2\biggr)\frac{n'^3}{n^3}+\biggl(\frac{93}{16}-\frac{333}{8}\gamma^2-\frac{1359}{128}e^2+\frac{357}{16}e'^2\biggr)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{45}{8}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{3331}{128}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{25}{16}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\biggr]$$

$$\times\sin(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\biggl[\biggl(\frac{9}{8}-\frac{531}{128}\gamma^2-\frac{2205}{512}e^2-\frac{45}{8}e'^2\biggr)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{99}{32}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{5535}{512}\frac{n'^6}{n^6}\biggr]\sin 2(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{549}{512}\frac{n'^6}{n^6}\sin 3(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l');$$

h par

$$h-\biggl[\biggl(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{3}{4}e^2-\frac{15}{16}e'^2+\frac{3}{4}\gamma^2e^2+\frac{15}{16}\gamma^2e'^2+\frac{27}{128}e^4+\frac{15}{8}e^2e'^2\biggr)\frac{n'^2}{n^2}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$+\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{3}{4}e^2-\frac{249}{16}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{99}{32}-\frac{69}{8}\gamma^2-\frac{201}{16}e^2-\frac{1539}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{69}{16}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8117}{2048}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{5}{4}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]$$

$$\times\sin(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{9}{32}-\frac{99}{128}\gamma^2-\frac{315}{256}e^2-\frac{45}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{99}{128}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{2745}{1024}\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin 2(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{549}{2048}\frac{n'^6}{n^6}\sin 3(2h+2g+2l-2h'-2g'-2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{26}), (G'_{26}), (H'_{26}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 528)

$$+\sqrt{a\mu}\,\Bigg\{-\left(\frac{9}{64}-\frac{9}{16}\gamma^2-\frac{45}{64}e^2-\frac{45}{64}e'^2+\frac{27}{32}\gamma^4+\frac{45}{16}\gamma^2e^2+\frac{45}{16}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{657}{512}e^4+\frac{225}{64}e^2e'^2+\frac{567}{512}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$-\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{8}\gamma^2-\frac{45}{32}e^2-\frac{153}{32}e'^2+\frac{27}{16}\gamma^4+\frac{45}{8}\gamma^2e^2+\frac{549}{16}\gamma^2e'^2+\frac{657}{256}e^4+\frac{1287}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$-\left(\frac{63}{64}-\frac{441}{64}\gamma^2-\frac{1575}{256}e^2-\frac{495}{32}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}-\left(\frac{63}{32}-\frac{963}{64}\gamma^2-\frac{3069}{256}e^2-\frac{2391}{64}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{857823}{16384}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{3887663}{8192}\frac{n'^9}{n^9}-\frac{15}{128}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{15}{64}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},$$

$$L_1=\sqrt{a\mu}\,\Bigg\{\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{15}{8}e^2-\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{4}\gamma^4+\frac{15}{4}\gamma^2e^2+\frac{15}{4}\gamma^2e'^2+\frac{69}{64}e^4+\frac{75}{16}e^2e'^2+\frac{39}{64}e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{15}{8}e^2-\frac{87}{8}e'^2+\frac{3}{4}\gamma^4+\frac{15}{4}\gamma^2e^2+\frac{249}{4}\gamma^2e'^2+\frac{69}{64}e^4+\frac{273}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{9}{4}-\frac{99}{8}\gamma^2-\frac{285}{32}e^2-\frac{99}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\left(3-\frac{69}{4}\gamma^2-\frac{159}{16}e^2-\frac{139}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\frac{425}{1024}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{69545}{3072}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{5}{16}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5}{16}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},$$

$$\mathrm{L}_2 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{27}{64}\frac{n'^4}{n^4}-\frac{81}{64}\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 528)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{9}{64}-\frac{9}{16}\gamma^2-\frac{117}{128}e^2-\frac{45}{64}e'^2+\frac{27}{32}\gamma^4+\frac{117}{32}\gamma^2e^2+\frac{45}{16}\gamma^2e'^2+\frac{297}{128}e^4+\frac{585}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$-\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{8}\gamma^2-\frac{117}{64}e^2-\frac{153}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}-\left(\frac{63}{64}-\frac{441}{64}\gamma^2-\frac{1953}{256}e^2-\frac{495}{32}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$\left.-\frac{63}{32}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{857823}{16384}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{15}{128}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\};$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 528)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{9}{64}-\frac{45}{32}\gamma^2-\frac{117}{128}e^2-\frac{45}{64}e'^2+\frac{135}{32}\gamma^4+\frac{495}{64}\gamma^2e^2+\frac{225}{32}\gamma^2e'^2+\frac{621}{256}e^4+\frac{585}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$-\left(\frac{9}{32}-\frac{45}{16}\gamma^2-\frac{117}{64}e^2-\frac{153}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}-\left(\frac{63}{64}-\frac{819}{64}\gamma^2-\frac{1953}{256}e^2-\frac{495}{32}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$\left.-\frac{63}{32}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{857823}{16384}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{15}{128}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

D'ailleurs θ_1 et θ_2 sont les coefficients de $\sin\theta_0(t+c)$ et de $\sin 2\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{26}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots)=$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{63}{32}-\frac{117}{16}\gamma^2-\frac{585}{64}e^2-\frac{315}{32}e'^2+\frac{81}{8}\gamma^4+\frac{1089}{32}\gamma^2e^2+\frac{585}{16}\gamma^2e'^2\right.\right.$$
$$\left.+\frac{3897}{256}e^4+\frac{2925}{64}e^2e'^2+\frac{3969}{256}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$-\left(\frac{153}{32}-18\gamma^2-\frac{45}{2}e^2-\frac{2601}{32}e'^2+\frac{405}{16}\gamma^4+\frac{1359}{16}\gamma^2e^2+549\gamma^2e'^2+\frac{9765}{256}e^4+\frac{1287}{4}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$-\left(\frac{315}{16}-\frac{8379}{64}\gamma^2-\frac{29925}{256}e^2-\frac{2475}{8}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}-\left(\frac{1449}{32}-\frac{10593}{32}\gamma^2-\frac{33759}{128}e^2-\frac{54993}{64}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$
$$\left.-\frac{296517}{8192}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{3567997}{8192}\frac{n'^9}{n^9}-\frac{135}{64}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{315}{64}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 541 à 544) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 26^e opération, et y ajoutant

$$+n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)-n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (76) de R, joint à la quantité $+n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [26 . . . 1,76]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H, seront

$$\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\,\Big\{1+\Big(\frac{13}{64}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{525}{32}e^2+\frac{1785}{64}e'^2+\frac{165}{32}\gamma^4+\frac{1701}{32}\gamma^2e^2-\frac{405}{4}\gamma^2e'^2$$

$$+\frac{11647}{1024}e^4-\frac{7875}{32}e^2e'^2+\frac{22575}{512}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{2915}{32}e^2+\frac{3537}{16}e'^2+33\gamma^4+\frac{5399}{16}\gamma^2e^2-\frac{17973}{16}\gamma^2e'^2$$

$$+\frac{9487}{128}e^4-\frac{121239}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\Big(\frac{153}{8}-\frac{1781}{32}\gamma^2-\frac{107161}{256}e^2+\frac{68165}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\Big(\frac{22441}{288}-\frac{178583}{576}\gamma^2-\frac{3503591}{2304}e^2+\frac{848959}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\,\Big\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\Big(\frac{13}{64}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{219}{128}e^2+\frac{1785}{64}e'^2+\frac{165}{32}\gamma^4+\frac{153}{8}\gamma^2e^2-\frac{405}{4}\gamma^2e'^2-\frac{103121}{1024}e^4-\frac{8865}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{3537}{16}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\Big(\frac{153}{8}-\frac{1781}{32}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{68165}{64}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 - \frac{219}{128}e^2 + \frac{1785}{64}e'^2 - \frac{1335}{32}\gamma^4 - \frac{635}{64}\gamma^2 e^2 - \frac{2085}{32}\gamma^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \left. - \frac{103121}{1024}e^4 - \frac{8865}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{79}{16} + \frac{55}{48}\gamma^2 - \frac{4225}{192}e^2 + \frac{3537}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{153}{8} + \frac{3245}{96}\gamma^2 - \frac{144293}{1536}e^2 + \frac{68165}{64}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ & 2 + \left(\frac{1931}{32} - \frac{1623}{8}\gamma^2 + \frac{34553}{128}e^2 + \frac{8295}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{1651}{8} - \frac{2727}{4}\gamma^2 + \frac{31323}{16}e^2 + \frac{8055}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{60649}{64.}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1528783}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{261}{4} - \frac{3225}{16}\gamma^2 - \frac{9067}{128}e^2 + \frac{7065}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{687}{2} - 1242\gamma^2 - \frac{3585}{8}e^2 + \frac{51633}{8}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{103599}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{69271}{12}\frac{n'^7}{n^7}\Big\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{3}{8} - \frac{165}{16}\gamma^2 - \frac{1695}{32}e^2 + \frac{405}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - 327e^2 + \frac{17973}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \frac{1781}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{178583}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - \frac{40505}{128}e^2 + \frac{6885}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\};
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - 477e^2 + \frac{6885}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.
\end{aligned}
$$

$$
\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{1095}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4},
$$

$$
\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 n\gamma}\cdot\frac{339}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},
$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{199}{64} + \frac{367}{32}\gamma^2 - \frac{1461}{128}e^2 + \frac{1155}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left. + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{2147}{48}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \left(\frac{199}{64} - \frac{189}{4}\gamma^2 - \frac{1461}{128}e^2 + \frac{1155}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left. + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{2147}{48}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

27^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (77) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (77)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2\right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$
$$- \left(\frac{31}{32} - 3\gamma^2 - \frac{119}{4}e^2 + \frac{1695}{32}e'^2 + \frac{219}{16}\gamma^4 + \frac{1473}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{765}{4}\gamma^2 e'^2\right.$$
$$\left. + \frac{10067}{512}e^4 - \frac{6945}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$- \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{8253}{64}e^2 + \frac{11061}{32}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$- \left(\frac{5515}{192} - \frac{10133}{96}\gamma^2 - \frac{428263}{768}e^2 + \frac{286097}{192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$
$$\left. + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\right\}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{21}{8}e' - \frac{21}{4}\gamma^2 e' - \frac{105}{16}e^2 e' - \frac{369}{64}e'^3 + \frac{21}{8}\gamma^4 e' + \frac{105}{8}\gamma^2 e^2 e' + \frac{369}{32}\gamma^2 e'^3\right.$$
$$+ \frac{483}{128}e^4 e' + \frac{1845}{128}e^2 e'^3 + \frac{1467}{512}e'^5$$

Cette formule se continue a la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (77), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt-six premières opérations.

$$+\left(\frac{9}{4}e'-\frac{117}{8}\gamma^2 e'-\frac{99}{32}e^2 e'-\frac{369}{16}e'^3+\frac{117}{4}\gamma^4 e'+\frac{369}{16}\gamma^2 e^2 e'-\frac{369}{128}e^4 e'\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{3}{4}e'-6\gamma^2 e'-21e^2 e'-\frac{597}{32}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}-\left(\frac{125}{16}e'-\frac{367}{4}\gamma^2 e'+\frac{441}{32}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\frac{907073}{6144}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{6490193}{9216}e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{45}{32}e'\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{165}{32}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$\times\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-3l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=2,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=-3.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt}=\frac{dG}{dt}=\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G=L+(G),\qquad H=L+(H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant e et γ en fonction de a; en les résolvant, on trouve

$$(A_{27})\qquad e^2=-2\frac{(G)}{\sqrt{a\mu}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{(G)}{\sqrt{a\mu}}+\frac{1881}{64}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5}\right\},$$

$$(B_{27})\qquad \gamma^2=\frac{1}{2}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a\mu}}\left\{1-\frac{(G)}{\sqrt{a\mu}}+\frac{(G)^2}{a\mu}+\frac{199}{64}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Si l'on remplace e^2 et γ^2 par leurs valeurs en a dans l'expression de L, il vient

$$L=\sqrt{a\mu}\left\{1+\frac{13}{64}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{79}{16}\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{dL}{dt}=\dfrac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{27})\left\{\begin{aligned}\frac{da}{dt}=-a\frac{n'^2}{n}\Bigg\{&\frac{21}{2}e'-\frac{21}{2}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a\mu}}e'+\frac{105}{2}\frac{(G)}{\sqrt{a\mu}}e'-\frac{369}{16}e'^3+\frac{21}{8}\left(\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a\mu}}\right)^2 e'\\&-42\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a\mu}}\frac{(G)}{\sqrt{a\mu}}e'+\frac{369}{16}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a\mu}}e'^3+\frac{693}{8}\frac{(G)^2}{a\mu}e'-\frac{1845}{16}\frac{(G)}{\sqrt{a\mu}}e'^3+\frac{1467}{128}e'^5\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{C}_{27})\left\{\begin{aligned}
&+\left[9e' - \frac{117}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e' + \frac{99}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' - \frac{369}{4}e'^3 + \frac{117}{4}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2 e'\right.\\
&\qquad\qquad\left. - 63\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' - \frac{135}{4}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}e'\right]\frac{n'}{n}\\
&+\left[3e' - 12\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e' + 168\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' - \frac{597}{8}e'^3\right]\frac{n'^2}{n^2}\\
&-\left[\frac{125}{4}e' - \frac{367}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e' - \frac{441}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'\right]\frac{n'^3}{n^3}\\
&\qquad - \frac{949661}{1536}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{8456117}{2304}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{45}{8}e'\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{165}{8}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\sin\theta.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 2\frac{dl}{dt} - 3n' = -2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 3n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$,… données à la suite de la 26$^\mathrm{e}$ opération, et remplaçant e^2 et γ^2 par leurs valeurs en a, on trouve

$$(\mathrm{D}_{27})\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt} = 2n - 3n' - \frac{n'^2}{n}\left[2 - \frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}} - \frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} + 3e'^2 - \frac{451}{32}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\
&\quad - \frac{n'^2}{n}\Bigg\{21e' - \frac{63}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e' + \frac{315}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' - \frac{369}{8}e'^3 + \frac{21}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2 e'\\
&\qquad - 42\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' + \frac{693}{8}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}e'\\
&\qquad + \left[\frac{63}{2}e' - \frac{351}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e' + \frac{297}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' - \frac{2583}{8}e'^3\right]\frac{n'}{n}\\
&\qquad + \left[15e' - 54\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e' + 756\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'\right]\frac{n'^2}{n^2}\\
&\qquad\qquad - \frac{1625}{8}e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{114715}{24}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{45}{2}e'\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{27}), (D_{27}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable a dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$
(\mathrm{E}_{27})\quad
\begin{aligned}
a = a_0 + a_0 \Big\{ & \Big[\frac{21}{4} e' - \frac{21}{4} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{105}{4} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' - \frac{369}{32} e'^3 + \frac{21}{16} \left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} \right)^2 e' \\
& \quad - 21 \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{369}{32} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e'^3 + \frac{693}{16} \frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu} e' \\
& \qquad\qquad - \frac{1845}{32} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e'^3 + \frac{1467}{256} e'^5 \Big] \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \Big[\frac{99}{8} e' - \frac{45}{2} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{207}{4} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' - \frac{4059}{64} e'^3 \\
& \quad + \frac{531}{32} \left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} \right)^2 e' - 63 \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{1539}{32} \frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu} e' \Big] \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& + \Big[\frac{405}{16} e' - \frac{909}{16} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{2817}{16} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' - \frac{17421}{128} e'^3 \Big] \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& + \Big[\frac{1111}{32} e' - \frac{701}{16} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{2745}{8} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' \Big] \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{825569}{3072} e' \frac{n'^6}{n_0^6} \\
& \qquad - \frac{44601905}{18432} e' \frac{n'^7}{n_0^7} + \frac{45}{16} e' \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{465}{32} e' \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Big\} \cos \theta_0 (t+c) \\
- a_0 \Big\{ & \Big[\frac{441}{64} e'^2 - \frac{441}{32} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e'^2 + \frac{2205}{32} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e'^2 \Big] \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \qquad + \frac{12285}{256} e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{113535}{512} e'^2 \frac{n'^6}{n_0^6} \Big\} \cos 2\theta_0 (t+c),
\end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{F}_{27})\quad
\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0 (t+c) \\
& - \Big\{ \Big[\frac{147}{8} e' - \frac{63}{4} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{315}{4} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' - \frac{2583}{64} e'^3 \\
& \qquad + \frac{105}{32} \left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} \right)^2 e' - \frac{105}{2} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{3465}{32} \frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu} e' \Big] \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \quad + \Big[\frac{495}{8} e' - \frac{405}{4} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{1863}{8} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' - \frac{20295}{64} e'^3 \Big] \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& \quad + \Big[\frac{5265}{32} e' - \frac{2727}{8} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}} e' + \frac{8451}{8} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}} e' \Big] \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \qquad\qquad + \frac{1111}{4} e' \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{15174755}{6144} e' \frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{495}{32} e' \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Big\} \sin \theta_0 (t+c) \\
& + \Big\{ \frac{23373}{512} e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{9261}{32} e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \Big\} \sin 2\theta_0 (t+c).
\end{aligned}
$$

a_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration ; n_0 est mis pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = 2n_0 - 3n' - 2\frac{n'^2}{n_0}.$$

Si l'on prend la valeur de a donnée par la formule (E_{27}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{27}), (B_{27}), on en déduit les valeurs de e^2 et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{27})\left\{\begin{aligned}
e^2 = &-2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{1881}{64}\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}\right\}\\
&+2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{\left[\frac{21}{8}e'-\frac{21}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'+\frac{63}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'-\frac{369}{64}e'^3\right]\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad+\left[\frac{99}{16}e'-\frac{45}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'+\frac{513}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'\right]\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{405}{32}e'\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{1111}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\cdot\frac{2205}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{27})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = &\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1-\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}+\frac{199}{64}\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}\right\}\\
&-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{\left[\frac{21}{8}e'-\frac{21}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'+\frac{63}{8}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'-\frac{369}{64}e'^3\right]\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad+\left[\frac{99}{16}e'-\frac{45}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}e'+\frac{27}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}e'\right]\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{405}{32}e'\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{1111}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\
&+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\cdot\frac{2205}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par e_0^2 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour e^2 et γ^2, de sorte qu'on ait

$$e_0^2 = -2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{1881}{64}\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}\right\},$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1-\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0\mu}}+\frac{(\mathrm{G})^2}{a_0\mu}+\frac{199}{64}\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de e_0^2 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{27}), (F_{27}), (G_{27}), (H_{27}), et elles deviendront

$$(\mathrm{E}'_{27})\left\{\begin{aligned}
a = a_0 \Big\{ 1 + \Bigg[& \left(\frac{21}{4} e' - \frac{21}{2} \gamma_0^2 e' - \frac{105}{8} e_0^2 e' - \frac{369}{32} e'^3 + \frac{21}{4} \gamma_0^4 e' + \frac{105}{4} \gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{369}{16} \gamma_0^2 e'^3 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{483}{64} e_0^4 e' + \frac{1845}{64} e_0^2 e'^3 + \frac{1467}{256} e'^5 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \left(\frac{99}{8} e' - 45 \gamma_0^2 e' - \frac{207}{8} e_0^2 e' - \frac{4059}{64} e'^3 + \frac{531}{8} \gamma_0^4 e' + \frac{171}{2} \gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{711}{128} e_0^4 e' \right) \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& + \left(\frac{405}{16} e' - \frac{909}{8} \gamma_0^2 e' - \frac{2817}{32} e_0^2 e' - \frac{17421}{128} e'^3 \right) \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& + \left(\frac{1111}{32} e' - \frac{701}{8} \gamma_0^2 e' - \frac{2745}{16} e_0^2 e' \right) \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{825569}{3072} e' \frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{44601905}{18432} e' \frac{n'^7}{n_0^7} \\
& + \frac{45}{16} e' \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{465}{32} e' \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Bigg] \cos \theta_0 (t + c) \\
- \Bigg[& \left(\frac{441}{64} e'^2 - \frac{441}{16} \gamma_0^2 e'^2 - \frac{2205}{64} e_0^2 e'^2 \right) \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{12285}{256} e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{113535}{512} e'^2 \frac{n'^6}{n_0^6} \Bigg] \cos 2\theta_0 (t + c) \Big\};
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{27})\left\{\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0 (t + c) \\
& - \Bigg[\left(\frac{147}{8} e' - \frac{63}{2} \gamma_0^2 e' - \frac{315}{8} e_0^2 e' - \frac{2583}{64} e'^3 + \frac{105}{8} \gamma_0^4 e' + \frac{273}{4} \gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{2205}{128} e_0^4 e' \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \qquad + \left(\frac{495}{8} e' - \frac{405}{2} \gamma_0^2 e' - \frac{1863}{16} e_0^2 e' - \frac{20295}{64} e'^3 \right) \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& \qquad + \left(\frac{5265}{32} e' - \frac{2727}{4} \gamma_0^2 e' - \frac{8451}{16} e_0^2 e' \right) \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \qquad + \frac{1111}{4} e' \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{15174755}{6144} e' \frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{495}{32} e' \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Bigg] \sin \theta_0 (t + c) \\
& + \left[\frac{23373}{512} e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{9261}{32} e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \right] \sin 2\theta_0 (t + c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{27})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 - \Bigg[& \left(\frac{21}{8} e_0^2 e' - \frac{21}{4} \gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{231}{32} e_0^4 e' - \frac{369}{64} e_0^2 e'^3 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \left(\frac{99}{16} e_0^2 e' - \frac{45}{2} \gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{927}{64} e_0^4 e' \right) \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{405}{32} e_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{1111}{64} e_0^2 e' \frac{n'^5}{n_0^5} \Bigg] \cos \theta_0 (t + c) \\
+ \frac{2205}{256} & e_0^2 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \cos 2\theta_0 (t + c);
\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{H}'_{27})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 - \Bigg[& \left(\frac{21}{8}\gamma_0^2 e' - \frac{21}{4}\gamma_0^4 e' - \frac{21}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{369}{64}\gamma_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \left(\frac{99}{16}\gamma_0^2 e' - \frac{45}{2}\gamma_0^4 e' - \frac{315}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{405}{32}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{1111}{64}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c) \\
& + \frac{2205}{256}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

Calculons maintenant les valeurs de g et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{dg}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{dg}{dt} = {} & \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n} \\
& - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{21}{2}e' - \frac{147}{8}\gamma^2 e' - \frac{525}{32}e^2 e' - \frac{369}{16}e'^3 - \left(\frac{9}{8}e' + \frac{9}{4}\gamma^2 e' - \frac{261}{16}e^2 e'\right)\frac{n'}{n}\right. \\
& \qquad\qquad \left. + 39 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1175}{16}e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = {} & -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} \\
& - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{21}{8}e' - \frac{21}{8}\gamma^2 e' - \frac{21}{4}e^2 e' - \frac{369}{64}e'^3 + \left(\frac{117}{16}e' - \frac{117}{4}\gamma^2 e' - \frac{63}{8}e^2 e'\right)\frac{n'}{n}\right. \\
& \qquad\qquad \left. + 3 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{367}{8}e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta;
\end{aligned}
$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{27}), (F'_{27}), (G'_{27}), (H'_{27}), puis intégrant, nous tirerons

$$
(\mathrm{K}_{27})\left\{
\begin{aligned}
g = {} & (g) + g_0(t+c) \\
& - \Bigg[\left(\frac{21}{4}e' - \frac{147}{16}\gamma_0^2 e' - \frac{525}{64}e_0^2 e' - \frac{369}{32}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \quad + \left(\frac{117}{16}e' - \frac{477}{32}\gamma_0^2 e' - \frac{531}{128}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{477}{16}e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{4789}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\
& + \frac{441}{32}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{L}_{27})\left\{\begin{aligned}
h &= (h) + h_0(t+c) \\
&\quad - \left[\left(\frac{21}{16}e' - \frac{21}{16}\gamma_0^2 e' - \frac{21}{8}e_0^2 e' - \frac{369}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{45}{8}e' - \frac{531}{32}\gamma_0^2 e' - \frac{63}{8}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{909}{64}e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{701}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right] \sin\theta_0(t+c) \\
&\quad + \frac{441}{128}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

(g) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration; g_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin.

Les six formules (E'_{27}), (F'_{27}), (G'_{27}), (H'_{27}), (K_{27}), (L_{27}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (77). La valeur de $h+g+l$ se déduit de la formule (F'_{27}) au moyen de la relation

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + h' + g' + \frac{3}{2}l'.$$

Dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$
\begin{aligned}
a\Big\{1 + \Big[&\left(\frac{21}{4}e' - \frac{21}{2}\gamma^2 e' - \frac{105}{8}e^2 e' - \frac{369}{32}e'^3 + \frac{21}{4}\gamma^4 e' + \frac{105}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{369}{16}\gamma^2 e'^3\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{483}{64}e^4 e' + \frac{1845}{64}e^2 e'^3 + \frac{1467}{256}e'^5\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
&+ \left(\frac{99}{8}e' - 45\gamma^2 e' - \frac{207}{8}e^2 e' - \frac{4059}{64}e'^3 + \frac{531}{8}\gamma^4 e' + \frac{171}{2}\gamma^2 e^2 e' + \frac{711}{128}e^4 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
&+ \left(\frac{405}{16}e' - \frac{909}{8}\gamma^2 e' - \frac{2817}{32}e^2 e' - \frac{17421}{128}e'^3\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{1111}{32}e' - \frac{701}{8}\gamma^2 e' - \frac{2745}{16}e^2 e'\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
&\qquad - \frac{825569}{3072}e'\frac{n'^6}{n^6} - \frac{44601905}{18432}e'\frac{n'^7}{n^7} + \frac{45}{16}e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{465}{32}e'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big] \\
&\times \cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-3l')
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$- \Bigg[\left(\frac{441}{64} e'^2 - \frac{441}{16} \gamma^2 e'^2 - \frac{2205}{64} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{12285}{256} e'^2 \frac{n'^5}{n^5} + \frac{113535}{512} e'^2 \frac{n'^6}{n^6} \Bigg] \cos 2 (2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l') \Big\} ;$$

e^2 par

$$e^2 - \Bigg[\left(\frac{21}{8} e^2 e' - \frac{21}{4} \gamma^2 e^2 e' - \frac{231}{32} e^4 e' - \frac{369}{64} e^2 e'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{99}{16} e^2 e' - \frac{45}{2} \gamma^2 e^2 e' - \frac{927}{64} e^4 e' \right) \frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \frac{405}{32} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1111}{64} e^2 e' \frac{n'^5}{n^5} \Bigg] \cos (2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ \frac{2205}{256} e^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} \cos 2 (2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l') ;$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \Bigg[\left(\frac{21}{8} \gamma^2 e' - \frac{21}{4} \gamma^4 e' - \frac{21}{4} \gamma^2 e^2 e' - \frac{369}{64} \gamma^2 e'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{99}{16} \gamma^2 e' - \frac{45}{2} \gamma^4 e' - \frac{315}{32} \gamma^2 e^2 e' \right) \frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \frac{405}{32} \gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1111}{64} \gamma^2 e' \frac{n'^5}{n^5} \Bigg] \cos (2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ \frac{2205}{256} \gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} \cos 2 (2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l') ;$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \Bigg[\left(\frac{147}{16} e' - \frac{63}{4} \gamma^2 e' - \frac{315}{16} e^2 e' - \frac{2583}{128} e'^3 + \frac{105}{16} \gamma^4 e' + \frac{273}{8} \gamma^2 e^2 e' + \frac{2205}{256} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{495}{16} e' - \frac{405}{4} \gamma^2 e' - \frac{1863}{32} e^2 e' - \frac{20295}{128} e'^3 \right) \frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \left(\frac{5265}{64} e' - \frac{2727}{8} \gamma^2 e' - \frac{8451}{32} e^2 e' \right) \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1111}{8} e' \frac{n'^5}{n^5} - \frac{15174755}{12288} e' \frac{n'^6}{n^6} + \frac{495}{64} e' \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Bigg]$$

$$\times \sin (2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$+ \Bigg[\frac{23373}{1024} e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{9261}{64} e'^2 \frac{n'^5}{n^5} \Bigg] \sin 2 (2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l') ;$$

g par

$$g - \left[\left(\frac{21}{4} e' - \frac{147}{16} \gamma^2 e' - \frac{525}{64} e^2 e' - \frac{369}{32} e'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2} \right.$$
$$+ \left(\frac{117}{16} e' - \frac{477}{32} \gamma^2 e' - \frac{531}{128} e^2 e' \right) \frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left. + \frac{477}{16} e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{4789}{64} e' \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l')$$
$$+ \frac{441}{32} e'^2 \frac{n'^4}{n^4} \sin 2(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l');$$

h par

$$h - \left[\left(\frac{21}{16} e' - \frac{21}{16} \gamma^2 e' - \frac{21}{8} e^2 e' - \frac{369}{128} e'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{45}{8} e' - \frac{531}{32} \gamma^2 e' - \frac{63}{8} e^2 e' \right) \frac{n'^3}{n^3} + \frac{909}{64} e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{701}{64} e' \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l')$$
$$+ \frac{441}{128} e'^2 \frac{n'^4}{n^4} \sin 2(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - 3l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{27}), (G'_{27}), (H'_{27}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 546)

$$+ \sqrt{a\mu} \left\{ - \left(\frac{441}{256} e'^2 - \frac{441}{64} \gamma^2 e'^2 - \frac{2205}{256} e^2 e'^2 - \frac{7749}{1024} e'^4 \right) \frac{n'^4}{n^4} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{2079}{256} e'^2 - \frac{5859}{128} \gamma^2 e'^2 - \frac{19089}{512} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^5}{n^5} - \frac{26811}{1024} e'^2 \frac{n'^6}{n^6} - \frac{31713}{512} e'^2 \frac{n'^7}{n^7} \right\},$$

$$L_1 = \sqrt{a\mu} \left\{ \left(\frac{21}{8} e' - \frac{21}{4} \gamma^2 e' - \frac{105}{16} e^2 e' - \frac{369}{16} e'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{99}{16} e' - \frac{45}{2} \gamma^2 e' - \frac{207}{16} e^2 e' \right) \frac{n'^3}{n^3} + \frac{405}{32} e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1111}{64} e' \frac{n'^5}{n^5} \right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 546)

$$+ \sqrt{a\mu} \left\{ - \left(\frac{441}{256} e'^2 - \frac{441}{64} \gamma^2 e'^2 - \frac{5733}{512} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} - \frac{2079}{256} e'^2 \frac{n'^5}{n^5} - \frac{26811}{1024} e'^2 \frac{n'^6}{n^6} \right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 547)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{441}{256}e'^2-\frac{2205}{128}\gamma^2e'^2-\frac{5733}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{2079}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{26811}{1024}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{27}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1L_1+2\theta_2L_2+\ldots)=$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{3087}{128}e'^2-\frac{5733}{64}\gamma^2e'^2-\frac{28665}{256}e^2e'^2-\frac{54243}{512}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{35343}{256}e'^2-\frac{5859}{8}\gamma^2e'^2-\frac{19089}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}-\frac{134055}{256}e'^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{729399}{512}e'^2\frac{n'^7}{n^7}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 555 à 557) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 27^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{3}{2}n'(L-L_0)-\frac{3}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1L_1+2\theta_2L_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (77) de R, joint à la quantité $+\frac{3}{2}n'(L-L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{3}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1L_1+2\theta_2L_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication $[27\cdot\cdot\cdot\cdot 1, 77]$. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$L=\sqrt{a\mu}\left\{1+\left(\frac{13}{64}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{525}{32}e^2+\frac{525}{256}e'^2+\frac{165}{32}\gamma^4+\frac{1701}{32}\gamma^2e^2-\frac{153}{32}\gamma^2e'^2\right.\right.$$

$$\left.+\frac{11647}{1024}e^4-\frac{16065}{128}e^2e'^2+\frac{161385}{1024}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{2915}{32}e^2+\frac{9585}{128}e'^2+33\gamma^4+\frac{5399}{16}\gamma^2e^2-\frac{44181}{128}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{9487}{128}e^4-\frac{645399}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}-\frac{1781}{32}\gamma^2-\frac{107161}{256}e^2+\frac{527609}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left(\frac{22441}{288}-\frac{178583}{576}\gamma^2-\frac{3503591}{2304}e^2+\frac{281771}{96}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{;$$

$$G=\sqrt{a\mu}\Big\}1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{13}{64}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{219}{128}e^2+\frac{525}{256}e'^2+\frac{165}{32}\gamma^4+\frac{153}{8}\gamma^2e^2-\frac{153}{32}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{103121}{1024}e^4-\frac{7857}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{9585}{128}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}-\frac{1781}{32}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{527609}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{;$$

$$H=\sqrt{a\mu}\Big\}1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{187}{32}\gamma^2-\frac{219}{128}e^2+\frac{525}{256}e'^2-\frac{1335}{32}\gamma^4-\frac{635}{64}\gamma^2e^2+\frac{5331}{128}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{103121}{1024}e^4-\frac{7857}{512}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{9585}{128}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{527609}{1024}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{da}{dL} = \frac{1}{an}\Big\{ 2 &+ \left(\frac{1931}{32} - \frac{1623}{8}\gamma^2 + \frac{34553}{128}e^2 + \frac{57435}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ &+ \left(\frac{1651}{8} - \frac{2727}{4}\gamma^2 + \frac{31323}{16}e^2 + \frac{338679}{128}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{60649}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1528783}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{dG} = -\frac{1}{an}\Big\{ &\left(\frac{261}{4} - \frac{3225}{16}\gamma^2 - \frac{9067}{128}e^2 + \frac{1989}{4}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ &+ \left(\frac{687}{2} - 1242\gamma^2 - \frac{3585}{8}e^2 + \frac{300609}{64}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{103599}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{69271}{12}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{dH} = -\frac{1}{an}\Big\{ &\left(\frac{3}{8} - \frac{165}{16}\gamma^2 - \frac{1695}{32}e^2 + \frac{153}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ &+ \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - 327e^2 + \frac{44181}{128}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1781}{32}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{178583}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{ 1 - e^2 + \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - \frac{40505}{128}e^2 + \frac{56403}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \\ &+ \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - 477e^2 + \frac{56403}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{1095}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{339}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ 1 &- 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ &+ \left(\frac{199}{64} + \frac{367}{32}\gamma^2 - \frac{1461}{128}e^2 + \frac{5943}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{2147}{48}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ 1 &+ \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ &+ \left(\frac{199}{64} - \frac{189}{4}\gamma^2 - \frac{1461}{128}e^2 + \frac{5943}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{2147}{48}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.\end{aligned}$$

28^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (82) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (82)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4e^2\right. \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{31}{32} - 3\gamma^2 - \frac{119}{4}e^2 + \frac{1047}{128}e'^2 + \frac{219}{16}\gamma^4 + \frac{1473}{16}\gamma^2e^2 - \frac{207}{8}\gamma^2e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{10067}{512}e^4 - \frac{7275}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{8253}{64}e^2 + \frac{31221}{256}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{10133}{96}\gamma^2 - \frac{428263}{768}e^2 + \frac{290827}{384}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad \left. + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\right\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{3}{8}e' + \frac{3}{4}\gamma^2e' + \frac{15}{16}e^2e' + \frac{3}{64}e'^3 - \frac{3}{8}\gamma^4e' - \frac{15}{8}\gamma^2e^2e' - \frac{3}{32}\gamma^2e'^3\right. \\
& \qquad - \frac{69}{128}e^4e' - \frac{15}{128}e^2e'^3 - \frac{5}{512}e'^5 \\
& \qquad - \left(\frac{9}{4}e' - \frac{117}{8}\gamma^2e' - \frac{99}{32}e^2e' + \frac{45}{16}e'^3 + \frac{117}{4}\gamma^4e' + \frac{369}{16}\gamma^2e^2e' - \frac{369}{128}e^4e'\right)\frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{9}{4}e' - 18\gamma^2e' - 3e^2e' - \frac{75}{32}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} + \left(\frac{13}{16}e' - \frac{143}{4}\gamma^2e' + \frac{153}{32}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{209863}{6144}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1910101}{9216}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{5}{32}e'\cdot\frac{a^2}{a'^2} - \frac{165}{32}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\} \\
& \times \cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - l').
\end{aligned}
$$

---

[*] Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (82), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt-sept premières opérations.

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 2, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$\mathrm{G} = \mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = \mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant e et γ en fonction de a; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{28}) \qquad e^2 = -2\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} + \frac{1881}{64}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5}\right\},$$

$$(\mathrm{B}_{28}) \qquad \gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\left\{1 - \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}} + \frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu} + \frac{199}{64}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Si l'on remplace e^2 et γ^2 par leurs valeurs en a dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\left\{1 + \frac{13}{64}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{79}{16}\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{28}) \left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} = a\frac{n'^2}{n}\Bigg\{ & \frac{3}{2}e' - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e' + \frac{15}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' - \frac{3}{16}e'^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2 e' \\ & - 6\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' + \frac{3}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'^3 + \frac{99}{8}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}e' - \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'^3 + \frac{5}{128}e'^5 \\ & + \Bigg[9e' - \frac{117}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e' + \frac{99}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' + \frac{45}{4}e'^3 + \frac{117}{4}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2 e' \\ & \qquad + 54\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e' - \frac{603}{4}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}e'\Bigg]\frac{n'}{n} \end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{C}_{28})\left\{\begin{aligned} &+\left[9e'-36\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'+24\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'-\frac{75}{8}e'^3\right]\frac{n'^2}{n^2}\\ &-\left[\frac{13}{4}e'-\frac{143}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'-\frac{153}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'\right]\frac{n'^3}{n^3}\\ &\qquad-\frac{215947}{1536}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{2237881}{2304}e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{5}{8}e'\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{165}{8}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt}=2\frac{dh}{dt}+2\frac{dg}{dt}+2\frac{dl}{dt}-n'=-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}-n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 27^e opération, et remplaçant e^2 et γ^2 par leurs valeurs en a, on trouve

$$(\mathrm{D}_{28})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}&=2n-n'-\frac{n'^2}{n}\left[2-\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}-\frac{9}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}+3e'^2-\frac{451}{32}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\ &+\frac{n'^2}{n}\Bigg\{3e'-\frac{9}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'+\frac{45}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'-\frac{3}{8}e'^3+\frac{3}{8}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\right)^2e'\\ &\qquad-6\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'+\frac{99}{8}\frac{(\mathrm{G})^2}{a\mu}e'\\ &\qquad+\left[\frac{63}{2}e'-\frac{351}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'+\frac{297}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'+\frac{315}{8}e'^3\right]\frac{n'}{n}\\ &\qquad+\left[45e'-162\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a\mu}}e'+108\frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a\mu}}e'\right]\frac{n'^2}{n^2}\\ &\qquad\qquad-\frac{169}{8}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{26423}{24}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{5}{2}e'\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{28}), (D_{28}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable a, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coeffi-

cients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$
(\mathrm{E}_{28})\left\{
\begin{aligned}
a = a_0 - a_0 \Bigg\{ & \Bigg[\frac{3}{4} e' - \frac{3}{4} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{15}{4} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' - \frac{3}{32} e'^3 + \frac{3}{16} \left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} \right)^2 e' \\
& \qquad - 3 \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{3}{32} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e'^3 + \frac{99}{16} \frac{(\mathrm{G})^2}{a_0 \mu} e' - \frac{15}{32} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e'^3 + \frac{5}{256} e'^5 \Bigg] \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \Bigg[\frac{39}{8} e' - 15 \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{57}{4} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{357}{64} e'^3 + \frac{471}{32} \left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} \right)^2 e' \\
& \qquad\qquad - 33 \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' - \frac{441}{32} \frac{(\mathrm{G})^2}{a_0 \mu} e' \Bigg] \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& + \Bigg[\frac{123}{16} e' - \frac{447}{16} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{339}{16} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' - \frac{111}{128} e'^3 \Bigg] \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& + \Bigg[\frac{227}{32} e' - \frac{67}{16} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + 33 \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' \Bigg] \frac{n'^5}{n_0^5} \\
& \quad - \frac{197671}{3072} e' \frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{10386973}{18432} e' \frac{n'^7}{n_0^7} - \frac{5}{16} e' \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{325}{32} e' \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Bigg\} \cos\theta_0 (t + c) \\
- a_0 \Bigg\{ & \Bigg[\frac{9}{64} e'^2 - \frac{9}{32} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e'^2 + \frac{45}{32} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e'^2 \Bigg] \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{495}{256} e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{5463}{512} e'^2 \frac{n'^6}{n_0^6} \Bigg\} \cos 2\theta_0 (t + c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{28})\left\{
\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0 (t + c) \\
& + \Bigg\{ \Bigg[\frac{21}{8} e' - \frac{9}{4} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{45}{4} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' - \frac{21}{64} e'^3 + \frac{15}{32} \left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} \right)^2 e' \\
& \qquad\qquad - \frac{15}{2} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{495}{32} \frac{(\mathrm{G})^2}{a_0 \mu} e' \Bigg] \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \quad + \Bigg[\frac{195}{8} e' - \frac{135}{2} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{513}{8} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{1785}{64} e'^3 \Bigg] \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& \quad + \Bigg[\frac{1599}{32} e' - \frac{1341}{8} \frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' + \frac{1017}{8} \frac{(\mathrm{G})}{\sqrt{a_0 \mu}} e' \Bigg] \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \qquad\qquad + \frac{227}{4} e' \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{3682741}{6144} e' \frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{55}{32} e' \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Bigg\} \sin\theta_0 (t + c) \\
& + \Bigg\{ \frac{477}{512} e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{423}{32} e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \Bigg\} \sin 2\theta_0 (t + c).
\end{aligned}
\right.
$$

a_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration; n_0 est mis pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = 2n_0 - n' - 2\frac{n'^2}{n_0}.$$

Si l'on prend la valeur de a donnée par la formule (E_{28}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{28}), (B_{28}), on en déduit les valeurs de e^2 et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{28})\left\{\begin{aligned}
e^2 = {} & -2\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}} + \frac{1881}{64}\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}\right\} \\
& -2\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{\left[\frac{3}{8}e' - \frac{3}{8}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}e' + \frac{9}{4}\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}e' - \frac{3}{64}e'^3\right]\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\
& \qquad + \left[\frac{39}{16}e' - \frac{15}{2}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}e' + \frac{153}{16}\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}e'\right]\frac{n'^3}{n_0^3} \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{123}{32}e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{227}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right\}\cos\theta_0(t+c) \\
& -2\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}\cdot\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(H_{28})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & \frac{1}{2}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1 - \frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}} + \frac{(G)^2}{a_0\mu} + \frac{199}{64}\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}\right\} \\
& + \frac{1}{2}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{\left[\frac{3}{8}e' - \frac{3}{8}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}e' + \frac{9}{8}\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}e' - \frac{3}{64}e'^3\right]\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\
& \qquad + \left[\frac{39}{16}e' - \frac{15}{2}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}e' + \frac{9}{4}\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}e'\right]\frac{n'^3}{n_0^3} \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{123}{32}e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{227}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right\}\cos\theta_0(t+c) \\
& + \frac{1}{2}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\cdot\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par e_0^2 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour e^2 et γ^2, de sorte qu'on ait

$$e_0^2 = -2\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}} + \frac{1881}{64}\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}\right\},$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(G)-(H)}{\sqrt{a_0\mu}}\left\{1 - \frac{(G)}{\sqrt{a_0\mu}} + \frac{(G)^2}{a_0\mu} + \frac{199}{64}\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n_0^5}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de e_0^2 et γ_0^2 ; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{28}), (F_{28}), (G_{28}), (H_{28}), et elles deviendront

$$(E'_{28})\left\{\begin{aligned}
a = a_0 \Big\{ 1 - \Big[\Big(& \frac{3}{4} e' - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{15}{8} e_0^2 e' - \frac{3}{32} e'^3 + \frac{3}{4}\gamma_0^4 e' + \frac{15}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{3}{16}\gamma_0^2 e'^3 \\
& + \frac{69}{64} e_0^4 e' + \frac{15}{64} e_0^2 e'^3 + \frac{5}{256} e'^5 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \Big(\frac{39}{8} e' - 30\gamma_0^2 e' - \frac{57}{8} e_0^2 e' + \frac{357}{64} e'^3 + \frac{471}{8}\gamma_0^4 e' + 48\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{669}{128} e_0^4 e' \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& + \Big(\frac{123}{16} e' - \frac{447}{8}\gamma_0^2 e' - \frac{339}{32} e_0^2 e' - \frac{111}{128} e'^3 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& + \Big(\frac{227}{32} e' - \frac{67}{8}\gamma_0^2 e' - \frac{33}{2} e_0^2 e' \Big) \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{197671}{3072} e' \frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{10386973}{18432} e' \frac{n'^7}{n_0^7} \\
& - \frac{5}{16} e' \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{325}{32} e' \frac{n'^3}{n_0^3} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Big] \cos\theta_0 (t + c) \\
- \Big[\Big(& \frac{9}{64} e'^2 - \frac{9}{16}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{45}{64} e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{495}{256} e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{5463}{512} e'^2 \frac{n'^6}{n_0^6} \Big] \cos 2\theta_0 (t + c) \Big\};
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{28})\left\{\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0 (t + c) \\
& + \Big[\Big(\frac{21}{8} e' - \frac{9}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{45}{8} e_0^2 e' - \frac{21}{64} e'^3 + \frac{15}{8}\gamma_0^4 e' + \frac{39}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{315}{128} e_0^4 e' \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \Big(\frac{195}{8} e' - 135\gamma_0^2 e' - \frac{513}{16} e_0^2 e' + \frac{1785}{64} e'^3 \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} \\
& + \Big(\frac{1599}{32} e' - \frac{1341}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{1017}{16} e_0^2 e' \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} \\
& + \frac{227}{4} e' \frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{3682741}{6144} e' \frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{55}{32} e' \frac{n'^2}{n_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Big] \sin\theta_0 (t + c) \\
& + \Big[\frac{477}{512} e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{423}{32} e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \Big] \sin 2\theta_0 (t + c);
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{28})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 + \Big[& \Big(\frac{3}{8} e_0^2 e' - \frac{3}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{33}{32} e_0^4 e' - \frac{3}{64} e_0^2 e'^3 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \Big(\frac{39}{16} e_0^2 e' - 15\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{267}{64} e_0^4 e' \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{123}{32} e_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{227}{64} e_0^2 e' \frac{n'^5}{n_0^5} \Big] \cos\theta_0 (t + c) \\
& + \frac{45}{256} e_0^2 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \cos 2\theta_0 (t + c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{28})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Bigg[&\left(\frac{3}{8}\gamma_0^2 e' - \frac{3}{4}\gamma_0^4 e' - \frac{3}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{3}{64}\gamma_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&+ \left(\frac{39}{16}\gamma_0^2 e' - 15\gamma_0^4 e' - \frac{75}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{123}{32}\gamma_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{227}{64}\gamma_0^2 e' \frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c) \\
&+ \frac{45}{256}\gamma_0^2 \cdot e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Calculons maintenant les valeurs de g et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dt} = \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n} \\
+ \frac{n'^2}{n}\Bigg[&\frac{3}{2}e' - \frac{21}{8}\gamma^2 e' - \frac{75}{32}e^2 e' - \frac{3}{16}e'^3 - \left(\frac{9}{8}e' + \frac{9}{4}\gamma^2 e' - \frac{261}{16}e^2 e'\right)\frac{n'}{n} \\
&- 3e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{439}{16}e'\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} \\
+ \frac{n'^2}{n}\Bigg[&\frac{3}{8}e' - \frac{3}{8}\gamma^2 e' - \frac{3}{4}e^2 e' - \frac{3}{64}e'^3 + \left(\frac{117}{16}e' - \frac{117}{4}\gamma^2 e' - \frac{63}{8}e^2 e'\right)\frac{n'}{n} \\
&+ 9e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{143}{8}e'\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta;
\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{28}), (F'_{28}), (G'_{28}), (H'_{28}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{28})\left\{\begin{aligned}
g = (g) + g_0(t+c) \\
+ \Bigg[&\left(\frac{3}{4}e' - \frac{21}{16}\gamma_0^2 e' - \frac{75}{64}e_0^2 e' - \frac{3}{32}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&- \left(\frac{3}{16}e' + \frac{57}{32}\gamma_0^2 e' - \frac{969}{128}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{27}{16}e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{461}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\
&+ \frac{9}{32}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{28})\left\{\begin{aligned} h = (h) + h_0\,(t+c) \\ &+ \left[\left(\frac{3}{16}e' - \frac{3}{16}\gamma_0^2 e' - \frac{3}{8}e_0^2 e' - \frac{3}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{15}{4}e' - \frac{471}{32}\gamma_0^2 e' - \frac{33}{8}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{447}{64}e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{67}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c) \\ &+ \frac{9}{128}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

(g) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration; g_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin.

Les six formules (E'_{28}), (F'_{28}), (G'_{28}), (H'_{28}), (K_{28}), (L_{28}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (82). La valeur de $h+g+l$ se déduit de la formule (F'_{28}) au moyen de la relation

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + h' + g' + \frac{1}{2}l'.$$

Dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$\begin{aligned} a\Big\{1 - \Big[\Big(&\frac{3}{4}e' - \frac{3}{2}\gamma^2 e' - \frac{15}{8}e^2 e' - \frac{3}{32}e'^3 + \frac{3}{4}\gamma^4 e' + \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{3}{16}\gamma^2 e'^3 \\ &+ \frac{69}{64}e^4 e' + \frac{15}{64}e^2 e'^3 + \frac{5}{256}e'^5\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\ &+ \left(\frac{39}{8}e' - 30\gamma^2 e' - \frac{57}{8}e^2 e' + \frac{357}{64}e'^3 + \frac{471}{8}\gamma^4 e' + 48\gamma^2 e^2 e' - \frac{669}{128}e^4 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \\ &+ \left(\frac{123}{16}e' - \frac{447}{8}\gamma^2 e' - \frac{339}{32}e^2 e' - \frac{111}{128}e'^3\right)\frac{n'^4}{n^4} + \left(\frac{227}{32}e' - \frac{67}{8}\gamma^2 e' - \frac{33}{2}e^2 e'\right)\frac{n'^5}{n^5} \\ &- \frac{197671}{3072}e'\frac{n'^6}{n^6} - \frac{10386973}{18432}e'\frac{n'^7}{n^7} - \frac{5}{16}e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{325}{32}e'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big] \\ &\times\cos(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - l') \end{aligned}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$-\left[\left(\frac{9}{64}e'^2-\frac{9}{16}\gamma^2e'^2-\frac{45}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left.+\frac{495}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{5463}{512}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos 2(2h+2g+2l-2h'-2g'-l')\Big\};$$

e^2 par

$$e^2+\left[\left(\frac{3}{8}e^2e'-\frac{3}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{33}{32}e^4e'-\frac{3}{64}e^2e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{39}{16}e^2e'-15\gamma^2e^2e'-\frac{267}{64}e^4e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left.+\frac{123}{32}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{227}{64}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-l')$$

$$+\frac{45}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h+2g+2l-2h'-2g'-l');$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\left(\frac{3}{8}\gamma^2e'-\frac{3}{4}\gamma^4e'-\frac{3}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{3}{64}\gamma^2e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{39}{16}\gamma^2e'-15\gamma^4e'-\frac{75}{32}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$\left.+\frac{123}{32}\gamma^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{227}{64}\gamma^2e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+2l-2h'-2g'-l')$$

$$+\frac{45}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h+2g+2l-2h'-2g'-l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{21}{16}e'-\frac{9}{4}\gamma^2e'-\frac{45}{16}e^2e'-\frac{21}{128}e'^3+\frac{15}{16}\gamma^4e'+\frac{39}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{315}{256}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$+\left(\frac{195}{16}e'-\frac{135}{2}\gamma^2e'-\frac{513}{32}e^2e'+\frac{1785}{128}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$\left.+\left(\frac{1599}{64}e'-\frac{1341}{8}\gamma^2e'-\frac{1017}{32}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{227}{8}e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{3682741}{12288}e'\frac{n'^6}{n^6}-\frac{55}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]$$

$$\times\sin(2h+2g+2l-2h'-2g'-l')$$

$$+\left[\frac{477}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{423}{64}e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2(2h+2g+2l-2h'-2g'-l');$$

g par

$$g+\left[\left(\frac{3}{4}e'-\frac{21}{16}\gamma^2e'-\frac{75}{64}e^2e'-\frac{3}{32}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{3}{16}e'+\frac{57}{32}\gamma^2e'-\frac{969}{128}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{27}{16}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{461}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h+2g+2l-2g'-2h'-l')$$

$$+\frac{9}{32}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2h+2g+2l-2h'-2g'-l');$$

h par

$$\begin{aligned} h + \Big[& \left(\frac{3}{16}e' - \frac{3}{16}\gamma^2 e' - \frac{3}{8}e^2 e' - \frac{3}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & + \left(\frac{15}{4}e' - \frac{471}{32}\gamma^2 e' - \frac{33}{8}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{447}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{67}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}\Big] \sin(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - l') \\ & + \frac{9}{128}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2h + 2g + 2l - 2h' - 2g' - l'). \end{aligned}$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{28}), (G'_{28}), (H'_{28}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$$\begin{aligned} L_0 = {} & \text{ancienne valeur de L (page 558)} \\ & + \sqrt{a\mu}\Big\{ - \left(\frac{9}{256}e'^2 - \frac{9}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{45}{256}e^2 e'^2 - \frac{9}{1024}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{117}{256}e'^2 - \frac{477}{128}\gamma^2 e'^2 - \frac{927}{512}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\ & \qquad - \frac{2259}{1024}e'^2\frac{n'^6}{n^6} - \frac{2739}{512}e'^2\frac{n'^7}{n^7}\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 = \sqrt{a\mu}\Big\{ & - \left(\frac{3}{8}e' - \frac{3}{4}\gamma^2 e' - \frac{15}{16}e^2 e' - \frac{3}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{39}{16}e' - 15\gamma^2 e' - \frac{57}{16}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} \\ & - \frac{123}{32}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{227}{64}e'\frac{n'^5}{n^5}\Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_0 = {} & \text{ancienne valeur de G (page 559)} \\ & + \sqrt{a\mu}\Big\{ - \left(\frac{9}{256}e'^2 - \frac{9}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{117}{512}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{117}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{2259}{1024}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0 = {} & \text{ancienne valeur de H (page 559)} \\ & + \sqrt{a\mu}\Big\{ - \left(\frac{9}{256}e'^2 - \frac{45}{128}\gamma^2 e'^2 - \frac{117}{512}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{117}{256}e'^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{2259}{1024}e'^2\frac{n'^6}{n^6}\Big\}. \end{aligned}$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0\,(t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{28}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots\ldots) = \\ & \sqrt{a\mu}\Big\{ - \left(\frac{63}{128}e'^2 - \frac{117}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{585}{256}e^2 e'^2 - \frac{63}{512}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4} - \left(\frac{1989}{256}e'^2 - \frac{477}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{927}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\ & \qquad - \frac{11295}{256}e'^2\frac{n'^6}{n^6} - \frac{62997}{512}e'^2\frac{n'^7}{n^7}\Big\}. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 568 à 570) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 28^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)-\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (82) de R, joint à la quantité $+\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [28 . . . . 1, 82]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H, seront

$$\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\,\Big\{1+\Big(\frac{13}{64}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{525}{32}e^2+\frac{195}{128}e'^2+\frac{165}{32}\gamma^4+\frac{1701}{32}\gamma^2e^2-\frac{45}{16}\gamma^2e'^2$$

$$+\frac{11647}{1024}e^4-\frac{7875}{64}e^2e'^2+\frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{2915}{32}e^2+\frac{2133}{32}e'^2+33\gamma^4+\frac{5399}{16}\gamma^2e^2-\frac{4509}{16}\gamma^2e'^2$$

$$+\frac{9487}{128}e^4-\frac{78705}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\Big(\frac{153}{8}-\frac{1781}{32}\gamma^2-\frac{107161}{256}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\Big(\frac{22441}{288}-\frac{178583}{576}\gamma^2-\frac{3503591}{2304}e^2+\frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\,\Big\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\Big(\frac{13}{64}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{219}{128}e^2+\frac{195}{128}e'^2+\frac{165}{32}\gamma^4+\frac{153}{8}\gamma^2e^2-\frac{45}{16}\gamma^2e'^2-\frac{103121}{1024}e^4-\frac{3285}{256}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{153}{8}-\frac{1781}{32}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};$$

$$\mathrm{H}=\sqrt{a\mu}\Big\{1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{187}{32}\gamma^2-\frac{219}{128}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{1335}{32}\gamma^4-\frac{635}{64}\gamma^2e^2+\frac{2805}{64}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{103121}{1024}e^4-\frac{3285}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{an}\Big\{2+\left(\frac{1931}{32}-\frac{1623}{8}\gamma^2+\frac{34553}{128}e^2+\frac{28965}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{1651}{8}-\frac{2727}{4}\gamma^2+\frac{31323}{16}e^2+\frac{44577}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{60649}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1528783}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{261}{4}-\frac{3225}{16}\gamma^2-\frac{9067}{128}e^2+\frac{3915}{8}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{687}{2}-1242\gamma^2-\frac{3585}{8}e^2+\frac{18549}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{103599}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{69271}{12}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}}=-\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{3}{8}-\frac{165}{16}\gamma^2-\frac{1695}{32}e^2+\frac{45}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{167}{8}-66\gamma^2-327e^2+\frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1781}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{178583}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-e^2+\left(\frac{1881}{64}-\frac{1089}{16}\gamma^2-\frac{40505}{128}e^2+\frac{28215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6$$

$$+\left(\frac{1881}{64}-\frac{1089}{16}\gamma^2-477e^2+\frac{28215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}}=\frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{1095}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2 n\gamma} \cdot \frac{339}{64}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{ 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{199}{64} + \frac{367}{32}\gamma^2 - \frac{1461}{128}e^2 + \frac{2985}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{2147}{48}\frac{n'^6}{n^6} \right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{ 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{199}{64} - \frac{189}{4}\gamma^2 - \frac{1461}{128}e^2 + \frac{2985}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{2147}{48}\frac{n'^6}{n^6} \right\}.$$

29^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (37) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (37) * dans lequel l'argument est $2g + 2l$ et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 \right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$
$$- \left(\frac{31}{32} - 3\gamma^2 - \frac{119}{4}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{219}{16}\gamma^4 + \frac{1473}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{45}{2}\gamma^2 e'^2 \right.$$
$$\left. + \frac{10067}{512}e^4 - \frac{1785}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$- \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{8253}{64}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$- \left(\frac{5515}{192} - \frac{10133}{96}\gamma^2 - \frac{428263}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$
$$\left. + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2} \right\}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (37), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt-huit premières opérations.

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \left\{ \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{15}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{69}{32}\gamma^2 e^4 - \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \right.$$

$$\left. - \left(\frac{39}{8}\gamma^4 + \frac{195}{32}\gamma^2 e^2 + \frac{27}{32}\gamma^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{19}{4}\gamma^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{5639}{192}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{45}{16}\gamma^2 \frac{a^2}{a'^2} \right\}$$

$$\times \cos(2g + 2l).$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 2, \quad i' = 2, \quad i'' = 0, \quad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{G}}{dt}, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

La seconde de ces équations montre que H est constant; et si l'on intègre la première, il vient

$$\mathrm{G} = \mathrm{L} + (\mathrm{G}),$$

(G) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie H aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et e en fonction de γ; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{29}) \left\{ \begin{aligned} a = \frac{\mathrm{H}^2}{\mu} \Big\{ & 1 + 4\gamma^2 - 2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + 12\gamma^4 - 4\gamma^2 \frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2} + 32\gamma^6 - 8\gamma^4 \frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} \\ & - \left[\frac{13}{32} + \frac{191}{8}\gamma^2 + \frac{959}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{195}{64} e'^2 \right] \frac{n'^4 \mathrm{H}^{12}}{\mu^8} \\ & - \left[\frac{79}{8} + \frac{8587}{24}\gamma^2 + \frac{393}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{2133}{16} e'^2 \right] \frac{n'^5 \mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 \mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 \mathrm{H}^{21}}{\mu^{14}} \Big\}, \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{B}_{29}) \quad e^2 = -2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} \left\{ 1 - 2\gamma^2 + \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} - 6\gamma^2 \frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + 2\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2} + \frac{947}{32}\frac{n'^4 \mathrm{H}^{12}}{\mu^8} + \frac{13739}{96}\frac{n'^5 \mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}} \right\}.$$

Si l'on remplace a et e^2 par leurs valeurs en γ dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = \mathrm{H} \left\{ 1 + 2\gamma^2 - \frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + 4\gamma^4 + 8\gamma^6 - \frac{53}{8}\gamma^2 \frac{n'^4 \mathrm{H}^{12}}{\mu^8} - \frac{1531}{48}\gamma^2 \frac{n'^5 \mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}} \right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{29})\left\{\begin{aligned}
\frac{d.\gamma^2}{dt} = -\frac{n'^2 \mathrm{H}^3}{\mu^2}\Big\{&\frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{9}{2}\gamma^4 + \frac{3}{2}\gamma^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + 12\gamma^6 + \frac{3}{2}\gamma^4\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{27}{4}\gamma^4 e'^2 \\
&- \frac{9}{8}\gamma^2\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2} + \frac{9}{4}\gamma^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}e'^2 - \left[\frac{39}{8}\gamma^4 - \frac{195}{16}\gamma^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{27}{32}\gamma^2 e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4} \\
&- \frac{19}{4}\gamma^2\frac{n'^3\mathrm{H}^9}{\mu^6} - \frac{4919}{192}\gamma^2\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{16}\gamma^2\cdot\frac{\mathrm{H}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dg}{dt} + 2\frac{dl}{dt} = -2\frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dG};$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{de}{dL}$, $\ldots$ données à la suite de la 28^e opération, et remplaçant a et e^2 par leurs valeurs en γ, on trouve

$$(\mathrm{D}_{29})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{\mathrm{H}^3}\Big\{&2 - 12\gamma^2 + 6\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + 24\gamma^4 - 48\gamma^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + 12\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2} \\
&- \left[\frac{1}{2} - 3\gamma^2 + \frac{3}{4}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4} + \frac{203}{16}\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\Big\} \\
- \frac{n'^2\mathrm{H}^3}{\mu^2}\Big\{&\frac{3}{2} + 15\gamma^2 + \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{9}{4}e'^2 + 66\gamma^4 + 9\gamma^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{45}{2}\gamma^2 e'^2 - \frac{9}{8}\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2} + \frac{9}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}e'^2 \\
&- \left[\frac{39}{4}\gamma^2 - \frac{195}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{27}{32}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4} - \frac{19}{4}\frac{n'^3\mathrm{H}^9}{\mu^6} - \frac{4919}{192}\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{16}\cdot\frac{\mathrm{H}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{29}), (D_{29}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable γ dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{29})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big\{\Big[&\frac{3}{4}\gamma_0^2 + \frac{27}{4}\gamma_0^4 - \frac{3}{2}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{9}{8}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{75}{2}\gamma_0^6 - \frac{21}{2}\gamma_0^4\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}} + \frac{81}{8}\gamma_0^4 e'^2 \\
&- \frac{9}{16}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2} - \frac{9}{4}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4}
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue a la page suivante

$$
(\mathrm{E}_{29})\left\{\begin{aligned}
&+\left[\frac{3}{16}\gamma_0^2-\frac{3}{4}\gamma_0^4+\frac{165}{32}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{9}{64}\gamma_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad-\frac{19}{8}\gamma_0^2\frac{n'^5\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{841}{48}\gamma_0^2\frac{n'^6\mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}}+\frac{45}{32}\gamma_0^2\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{H}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\frac{45}{32}\gamma_0^4\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{29})\left\{\begin{aligned}
&\theta=\theta_0(t+c)\\
&-\Big\{\left[\frac{3}{4}+\frac{33}{2}\gamma_0^2-\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{9}{8}e'^2+\frac{291}{2}\gamma_0^4-27\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{99}{4}\gamma_0^2 e'^2-\frac{9}{16}\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}-\frac{9}{4}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4}\\
&\quad+\left[\frac{3}{16}-\frac{3}{4}\gamma_0^2+\frac{165}{32}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{9}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad-\frac{19}{8}\frac{n'^5\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{13375}{768}\frac{n'^6\mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}}+\frac{45}{32}\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{H}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta_0(t+c)\\
&+\Big\{\left[\frac{9}{64}+\frac{63}{16}\gamma_0^2-\frac{9}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{27}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}+\frac{9}{128}\frac{n'^6\mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&-\frac{9}{256}\frac{n'^6\mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

γ_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\theta_0=\frac{\mu^2}{\mathrm{H}^3}\Big\{2-12\gamma_0^2+6\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+24\gamma_0^4-48\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+12\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}-\left[\frac{1}{2}-3\gamma_0^2+\frac{3}{4}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4}+\frac{97}{8}\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\Big\}.
$$

Si l'on prend la valeur de γ^2 donnée par la formule (E_{29}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{29}), (B_{29}), on en déduit les valeurs de a et de e^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_{29})\left\{\begin{aligned}
&a=\frac{\mathrm{H}^2}{\mu}\Big\{1+4\gamma_0^2-2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+12\gamma_0^4-4\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}+32\gamma_0^6-8\gamma_0^4\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\\
&\qquad-\left[\frac{13}{32}+\frac{191}{8}\gamma_0^2+\frac{959}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad-\left[\frac{79}{8}+\frac{8587}{24}\gamma_0^2+\frac{393}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{H}^{21}}{\mu^{14}}\Big\}\\
&\quad+\frac{\mathrm{H}^2}{\mu}\Big\{\Big[3\gamma_0^2+45\gamma_0^4-9\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{9}{2}\gamma_0^2 e'^2+384\gamma_0^6-117\gamma_0^4\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{135}{2}\gamma_0^4 e'^2\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{15}{4}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}-\frac{27}{2}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4}
\end{aligned}\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$(\mathrm{G}_{29})\left\{\begin{aligned}
&+\left[\frac{3}{4}\gamma_0^2+\frac{3}{2}\gamma_0^4+\frac{159}{8}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{9}{16}\gamma_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad-\frac{19}{2}\gamma_0^2\frac{n'^5\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{8447}{96}\gamma_0^2\frac{n'^6\mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}}+\frac{45}{8}\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{H}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\frac{\mathrm{H}^2}{\mu}\cdot\frac{9}{4}\gamma_0^4\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{29})\left\{\begin{aligned}
e^2=&-2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\left\{1-2\gamma_0^2+\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}-6\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+2\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}+\frac{947}{32}\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}+\frac{13739}{96}\frac{n'^5\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\\
&+2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\left\{\left[\frac{3}{2}\gamma_0^2+\frac{27}{2}\gamma_0^4+\frac{3}{2}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{9}{4}\gamma_0^2 e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{H}^6}{\mu^4}+\frac{3}{8}\gamma_0^2\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et e_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et e^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0=\frac{\mathrm{H}^2}{\mu}\Bigg\{&1+4\gamma_0^2-2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+12\gamma_0^4-4\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}+32\gamma_0^6-8\gamma_0^4\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\\
&-\left[\frac{13}{32}+\frac{191}{8}\gamma_0^2+\frac{959}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\\
&-\left[\frac{79}{8}+\frac{8587}{24}\gamma_0^2+\frac{393}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{H}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$e_0^2=-2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\left\{1-2\gamma_0^2+\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}-6\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+2\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}+\frac{947}{32}\frac{n'^4\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}+\frac{13739}{96}\frac{n'^5\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et H en fonction de a_0 et e_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et H par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{29}), (F_{29}), (G_{29}), (H_{29}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}},$$

$$(\mathrm{E}'_{29})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2=\gamma_0^2+\Bigg[\Bigg(&\frac{3}{4}\gamma_0^2-\frac{9}{4}\gamma_0^4-\frac{3}{2}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{8}\gamma_0^2e'^2+\frac{3}{2}\gamma_0^6+\frac{9}{2}\gamma_0^4e_0^2-\frac{27}{8}\gamma_0^4e'^2\\
&\qquad+\frac{27}{64}\gamma_0^2e_0^4-\frac{9}{4}\gamma_0^2e_0^2e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&+\left(\frac{3}{16}\gamma_0^2-\frac{21}{4}\gamma_0^4-\frac{237}{64}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9}{64}\gamma_0^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad-\frac{19}{8}\gamma_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{6377}{384}\gamma_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{45}{32}\gamma_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
&-\frac{45}{32}\gamma_0^4\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{F}'_{29})\left\{
\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& - \Bigg[\left(\frac{3}{4} + \frac{15}{2}\gamma_0^2 - \frac{3}{2}e_0^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{15}{2}\gamma_0^4 - \frac{33}{2}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{45}{4}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{27}{64}e_0^4 - \frac{9}{4}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \qquad + \left(\frac{3}{16} - \frac{21}{4}\gamma_0^2 - \frac{237}{64}e_0^2 + \frac{9}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{19}{8}\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{12673}{768}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{45}{32}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\
& + \left[\left(\frac{9}{64} + \frac{9}{16}\gamma_0^2 - \frac{9}{16}e_0^2 + \frac{27}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{9}{128}\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\sin 2\theta_0(t+c) \\
& - \frac{9}{256}\frac{n'^6}{n_0^6}\sin 3\theta_0(t+c);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{G}'_{29})\left\{
\begin{aligned}
a = a_0\Bigg\{1 + \Bigg[& \left(3\gamma_0^2 - 3\gamma_0^4 - \frac{15}{2}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{9}{2}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{15}{2}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{9}{2}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{69}{16}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{45}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \left(\frac{3}{4}\gamma_0^2 - \frac{39}{2}\gamma_0^4 - \frac{243}{16}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{9}{16}\gamma_0^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
& \qquad - \frac{19}{2}\gamma_0^2\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{7979}{96}\gamma_0^2\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{45}{8}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c) \\
& - \frac{9}{4}\gamma_0^4\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c)\Bigg\};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{H}'_{29})\ e^2 = e_0^2 - \left[\left(\frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{33}{8}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{9}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{3}{8}\gamma_0^2 e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos\theta_0(t+c).
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$
\theta_0 = n_0\left[2 - \left(\frac{1}{2} - 6\gamma_0^2 - \frac{3}{4}e_0^2 + \frac{3}{4}e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{349}{32}\frac{n'^4}{n_0^4}\right].
$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de l en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}},
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} & \left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right] \\
& - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{2}\gamma^2 - 3\gamma^4 - \frac{33}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 - 57\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{7}{4} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{21}{8}e'^2 + \frac{1257}{64}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$+ \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{195}{16}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{29}), (F'_{29}), (G'_{29}), (H'_{29}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{29})\left\{\begin{aligned} &h + g + l = (h) + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + h_0\right)(t + c) \\ &\qquad - \left[\left(\frac{9}{2}\gamma_0^2 - \frac{15}{4}\gamma_0^4 - \frac{39}{4}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{27}{4}\gamma_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{9}{4}\gamma_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{285}{8}\gamma_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t + c); \end{aligned}\right.$$

$$(L_{29})\left\{\begin{aligned} &l = -(g) + \left(\frac{1}{2}\theta_0 - g_0\right)(t + c) \\ &\qquad - \left[\left(\frac{3}{2}\gamma_0^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^4 - \frac{81}{16}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{9}{4}\gamma_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{165}{32}\gamma_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t + c). \end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. Les formes sous lesquelles nous avons mis les parties non périodiques des valeurs de $h + g + l$ et de l viennent de ce que l'on a

$$h + g + l = \frac{1}{2}\theta + h, \qquad l = \frac{1}{2}\theta - g.$$

Les six formules (E'_{29}), (F'_{29}), (G'_{29}), (H'_{29}), (K_{29}), (L_{29}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (37); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que $g + l$ est égal à $\frac{1}{2}\theta$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1 + \left[\left(3\gamma^2 - 3\gamma^4 - \frac{15}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{15}{2}\gamma^4 e^2 - \frac{9}{2}\gamma^4 e'^2 + \frac{69}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{45}{4}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{39}{2}\gamma^4-\frac{243}{16}\gamma^2e^2+\frac{9}{16}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{19}{2}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{7979}{96}\gamma^2\frac{n'^6}{n^6}+\frac{45}{8}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(2g+2l)$$

$$-\frac{9}{4}\gamma^4\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2g+2l)\Bigg\};$$

e^2 par

$$e^2-\left[\left(\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{3}{2}\gamma^4e^2-\frac{33}{8}\gamma^2e^4+\frac{9}{4}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3}{8}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2g+2l);$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\Bigg[\left(\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{9}{4}\gamma^4-\frac{3}{2}\gamma^2e^2+\frac{9}{8}\gamma^2e'^2+\frac{3}{2}\gamma^6+\frac{9}{2}\gamma^4e^2-\frac{27}{8}\gamma^4e'^2+\frac{27}{64}\gamma^2e^4-\frac{9}{4}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{3}{16}\gamma^2-\frac{21}{4}\gamma^4-\frac{237}{64}\gamma^2e^2+\frac{9}{64}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{19}{8}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{6377}{384}\gamma^2\frac{n'^6}{n^6}+\frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(2g+2l)$$

$$-\frac{45}{32}\gamma^4\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2g+2l);$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{9}{2}\gamma^2-\frac{15}{4}\gamma^4-\frac{39}{4}\gamma^2e^2+\frac{27}{4}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{4}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{285}{8}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2g+2l);$$

$g+l$ par

$$g+l-\Bigg[\left(\frac{3}{8}+\frac{15}{4}\gamma^2-\frac{3}{4}e^2+\frac{9}{16}e'^2-\frac{15}{4}\gamma^4-\frac{33}{4}\gamma^2e^2+\frac{45}{8}\gamma^2e'^2+\frac{27}{128}e^4-\frac{9}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{3}{32}-\frac{21}{8}\gamma^2-\frac{237}{128}e^2+\frac{9}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{19}{16}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{12673}{1536}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{45}{64}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin(2g+2l)$$

$$+\left[\left(\frac{9}{128}+\frac{9}{32}\gamma^2-\frac{9}{32}e^2+\frac{27}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{256}\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin 2(2g+2l)$$

$$-\frac{9}{512}\frac{n'^6}{n^6}\sin 3(2g+2l);$$

l par

$$l-\left[\left(\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma^4-\frac{81}{16}\gamma^2e^2+\frac{9}{4}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{165}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2g+2l).$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{29}), (G'_{29}), (H'_{29}), dans les expressions de L, G, H, en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0, et n_0,

$$L_0 = \text{ancienne valeur de L (page 571)}$$

$$- \sqrt{a\mu}\cdot\frac{9}{16}\gamma^4\frac{n'^4}{n^4},$$

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\Big\{\left(\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{3}{8}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{19}{4}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}\Big\};$$

$$G_0 = \text{ancienne valeur de G (page 571)}$$

$$- \sqrt{a\mu}\cdot\frac{9}{16}\gamma^4\frac{n'^4}{n^4};$$

$$H_0 = \text{ancienne valeur de H (page 572)}$$

$$- \sqrt{a\mu}\cdot\frac{27}{16}\gamma^4\frac{n'^4}{n^4}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0\,(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{29}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) =$$

$$\sqrt{a\mu}\Big\{-\left(\frac{9}{16}\gamma^2 + \frac{81}{16}\gamma^4 - \frac{81}{32}\gamma^2 e^2 + \frac{27}{16}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{9}{32}\gamma^2\frac{n'^6}{n^6} + \frac{57}{16}\gamma^2\frac{n'^7}{n^7}\Big\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29** et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 579 et 580) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 29^e opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (37) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1), et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [29 · · · 1, 37]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &+ \Big(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{525}{32}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + \frac{891}{16}\gamma^2e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2e'^2 \\
&\qquad + \frac{11647}{1024}e^4 - \frac{7875}{64}e^2e'^2 + \frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{2915}{32}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2 + 33\gamma^4 + \frac{5399}{16}\gamma^2e^2 - \frac{4509}{16}\gamma^2e'^2 \\
&\qquad + \frac{9487}{128}e^4 - \frac{78705}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \Big(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{107161}{256}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \Big(\frac{22441}{288} - \frac{176531}{576}\gamma^2 - \frac{3503591}{2304}e^2 + \frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7} \\
&\qquad + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \Big(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{219}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + \frac{693}{32}\gamma^2e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2e'^2 - \frac{103121}{1024}e^4 - \frac{3285}{256}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{4225}{192}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{144293}{1536}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&\qquad + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ 1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \Big(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 - \frac{219}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{1389}{32}\gamma^4 - \frac{635}{64}\gamma^2e^2 + \frac{2805}{64}\gamma^2e'^2 \\
&\qquad - \frac{103121}{1024}e^4 - \frac{3285}{256}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(\frac{79}{16} + \frac{55}{48}\gamma^2 - \frac{4225}{192}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{153}{8} + \frac{3245}{96}\gamma^2 - \frac{144293}{1536}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&\qquad + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{dL} = \frac{1}{an}\Big\{ 2 + \left(\frac{1931}{32} - \frac{1587}{8}\gamma^2 + \frac{34553}{128}e^2 + \frac{28965}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{1651}{8} - \frac{2727}{4}\gamma^2 + \frac{31323}{16}e^2 + \frac{44577}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{60649}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1528783}{576}\frac{n'}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{dG} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{1035}{16} - \frac{3549}{16}\gamma^2 - \frac{8779}{128}e^2 + \frac{7803}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{687}{2} - 1242\gamma^2 - \frac{3585}{8}e^2 + \frac{18549}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{103581}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{277255}{48}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{dH} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1767}{32}e^2 + \frac{9}{2}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - 327e^2 + \frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{ 1 - e^2 + \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - \frac{40505}{128}e^2 + \frac{28215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{ 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - \frac{30519}{64}e^2 + \frac{28215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{69}{4}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{375}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{217}{64} + \frac{619}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3093}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3093}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

30$^{\text{e}}$ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (41) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (41)[*], dans lequel l'argument est $2g + 2l + l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \Big(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{119}{4}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{777}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{207}{8}\gamma^2 e'^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{10067}{512}e^4 - \frac{1785}{8}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \Big(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{8253}{64}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \Big(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{428263}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \Big[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\Big]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{9}{4}\gamma^2 e - \frac{9}{4}\gamma^4 e' - \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e' + \frac{81}{32}\gamma^2 e'^3 \\
& \qquad - \Big(\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{117}{8}\gamma^4 e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e^2 e'\Big)\frac{n'}{n} - \frac{319}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\Big\}\cos(2g + 2l + l').
\end{aligned}$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 2, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{G}}{dt}, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

---

[*] Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (41), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des vingt-neuf premières opérations.

La seconde de ces équations montre que H est constant; et si l'on intègre la première, il vient

$$G = L + (G),$$

(G) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie H aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et e en fonction de γ; en les résolvant, on trouve

$$(A_{30})\left\{\begin{aligned} a = \frac{H^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 4\gamma^2 - 2\frac{(G)}{H} + 12\gamma^4 - 4\gamma^2\frac{(G)}{H} + \frac{(G)^2}{H^2} + 32\gamma^6 - 8\gamma^4\frac{(G)}{H} \\ & - \left[\frac{13}{32} + \frac{191}{8}\gamma^2 + \frac{959}{16}\frac{(G)}{H} + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 H^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(B_{30})\quad e^2 = -2\frac{(G)}{H}\Big\{1 - 2\gamma^2 + \frac{3}{2}\frac{(G)}{H} - 6\gamma^2\frac{(G)}{H} + 2\frac{(G)^2}{H^2} + \frac{947}{32}\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8}\Big\}.$$

Si l'on remplace a et e^2 par leurs valeurs en γ dans l'expression de L, il vient

$$L = H\Big\{1 + 2\gamma^2 - \frac{(G)}{H} + 4\gamma^4 + 8\gamma^6 - \frac{115}{16}\gamma^2\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{30})\left\{\begin{aligned} \frac{d.\gamma^2}{dt} = -\frac{n'^2 H^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{27}{4}\gamma^4 e' + \frac{9}{4}\gamma^2\frac{(G)}{H}e' + \frac{81}{32}\gamma^2 e'^3 \\ & - \left[\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{27}{8}\gamma^4 e' + \frac{9}{8}\gamma^2\frac{(G)}{H}e'\right]\frac{n' H^3}{\mu^2} - \frac{319}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^3 H^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dg}{dt} + 2\frac{dl}{dt} + n' = -2\frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dG} + n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{dL}$, $\dfrac{da}{dG}$, $\dfrac{de}{dL}$, ... données à la suite de la 29^e opération, et remplaçant a et e^2 par leurs valeurs en γ, on trouve

$$(D_{30})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{H^3}\Big\{ & 2 - 12\gamma^2 + 6\frac{(G)}{H} + \frac{n' H^3}{\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{n'^2 H^6}{\mu^4}\Big\} \\ & - \frac{n'^2 H^3}{\mu^2}\Big\{\frac{9}{4}e' + \frac{45}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{4}\frac{(G)}{H}e' + \frac{81}{32}e'^3 \\ & - \left[\frac{9}{8}e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{9}{8}\frac{(G)}{H}e'\right]\frac{n' H^3}{\mu^2} - \frac{319}{16}e'\frac{n'^3 H^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{30}), (D_{30}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}L\right)$ a été remplacée par la variable γ dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(E_{30})\left\{\begin{aligned}\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big\{&\left[\frac{9}{8}\gamma_0^2 e' + \frac{81}{8}\gamma_0^4 e' - \frac{9}{4}\gamma_0^2 \frac{(G)}{H} e' + \frac{81}{64}\gamma_0^2 e'^3\right]\frac{n'^2 H^6}{\mu^4}\\ &- \left[\frac{9}{8}\gamma_0^2 e' + \frac{81}{8}\gamma_0^4 e' - \frac{63}{16}\gamma_0^2 \frac{(G)}{H} e'\right]\frac{n'^3 H^9}{\mu^6}\\ &+ \frac{27}{32}\gamma_0^2 e' \frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{683}{64}\gamma_0^2 e' \frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(F_{30})\left\{\begin{aligned}\theta = \theta_0&(t+c)\\ &- \Big\{\left[\frac{9}{8}e' + \frac{99}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{9}{4}\frac{(G)}{H}e' + \frac{81}{64}e'^3\right]\frac{n'^2 H^6}{\mu^4}\\ &\qquad - \left[\frac{9}{8}e' + \frac{99}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{63}{16}\frac{(G)}{H}e'\right]\frac{n'^3 H^9}{\mu^6} + \frac{27}{32}e'\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{683}{64}e'\frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\sin\theta_0(t+c)\\ &+ \frac{81}{256}e'^2\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8}\sin 2\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

γ_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{H^3}\left\{2 - 12\gamma_0^2 + 6\frac{(G)}{H} + \frac{n' H^3}{\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{n'^2 H^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si l'on prend la valeur de γ^2 donnée par la formule (E_{30}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{30}), (B_{30}), on en déduit les valeurs de a et de e^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{30})\left\{\begin{aligned}a = \frac{H^2}{\mu}\Big\{&1 + 4\gamma_0^2 - 2\frac{(G)}{H} + 12\gamma_0^4 - 4\gamma_0^2\frac{(G)}{H} + \frac{(G)^2}{H^2} + 32\gamma_0^6 - 8\gamma_0^4\frac{(G)}{H}\\ &- \left[\frac{13}{32} + \frac{191}{8}\gamma_0^2 + \frac{959}{16}\frac{(G)}{H} + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 H^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{G}_{30})\left\{\begin{aligned}
&+\frac{\mathrm{H}^2}{\mu}\left\{\left[\frac{9}{2}\gamma_0^2 e'+\frac{135}{2}\gamma_0^4 e'-\frac{27}{2}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}e'+\frac{81}{16}\gamma_0^2 e'^3\right]\frac{n'^2\,\mathrm{H}^6}{\mu^4}\right.\\
&\qquad-\left[\frac{9}{2}\gamma_0^2 e'+\frac{135}{2}\gamma_0^4 e'-\frac{81}{4}\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}e'\right]\frac{n'^3\,\mathrm{H}^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{27}{8}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4\,\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}-\frac{683}{16}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5\,\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{30})\left\{\begin{aligned}
&e^2=-2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\left\{1-2\gamma_0^2+\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}-6\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+2\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}+\frac{947}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\right\}\\
&\quad+2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\left\{\frac{9}{4}\gamma_0^2 e'\frac{n'^2\,\mathrm{H}^6}{\mu^4}-\frac{9}{4}\gamma_0^2 e'\frac{n'^3\,\mathrm{H}^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et e_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et e^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0=\frac{\mathrm{H}^2}{\mu}&\left\{1+4\gamma_0^2-2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+12\gamma_0^4-4\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}+32\gamma_0^6-8\gamma_0^4\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\right.\\
&\left.-\left[\frac{13}{32}+\frac{191}{8}\gamma_0^2+\frac{959}{16}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\,\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}-\frac{79}{8}\frac{n'^5\,\mathrm{H}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\,\mathrm{H}^{18}}{\mu^{12}}\right\},
\end{aligned}$$

$$e_0^2=-2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}\left\{1-2\gamma_0^2+\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}-6\gamma_0^2\frac{(\mathrm{G})}{\mathrm{H}}+2\frac{(\mathrm{G})^2}{\mathrm{H}^2}+\frac{947}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{H}^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et H en fonction de a_0 et e_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et H par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{30}), (F_{30}), (G_{30}), (H_{30}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{30})\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2=\gamma_0^2+\left[\left(\frac{9}{8}\gamma_0^2 e'-\frac{27}{8}\gamma_0^4 e'-\frac{9}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e'+\frac{81}{64}\gamma_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{9}{8}\gamma_0^2 e'-\frac{81}{8}\gamma_0^4 e'-\frac{99}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{27}{32}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}-\frac{683}{64}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{30})\left\{\begin{aligned}
&\theta=\theta_0(t+c)\\
&\quad-\left[\left(\frac{9}{8}e'+\frac{45}{4}\gamma_0^2 e'-\frac{9}{4}e_0^2 e'+\frac{81\,e'^3}{64}\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{9}{8}e'+\frac{9}{2}\gamma_0^2 e'-\frac{99}{32}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{27}{32}e'\frac{n'^4}{n_0^4}-\frac{683}{64}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad+\frac{81}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{30})\left\{\begin{aligned} a = a_0 \Big\{ 1 + \Big[& \left(\frac{9}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{9}{2}\gamma_0^4 e' - \frac{45}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{81}{16} e_0^2 e'^3 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ & - \left(\frac{9}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{63}{2}\gamma_0^4 e' - \frac{117}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e' \right) \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{27}{8}\gamma_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{683}{16}\gamma_0^2 e' \frac{n'^5}{n_0^5} \Big] \cos\theta_0 (t+c) \Big\}; \end{aligned}\right.$$

$$(H'_{30})\quad e^2 = e_0^2 - \left[\frac{9}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{9}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' \frac{n'^3}{n_0^3} \right] \cos\theta_0 (t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0 \left[2 + \frac{n'}{n_0} - \frac{1}{2}\frac{n'^2}{n_0^2} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de l en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} & \left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2} \right] \\ & - \frac{n'^2}{n} \left[\frac{27}{4}\gamma^2 e' - \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{99}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{27}{4}\gamma^2 e' \frac{n'}{n} \right] \cos\theta, \end{aligned}$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n} \left[\frac{9}{4}\gamma^2 e' - \frac{9}{8}\gamma^2 e' \frac{n'}{n} \right] \cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{30}), (F'_{30}), (G'_{30}), (H'_{30}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{30})\left\{\begin{aligned} h+g+l = (h) - \frac{1}{2}l' + & \left(\frac{1}{2}\theta_0 + h_0 \right)(t+c) \\ & - \left[\left(\frac{27}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{45}{8}\gamma_0^4 e' - \frac{117}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e' \right) \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{81}{8}\gamma_0^2 e' \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{81}{8}\gamma_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} \right] \sin\theta_0 (t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{30})\quad l = -(g) - \frac{1}{2}l' + \left(\frac{1}{2}\theta_0 - g_0 \right)(t+c) - \left[\frac{9}{4}\gamma_0^2 e' \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{63}{16}\gamma_0^2 e' \frac{n'^3}{n_0^3} \right] \sin\theta_0 (t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0

sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. Les formes sous lesquelles nous avons mis les parties non périodiques des valeurs de $h + g + l$ et de l viennent de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + h - \frac{1}{2}l', \qquad l = \frac{1}{2}\theta - g - \frac{1}{2}l'.$$

Les six formules (E'_{30}), (F'_{30}), $G'_{30})$, (H'_{30}), (K_{30}), (L_{30}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (41); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que $g + l$ est égal à $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}l'$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1 + \left[\left(\frac{9}{2}\gamma^2 e' - \frac{9}{2}\gamma^4 e' - \frac{45}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{81}{16}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{9}{2}\gamma^2 e' - \frac{63}{2}\gamma^4 e' - \frac{117}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{27}{8}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{683}{16}\gamma^2 e' \frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2g+2l+l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2 - \left[\frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2g+2l+l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2 + \left[\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{27}{8}\gamma^4 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{81}{64}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{81}{8}\gamma^4 e' - \frac{99}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{27}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{683}{64}\gamma^2 e' \frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2g+2l+l'),$$

$h + g + l$ par

$$h+g+l - \left[\left(\frac{27}{4}\gamma^2 e' - \frac{45}{8}\gamma^4 e' - \frac{117}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{81}{8}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{81}{8}\gamma^2 e' \frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2g+2l+l'),$$

$g + l$ par

$$g + l - \left[\left(\frac{9}{16}e' + \frac{45}{8}\gamma^2 e' - \frac{9}{8}e^2 e' + \frac{81}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{9}{16}e' + \frac{9}{4}\gamma^2 e' - \frac{99}{64}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{27}{64}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{683}{128}e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2g + 2l + l')$$

$$+ \frac{81}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2g + 2l + l'),$$

l par

$$l - \left[\frac{9}{4}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{63}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2g + 2l + l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{30}), (G'_{30}), (H'_{30}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 582),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{\frac{9}{4}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{9}{4}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 582);

H_0 = ancienne valeur de H (page 582).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0\,(t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{30}); en y supprimant également les indices de e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{81}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{81}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 589 et 590) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 30ᵉ opération, et y ajoutant

$$-\frac{1}{2}n'(L - L_0) + \frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (41) de R, joint à la quantité $-\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$+\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV, avec l'indication [30 . . . . . 1, 41]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{525}{32}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+\frac{891}{16}\gamma^2e^2-\frac{369}{64}\gamma^2e'^2\\
&\qquad+\frac{11647}{1024}e^4-\frac{7875}{64}e^2e'^2+\frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{2915}{32}e^2+\frac{2133}{32}e'^2+33\gamma^4+\frac{5399}{16}\gamma^2e^2-\frac{8937}{32}\gamma^2e'^2\\
&\qquad+\frac{9487}{128}e^4-\frac{78705}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{107161}{256}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+\Big(\frac{22441}{288}-\frac{176531}{576}\gamma^2-\frac{3503591}{2304}e^2+\frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\
&+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{219}{128}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+\frac{693}{32}\gamma^2e^2-\frac{369}{64}\gamma^2e'^2\\
&\qquad-\frac{103121}{1024}e^4-\frac{3285}{256}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

Quant à la valeur de H, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 29^e opération (page 582). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{da}{dL} = \frac{1}{an}\Big\{ & 2 + \left(\frac{1931}{32} - \frac{1587}{8}\gamma^2 + \frac{34553}{128}e^2 + \frac{28965}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \left(\frac{1651}{8} - \frac{2727}{4}\gamma^2 + \frac{31323}{16}e^2 + \frac{44577}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{60649}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1528783}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{dG} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{1035}{16} - \frac{3549}{16}\gamma^2 - \frac{8779}{128}e^2 + \frac{31131}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \left(\frac{687}{2} - 1242\gamma^2 - \frac{3585}{8}e^2 + \frac{148473}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{103581}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{277255}{48}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{dH} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1767}{32}e^2 + \frac{369}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - 327e^2 + \frac{8937}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - \frac{40505}{128}e^2 + \frac{28215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \\ & + \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - \frac{30519}{64}e^2 + \frac{28215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{69}{4}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{375}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ & + \left(\frac{217}{64} + \frac{619}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{1587}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ & 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ & + \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{1587}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.\end{aligned}$$

31^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (38) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (38)*, dans lequel l'argument est $2g + 2l - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{119}{4}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{777}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{909}{32}\gamma^2 e'^2 \right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{10067}{512}e^4 - \frac{1785}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{8253}{64}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{428263}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& \qquad\qquad - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{9}{4}\gamma^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^4 e' - \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e' + \frac{81}{32}\gamma^2 e'^3 \\
& \qquad + \left(\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{117}{8}\gamma^4 e' - \frac{9}{2}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n} - \frac{3505}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\Big\}\cos(2g + 2l - l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 2, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = -1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{G}}{dt}, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (38), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente premières opérations.

La seconde de ces équations montre que H est constant, et si l'on intègre la première, il vient

$$G = L + (G),$$

(G) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie H aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et e en fonction de γ; en les résolvant, on trouve

$$(A_{31})\left\{\begin{aligned} a = \frac{H^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 4\gamma^2 - 2\frac{(G)}{H} + 12\gamma^4 - 4\gamma^2\frac{(G)}{H} + \frac{(G)^2}{H^2} + 32\gamma^6 - 8\gamma^4\frac{(G)}{H} \\ & - \left[\frac{13}{32} + \frac{191}{8}\gamma^2 + \frac{959}{16}\frac{(G)}{H} + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 H^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(B_{31})\quad e^2 = -2\frac{(G)}{H}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{3}{2}\frac{(G)}{H} - 6\gamma^2\frac{(G)}{H} + 2\frac{(G)^2}{H^2} + \frac{947}{32}\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et e^2 par leurs valeurs en γ dans l'expression de L, il vient

$$L = H\left\{1 + 2\gamma^2 - \frac{(G)}{H} + 4\gamma^4 + 8\gamma^6 - \frac{115}{16}\gamma^2\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{31})\left\{\begin{aligned} \frac{d.\gamma^2}{dt} = -\frac{n'^2 H^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{27}{4}\gamma^4 e' + \frac{9}{4}\gamma^2\frac{(G)}{H}e' + \frac{81}{32}\gamma^2 e'^3 \\ & + \left[\frac{9}{8}\gamma^2 e' - \frac{27}{8}\gamma^4 e' + \frac{9}{8}\gamma^2\frac{(G)}{H}e'\right]\frac{n' H^3}{\mu^2} - \frac{3505}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3 H^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dg}{dt} + 2\frac{dl}{dt} - n' = -2\frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dG} - n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{de}{dL}$, … données à la suite de la 30^e opération, et remplaçant a et e^2 par leurs valeurs en γ, on trouve

$$(D_{31})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{H^3}\Big\{ & 2 - 12\gamma^2 + 6\frac{(G)}{H} - \frac{n' H^3}{\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{n'^2 H^6}{\mu^4}\Big\} \\ & - \frac{n'^2 H^3}{\mu^2}\Big\{\frac{9}{4}e' + \frac{45}{2}\gamma^2 e' + \frac{9}{4}\frac{(G)}{H}e' + \frac{81}{32}e'^3 \\ & + \left[\frac{9}{8}e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{9}{8}\frac{(G)}{H}e'\right]\frac{n' H^3}{\mu^2} - \frac{3505}{64}e'\frac{n'^3 H^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{31}), (D_{31}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}L\right)$ a été remplacée par la variable γ, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(E_{31})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big\{ & \left[\frac{9}{8}\gamma_0^2 e' + \frac{81}{8}\gamma_0^4 e' - \frac{9}{4}\gamma_0^2 \frac{(G)}{H} e' + \frac{81}{64}\gamma_0^2 e'^3\right] \frac{n'^2 H^6}{\mu^4} \\ & + \left[\frac{9}{8}\gamma_0^2 e' + \frac{81}{8}\gamma_0^4 e' - \frac{63}{16}\gamma_0^2 \frac{(G)}{H} e'\right] \frac{n'^3 H^9}{\mu^6} \\ & + \frac{27}{32}\gamma_0^2 e' \frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{3415}{128}\gamma_0^2 e' \frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}} \Big\} \cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(F_{31})\left\{\begin{aligned} \theta = \theta_0(t+c) & \\ - \Big\{ & \left[\frac{9}{8}e' + \frac{99}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{9}{4}\frac{(G)}{H} e' + \frac{81}{64}e'^3\right] \frac{n'^2 H^6}{\mu^4} \\ & + \left[\frac{9}{8}e' + \frac{99}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{63}{16}\frac{(G)}{H} e'\right] \frac{n'^3 H^9}{\mu^6} + \frac{27}{32}e' \frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{3415}{128}e' \frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}} \Big\} \sin\theta_0(t+c) \\ + \frac{81}{256} & e'^2 \frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} \sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

γ_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{H^3}\left\{2 - 12\gamma_0^2 + 6\frac{(G)}{H} - \frac{n' H^3}{\mu^2} - \frac{1}{2}\frac{n'^2 H^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si l'on prend la valeur de γ^2 donnée par la formule (E_{31}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{31}), (B_{31}), on en déduit les valeurs de a et de e^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{31})\left\{\begin{aligned} a = \frac{H^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 4\gamma_0^2 - 2\frac{(G)}{H} + 12\gamma_0^4 - 4\gamma_0^2\frac{(G)}{H} + \frac{(G)^2}{H^2} + 32\gamma_0^6 - 8\gamma_0^4\frac{(G)}{H} \\ & - \left[\frac{13}{32} + \frac{191}{8}\gamma_0^2 + \frac{959}{16}\frac{(G)}{H} + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 H^{18}}{\mu^{12}} \Big\} \end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(G_{31})\left\{\begin{aligned} &+\frac{H^2}{\mu}\Big\{\left[\frac{9}{2}\gamma_0^2 e' + \frac{135}{2}\gamma_0^4 e' - \frac{27}{2}\gamma_0^2\frac{(G)}{H}e' + \frac{81}{16}\gamma_0^2 e'^3\right]\frac{n'^2 H^6}{\mu^4} \\ &\qquad + \left[\frac{9}{2}\gamma_0^2 e' + \frac{135}{2}\gamma_0^4 e' - \frac{81}{4}\gamma_0^2\frac{(G)}{H}e'\right]\frac{n'^3 H^9}{\mu^6} \\ &\qquad\qquad + \frac{27}{8}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{3415}{32}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(H_{31})\left\{\begin{aligned} &e^2 = -2\frac{(G)}{H}\Big\{1 - 2\gamma_0^2 + \frac{3}{2}\frac{(G)}{H} - 6\gamma_0^2\frac{(G)}{H} + 2\frac{(G)^2}{H^2} + \frac{947}{32}\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8}\Big\} \\ &\quad + 2\frac{(G)}{H}\Big\{\frac{9}{4}\gamma_0^2 e'\frac{n'^2 H^6}{\mu^4} + \frac{9}{4}\gamma_0^2 e'\frac{n'^3 H^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et e_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et e^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{H^2}{\mu}\Big\{&1 + 4\gamma_0^2 - 2\frac{(G)}{H} - 12\gamma_0^4 - 4\gamma_0^2\frac{(G)}{H} + \frac{(G)^2}{H^2} + 32\gamma_0^6 - 8\gamma_0^4\frac{(G)}{H} \\ &- \left[\frac{13}{32} + \frac{191}{8}\gamma_0^2 + \frac{959}{16}\frac{(G)}{H} + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5 H^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 H^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}$$

$$e_0^2 = -2\frac{(G)}{H}\Big\{1 - 2\gamma_0^2 + \frac{3}{2}\frac{(G)}{H} - 6\gamma_0^2\frac{(G)}{H} + 2\frac{(G)^2}{H^2} + \frac{947}{32}\frac{n'^4 H^{12}}{\mu^8}\Big\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et H en fonction de a_0 et e_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et H par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{31}), (F_{31}), (G_{31}), (H_{31}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{31})\left\{\begin{aligned} &\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big[\left(\frac{9}{8}\gamma_0^2 e - \frac{27}{8}\gamma_0^4 e' - \frac{9}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{81}{64}\gamma_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ &\qquad + \left(\frac{9}{8}\gamma_0^2 e' - \frac{81}{8}\gamma_0^4 e' - \frac{99}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{27}{32}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{3415}{128}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Big]\cos\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{31})\left\{\begin{aligned} &\theta = \theta_0(t - c) \\ &\quad - \Big[\left(\frac{9}{8}e' + \frac{45}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{9}{4}e_0^2 e' + \frac{81}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ &\qquad + \left(\frac{9}{8}e' + \frac{9}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{99}{32}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{27}{32}e'\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{3415}{128}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Big]\sin\theta_0(t+c) \\ &\quad + \frac{81}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{31})\quad \begin{cases} a = a_0 \Big\{ 1 - \Big[\Big(\frac{9}{2}\gamma_0^2 e - \frac{9}{2}\gamma^2 e' - \frac{45}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e - \frac{81}{16}\gamma_0^2 e^3 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ \qquad - \Big(\frac{9}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{63}{2}\gamma_0^2 e - \frac{117}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e' \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{27}{8}\gamma_0^2 e \frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{3415}{32}\gamma_0^2 e \frac{n'^5}{n_0^5} \Big] \cos \vartheta_0 (t - c) \Big\} \end{cases}$$

$$(H'_{31})\quad e^2 = e_0^2 - \Big[\frac{9}{4}\gamma_0^2 e_0 e \frac{n'^2}{n_0} - \frac{9}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e \frac{n'^3}{n_0} \Big] \cos \vartheta_0 (t - c).$$

La valeur de ϑ_0 deviendra de même

$$\vartheta_0 = n_0 \Big[2 - \frac{n'}{n_0} - \frac{1}{2}\frac{n'^2}{n_0^2} \Big].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de l en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} \Big[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 - \frac{9}{8}e^2 - \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2} \Big]$$
$$- \frac{n'^2}{n} \Big[\frac{27}{4}\gamma^2 e - \frac{9}{2}\gamma^2 e - \frac{99}{8}\gamma^2 e^2 e - \frac{27}{4}\gamma^2 e \frac{n'}{n} \Big] \cos \vartheta,$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{7}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{n'^2}{n} \Big[\frac{9}{4}\gamma^2 e - \frac{9}{8}\gamma^2 e \frac{n'}{n} \Big] \cos \vartheta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, ϑ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{31}), (F'_{31}), (G'_{31}), (H'_{31}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{31})\quad \begin{cases} h + g + l = (h) + \frac{1}{2}l' + \Big(\frac{1}{2}\vartheta_0 - h_0 \Big)(t - c) \\ \qquad - \Big[\Big(\frac{27}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{45}{8}\gamma_0^2 e - \frac{117}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{81}{8}\gamma_0^2 e \frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{81}{8}\gamma_0^2 e \frac{n'^4}{n_0^4} \Big] \sin \vartheta_0 (t - c), \end{cases}$$

$$(L_{31})\quad l = -(g) - \frac{1}{2}l' - \Big(\frac{1}{2}\vartheta_0 - g_0 \Big)(t - c) - \Big[\frac{9}{4}\gamma_0^2 e \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{63}{16}\gamma_0^2 e \frac{n'^3}{n_0^3} \Big] \sin \vartheta_0 (t - c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme ϑ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. Les formes sous lesquelles nous avons mis les parties non périodiques des valeurs de $h+g+l$ et de l viennent de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+h+\frac{1}{2}l', \qquad l=\frac{1}{2}\theta-g+\frac{1}{2}l'.$$

Les six formules (E'_{31}), (F'_{31}), (G'_{31}), (H'_{31}), (K_{31}), (L_{31}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (38); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que $g+l$ est égal à $\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}l'$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{9}{2}\gamma^2 e'-\frac{9}{2}\gamma^4 e'-\frac{45}{4}\gamma^2 e^2 e'+\frac{81}{16}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{9}{2}\gamma^2 e'-\frac{63}{2}\gamma^4 e'-\frac{117}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3415}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2g+2l-l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2-\left[\frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2g+2l-l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e'-\frac{27}{8}\gamma^4 e'-\frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e'+\frac{81}{64}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{9}{8}\gamma^2 e'-\frac{81}{8}\gamma^4 e'-\frac{99}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3415}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2g+2l-l'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{27}{4}\gamma^2 e'-\frac{45}{8}\gamma^4 e'-\frac{117}{8}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{81}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{81}{8}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2g+2l-l'),$$

$g+l$ par

$$g+l-\left[\left(\frac{9}{16}e'+\frac{45}{8}\gamma^2 e'-\frac{9}{8}e^2 e'+\frac{81}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{9}{16}e'+\frac{9}{4}\gamma^2 e'-\frac{99}{64}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{27}{64}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{3415}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2g+2l-l')$$
$$+\frac{81}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2g+2l-l'),$$

l par

$$l-\left[\frac{9}{4}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{63}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2g+2l-l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{31}), (G'_{31}), (H'_{31}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 591),

$$L_1=\sqrt{a\mu}\left\{\frac{9}{4}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{9}{4}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 591);

H_0 = ancienne valeur de H (page 582).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{31}); en y supprimant également les indices de e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1+2\theta_2 L_2+\ldots)=\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{81}{64}\gamma^2 e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{81}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 598 et 599) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 31^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{1}{2}n'(L-L_0)-\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1+2\theta_2 L_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (38) de R, joint à la quantité $+\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [31 · · · 1, 38].
Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{525}{32}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+\frac{891}{16}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\\
&\qquad+\frac{11647}{1024}e^4-\frac{7875}{64}e^2e'^2+\frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{2915}{32}e^2+\frac{2133}{32}e'^2+33\gamma^4+\frac{5399}{16}\gamma^2e^2-\frac{4509}{16}\gamma^2e'^2\\
&\qquad+\frac{9487}{128}e^4-\frac{78705}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{107161}{256}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+\Big(\frac{22441}{288}-\frac{176531}{576}\gamma^2-\frac{3503591}{2304}e^2+\frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\
&+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{219}{128}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+\frac{693}{32}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2-\frac{103121}{1024}e^4-\frac{3285}{256}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

Quant à la valeur de H, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 29^e opération (page 582). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ 2 + \left(\frac{1931}{32} - \frac{1587}{8}\gamma^2 + \frac{34553}{128}e^2 + \frac{28965}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{1651}{8} - \frac{2727}{4}\gamma^2 + \frac{31323}{16}e^2 + \frac{44577}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{60649}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1528783}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{1035}{16} - \frac{3549}{16}\gamma^2 - \frac{8779}{128}e^2 + \frac{15525}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{687}{2} - 1242\gamma^2 - \frac{3585}{8}e^2 + \frac{18549}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{103581}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{277255}{48}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1767}{32}e^2 + \frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - 327e^2 + \frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - \frac{40505}{128}e^2 + \frac{28215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{1881}{64} - \frac{1089}{16}\gamma^2 - \frac{30519}{64}e^2 + \frac{28215}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{498673}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{69}{4}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{375}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{217}{64} + \frac{619}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

32^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (16) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (16)*, dans lequel l'argument est $2l$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \Big(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{119}{4}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{777}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{10067}{512}e^4 - \frac{1785}{8}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \Big(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{8253}{64}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \Big(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{428263}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \Big[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\Big]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\frac{1}{8}e^2 + \frac{3}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{1}{24}e^4 - \frac{3}{16}e^2 e'^2 - \frac{3}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{9}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{1}{192}e^6 + \frac{1}{16}e^4 e'^2 \\
& \qquad + \Big(\frac{153}{64}e^2 - \frac{147}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{1567}{128}e^4 - \frac{3009}{16}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad\qquad + \frac{59}{16}e^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{27037}{768}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2}\Big\}\cos 2l.
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 2, \qquad i' = 0, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 0.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (16), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente et une premières opérations.

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dG}{dt} = 0, \qquad \frac{dH}{dt} = 0.$$

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(\mathrm{A}_{32})\left\{\begin{aligned} a = \frac{G^2}{\mu}\Big\{ 1 + e^2 + e^4 + e^6 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} \\ - \left(\frac{79}{8} - \frac{167}{4}\gamma^2 + \frac{4307}{96}e^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right)\frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 G^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 G^{21}}{\mu^{14}} \Big\}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$L = G\left\{ 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{947}{64}e^2\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} - \frac{13739}{192}e^2\frac{n'^5 G^{15}}{\mu^{10}} \right\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{32})\left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^2 G^3}{\mu^2}\Big\{ \frac{1}{2}e^2 - 3\gamma^2 e^2 + \frac{1}{12}e^4 + \frac{3}{4}e^2 e'^2 + 3\gamma^4 e^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 e^4 - \frac{9}{2}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{1}{8}e^6 + \frac{1}{8}e^4 e'^2 \\ - \left(\frac{153}{16}e^2 - \frac{147}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{31}{2}e^4 - \frac{3009}{4}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2 G^6}{\mu^4} - \frac{59}{4}e^2\frac{n'^3 G^9}{\mu^6} \\ - \frac{12137}{96}e^2\frac{n'^4 G^{12}}{\mu^8} - \frac{9}{16}e^2\frac{G^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dl}{dt} = -2\frac{dR}{dL};$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{dL}$, $\dfrac{de}{dL}$, $\dfrac{d\gamma}{dL}$, données à la suite de la 31^e opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$
(\mathrm{D}_{32})\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3} & \Big\{ 2 - 3e^2 + \frac{3}{4}e^4 - \left(\frac{7}{2} - 21\gamma^2 + \frac{27}{4}e^2 + \frac{21}{4}e'^2\right)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4} - \frac{609}{16}\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} \Big\} \\
& + \frac{n'^2\,\mathrm{G}^3}{\mu^2}\Big\{ \frac{1}{2} - 3\gamma^2 + \frac{11}{12}e^2 + \frac{3}{4}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{11}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{5}{4}e^4 + \frac{11}{8}e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{153}{16} - \frac{147}{4}\gamma^2 - \frac{533}{32}e^2 - \frac{3009}{4}e'^2\right)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\
& \qquad - \frac{59}{4}\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6} - \frac{12137}{96}\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{9}{16}\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{32}), (D_{32}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$
(\mathrm{E}_{32})\quad \left\{
\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 & - \Big[\Big(\frac{1}{4}e_0^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 e_0^2 + \frac{5}{12}e_0^4 + \frac{3}{8}e_0^2 e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 e_0^2 - \frac{5}{2}\gamma^2 e_0^4 \\
& \qquad - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2\, e'^2 + \frac{19}{32}e_0^6 + \frac{5}{8}e_0^4 e'^2\Big)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\
& \quad - \left(\frac{139}{32}e_0^2 - \frac{105}{8}\gamma^2 e_0^2 - \frac{539}{192}e_0^4 - \frac{6039}{16}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} \\
& \quad - \frac{59}{8}e_0^2\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{12683}{192}e_0^2\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{9}{32}e_0^2\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2 a'^2}\Big]\cos\theta_0(t+c) \\
& - \frac{3}{64}e_0^4\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{32})\quad \left\{
\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& + \Big[\Big(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{29}{24}e_0^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{29}{4}\gamma^2 e_0^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{89}{32}e_0^4 + \frac{29}{16}e_0^2 e'^2\Big)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\
& \quad - \left(\frac{139}{32} - \frac{105}{8}\gamma^2 + \frac{173}{192}e_0^2 - \frac{6039}{16}e'^2\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} \\
& \quad - \frac{59}{8}\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{50729}{768}\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu'^2} - \frac{9}{32}\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2 a'^2}\Big]\sin\theta_0(t+c)
\end{aligned}
\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante,

$$(\mathrm{F}_{32})\left\{\begin{aligned}&+\left[\left(\frac{1}{64}-\frac{3}{16}\gamma^2+\frac{19}{192}e_0^2+\frac{3}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}-\frac{139}{256}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right]\sin 2\theta_0(t+c)\\&+\frac{1}{768}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\sin 3\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=\frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left[2-3e_0^2-\frac{7}{2}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right].$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{32}), et qu'on la substitue dans la formule (A_{32}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$(\mathrm{G}_{32})\left\{\begin{aligned}a=\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{&1+e_0^2+e_0^4+e_0^6-\left(\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{3}{8}e_0^2+\frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\&-\left(\frac{79}{8}-\frac{167}{4}\gamma^2+\frac{4307}{96}e_0^2+\frac{2133}{16}e'^2\right)\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}\\-\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{&\left(\frac{1}{4}e_0^2-\frac{3}{2}\gamma^2e_0^2+\frac{11}{12}e_0^4+\frac{3}{8}e_0^2e'^2+\frac{3}{2}\gamma^4e_0^2-\frac{11}{2}\gamma^2e_0^4\right.\\&\left.-\frac{9}{4}\gamma^2e_0^2e'^2+\frac{209}{96}e_0^6+\frac{11}{8}e_0^4e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\\&-\left(\frac{139}{32}e_0^2-\frac{105}{8}\gamma^2e_0^2+\frac{1129}{192}e_0^4-\frac{6039}{16}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\&-\frac{59}{8}e_0^2\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{12665}{192}e_0^2\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{9}{32}e_0^2\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{G}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)\\-\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\cdot&\frac{1}{64}e_0^4\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}a_0=\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\Bigg\{&1+e_0^2+e_0^4+e_0^6-\left(\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{3}{8}e_0^2+\frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\\&-\left(\frac{79}{8}-\frac{167}{4}\gamma^2+\frac{4307}{96}e_0^2+\frac{2133}{16}e'^2\right)\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{G}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}.\end{aligned}$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0 ; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{32}), (F_{32}), (G_{32}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{32})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 - \Bigg[\Bigg(&\frac{1}{4}e_0^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 e_0^2 - \frac{1}{3}e_0^4 + \frac{3}{8}e_0^2 e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 e_0^2 + 2\gamma^2 e_0^4 \\
&\qquad - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2 e'^2 + \frac{3}{32}e_0^6 - \frac{1}{2}e_0^4 e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&- \left(\frac{139}{32}e_0^2 - \frac{105}{8}\gamma^2 e_0^2 - \frac{5543}{192}e_0^4 - \frac{6039}{16}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
&- \frac{59}{8}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{25249}{384}e_9^2\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{9}{32}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c) \\
&- \frac{3}{64}e_0^4\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{32})\left\{\begin{aligned}
\theta = \theta_0(t+c)& \\
&+ \Bigg[\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{11}{24}e_0^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{11}{4}\gamma^2 e_0^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{3}{32}e_0^4 + \frac{11}{16}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&\quad - \left(\frac{139}{32} - \frac{105}{8}\gamma^2 - \frac{4831}{192}e_0^2 - \frac{6039}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
&\quad - \frac{59}{8}\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{50495}{768}\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{9}{32}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\
&+ \left[\left(\frac{1}{64} - \frac{3}{16}\gamma^2 + \frac{1}{192}e_0^2 + \frac{3}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{139}{256}\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\sin 2\theta_0(t+c) \\
&+ \frac{1}{768}\frac{n'^6}{n_0^6}\sin 3\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{32})\left\{\begin{aligned}
a = a_0\Bigg\{1 - \Bigg[\Bigg(&\frac{1}{4}e_0^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 e_0^2 - \frac{1}{12}e_0^4 + \frac{3}{8}e_0^2 e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 e_0^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 e_0^4 \\
&\qquad - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2 e'^2 + \frac{1}{96}e_0^6 - \frac{1}{8}e_0^4 e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&- \left(\frac{139}{32}e_0^2 - \frac{105}{8}\gamma^2 e_0^2 - \frac{4709}{192}e_0^4 - \frac{6039}{16}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
&- \frac{59}{8}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{12587}{192}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6} - \frac{9}{32}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c) \\
&- \frac{1}{64}e_0^4\frac{n'^4}{n_0^4}\cos 2\theta_0(t+c)\Bigg\}.
\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0 \left[2 - \frac{7}{2} \frac{n'^2}{n_0^2} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} & \left[1 - \frac{9}{2} \gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{451}{64} \frac{n'^2}{n^2} - \frac{787}{32} \frac{n'^3}{n^3} \right] \\ & + \frac{n'^2}{n} \left[\frac{3}{8} e^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 e^2 - \frac{5}{96} e^4 + \frac{9}{16} e^2 e'^2 - \frac{1377}{64} e^2 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{177}{4} e^2 \frac{n'^3}{n^3} \right] \cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = - \frac{n'^2}{n} & \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \gamma^2 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{9}{8} e'^2 - \frac{51}{32} \frac{n'^2}{n^2} \right] \\ & + \frac{n'^2}{n} \left[\frac{3}{8} e^2 - \frac{3}{4} \gamma^2 e^2 + \frac{1}{16} e^4 + \frac{9}{16} e^2 e'^2 - \frac{147}{32} e^2 \frac{n'^2}{n^2} \right] \cos\theta; \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{32}), (F'_{32}), (G'_{32}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{32}) \left\{ \begin{aligned} h + g + l = (h) + (g) + & \left(\frac{1}{2} \theta_0 + h_0 + g_0 \right) (t + c) \\ & + \left[\left(\frac{3}{8} e_0^2 - \frac{15}{8} \gamma^2 e_0^2 - \frac{17}{192} e_0^4 + \frac{9}{16} e_0^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \right. \\ & \qquad \left. - \frac{417}{32} e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{885}{32} e_0^2 \frac{n'^5}{n_0^5} \right] \sin\theta_0 (t + c), \end{aligned} \right.$$

$$(L_{32}) \left\{ \begin{aligned} h = (h) + & h_0 (t + c) \\ & + \left[\left(\frac{3}{16} e_0^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 e_0^2 + \frac{1}{32} e_0^4 + \frac{9}{32} e_0^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{105}{64} e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \right] \sin\theta_0 (t + c). \end{aligned} \right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0

sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+h+g.$$

Les cinq formules (E'_{32}), (F'_{32}), (G'_{32}), (K_{32}), (L_{32}), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (16); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que l est égal à $\frac{1}{2}\theta$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\Bigg\{1-\Bigg[\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{1}{12}e^4+\frac{3}{8}e^2e'^2+\frac{3}{2}\gamma^4e^2+\frac{1}{2}\gamma^2e^4-\frac{9}{4}\gamma^2e^2e'^2+\frac{1}{96}e^6-\frac{1}{8}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\left(\frac{139}{32}e^2-\frac{105}{8}\gamma^2e^2-\frac{4709}{192}e^4-\frac{6039}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{59}{8}e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{12587}{192}e^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{9}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos 2l$$
$$-\frac{1}{64}e^4\frac{n'^4}{n^4}\cos 4l\Bigg\},$$

e^2 par

$$e^2-\Bigg[\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{1}{3}e^4+\frac{3}{8}e^2e'^2+\frac{3}{2}\gamma^4e^2+2\gamma^2e^4-\frac{9}{4}\gamma^2e^2e'^2+\frac{3}{32}e^6-\frac{1}{2}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\left(\frac{139}{32}e^2-\frac{105}{8}\gamma^2e^2-\frac{5543}{192}e^4-\frac{6039}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{59}{8}e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{25249}{384}e^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{9}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos 2l$$
$$-\frac{3}{64}e^4\frac{n'^4}{n^4}\cos 4l,$$

l par

$$l+\Bigg[\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\gamma^2+\frac{11}{48}e^2+\frac{3}{16}e'^2+\frac{3}{4}\gamma^4-\frac{11}{8}\gamma^2e^2-\frac{9}{8}\gamma^2e'^2-\frac{3}{64}e^4+\frac{11}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$- \left(\frac{139}{64} - \frac{105}{16} \gamma^2 - \frac{4831}{384} e^2 - \frac{6039}{32} e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} - \frac{59}{16} \frac{n'^5}{n^5} - \frac{50495}{1536} \frac{n'^6}{n^6} - \frac{9}{64} \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Big] \sin 2l$$

$$+ \left(\frac{1}{128} - \frac{3}{32} \gamma^2 + \frac{1}{384} e^2 + \frac{3}{128} e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} - \frac{139}{512} \frac{n'^6}{n^6} \Big] \sin 4l$$

$$+ \frac{1}{1536} \frac{n'^6}{n^6} \sin 6l,$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l + \left[\left(\frac{3}{8} e^2 - \frac{15}{8} \gamma^2 e^2 - \frac{17}{192} e^4 + \frac{9}{16} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{417}{32} e^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{885}{32} e^2 \frac{n'^5}{n^5} \right] \sin 2l,$$

h par

$$h + \left[\left(\frac{3}{16} e^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 e^2 + \frac{1}{32} e^4 + \frac{9}{32} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{105}{64} e^2 \frac{n'^4}{n^4} \right] \sin 2l.$$

γ ne change pas.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a et e^2 données par les formules (E'_{32}), (G'_{32}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 600)

$$- \sqrt{a\mu} \cdot \frac{1}{256} e^4 \frac{n'^4}{n^4},$$

$$L_1 = \sqrt{a\mu} \left\{ - \left(\frac{1}{8} e^2 - \frac{3}{4} \gamma^2 e^2 - \frac{1}{24} e^4 + \frac{3}{16} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} + \frac{139}{64} e^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{59}{16} e^2 \frac{n'^5}{n^5} \right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 600)

$$- \sqrt{a\mu} \cdot \frac{1}{64} e^4 \frac{n'^4}{n^4};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 582)

$$- \sqrt{a\mu} \cdot \frac{1}{64} e^4 \frac{n'^4}{n^4}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin \theta_0 (t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{32}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\Bigg\{ -\left(\frac{1}{64}e^2 - \frac{3}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{3}{128}e^4 + \frac{3}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{139}{256}e^2\frac{n'^6}{n^6} + \frac{59}{64}e^2\frac{n'^7}{n^7}\Bigg\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 608 et 609) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 32ᵉ opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (16) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV, avec l'indication [32 . . . 1, 16]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
L = \sqrt{a\mu}\Bigg\{ 1 &+ \left(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1051}{64}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + \frac{447}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{11619}{1024}e^4 - \frac{3939}{32}e^2 e'^2 + \frac{10095}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{2915}{32}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2 + 33\gamma^4 + \frac{5399}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{4509}{16}\gamma^2 e'^2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{9487}{128}e^4 - \frac{78705}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{53511}{128}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \left(\frac{22441}{288} - \frac{176531}{576}\gamma^2 - \frac{3501467}{2304}e^2 + \frac{538891}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G = \sqrt{a\mu}\Bigg\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8\\
&+ \left(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{219}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + \frac{693}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 \right.\\
&\qquad \left. - \frac{103137}{1024}e^4 - \frac{3285}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{;$$

$$\mathrm{H}=\sqrt{a\mu}\,\Big\}\,1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{187}{32}\gamma^2-\frac{219}{128}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{1389}{32}\gamma^4-\frac{635}{64}\gamma^2e^2+\frac{2805}{64}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{103137}{1024}e^4-\frac{3285}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2-\frac{4225}{192}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2-\frac{144293}{1536}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{an}\Big\}\,2+\left(\frac{1933}{32}-\frac{1593}{8}\gamma^2+\frac{34625}{128}e^2+\frac{28977}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{1651}{8}-\frac{2727}{4}\gamma^2+\frac{31323}{16}e^2+\frac{44577}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{30255}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1526659}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\{,$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{an}\Big\}\left(\frac{259}{4}-\frac{3561}{16}\gamma^2-\frac{8731}{128}e^2+\frac{15531}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{687}{2}-1242\gamma^2-\frac{3585}{8}e^2+\frac{18549}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{51721}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{138539}{24}\frac{n'^7}{n^7}\Big\{,$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}}=-\frac{1}{an}\Big\}\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1773}{32}e^2+\frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{167}{8}-66\gamma^2-327e^2+\frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\{;$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\left\{1 - e^2 + \left(\frac{1883}{64} - \frac{1095}{16}\gamma^2 - \frac{40481}{128}e^2 + \frac{28227}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{497839}{768}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1883}{64} - \frac{1095}{16}\gamma^2 - \frac{30513}{64}e^2 + \frac{28227}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{497839}{768}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{555}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 n\gamma}\cdot\frac{375}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6\right.$$
$$\left. + \left(\frac{217}{64} + \frac{619}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6\right.$$
$$\left. + \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

33^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (20) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (20)*, dans lequel l'argument est $2l + l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2\right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (20), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente-deux premières opérations.

$$-\left(\frac{31}{32}-\frac{33}{8}\gamma^2-\frac{953}{32}e^2+\frac{465}{64}e'^2+\frac{75}{16}\gamma^4+\frac{195}{2}\gamma^2e^2-\frac{495}{16}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.+\frac{10047}{512}e^4-\frac{7143}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\left(\frac{255}{32}-\frac{537}{16}\gamma^2-\frac{8253}{64}e^2+\frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$-\left(\frac{5515}{192}-\frac{635}{6}\gamma^2-\frac{427387}{768}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{-\frac{3}{16}e^2e'+\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{1}{16}e^4e'-\frac{27}{128}e^2e'^3$$
$$+\left(\frac{21}{32}e^2e'-\frac{63}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{1}{16}e^4e'\right)\frac{n'}{n}+\frac{957}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{34497}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\Bigg\}\cos(2l+l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=2,\qquad i'=0,\qquad i''=0,\qquad i'''=1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dG}{dt}=0,\qquad \frac{dH}{dt}=0.$$

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(A_{33})\quad a=\frac{G^2}{\mu}\left\{1+e^2+e^4+e^6-\left(\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{3}{8}e^2+\frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4G^{12}}{\mu^8}-\frac{79}{8}\frac{n'^5G^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6G^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$L=G\left\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6-\frac{237}{16}e^2\frac{n'^4G^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{33})\left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^2 \mathrm{G}^3}{\mu^2} \Big\{ & \frac{3}{4} e^2 e' - \frac{9}{2} \gamma^2 e^2 e' + \frac{1}{8} e^4 e' + \frac{27}{32} e^2 e'^3 \\ & - \left(\frac{21}{8} e^2 e' - \frac{63}{2} \gamma^2 e^2 e' + \frac{11}{2} e^4 e' \right) \frac{n' \mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{957}{16} e^2 e' \frac{n'^2 \mathrm{G}^6}{\mu^4} - \frac{34497}{64} e^2 e' \frac{n'^3 \mathrm{G}^9}{\mu^6} \Big\} \sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dl}{dt} + n' = -2\frac{dR}{dL} + n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{de}{dL}$, $\frac{d\gamma}{dL}$, données à la suite de la 32$^{\mathrm{e}}$ opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{33})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3} & \left\{ 2 - 3e^2 + \frac{n' \mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{7}{2} \frac{n'^2 \mathrm{G}^6}{\mu^4} \right\} \\ & + \frac{n'^2 \mathrm{G}^3}{\mu^2} \Big\{ \frac{3}{4} e' - \frac{9}{2} \gamma^2 e' + \frac{11}{8} e^2 e' + \frac{27}{32} e'^3 \\ & - \left(\frac{21}{8} e' - \frac{63}{2} \gamma^2 e' + \frac{239}{16} e^2 e' \right) \frac{n' \mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{957}{16} e' \frac{n'^2 \mathrm{G}^6}{\mu^4} - \frac{34497}{64} e' \frac{n'^3 \mathrm{G}^9}{\mu^6} \Big\} \cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{33}), (D_{33}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{33})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 - \Big[& \left(\frac{3}{8} e_0^2 e' - \frac{9}{4} \gamma^2 e_0^2 e' + \frac{5}{8} e_0^4 e' + \frac{27}{64} e_0^2 e'^3 \right) \frac{n'^2 \mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ & - \left(\frac{3}{2} e_0^2 e' - \frac{135}{8} \gamma^2 e_0^2 e' + \frac{85}{16} e_0^4 e' \right) \frac{n'^3 \mathrm{G}^9}{\mu^6} \\ & - \frac{57}{2} e_0^2 e' \frac{n'^4 \mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{33009}{128} e_0^2 e' \frac{n'^5 \mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} \Big] \cos\theta_0 (t + c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{33})\left\{\begin{aligned} \theta = {} & \theta_0(t+c) \\ & +\left[\left(\frac{3}{8}e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{29}{16}e_0^2 e' + \frac{27}{64}e'^3\right)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right. \\ & \qquad \left. - \left(\frac{3}{2}e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e' + \frac{103}{8}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6} - \frac{57}{2}e'\,\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{33009}{128}e'\,\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right]\sin\theta_0(t+c) \\ & + \frac{9}{256}e'^2\,\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left[2 - 3e_0^2 + \frac{n'\,\mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{7}{2}\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right].$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{33}), et qu'on la substitue dans la formule (A_{33}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$(\mathrm{G}_{33})\left\{\begin{aligned} a = {} & \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{3}{8}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\ & - \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{\left(\frac{3}{8}e_0^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{11}{8}e_0^4 e' + \frac{27}{64}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2\,\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right. \\ & \qquad - \left(\frac{3}{2}e_0^2 e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{133}{16}e_0^4 e'\right)\frac{n'^3\,\mathrm{G}^9}{\mu^6} \\ & \qquad\qquad \left. - \frac{57}{2}e_0^2 e'\,\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{33009}{128}e_0^2 e'\,\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{3}{8}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\,\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\,\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\,\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{33}), (F_{33}), (G_{33}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{33})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 & - \left[\left(\frac{3}{8}e_0^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{1}{2}e_0^4 e' + \frac{27}{64}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\ & \left. - \left(\frac{3}{2}e_0^2 e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{23}{16}e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{57}{2}e_0^2 e'\,\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{33009}{128}e_0^2 e'\,\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{33})\left\{\begin{aligned}\theta &= \theta_0(t+c)\\ &+\Bigg[\left(\frac{3}{8}e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{11}{16}e_0^2 e' + \frac{27}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} - \left(\frac{3}{2}e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e' + \frac{49}{8}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &\qquad - \frac{57}{2}e'\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{33009}{128}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin\theta_0(t+c)\\ &+\frac{9}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{33})\left\{\begin{aligned}a = a_0\Bigg\{1 &- \Bigg[\left(\frac{3}{8}e_0^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{1}{8}e_0^4 e' + \frac{27}{64}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} - \left(\frac{3}{2}e_0^2 e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{1}{16}e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &\qquad - \frac{57}{2}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{33009}{128}e_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[2 + \frac{n'}{n_0} - \frac{7}{2}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}&\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\ &+\frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{16}e^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{5}{64}e^4 e' - \frac{63}{16}e^2 e'\frac{n'}{n} - \frac{8613}{64}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{16}e^2 e' - \frac{63}{16}e^2 e'\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{33}), (F'_{33}), (G'_{33}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{33})\left\{\begin{aligned}h+g+l &= (h)+(g) - \frac{1}{2}l' + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + h_0 + g_0\right)(t+c)\\ &+\left[\left(\frac{9}{16}e_0^2 e' - \frac{45}{16}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{17}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{27}{8}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{171}{2}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_{33})\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[\frac{9}{32}e_0^2 e'\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{135}{64}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+h+g-\frac{1}{2}l'.$$

Les cinq formules (E'_{33}), (F'_{33}), (G'_{33}), (K_{33}), (L_{33}), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (20); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que l est égal à $\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}l'$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\Big\{1-\Big[\Big(\frac{3}{8}e^2e'-\frac{9}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{1}{8}e^4e'+\frac{27}{64}e^2e'^3\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\Big(\frac{3}{2}e^2e'-\frac{135}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{1}{16}e^4e'\Big)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{57}{2}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{33009}{128}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}\Big]\cos(2l+l')\Big\},$$

e^2 par

$$e^2-\Big[\Big(\frac{3}{8}e^2e'-\frac{9}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{1}{2}e^4e'+\frac{27}{64}e^2e'^3\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\Big(\frac{3}{2}e^2e'-\frac{135}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{23}{16}e^4e'\Big)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{57}{2}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{33009}{128}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}\Big]\cos(2l+l'),$$

l par

$$l+\Big[\Big(\frac{3}{16}e'-\frac{9}{8}\gamma^2e'+\frac{11}{32}e^2e'+\frac{27}{128}e'^3\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\Big(\frac{3}{4}e'-\frac{135}{16}\gamma^2e'+\frac{49}{16}e^2e'\Big)\frac{n'^3}{n^3}-\frac{57}{4}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{33009}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}\Big]\sin(2l+l')$$
$$+\frac{9}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2l+l'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{9}{16}e^2e'-\frac{45}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{17}{128}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{27}{8}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{171}{2}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2l+l'),$$

h par

$$h+\left[\frac{9}{32}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{64}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2l+l').$$

γ ne change pas.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a et e^2 données par les formules (E'_{33}), (G'_{33}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

$\mathrm{L}_0 =$ ancienne valeur de L (page 610),

$$\mathrm{L}_1=\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{3}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3}{4}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

$\mathrm{G}_0 =$ ancienne valeur de G (page 610);

$\mathrm{H}_0 =$ ancienne valeur de H (page 611).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{33}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots)=\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{9}{256}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{32}e^2e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 617 et 618) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 33ᵉ opération, et y ajoutant

$$-\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)+\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (20) de R, joint à la quantité $-\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$+\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [33. . . . . 1,20]. Ensuite la nouvelle valeur de L sera

$$\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\Big\{1+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1051}{64}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+\frac{447}{8}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2$$

$$+\frac{11619}{1024}e^4-\frac{31521}{256}e^2e'^2+\frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{2915}{32}e^2+\frac{2133}{32}e'^2+33\gamma^4+\frac{5399}{16}\gamma^2e^2-\frac{4509}{16}\gamma^2e'^2$$

$$+\frac{9487}{128}e^4-\frac{78687}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{53511}{128}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\Big(\frac{22441}{288}-\frac{176531}{576}\gamma^2-\frac{3501467}{2304}e^2+\frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Quant aux valeurs de G et de H, elles sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 32^e opération (pages 610 et 611). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{an}\Big\{2+\Big(\frac{1933}{32}-\frac{1593}{8}\gamma^2+\frac{34625}{128}e^2+\frac{14493}{32}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\Big(\frac{1651}{8}-\frac{2727}{4}\gamma^2+\frac{31323}{16}e^2+\frac{44559}{16}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{30255}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1526659}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{an}\Big\{\Big(\frac{259}{4}-\frac{3561}{16}\gamma^2-\frac{8731}{128}e^2+\frac{31071}{64}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\Big(\frac{687}{2}-1242\gamma^2-\frac{3585}{8}e^2+\frac{37089}{8}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{51721}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{138539}{24}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\left\{\left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1773}{32}e^2 + \frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - 327e^2 + \frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\right\};$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\left\{1 - e^2 + \left(\frac{1883}{64} - \frac{1095}{16}\gamma^2 - \frac{40481}{128}e^2 + \frac{7059}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{497839}{768}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1883}{64} - \frac{1095}{16}\gamma^2 - \frac{30513}{64}e^2 + \frac{7059}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{497839}{768}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{555}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 n\gamma}\cdot\frac{375}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6\right.$$

$$\left. + \left(\frac{217}{64} + \frac{619}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6\right.$$

$$\left. + \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

34$^{\text{e}}$ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (17) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (17) *, dans lequel l'argument est $2l - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2\right.$$

$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (17), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente-trois premières opérations.

$$-\left(\frac{31}{32}-\frac{33}{8}\gamma^2-\frac{953}{32}e^2+\frac{465}{64}e'^2+\frac{75}{16}\gamma^4+\frac{195}{2}\gamma^2e^2-\frac{495}{16}\gamma^2e'^2+\frac{10047}{512}e^4-\frac{28581}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{255}{32}-\frac{537}{16}\gamma^2-\frac{8253}{64}e^2+\frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{5515}{192}-\frac{635}{6}\gamma^2-\frac{427387}{768}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{-\frac{3}{16}e^2e'+\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{1}{16}e^4e'-\frac{27}{128}e^2e'^3$$

$$-\left(\frac{21}{32}e^2e'-\frac{63}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{1}{16}e^4e'\right)\frac{n'}{n}-\frac{3315}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{67489}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\Bigg\}\cos(2l-l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=2,\qquad i'=0,\qquad i''=0,\qquad i'''=-1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dG}{dt}=0,\qquad \frac{dH}{dt}=0.$$

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(A_{34})\quad a=\frac{G^2}{\mu}\left\{1+e^2+e^4+e^6-\left(\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{3}{8}e^2+\frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4G^{12}}{\mu^8}-\frac{79}{8}\frac{n'^5G^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6G^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$L=G\left\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6-\frac{237}{16}e^2\frac{n'^4G^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{34})\left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{3}{4}e^2e' - \frac{9}{2}\gamma^2e^2e' + \frac{1}{8}e^4e' + \frac{27}{32}e^2e'^3 \\ & + \left(\frac{21}{8}e^2e' - \frac{63}{2}\gamma^2e^2e' + \frac{11}{2}e^4e'\right)\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} + \frac{3315}{16}e^2e'\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} + \frac{67489}{64}e^2e'\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dl}{dt} - n' = -2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, $\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}}$ données à la suite de la 33$^{\mathrm{e}}$ opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{34})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = {} & \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\Big\{2 - 3e^2 - \frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{7}{2}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\Big\} \\ & + \frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\Big\{\frac{3}{4}e' - \frac{9}{2}\gamma^2e' + \frac{11}{8}e^2e' + \frac{27}{32}e'^3 \\ & + \left(\frac{21}{8}e' - \frac{63}{2}\gamma^2e' + \frac{239}{16}e^2e'\right)\frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} + \frac{3315}{16}e'\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} + \frac{67489}{64}e'\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\Big\}\cos.\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{34}), (D_{34}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{34})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 - \Big[& \left(\frac{3}{8}e_0^2e' - \frac{9}{4}\gamma^2e_0^2e' + \frac{5}{8}e_0^4e' + \frac{27}{64}e_0^2e'^3\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ & + \left(\frac{3}{2}e_0^2e' - \frac{135}{8}\gamma^2e_0^2e' + \frac{85}{16}e_0^4e'\right)\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} \\ & + 105e_0^2e'\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{74545}{128}e_0^2e'\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Big]\cos\theta_0.(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{34})\left\{\begin{aligned}\theta = {}&\theta_0(t+c)\\&+\left[\left(\frac{3}{8}e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{29}{16}e_0^2 e' + \frac{27}{64}e'^3\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{3}{2}e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e' + \frac{103}{8}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6} + 105\,e'\,\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{74545}{128}e'\,\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right]\sin\theta_0(t+c)\\&+\frac{9}{256}e'^2\,\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\sin 2\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left[2 - 3e_0^2 - \frac{n'\mathrm{G}^3}{\mu^2} - \frac{7}{2}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right].$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{34}), et qu'on la substitue dans la formule (A_{34}), on en déduit la valeur de a en fonction de t. qui est

$$(\mathrm{G}_{34})\left\{\begin{aligned}a = {}&\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{3}{8}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\}\\&-\frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{\left(\frac{3}{8}e_0^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{11}{8}e_0^4 e' + \frac{27}{64}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right.\\&\qquad+\left(\frac{3}{2}e_0^2 e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{133}{16}e_0^4 e'\right)\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\\&\qquad\qquad\left.+\,105\,e_0^2 e'\,\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{74545}{128}e_0^2 e'\,\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{3}{8}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0 ; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{34}), (F_{34}), (G_{34}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{34})\left\{\begin{aligned}e^2 = {}&e_0^2 - \left[\left(\frac{3}{8}e_0^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{1}{2}e_0^4 e' + \frac{27}{64}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{3}{2}e_0^2 e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{23}{16}e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + 105\,e_0^2 e'\,\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{74545}{128}e_0^2 e'\,\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{F}'_{34})\left\{\begin{aligned}
\theta &= \theta_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{3}{8}e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e' + \frac{11}{16}e_0^2 e' + \frac{27}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{3}{2}e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e' + \frac{49}{8}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + 105\,e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{74545}{128}e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c)\\
&+\frac{9}{256}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{G}'_{34})\left\{\begin{aligned}
a = a_0\Big\{1 &- \left[\left(\frac{3}{8}e_0^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{1}{8}e_0^4 e' + \frac{27}{64}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\left.+\left(\frac{3}{2}e_0^2 e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e_0^2 e' + \frac{1}{16}e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + 105\,e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{74545}{128}e_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\Big\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$
\theta_0 = n_0\left[2 - \frac{n'}{n_0} - \frac{7}{2}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].
$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt} &= n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\
&\qquad+\frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{16}e^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{5}{64}e^4 e' + \frac{63}{16}e^2 e'\frac{n'}{n} + \frac{29835}{64}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\\
\frac{dh}{dt} &= -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{16}e^2 e' + \frac{63}{16}e^2 e'\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;
\end{aligned}
$$

d'où, en remplaçant a, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{34}), (F'_{34}), (G'_{34}), puis intégrant, nous tirerons

$$
(\mathrm{K}_{34})\left\{\begin{aligned}
h+g+l &= (h)+(g)+\frac{1}{2}l' + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + h_0 + g_0\right)(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{9}{16}e_0^2 e' - \frac{45}{16}\gamma^2 e_0^2 e' - \frac{17}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{27}{8}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + 315\,e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{L}_{34})\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[\frac{9}{32}e_0^2 e' \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{135}{64}e_0^2 e' \frac{n'^3}{n_0^3}\right] \sin\theta_0\,(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + h + g + \frac{1}{2}l'.$$

Les cinq formules (E'_{34}), (F'_{34}), (G'_{34}), (K_{34}), (L_{34}), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (17); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du nº **29**, et si nous remarquons que l est égal à $\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}l'$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1 - \left[\left(\frac{3}{8}e^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{1}{8}e^4 e' + \frac{27}{64}e^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{3}{2}e^2 e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e^2 e' + \frac{1}{16}e^4 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + 105\,e^2 e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{74545}{128}e^2 e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2l - l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2 - \left[\left(\frac{3}{8}e^2 e' - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{1}{2}e^4 e' + \frac{27}{64}e^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{2}e^2 e' - \frac{135}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{23}{16}e^4 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + 105\,e^2 e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{74545}{128}e^2 e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2l - l'),$$

l par

$$l + \left[\left(\frac{3}{16}e' - \frac{9}{8}\gamma^2 e' + \frac{11}{32}e^2 e' + \frac{27}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\left(\frac{3}{4}e' - \frac{135}{16}\gamma^2 e' + \frac{49}{16}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{105}{2}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{74545}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\sin(2l - l')$$

$$+\frac{9}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2l - l'),$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l + \left[\left(\frac{9}{16}e^2 e' - \frac{45}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{17}{128}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{27}{8}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + 315\,e^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2l - l').$$

h par

$$h + \left[\frac{9}{32}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{135}{64}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2l - l').$$

γ ne change pas.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a et e^2 données par les formules (E'_{34}), (G'_{34}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 619),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{3}{16}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{3}{4}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 610);

H_0 = ancienne valeur de H (page 611).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0\,(t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{34}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots\ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{9}{256}e^2 e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{9}{32}e^2 e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du nº **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 625 et 626) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 34ᵉ opération, et y ajoutant

$$+\frac{1}{2}n'(L - L_0) - \frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (17) de R, joint à la quantité $+\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [34 . . . 1, 17]. Ensuite la nouvelle valeur de L, sera

$$\begin{aligned}\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1051}{64}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+\frac{447}{8}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\\&\qquad+\frac{11619}{1024}e^4-\frac{15765}{128}e^2e'^2+\frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{2915}{32}e^2+\frac{2133}{32}e'^2+33\gamma^4+\frac{5399}{16}\gamma^2e^2-\frac{4509}{16}\gamma^2e'^2\\&\qquad+\frac{9487}{128}e^4-\frac{78705}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}\\&+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{53511}{128}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\&+\Big(\frac{22441}{288}-\frac{176531}{576}\gamma^2-\frac{3501467}{2304}e^2+\frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}\\&\qquad+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.\end{aligned}$$

Quant aux valeurs de G et de H, elles sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 32^e opération (pages 610 et 611). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{an}\Big\{2&+\Big(\frac{1933}{32}-\frac{1593}{8}\gamma^2+\frac{34625}{128}e^2+\frac{28995}{64}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\&+\Big(\frac{1651}{8}-\frac{2727}{4}\gamma^2+\frac{31323}{16}e^2+\frac{44577}{16}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{30255}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1526659}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{an}\Big\{&\Big(\frac{259}{4}-\frac{3561}{16}\gamma^2-\frac{8731}{128}e^2+\frac{3885}{8}c'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\&+\Big(\frac{687}{2}-1242\gamma^2-\frac{3585}{8}e^2+\frac{18549}{4}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{51721}{32}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{138539}{24}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{&\left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1773}{32}e^2 + \frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\ &+ \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - 327e^2 + \frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2ne}\left\{1 - e^2 + \left(\frac{1883}{64} - \frac{1095}{16}\gamma^2 - \frac{40481}{128}e^2 + \frac{28245}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{497839}{768}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{&1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6\\ &+ \left(\frac{1883}{64} - \frac{1095}{16}\gamma^2 - \frac{30513}{64}e^2 + \frac{28245}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{13265}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{497839}{768}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{555}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{375}{64}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{&1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6\\ &+ \left(\frac{217}{64} + \frac{619}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{&1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6\\ &+ \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.\end{aligned}$$

35^{e} OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (96) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (96) * dans lequel l'argument est $2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (96), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente-quatre premières opérations.

que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a} & \\
+ m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ & \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 \\
& + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{953}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{195}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{10047}{512}e^4 - \frac{14295}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{8253}{64}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{427387}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2} \Big\} \\
+ m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ & \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{8}e^4 - \frac{15}{8}e^2 e'^2 + \frac{3}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{15}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{101}{64}e^6 \\
& + \frac{75}{16}e^4 e'^2 - \frac{99}{4}e^2 e'^2 \frac{n'}{n} \\
& + \left(\frac{141}{64}e^2 - \frac{267}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{1519}{128}e^4 - \frac{8067}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{3}{4}e^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{98355}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{5}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2} \Big\} \\
& \times \cos(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 4, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{4}\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$\mathrm{G} = \frac{1}{2}\mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = \frac{1}{2}\mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{35})\quad \left\{\begin{aligned} a = \frac{2^2(G)^2}{\mu}\Big\{ 1 + 2e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \frac{23}{4}e^6 - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{32}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{1027}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\\ - \left[\frac{79}{8} - \frac{167}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{3263}{12}e^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5.2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\\ - \frac{153}{4}\frac{n'^6.2^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7.2^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}}\Big\},\end{aligned}\right.$$

$$(B_{35})\quad \gamma^2 = \frac{1}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}\Big\{ 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4.2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5.2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$L = 2(G)\Big\{ 1 + e^2 + \frac{5}{4}e^4 + \frac{13}{8}e^6 - \frac{237}{8}e^2\frac{n'^4.2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} - \frac{13739}{96}e^2\frac{n'^5.2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\Big\},$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{35})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = -\frac{n'^2.2^3(G)^3}{\mu^2}\Big\{ 3e^2 - \frac{3}{2}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^2 - 3e^4 - \frac{15}{2}e^2e'^2 + \frac{3}{16}\left(\frac{(G)-(H)}{(G)}\right)^2 e^2\\ + \frac{9}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^4 + \frac{15}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^2e'^2 + \frac{35}{16}e^6 + \frac{15}{2}e^4e'^2 - 99e^2e'^2\frac{n'.2^3(G)}{\mu^2}\\ + \left[\frac{141}{16}e^2 - \frac{267}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^2 + \frac{149}{8}e^4 - \frac{8067}{32}e^2e'^2\right]\frac{n'^2.2^6(G)^6}{\mu^4}\\ - 3e^2\frac{n'^3.2^9(G)^9}{\mu^6} - \frac{76227}{256}e^2\frac{n'^4.2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} - \frac{5}{16}e^2 . \frac{2^4(G)^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 4\frac{dl}{dt} - 2n' = -4\frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dG} - 2\frac{dR}{dH} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, … données à la suite de la

34^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$
(\mathrm{D}_{35})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{2^3(\mathrm{G})^3}\Big\{ & 4 - 12e^2 + 9e^4 - 2\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
& - \left[\frac{11}{2} - \frac{15}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{81}{4}e^2 + \frac{33}{4}e'^2\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \frac{365}{16}\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\} \\
& - \frac{n'^2.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Big\{3 - \frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{3}{2}e^2 - \frac{15}{2}e'^2 + \frac{3}{16}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2 + \frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2 \\
& + \frac{15}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2 + \frac{153}{16}e^4 - \frac{15}{4}e^2e'^2 - 99e'^2\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{141}{16} - \frac{267}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1897}{32}e^2 - \frac{8067}{32}e'^2\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& - 3\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} - \frac{76227}{256}\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} - \frac{5}{16}\cdot\frac{2^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{35}), (D_{35}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{4}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$
(\mathrm{E}_{35})\left\{
\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 + \Big\{ & \left[\frac{3}{4}e_0^2 - \frac{3}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2 + \frac{3}{2}e_0^4 - \frac{15}{8}e_0^2e'^2 + \frac{3}{64}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2e_0^2\right. \\
& \left. - \frac{9}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^4 + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2e'^2 + \frac{215}{64}e_0^6 - \frac{15}{4}e_0^4e'^2\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{3}{8}e_0^2 - \frac{3}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2 + \frac{15}{8}e_0^4 - \frac{411}{16}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
& + \left[\frac{219}{64}e_0^2 - \frac{99}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2 + \frac{695}{32}e_0^4 - \frac{9843}{128}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
& + \frac{189}{128}e_0^2\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{66273}{1024}e_0^2\frac{n'^6.2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}} - \frac{5}{64}e_0^2\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\cdot\frac{2^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta_0(t+c \\
& - \frac{99}{128}e_0^4\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{F}_{35})\left\{\begin{aligned}
\theta &= \theta_0(t+c)\\
&-\Bigg\{\left[\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{39}{8}e_0^2-\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{64}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{33}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e'^2+\frac{1053}{64}e_0^4-\frac{195}{16}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\\
&\qquad+\left[\frac{3}{8}-\frac{3}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{75}{16}e_0^2-\frac{411}{16}e'^2\right]\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\\
&\qquad+\left[\frac{219}{64}-\frac{99}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{6655}{128}e_0^2-\frac{9843}{128}e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad+\frac{189}{128}\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}-\frac{66165}{1024}\frac{n'^6.2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}-\frac{5}{64}\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\cdot\frac{2^4(\mathrm{G})^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c)\\
&+\Bigg\{\left[\frac{9}{64}-\frac{9}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{171}{128}e_0^2-\frac{45}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad+\frac{9}{64}\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}+\frac{675}{512}\frac{n'^6.2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&-\frac{9}{256}\frac{n'^6.2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=\frac{\mu^2}{2^3(\mathrm{G})^3}\left[4-12e_0^2-2\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}-\frac{11}{2}\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right].$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{35}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{35}), (B_{35}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{35})\left\{\begin{aligned}
a &= \frac{2^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{1+2e_0^2+\frac{7}{2}e_0^4+\frac{23}{4}e_0^6-\left[\frac{13}{32}-\frac{15}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{1027}{32}e_0^2+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad-\left[\frac{79}{8}-\frac{167}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}+\frac{3263}{12}e_0^2+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\\
&\qquad\qquad-\frac{153}{4}\frac{n'^6.2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7.2^{21}(\mathrm{G})^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}\\
&+\frac{2^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{\left[\frac{3}{2}e_0^2-\frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2+\frac{33}{4}e_0^4-\frac{15}{4}e_0^2e'^2+\frac{3}{32}\left(\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\right)^2e_0^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^4+\frac{15}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2e'^2+\frac{965}{32}e_0^6-\frac{165}{8}e_0^4e'^2\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(G_{35})\left\{\begin{aligned}
&\qquad + \left[\frac{3}{4}e_0^2 - \frac{3}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2 + \frac{51}{8}e_0^4 - \frac{411}{8}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^3 . 2^9 (G)^9}{\mu^6}\\
&\qquad + \left[\frac{219}{32}e_0^2 - \frac{99}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2 + \frac{4313}{64}e_0^4 - \frac{9843}{64}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4 . 2^{12} (G)^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad + \frac{189}{64}e_0^2 \frac{n'^5 . 2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{78597}{512}e_0^2 \frac{n'^6 . 2^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} - \frac{5}{32}e_0^2 \frac{n'^2 . 2^6 (G)^6}{\mu^4} \cdot \frac{2^4 (G)^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)\\
&- \frac{2^2 (G)^2}{\mu}\cdot\frac{9}{16}e_0^4 \frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\cos 2\theta_0(t+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(H_{35})\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2 = \frac{1}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 - \frac{1}{2}e_0^2 - \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5 . 2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\right\}\\
&\qquad - \frac{1}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{\left[\frac{3}{8}e_0^2 - \frac{3}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^2 + \frac{21}{16}e_0^4 - \frac{15}{16}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^2 . 2^6 (G)^6}{\mu^4}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{3}{16}e_0^2 \frac{n'^3 . 2^9 (G)^9}{\mu^6} + \frac{219}{128}e_0^2 \frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{2^2 (G)^2}{\mu}&\left\{1 + 2e_0^2 + \frac{7}{2}e_0^4 + \frac{23}{4}e_0^6 - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{32}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{1027}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right.\\
&\quad - \left[\frac{79}{8} - \frac{167}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{3263}{12}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5 . 2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\\
&\qquad\qquad \left. - \frac{153}{4}\frac{n'^6 . 2^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 . 2^{21}(G)^{21}}{\mu^{14}}\right\},\\
\gamma_0^2 = \frac{1}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}&\left\{1 - \frac{1}{2}e_0^2 - \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5 . 2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}}\right\}.
\end{aligned}$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{35}), (F_{35}), (G_{35}), (H_{35}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{35})\left\{\begin{aligned}
&e^2 = e_0^2 + \Bigg[\Bigg(\frac{3}{4}e_0^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0^2 - 3e_0^4 - \frac{15}{8}e_0^2 e'^2 + \frac{3}{4}\gamma_0^4 e_0^2 + 6\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{15}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{287}{64}e_0^6 + \frac{15}{2}e_0^4 e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2}
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$
(E'_{35})\left\{\begin{aligned}
&+\left(\frac{3}{8}e_0^2-\frac{3}{4}\gamma_0^2e_0^2-\frac{3}{2}e_0^4-\frac{411}{16}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&+\left(\frac{219}{64}e_0^2-\frac{99}{4}\gamma_0^2e_0^2-\frac{619}{32}e_0^4-\frac{9843}{128}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad+\frac{189}{128}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{65337}{1024}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}-\frac{5}{64}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
&-\frac{99}{128}e_0^4\frac{n'^4}{n_0^4}\cos2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(F'_{35})\left\{\begin{aligned}
\theta=\;&\theta_0(t+c)\\
&-\Bigg[\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma_0^2+\frac{3}{8}e_0^2-\frac{15}{8}e'^2+\frac{3}{4}\gamma_0^4+\frac{15}{4}\gamma_0^2e'^2-\frac{171}{64}e_0^4-\frac{15}{16}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\quad+\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\gamma_0^2+\frac{21}{16}e_0^2-\frac{411}{16}e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\quad+\left(\frac{219}{64}-\frac{99}{4}\gamma_0^2+\frac{1399}{128}e_0^2-\frac{9843}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad+\frac{189}{128}\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{65229}{1024}\frac{n'^6}{n_0^6}-\frac{5}{64}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{9}{64}-\frac{9}{16}\gamma_0^2-\frac{45}{128}e_0^2-\frac{45}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{9}{64}\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{675}{512}\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\sin2\theta_0(t+c)\\
&-\frac{9}{256}\frac{n'^6}{n_0^6}\sin3\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(G'_{35})\left\{\begin{aligned}
a=a_0\Bigg\{1+\Bigg[&\left(\frac{3}{2}e_0^2-3\gamma_0^2e_0^2-\frac{15}{4}e_0^4-\frac{15}{4}e_0^2e'^2+\frac{3}{2}\gamma_0^4e_0^2+\frac{15}{2}\gamma_0^2e_0^4\right.\\
&\qquad\left.+\frac{15}{2}\gamma_0^2e_0^2e'^2+\frac{101}{32}e_0^6+\frac{75}{8}e_0^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&+\left(\frac{3}{4}e_0^2-\frac{3}{2}\gamma_0^2e_0^2-\frac{15}{8}e_0^4-\frac{411}{8}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&+\left(\frac{219}{32}e_0^2-\frac{99}{2}\gamma_0^2e_0^2-\frac{1819}{64}e_0^4-\frac{9843}{64}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad+\frac{189}{64}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{77349}{512}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}-\frac{5}{32}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
&-\frac{9}{16}e_0^4\frac{n'^4}{n_0^4}\cos2\theta_0(t+c)\Bigg\},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(H'_{35})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2=\gamma_0^2-\Bigg[&\left(\frac{3}{8}\gamma_0^2e_0^2-\frac{3}{4}\gamma_0^4e_0^2-\frac{3}{4}\gamma_0^2e_0^4-\frac{15}{16}\gamma_0^2e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad+\frac{3}{16}\gamma_0^2e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{219}{128}\gamma_0^2e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg]\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0 \left[4 - 2\frac{n'}{n_0} - \frac{11}{2}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n &- \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right] \\ &- \frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{4}e^2 - 3\gamma^2 e^2 - \frac{57}{16}e^4 - \frac{45}{8}e^2 e'^2 - \frac{297}{2}e^2 e'^2\frac{n'}{n} + \frac{1269}{64}e^2\frac{n'^2}{n^2} -- 9e^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} = &- \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{51}{32}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\ &- \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{3}{2}e^4 - \frac{15}{8}e^2 e'^2 + \frac{267}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{35}), (F'_{35}), (G'_{35}), (H'_{35}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{35})\left\{\begin{aligned} h+g+l = {} & \frac{1}{2}(h) + \frac{1}{2}(g) + \frac{1}{2}(h'+g'+l') + \left(\frac{1}{4}\theta_0 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}g_0\right)(t+c) \\ & - \left[\left(\frac{9}{8}e_0^2 - \frac{15}{8}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{147}{64}e_0^4 - \frac{45}{16}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\ & \quad + \left(\frac{27}{32}e_0^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{237}{128}e_0^4 - \frac{3699}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & \quad \left. + \frac{657}{64}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{2835}{512}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_{35})\left\{\begin{aligned} h = {} & (h) + h_0(t+c) \\ & - \left[\left(\frac{3}{16}e_0^2 - \frac{3}{16}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{3}{8}e_0^4 - \frac{15}{32}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{3}{32}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{99}{32}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0

sont des quantités qui, comme θ_0', dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{4}\theta+\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}(h'+g'+l').$$

Les six formules (E'_{35}), (F'_{35}), (G'_{35}), (H'_{35}), (K_{35}), (L_{35}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (96); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que l est égal à $\frac{1}{2}\theta-(h+g+l)+h'+g'+l'$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\Big\{1+\Big[\Big(\frac{3}{2}e^2-3\gamma^2e^2-\frac{15}{4}e^4-\frac{15}{4}e^2e'^2+\frac{3}{2}\gamma^4e^2+\frac{15}{2}\gamma^2e^4+\frac{15}{2}\gamma^2e^2e'^2+\frac{101}{32}e^6+\frac{75}{8}e^4e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+\Big(\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{15}{8}e^4-\frac{411}{8}e^2e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}+\Big(\frac{219}{32}e^2-\frac{99}{2}\gamma^2e^2-\frac{1819}{64}e^4-\frac{9843}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\frac{189}{64}e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{77349}{512}e^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{5}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big]$$
$$\times\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l')$$
$$\frac{9}{16}e^4\frac{n'^4}{n}\cos2(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l')\Big\},$$

e^2 par

$$e^2+\Big[\Big(\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-3e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2+\frac{3}{4}\gamma^4e^2+6\gamma^2e^4+\frac{15}{4}\gamma^2e^2e'^2+\frac{287}{64}e^6+\frac{15}{2}e^4e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+\Big(\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{4}\gamma^2e^2-\frac{3}{2}e^4-\frac{411}{16}e^2e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}+\Big(\frac{219}{64}e^2-\frac{99}{4}\gamma^2e^2-\frac{619}{32}e^4-\frac{9843}{128}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\frac{189}{128}e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{65337}{1024}e^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{5}{64}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big]$$
$$\times\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l')$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$-\frac{99}{128}e^4\frac{n'^4}{n^4}\cos 2(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\left[\left(\frac{3}{8}\gamma^2e^2-\frac{3}{4}\gamma^4e^2-\frac{3}{4}\gamma^2e^4-\frac{15}{16}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{16}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{219}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l'),$$

l par

$$l-\left[\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\gamma^2-\frac{15}{16}e^2-\frac{15}{16}e'^2+\frac{3}{8}\gamma^4+\frac{15}{8}\gamma^2e^2+\frac{15}{8}\gamma^2e'^2+\frac{123}{128}e^4+\frac{75}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$+\left(\frac{3}{16}-\frac{3}{8}\gamma^2-\frac{3}{16}e^2-\frac{411}{32}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\left(\frac{219}{128}-\frac{99}{8}\gamma^2-\frac{1229}{256}e^2-\frac{9843}{256}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$\left.+\frac{189}{256}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{65229}{2048}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{5}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]$$
$$\times\sin(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{9}{128}-\frac{9}{32}\gamma^2-\frac{45}{256}e^2-\frac{45}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{128}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{675}{1024}\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin 2(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l')$$

$$-\frac{9}{512}\frac{n'^6}{n^6}\sin 3(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{9}{8}e^2-\frac{15}{8}\gamma^2e^2-\frac{147}{64}e^4-\frac{45}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$+\left(\frac{27}{32}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{237}{128}e^4-\frac{3699}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left.+\frac{657}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{2835}{512}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l'),$$

h par

$$h-\left[\left(\frac{3}{16}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2e^2-\frac{3}{8}e^4-\frac{15}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{32}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{99}{32}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2h+2g+4l-2h'-2g'-2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{35}), (G'_{35}), (H'_{35}), dans les expressions de L, G, H, en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0, et n_0,

$$\mathrm{L}_0 = \text{ancienne valeur de L (page 627)}$$

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\frac{9}{64}e^4\frac{n'^4}{n^4}-\frac{9}{64}e^4\frac{n'^5}{n^5}\right\},$$

$$\mathrm{L}_1 = \sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{2}\gamma^2e^2-\frac{15}{8}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{4}\gamma^2e^2-\frac{15}{16}e^4-\frac{411}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{219}{64}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{189}{128}e^2\frac{n'^5}{n^5}\right\};$$

$$\mathrm{G}_0 = \text{ancienne valeur de G (page 610)}$$

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{81}{256}e^4\frac{n'^4}{n^4};$$

$$\mathrm{H}_0 = \text{ancienne valeur de H (page 611)}$$

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{81}{256}e^4\frac{n'^4}{n^4}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{35}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots)=$$
$$\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{9}{32}e^2-\frac{9}{8}\gamma^2e^2-\frac{9}{16}e^4-\frac{45}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{9}{32}e^2-\frac{9}{8}\gamma^2e^2-\frac{9}{64}e^4-\frac{639}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}-\frac{675}{256}e^2\frac{n'^6}{n^6}-\frac{153}{64}e^2\frac{n'^7}{n^7}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du nº **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 636 et 637) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 35ᵉ opération, et y ajoutant

$$+\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)-\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (96) de R, joint à la quantité $+\frac{1}{2}n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{1}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [35 . . . . . 1, 96]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1069}{64}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+57\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\\
&\qquad+\frac{12051}{1024}e^4-\frac{15585}{128}e^2e'^2+\frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{731}{8}e^2+\frac{2133}{32}e'^2+33\gamma^4+\frac{5417}{16}\gamma^2e^2-\frac{4509}{16}\gamma^2e'^2\\
&\qquad+\frac{9487}{128}e^4-\frac{77427}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{107697}{256}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+\Big(\frac{22441}{288}-\frac{176531}{576}\gamma^2-\frac{3506975}{2304}e^2+\frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}\\
&+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\Big\{1&-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\
&+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{237}{128}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+\frac{711}{32}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2-\frac{103173}{1024}e^4-\frac{3105}{256}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{1063}{48}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{73159}{768}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{H}=\sqrt{a\mu}\Big\{1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{187}{32}\gamma^2-\frac{237}{128}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{1389}{32}\gamma^4-\frac{599}{64}\gamma^2e^2+\frac{2805}{64}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.-\frac{103173}{1024}e^4-\frac{3105}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2-\frac{1063}{48}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2-\frac{73159}{768}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$\left.+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{dL}=\frac{1}{an}\left\{2+\left(\frac{1969}{32}-\frac{1629}{8}\gamma^2+\frac{34985}{128}e^2+\frac{28635}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{415}{2}-\frac{2745}{4}\gamma^2+\frac{31449}{16}e^2+\frac{43299}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{61185}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1532167}{576}\frac{n'^7}{n^7}\right\},$$

$$\frac{da}{dG}=-\frac{1}{an}\left\{\left(\frac{527}{8}-\frac{3633}{16}\gamma^2-\frac{9091}{128}e^2+480\,e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2757}{8}-\frac{2493}{2}\gamma^2-\frac{7161}{16}e^2+\frac{36459}{8}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{104117}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{277537}{48}\frac{n'^7}{n^7}\right\},$$

$$\frac{da}{dH}=-\frac{1}{an}\left\{\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1809}{32}e^2+\frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{167}{8}-66\gamma^2-\frac{2625}{8}e^2+\frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\right\},$$

$$\frac{de}{dL}=\frac{1}{a^2ne}\left\{1-e^2+\left(\frac{1901}{64}-\frac{1113}{16}\gamma^2-\frac{40571}{128}e^2+\frac{28065}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{dG}=-\frac{1}{a^2ne}\left\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1901}{64}-\frac{1113}{16}\gamma^2-\frac{3831}{8}e^2+\frac{28065}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{dH}=\frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{141}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL}=\frac{1}{a^2n\gamma}\,\frac{183}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{217}{64} + \frac{637}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

36^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (97) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (97) *, dans lequel l'argument est $2h + 2g + 4l - 2h - 2g - 3l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{9}{4}\gamma^4e^2 \right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2$$
$$- \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2e'^2 \right.$$
$$\left. + \frac{10767}{512}e^4 - \frac{14115}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$- \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{1035}{8}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$- \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{430735}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$
$$\left. + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\right\}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{21}{8}e^2e' - \frac{21}{4}\gamma^2e^2e' - \frac{105}{16}e^4e' - \frac{369}{64}e^2e'^3 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{99}{16}e^2e' - \frac{369}{8}\gamma^2e^2e' - \frac{45}{4}e^4e'\right)\frac{n'}{n} + \frac{285}{64}e^2e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{877}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\right\}$$
$$\times \cos(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - 3l').$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (97), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente-cinq premières opérations.

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 4, \quad i' = 2, \quad i'' = 2, \quad i''' = -3.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{4}\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$\mathrm{G} = \frac{1}{2}\mathrm{L} + (\mathrm{G}), \qquad \mathrm{H} = \frac{1}{2}\mathrm{L} + (\mathrm{H}).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{36})\left\{\begin{aligned} a = \frac{2^2(\mathrm{G})^2}{\mu}\Bigg\{ & 1 + 2e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \frac{23}{4}e^6 \\ & - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1027}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\ & - \frac{79}{8}\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6.2^{18}(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{36})\quad \gamma^2 = \frac{1}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = 2(\mathrm{G})\left\{1 + e^2 + \frac{5}{4}e^4 + \frac{13}{8}e^6 - \frac{957}{32}e^2\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{36})\left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = -\frac{n'^2.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\Bigg\{ & \frac{21}{2}e^2e' - \frac{21}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2e' - \frac{21}{2}e^4e' - \frac{369}{16}e^2e'^3 \\ & + \left[\frac{99}{4}e^2e' - \frac{369}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e^2e' + \frac{531}{8}e^4e'\right]\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\ & + \frac{285}{16}e^2e'\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \frac{877}{64}e^2e'\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Bigg\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 4\frac{dl}{dt} - 3n' = -4\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 3n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \dots$ données à la suite de la 35^{e} opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{36})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = {} & \frac{\mu^2}{2^3(\mathrm{G})^3}\left\{4 - 12e^2 - 3\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \frac{11}{2}\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\} \\
& - \frac{n'^2.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\left\{\frac{21}{2}e' - \frac{21}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{21}{4}e^2e' - \frac{369}{16}e'^3\right. \\
& \qquad + \left[\frac{99}{4}e' - \frac{369}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{1557}{8}e^2e'\right]\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
& \qquad \left. + \frac{285}{16}e'\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} - \frac{877}{64}e'\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{36}), (D_{36}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{4}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{36})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 & + \left\{\left[\frac{21}{8}e_0^2e' - \frac{21}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2e' + \frac{21}{4}e_0^4e' - \frac{369}{64}e_0^2e'^3\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right. \\
& \qquad + \left[\frac{261}{32}e_0^2e' - \frac{801}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2e' + 45e_0^4e'\right]\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
& \qquad \left. + \frac{1815}{128}e_0^2e'\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{9433}{512}e_0^2e'\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{36})\left\{\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& - \left\{\left[\frac{21}{8}e' - \frac{21}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{273}{16}e_0^2e' - \frac{369}{64}e'^3\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right. \\
& \qquad + \left[\frac{261}{32}e' - \frac{801}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{7065}{64}e_0^2e'\right]\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
& \qquad \left. + \frac{1815}{128}e'\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{9433}{512}e'\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\sin\theta_0(t+c) \\
& + \frac{441}{256}e'^2\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{2^3 (G)^3} \left\{ 4 - 12 e_0^2 - 3 \frac{n'.2^3 (G)^3}{\mu^2} - \frac{11}{2} \frac{n'^2.2^6 (G)^6}{\mu^4} \right\}.$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{36}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{36}), (B_{36}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{36}) \left\{ \begin{aligned} a = \frac{2^2 (G)^2}{\mu} \Bigg\{ & 1 + 2 e_0^2 + \frac{7}{2} e_0^4 + \frac{23}{4} e_0^6 \\ & - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{32} \frac{(G) - (H)}{(G)} + \frac{1027}{32} e_0^2 + \frac{195}{64} e'^2 \right] \frac{n'^4.2^{12} (G)^{12}}{\mu^8} \\ & - \frac{79}{8} \frac{n'^5.2^{15} (G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4} \frac{n'^6.2^{18} (G)^{18}}{\mu^{12}} \Bigg\} \\ + \frac{2^2 (G)^2}{\mu} \Bigg\{ & \left[\frac{21}{4} e_0^2 e' - \frac{21}{8} \frac{(G) - (H)}{(G)} e_0^2 e' + \frac{231}{8} e_0^4 e' - \frac{369}{32} e_0^2 e'^3 \right] \frac{n'^2.2^6 (G)^6}{\mu^4} \\ & + \left[\frac{261}{16} e_0^2 e' - \frac{801}{32} \frac{(G) - (H)}{(G)} e_0^2 e' + \frac{4707}{32} e_0^4 e' \right] \frac{n'^3.2^9 (G)^9}{\mu^6} \\ & + \frac{1815}{64} e_0^2 e' \frac{n'^4.2^{12} (G)^{12}}{\mu^8} + \frac{9433}{256} e_0^2 e' \frac{n'^5.2^{15} (G)^{15}}{\mu^{10}} \Bigg\} \cos \theta_0 (t + c), \end{aligned} \right.$$

$$(H_{36}) \left\{ \begin{aligned} \gamma^2 = & \frac{1}{4} \frac{(G) - (H)}{(G)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e_0^2 - \frac{3}{8} e_0^4 + \frac{115}{32} \frac{n'^4.2^{12} (G)^{12}}{\mu^8} \right\} \\ & - \frac{1}{4} \frac{(G) - (H)}{(G)} \left\{ \frac{21}{16} e_0^2 e' \frac{n'^2.2^6 (G)^6}{\mu^4} + \frac{261}{64} e_0^2 e' \frac{n'^3.2^9 (G)^9}{\mu^6} \right\} \cos \theta_0 (t + c). \end{aligned} \right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{2^2 (G)^2}{\mu} \Bigg\{ & 1 + 2 e_0^2 + \frac{7}{2} e_0^4 + \frac{23}{4} e_0^6 \\ & - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{32} \frac{(G) - (H)}{(G)} + \frac{1027}{32} e_0^2 + \frac{195}{64} e'^2 \right] \frac{n'^4.2^{12} (G)^{12}}{\mu^8} \\ & - \frac{79}{8} \frac{n'^5.2^{15} (G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4} \frac{n'^6.2^{18} (G)^{18}}{\mu^{12}} \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{4} \frac{(G) - (H)}{(G)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e_0^2 - \frac{3}{8} e_0^4 + \frac{115}{32} \frac{n'^4.2^{12} (G)^{12}}{\mu^8} \right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{36}), (F_{36}), (G_{36}), (H_{36}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{36})\quad \left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 + \Big[& \left(\frac{21}{8} e_0^2 e' - \frac{21}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{21}{2} e_0^4 e' - \frac{369}{64} e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{261}{32} e_0^2 e' - \frac{801}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{909}{32} e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \frac{1815}{128} e_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{9433}{512} e_0^2 e' \frac{n'^5}{n_0^5}\Big] \cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{36})\quad \left\{\begin{aligned} \theta = {} & \theta_0(t+c) \\ & - \Big[\left(\frac{21}{8} e' - \frac{21}{4}\gamma_0^2 e' + \frac{21}{16} e_0^2 e' - \frac{369}{64} e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{261}{32} e' - \frac{801}{16}\gamma_0^2 e' + \frac{2367}{64} e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{1815}{128} e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{9433}{512} e' \frac{n'^5}{n_0^5}\Big] \sin\theta_0(t+c) \\ & + \frac{441}{256} e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \sin 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{36})\quad \left\{\begin{aligned} a = a_0\Big\{1 + \Big[& \left(\frac{21}{4} e_0^2 e' - \frac{21}{2}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{105}{8} e_0^4 e' - \frac{369}{32} e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{261}{16} e_0^2 e' - \frac{801}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{1035}{32} e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \frac{1815}{64} e_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{9433}{256} e_0^2 e' \frac{n'^5}{n_0^5}\Big] \cos\theta_0(t+c)\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{36})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\frac{21}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{261}{64}\gamma_0^2 e_0^2 e' \frac{n'^3}{n_0^3}\right] \cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[4 - 3\frac{n'}{n_0} - \frac{11}{2}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$- \frac{n'^2}{n}\left[\frac{63}{8}e^2 e' - \frac{21}{2}\gamma^2 e^2 e' - \frac{399}{32}e^4 e' + \frac{297}{8}e^2 e'\frac{n'}{n} + \frac{2565}{64}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{21}{8}e^2 e' + \frac{369}{16}e^2 e'\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{36}), (F'_{36}), (G'_{36}), (H'_{36}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{36}) \left\{ \begin{aligned} h+g+l = {} & \frac{1}{2}(h) + \frac{1}{2}(g) + \frac{1}{4}(2h' + 2g' + 3l') + \left(\frac{1}{4}\theta_0 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}g_0\right)(t+c) \\ & - \left[\left(\frac{63}{16}e_0^2 e' - \frac{105}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{1029}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\ & \left. + \frac{2349}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{5445}{128}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned} \right.$$

$$(L_{36})\quad h = (h) + h_0(t+c) - \left[\frac{21}{32}e_0^2 e'\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{801}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}g + \frac{1}{4}(2h' + 2g' + 3l').$$

Les six formules (E'_{36}), (F'_{36}), (G'_{36}), (H'_{36}), (K_{36}), (L_{36}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (97); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que l'on a

$$l = \frac{1}{2}\theta - (h+g+l) + \frac{1}{2}(2h' + 2g' + 3l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\Bigg\{1+\Bigg[\left(\frac{21}{4}e^2e'-\frac{21}{2}\gamma^2e^2e'-\frac{105}{8}e^4e'-\frac{369}{32}e^2e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{261}{16}e^2e'-\frac{801}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{1035}{32}e^4e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{1815}{64}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9433}{256}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-3l')\Bigg\},$$

e^2 par

$$e^2+\Bigg[\left(\frac{21}{8}e^2e'-\frac{21}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{21}{2}e^4e'-\frac{369}{64}e^2e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{261}{32}e^2e'-\frac{801}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{909}{32}e^4e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{1815}{128}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9433}{512}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-3l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\left[\frac{21}{16}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{261}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-3l'),$$

l par

$$l-\Bigg[\left(\frac{21}{16}e'-\frac{21}{8}\gamma^2e'-\frac{105}{32}e^2e'-\frac{369}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{261}{64}e'-\frac{801}{32}\gamma^2e'+\frac{9}{64}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{1815}{256}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9433}{1024}e'\frac{n'^5}{n^5}\Bigg]\sin(2h+2g+4l-2h'-2g'-3l')$$

$$+\frac{441}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\sin2(2h+2g+4l-2h'-2g'-3l'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\Bigg[\left(\frac{63}{16}e^2e'-\frac{105}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{1029}{128}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\frac{2349}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{5445}{128}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(2h+2g+4l-2h'-2g'-3l'),$$

h par

$$h - \left[\frac{21}{32} e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{801}{128} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}\right] \sin(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - 3l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{36}), (G'_{36}), (H'_{36}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 639);

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{\frac{21}{8} e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{261}{32} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 639);

H_0 = ancienne valeur de H (page 639).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{36}); en y supprimant également les indices de e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{441}{128} e^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{5481}{256} e^2 e'^2 \frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 647 et 648) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 36^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{3}{4} n'(L - L_0) - \frac{3}{4} n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (97) de R, joint à la quantité $+\frac{3}{4} n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{3}{4} n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [36 . . . 1,97].
Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$L = \sqrt{a\mu}\Big\{1 + \Big(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1069}{64}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + 57\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2$$

$$+ \frac{12051}{1024}e^4 - \frac{8013}{64}e^2 e'^2 + \frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \Big(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{731}{8}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2 + 33\gamma^4 + \frac{5417}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{4509}{16}\gamma^2 e'^2$$

$$+ \frac{9487}{128}e^4 - \frac{315189}{256}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+ \Big(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{107697}{256}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \Big(\frac{22441}{288} - \frac{176531}{576}\gamma^2 - \frac{3506975}{2304}e^2 + \frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}$$

$$+ \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$G = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \Big(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{237}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + \frac{711}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{103173}{1024}e^4 - \frac{1773}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \Big(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{1063}{48}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{73159}{768}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$H = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$+ \Big(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 - \frac{237}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{1389}{32}\gamma^4 - \frac{599}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{2805}{64}\gamma^2 e'^2$$

$$- \frac{103173}{1024}e^4 - \frac{1773}{128}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \Big(\frac{79}{16} + \frac{55}{48}\gamma^2 - \frac{1063}{48}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} + \Big(\frac{153}{8} + \frac{3245}{96}\gamma^2 - \frac{73159}{768}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{da}{dL} = \frac{1}{an}\Big\{ & 2 + \left(\frac{1969}{32} - \frac{1629}{8}\gamma^2 + \frac{34985}{128}e^2 + \frac{29517}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \left(\frac{415}{2} - \frac{2745}{4}\gamma^2 + \frac{31449}{16}e^2 + \frac{178677}{64}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{61185}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1532167}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{dG} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{527}{8} - \frac{3633}{16}\gamma^2 - \frac{9091}{128}e^2 + \frac{15801}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \left(\frac{2757}{8} - \frac{2493}{2}\gamma^2 - \frac{7161}{16}e^2 + \frac{297153}{64}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{104117}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{277537}{48}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{da}{dH} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1809}{32}e^2 + \frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - \frac{2625}{8}e^2 + \frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2ne}\left\{1 - e^2 + \left(\frac{1901}{64} - \frac{1113}{16}\gamma^2 - \frac{40571}{128}e^2 + \frac{14253}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \\ & + \left(\frac{1901}{64} - \frac{1113}{16}\gamma^2 - \frac{3831}{8}e^2 + \frac{14253}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{141}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{183}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ & + \left(\frac{217}{64} + \frac{637}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ & 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ & + \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.\end{aligned}$$

37^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (100) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (100)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2$$

$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

$$- \Big(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2$$

$$+ \frac{10767}{512}e^4 - \frac{3639}{16}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \Big(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{1035}{8}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3}$$

$$- \Big(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{430735}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4}$$

$$- \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} + \Big[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2} \Big] \frac{a^2}{a'^2} \Big\}$$

$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ -\frac{3}{8}e^2 e' + \frac{3}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{15}{16}e^4 e' + \frac{3}{64}e^2 e'^3$$

$$- \Big(\frac{99}{16}e^2 e' - \frac{369}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{45}{4}e^4 e' \Big) \frac{n'}{n} - \frac{279}{64}e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{835}{256}e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} \Big\}$$

$$\times \cos(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - l).$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 4, \quad i' = 2, \quad i'' = 2, \quad i''' = -1.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (100), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente-six premières opérations.

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{4}\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dH}{dt};$$

et par suite, en intégrant,

$$G = \frac{1}{2}L + (G), \qquad H = \frac{1}{2}L + (H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{37})\left\{\begin{aligned} a = \frac{2^2(G)^2}{\mu}\Big\{ & 1 + 2e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \frac{23}{4}e^6 \\ & - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{32}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{1027}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8} \\ & - \frac{79}{8}\frac{n'^5 . 2^{15}(G)^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 . 2^{18}(G)^{18}}{\mu^{12}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(B_{37})\quad \gamma^2 = \frac{1}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$L = 2(G)\left\{1 + e^2 + \frac{5}{4}e^4 + \frac{13}{8}e^6 - \frac{957}{32}e^2\frac{n'^4 . 2^{12}(G)^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{37})\left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^2 . 2^3(G)^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{3}{2}e^2e' - \frac{3}{4}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^2e' - \frac{3}{2}e^4e' - \frac{3}{16}e^2e'^3 \\ & + \left[\frac{99}{4}e^2e' - \frac{369}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^2e' + \frac{531}{8}e^4e'\right]\frac{n' . 2^3(G)^3}{\mu^2} \\ & + \frac{279}{16}e^2e'\frac{n'^2 . 2^6(G)^6}{\mu^4} + \frac{835}{64}e^2e'\frac{n'^3 . 2^9(G)^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 4\frac{dl}{dt} - n' = -4\frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dG} - 2\frac{dR}{dH} - n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots$ données à la suite de la 36^e^ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{37})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{2^3(\mathrm{G})^3}&\left\{4 - 12e^2 - \frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \frac{11}{2}\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right\} \\
&+ \frac{n'^2.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2}\left\{\frac{3}{2}e' - \frac{3}{4}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{3}{4}e^2e' - \frac{3}{16}e'^3\right. \\
&\qquad + \left[\frac{99}{4}e' - \frac{369}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{1557}{8}e^2e'\right]\frac{n'.2^3(\mathrm{G})^3}{\mu^2} \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{279}{16}e'\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4} + \frac{835}{64}e'\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{37}), (D_{37}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{4}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{37})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 - &\left\{\left[\frac{3}{8}e_0^2e' - \frac{3}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2e' + \frac{3}{4}e_0^4e' - \frac{3}{64}e_0^2e'^3\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right. \\
&\quad + \left[\frac{201}{32}e_0^2e' - \frac{741}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^2e' + \frac{285}{8}e_0^4e'\right]\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
&\qquad \left. + \frac{825}{128}e_0^2e'\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{6917}{512}e_0^2e'\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{37})\left\{\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& + \left\{\left[\frac{3}{8}e' - \frac{3}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{39}{16}e_0^2e' - \frac{3}{64}e'^3\right]\frac{n'^2.2^6(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\right. \\
&\quad + \left[\frac{201}{32}e' - \frac{741}{64}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e' + \frac{5565}{64}e_0^2e'\right]\frac{n'^3.2^9(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
&\qquad \left. + \frac{825}{128}e'\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{6917}{512}e'\frac{n'^5.2^{15}(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\right\}\sin\theta_0(t+c) \\
& + \frac{9}{256}e'^2\frac{n'^4.2^{12}(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{2^3\,(\mathrm{G})^3}\Big\{4 - 12\,e_0^2 - \frac{n'.2^3\,(\mathrm{G})^3}{\mu^2} - \frac{11}{2}\,\frac{n'^2.2^6\,(\mathrm{G})^6}{\mu^4}\Big\}.$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{37}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{37}), (B_{37}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{37})\left\{\begin{aligned}
a = {} & \frac{2^2\,(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{1 + 2\,e_0^2 + \frac{7}{2}\,e_0^4 + \frac{23}{4}\,e_0^6 \\
& \qquad - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{32}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1027}{32}\,e_0^2 + \frac{195}{64}\,e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}\,(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad - \frac{79}{8}\,\frac{n'^5.2^{15}\,(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\,\frac{n'^6.2^{18}\,(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Big\} \\
& - \frac{2^2\,(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{\left[\frac{3}{4}\,e_0^2\,e' - \frac{3}{8}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\,e_0^2\,e' + \frac{33}{8}\,e_0^4\,e' - \frac{3}{32}\,e_0^2\,e'^3\right]\frac{n'^2.2^6\,(\mathrm{G})^6}{\mu^4} \\
& \qquad + \left[\frac{201}{16}\,e_0^2\,e' - \frac{741}{32}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\,e_0^2\,e' + \frac{3687}{32}\,e_0^4\,e'\right]\frac{n'^3.2^9\,(\mathrm{G})^9}{\mu^6} \\
& \qquad\qquad + \frac{825}{64}\,e_0^2\,e'\,\frac{n'^4.2^{12}\,(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} + \frac{6917}{256}\,e_0^2\,e'\,\frac{n'^5.2^{15}\,(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}}\Big\}\cos\theta_0\,(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{37})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & \frac{1}{4}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\Big\{1 - \frac{1}{2}\,e_0^2 - \frac{3}{8}\,e_0^4 + \frac{115}{32}\,\frac{n'^4.2^{12}\,(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\} \\
& + \frac{1}{4}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\Big\{\frac{3}{16}\,e_0^2\,e'\,\frac{n'^2.2^6\,(\mathrm{G})^6}{\mu^4} + \frac{201}{64}\,e_0^2\,e'\,\frac{n'^3.2^9\,(\mathrm{G})^9}{\mu^6}\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = {} & \frac{2^2\,(\mathrm{G})^2}{\mu}\Big\{1 + 2\,e_0^2 + \frac{7}{2}\,e_0^4 + \frac{23}{4}\,e_0^6 \\
& \qquad - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{32}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})} + \frac{1027}{32}\,e_0^2 + \frac{195}{64}\,e'^2\right]\frac{n'^4.2^{12}\,(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad - \frac{79}{8}\,\frac{n'^5.2^{15}\,(\mathrm{G})^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\,\frac{n'^6.2^{18}\,(\mathrm{G})^{18}}{\mu^{12}}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\Big\{1 - \frac{1}{2}\,e_0^2 - \frac{3}{8}\,e_0^4 + \frac{115}{32}\,\frac{n'^4.2^{12}\,(\mathrm{G})^{12}}{\mu^8}\Big\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{37}), (F_{37}), (G_{37}), (H_{37}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{37})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 - \Bigg[& \left(\frac{3}{8} e_0^2 e' - \frac{3}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{3}{2} e_0^4 e' - \frac{3}{64} e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{201}{32} e_0^2 e' - \frac{741}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{669}{32} e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \frac{825}{128} e_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{6917}{512} e_0^2 e' \frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{37})\left\{\begin{aligned} \theta = \theta_0(t+c) & \\ + \Bigg[& \left(\frac{3}{8} e' - \frac{3}{4}\gamma_0^2 e' + \frac{3}{16} e_0^2 e' - \frac{3}{64} e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{201}{32} e' - \frac{741}{16}\gamma_0^2 e' + \frac{1947}{64} e_0^2 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^3} + \frac{825}{128} e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{6917}{512} e' \frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\ + \frac{9}{256} & e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{37})\left\{\begin{aligned} a = a_0\Bigg\{ 1 - \Bigg[& \left(\frac{3}{4} e_0^2 e' - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{15}{8} e_0^4 e' - \frac{3}{32} e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{201}{16} e_0^2 e' - \frac{741}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{735}{32} e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \frac{825}{64} e_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{6917}{256} e_0^2 e' \frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

$$(H'_{37})\ \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\frac{3}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{201}{64}\gamma_0^2 e_0^2 e' \frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[4 - \frac{n'}{n_0} - \frac{11}{2}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$+ \frac{n'^2}{n}\left[\frac{9}{8}e^2 e' - \frac{3}{2}\gamma^2 e^2 e' - \frac{57}{32}e^4 e' + \frac{297}{8}e^2 e' \frac{n'}{n} + \frac{2511}{64}e^2 e' \frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{8}e^2 e' + \frac{369}{16}e^2 e' \frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{37}), (F'_{37}), (G'_{37}), (H'_{37}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{37})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= \frac{1}{2}(h) + \frac{1}{2}(g) + \frac{1}{4}(2h'+2g'+l') + \left(\frac{1}{4}\theta_0 + \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}g_0\right)(t+c) \\ &+ \left[\left(\frac{9}{16}e_0^2 e' - \frac{15}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{147}{128}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{1809}{128}e_0^2 e' \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{2475}{128}e_0^2 e' \frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{37})\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[\frac{3}{32}e_0^2 e' \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{741}{128}e_0^2 e' \frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{4}\theta + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}g + \frac{1}{4}(2h'+2g'+l').$$

Les six formules (E'_{37}), (F'_{37}), $G'_{37})$, (H'_{37}), (K_{37}), (L_{37}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (100); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que l'on a

$$l = \frac{1}{2}\theta - (h+g+l) + \frac{1}{2}(2h'+2g'+l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1-\left[\left(\frac{3}{4}e^2e'-\frac{3}{2}\gamma^2e^2e'-\frac{15}{8}e^4e'-\frac{3}{32}e^2e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\right.$$

$$+\left(\frac{201}{16}e^2e'-\frac{741}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{735}{32}e^4e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$\left.\left.+\frac{825}{64}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{6917}{256}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2-\left[\left(\frac{3}{8}e^2e'-\frac{3}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{3}{2}e^4e'-\frac{3}{64}e^2e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$+\left(\frac{201}{32}e^2e'-\frac{741}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{669}{32}e^4e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$\left.+\frac{825}{128}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{6917}{512}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-l')$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\frac{3}{16}\gamma^2e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{201}{64}\gamma^2e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2h+2g+4l-2h'-2g'-l'),$$

l par

$$l+\left[\left(\frac{3}{16}e'-\frac{3}{8}\gamma^2e'-\frac{15}{32}e^2e'-\frac{3}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{201}{64}e'-\frac{741}{32}\gamma^2e'+\frac{69}{64}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{825}{256}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{6917}{1024}e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h+2g+4l-2h'-2g'-l')$$

$$+\frac{9}{512}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2h+2g+4l-2h'-2g'-l');$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{9}{16}e^2e'-\frac{15}{16}\gamma^2e^2e'-\frac{147}{128}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1809}{128}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2475}{128}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2h+2g+4l-2h'-2g'-l'),$$

h par

$$h + \left[\frac{3}{32} e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{741}{128} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}\right] \sin(2h + 2g + 4l - 2h' - 2g' - l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{37}), (G'_{37}), (H'_{37}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 649),

$$L_1 = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{3}{8} e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{201}{32} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 649);

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 649).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin \theta_0 (t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{37}); en y supprimant également les indices de e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{-\frac{9}{128} e^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{603}{256} e^2 e'^2 \frac{n'^5}{n^5}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° 29, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 657 et 658) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 37ᵉ opération, et y ajoutant

$$+\frac{1}{4} n'(L - L_0) - \frac{1}{4} n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (100) de R, joint à la quantité $+\frac{1}{4} n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{1}{4} n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV, avec l'indication [37. . . . 1,100]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &+ \left(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1069}{64}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + 57\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2\right.\\
&\qquad\left. + \frac{12051}{1024}e^4 - \frac{16035}{128}e^2 e'^2 + \frac{10095}{64}e'^4\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{731}{8}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2 + 33\gamma^4 + \frac{5417}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{4509}{16}\gamma^2 e'^2\right.\\
&\qquad\left. + \frac{9487}{128}e^4 - \frac{19737}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{107697}{256}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \left(\frac{22441}{288} - \frac{176531}{576}\gamma^2 - \frac{3506975}{2304}e^2 + \frac{538891}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}\\
&+ \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8\\
&+ \left(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{237}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + \frac{711}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2\right.\\
&\qquad\left. - \frac{103173}{1024}e^4 - \frac{3555}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{1063}{48}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+ \left(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{73159}{768}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8\\
&+ \left(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 - \frac{237}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{1389}{32}\gamma^4 - \frac{599}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{2805}{64}\gamma^2 e'^2\right.\\
&\qquad\left. - \frac{103173}{1024}e^4 - \frac{3555}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+ \left(\frac{79}{16} + \frac{55}{48}\gamma^2 - \frac{1063}{48}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{153}{8} + \frac{3245}{96}\gamma^2 - \frac{73159}{768}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+ \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Bigg\{ 2 + \left(\frac{1969}{32} - \frac{1629}{8}\gamma^2 + \frac{34985}{128}e^2 + \frac{29535}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{415}{2} - \frac{2745}{4}\gamma^2 + \frac{31449}{16}e^2 + \frac{11205}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{61185}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1532167}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Bigg\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Bigg\{\left(\frac{527}{8} - \frac{3633}{16}\gamma^2 - \frac{9091}{128}e^2 + \frac{7905}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{2757}{8} - \frac{2493}{2}\gamma^2 - \frac{7161}{16}e^2 + \frac{74439}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{104117}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{277537}{48}\frac{n'^7}{n^7}\Bigg\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Bigg\{\left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1809}{32}e^2 + \frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - \frac{2625}{8}e^2 + \frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Bigg\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2ne}\Bigg\{1 - e^2 + \left(\frac{1901}{64} - \frac{1113}{16}\gamma^2 - \frac{40571}{128}e^2 + \frac{28515}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2ne}\Bigg\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{1901}{64} - \frac{1113}{16}\gamma^2 - \frac{3831}{8}e^2 + \frac{28515}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{141}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{183}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Bigg\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{217}{64} + \frac{637}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Bigg\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

$$+ \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\}.$$

38^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (23) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (23)*, dans lequel l'argument est $3l$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a} & \\
&+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
&\qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
&\qquad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{10767}{512}e^4 - \frac{14565}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
&\qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{1035}{8}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
&\qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{430735}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
&\qquad\qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\} \\
&+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{1}{16}e^3 + \frac{3}{8}\gamma^2 e^3 + \frac{9}{256}e^5 - \frac{3}{32}e^3 e'^2 - \frac{4917}{256}e^3\frac{n'^2}{n^2} - \frac{16873}{256}e^3\frac{n'^3}{n^3}\right\}\cos 3l.
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 3, \qquad i' = 0, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (23), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente-sept premières opérations.

G et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de γ^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder γ comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(\mathrm{A}_{38})\qquad a = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e^2 + e^4 + e^6 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{21}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en e dans l'expression de L, il vient

$$\mathrm{L} = \mathrm{G}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \frac{957}{64}e^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dl}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{38})\qquad \frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\left\{\frac{3}{8}e^3 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^3 - \frac{3}{128}e^5 + \frac{9}{16}e^3 e'^2 + \frac{14751}{128}e^3\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} + \frac{50619}{128}e^3\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\right\}\sin\theta.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 3\frac{dl}{dt} = -3\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}};$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, $\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}}$, données à la suite de la 37$^\mathrm{e}$ opération, et remplaçant a par sa valeur en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{38})\left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left\{3 - \frac{9}{2}e^2 - \frac{21}{4}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right\}\\ &\quad + \frac{n'^2\mathrm{G}^3}{\mu^2}\left\{\frac{9}{16}e - \frac{27}{8}\gamma^2 e + \frac{129}{256}e^3 + \frac{27}{32}ee'^2 + \frac{44253}{256}e\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} + \frac{151857}{256}e\frac{n'^3\mathrm{G}^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{38}), (D_{38}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{3}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coeffi-

cients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{38})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 - \Bigg[\left(\frac{1}{8}e_0^3 - \frac{3}{4}\gamma^2 e_0^3 + \frac{23}{128}e_0^5 + \frac{3}{16}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ + \frac{4945}{128}e_0^3\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{16873}{128}e_0^3\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Bigg]\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{38})\left\{\begin{aligned} \theta = {} & \theta_0(t+c) \\ & + \Bigg[\left(\frac{3}{16}e_0 - \frac{9}{8}\gamma^2 e_0 + \frac{163}{256}e_0^3 + \frac{9}{32}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4} \\ & \qquad + \frac{14835}{256}e_0\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{50619}{256}e_0\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\ & + \frac{3}{512}e_0^2\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{\mu^2}{\mathrm{G}^3}\left[3 - \frac{9}{2}e_0^2 - \frac{21}{4}\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right].$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{38}), et qu'on la substitue dans la formule (A_{38}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$(\mathrm{G}_{38})\left\{\begin{aligned} a = {} & \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{21}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\ & - \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{\left(\frac{1}{8}e_0^3 - \frac{3}{4}\gamma^2 e_0^3 + \frac{55}{128}e_0^5 + \frac{3}{16}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{G}^6}{\mu^4}\right. \\ & \qquad \left. + \frac{4945}{128}e_0^3\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} + \frac{16873}{128}e_0^3\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{\mathrm{G}^2}{\mu}\left\{1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{21}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{G}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{G}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{G}^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

De cette relation nous pouvons tirer G en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer G par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{38}), (F_{38}), (G_{38}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{38})\quad e^2 = e_0^2 - \left[\left(\frac{1}{8}e_0^3 - \frac{3}{4}\gamma^2 e_0^3 - \frac{25}{128}e_0^5 + \frac{3}{16}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{4945}{128}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{16873}{128}e_0^3\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c),$$

$$(F'_{38})\quad\left\{\begin{aligned} \theta = {} & \theta_0(t+c) \\ & + \left[\left(\frac{3}{16}e_0 - \frac{9}{8}\gamma^2 e_0 + \frac{19}{256}e_0^3 + \frac{9}{32}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{14835}{256}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{50619}{256}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c) \\ & + \frac{3}{512}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{38})\quad a = a_0\left\{1 - \left[\left(\frac{1}{8}e_0^3 - \frac{3}{4}\gamma^2 e_0^3 - \frac{9}{128}e_0^5 + \frac{3}{16}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{4945}{128}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{16873}{128}e_0^3\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\}.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[3 - \frac{21}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH},\qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}&\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\ & + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{5}{32}e^3 - \frac{9}{16}\gamma^2 e^3 - \frac{15}{512}e^5 + \frac{15}{64}e^3 e'^2 + \frac{83589}{512}e^3\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} + \frac{3}{16}e^3\frac{n'^2}{n}\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{38}), (F'_{38}), (G'_{38}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{38})\quad\left\{\begin{aligned} h+g+l = {} & (h)+(g)+\left(\frac{1}{3}\theta_0 + h_0 + g_0\right)(t+c) \\ & + \left[\left(\frac{11}{96}e_0^3 - \frac{9}{16}\gamma^2 e_0^3 - \frac{23}{512}e_0^5 + \frac{11}{64}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{113735}{1536}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{38}) \qquad h = (h) + h_0(t+c) + \frac{1}{16} e_0^3 \frac{n'^2}{n_0^2} \sin \theta_0 (t+c).$$

h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{3}\theta + h + g.$$

Les cinq formules (E'_{38}), (F'_{38}), (G'_{38}), (K_{38}), (L_{38}), jointes à la condition que γ est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (23); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du nº **29**, et si nous remarquons que l est égal à $\frac{1}{3}\theta$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1 - \left[\left(\frac{1}{8}e^3 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^3 - \frac{9}{128}e^5 + \frac{3}{16}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{4945}{128}e^3\frac{n'^4}{n^4} + \frac{16873}{128}e^3\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 3l\right\},$$

e^2 par

$$e^2 - \left[\left(\frac{1}{8}e^3 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^3 - \frac{25}{128}e^5 + \frac{3}{16}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{4945}{128}e^3\frac{n'^4}{n^4} + \frac{16873}{128}e^3\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos 3l,$$

l par

$$l + \left[\left(\frac{1}{16}e - \frac{3}{8}\gamma^2 e + \frac{19}{768}e^3 + \frac{3}{32}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{4945}{256}e\frac{n'^4}{n^4} + \frac{16873}{256}e\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 3l$$
$$+ \frac{1}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 6l,$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l + \left[\left(\frac{11}{96}e^3 - \frac{9}{16}\gamma^2 e^3 - \frac{23}{512}e^5 + \frac{11}{64}e^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{113735}{1536}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 3l,$$

h par

$$h + \frac{1}{16} e^3 \frac{n'^2}{n^2} \sin 3l.$$

γ ne change pas.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a et e^2 données par les formules (E'_{38}), (G'_{38}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 659),

$$L_1 = -\sqrt{a\mu} \cdot \frac{1}{16} e^3 \frac{n'^2}{n^2},$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 659);

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 659).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin \theta_0 (t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{38}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2} (\theta_1 L_1 + 2 \theta_2 L_2 + \ldots) = -\sqrt{a\mu} \cdot \frac{3}{512} e^4 \frac{n'^4}{n^4}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 665 et 666) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 38ᵉ opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (23) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et d'une nouvelle partie qui est donnée dans le chapitre IV, avec l'indication [38 . . . 1, 23]. Ensuite la nouvelle valeur de L, sera

$$L = \sqrt{a\mu} \Big\{ 1 + \Big(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1069}{64} e^2 + \frac{195}{128} e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + 57\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2$$
$$+ \frac{12045}{1024} e^4 - \frac{16035}{128} e^2 e'^2 + \frac{10095}{64} e'^4 \Big) \frac{n'^4}{n^4}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{731}{8}e^2+\frac{2133}{32}e'^2+33\gamma^4+\frac{5417}{16}\gamma^2e^2-\frac{4509}{16}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.+\frac{9487}{128}e^4-\frac{19737}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+\left(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{107697}{256}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$
$$+\left(\frac{22441}{288}-\frac{176531}{576}\gamma^2-\frac{3506975}{2304}e^2+\frac{538891}{192}e'^2\right)\frac{n'^7}{n^7}$$
$$\left.+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Quant aux valeurs de G et de H, elles sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 37^e opération (page 659). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{dL}=\frac{1}{an}\left\{2+\left(\frac{1969}{32}-\frac{1629}{8}\gamma^2+\frac{34991}{128}e^2+\frac{29535}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{415}{2}-\frac{2745}{4}\gamma^2+\frac{31449}{16}e^2+\frac{11205}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{61185}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1532167}{576}\frac{n'^7}{n^7}\right\},$$

$$\frac{da}{dG}=-\frac{1}{an}\left\{\left(\frac{527}{8}-\frac{3633}{16}\gamma^2-\frac{9085}{128}e^2+\frac{7905}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2757}{8}-\frac{2493}{2}\gamma^2-\frac{7161}{16}e^2+\frac{74439}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{104117}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{277537}{48}\frac{n'^7}{n^7}\right\},$$

$$\frac{da}{dH}=-\frac{1}{an}\left\{\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1809}{32}e^2+\frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{167}{8}-66\gamma^2-\frac{2625}{8}e^2+\frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\right\};$$

$$\frac{de}{dL}=\frac{1}{a^2ne}\left\{1-e^2+\left(\frac{1901}{64}-\frac{1113}{16}\gamma^2-\frac{5071}{16}e^2+\frac{28515}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{dG}=-\frac{1}{a^2ne}\left\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1901}{64}-\frac{1113}{16}\gamma^2-\frac{61293}{128}e^2+\frac{28515}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{de}{dH}=\frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{141}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4};$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 n \gamma} \cdot \frac{183}{32} \gamma^2 \frac{n'^4}{n^4},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma} \Big\{ & 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ & + \left(\frac{217}{64} + \frac{637}{32}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6} \Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma} \Big\{ & 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ & + \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6} \Big\}.\end{aligned}$$

39^{e} OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (103) de R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (103)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g + 5l - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\ & + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\ & \quad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\ & \quad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{10761}{512}e^4 - \frac{14565}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & \quad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{1035}{8}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\ & \quad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{430735}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & \quad - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2} \Big\}\end{aligned}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (103), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente-huit premières opérations.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{25}{32}e^3-\frac{25}{16}\gamma^2e^3-\frac{1075}{512}e^5-\frac{125}{64}e^3e'^2-\frac{2175}{64}e^3e'^2\frac{n'}{n}+\frac{2327}{768}e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{715}{1152}e^3\frac{n'^3}{n^3}\right\}$$
$$\times\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=5,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=-2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{1}{5}\frac{dL}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dG}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dH}{dt},$$

et par suite, en intégrant,

$$G=\frac{2}{5}L+(G),\qquad H=\frac{2}{5}L+(H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{39})\left\{\begin{aligned}a=\frac{5^2(G)^2}{3^2\mu}&\left\{1+\frac{5}{3}e^2+\frac{5}{2}e^4+\frac{385}{108}e^6\right.\\&-\left[\frac{13}{32}-\frac{9}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}+\frac{2033}{96}e^2+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{3^{12}\mu^8}\\&\left.-\frac{79}{8}\frac{n'^5.5^{15}(G)^{15}}{3^{15}\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6.5^{18}(G)^{18}}{3^{18}\mu^{12}}\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(B_{39})\quad\gamma^2=\frac{3}{10}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1-\frac{1}{3}e^2-\frac{1}{4}e^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{3^{12}\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$L=\frac{5(G)}{3}\left\{1+\frac{5}{6}e^2+\frac{65}{72}e^4+\frac{445}{432}e^6-\frac{1595}{64}e^2\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{3^{12}\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dL}{dt}=\frac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{39})\left\{\begin{aligned}\frac{d.e^2}{dt}=-\frac{n'^2.5^3(G)^3}{3^3\mu^2}&\left\{\frac{75}{16}e^3-\frac{45}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^3-\frac{1825}{256}e^5-\frac{375}{32}e^3e'^2\right.\\&\left.-\frac{6525}{32}e^3e'^2\frac{n'.5^3(G)^3}{3^3\mu^2}+\frac{2327}{128}e^3\frac{n'^2.5^6(G)^6}{3^6\mu^4}-\frac{715}{192}e^3\frac{n'^3.5^9(G)^9}{3^9\mu^6}\right\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} + 5\frac{dl}{dt} - 2n' = -5\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \dots$ données à la suite de la 38

$$(\mathrm{D}_{39})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{3^3\mu^2}{5^3(\mathrm{G})^3}\left\{5 - \frac{25}{2}e^2 - 2\frac{n'.5^3(\mathrm{G})^3}{3^3\mu^2} - \frac{29}{4}\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{3^6\mu^4}\right\} \\ &\quad - \frac{n'^2.5^3(\mathrm{G})^3}{3^3\mu^2}\left\{\frac{225}{32}e - \frac{135}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e - \frac{3925}{512}e^3 - \frac{1125}{64}ee'^2\right. \\ &\qquad\left. - \frac{19575}{64}ee'^2\frac{n'.5^3(\mathrm{G})^3}{3^3\mu^2} + \frac{6981}{256}e\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{3^6\mu^4} - \frac{715}{128}e\frac{n'^3.5^9(\mathrm{G})^9}{3^9\mu^6}\right\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{39}), (D_{39}) correspondent aux équations (23) du chapitre III ; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{5}\mathrm{L}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{39})\left\{\begin{aligned} e^2 &= e_0^2 + \left\{\left[\frac{15}{16}e_0^3 - \frac{9}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^3 + \frac{235}{256}e_0^5 - \frac{75}{32}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{3^6\mu^4}\right. \\ &\quad + \left[\frac{3}{8}e_0^3 - \frac{9}{40}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^3 + \frac{167}{128}e_0^5 - \frac{1335}{32}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^3.5^9(\mathrm{G})^9}{3^9\mu^6} \\ &\qquad\left. + \frac{3293}{640}e_0^3\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{3^{12}\mu^8} + \frac{4457}{2400}e_0^3\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{3^{15}\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{39})\left\{\begin{aligned} \theta &= \theta_0(t+c) \\ &\quad - \left\{\left[\frac{45}{32}e_0 - \frac{27}{32}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0 + \frac{2215}{512}e_0^3 - \frac{225}{64}e_0e'^2\right]\frac{n'^2.5^6(\mathrm{G})^6}{3^6\mu^4}\right. \\ &\quad + \left[\frac{9}{16}e_0 - \frac{27}{80}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0 + \frac{1043}{256}e_0^3 - \frac{4005}{64}e_0e'^2\right]\frac{n'^3.5^9(\mathrm{G})^9}{3^9\mu^6} \\ &\qquad\left. + \frac{9879}{1280}e_0\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{3^{12}\mu^8} + \frac{4457}{1600}e_0\frac{n'^5.5^{15}(\mathrm{G})^{15}}{3^{15}\mu^{10}}\right\}\sin\theta_0(t+c) \\ &\quad + \frac{675}{2048}e_0^2\frac{n'^4.5^{12}(\mathrm{G})^{12}}{3^{12}\mu^8}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{3^3\mu^2}{5^3(G)^3}\left[5 - \frac{25}{2}e_0^2 - 2\frac{n'.5^3(G)^3}{3^3\mu^2} - \frac{29}{4}\frac{n'^2.5^6(G)^6}{3^6\mu^4}\right].$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{39}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{39}), (B_{39}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{39})\left\{\begin{aligned} a = \frac{5^2(G)^2}{3^2\mu}\Bigg\{ & 1 + \frac{5}{3}e_0^2 + \frac{5}{2}e_0^4 + \frac{385}{108}e_0^6 \\ & - \left[\frac{13}{32} - \frac{9}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{2033}{96}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{3^{12}\mu^8} \\ & - \frac{79}{8}\frac{n'^5.5^{15}(G)^{15}}{3^{15}\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6.5^{18}(G)^{18}}{3^{18}\mu^{12}}\Bigg\} \\ + \frac{5^2(G)^2}{3^2\mu}\Bigg\{ & \left[\frac{25}{16}e_0^3 - \frac{15}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^3 + \frac{4775}{768}e_0^5 - \frac{125}{32}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^2.5^6(G)^6}{3^6\mu^4} \\ & + \left[\frac{5}{8}e_0^3 - \frac{3}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^3 + \frac{1555}{384}e_0^5 - \frac{2225}{32}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^3.5^9(G)^9}{3^9\mu^6} \\ & + \frac{3293}{384}e_0^3\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{3^{12}\mu^8} + \frac{4457}{1440}e_0^3\frac{n'^5.5^{15}(G)^{15}}{3^{15}\mu^{10}}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(H_{39})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = {} & \frac{3}{10}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 - \frac{1}{3}e_0^2 - \frac{1}{4}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{3^{12}\mu^8}\right\} \\ & - \frac{3}{10}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{\frac{5}{16}e_0^3\frac{n'^2.5^6(G)^6}{3^6\mu^4} + \frac{1}{8}e_0^3\frac{n'^3.5^9(G)^9}{3^9\mu^6}\right\}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{5^2(G)^2}{3^2\mu}\Bigg\{ & 1 + \frac{5}{3}e_0^2 + \frac{5}{2}e_0^4 + \frac{385}{108}e_0^6 \\ & - \left[\frac{13}{32} - \frac{9}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)} + \frac{2033}{96}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{3^{12}\mu^8} \\ & - \frac{79}{8}\frac{n'^5.5^{15}(G)^{15}}{3^{15}\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6.5^{18}(G)^{18}}{3^{18}\mu^{12}}\Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = \frac{3}{10}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 - \frac{1}{3}e_0^2 - \frac{1}{4}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4.5^{12}(G)^{12}}{3^{12}\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{39}), (F_{39}), (G_{39}), (H_{39}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{39})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 + \Bigg[& \left(\frac{15}{16}e_0^3 - \frac{15}{8}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{965}{256}e_0^5 - \frac{75}{32}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{3}{8}e_0^3 - \frac{3}{4}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{193}{128}e_0^5 - \frac{1335}{32}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \frac{3293}{640}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{4457}{2400}e_0^3\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{39})\left\{\begin{aligned} \theta = {} & \theta_0(t+c) \\ & - \Bigg[\left(\frac{45}{32}e_0 - \frac{45}{16}\gamma_0^2 e_0 - \frac{1385}{512}e_0^3 - \frac{225}{64}e_0 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{9}{16}e_0 - \frac{9}{8}\gamma_0^2 e_0 - \frac{37}{256}e_0^3 - \frac{4005}{64}e_0 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{9879}{1280}e_0\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{4457}{1600}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\ & + \frac{675}{2048}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{39})\left\{\begin{aligned} a = a_0\Bigg\{1 + \Bigg[& \left(\frac{25}{16}e_0^3 - \frac{25}{8}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{1075}{256}e_0^5 - \frac{125}{32}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{5}{8}e_0^3 - \frac{5}{4}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{215}{128}e_0^5 - \frac{2225}{32}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \frac{3293}{384}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{4457}{1440}e_0^3\frac{n'^5}{n_0^5}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

$$(H'_{39})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\frac{5}{16}\gamma_0^2 e_0^3\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{1}{8}\gamma_0^2 e_0^3\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0\left[5 - 2\frac{n'}{n_0} - \frac{29}{4}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\ - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{125}{64}e^3 - \frac{75}{32}\gamma^2 e^3 - \frac{2925}{1024}e^5 - \frac{625}{128}e^3 e'^2 + \frac{39559}{1536}e^3\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2}{n} - \frac{n'^2}{n}\cdot\frac{25}{32}e^3\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{39}), (F'_{39}), (G'_{39}), (H'_{39}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{39})\left\{\begin{aligned}h+g+l = \frac{3}{5}(h) + \frac{3}{5}(g) + \frac{1}{5}(2h'+2g'+2l') + \left(\frac{1}{5}\theta_0 + \frac{3}{5}h_0 + \frac{3}{5}g_0\right)(t+c) \\ - \left[\left(\frac{55}{64}e_0^3 - \frac{45}{32}\gamma_0^2 e_0^3 - \frac{1875}{1024}e_0^5 - \frac{275}{128}e_0^3 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right. \\ \left. + \frac{17}{32}e_0^3\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{75739}{7680}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_{39})\quad h = (h) + h_0(t+c) - \left[\frac{5}{32}e_0^3\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{1}{16}e_0^3\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{5}\theta + \frac{3}{5}h + \frac{3}{5}g + \frac{1}{5}(2h'+2g'+2l').$$

Les six formules (E'_{39}), (F'_{39}), (G'_{39}), (H'_{39}), (K_{39}), (L_{39}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (103); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que l est égal à $\frac{1}{3}\theta - \frac{2}{3}(h+g+l) + \frac{1}{3}(2h'+2g'+2l')$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{25}{16}e^3-\frac{25}{8}\gamma^2e^3-\frac{1075}{256}e^5-\frac{125}{32}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.\right.$$
$$+\left(\frac{5}{8}e^3-\frac{5}{4}\gamma^2e^3-\frac{215}{128}e^5-\frac{2225}{32}e^3e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left.\left.+\frac{3293}{384}e^3\frac{n'^4}{n^4}+\frac{4457}{1440}e^3\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l')\right\};$$

e^2 par

$$e^2+\left[\left(\frac{15}{16}e^3-\frac{15}{8}\gamma^2e^3-\frac{965}{256}e^5-\frac{75}{32}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$+\left(\frac{3}{8}e^3-\frac{3}{4}\gamma^2e^3-\frac{193}{128}e^5-\frac{1335}{32}e^3e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left.+\frac{3293}{640}e^3\frac{n'^4}{n^4}+\frac{4457}{2400}e^3\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\left[\frac{5}{16}\gamma^2e^3\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1}{8}\gamma^2e^3\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l'),$$

l par

$$l-\left[\left(\frac{15}{32}e-\frac{15}{16}\gamma^2e-\frac{755}{512}e^3-\frac{75}{64}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$+\left(\frac{3}{16}e-\frac{3}{8}\gamma^2e-\frac{103}{256}e^3-\frac{1335}{64}ee'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left.+\frac{3293}{1280}e\frac{n'^4}{n^4}+\frac{4457}{4800}e\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l')$$
$$+\frac{225}{2048}e^2\frac{n'^4}{n^4}\sin 2(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l').$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{55}{64}e^3-\frac{45}{32}\gamma^2e^3-\frac{1875}{1024}e^5-\frac{275}{128}e^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{17}{32}e^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{75739}{7680}e^3\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2h+2g+5l-2h'-2g'-2l'),$$

h par

$$h - \left[\frac{5}{32} e^3 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{1}{16} e^3 \frac{n'^3}{n^3} \right] \sin(2h + 2g + 5l - 2h' - 2g' - 2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{39}), (G'_{39}), (H'_{39}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 666),

$$L_1 = \sqrt{a\mu} \left\{ \frac{25}{32} e^3 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{5}{16} e^3 \frac{n'^3}{n^3} \right\};$$

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 659);

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 659).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{39}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu} \left\{ -\frac{1125}{2048} e^4 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{225}{512} e^4 \frac{n'^5}{n^5} \right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° **29**, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 674 et 675) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 39^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{2}{5} n'(L - L_0) - \frac{2}{5} n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (103) de R, joint à la quantité $+\frac{2}{5} n'(L - L_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{2}{5} n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [39 · · · · 1, 103]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L} = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &+ \Big(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1069}{64}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + 57\,\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad + \frac{22965}{2048}e^4 - \frac{16035}{128}e^2 e'^2 + \frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{731}{8}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2 + 33\,\gamma^4 + \frac{5417}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{4509}{16}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad + \frac{37723}{512}e^4 - \frac{19737}{16}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \Big(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{107697}{256}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} \\
&+ \Big(\frac{22441}{288} - \frac{176531}{576}\gamma^2 - \frac{3506975}{2304}e^2 + \frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7} \\
&\qquad + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G} = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \Big(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{237}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 + \frac{711}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad - \frac{51699}{512}e^4 - \frac{3555}{256}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\
&+ \Big(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 - \frac{1063}{48}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5} \\
&+ \Big(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 - \frac{73159}{768}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6} + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &- 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
&+ \Big(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 - \frac{237}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{1389}{32}\gamma^4 - \frac{599}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{2805}{64}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad - \frac{51699}{512}e^4 - \frac{3555}{256}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2-\frac{1063}{48}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2-\frac{73159}{768}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{dL}=\frac{1}{an}\Bigg\{2+\left(\frac{1969}{32}-\frac{1629}{8}\gamma^2+\frac{71107}{256}e^2+\frac{29535}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{415}{2}-\frac{2745}{4}\gamma^2+\frac{126021}{64}e^2+\frac{11205}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{61185}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1532167}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Bigg\},$$

$$\frac{da}{dG}=-\frac{1}{an}\Bigg\{\left(\frac{527}{8}-\frac{3633}{16}\gamma^2-\frac{17045}{256}e^2+\frac{7905}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{2757}{8}-\frac{2493}{2}\gamma^2-\frac{28419}{64}e^2+\frac{74439}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{104117}{64}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{277537}{48}\frac{n'^7}{n^7}\Bigg\},$$

$$\frac{da}{dH}=-\frac{1}{an}\Bigg\{\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1809}{32}e^2+\frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{167}{8}-66\gamma^2-\frac{2625}{8}e^2+\frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Bigg\},$$

$$\frac{de}{dL}=\frac{1}{a^2ne}\Bigg\{1-e^2+\left(\frac{1901}{64}-\frac{1113}{16}\gamma^2-\frac{161597}{512}e^2+\frac{28515}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\},$$

$$\frac{de}{dG}=-\frac{1}{a^2ne}\Bigg\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6$$

$$+\left(\frac{1901}{64}-\frac{1113}{16}\gamma^2-\frac{244497}{512}e^2+\frac{28515}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\},$$

$$\frac{de}{dH}=\frac{1}{a^2ne}\cdot\frac{141}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL}=\frac{1}{a^2n\gamma}\cdot\frac{183}{32}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dG}=\frac{1}{4a^2n\gamma}\Bigg\{1-2\gamma^2+\frac{1}{2}e^2-\gamma^2e^2+\frac{3}{8}e^4-\frac{3}{4}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$

$$+\left(\frac{217}{64}+\frac{637}{32}\gamma^2-\frac{1587}{128}e^2+\frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH}=-\frac{1}{4a^2n\gamma}\Bigg\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6$$

$$+\left(\frac{217}{64}-\frac{351}{8}\gamma^2-\frac{1587}{128}e^2+\frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Bigg\}.$$

40^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (134) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (134)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g - l - 2g' - 2h' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{20397}{1024}e^4 - \frac{14565}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{1035}{8}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{430735}{768}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ -\frac{7}{32}e^3 + \frac{7}{16}\gamma^2 e^3 - \frac{47}{512}e^5 + \frac{35}{64}e^3 e'^2 - \frac{273}{64}e^3 e'^2\frac{n'}{n} + \frac{247}{768}e^3\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1585}{288}e^3\frac{n'^3}{n^3}\Big\} \\
& \qquad \times \cos(2h + 2g - l - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = -1, \quad i' = 2, \quad i'' = 2, \quad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$-\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{H}}{dt};$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (134), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des trente-neuf premières opérations.

et par suite, en intégrant,

$$G = -2L + (G), \qquad H = -2L + (H).$$

(G) et (H) sont deux constantes arbitraires. Ces deux relations peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{40})\left\{\begin{aligned} a = \frac{(G)^2}{3^2\mu}\Bigg\{ & 1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{6}e^4 + \frac{11}{108}e^6 \\ & - \left[\frac{13}{32} - \frac{45}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)} - \frac{2159}{96}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{3^{12}\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5(G)^{15}}{3^{15}\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6(G)^{18}}{3^{18}\mu^{12}}\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

$$(B_{40})\quad \gamma^2 = \frac{3}{2}\frac{(G)-(H)}{(G)}\left\{1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4(G)^{12}}{3^{12}\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de L, il vient

$$L = \frac{1}{3}(G)\left\{1 + \frac{1}{6}e^2 + \frac{5}{72}e^4 + \frac{17}{432}e^6 - \frac{319}{64}e^2\frac{n'^4(G)^{12}}{3^{12}\mu^8}\right\},$$

et si l'on remarque que $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dR}{dl}$, on en déduit

$$(C_{40})\left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = -\frac{n'^2(G)^3}{3^3\mu^2}\Bigg\{ & \frac{21}{16}e^3 - \frac{63}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}e^3 + \frac{85}{256}e^5 - \frac{105}{32}e^3e'^2 \\ & + \frac{819}{32}e^3e'^2\frac{n'(G)^3}{3^3\mu^2} - \frac{247}{128}e^3\frac{n'^2(G)^6}{3^6\mu^4} - \frac{1585}{48}e^3\frac{n'^3(G)^9}{3^9\mu^6}\Bigg\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} - \frac{dl}{dt} - 2n' = \frac{dR}{dL} - 2\frac{dR}{dG} - 2\frac{dR}{dH} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{dL}, \dfrac{da}{dG}, \dfrac{da}{dH}, \dfrac{de}{dL}, \ldots$ données à la suite de la 39ᵉ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(D_{40})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{3^3\mu^2}{(G)^3}\Bigg\{ & -1 + \frac{1}{2}e^2 - 2\frac{n'(G)^3}{3^3\mu^2} + \frac{13}{4}\frac{n'^2(G)^6}{3^6\mu^4}\Bigg\} \\ - \frac{n'^2(G)^3}{3^3\mu^2}\Bigg\{ & \frac{63}{32}e - \frac{189}{32}\frac{(G)-(H)}{(G)}e + \frac{985}{512}e^3 - \frac{315}{64}ee'^2 \\ & + \frac{2457}{64}ee'^2\frac{n'(G)^3}{3^3\mu^2} - \frac{741}{256}e\frac{n'^2(G)^6}{3^6\mu^4} - \frac{1585}{32}e\frac{n'^3(G)^9}{3^9\mu^6}\Bigg\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{40}), (D_{40}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre que $-$ L) a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(E_{40})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 - \Big\{ & \left[\frac{21}{16}e_0^3 - \frac{63}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^3 + \frac{253}{256}e_0^5 - \frac{105}{32}e_0^3 e'^2\right]\frac{n'^2(G)^6}{3^6\mu^4} \\ & - \left[\frac{21}{8}e_0^3 - \frac{63}{8}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0^3 + \frac{421}{128}e_0^5 - \frac{1029}{32}e_0^3 e'^2\right]\frac{n'^3(G)^9}{3^9\mu^6} \\ & + \frac{971}{128}e_0^3\frac{n'^4(G)^{12}}{3^{12}\mu^8} - \frac{10891}{192}e_0^3\frac{n'^5(G)^{15}}{3^{15}\mu^{10}}\Big\}\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(F_{40})\left\{\begin{aligned} \theta = \theta_0(t+c) & \\ + \Big\{ & \left[\frac{63}{32}e_0 - \frac{189}{32}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{1825}{512}e_0^3 - \frac{315}{64}e_0 e'^2\right]\frac{n'^2(G)^6}{3^6\mu^4} \\ & - \left[\frac{63}{16}e_0 - \frac{189}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)}e_0 + \frac{2665}{256}e_0^3 - \frac{3087}{64}e_0 e'^2\right]\frac{n'^3(G)^9}{3^9\mu^6} \\ & + \frac{2913}{256}e_0\frac{n'^4(G)^{12}}{3^{12}\mu^8} - \frac{10891}{128}e_0\frac{n'^5(G)^{15}}{3^{15}\mu^{10}}\Big\}\sin\theta_0(t+c) \\ + \frac{1323}{2048} & e_0^2\frac{n'^4(G)^{12}}{3^{12}\mu^8}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{3^3\mu^2}{(G)^3}\left[-1 + \frac{1}{2}e_0^2 - 2\frac{n'(G)^3}{3^3\mu^2} + \frac{13}{4}\frac{n'^2(G)^6}{3^6\mu^4}\right].$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{40}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{40}), (B_{40}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{40})\left\{\begin{aligned} a = \frac{(G)^2}{3^2\mu}\Big\{ & 1 + \frac{1}{3}e_0^2 + \frac{1}{6}e_0^4 + \frac{11}{108}e_0^6 \\ & - \left[\frac{13}{32} - \frac{45}{16}\frac{(G)-(H)}{(G)} - \frac{2159}{96}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4(G)^{12}}{3^{12}\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5(G)^{15}}{3^{15}\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6(G)^{18}}{3^{18}\mu^{12}}\Big\} \end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$(\mathrm{G}_{40})\left\{\begin{aligned}
&-\frac{(\mathrm{G})^2}{3^2\mu}\left\{\left[\frac{7}{16}e_0^3-\frac{21}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^3+\frac{589}{768}e_0^5-\frac{35}{32}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{3^6\mu^4}\right.\\
&\qquad-\left[\frac{7}{8}e_0^3-\frac{21}{8}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}e_0^3+\frac{757}{384}e_0^5-\frac{343}{32}e_0^3e'^2\right]\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{3^9\mu^6}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{971}{384}e_0^3\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{3^{12}\mu^8}-\frac{10891}{576}e_0^3\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{3^{15}\mu^{10}}\right\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{40})\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2=\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{1+\frac{1}{3}e_0^2+\frac{1}{4}e_0^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{3^{12}\mu^8}\right\}\\
&\quad-\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}\left\{\frac{7}{16}e_0^3\frac{n'^2(\mathrm{G})^6}{3^6\mu^4}-\frac{7}{8}e_0^3\frac{n'^3(\mathrm{G})^9}{3^9\mu^6}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0=\frac{(\mathrm{G})^2}{3^2\mu}&\left\{1+\frac{1}{3}e_0^2+\frac{1}{6}e_0^4+\frac{11}{108}e_0^6\right.\\
&\left.-\left[\frac{13}{32}-\frac{45}{16}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}-\frac{2159}{96}e_0^2+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{3^{12}\mu^8}-\frac{79}{8}\frac{n'^5(\mathrm{G})^{15}}{3^{15}\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6(\mathrm{G})^{18}}{3^{18}\mu^{12}}\right\},\\
\gamma_0^2=\frac{3}{2}\frac{(\mathrm{G})-(\mathrm{H})}{(\mathrm{G})}&\left\{1+\frac{1}{3}e_0^2+\frac{1}{4}e_0^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4(\mathrm{G})^{12}}{3^{12}\mu^8}\right\}.
\end{aligned}$$

De ces relations nous pouvons tirer (G) et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer (G) et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{40}), (F_{40}), (G_{40}), (H_{40}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{40})\left\{\begin{aligned}
&e^2=e_0^2-\left[\left(\frac{21}{16}e_0^3-\frac{21}{8}\gamma_0^2e_0^3-\frac{83}{256}e_0^5-\frac{105}{32}e_0^3e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad-\left(\frac{21}{8}e_0^3-\frac{21}{4}\gamma_0^2e_0^3-\frac{83}{128}e_0^5-\frac{1029}{32}e_0^3e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{971}{128}e_0^3\frac{n'^4}{n_0^4}-\frac{10891}{192}e_0^3\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{40})\left\{\begin{aligned}
&\theta=\theta_0(t+c)\\
&\quad+\left[\left(\frac{63}{32}e_0-\frac{63}{16}\gamma_0^2e_0+\frac{817}{512}e_0^3-\frac{315}{64}e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{63}{16}e_0-\frac{63}{8}\gamma_0^2e_0+\frac{1153}{256}e_0^3-\frac{3087}{64}e_0e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{2913}{256}e_0\frac{n'^4}{n_0^4}-\frac{10891}{128}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\right]\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad+\frac{1323}{2048}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\sin2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{40})\left\{\begin{aligned} a = a_0 \Big\{ 1 - \Big[& \left(\frac{7}{16} e_0^3 - \frac{7}{8} \gamma_0^2 e_0^3 + \frac{47}{256} e_0^5 - \frac{35}{32} e_0^3 e'^2\right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ & - \left(\frac{7}{8} e_0^3 - \frac{7}{4} \gamma_0^2 e_0^3 + \frac{47}{128} e_0^5 - \frac{343}{32} e_0^3 e'^2\right) \frac{n'^3}{n_0^3} \\ & + \frac{971}{384} e_0^3 \frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{10891}{576} e_0^3 \frac{n'^5}{n_0^5} \Big] \cos\theta_0 (t+c) \Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{40}) \quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\frac{7}{16} \gamma_0^2 e_0^3 \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{7}{8} \gamma_0^2 e_0^3 \frac{n'^3}{n_0^3}\right] \cos\theta_0 (t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n_0 \left[- 1 - 2 \frac{n'}{n_0} + \frac{13}{4} \frac{n'^2}{n_0^2} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} & \left[1 - \frac{9}{2} \gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{451}{64} \frac{n'^2}{n^2} \right] \\ & + \frac{n'^2}{n} \left[\frac{35}{64} e^3 - \frac{21}{32} \gamma^2 e^3 + \frac{225}{1024} e^5 - \frac{175}{128} e^3 e'^2 - \frac{4199}{1536} e^3 \frac{n'^2}{n^2} \right] \cos\theta, \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} + \frac{n'^2}{n} \cdot \frac{7}{32} e^3 \cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{40}), (F'_{40}), (G'_{40}), (H'_{40}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{40})\left\{\begin{aligned} h + g + l = 3(h) + 3(g) - (2h' + 2g' + 2l') + (-\theta_0 + 3h_0 + 3g_0)(t+c) & \\ - \Big[\left(\frac{77}{64} e_0^3 - \frac{63}{32} \gamma_0^2 e_0^3 + \frac{507}{1024} e_0^5 - \frac{385}{128} e_0^3 e'^2\right) \frac{n'^2}{n_0^2} & \\ - \frac{119}{32} e_0^3 \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{22333}{1536} e_0^3 \frac{n'^4}{n_0^4} \Big] \sin\theta_0 (t+c), & \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{40}) \quad h = (h) + h_0 (t+c) - \left[\frac{7}{32} e_0^3 \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{7}{16} e_0^3 \frac{n'^3}{n_0^3}\right] \sin\theta_0 (t+c).$$

(h) et (g) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**) ; h_0 et g_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=-\theta+3h+3g-(2h'+2g'+2l').$$

Les six formules (E'_{40}), (F'_{40}), (G'_{40}), (H'_{40}), (K_{40}), (L_{40}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (134); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la règle du n° **29**, et si nous remarquons que l est égal à

$$-\frac{1}{3}\theta+\frac{2}{3}(h+g+l)-\frac{1}{3}(2h'+2g'+2l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\Big\{1-\Big[\Big(\frac{7}{16}e^3-\frac{7}{8}\gamma^2e^3+\frac{47}{256}e^5-\frac{35}{32}e^3e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\Big(\frac{7}{8}e^3-\frac{7}{4}\gamma^2e^3+\frac{47}{128}e^5-\frac{343}{32}e^3e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{971}{384}e^3\frac{n'^4}{n^4}-\frac{10891}{576}e^3\frac{n'^5}{n^5}\Big]\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-2l')\Big\},$$

e^2 par

$$e^2-\Big[\Big(\frac{21}{16}e^3-\frac{21}{8}\gamma^2e^3-\frac{83}{256}e^5-\frac{105}{32}e^3e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\Big(\frac{21}{8}e^3-\frac{21}{4}\gamma^2e^3-\frac{83}{128}e^5-\frac{1029}{32}e^3e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{971}{128}e^3\frac{n'^4}{n^4}-\frac{10891}{192}e^3\frac{n'^5}{n^5}\Big]\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-2l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\Big[\frac{7}{16}\gamma^2e^3\frac{n'^2}{n^2}-\frac{7}{8}\gamma^2e^3\frac{n'^3}{n^3}\Big]\cos(2h+2g-l-2h'-2g'-2l'),$$

l par

$$
\begin{aligned}
l - \Bigg[& \left(\frac{21}{32} e - \frac{21}{16} \gamma^2 e + \frac{683}{512} e^3 - \frac{105}{64} e e'^2\right) \frac{n'^2}{n^2} \\
& - \left(\frac{21}{16} e - \frac{21}{8} \gamma^2 e + \frac{1019}{256} e^3 - \frac{1029}{64} e e'^2\right) \frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad + \frac{971}{256} e \frac{n'^4}{n^4} - \frac{10891}{384} e \frac{n'^5}{n^5} \Bigg] \sin(2h + 2g - l - 2h' - 2g' - 2l')
\end{aligned}
$$

$$
- \frac{441}{2048} e^2 \frac{n'^4}{n^4} \sin 2(2h + 2g - l - 2h' - 2g' - 2l'),
$$

$h + g + l$ par

$$
\begin{aligned}
h + g + l - \Bigg[& \left(\frac{77}{64} e^3 - \frac{63}{32} \gamma^2 e^3 + \frac{507}{1024} e^5 - \frac{385}{128} e^3 e'^2\right) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \frac{119}{32} e^3 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{22333}{1536} e^3 \frac{n'^4}{n^4} \Bigg] \sin(2h + 2g - l - 2h' - 2g' - 2l'),
\end{aligned}
$$

h par

$$
h - \left[\frac{7}{32} e^3 \frac{n'^2}{n^2} - \frac{7}{16} e^3 \frac{n'^3}{n^3}\right] \sin(2h + 2g - l - 2h' - 2g' - 2l').
$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{40}), (G'_{40}), (H'_{40}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 676),

$$
L_1 = \sqrt{a\mu} \left\{ - \frac{7}{32} e^3 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{7}{16} e^3 \frac{n'^3}{n^3} \right\};
$$

G_0 = ancienne valeur de G (page 676);

H_0 = ancienne valeur de H (page 676).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin \theta_0 (t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{40}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$
\frac{1}{2}(\theta_1 L_1 + 2\theta_2 L_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu} \left\{ - \frac{441}{2048} e^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{441}{512} e^2 \frac{n'^5}{n^5} \right\}.
$$

Cela posé, si l'on se reporte à la règle du n° 29, et qu'on tienne compte des valeurs de i, i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 683 et 684) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 40^e opération, et y ajoutant

$$-2n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)+2n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (134) de R, joint à la quantité $-2n'(\mathrm{L}-\mathrm{L}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$+2n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{L}_1+2\theta_2\mathrm{L}_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [40· · · 1,134]. Ensuite les nouvelles valeurs de L, G, H seront

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}=\sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &+ \Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1069}{64}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+57\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\\
&\qquad\qquad +\frac{5631}{512}e^4-\frac{16035}{128}e^2e'^2+\frac{10095}{64}e'^4\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{731}{8}e^2+\frac{2133}{32}e'^2+33\gamma^4+\frac{5417}{16}\gamma^2e^2-\frac{4509}{16}\gamma^2e'^2\\
&\qquad\qquad +\frac{9541}{128}e^4-\frac{19737}{16}e^2e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{107697}{256}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+\Big(\frac{22441}{288}-\frac{176531}{576}\gamma^2-\frac{3506975}{2304}e^2+\frac{538891}{192}e'^2\Big)\frac{n'^7}{n^7}\\
&\qquad +\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{34852841}{55296}\frac{n'^9}{n^9}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{48549}{4096}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\Big\{ 1 &-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\
&+\Big(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{237}{128}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4+\frac{711}{32}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2-\frac{102957}{1024}e^4-\frac{3555}{256}e^2e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\Big(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2-\frac{1063}{48}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\Big)\frac{n'^5}{n^5}+\Big(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2-\frac{73159}{768}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\Big)\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad +\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \sqrt{a\mu}\,\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 - \frac{237}{128}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{1389}{32}\gamma^4 - \frac{599}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{2805}{64}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{102957}{1024}e^4 - \frac{3555}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{79}{16} + \frac{55}{48}\gamma^2 - \frac{1063}{48}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{153}{8} + \frac{3245}{96}\gamma^2 - \frac{73159}{768}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ & 2 + \left(\frac{1969}{32} - \frac{1629}{8}\gamma^2 + \frac{17887}{64}e^2 + \frac{29535}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{415}{2} - \frac{2745}{4}\gamma^2 + \frac{31395}{16}e^2 + \frac{11205}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{61185}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1532167}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{527}{8} - \frac{3633}{16}\gamma^2 - \frac{4151}{64}e^2 + \frac{7905}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{2757}{8} - \frac{2493}{2}\gamma^2 - \frac{7215}{16}e^2 + \frac{74439}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{104117}{64}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{277537}{48}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{ & \left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1809}{32}e^2 + \frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - \frac{2625}{8}e^2 + \frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{1 - e^2 + \left(\frac{1901}{64} - \frac{1113}{16}\gamma^2 - \frac{80137}{256}e^2 + \frac{28515}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\begin{aligned}
\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \\
& + \left(\frac{1901}{64} - \frac{1113}{16}\gamma^2 - \frac{121587}{256}e^2 + \frac{28515}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{3323}{24}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{62483}{96}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\cdot\frac{141}{8}e^2\frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2 n \gamma} \cdot \frac{183}{32} \gamma^2 \frac{n'^4}{n^4},$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2 n\gamma} \Bigg\{ 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2} e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8} e^4 - \frac{3}{4} \gamma^2 e^4 + \frac{5}{16} e^6$$
$$+ \left(\frac{217}{64} + \frac{637}{32} \gamma^2 - \frac{1587}{128} e^2 + \frac{3255}{128} e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96} \frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192} \frac{n'^6}{n^6} \Bigg\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma} \Bigg\{ 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6$$
$$+ \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8} \gamma^2 - \frac{1587}{128} e^2 + \frac{3255}{128} e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96} \frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192} \frac{n'^6}{n^6} \Bigg\}.$$

41^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (125) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (125)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m' \frac{a^2}{a'^3} \Bigg\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16} e^2 e'^2 + \frac{15}{32} e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$
$$- \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32} e^2 + \frac{465}{64} e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 \right.$$
$$\left. + \frac{4989}{256} e^4 - \frac{14565}{64} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$
$$- \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{1035}{8} e^2 + \frac{6885}{64} e'^2 \right) \frac{n'^3}{n^3}$$
$$- \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{430735}{768} e^2 + \frac{16285}{24} e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4}$$
$$- \frac{28841}{288} \frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864} \frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64} e^2 + \frac{45}{64} e'^2 - \frac{4911}{1024} \frac{n'^2}{n^2} \right] \frac{a^2}{a'^2} \Bigg\}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (125), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante premières opérations.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{75}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{8}\gamma^4 e^2 + \frac{75}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{195}{128}e^2 e'^4$$

$$+ \left(\frac{135}{8}e^2 e'^2 - \frac{675}{4}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{135}{16}e^4 e'^2\right)\frac{n'}{n} + \left(\frac{333}{64}e^2 - \frac{459}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{237}{128}e^4 + \frac{279}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \left(\frac{13}{32}e^2 - \frac{95}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{139}{128}e^4 - \frac{1159}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} - \frac{6947}{384}e^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{125999}{4608}e^2\frac{n'^5}{n^5} + \frac{105}{64}e^2\frac{a^2}{a'^2}\Big\}$$

$$\times \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 0, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt} = 0, \qquad \frac{dG}{dt} = \frac{dH}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant; et si l'on intègre la seconde, on aura

$$H = G + (H),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{41})\left\{\begin{aligned} a = \frac{L^2}{\mu}\Big\{1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{1069}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2 - \frac{15}{64}\frac{(H)^2}{L^2} - \frac{1809}{32}\frac{(H)}{L}e^2 \right.\\ &\qquad \left. + \frac{225}{32}\frac{(H)}{L}e'^2 + \frac{5631}{256}e^4 - \frac{16035}{64}e^2 e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(H)}{L} - \frac{731}{4}e^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \\ &- \left[\frac{153}{4} + \frac{895}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{107697}{128}e^2 + \frac{240085}{256}e'^2\right]\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \\ &- \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}} - \frac{99670013}{221184}\frac{n'^8 L^{24}}{\mu^{16}} - \frac{4431}{1024}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{41})\left\{\begin{aligned}\gamma^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\Big\{&1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6\\&+\left[\frac{115}{32}+\frac{717}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-29e^2+\frac{1725}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{1531}{96}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}+\frac{12287}{192}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{G} = \mathrm{L}\Big\{&1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\&+\left[\frac{957}{64}e^2+\frac{141}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2-\frac{122745}{1024}e^4+\frac{14355}{128}e^2e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{6883}{96}e^2\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}+\frac{64319}{192}e^2\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\Big\};\end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{G}}{dt}=\dfrac{d\mathrm{R}}{dg}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{41})\left\{\begin{aligned}\frac{d.e^2}{dt}=\frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{&\frac{15}{2}e^2+\frac{15}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2-\frac{15}{4}e^4-\frac{75}{4}e^2e'^2+\frac{15}{8}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e^2-\frac{75}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e'^2-\frac{15}{16}e^6\\&+\frac{75}{8}e^4e'^2+\frac{195}{32}e^2e'^4+\left[\frac{135}{2}e^2e'^2+\frac{675}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e'^2-\frac{135}{2}e^4e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\&+\left[\frac{333}{16}e^2+\frac{459}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2-\frac{285}{16}e^4+\frac{279}{8}e^2e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\&-\left[\frac{13}{8}e^2+\frac{95}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2-\frac{165}{32}e^4+\frac{1159}{2}e^2e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\&+\frac{28001}{192}e^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{1194299}{1152}e^2\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}+\frac{105}{16}e^2\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt}=2\frac{dh}{dt}+2\frac{dg}{dt}-2n'=-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}-2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{G}}$, $\dfrac{da}{d\mathrm{H}}$, $\dfrac{de}{d\mathrm{G}}$, … données à la suite de la 40^{e} opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{41})\left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt}=n'\Big\{&-2+\left[\frac{3}{2}+6\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{3}{4}e^2+\frac{9}{4}e'^2+\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}+\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2+9\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2\right.\\&\left.-\frac{3}{16}e^4-\frac{9}{8}e^2e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}}{\mu^2}\\&+\left[\frac{873}{16}+\frac{1317}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{6093}{64}e^2+\frac{13095}{32}e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\&+152\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{128851}{192}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}+\frac{45}{16}\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$(\mathrm{D}_{41})\quad\left\{\begin{aligned}
&+\frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\left\{\frac{15}{2}+\frac{15}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{15}{4}e^2-\frac{75}{4}e'^2+\frac{15}{8}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}+\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2-\frac{75}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2-\frac{15}{16}e^4\right.\\
&\qquad+\frac{75}{8}e^2e'^2+\frac{195}{32}e'^4+\left[\frac{135}{2}e'^2+\frac{675}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2-\frac{405}{4}e^2e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&\qquad+\left[\frac{333}{16}+\frac{459}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{807}{32}e^2+\frac{279}{8}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\left[\frac{13}{8}+\frac{95}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{19}{2}e^2-\frac{1159}{2}e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{28001}{192}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{1194299}{1152}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}+\frac{105}{16}\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\right\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{41}), (D_{41}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{G}\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{41})\quad\left\{\begin{aligned}
e^2=e_0^2&+\left\{\left[\frac{15}{4}e_0^2+\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2-\frac{15}{8}e_0^4-\frac{75}{8}e_0^2e'^2+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e_0^2-\frac{75}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e'^2\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{15}{32}e_0^6+\frac{75}{16}e_0^4e'^2+\frac{195}{64}e_0^2e'^4\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&+\left[\frac{45}{16}e_0^2+\frac{225}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2-\frac{45}{16}e_0^4+\frac{495}{16}e_0^2e'^2+\frac{1215}{64}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e_0^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{2475}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e'^2-\frac{495}{16}e_0^4e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&+\left[\frac{801}{64}e_0^2+\frac{3051}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2-\frac{9555}{512}e_0^4+\frac{5607}{128}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&+\left[\frac{28385}{256}e_0^2+\frac{83705}{256}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2-\frac{256731}{1024}e_0^4+\frac{217141}{256}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&+\frac{1590703}{3072}e_0^2\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}+\frac{100278065}{36864}e_0^2\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}+\frac{105}{32}e_0^2\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{495}{64}e_0^2\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\left\{\left[\frac{225}{128}e_0^4+\frac{225}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^4-\frac{1125}{128}e_0^4e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}+\frac{675}{512}e_0^4\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}-\frac{30645}{2048}e_0^4\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\}\cos2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

$$
(F_{41})\quad\left\{\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& - \Bigg\{ \Bigg[\frac{15}{4} + \frac{15}{4}\frac{(H)}{L} - \frac{15}{8}e_0^2 - \frac{75}{8}e'^2 + \frac{15}{16}\frac{(H)^2}{L^2} + \frac{15}{8}\frac{(H)}{L}e_0^2 - \frac{75}{8}\frac{(H)}{L}e'^2 \\
& \qquad\qquad - \frac{15}{32}e_0^4 + \frac{75}{16}e_0^2 e'^2 + \frac{195}{64}e'^4 \Bigg] \frac{n' L^3}{\mu^2} \\
& \quad + \Bigg[\frac{45}{16} + \frac{225}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{135}{32}e_0^2 + \frac{495}{16}e'^2 + \frac{1215}{64}\frac{(H)^2}{L^2} + \frac{225}{32}\frac{(H)}{L}e_0^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{2475}{16}\frac{(H)}{L}e'^2 - \frac{1485}{32}e_0^2 e'^2 \Bigg] \frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& \quad + \Bigg[\frac{6579}{256} + \frac{22329}{256}\frac{(H)}{L} - \frac{62187}{1024}e_0^2 - \frac{28197}{512}e'^2 \Bigg] \frac{n'^3 L^9}{\mu^6} \\
& \quad + \Bigg[\frac{143915}{1024} + \frac{547445}{1024}\frac{(H)}{L} - \frac{1126009}{2048}e_0^2 + \frac{525407}{512}e'^2 \Bigg] \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& \quad + \frac{18794549}{24576}\frac{n'^5 L'^5}{\mu^{10}} + \frac{1309651045}{294912}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} + \frac{105}{32}\frac{n' L^3}{\mu^2}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2} + \frac{495}{64}\frac{n'^2 L^6}{\mu^4}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2} \Bigg\} \sin\theta_0(t+c) \\
& + \Bigg\{ \Bigg[\frac{225}{64} + \frac{225}{32}\frac{(H)}{L} - \frac{225}{128}e_0^2 - \frac{1125}{64}e'^2 + \frac{675}{128}\frac{(H)^2}{L^2} - \frac{1125}{32}\frac{(H)}{L}e'^2 + \frac{1125}{128}e_0^2 e'^2 \Bigg] \frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& \quad + \Bigg[\frac{675}{128} + \frac{2025}{64}\frac{(H)}{L} - \frac{3375}{512}e_0^2 + \frac{11475}{256}e'^2 \Bigg] \frac{n'^3 L^9}{\mu^6} \\
& \quad + \Bigg[\frac{102735}{2048} + \frac{59265}{256}\frac{(H)}{L} - \frac{210375}{2048}e_0^2 - \frac{184545}{1024}e'^2 \Bigg] \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad + \frac{613695}{2048}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} + \frac{470983621}{262144}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} + \frac{1575}{256}\frac{n'^2 L^6}{\mu^4}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2} \Bigg\} \sin 2\theta_0(t+c) \\
& - \Bigg\{ \Bigg[\frac{1125}{256} + \frac{3375}{256}\frac{(H)}{L} - \frac{3375}{1024}e_0^2 - \frac{16875}{512}e'^2 \Bigg] \frac{n'^3 L^9}{\mu^6} \\
& \quad + \Bigg[\frac{10125}{1024} + \frac{70875}{1024}\frac{(H)}{L} - \frac{30375}{2048}e_0^2 + \frac{30375}{512}e'^2 \Bigg] \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad + \frac{1601775}{16384}\frac{n'^5 L'^5}{\mu^{10}} + \frac{41384025}{65536}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \Bigg\} \sin 3\theta_0(t+c) \\
& + \Bigg\{ \Bigg[\frac{50625}{8192} + \frac{50625}{2048}\frac{(H)}{L} - \frac{50625}{8192}e_0^2 - \frac{253125}{4096}e'^2 \Bigg] \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad + \frac{151875}{8192}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} + \frac{24937875}{131072}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \Bigg\} \sin 4\theta_0(t+c) \\
& - \Bigg\{ \frac{151875}{16384}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} + \frac{2278125}{65536}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \Bigg\} \sin 5\theta_0(t+c) \\
& + \frac{3796875}{262144}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \sin 6\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\begin{aligned}
\theta_0 = n' \Big\{ -2 &+ \left[\frac{3}{2} + 6\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{4}e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n'\,\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{225}{16} + \frac{225}{8}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{675}{32}e_0^2 - \frac{1125}{16}e'^2\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{4167}{64}\,\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{294293}{1024}\,\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{41}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{41}), (B_{41}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_{41})\;\left\{
\begin{aligned}
a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2 - \frac{15}{64}\,\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2} - \frac{1809}{32}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{225}{32}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 + \frac{5631}{256}e_0^4 - \frac{16035}{64}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\
&- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{731}{4}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} \\
&- \left[\frac{153}{4} + \frac{895}{16}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{107697}{128}e_0^2 + \frac{240085}{256}e'^2\right]\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} \\
&\qquad - \frac{22441}{144}\,\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}} - \frac{99670013}{221184}\,\frac{n'^8\,\mathrm{L}^{24}}{\mu^{16}} - \frac{4431}{1024}\,\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \\
+ \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{ &\left[\frac{16035}{128}e_0^2 + \frac{21585}{64}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2 - \frac{116535}{512}e_0^4 + \frac{80175}{128}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} \\
&\qquad + \frac{398985}{512}e_0^2\,\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} + \frac{8370729}{2048}e_0^2\,\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}. \Big\} \cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{H}_{41})\;\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\Big\{ 1 &+ \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{5}{16}e_0^6 + \frac{675}{256}e_0^4\,\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
&+ \left[\frac{115}{32} + \frac{717}{64}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - 29e_0^2 + \frac{1725}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\,\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{12287}{192}\,\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} \Big\} \\
- \frac{1}{2}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\Big\{ &\left[\frac{15}{8}e_0^2 + \frac{15}{8}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2 + \frac{15}{8}e_0^4 - \frac{75}{16}e_0^2\,e'^2\right]\frac{n'\,\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{45}{32}e_0^2 + \frac{225}{32}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2 + \frac{45}{64}e_0^4 + \frac{495}{32}e_0^2\,e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
&\qquad + \frac{801}{128}e_0^2\,\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{28385}{512}e_0^2\,\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \Big\} \cos\theta_0(t+c) \\
- \frac{1}{2}\,\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}&\cdot\frac{225}{128}e_0^4\,\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{L^2}{\mu}\Bigg\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2 - \frac{15}{64}\frac{(H)^2}{L^2} - \frac{1809}{32}\frac{(H)}{L}e_0^2\right. \\
&\qquad\left. + \frac{225}{32}\frac{(H)}{L}e'^2 + \frac{5631}{256}e_0^4 - \frac{16035}{64}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
&- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(H)}{L} - \frac{731}{4}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \\
&- \left[\frac{153}{4} + \frac{895}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{107697}{128}e_0^2 + \frac{240085}{256}e'^2\right]\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \\
&- \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}} - \frac{99670013}{221184}\frac{n'^8 L^{24}}{\mu^{16}} - \frac{4431}{1024}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{(H)}{L}\Bigg\{ 1 &+ \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{5}{16}e_0^6 + \frac{675}{256}\,e_0^4\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
&+ \left[\frac{115}{32} + \frac{717}{64}\frac{(H)}{L} - 29e_0^2 + \frac{1725}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} + \frac{12287}{192}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{41}), (F_{41}), (G_{41}), (H_{41}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{41})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 &+ \Bigg[\left(\frac{15}{4}e_0^2 - \frac{15}{2}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{15}{8}e_0^4 - \frac{75}{8}e_0^2 e'^2 + \frac{15}{4}\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{15}{4}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{75}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right. \\
&\qquad\left. - \frac{15}{32}e_0^6 + \frac{75}{16}e_0^4 e'^2 + \frac{195}{64}e_0^2 e'^4\right)\frac{n'}{n_0} \\
&+ \left(\frac{45}{16}e_0^2 - \frac{225}{8}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{45}{16}e_0^4 + \frac{495}{16}e_0^2 e'^2 + \frac{1215}{16}\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{225}{16}\gamma_0^2 e_0^4\right. \\
&\qquad\left. - \frac{2475}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 - \frac{495}{16}e_0^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&+ \left(\frac{801}{64}e_0^2 - \frac{3051}{32}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{9555}{512}e_0^4 + \frac{5607}{128}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\
&+ \left(\frac{28385}{256}e_0^2 - \frac{83705}{128}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{256731}{1024}e_0^4 + \frac{217141}{256}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\
&+ \frac{1597723}{3072}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{102452105}{36864}e_0^2\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{105}{32}e_0^2\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{495}{64}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c) \\
&- \left[\left(\frac{225}{128}e_0^4 - \frac{225}{32}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{1125}{128}e_0^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{675}{512}e_0^4\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{30645}{2048}e_0^4\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$
(F'_{,1})\left\{\begin{aligned}
&\theta = \theta_0(t+c)\\
&\quad -\Big[\Big(\frac{15}{4} - \frac{15}{2}\gamma_0^2 - \frac{15}{8}e_0^2 - \frac{75}{8}e'^2 + \frac{15}{4}\gamma_0^4 + \frac{75}{4}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{15}{32}e_0^4\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{75}{16}e_0^2 e'^2 + \frac{195}{64}e'^4\Big)\frac{n'}{n_0}\\
&\qquad + \Big(\frac{45}{16} - \frac{225}{8}\gamma_0^2 - \frac{135}{32}e_0^2 + \frac{495}{16}e'^2 + \frac{1215}{16}\gamma_0^4\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{2475}{8}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{1485}{32}e_0^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad + \Big(\frac{6579}{256} - \frac{22329}{128}\gamma_0^2 - \frac{62187}{1024}e_0^2 - \frac{28197}{512}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad + \Big(\frac{143915}{1024} - \frac{547445}{512}\gamma_0^2 - \frac{1126009}{2048}e_0^2 + \frac{525407}{512}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad + \frac{18850709}{24576}\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{1327043365}{294912}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{105}{32}\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{495}{64}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big]\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad +\Big[\Big(\frac{225}{64} - \frac{225}{16}\gamma_0^2 - \frac{225}{128}e_0^2 - \frac{1125}{64}e'^2 + \frac{675}{32}\gamma_0^4 + \frac{225}{32}\gamma_0^2 e_0^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1125}{16}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{1125}{128}e_0^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad + \Big(\frac{675}{128} - \frac{2025}{32}\gamma_0^2 - \frac{3375}{512}e_0^2 + \frac{11475}{256}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad + \Big(\frac{102735}{2048} - \frac{59265}{128}\gamma_0^2 - \frac{210375}{2048}e_0^2 - \frac{184545}{1024}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad + \frac{613695}{2048}\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{472106821}{262144}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{1575}{256}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Big]\sin 2\theta_0(t+c)\\
&\quad -\Big[\Big(\frac{1125}{256} - \frac{3375}{128}\gamma_0^2 - \frac{3375}{1024}e_0^2 - \frac{16875}{512}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad + \Big(\frac{10125}{1024} - \frac{70875}{512}\gamma_0^2 - \frac{30375}{2048}e_0^2 + \frac{30375}{512}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad + \frac{1601775}{16384}\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{41384025}{65536}\frac{n'^6}{n_0^6}\Big]\sin 3\theta_0(t+c)\\
&\quad +\Big[\Big(\frac{50625}{8192} - \frac{50625}{1024}\gamma_0^2 - \frac{50625}{8192}e_0^2 - \frac{253125}{4096}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&\qquad\qquad + \frac{151875}{8192}\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{24937875}{131072}\frac{n'^6}{n_0^6}\Big]\sin 4\theta_0(t+c)\\
&\quad -\Big[\frac{151875}{16384}\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{2278125}{65536}\frac{n'^6}{n_0^6}\Big]\sin 5\theta_0(t+c)\\
&\quad + \frac{3796875}{262144}\frac{n'^6}{n_0^6}\sin 6\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{G}'_{41})\left\{\begin{aligned} a = a_0 \Big\{ 1 + \Big[\Big(\frac{16035}{128} e_0^2 - \frac{21585}{32} \gamma_0^2 e_0^2 - \frac{116535}{512} e_0^4 + \frac{80175}{128} e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^5}{n_0^5} \\ + \frac{398985}{512} e_0^2 \frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{8370729}{2048} e_0^2 \frac{n'^7}{n_0^7} \Big] \cos\theta_0 (t+c) \Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{41})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big[\Big(\frac{15}{8} \gamma_0^2 e_0^2 - \frac{15}{4} \gamma_0^4 e_0^2 + \frac{15}{16} \gamma_0^2 e_0^4 - \frac{75}{16} \gamma_0^2 e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'}{n_0} \\ + \Big(\frac{45}{32} \gamma_0^2 e_0^2 - \frac{225}{16} \gamma_0^4 e_0^2 + \frac{495}{32} \gamma_0^0 e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ + \frac{801}{128} \gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{28385}{512} \gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \Big] \cos\theta_0 (t+c) \\ + \frac{225}{128} \gamma_0^2 e_0^4 \frac{n'^2}{n_0^2} \cos 2\theta_0 (t+c). \end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\begin{aligned} \theta_0 = n' \Big[-2 + \Big(\frac{3}{2} - 12 \gamma_0^2 - \frac{3}{4} e_0^2 + \frac{9}{4} e'^2 \Big) \frac{n'}{n_0} \\ + \Big(\frac{225}{16} - \frac{225}{4} \gamma_0^2 - \frac{675}{32} e_0^2 - \frac{1125}{16} e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{4167}{64} \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{294293}{1024} \frac{n'^4}{n_0^4} \Big]. \end{aligned}$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} \Big[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32} e^4 + \frac{27}{16} e^2 e'^2 + \frac{15}{8} e'^4 \\ - \Big(\frac{451}{64} - \frac{207}{8}\gamma^2 - \frac{2325}{32} e^2 + \frac{6765}{128} e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \\ - \Big(\frac{787}{32} - \frac{717}{8}\gamma^2 - \frac{1455}{8} e^2 + \frac{21249}{64} e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3} - \frac{18979}{192} \frac{n'^4}{n^4} - \frac{77029}{288} \frac{n'^5}{n^5} + \frac{9}{8} \frac{a^2}{a'^2} \Big] \\ - \frac{n'^2}{n} \Big[\frac{45}{8} e^2 - \frac{15}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{32} e^4 - \frac{225}{16} e^2 e'^2 + \frac{15}{8}\gamma^4 e^2 + \frac{15}{16}\gamma^2 e^4 + \frac{75}{4}\gamma^2 e^2 e'^2 \\ + \frac{15}{64} e^6 - \frac{75}{64} e^4 e'^2 + \frac{405}{4} e^2 e'^2 \frac{n'}{n} \\ + \Big(\frac{2997}{64} e^2 - \frac{459}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{3459}{256} e^4 + \frac{2511}{32} e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \\ - \frac{39}{8} e^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{195635}{512} e^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{735}{64} e^2 \frac{a^2}{a'^2} \Big] \cos\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - 3\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{27}{32}e^4 + \frac{9}{4}e^2 e'^2 \\ - \left(\frac{51}{32} - \frac{165}{32}\gamma^2 - \frac{1317}{64}e^2 + \frac{765}{64}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{203}{32}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{17567}{768}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{45}{32}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg] \\ - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{16}e^4 - \frac{75}{16}e^2 e'^2 + \frac{675}{8}e^2 e'^2\frac{n'}{n} + \frac{459}{32}e^2\frac{n'^2}{n^2} - \frac{95}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{41}), (F'_{41}), (G'_{41}), (H'_{41}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{L}_{41})\left\{\begin{aligned} h + g + l = (l) + h' + g' + l' + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + l_0\right)(t+c) \\ + \Bigg[\bigg(\frac{45}{16}e_0^2 - \frac{15}{4}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{15}{64}e_0^4 - \frac{225}{32}e_0^2 e'^2 + \frac{15}{16}\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{15}{32}\gamma_0^2 e_0^4 \\ + \frac{75}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 + \frac{15}{128}e_6^6 - \frac{75}{128}e_0^4 e'^2\bigg)\frac{n'}{n_0} \\ + \left(\frac{135}{32}e_0^2 - \frac{1125}{32}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{405}{256}e_0^4 + \frac{1485}{32}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ + \left(\frac{24543}{512}e_0^2 - \frac{9477}{32}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{20739}{512}e_0^4 - \frac{50949}{1024}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ + \frac{200685}{512}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{80398495}{32768}e_0^2\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{735}{128}e_0^2\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\ + \left[\frac{225}{1024}e_0^4\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{2025}{2048}e_0^4\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin 2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{K}_{41})\left\{\begin{aligned} h = (h) + h_0(t+c) \\ + \Bigg[\left(\frac{15}{16}e_0^2 - \frac{15}{16}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{15}{32}e_0^4 - \frac{75}{32}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\ + \left(\frac{225}{64}e_0^2 - \frac{1215}{64}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{225}{128}e_0^4 + \frac{2475}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ + \frac{9477}{512}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{238285}{2048}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\ + \frac{225}{512}e_0^4\frac{n'^2}{n_0^2}\sin 2\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); l_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La

forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+l+h'+g'+l'.$$

Les six formules (E'_{41}), (F'_{41}), (G'_{41}), (H'_{41}), (K_{41}), (L_{41}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (125); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du n° **50**, et si nous remarquons que l est égal à $-\frac{1}{2}\theta+(h+g+l)-h'-g'-l'$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{16035}{128}e^2-\frac{21585}{32}\gamma^2e^2-\frac{116535}{512}e^4+\frac{80175}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{398985}{512}e^2\frac{n'^6}{n^6}+\frac{8370729}{2048}e^2\frac{n'^7}{n^7}\right]\cos(2h+2g-2h'-2g'-2l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2+\left[\left(\frac{15}{4}e^2-\frac{15}{2}\gamma^2e^2-\frac{15}{8}e^4-\frac{75}{8}e^2e'^2+\frac{15}{4}\gamma^4e^2+\frac{15}{4}\gamma^2e^4+\frac{75}{4}\gamma^2e^2e'^2\right.\right.$$
$$\left.-\frac{15}{32}e^6+\frac{75}{16}e^4e'^2+\frac{195}{64}e^2e'^4\right)\frac{n'}{n}$$
$$+\left(\frac{45}{16}e^2-\frac{225}{8}\gamma^2e^2-\frac{45}{16}e^4+\frac{495}{16}e^2e'^2+\frac{1215}{16}\gamma^4e^2+\frac{225}{16}\gamma^2e^4-\frac{2475}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{495}{16}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+\left(\frac{801}{64}e^2-\frac{3051}{32}\gamma^2e^2-\frac{9555}{512}e^4+\frac{5607}{128}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+\left(\frac{28385}{256}e^2-\frac{83705}{128}\gamma^2e^2-\frac{256731}{1024}e^4+\frac{217141}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$\left.+\frac{1597723}{3072}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{102452105}{36864}e^2\frac{n'^6}{n^6}+\frac{105}{32}e^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{495}{64}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]$$
$$\times\cos(2h+2g-2h'-2g'-2l')$$

$$-\left[\left(\frac{225}{128}e^4-\frac{225}{32}\gamma^2e^4-\frac{1125}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{675}{512}e^4\frac{n'^3}{n^3}-\frac{30645}{2048}e^4\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos2(2h+2g-2h'-2g'-2l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2 + \biggl[\left(\frac{15}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{15}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{75}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+ \left(\frac{45}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{16}\gamma^4 e^2 + \frac{495}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \frac{801}{128}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{28385}{512}\gamma^2 e^2 \frac{n'^4}{n^4}\biggr] \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \frac{225}{128}\gamma^2 e^4 \frac{n'^2}{n^2} \cos 2(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l'),$$

l par

$$l + \biggl[\left(\frac{15}{8} - \frac{15}{4}\gamma^2 + \frac{15}{8}e^2 - \frac{75}{16}e'^2 + \frac{15}{8}\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{75}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{75}{16}e^2 e'^2 + \frac{195}{128}e'^4\right)\frac{n'}{n}$$

$$+ \left(\frac{45}{32} - \frac{225}{16}\gamma^2 + \frac{135}{64}e^2 + \frac{495}{32}e'^2 + \frac{1215}{32}\gamma^4 - \frac{1125}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2475}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{405}{256}e^4 + \frac{1485}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{6579}{512} - \frac{22329}{256}\gamma^2 + \frac{35985}{2048}e^2 - \frac{28197}{1024}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \left(\frac{143915}{2048} - \frac{547445}{1024}\gamma^2 + \frac{479471}{4096}e^2 + \frac{525407}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{18850709}{49152}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1327043365}{589824}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{105}{64}\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{495}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\biggr]$$

$$\times \sin(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$- \biggl[\left(\frac{225}{128} - \frac{225}{32}\gamma^2 - \frac{225}{256}e^2 - \frac{1125}{128}e'^2 + \frac{675}{64}\gamma^4 + \frac{225}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{1125}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{225}{1024}e^4 + \frac{1125}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{675}{256} - \frac{2025}{64}\gamma^2 - \frac{3375}{1024}e^2 + \frac{11475}{512}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \left(\frac{102735}{4096} - \frac{59265}{256}\gamma^2 - \frac{210375}{4096}e^2 - \frac{184545}{2048}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{613695}{4096}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{472106821}{524288}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1575}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\biggr]$$

$$\times \sin 2(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \biggl[\left(\frac{1125}{512} - \frac{3375}{256}\gamma^2 - \frac{3375}{2048}e^2 - \frac{16875}{1024}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \left(\frac{10125}{2048} - \frac{70875}{1024}\gamma^2 - \frac{30375}{4096}e^2 + \frac{30375}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{1601775}{32768}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{41384025}{131072}\frac{n'^6}{n^6}\biggr] \sin 3(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$- \left[\left(\frac{50625}{16384} - \frac{50625}{2048} \gamma^2 - \frac{50625}{16384} e^2 - \frac{253125}{8192} e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} \right.$$

$$\left. + \frac{151875}{16384} \frac{n'^5}{n^5} + \frac{24937875}{262144} \frac{n'^6}{n^6} \right] \sin 4 (2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \left[\frac{151875}{32768} \frac{n'^5}{n^5} + \frac{2278125}{131072} \frac{n'^6}{n^6} \right] \sin 5 (2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$- \frac{3796875}{524288} \frac{n'^6}{n^6} \sin 6 (2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l + \left[\left(\frac{45}{16} e^2 - \frac{15}{4} \gamma^2 e^2 + \frac{15}{64} e^4 - \frac{225}{32} e^2 e'^2 + \frac{15}{16} \gamma^4 e^2 + \frac{15}{32} \gamma^2 e^4 + \frac{75}{8} \gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{15}{128} e^6 - \frac{75}{128} e^4 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \right.$$

$$+ \left(\frac{135}{32} e^2 - \frac{1125}{32} \gamma^2 e^2 - \frac{405}{256} e^4 + \frac{1485}{32} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{24543}{512} e^2 - \frac{9477}{32} \gamma^2 e^2 - \frac{20739}{512} e^4 - \frac{50949}{1024} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^3}{n^3}$$

$$\left. + \frac{200685}{512} e^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{80398495}{32768} e^2 \frac{n'^5}{n^5} + \frac{735}{128} e^2 \frac{n'}{n} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \right]$$

$$\times \sin (2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \left[\frac{225}{1024} e^4 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{2025}{2048} e^4 \frac{n'^3}{n^3} \right] \sin 2 (2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

h par

$$h + \left[\left(\frac{15}{16} e^2 - \frac{15}{16} \gamma^2 e^2 + \frac{15}{32} e^4 - \frac{75}{32} e^2 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \right.$$

$$+ \left(\frac{225}{64} e^2 - \frac{1215}{64} \gamma^2 e^2 + \frac{225}{128} e^4 + \frac{2475}{64} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$\left. + \frac{9477}{512} e^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{238285}{2048} e^2 \frac{n'^4}{n^4} \right] \sin (2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$+ \frac{225}{512} e^4 \frac{n'^2}{n^2} \sin 2 (2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{41}), (G'_{41}), (H'_{41}), dans les expressions de L, G, H, en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0, et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 685)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{225}{256}e^4-\frac{225}{64}\gamma^2e^4+\frac{225}{512}e^6-\frac{1125}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{675}{512}e^4\frac{n'^3}{n^3}-\frac{26055}{4096}e^4\frac{n'^4}{n^4}\right\},$$

$$G_1=\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{15}{8}e^2-\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{75}{16}e^2e'^2+\frac{15}{8}\gamma^4e^2+\frac{75}{8}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\right.$$

$$-\left(\frac{45}{32}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{45}{64}e^4+\frac{495}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{801}{128}e^2-\frac{3051}{64}\gamma^2e^2-\frac{6351}{1024}e^4+\frac{5607}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$\left.-\frac{28385}{512}e^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1212883}{6144}e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{105}{64}e^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 686)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{225}{256}e^4-\frac{1125}{128}\gamma^2e^4+\frac{225}{512}e^6-\frac{1125}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{675}{512}e^4\frac{n'^3}{n^3}-\frac{26055}{4096}e^4\frac{n'^4}{n^4}\right\}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{41}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1G_1+2\theta_2G_2+\ldots)=$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{225}{128}e^4-\frac{1125}{64}e^2e'^2+\frac{675}{32}\gamma^4e^2+\frac{225}{64}\gamma^2e^4+\frac{1125}{16}\gamma^2e^2e'^2\right.\right.$$

$$\left.-\frac{225}{512}e^6+\frac{1125}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{3375}{512}e^4+\frac{11475}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{154845}{4096}e^2-\frac{186435}{512}\gamma^2e^2-\frac{1284255}{16384}e^4-\frac{115965}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$\left.+\frac{1075515}{4096}e^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{178185773}{131072}e^2\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1575}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 697 à 699) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 41^e^ opération, et y ajoutant

$$+n'(G-G_0)-n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 G_1+2\theta_2 G_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (125) de R, joint à la quantité $+n'(G-G_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 G_1+2\theta_2 G_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication (41 . . . . 1, 125). Ensuite les nouvelles valeurs de G, H seront

$$
\begin{aligned}
G=\sqrt{a\mu}\Bigg\{ 1&-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\
&+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{256}e^4-\frac{1125}{64}e^2e'^2+\frac{675}{32}\gamma^4e^2+\frac{225}{32}\gamma^2e^4+\frac{1125}{16}\gamma^2e^2e'^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{225}{256}e^6+\frac{3375}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{11475}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\left(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4-\frac{175059}{512}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3035787}{16384}e^4-\frac{144405}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\left(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{1575}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$H=\sqrt{a\mu}\Bigg\{1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{256}e^4-\frac{1125}{64}e^2e'^2+\frac{675}{32}\gamma^4e^2+\frac{1575}{128}\gamma^2e^4+\frac{1125}{16}\gamma^2e^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{225}{256}e^6+\frac{3375}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{11475}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{187}{32}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{1389}{32}\gamma^4-\frac{191227}{512}\gamma^2e^2+\frac{2805}{64}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4-\frac{144405}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{1575}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Quant à la valeur de L, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e opération (page 685). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{an}\Big\{2+\left(\frac{1969}{32}-\frac{1629}{8}\gamma^2+\frac{17887}{64}e^2+\frac{29535}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{415}{2}-\frac{2745}{4}\gamma^2+\frac{31395}{16}e^2+\frac{11205}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{730005}{512}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{54693247}{9216}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{527}{8}-\frac{3633}{16}\gamma^2-\frac{4151}{64}e^2+\frac{7905}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{2757}{8}-\frac{2493}{2}\gamma^2-\frac{7215}{16}e^2+\frac{74439}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1073461}{512}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{27821893}{3072}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}}=-\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}\gamma^2-\frac{1809}{32}e^2+\frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{167}{8}-66\gamma^2-\frac{2625}{8}e^2+\frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}+\frac{895}{16}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{176531}{576}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-e^2+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2-\frac{1125}{32}e'^2+\frac{675}{16}\gamma^4-\frac{225}{8}\gamma^2e^2+\frac{1125}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{1125}{64}e^4-\frac{1125}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2+\frac{675}{128}e^2+\frac{11475}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{1425967}{4096}e^2-\frac{394095}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1575}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{de}{dG}=-\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6$$

$$+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2-\frac{1125}{32}e'^2+\frac{675}{16}\gamma^4+\frac{675}{32}\gamma^2e^2+\frac{1125}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{225}{128}e^4+\frac{3375}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{11475}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{3606567}{4096}e^2-\frac{394095}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1575}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{de}{dH}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{\left(\frac{225}{32}e^2-\frac{675}{32}\gamma^2e^2-\frac{225}{64}e^4-\frac{1125}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63777}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dL}=\frac{1}{a^2n\gamma}\Big\{\left(\frac{225}{64}\gamma^2-\frac{225}{16}\gamma^4+\frac{675}{64}\gamma^2e^2-\frac{1125}{64}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{675}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{279519}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dG}=\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1-2\gamma^2+\frac{1}{2}e^2-\gamma^2e^2+\frac{3}{8}e^4-\frac{3}{4}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$

$$-\left(\frac{225}{16}\gamma^2-\frac{225}{4}\gamma^4+\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{1125}{16}\gamma^2e'^2-\frac{675}{256}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{675}{32}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{217}{64}-\frac{235711}{1024}\gamma^2-\frac{1587}{128}e^2+\frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH}=-\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6-\left(\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{256}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{217}{64}-\frac{351}{8}\gamma^2-\frac{1587}{128}e^2+\frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

42e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (126) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (126)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g - 2h' - 2g' - 3l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{128}e^4 - \frac{1125}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{18615}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{105}{16}e^2 e' - \frac{105}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{1845}{128}e^2 e'^3 + \frac{105}{16}\gamma^4 e^2 e' \\
& \qquad - \left(\frac{135}{32}e^2 e' - \frac{675}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{135}{64}e^4 e' - \frac{5535}{128}e^2 e'^3\right)\frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{45}{128}e^2 e' - \frac{945}{64}\gamma^2 e^2 e' - \frac{38415}{2048}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad\qquad + \frac{153747}{1024}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{444865}{8192}e^2 e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{945}{128}e^2 e'\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& \times \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 3l').
\end{aligned}$$

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (126), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante et une premières opérations.

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 0, \quad i' = 2, \quad i'' = 2, \quad i''' = -3.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant; et si l'on intègre la seconde, on aura

$$\mathrm{H} = \mathrm{G} + (\mathrm{H}),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{42})\left\{\begin{aligned} a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{731}{4}e^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Big\}; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{42})\quad \gamma^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{G} = \mathrm{L}\Big\{ 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 &+ \left[\frac{225}{64}e^2 + \frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{675}{256}e^4 - \frac{1125}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \left[\frac{675}{128}e^2 + \frac{2025}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{11475}{256}e^2e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{4107569}{12288}e^2\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\Big\}; \end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{G}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dg}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{42})\left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{ &\frac{105}{4}e^2e' + \frac{105}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e' - \frac{105}{8}e^4e' - \frac{1845}{32}e^2e'^3 + \frac{105}{16}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e^2e' - \frac{105}{32}e^6e' \\ &- \left[\frac{135}{8}e^2e' + \frac{675}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e' - \frac{135}{8}e^4e' - \frac{5535}{32}e^2e'^3\right]\frac{n'\mathrm{L}}{\mu^2} \\ &+ \left[\frac{23445}{128}e^2e' + \frac{67095}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e' - \frac{197475}{512}e^4e'\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{194247}{256}e^2e'\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{29827835}{8192}e^2e'\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{945}{32}e^2e'\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} - 3n' = -2\frac{dR}{dG} - 2\frac{dR}{dH} - 3n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dG}, \frac{da}{dH}, \frac{de}{dG}, \ldots$ données à la suite de la 41^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{42})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = n'\Big\{ -3 &+ \left[\frac{3}{2} + 6\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &+ \left[\frac{225}{16} + \frac{225}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{675}{32}e^2 - \frac{1125}{16}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{4167}{64}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{294293}{1024}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\} \\ + \frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{ &\frac{105}{4}e' + \frac{105}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e' - \frac{105}{8}e^2e' - \frac{1845}{32}e'^3 + \frac{105}{16}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e' + \frac{105}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e' - \frac{105}{32}e^4e' \\ &- \left[\frac{135}{8}e' + \frac{675}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e' - \frac{405}{16}e^2e' - \frac{5535}{32}e'^3\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &+ \left[\frac{23445}{128}e' + \frac{67095}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e' - \frac{39765}{128}e^2e'\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{194247}{256}e'\frac{n'\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{29827835}{8192}e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{945}{32}e'\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{42}), (D_{42}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{G}\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{42})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 + \Big\{&\left[\frac{35}{4}e_0^2e' + \frac{35}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e' - \frac{35}{8}e_0^4e' - \frac{615}{32}e_0^2e'^3 + \frac{35}{16}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e_0^2e' - \frac{35}{32}e_0^6e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &- \left[\frac{5}{4}e_0^2e' + \frac{25}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e' - \frac{5}{4}e_0^4e' - \frac{3495}{64}e_0^2e'^3\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \left[\frac{12985}{128}e_0^2e' + \frac{37395}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e' - \frac{107345}{512}e_0^4e'\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \\ &+ \frac{124849}{256}e_0^2e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{67440877}{24576}e_0^2e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{315}{32}e_0^2e'\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta_0(t+c) \\ - \frac{1225}{128}e_0^4e'^2&\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\cos 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{F}_{42})\left\{
\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& - \Big\{ \Big[\frac{35}{4} e' + \frac{35}{4} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e' - \frac{35}{8} e_0^2 e' - \frac{615}{32} e'^3 + \frac{35}{16} \frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2} e' + \frac{35}{8} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e_0^2 e' - \frac{35}{32} e_0^4 e' \Big] \frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& \quad - \Big[\frac{5}{4} e' + \frac{25}{4} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e' - \frac{15}{8} e_0^2 e' - \frac{3495}{64} e'^3 \Big] \frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
& \quad + \Big[\frac{12985}{128} e' + \frac{37395}{128} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e' - \frac{15715}{64} e_0^2 e' \Big] \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \\
& \qquad + \frac{124849}{256} e' \frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{67440877}{24576} e' \frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{315}{32} e' \frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \sin\theta_0(t+c) \\
& + \Big\{ \Big[\frac{1225}{64} e'^2 + \frac{1225}{32} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e'^2 - \frac{1225}{128} e_0^2 e'^2 \Big] \frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
& \qquad - \frac{175}{32} e'^2 \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{454875}{1024} e'^2 \frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \Big\} \sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\theta_0 = n' \Big\{ -3 + \Big[\frac{3}{2} + 6 \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{4} e_0^2 + \frac{9}{4} e'^2 \Big] \frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{225}{16} \frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{4167}{64} \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \Big\}.
$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{42}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{42}), (B_{42}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_{42})\left\{
\begin{aligned}
a = {} & \frac{\mathrm{L}^2}{\mu} \Big\{ 1 - \Big[\frac{13}{32} + \frac{15}{16} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32} e_0^2 + \frac{195}{64} e'^2 \Big] \frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad - \Big[\frac{79}{8} + \frac{167}{8} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{731}{4} e_0^2 + \frac{2133}{16} e'^2 \Big] \frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4} \frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144} \frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}} \Big\} \\
& + \frac{\mathrm{L}^2}{\mu} \Big\{ \frac{37415}{128} e_0^2 e' \frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{199335}{128} e_0^2 e' \frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} \Big\} \cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{H}_{42})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & -\frac{1}{2} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} \Big\{ 1 + \frac{1}{2} e_0^2 + \frac{3}{8} e_0^4 + \frac{115}{32} \frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96} \frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} \Big\} \\
& - \frac{1}{2} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} \Big\{ \Big[\frac{35}{8} e_0^2 e' + \frac{35}{8} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e_0^2 e' + \frac{35}{8} e_0^4 e' \Big] \frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& \qquad - \frac{5}{8} e_0^2 e' \frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{12985}{256} e_0^2 e' \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \Big\} \cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}a_0 = \frac{L^2}{\mu}\Big\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(H)}{L} - \frac{731}{4}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}}\Big\},\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{(H)}{L}\left\{1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{42}), (F_{42}), (G_{42}), (H_{42}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{42})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 + \Bigg[\Bigg(&\frac{35}{4}e_0^2 e' - \frac{35}{2}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{35}{8}e_0^4 e' - \frac{615}{32}e_0^2 e'^3 + \frac{35}{4}\gamma_0^4 e_0^2 e' \\ &+ \frac{35}{4}\gamma_0^2 e_0^4 e' - \frac{35}{32}e_0^6 e'\Bigg)\frac{n'}{n_0} \\ &- \left(\frac{5}{4}e_0^2 e' - \frac{25}{2}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{5}{4}e_0^4 e' - \frac{3495}{64}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ &+ \left(\frac{12985}{128}e_0^2 e' - \frac{37395}{64}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{107345}{512}e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ &+ \frac{124849}{256}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{67571917}{24576}e_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{315}{32}e_0^2 e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c) \\ - \frac{1225}{128}&e_0^4 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cos 2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{42})\left\{\begin{aligned} \theta = \theta_0(t+c)& \\ - \Bigg[\Bigg(&\frac{35}{4}e' - \frac{35}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{35}{8}e_0^2 e' - \frac{615}{32}e'^3 + \frac{35}{4}\gamma_0^4 e' - \frac{35}{32}e_0^4 e'\Bigg)\frac{n'}{n_0} \\ &- \left(\frac{5}{4}e' - \frac{25}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{15}{8}e_0^2 e' - \frac{3495}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ &+ \left(\frac{12985}{128}e' - \frac{37395}{64}\gamma_0^2 e' - \frac{15715}{64}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ &+ \frac{124849}{256}e'\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{67571917}{24576}e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{315}{32}e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\ + \Bigg[\Bigg(&\frac{1225}{64}e'^2 - \frac{1225}{16}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{1225}{128}e_0^2 e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{175}{32}e'^2\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{454875}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg]\sin 2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{42})\quad a = a_0 \left\{ 1 + \left[\frac{37415}{128} e_0^2\, e' \frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{199335}{128} e_0^2\, e' \frac{n'^6}{n_0^6} \right] \cos\theta_0 (t + c) \right\},$$

$$(H'_{42})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\left(\frac{35}{8} \gamma_0^2\, e_0^2\, e' - \frac{35}{4} \gamma_0^4\, e_0^2\, e' + \frac{35}{16} \gamma_0^2\, e_0^4\, e' \right) \frac{n'}{n_0} \right.$$
$$\left. - \frac{5}{8} \gamma_0^2\, e_0^2\, e' \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{12985}{256} \gamma_0^2\, e_0^2\, e' \frac{n'^3}{n_0^3} \right] \cos\theta_0 (t + c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n' \left[-3 + \left(\frac{3}{2} - 12\gamma_0^2 - \frac{3}{4} e_0^2 + \frac{9}{4} e'^2 \right) \frac{n'}{n_0} + \frac{225}{16} \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{4167}{64} \frac{n'^3}{n_0^3} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h + g + l)}{dt} = - \frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = - \frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\frac{d(h + g + l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} \left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32} e^4 + \frac{27}{16} e^2 e'^2 \right.$$
$$+ \frac{675}{32} e^2 \frac{n'}{n} - \left(\frac{451}{64} - \frac{207}{8}\gamma^2 - \frac{11325}{128} e^2 + \frac{6765}{128} e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$
$$\left. - \frac{787}{32} \frac{n'^3}{n^3} - \frac{18979}{192} \frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8} \frac{a^2}{a'^2} \right]$$
$$- \frac{n'^2}{n} \left[\frac{315}{16} e^2 e' - \frac{105}{4} \gamma^2 e^2 e' + \frac{105}{64} e^4 e' - \frac{5535}{128} e^2 e'^3 \right.$$
$$- \left(\frac{405}{16} e^2 e' - \frac{3375}{16} \gamma^2 e^2 e' - \frac{1215}{128} e^4 e' \right) \frac{n'}{n}$$
$$\left. + \frac{70065}{256} e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{2300589}{1024} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} \right] \cos\theta.$$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{n'^2}{n} \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{9}{8} e'^2 + \frac{225}{32} e^2 \frac{n'}{n} - \frac{51}{32} \frac{n'^2}{n^2} - \frac{203}{32} \frac{n'^3}{n^3} \right]$$
$$- \frac{n'^2}{n} \left[\frac{105}{16} e^2 e' - \frac{105}{16} \gamma^2 e^2 e' + \frac{105}{32} e^4 e' - \frac{675}{32} e^2 e' \frac{n'}{n} + \frac{21735}{256} e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} \right] \cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules

(E'_{42}), (F'_{42}), (G'_{42}), (H'_{42}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{42})\left\{\begin{aligned}h+g+l=(l)+\frac{1}{2}(2h'+2g'+3l')+\left(\frac{1}{2}\theta_0+l_0\right)(t+c)\\ +\left[\left(\frac{105}{16}e_0^2e'-\frac{35}{4}\gamma_0^2e_0^2e'+\frac{35}{64}e_0^4e'-\frac{1845}{128}e_0^2e'^3\right)\frac{n'}{n_0}\right.\\ -\left(\frac{15}{8}e_0^2e'-\frac{125}{8}\gamma_0^2e_0^2e'-\frac{45}{64}e_0^4e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ \left.+\frac{11655}{64}e_0^2e'\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{1440813}{1024}e_0^2e'\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c);\end{aligned}\right.$$

$$(L_{42})\left\{\begin{aligned}h=(h)+h_0(t+c)\\ +\left[\left(\frac{35}{16}e_0^2e'-\frac{35}{16}\gamma_0^2e_0^2e'+\frac{35}{32}e_0^4e'\right)\frac{n'}{n_0}-\frac{25}{16}e_0^2e'\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{1845}{32}e_0^2e'\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); l_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+l+\frac{1}{2}(2h'+2g'+3l').$$

Les six formules (E'_{42}), (F'_{42}), $G'_{42})$, (H'_{42}), (K_{42}), (L_{42}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (126); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du n° **30**, et si nous remarquons que l est égal à

$$-\frac{1}{2}\theta+(h+g+l)-\frac{1}{2}(2h'+2g'+3l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1+\left[\frac{37415}{128}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{199335}{128}e^2e'\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h+2g-2h'-2g'-3l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2 + \Bigg[\left(\frac{35}{4} e^2 e' - \frac{35}{2} \gamma^2 e^2 e' - \frac{35}{8} e^4 e' - \frac{615}{32} e^2 e'^3 + \frac{35}{4} \gamma^4 e^2 e' + \frac{35}{4} \gamma^2 e^4 e' - \frac{35}{32} e^6 e' \right) \frac{n'}{n}$$

$$- \left(\frac{5}{4} e^2 e' - \frac{25}{2} \gamma^2 e^2 e' - \frac{5}{4} e^4 e' - \frac{3495}{64} e^2 e'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{12985}{128} e^2 e' - \frac{37395}{64} \gamma^2 e^2 e' - \frac{107345}{512} e^4 e' \right) \frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \frac{124849}{256} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{67571917}{24576} e^2 e' \frac{n'^5}{n^5} + \frac{315}{32} e^2 e' \frac{n'}{n} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Bigg]$$

$$\times \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$- \frac{1225}{128} e^4 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} \cos 2(2h + 2g - 2h' - 2g' - 3l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2 + \Bigg[\left(\frac{35}{8} \gamma^2 e^2 e' - \frac{35}{4} \gamma^4 e^2 e' + \frac{35}{16} \gamma^2 e^4 e' \right) \frac{n'}{n}$$

$$- \frac{5}{8} \gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} + \frac{12985}{256} \gamma^2 e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} \Bigg] \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 3l'),$$

l par

$$l + \Bigg[\left(\frac{35}{8} e' - \frac{35}{4} \gamma^2 e' + \frac{35}{8} e^2 e' - \frac{615}{64} e'^3 + \frac{35}{8} \gamma^4 e' - \frac{35}{4} \gamma^2 e^2 e' \right) \frac{n'}{n}$$

$$- \left(\frac{5}{8} e' - \frac{25}{4} \gamma^2 e' + \frac{15}{16} e^2 e' - \frac{3495}{128} e'^3 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{12985}{256} e' - \frac{37395}{128} \gamma^2 e' + \frac{7595}{128} e^2 e' \right) \frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \frac{124849}{512} e' \frac{n'^4}{n^4} + \frac{67571917}{49152} e' \frac{n'^5}{n^5} + \frac{315}{64} e' \frac{n'}{n} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Bigg] \sin(2h + 2g - 2h' - 2g' - 3l')$$

$$- \Bigg[\left(\frac{1225}{128} e'^2 - \frac{1225}{32} \gamma^2 e'^2 - \frac{1225}{256} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \frac{175}{64} e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{454875}{2048} e'^2 \frac{n'^4}{n^4} \Bigg] \sin 2(2h + 2g - 2h' - 2g' - 3l'),$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l + \Bigg[\left(\frac{105}{16} e^2 e' - \frac{35}{4} \gamma^2 e^2 e' + \frac{35}{64} e^4 e' - \frac{1845}{128} e^2 e'^3 \right) \frac{n'}{n}$$

$$- \left(\frac{15}{8} e^2 e' - \frac{125}{8} \gamma^2 e^2 e' - \frac{45}{64} e^4 e' \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \frac{11655}{64} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} + \frac{1440813}{1024} e^2 e' \frac{n'^4}{n^4} \Bigg] \sin(2h + 2g - 2h' - 2g' - 3l').$$

h par

$$h+\left[\left(\frac{35}{16}e^2e'-\frac{35}{16}\gamma^2e^2e'+\frac{35}{32}e^4e'\right)\frac{n'}{n}-\frac{25}{16}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1845}{32}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2h+2g-2h'-2g'-3l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{42}), (G'_{42}), (H'_{42}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 701)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{1225}{256}e^4e'^2\frac{n'^2}{n^2}.$$

$$G_1=\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{35}{8}e^2e'-\frac{35}{4}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'}{n}+\frac{5}{8}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{12985}{256}e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 701)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{1225}{256}e^4e'^2\frac{n'^2}{n^2}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{42}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1G_1+2\theta_2G_2+\ldots\ldots)=$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{1225}{64}e^2e'^2-\frac{1225}{16}\gamma^2e^2e'^2-\frac{1225}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{175}{32}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{634125}{2048}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 710 à 712) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 42^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{3}{2}n'(G-G_0)-\frac{3}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1G_1+2\theta_2G_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (126) de R, joint à la quantité $+\frac{3}{2}n'(G-G_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{3}{2}n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 G_1+2\theta_2 G_2+\ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [12... 1,126]. Ensuite les nouvelles valeurs de G, H, seront

$$\begin{aligned}
G=\sqrt{a\mu}\Big\{ & 1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{5}{128}e^8\\
&+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{256}e^4+\frac{25}{16}e^2e'^2+\frac{675}{32}\gamma^4e^2+\frac{225}{32}\gamma^2e^4-\frac{25}{4}\gamma^2e^2e'^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{225}{256}e^6-\frac{75}{64}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{10075}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\left(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4-\frac{175059}{512}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{61215}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\left(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{1575}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H=\sqrt{a\mu}\Big\{ & 1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8\\
&+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{256}e^4+\frac{25}{16}e^2e'^2+\frac{675}{32}\gamma^4e^2+\frac{1575}{128}\gamma^2e^4-\frac{25}{4}\gamma^2e^2e'^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{225}{256}e^6-\frac{75}{64}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{10075}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{13}{64}+\frac{187}{32}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{1389}{32}\gamma^4-\frac{191227}{512}\gamma^2e^2+\frac{2805}{64}\gamma^2e'^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{61215}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}\\
&+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}+\frac{1575}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Quant à la valeur de L, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e opération (page 685). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$
\begin{aligned}
\frac{de}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-e^2&+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2+\frac{25}{8}e'^2+\frac{675}{16}\gamma^4-\frac{225}{8}\gamma^2e^2-\frac{25}{2}\gamma^2e'^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1125}{64}e^4+\frac{25}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2+\frac{675}{128}e^2+\frac{10075}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{1425967}{4096}e^2+\frac{49455}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1575}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{de}{d\mathrm{G}}=-\frac{1}{a^2ne}\Big\{1&-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6\\
&+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{25}{8}e'^2+\frac{675}{16}\gamma^4+\frac{675}{32}\gamma^2e^2-\frac{25}{2}\gamma^2e'^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{225}{128}e^4-\frac{75}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{10075}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{3606567}{4096}e^2+\frac{49455}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{1575}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{de}{d\mathrm{H}}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{\left(\frac{225}{32}e^2-\frac{675}{32}\gamma^2e^2-\frac{225}{64}e^4+\frac{25}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63777}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},
$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2 n\gamma}\left\{\left(\frac{225}{64}\gamma^2 - \frac{225}{16}\gamma^4 + \frac{675}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{25}{16}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{675}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{279519}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6\right.$$
$$- \left(\frac{225}{16}\gamma^2 - \frac{225}{4}\gamma^4 + \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{25}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{675}{256}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{675}{32}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left. + \left(\frac{217}{64} - \frac{235711}{1024}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \left(\frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\right\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 41^e opération (page 702).

43^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (130) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (130)[*], dans lequel l'argument est $2h + 2g - 2h' - 2g' - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4\right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

Cette formule se continue à la page suivante

---

[*] Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (130), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante-deux premières opérations.

$$+\left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{1425}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{32505}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{-\frac{15}{16}e^2 e' + \frac{15}{8}\gamma^2 e^2 e' + \frac{15}{128}e^2 e'^3 - \frac{15}{16}\gamma^4 e^2 e'$$

$$+\left(\frac{135}{32}e^2 e' - \frac{675}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{135}{64}e^4 e' + \frac{675}{128}e^2 e'^3\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{4041}{128}e^2 e' - \frac{11961}{64}\gamma^2 e^2 e' - \frac{81417}{2048}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{199253}{1024}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{30228199}{24576}e^2 e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{105}{128}e^2 e'\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$\times \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 0, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt} = 0, \qquad \frac{dG}{dt} = \frac{dH}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant, et si l'on intègre la seconde, il vient

$$H = G + (H),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{43})\left\{\begin{aligned} a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{731}{4}e^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{43})\quad \gamma^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{G} = \mathrm{L}\Big\{ 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 &+ \left[\frac{225}{64}e^2 + \frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{25}{16}e^2e'^2\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \left[\frac{675}{128}e^2 + \frac{2025}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{10075}{256}e^2e'^2\right]\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{4107569}{12288}e^2\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\Big\}; \end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{G}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dg}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{43})\left\{\begin{aligned} \frac{d.e^2}{dt} = -\frac{n'^2\,\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{ &\frac{15}{4}e^2e' + \frac{15}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e' - \frac{15}{8}e^4e' - \frac{15}{32}e^2e'^3 + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e^2e' - \frac{15}{32}e^6e' \\ &- \left[\frac{135}{8}e^2e' + \frac{675}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e' - \frac{135}{8}e^4e' + \frac{675}{32}e^2e'^3\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &- \left[\frac{12789}{128}e^2e' + \frac{37719}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e' - \frac{79995}{512}e^4e'\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &- \frac{219503}{256}e^2e'\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} - \frac{132902641}{24576}e^2e'\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{105}{32}e^2e'\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} - n' = -2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{G}}$, $\dfrac{da}{d\mathrm{H}}$, $\dfrac{de}{d\mathrm{G}}$, $\cdots$ qui doivent être employées après la 42^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{43})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = n'\Big\{ -1 &+ \left[\frac{3}{2} + 6\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &+ \left[\frac{225}{16} + \frac{225}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{675}{32}e^2 + \frac{1425}{32}e'^2\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{4167}{64}\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{294293}{1024}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\} \end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(\mathrm{D}_{43})\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{n'^2\,\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Bigg\{\frac{15}{4}e'+\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'-\frac{15}{8}e^2e'-\frac{15}{32}e'^3+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e'+\frac{15}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e'-\frac{15}{32}e^4e'\\
&\qquad-\left[\frac{135}{8}e'+\frac{675}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'-\frac{405}{16}e^2e'+\frac{675}{32}e'^3\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&\qquad-\left[\frac{12789}{128}e'+\frac{37719}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'-\frac{40353}{128}e^2e'\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&\qquad\qquad-\frac{219503}{256}e'\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6}-\frac{132902641}{24576}e'\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}-\frac{105}{32}e'\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{43}), (D_{43}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{G}\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$
(\mathrm{E}_{43})\left\{
\begin{aligned}
&e^2=e_0^2-\Bigg\{\left[\frac{15}{4}e_0^2e'+\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e'-\frac{15}{8}e_0^4e'-\frac{15}{32}e_0^2e'^3+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e_0^2e'-\frac{15}{32}e_0^6e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&\qquad-\left[\frac{45}{4}e_0^2e'+\frac{225}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e'-\frac{45}{4}e_0^4e'+\frac{855}{64}e_0^2e'^3\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\left[\frac{8199}{128}e_0^2e'+\frac{36909}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e'-\frac{38955}{512}e_0^4e'\right]\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\qquad\quad-\frac{222095}{256}e_0^2e'\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}-\frac{178536691}{24576}e_0^2e'\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{105}{32}e_0^2e'\frac{n'\,\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\frac{225}{128}e_0^4e'^2\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\cos2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{43})\left\{
\begin{aligned}
&\theta=\theta_0(t+c)\\
&\quad+\Bigg\{\left[\frac{15}{4}e'+\frac{15}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'-\frac{15}{8}e_0^2e'-\frac{15}{32}e'^3+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e'+\frac{15}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e'-\frac{15}{32}e_0^4e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}.\\
&\qquad-\left[\frac{45}{4}e'+\frac{225}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'-\frac{135}{8}e_0^2e'+\frac{855}{64}e'^3\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&\qquad-\left[\frac{8199}{128}e'+\frac{36909}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'-\frac{1383}{8}e_0^2e'\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\qquad\qquad-\frac{222095}{256}e'\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}-\frac{178536691}{24576}e'\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{105}{32}e'\frac{n'\,\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad+\Bigg\{\left[\frac{225}{64}e'^2+\frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2-\frac{225}{128}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4}-\frac{675}{32}e'^2\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6}-\frac{90585}{1024}e'^2\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\sin2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = n'\left\{-1 + \left[\frac{3}{2} + 6\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{4}e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{225}{16}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{4167}{64}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\right\}.$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{43}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{43}), (B_{43}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G})_{43}\left\{\begin{aligned} a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{731}{4}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\} \\ &- \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\left\{\frac{16035}{128}e_0^2 e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{39615}{128}e_0^2 e'\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\right\}\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{43})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = &-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\Bigg\{\left[\frac{15}{8}e_0^2 e' + \frac{15}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2 e' + \frac{15}{8}e_0^4 e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &\qquad - \frac{45}{8}e_0^2 e'\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} - \frac{8199}{256}e_0^2 e'\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{731}{4}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les

formules (E_{43}), (F_{43}), (G_{43}), (H_{43}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{43})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 &- \left[\left(\frac{15}{4}e_0^2 e' - \frac{15}{2}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{15}{8}e_0^4 e' - \frac{15}{32}e_0^2 e'^3 + \frac{15}{4}\gamma_0^4 e_0^2 e' + \frac{15}{4}\gamma_0^2 e_0^4 e' - \frac{15}{32}e_0^6 e'\right)\frac{n'}{n_0}\right.\\
&\qquad - \left(\frac{45}{4}e_0^2 e' - \frac{225}{2}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{45}{4}e_0^4 e' + \frac{855}{64}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad - \left(\frac{8199}{128}e_0^2 e' - \frac{36909}{64}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{38955}{512}e_0^4 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad \left. - \frac{222095}{256}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{178480531}{24576}e_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{105}{32}e_0^2 e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
&- \frac{225}{128}e_0^4 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{43})\left\{\begin{aligned}
\theta = \theta_0&(t+c)\\
&+ \left[\left(\frac{15}{4}e' - \frac{15}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{15}{8}e_0^2 e' - \frac{15}{32}e'^3 + \frac{15}{4}\gamma_0^4 e' - \frac{15}{32}e_0^4 e'\right)\frac{n'}{n_0}\right.\\
&\qquad - \left(\frac{45}{4}e' - \frac{225}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{135}{8}e_0^2 e' + \frac{855}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad - \left(\frac{8199}{128}e' - \frac{36909}{64}\gamma_0^2 e' - \frac{1383}{8}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad \left. - \frac{222095}{256}e'\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{178480531}{24576}e'\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{105}{32}e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\sin\theta_0(t+c)\\
&+ \left[\left(\frac{225}{64}e'^2 - \frac{225}{16}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{225}{128}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{675}{32}e'^2\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{90585}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{43})\quad a = a_0\left\{1 - \left[\frac{16035}{128}e_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{39615}{128}e_0^2 e'\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\},$$

$$(H'_{43})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 &- \left[\left(\frac{15}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{15}{4}\gamma_0^4 e_0^2 e' + \frac{15}{16}\gamma_0^2 e_0^4 e'\right)\frac{n'}{n_0}\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \frac{45}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e'\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{8199}{256}\gamma_0^2 e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n'\left[-1 + \left(\frac{3}{2} - 12\gamma_0^2 - \frac{3}{4}e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2\right)\frac{n'}{n_0} + \frac{225}{16}\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{4167}{64}\frac{n'^3}{n_0^3}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Big[& 1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 \\ & + \frac{675}{32}e^2\frac{n'}{n} - \left(\frac{451}{64} - \frac{207}{8}\gamma^2 - \frac{11325}{128}e^2 + \frac{6765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Big] \\ + \frac{n'^2}{n}\Big[& \frac{45}{16}e^2 e' - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{15}{64}e^4 e' - \frac{45}{128}e^2 e'^3 \\ & - \left(\frac{405}{16}e^2 e' - \frac{3375}{16}\gamma^2 e^2 e' - \frac{1215}{128}e^4 e'\right)\frac{n'}{n} \\ & - \frac{62613}{256}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{2482161}{1024}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\Big]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} = & -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 + \frac{225}{32}e^2\frac{n'}{n} - \frac{51}{32}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{203}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right] \\ & + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{15}{16}e^2 e' - \frac{15}{16}\gamma^2 e^2 e' + \frac{15}{32}e^4 e' - \frac{675}{32}e^2 e'\frac{n'}{n} - \frac{20565}{256}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{43}), (F'_{43}), (G'_{43}), (H'_{43}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{43})\left\{\begin{aligned} h+g+l = {} & (l) + \frac{1}{2}(2h' + 2g' + l') + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + l_0\right)(t+c) \\ & - \Big[\left(\frac{45}{16}e_0^2 e' - \frac{15}{4}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{15}{64}e_0^4 e' - \frac{45}{128}e_0^2 e'^3\right)\frac{n'}{n_0} \\ & - \left(\frac{135}{8}e_0^2 e' - \frac{1125}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{405}{64}e_0^4 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & - \frac{20979}{128}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{2574015}{1024}e_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\Big]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{43})\left\{\begin{aligned} h = {} & (h) + h_0(t+c) \\ & - \Big[\left(\frac{15}{16}e_0^2 e' - \frac{15}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{15}{32}e_0^4 e'\right)\frac{n'}{n_0} - \frac{225}{16}e_0^2 e'\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{315}{4}e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3}\Big]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); l_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+l+\frac{1}{2}(2h'+2g'+l').$$

Les six formules (E'_{43}), (F'_{43}), (G'_{43}), (H'_{43}), (K_{43}), (L_{43}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (130); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du n° **50**, et si nous remarquons que l est égal à

$$-\frac{1}{2}\theta+(h+g+l)-\frac{1}{2}(2h'+2g'+l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1-\left[\frac{16035}{128}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{39615}{128}e^2e'\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h+2g-2h'-2g'-l')\right\},$$

e^2 par

$$\begin{aligned}e^2-\Bigg[&\left(\frac{15}{4}e^2e'-\frac{15}{2}\gamma^2e^2e'-\frac{15}{8}e^4e'-\frac{15}{32}e^2e'^3+\frac{15}{4}\gamma^4e^2e'+\frac{15}{4}\gamma^2e^4e'-\frac{15}{32}e^6e'\right)\frac{n'}{n}\\&-\left(\frac{45}{4}e^2e'-\frac{225}{2}\gamma^2e^2e'-\frac{45}{4}e^4e'+\frac{855}{64}e^2e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\\&-\left(\frac{8199}{128}e^2e'-\frac{36909}{64}\gamma^2e^2e'-\frac{38955}{512}e^4e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\\&\qquad-\frac{222095}{256}e^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{178480531}{24576}e^2e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{105}{32}e^2e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\\&\times\cos(2h+2g-2h'-2g'-l')\\&-\frac{225}{128}e^4e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cos2(2h+2g-2h'-2g'-l'),\end{aligned}$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \left[\left(\frac{15}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{15}{4}\gamma^4 e^2 e' + \frac{15}{16}\gamma^2 e^4 e'\right)\frac{n'}{n} - \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{8199}{256}\gamma^2 e^2 e' \frac{n'^3}{n^3}\right] \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - l')$$

l par

$$l - \left[\left(\frac{15}{8}e' - \frac{15}{4}\gamma^2 e' + \frac{15}{8}e^2 e' - \frac{15}{64}e'^3 + \frac{15}{8}\gamma^4 e' - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n} - \left(\frac{45}{8}e' - \frac{225}{4}\gamma^2 e' + \frac{135}{16}e^2 e' + \frac{855}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{8199}{256}e' - \frac{36909}{128}\gamma^2 e' + \frac{9915}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} - \frac{222095}{512}e'\frac{n'^4}{n^4} - \frac{178480531}{49152}e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{105}{64}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]$$
$$\times \sin(2h + 2g - 2h' - 2g' - l')$$

$$-\left[\left(\frac{225}{128}e'^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{225}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{675}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{90585}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2(2h + 2g - 2h' - 2g' - l'),$$

$h + g + l$ par

$$h+g+l - \left[\left(\frac{45}{16}e^2 e' - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{15}{64}e^4 e' - \frac{45}{128}e^2 e'^3\right)\frac{n'}{n} - \left(\frac{135}{8}e^2 e' - \frac{1125}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{405}{64}e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{20979}{128}e^2 e'\frac{n'}{n^3} - \frac{2574015}{1024}e^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\right]$$
$$\times \sin(2h + 2g - 2h' - 2g' - l'),$$

h par

$$h - \left[\left(\frac{15}{16}e^2 e' - \frac{15}{16}\gamma^2 e^2 e' + \frac{15}{32}e^4 e'\right)\frac{n'}{n} - \frac{225}{16}e^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{315}{4}e^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2h + 2g - 2h' - 2g' - l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{43}), (G'_{43}), (H'_{43}), dans les expressions de L, G, H, en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0, et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 713)

$$- \sqrt{a\mu} \cdot \frac{225}{256} e^4 e'^2 \frac{n'^2}{n^2},$$

$$G_1 = \sqrt{a\mu} \left\{ \left(\frac{15}{8} e^2 e' - \frac{15}{4} \gamma^2 e^2 e' \right) \frac{n'}{n} - \frac{45}{8} e^2 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{8199}{256} e^2 e' \frac{n'^3}{n^3} \right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 713)

$$- \sqrt{a\mu} \cdot \frac{225}{256} e^4 e'^2 \frac{n'^2}{n^2}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0 (t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{43}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2} (\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots) =$$

$$\sqrt{a\mu} \left\{ \left(\frac{225}{64} e^2 e'^2 - \frac{225}{16} \gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{225}{128} e^4 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} - \frac{675}{32} e^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{231795}{2048} e^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} \right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 722 et 723) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 43ᵉ opération, et y ajoutant

$$+ \frac{1}{2} n' (G - G_0) - \frac{1}{2} n' \cdot \frac{1}{2} (\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (130) de R, joint à la quantité $+ \frac{1}{2} n' (G - G_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$- \frac{1}{2} n' \cdot \frac{1}{2} (\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [43 . . . 1, 130].

Ensuite les nouvelles valeurs de G, H seront

$$\begin{aligned}
G = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{675}{32}\gamma^4 e^2 + \frac{225}{32}\gamma^2 e^4 - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& + \left(\frac{675}{128}e^2 - \frac{2025}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& + \left(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 + \frac{147261}{4096}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 - \frac{175059}{512}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{3035787}{16384}e^4 + \frac{257925}{2048}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 + \frac{2954417}{12288}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \left(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 + \frac{497099911}{393216}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{1575}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{675}{32}\gamma^4 e^2 + \frac{1575}{128}\gamma^2 e^4 - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& + \left(\frac{675}{128}e^2 - \frac{2025}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& + \left(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 + \frac{147261}{4096}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{1389}{32}\gamma^4 - \frac{191227}{512}\gamma^2 e^2 + \frac{2805}{64}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{3035787}{16384}e^4 + \frac{257925}{2048}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{79}{16} + \frac{55}{48}\gamma^2 + \frac{2954417}{12288}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \left(\frac{153}{8} + \frac{3245}{96}\gamma^2 + \frac{497099911}{393216}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{1575}{256}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

Quant à la valeur de L, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e opération (page 685). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{ & 1 - e^2 + \Big(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 + \frac{225}{64}e^2 + \frac{325}{32}e'^2 + \frac{675}{16}\gamma^4 - \frac{225}{8}\gamma^2e^2 - \frac{325}{8}\gamma^2e'^2 \\ & \qquad - \frac{1125}{64}e^4 + \frac{325}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\ & + \Big(\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 + \frac{675}{128}e^2 + \frac{4675}{128}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} \\ & + \Big(\frac{316927}{2048} - \frac{305493}{256}\gamma^2 - \frac{1425967}{4096}e^2 + \frac{660735}{1024}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1575}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \\ & + \Big(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 - \frac{675}{64}e^2 + \frac{325}{32}e'^2 + \frac{675}{16}\gamma^4 + \frac{675}{32}\gamma^2e^2 - \frac{325}{8}\gamma^2e'^2 \\ & \qquad + \frac{225}{128}e^4 - \frac{975}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} \\ & + \Big(\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 - \frac{675}{64}e^2 + \frac{4675}{128}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3} \\ & + \Big(\frac{316927}{2048} - \frac{305493}{256}\gamma^2 - \frac{3606567}{4096}e^2 + \frac{660735}{1024}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1575}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{\Big(\frac{225}{32}e^2 - \frac{675}{32}\gamma^2e^2 - \frac{225}{64}e^4 + \frac{325}{32}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{63777}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2n\gamma}\Big\{\Big(\frac{225}{64}\gamma^2 - \frac{225}{16}\gamma^4 + \frac{675}{64}\gamma^2e^2 + \frac{325}{64}\gamma^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{675}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{279519}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ & - \Big(\frac{225}{16}\gamma^2 - \frac{225}{4}\gamma^4 + \frac{225}{16}\gamma^2e^2 + \frac{325}{16}\gamma^2e'^2 - \frac{675}{256}e^4\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{675}{32}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} \\ & + \Big(\frac{217}{64} - \frac{235711}{1024}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \left(\frac{225}{16}\gamma^2e^2 - \frac{675}{256}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}\Big\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 41^e^ opération (page 702).

44^e^ OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (127) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (127)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g - 2h' - 2g' - 4l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4e^2$$

$$+ \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2$$

$$+ \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2e^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$- \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left. + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$- \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+ \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 - \frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\{.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (127), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante-trois premières opérations.

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{255}{16}e^2e'^2-\frac{255}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{575}{16}e^2e'^4\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2295}{128}e^2e'^2-\frac{11475}{64}\gamma^2e^2e'^2-\frac{2295}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{127233}{1024}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3325529}{4096}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g-2h'-2g'-4l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=0,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=-4.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt}=0,\qquad \frac{dG}{dt}=\frac{dH}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant; et si l'on intègre la seconde, on aura

$$H=G+(H),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{14})\quad a=\frac{L^2}{\mu}\left\{1-\left[\frac{13}{32}+\frac{15}{16}\frac{(H)}{L}-\frac{1069}{32}e^2+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}-\frac{79}{8}\frac{n'^5L^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6L^{18}}{\mu^{12}}\right\},$$

$$(B_{14})\quad \gamma^2=-\frac{1}{2}\frac{(H)}{L}\left\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$G=L\left\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6\right.$$

$$\left.+\left[\frac{225}{64}e^2+\frac{225}{32}\frac{(H)}{L}e^2-\frac{675}{256}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4}+\frac{675}{128}e^2\frac{n'^3L^9}{\mu^6}+\frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}\right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dG}{dt}=\frac{dR}{dg}$, on en déduit

$$(C_{14})\left\{\begin{aligned}\frac{d.e^2}{dt}=\frac{n'^2L^3}{\mu^2}&\left\{\frac{255}{4}e^2e'^2+\frac{255}{4}\frac{(H)}{L}e^2e'^2-\frac{255}{8}e^4e'^2-\frac{575}{4}e^2e'^4\right.\\&-\left[\frac{2295}{32}e^2e'^2+\frac{11475}{32}\frac{(H)}{L}e^2e'^2-\frac{2295}{32}e^4e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2}\\&\left.+\frac{241983}{256}e^2e'^2\frac{n'^2L^6}{\mu^4}+\frac{1748827}{512}e^2e'^2\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\right\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} - 4n' = -2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 4n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{G}}, \ldots,$ qui doivent être employées après la 43ᵉ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{44})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = n' \Bigg\{ & -4 + \left[\frac{3}{2} + 6\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{225}{16}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{4167}{64}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\Bigg\} \\
& + \frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Bigg\{\frac{255}{4}e'^2 + \frac{255}{4}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 - \frac{255}{8}e^2e'^2 - \frac{575}{4}e'^4 \\
& \qquad - \left[\frac{2295}{32}e'^2 + \frac{11475}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 - \frac{6885}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& \qquad\qquad + \frac{241983}{256}e'^2\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{1748827}{512}e'^2\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{44}), (D_{44}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{G}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{44})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 + \Bigg\{ & \left[\frac{255}{16}e_0^2e'^2 + \frac{255}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e'^2 - \frac{255}{32}e_0^4e'^2 - \frac{575}{16}e_0^2e'^4\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& - \left[\frac{765}{64}e_0^2e'^2 + \frac{3825}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2e'^2 - \frac{765}{64}e_0^4e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
& \qquad + \frac{18423}{64}e_0^2e'^2\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{2415133}{2048}e_0^2e'^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{44})\left\{\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& - \Bigg\{\left[\frac{255}{16}e'^2 + \frac{255}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 - \frac{255}{32}e_0^2e'^2 - \frac{575}{16}e'^4\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& \quad - \left[\frac{765}{64}e'^2 + \frac{3825}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 - \frac{2295}{128}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
& \qquad + \frac{18423}{64}e'^2\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{2415133}{2048}e'^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = n' \left\{ -4 + \frac{3}{2} \frac{n' \mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{225}{16} \frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} \right\}.$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{44}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{44}), (B_{44}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{44}) \left\{ \begin{aligned} a = {} & \frac{\mathrm{L}^2}{\mu} \left\{ 1 - \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32} e_0^2 + \frac{195}{64} e'^2 \right] \frac{n'^4 \mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8} \frac{n'^5 \mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4} \frac{n'^6 \mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} \right\} \\ & + \frac{\mathrm{L}^2}{\mu} \cdot \frac{272595}{512} e_0^2 e'^2 \frac{n'^5 \mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} \cos \theta_0 (t + c), \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{H}_{44}) \left\{ \begin{aligned} \gamma^2 = {} & -\frac{1}{2} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} e_0^2 + \frac{3}{8} e_0^4 + \frac{115}{32} \frac{n'^4 \mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} \left\{ \frac{255}{32} e_0^2 e'^2 \frac{n' \mathrm{L}^3}{\mu^2} - \frac{765}{128} e_0^2 e'^2 \frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} \right\} \cos \theta_0 (t + c). \end{aligned} \right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu} \left\{ 1 - \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32} e_0^2 + \frac{195}{64} e'^2 \right] \frac{n'^4 \mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8} \frac{n'^5 \mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4} \frac{n'^6 \mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} \right\},$$

$$\gamma_0^2 = -\frac{1}{2} \frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} e_0^2 + \frac{3}{8} e_0^4 + \frac{115}{32} \frac{n'^4 \mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{44}), (F_{44}), (G_{44}), (H_{44}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0 \sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{44}) \left\{ \begin{aligned} e^2 = e_0^2 + \Bigg[& \left(\frac{255}{16} e_0^2 e'^2 - \frac{255}{8} \gamma_0^2 e_0^2 e'^2 - \frac{255}{32} e_0^4 e'^2 - \frac{575}{16} e_0^2 e'^4 \right) \frac{n'}{n_0} \\ & - \left(\frac{765}{64} e_0^2 e'^2 - \frac{3825}{32} \gamma_0^2 e_0^2 e'^2 - \frac{765}{64} e_0^4 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \frac{18423}{64} e_0^2 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{2415133}{2048} e_0^2 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \Bigg] \cos \theta_0 (t + c), \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{F}'_{44})\left\{\begin{aligned} \theta &= \theta_0(t+c) \\ &\quad - \left[\left(\frac{255}{16}e'^2 - \frac{255}{8}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{255}{32}e_0^2 e'^2 - \frac{575}{16}e'^4\right)\frac{n'}{n_0}\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{765}{64}e'^2 - \frac{3825}{32}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{2295}{128}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{18423}{64}e'^2\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{2415133}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{44})\quad a = a_0\left\{1 + \frac{272595}{512}e_0^2 e'^2\frac{n'^5}{n_0^5}\cos\theta_0(t+c)\right\},$$

$$(\mathrm{H}'_{44})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\frac{255}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\frac{n'}{n_0} - \frac{765}{128}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n'\left[-4 + \frac{3}{2}\frac{n'}{n_0} + \frac{225}{16}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} &= n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{675}{32}e^2\frac{n'}{n} - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right] \\ &\quad - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{765}{16}e^2 e'^2 - \frac{255}{4}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{255}{64}e^4 e'^2 - \frac{6885}{64}e^2 e'^2\frac{n'}{n} + \frac{1833597}{1024}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{51}{32}\frac{n'^2}{n^2}\right] \\ &\quad - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{255}{16}e^2 e'^2 - \frac{11475}{128}e^2 e'^2\frac{n'}{n}\right]\cos\theta; \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{44}), (F'_{44}), (G'_{44}), (H'_{44}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{44})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= (l) + \frac{1}{2}(2h' + 2g' + 4l') + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + l_0\right)(t+c) \\ &\quad + \left[\left(\frac{765}{64}e_0^2 e'^2 - \frac{255}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 + \frac{255}{256}e_0^4 e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{2295}{128}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{1154331}{2048}e_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{44})\quad h = (h) + h_0(t+c) + \left[\frac{255}{64}e_0^2 e'^2 \frac{n'}{n_0} - \frac{3825}{256}e_0^2 e'^2 \frac{n'^2}{n_0^2}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); l_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + l + \frac{1}{2}(2h' + 2g' + 4l').$$

Les six formules (E'_{44}), (F'_{44}), (G'_{44}), (H'_{44}), (K_{44}), (L_{44}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (127); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du nº **30**, et si nous remarquons que l est égal à

$$-\frac{1}{2}\theta + (h+g+l) - \frac{1}{2}(2h' + 2g' + 4l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1 + \frac{272595}{512}e^2 e'^2 \frac{n'^5}{n^5}\cos(2h+2g-2h'-2g'-4l')\right\},$$

e^2 par

$$\begin{aligned}e^2 + \Bigg[\left(\frac{255}{16}e^2e'^2 - \frac{255}{8}\gamma^2e^2e'^2 - \frac{255}{32}e^4e'^2 - \frac{575}{16}e^2e'^4\right)\frac{n'}{n} \\ - \left(\frac{765}{64}e^2e'^2 - \frac{3825}{32}\gamma^2e^2e'^2 - \frac{765}{64}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ + \frac{18423}{64}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{2415133}{2048}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\cos(2h+2g-2h'-2g'-4l'),\end{aligned}$$

γ^2 par

$$\gamma^2 + \left[\frac{255}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n} - \frac{765}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos(2h+2g-2h'-2g'-4l'),$$

l par

$$l+\left[\left(\frac{255}{32}e'^2-\frac{255}{16}\gamma^2e'^2+\frac{255}{32}e^2e'^2-\frac{575}{32}e'^4\right)\frac{n'}{n}\right.$$
$$-\left(\frac{765}{128}e'^2-\frac{3825}{64}\gamma^2e'^2+\frac{2295}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$\left.+\frac{18423}{128}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2415133}{4096}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin(2h+2g-2h'-2g'-4l'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{765}{64}e^2e'^2-\frac{255}{16}\gamma^2e^2e'^2+\frac{255}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'}{n}\right.$$
$$\left.-\frac{2295}{128}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1154331}{2048}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2h+2g-2h'-2g'-4l'),$$

h par

$$h+\left[\frac{255}{64}e^2e'^2\frac{n'}{n}-\frac{3825}{256}e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\sin(2h+2g-2h'-2g'-4l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{44}), (G'_{44}), (H'_{44}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 725),

$$G_1 = -\sqrt{a\mu}\cdot\frac{255}{32}e^2e'^2\frac{n'}{n};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 725).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{44}); on en conclut facilement que, d'après le degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, on a

$$\frac{1}{2}(\theta_1G_1+2\theta_2G_2+\ldots)=0.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30** et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 732 et 733) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 44^e opération, et y ajoutant

$$+2n'(G - G_0).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (127) de R, joint à la quantité

$$+2n'(G - G_0),$$

doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, n'est autre chose que la valeur qu'avait précédemment le terme (1). Quant aux valeurs de L, G, H, elles n'éprouvent aucun changement. La valeur de L est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e opération (page 685), et celles de G, H sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 43^e opération (page 725). Les valeurs qui s'en déduisent pour $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... sont donc également identiques avec celles que l'on doit employer après la 43^e opération.

45^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (131) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (131)*, dans lequel l'argument est $2h + 2g - 2h' - 2g'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} R = {} & \frac{\mu}{2a} \\ & + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\ & \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (131), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante-quatre premières opérations.

$$+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{225}{128}e^4+\frac{825}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{31}{32}-\frac{33}{8}\gamma^2-\frac{971}{32}e^2+\frac{465}{64}e'^2+\frac{75}{16}\gamma^4+\frac{399}{4}\gamma^2e^2-\frac{495}{16}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{4989}{256}e^4-\frac{1905}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{255}{32}-\frac{537}{16}\gamma^2-\frac{551115}{4096}e^2+\frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{5515}{192}-\frac{635}{6}\gamma^2-\frac{6380965}{12288}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$\left.+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\right\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\left(\frac{135}{128}e^2e'^2-\frac{675}{64}\gamma^2e^2e'^2-\frac{135}{256}e^4e'^2+\frac{825}{256}e^2e'^4\right)\frac{n'}{n}\right.$$

$$+\left(\frac{29727}{1024}e^2e'^2-\frac{113481}{512}\gamma^2e^2e'^2-\frac{66141}{2048}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$\left.+\frac{1401951}{4096}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{191465059}{65536}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{315}{256}e^2e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}$$

$$\times\cos(2h+2g-2h'-2g').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=0,\qquad i'=2,\qquad i''=2,\qquad i'''=0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt}=0,\qquad \frac{dG}{dt}=\frac{dH}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant; et si l'on intègre la seconde, on aura

$$H=G+(H),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ, peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{15})\left\{\begin{aligned}a=\frac{L^2}{\mu}\Bigg\{1&-\left[\frac{13}{32}+\frac{15}{16}\frac{(H)}{L}-\frac{1069}{32}e^2+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}\\&-\left[\frac{79}{8}+\frac{167}{8}\frac{(H)}{L}-\frac{731}{4}e^2+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5L^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6L^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7L^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{45})\quad \gamma^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{G} = \mathrm{L}\Big\{1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6\\ &+ \left[\frac{225}{64}e^2 + \frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{675}{128}e^2\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\};\end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dg}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{45})\left\{\begin{aligned}\frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^2\,\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{&\left[\frac{135}{32}e^2e'^2 + \frac{675}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e'^2 - \frac{135}{32}e^4e'^2 + \frac{825}{64}e^2e'^4\right]\frac{n'\,\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\ &+ \left[\frac{29727}{256}e^2e'^2 + \frac{113481}{256}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e'^2 - \frac{23967}{128}e^4e'^2\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\ &+ \frac{716163}{512}e^2e'^2\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{205571209}{16384}e^2e'^2\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{315}{64}e^2e'^2\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} = -2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - 2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{G}}$, ... qui doivent être employées après la 44^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(\mathrm{D}_{45})\left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} = \frac{n'^2\,\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{&\frac{3}{2} + 6\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{9}{4}e'^2\\ &+ \left[\frac{225}{16} + \frac{225}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{675}{32}e^2 + \frac{825}{16}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{4167}{64}\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{294293}{1024}\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6}\Big\}\\ + \frac{n'^2\,\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{&\left[\frac{135}{32}e'^2 + \frac{675}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 - \frac{405}{64}e^2e'^2 + \frac{825}{64}e'^4\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\ &+ \left[\frac{29727}{256}e'^2 + \frac{113481}{256}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 - \frac{162009}{512}e^2e'^2\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\ &+ \frac{716163}{512}e'^2\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{205571209}{16384}e'^2\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{315}{64}e'^2\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{45}), (D_{45}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{G}\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{45})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 - \Big\{ &\left[\frac{45}{16} e_0^2 e'^2 + \frac{45}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e_0^2 e'^2 - \frac{45}{32} e_0^4 e'^2 + \frac{35}{8} e_0^2 e'^4\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &+ \left[\frac{3267}{64} e_0^2 e'^2 + \frac{783}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e_0^2 e'^2 - \frac{5961}{128} e_0^4 e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{21239}{64} e_0^2 e'^2 \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{15353317}{6144} e_0^2 e'^2 \frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{105}{32} e_0^2 e'^2 \cdot \frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\} \cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{45})\left\{\begin{aligned} \theta = \theta_0(t+c) & \\ + \Big\{ &\left[\frac{45}{16} e'^2 + \frac{45}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e'^2 - \frac{45}{32} e_0^2 e'^2 + \frac{35}{8} e'^4\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &+ \left[\frac{3267}{64} e'^2 + \frac{783}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} e'^2 - \frac{8655}{128} e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{21239}{64} e'^2 \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{15353317}{6144} e'^2 \frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{105}{32} e'^2 \cdot \frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\} \sin\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\left\{\frac{3}{2} + 6\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{4}e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2 + \frac{225}{16}\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{4167}{64}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{45}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{45}), (B_{45}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{45})\left\{\begin{aligned} a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32} e_0^2 + \frac{195}{64} e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{731}{4} e_0^2 + \frac{2133}{16} e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Big\} \\ - \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}&\left\{\frac{48105}{512} e_0^2 e'^2 \frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{4545063}{2048} e_0^2 e'^2 \frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\right\}\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{45})\left\{\begin{aligned}\gamma^2 = &-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\}\\ &+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{\frac{45}{32}e_0^2e'^2\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}+\frac{3267}{128}e_0^2e'^2\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4}\right\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}a_0 = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{1 &-\left[\frac{13}{32}+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{1069}{32}e_0^2+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\ &-\left[\frac{79}{8}+\frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{731}{4}e_0^2+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{45}), (F_{45}), (G_{45}), (H_{45}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{45})\left\{\begin{aligned}e^2 = e_0^2 - \Bigg[&\left(\frac{45}{16}e_0^2e'^2-\frac{45}{8}\gamma_0^2e_0^2e'^2-\frac{45}{32}e_0^4e'^2+\frac{35}{8}e_0^2\,e'^4\right)\frac{n'}{n_0}\\ &+\left(\frac{3267}{64}e_0^2e'^2-\frac{783}{32}\gamma_0^2\,e_0^2e'^2-\frac{5961}{128}e_0^4\,e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &+\frac{21239}{64}e_0^2\,e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{15353317}{6144}e_0^2\,e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{105}{32}e_0^2\,e'^2\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{45})\left\{\begin{aligned}\theta = \theta_0&(t+c)\\ &+\Bigg[\left(\frac{45}{16}e'^2-\frac{45}{8}\gamma_0^2e'^2-\frac{45}{32}e_0^2e'^2+\frac{35}{8}e'^4\right)\frac{n'}{n_0}\\ &+\left(\frac{3267}{64}e'^2-\frac{783}{32}\gamma_0^2e'^2-\frac{8655}{128}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &+\frac{21239}{64}e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{15353317}{6144}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{105}{32}e'^2\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{45})\quad a = a_0\left\{1-\left[\frac{48105}{512}e_0^2e'^2\frac{n'^5}{n_0^5}+\frac{4545063}{2048}e_0^2e'^2\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\},$$

$$(\mathrm{H}'_{45})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2-\left[\frac{45}{32}\gamma_0^2\,e_0^2\,e'^2\frac{n'}{n_0}+\frac{3267}{128}\gamma_0^2\,e_0^2\,e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = \frac{n'^2}{n_0}\left[\frac{3}{2} - 12\gamma_0^2 - \frac{3}{4}e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2 + \frac{225}{16}\frac{n'}{n_0} + \frac{4167}{64}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Bigg[&1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 \\ &+ \frac{675}{32}e^2\frac{n'}{n} - \left(\frac{451}{64} - \frac{207}{8}\gamma^2 - \frac{11325}{128}e^2 + \frac{6765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ &- \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg] \\ - \frac{n'^2}{n}\Bigg[&\left(\frac{405}{64}e^2 e'^2 - \frac{3375}{64}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{1215}{512}e^4 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\ &+ \frac{267543}{1024}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{8502831}{2048}e^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} = &-\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 + \frac{225}{32}e^2\frac{n'}{n} - \frac{51}{32}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{203}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right] \\ &- \frac{n'^2}{n}\left[\frac{675}{128}e^2 e'^2\frac{n'}{n} + \frac{113481}{1024}e^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{45}), (F'_{45}), (G'_{45}), (H'_{45}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{45})\left\{\begin{aligned}h + g + l = (l) &+ \frac{1}{2}(2h' + 2g') + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + l_0\right)(t+c) \\ &- \Bigg[\left(\frac{135}{64}e_0^2 e'^2 - \frac{45}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 + \frac{45}{256}e_0^4 e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\ &+ \frac{9801}{128}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1498833}{2048}e_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\Bigg]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{45})\quad h = (h) + h_0(t+c) - \left[\frac{45}{64}e_0^2 e'^2\frac{n'}{n_0} + \frac{783}{256}e_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); l_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+l+\frac{1}{2}(2h'+2g').$$

Les six formules (E'_{45}), (F'_{45}), (G'_{45}), (H'_{45}), (K_{45}), (L_{45}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (127); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du nº **30**, et si nous remarquons que l est égal à

$$-\frac{1}{2}\theta+(h+g+l)-\frac{1}{2}(2h'+2g'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1-\left[\frac{48105}{512}e^2e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{4545063}{2048}e^2e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h+2g-2h'-2g')\right\},$$

e^2 par

$$\begin{aligned}e^2-\Bigg[&\left(\frac{45}{16}e^2e'^2-\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{45}{32}e^4e'^2+\frac{35}{8}e^2e'^4\right)\frac{n'}{n}\\&+\left(\frac{3267}{64}e^2e'^2-\frac{783}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{5961}{128}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\&\qquad+\frac{21239}{64}e^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{15353317}{6144}e^2e'^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{105}{32}e^2e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(2h+2g-2h'-2g'),\end{aligned}$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\left[\frac{45}{32}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'}{n}+\frac{3267}{128}\gamma^2e^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos(2h+2g-2h'-2g');$$

l par

$$l - \left[\left(\frac{45}{32} e'^2 - \frac{45}{16} \gamma^2 e'^2 + \frac{45}{32} e^2 e'^2 + \frac{35}{16} e'^4 \right) \frac{n'}{n} \right.$$

$$+ \left(\frac{3267}{128} e'^2 - \frac{783}{64} \gamma^2 e'^2 + \frac{10947}{256} e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2}$$

$$\left. + \frac{21239}{128} e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{15353317}{12288} e'^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{105}{64} e'^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} \right] \sin(2h + 2g - 2h' - 2g'),$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \left[\left(\frac{135}{64} e^2 e'^2 - \frac{45}{16} \gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{45}{256} e^4 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \right.$$

$$\left. + \frac{9801}{128} e^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{1498833}{2048} e^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} \right] \sin(2h + 2g - 2h' - 2g'),$$

h par

$$h - \left[\frac{45}{64} e^2 e'^2 \frac{n'}{n} + \frac{783}{256} e^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} \right] \sin(2h + 2g - 2h' - 2g').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{45}), (G'_{45}), (H'_{45}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 685);

G_0 = ancienne valeur de G (page 725),

$$G_1 = \sqrt{a\mu} \cdot \frac{45}{32} e^2 e'^2 \frac{n'}{n};$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 725).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin \theta_0 (t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{45}); on en conclut facilement que, d'après le degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, on a

$$\frac{1}{2}(\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots) = 0.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 740 et 741) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 45^e opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (131) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, n'est autre chose que la valeur qu'avait précédemment le terme (1). Quant aux valeurs de L, G, H, elles n'éprouvent aucun changement. La valeur de L est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e opération (page 685) et celles de G, H sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 43^e opération (page 725). Les valeurs qui s'en déduisent pour $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, ... sont donc également identiques avec celles que l'on doit employer après la 43^e opération.

46^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (330) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (330)*, dans lequel l'argument est $h + g - h' - g' - l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (330), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante-cinq premières opérations.

$$-\left(\frac{5515}{192}-\frac{635}{6}\gamma^2-\frac{6380965}{12288}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2-\frac{4911}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\}$$

$$+m'\frac{a^3}{a'^3}\Big\{-\frac{15}{16}e+\frac{165}{16}\gamma^2 e-\frac{45}{64}e^3-\frac{15}{8}ee'^2-\frac{375}{16}\gamma^4 e+\frac{495}{64}\gamma^2 e^3+\frac{165}{8}\gamma^2 ee'^2-\frac{45}{32}e^3 e'^2$$

$$-\left(\frac{225}{128}e-\frac{2925}{128}\gamma^2 e+\frac{8775}{512}e^3+\frac{3015}{256}ee'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{1011}{2048}e+\frac{56619}{2048}\gamma^2 e-\frac{713475}{8192}e^3-\frac{15153}{2048}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\frac{44405}{16384}e\frac{n'^3}{n^3}+\frac{107015257}{1572864}e\frac{n'^4}{n^4}-\frac{105}{128}e\frac{a^2}{a'^2}\Big\}$$

$$\times\cos(h+g-h'-g'-l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=0,\qquad i'=1,\qquad i''=1,\qquad i'''=-1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt}=0,\qquad \frac{dG}{dt}=\frac{dH}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant, et si l'on intègre la seconde, on aura

$$H=G+(H),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ, peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{46})\begin{cases} a=\dfrac{L^2}{\mu}\Big\{1-\left[\dfrac{13}{32}+\dfrac{15}{16}\dfrac{(H)}{L}-\dfrac{1069}{32}e^2+\dfrac{195}{64}e'^2\right]\dfrac{n'^4L^{12}}{\mu^8} \\ \qquad -\left[\dfrac{79}{8}+\dfrac{167}{8}\dfrac{(H)}{L}-\dfrac{731}{4}e^2+\dfrac{2133}{16}e'^2\right]\dfrac{n'^5L^{15}}{\mu^{10}}-\dfrac{153}{4}\dfrac{n'^6L^{18}}{\mu^{12}}-\dfrac{22441}{144}\dfrac{n'^7L^{21}}{\mu^{14}}\Big\}, \end{cases}$$

$$(B_{46})\quad \gamma^2=-\frac{1}{2}\frac{(H)}{L}\Big\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}+\frac{1531}{96}\frac{n'^5L^{15}}{\mu^{10}}\Big\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G} = \mathrm{L}\Big\{ 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 &+ \left[\frac{225}{64}e^2 + \frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
&+ \left[\frac{675}{128}e^2 + \frac{2025}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{4107569}{12288}e^2\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\Big\};
\end{aligned}
$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dg}$, on en déduit

$$
(\mathrm{C}_{46})\left\{
\begin{aligned}
\frac{de}{dt} = -\frac{n'^2\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'}\Big\{ \frac{15}{16} &+ \frac{165}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} + \frac{15}{64}e^2 + \frac{15}{8}e'^2 + \frac{375}{64}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2} + \frac{495}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{H}}e^2 + \frac{165}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 \\
&- \frac{15}{32}e^4 + \frac{15}{32}e^2e'^2 + \left[\frac{225}{128} + \frac{2925}{256}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} + \frac{8325}{512}e^2 + \frac{3015}{256}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{12489}{2048} + \frac{259119}{4096}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} + \frac{620997}{8192}e^2 + \frac{61653}{2048}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
&+ \frac{408905}{16384}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{143375183}{1572864}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{105}{128}\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dh}{dt} + \frac{dg}{dt} - n' = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{G}}$, ... qui doivent être employées après la 45$^{\mathrm{e}}$ opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$
(\mathrm{D}_{46})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = n'\Big\{ -1 &+ \left[\frac{3}{4} + 3\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{3}{8}e^2 + \frac{9}{8}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{225}{32} + \frac{225}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{675}{64}e^2 + \frac{825}{32}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{4167}{128}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{294293}{2048}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\} \\
- \frac{n'^2\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'}\cdot\frac{1}{e}\Big\{ \frac{15}{16} &+ \frac{165}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} + \frac{105}{64}e^2 + \frac{15}{8}e'^2 + \frac{375}{64}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2} + \frac{2145}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 + \frac{165}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 \\
&- \frac{75}{64}e^4 + \frac{105}{32}e^2e'^2 + \left[\frac{225}{128} + \frac{2925}{256}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} + \frac{25875}{512}e^2 + \frac{3015}{256}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
&+ \left[\frac{12489}{2048} + \frac{259119}{4096}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} + \frac{2128947}{8192}e^2 + \frac{61653}{2048}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
&+ \frac{408905}{16384}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{143375183}{1572864}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{105}{128}\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{46}), (D_{46}) correspondent aux équations (23) du chapitre III ; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre chose que G) a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(E_{46})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\Bigg[\frac{15}{16}+\frac{165}{32}\frac{(H)}{L}+\frac{15}{16}e_0^2+\frac{15}{8}e'^2+\frac{375}{64}\frac{(H)^2}{L^2}+\frac{165}{16}\frac{(H)}{L}e_0^2+\frac{165}{16}\frac{(H)}{L}e'^2\\ &\qquad\qquad -\frac{105}{128}e_0^4+\frac{15}{8}e_0^2e'^2\Bigg]\frac{n'L^5}{\mu^3a'}\\ &-\left[\frac{315}{128}+\frac{4635}{256}\frac{(H)}{L}+\frac{4275}{128}e_0^2+\frac{3645}{256}e'^2\right]\frac{n'^2L^8}{\mu^5a'}\\ &-\left[\frac{29769}{2048}+\frac{547479}{4096}\frac{(H)}{L}+\frac{364263}{2048}e_0^2+\frac{165693}{2048}e'^2\right]\frac{n'^3L^{11}}{\mu^7a'}\\ &-\frac{1371059}{16384}\frac{n'^4L^{14}}{\mu^9a'}-\frac{740745071}{1572864}\frac{n'^5L^{17}}{\mu^{11}a'}-\frac{105}{128}\frac{n'L^9}{\mu^5a'^3}\\ &+\left\{e_0+\frac{225}{256}e_0\frac{n'^2L^{10}}{\mu^6a'^2}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\ &+\Bigg\{\left[\frac{45}{64}e_0^2+\frac{825}{128}\frac{(H)}{L}e_0^2-\frac{45}{128}e_0^4+\frac{45}{32}e_0^2e'^2\right]\frac{n'L^5}{\mu^3a'}\\ &\qquad\qquad +\frac{8865}{512}e_0^2\frac{n'^2L^8}{\mu^5a'}+\frac{812295}{8192}e_0^2\frac{n'^3L^{11}}{\mu^7a'}\Bigg\}\cos2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(F_{46})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\ e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &+\Bigg\{\left[\frac{45}{64}e_0^2+\frac{825}{128}\frac{(H)}{L}e_0^2-\frac{45}{128}e_0^4+\frac{45}{32}e_0^2e'^2\right]\frac{n'L^5}{\mu^3a'}\\ &\qquad\qquad +\frac{8865}{512}e_0^2\frac{n'^2L^8}{\mu^5a'}+\frac{812295}{8192}e_0^2\frac{n'^3L^{11}}{\mu^7a'}\Bigg\}\sin2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=n'\left\{-1+\left[\frac{3}{4}+3\frac{(H)}{L}-\frac{3}{8}e_0^2+\frac{9}{8}e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2}+\frac{225}{32}\frac{n'^2L^6}{\mu^4}+\frac{4167}{128}\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\right\}.$$

Si de ces formules (E_{46}), (F_{46}), on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{46}), (B_{46}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{46})\left\{\begin{aligned} a = \frac{L^2}{\mu}\Bigg\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(H)}{L} - \frac{731}{4}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\} \\ &- \frac{L^2}{\mu}\left\{\frac{16035}{256}e_0\frac{n'^5 L^{17}}{\mu^{11}a'} + \frac{1038495}{2048}e_0\frac{n'^6 L^{20}}{\mu^{13}a'}\right\}\cos\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(H_{46})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = -\frac{1}{2}\frac{(H)}{L}&\left\{1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}}\right\} \\ + \frac{1}{2}\frac{(H)}{L}&\Bigg\{\left[\frac{15}{16}e_0 + \frac{165}{32}\frac{(H)}{L}e_0 + \frac{105}{64}e_0^3 + \frac{15}{8}e_0 e'^2\right]\frac{n' L^5}{\mu^3 a'} \\ &+ \frac{315}{128}e_0\frac{n'^2 L^8}{\mu^5 a'} + \frac{29769}{2048}e_0\frac{n'^3 L^{11}}{\mu^7 a'}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{L^2}{\mu}\Bigg\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(H)}{L} - \frac{731}{4}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{(H)}{L}\left\{1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{46}), (F_{46}), (G_{46}), (H_{46}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{46})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = -\bigg(&\frac{15}{16} - \frac{165}{16}\gamma_0^2 + \frac{15}{16}e_0^2 + \frac{15}{8}e'^2 + \frac{375}{16}\gamma_0^4 - \frac{495}{32}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{165}{8}\gamma_0^2 e'^2 \\ &- \frac{105}{128}e_0^4 + \frac{15}{8}e_0^2 e'^2\bigg)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'} \\ - \bigg(&\frac{315}{128} - \frac{4635}{128}\gamma_0^2 + \frac{4275}{128}e_0^2 + \frac{3645}{256}e'^2\bigg)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(\mathrm{E}'_{46})\left\{\begin{aligned}
&-\left(\frac{29769}{2048}-\frac{547479}{2048}\gamma_0^2+\frac{364263}{2048}e_0^2+\frac{165693}{2048}e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\\
&-\frac{1371059}{16384}\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'}-\frac{742242671}{1572864}\frac{n'^5}{n_0^5}\cdot\frac{a_0}{a'}-\frac{105}{128}\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^3}{a'^3}\\
&+\left[e_0+\frac{225}{256}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\cos\theta_0(t+c)\\
&+\left[\left(\frac{45}{64}e_0^2-\frac{825}{64}\gamma_0^2e_0^2-\frac{45}{128}e_0^4+\frac{45}{32}e_0^2e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{8865}{512}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{812295}{8192}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}'_{46})\left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad+\left[\left(\frac{45}{64}e_0^2-\frac{825}{64}\gamma_0^2e_0^2-\frac{45}{128}e_0^4+\frac{45}{32}e_0^2e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{8865}{512}e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{812295}{8192}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{G}'_{46})\quad a=a_0\left\{1-\left[\frac{16035}{256}e_0\frac{n'^5}{n_0^5}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{1038495}{2048}e_0\frac{n'^6}{n_0^6}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\},
$$

$$
(\mathrm{H}'_{46})\left\{\begin{aligned}
&\gamma^2=\gamma_0^2-\left[\left(\frac{15}{16}\gamma_0^2e_0-\frac{165}{16}\gamma_0^4e_0+\frac{75}{64}\gamma_0^2e_0^3+\frac{15}{8}\gamma_0^2e_0e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{315}{128}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{29769}{2048}e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$
\theta_0=n'\left[-1+\left(\frac{3}{4}-6\gamma_0^2-\frac{3}{8}e_0^2+\frac{9}{8}e'^2\right)\frac{n'}{n_0}+\frac{225}{32}\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{4167}{128}\frac{n'^3}{n_0^3}\right].
$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{d(h+g+l)}{dt}=-\frac{dR}{dL}-\frac{dR}{dG}-\frac{dR}{dH},\qquad\frac{dh}{dt}=-\frac{dR}{dH},
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$
\frac{d(h+g+l)}{dt}=n-\frac{n'^2}{n}\left[1-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{9}{8}e^2+\frac{3}{2}e'^2+3\gamma^4-\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{3}{32}e^4+\frac{27}{16}e^2e'^2\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\frac{675}{32}e^2\frac{n'}{n}-\left(\frac{451}{64}-\frac{207}{8}\gamma^2-\frac{11325}{128}e^2+\frac{6765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]$$

$$+\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{a}{a'}\Bigg[\frac{165}{32}e-\frac{1485}{32}\gamma^2 e+\frac{105}{32}e^3+\frac{165}{16}ee'^2$$

$$+\left(\frac{3825}{256}e-\frac{43875}{256}\gamma^2 e+\frac{65925}{512}e^3+\frac{51255}{512}ee'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\frac{57747}{4096}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{3960745}{32768}e\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{8}e'^2+\frac{225}{32}e^2\frac{n'}{n}-\frac{51}{32}\frac{n'^2}{n^2}-\frac{203}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right]$$

$$+\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{a}{a'}\left[\frac{165}{32}e-\frac{375}{16}\gamma^2 e+\frac{825}{128}e^3+\frac{165}{16}ee'^2+\frac{2925}{256}e\frac{n'}{n}+\frac{83619}{4096}e\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{46}), (F'_{46}), (G'_{46}), (H'_{46}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{46})\left\{\begin{aligned}
h+g+l={}&(l)+h'+g'+l'+(\theta_0+l_0)(t+c)\\
&-\Bigg[\left(\frac{165}{32}e_0-\frac{1485}{32}\gamma_0^2 e_0+\frac{105}{32}e_0^3+\frac{165}{16}e_0e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\\
&+\left(\frac{5355}{256}e_0-\frac{69525}{256}\gamma_0^2 e_0+\frac{66645}{512}e_0^3+\frac{61965}{512}e_0e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\\
&+\frac{455187}{4096}e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{30000211}{32768}e_0\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'}\Bigg]\sin\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(L_{46})\left\{\begin{aligned}
h={}&(h)+h_0(t+c)\\
&-\Bigg[\left(\frac{165}{32}e_0-\frac{375}{16}\gamma_0^2 e_0+\frac{825}{128}e_0^3+\frac{165}{16}e_0e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\\
&+\frac{4635}{256}e_0\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{371979}{4096}e_0\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\Bigg]\sin\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); l_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La

forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=0+l+h'+g'+l'.$$

Les six formules (E'_{46}), (F'_{46}), (G'_{46}), (H'_{46}), (K_{46}), (L_{46}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (330); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du n° **50**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(h+g-h'-g'-l')$ par

$$-\left(\frac{15}{16}-\frac{165}{16}\gamma^2+\frac{15}{16}e^2+\frac{15}{8}e'^2+\frac{375}{16}\gamma^4-\frac{495}{32}\gamma^2e^2-\frac{165}{8}\gamma^2e'^2-\frac{105}{128}e^4+\frac{15}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$-\left(\frac{315}{128}-\frac{4635}{128}\gamma^2+\frac{4275}{128}e^2+\frac{3645}{256}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$-\left(\frac{29769}{2048}-\frac{547479}{2048}\gamma^2+\frac{364263}{2048}e^2+\frac{165693}{2048}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$-\frac{1371059}{16384}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{742242671}{1572864}\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{105}{128}\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^3}{a'^3}$$

$$+\left[e+\frac{225}{256}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(h+g-h'-g'-l')$$

$$+\left[\left(\frac{45}{64}e^2-\frac{825}{64}\gamma^2e^2-\frac{45}{128}e^4+\frac{45}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$

$$\left.+\frac{8865}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{812295}{8192}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos 2(h+g-h'-g'-l'),$$

$e\sin(h+g-h'-g'-l')$ par

$$e\sin(h+g-h'-g'-l')$$

$$+\left[\left(\frac{45}{64}e^2-\frac{825}{64}\gamma^2e^2-\frac{45}{128}e^4+\frac{45}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$

$$\left.+\frac{8865}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{812295}{8192}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin 2(h+g-h'-g'-l');$$

a par

$$a \left\{ 1 - \left[\frac{16035}{256} e \frac{n'^5}{n^5} \cdot \frac{a}{a'} + \frac{1038495}{2048} e \frac{n'^6}{n^6} \cdot \frac{a}{a'} \right] \cos(h+g-h'-g'-l') \right\},$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \left[\left(\frac{15}{16} \gamma^2 e - \frac{165}{16} \gamma^4 e + \frac{75}{64} \gamma^2 e^3 + \frac{15}{8} \gamma^2 e e'^2 \right) \frac{n'}{n} \cdot \frac{a}{a'} \right.$$
$$\left. + \frac{315}{128} e \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a}{a'} + \frac{29769}{2048} e \frac{n'^3}{n^3} \cdot \frac{a}{a'} \right] \cos(h+g-h'-g'-l'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l - \left[\left(\frac{165}{32} e - \frac{1485}{32} \gamma^2 e + \frac{105}{32} e^3 + \frac{165}{16} e e'^2 \right) \frac{n'}{n} \cdot \frac{a}{a'} \right.$$
$$+ \left(\frac{5355}{256} e - \frac{69525}{256} \gamma^2 e + \frac{66645}{512} e^3 + \frac{61965}{512} e e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a}{a'}$$
$$\left. + \frac{455187}{4096} e \frac{n'^3}{n^3} \cdot \frac{a}{a'} + \frac{30000211}{32768} e \frac{n'^4}{n^4} \cdot \frac{a}{a'} \right] \sin(h+g-h'-g'-l'),$$

h par

$$h - \left[\left(\frac{165}{32} e - \frac{375}{16} \gamma^2 e + \frac{825}{128} e^3 + \frac{165}{16} e e'^2 \right) \frac{n'}{n} \cdot \frac{a}{a'} \right.$$
$$\left. + \frac{4635}{256} e \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a}{a'} + \frac{371979}{4096} e \frac{n'^3}{n^3} \cdot \frac{a}{a'} \right] \sin(h+g-h'-g'-l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2 + \left(\frac{225}{256} - \frac{2475}{128} \gamma^2 + \frac{675}{256} e^2 + \frac{225}{64} e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{4725}{1024} \frac{n'^3}{n^3} \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{17055}{512} \frac{n'^4}{n^4} \cdot \frac{a^2}{a'^2}$$
$$- \left[\left(\frac{15}{8} e - \frac{165}{8} \gamma^2 e + \frac{15}{32} e^3 + \frac{15}{4} e e'^2 \right) \frac{n'}{n} \cdot \frac{a}{a'} \right.$$
$$\left. + \frac{315}{64} e \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a}{a'} + \frac{29769}{1024} e \frac{n'^3}{n^3} \cdot \frac{a}{a'} \right] \cos(h+g-h'-g'-l'),$$

$e^2 \cos 2(h+g-h'-g'-l')$[*] par

$$\frac{225}{256} \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{4725}{1024} \frac{n'^3}{n^3} \cdot \frac{a^2}{a'^2}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

---

[*] *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$-\left[\left(\frac{15}{8}e-\frac{165}{8}\gamma^2 e+\frac{15}{8}e^3+\frac{15}{4}ee'^2\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$

$$+\left(\frac{315}{64}e-\frac{4635}{64}\gamma^2 e+\frac{4275}{64}e^3+\frac{3645}{128}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$\left.+\frac{29769}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{1371059}{8192}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g-h'-g'-l')$$

$$+e^2\cos 2(h+g-h'-g'-l')$$

$$+\left[\frac{45}{32}e^3\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{8865}{256}e^3\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos 3(h+g-h'-g'-l'),$$

$e^2\sin 2(h+g-h'-g'-l')$ par

$$-\left[\left(\frac{15}{8}e-\frac{165}{8}\gamma^2 e+\frac{15}{8}e^3+\frac{15}{4}ee'^2\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$

$$+\left(\frac{315}{64}e-\frac{4635}{64}\gamma^2 e+\frac{4275}{64}e^3+\frac{3645}{128}ee'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$\left.+\frac{29769}{1024}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{1371059}{8192}e\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(h+g-h'-g'-l')$$

$$+e^2\sin 2(h+g-h'-g'-l')$$

$$+\left[\frac{45}{32}e^3\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{8865}{256}e^8\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin 3(h+g-h'-g'-l'),$$

$e^3\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(h+g-h'-g'-l')$ par

$$\frac{675}{256}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(h+g-h'-g'-l')$$

$$-\left[\left(\frac{45}{16}e^2-\frac{495}{16}\gamma^2 e^2+\frac{45}{16}e^4+\frac{45}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$

$$\left.+\frac{945}{128}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{89307}{2048}e^2\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(h+g-h'-g'-l')$$

$$+e^3\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(h+g-h'-g'-l')$$

$$+\frac{135}{64}e^4\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}4(h+g-h'-g'-l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{46}), (F'_{46}), la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{46}), (H'_{46}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 725)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{225}{512}-\frac{2475}{256}\gamma^2+\frac{225}{128}e^2+\frac{225}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{4725}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{222255}{16384}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\},$$

$$G_1=\sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{15}{16}e-\frac{165}{16}\gamma^2 e+\frac{45}{64}e^3+\frac{15}{8}ee'^2\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{315}{128}e\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{16269}{2048}e\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 725)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{225}{512}-\frac{675}{64}\gamma^2+\frac{225}{128}e^2+\frac{225}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{4725}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{222255}{16384}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1=\frac{1}{e}\left\{\left(\frac{15}{16}-\frac{165}{16}\gamma^2+\frac{105}{64}e^2+\frac{15}{8}e'^2\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{315}{128}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{29769}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 G_1+2\theta_2 G_2+\ldots)=$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{225}{512}-\frac{2475}{256}\gamma^2+\frac{1125}{1024}e^2+\frac{225}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4725}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{222255}{16384}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 749 et 750) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 46^e opération, et y ajoutant

$$+n'(G-G_0)-n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 G_1+2\theta_2 G_2+\ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (330) de R, joint à la quantité $+ n'(G - G_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées ; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$- n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [46 . . . 1, 330]. Ensuite les nouvelles valeurs de G, H seront

$$\begin{aligned} G = \sqrt{a\mu} \Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\ & + \Big(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{675}{32}\gamma^4 e^2 + \frac{225}{32}\gamma^2 e^4 - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 \\ & \qquad - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \\ & + \Big(\frac{675}{128}e^2 - \frac{2025}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3} \\ & + \Big(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 + \frac{147261}{4096}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 - \frac{175059}{512}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 \\ & \qquad - \frac{3035787}{16384}e^4 + \frac{257925}{2048}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n^4} \\ & + \Big(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 + \frac{2954417}{12288}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2 \Big) \frac{n'^5}{n^5} \\ & + \Big(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 + \frac{497099911}{393216}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2 \Big) \frac{n'^6}{n^6} \\ & + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} + \frac{5625}{1024}e^2 \frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H = \sqrt{a\mu} \Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\ & + \Big(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{675}{32}\gamma^4 e^2 + \frac{1575}{128}\gamma^2 e^4 - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 \\ & \qquad - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \\ & + \Big(\frac{675}{128}e^2 - \frac{2025}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n^3} \end{aligned}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{187}{32}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{1389}{32}\gamma^4-\frac{191227}{512}\gamma^2e^2+\frac{2805}{64}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{257925}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2+\frac{49709991}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}$$
$$+\left(\frac{225}{256}\gamma^2+\frac{5625}{1024}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.$$

Quant à la valeur de L, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e opération (page 685). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{de}{dL}=\frac{1}{a^2ne}\Bigg\{1-e^2+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2+\frac{325}{32}e'^2+\frac{675}{16}\gamma^4-\frac{225}{8}\gamma^2e^2-\frac{325}{8}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.-\frac{1125}{64}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2+\frac{675}{128}e^2+\frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{1425967}{4096}e^2+\frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},$$

$$\frac{de}{dG}=-\frac{1}{a^2ne}\Bigg\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6$$
$$+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{325}{32}e'^2+\frac{675}{16}\gamma^4+\frac{675}{32}\gamma^2e^2-\frac{325}{8}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.+\frac{225}{128}e^4-\frac{1425}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{3606567}{4096}e^2+\frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},$$

$$\frac{de}{dH}=\frac{1}{a^2ne}\Bigg\{\left(\frac{225}{32}e^2-\frac{675}{32}\gamma^2e^2-\frac{225}{64}e^4+\frac{325}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63777}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Bigg\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 n\gamma}\left\{\left(\frac{225}{64}\gamma^2 - \frac{225}{16}\gamma^4 + \frac{675}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{325}{64}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{675}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{279519}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^2 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6\right.$$
$$- \left(\frac{225}{16}\gamma^2 - \frac{225}{4}\gamma^4 + \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{325}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{675}{256}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{675}{32}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}$$
$$\left. + \left(\frac{217}{64} - \frac{235711}{1024}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{225}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{4a^2 n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \left(\frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{225}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 41^e opération (page 702).

47^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (331) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (331)*, dans lequel l'argument est $h + g - h' - g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a}$$
$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4\right.$$
$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (331), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante-six premières opérations.

$$+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{225}{128}e^4+\frac{825}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{31}{32}-\frac{33}{8}\gamma^2-\frac{971}{32}e^2+\frac{465}{64}e'^2+\frac{75}{16}\gamma^4+\frac{399}{4}\gamma^2e^2-\frac{495}{16}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.+\frac{4989}{256}e^4-\frac{1905}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{255}{32}-\frac{537}{16}\gamma^2-\frac{551115}{4096}e^2+\frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{5515}{192}-\frac{635}{6}\gamma^2-\frac{6380965}{12288}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$
$$+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{45}{64}e'^2+\frac{225}{512}\frac{n'}{n}-\frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\}$$

$$+m'\frac{a^3}{a'^4}\Big\{-\frac{45}{16}ee'+\frac{495}{16}\gamma^2ee'-\frac{135}{64}e^3e'-\frac{165}{64}ee'^3$$
$$-\left(\frac{615}{128}ee'-\frac{7185}{128}\gamma^2ee'+\frac{34365}{512}e^3e'\right)\frac{n'}{n}-\frac{50163}{2048}ee'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{2198039}{16384}ee'\frac{n'^3}{n^3}\Big\}$$
$$\times\cos(h+g-h'-g'-2l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=0,\qquad i'=1,\qquad i''=1,\qquad i'''=-2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt}=0,\qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt}=\frac{d\mathrm{H}}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant, et si l'on intègre la seconde, on aura

$$\mathrm{H}=\mathrm{G}+(\mathrm{H}),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{47})\qquad a=\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{1-\left[\frac{13}{32}+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{1069}{32}e^2+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}-\frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\Big\},$$

$$(\mathrm{B}_{47})\qquad \gamma^2=-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\Big\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$G = L \Big\{ 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 \\ + \left[\frac{225}{64}e^2 + \frac{225}{32}\frac{(H)}{L}e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4} + \frac{675}{128}e^2\frac{n'^3L^9}{\mu^6} + \frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\dfrac{dG}{dt} = \dfrac{dR}{dg}$, on en déduit

$$(C_{47})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2L^5}{\mu^3a'}\Big\{&\frac{45}{16}e' + \frac{495}{32}\frac{(H)}{L}e' + \frac{45}{64}e^2e' + \frac{165}{64}e'^3 \\ &+ \left[\frac{615}{128}e' + \frac{7185}{256}\frac{(H)}{L}e' + \frac{33135}{512}e^2e'\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\ &+ \frac{90663}{2048}e'\frac{n'^2L^6}{\mu^4} + \frac{3237539}{16384}e'\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dh}{dt} + \frac{dg}{dt} - 2n' = -\frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{dG}$, $\dfrac{da}{dH}$, $\dfrac{de}{dG}$, ... qui doivent être employées après la 46^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(D_{47})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = n'\Big\{&-2 + \left[\frac{3}{4} + 3\frac{(H)}{L} - \frac{3}{8}e^2 + \frac{9}{8}e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} + \frac{225}{32}\frac{n'^2L^6}{\mu^4} + \frac{4167}{128}\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\Big\} \\ &- \frac{n'^2L^5}{\mu^3a'}\cdot\frac{1}{e}\Big\{\frac{45}{16}e' + \frac{495}{32}\frac{(H)}{L}e' + \frac{315}{64}e^2e' + \frac{165}{64}e'^3 \\ &+ \left[\frac{615}{128}e' + \frac{7185}{256}\frac{(H)}{L}e' + \frac{101865}{512}e^2e'\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\ &+ \frac{90663}{2048}e'\frac{n'^2L^6}{\mu^4} + \frac{3237539}{16384}e'\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{47}), (D_{47}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre chose que G) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction.

Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(\mathrm{E}_{47})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\left[\frac{45}{32}e' + \frac{495}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e' + \frac{45}{32}e_0^2 e' + \frac{165}{128}e'^3\right]\frac{n'\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'} \\ &-\left[\frac{375}{128}e' + \frac{4875}{256}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e' + \frac{16875}{256}e_0^2 e'\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^8}{\mu^5 a'} - \frac{115413}{4096}e'\frac{n'^3\mathrm{L}^{11}}{\mu^7 a'} - \frac{2335669}{16384}e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{14}}{\mu^9 a'} \\ &+ e_0\cos\theta_0(t+c) \\ &+\left\{\frac{135}{128}e_0^2 e'\frac{n'\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'} + \frac{8625}{256}e_0^2 e'\frac{n'^2\mathrm{L}^8}{\mu^5 a'}\right\}\cos 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{47})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\; e_0\sin\theta_0(t+c) \\ &+\left\{\frac{135}{128}e_0^2 e'\frac{n'\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'} + \frac{8625}{256}e_0^2 e'\frac{n'^2\mathrm{L}^8}{\mu^5 a'}\right\}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = n'\left\{-2 + \frac{3}{4}\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{225}{32}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si de ces formules (E_{47}), (F_{47}) on tire la valeur de e^2, et qu'on l'introduise dans les relations (A_{47}), (B_{47}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{47})\left\{\begin{aligned} a = &\;\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\left\{1 - \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\ &-\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\cdot\frac{48105}{512}e_0 e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{17}}{\mu^{11}a'}\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{47})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = &-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\} \\ &+\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{\frac{45}{32}e_0 e'\frac{n'\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'} + \frac{375}{128}e_0 e'\frac{n'^2\mathrm{L}^8}{\mu^5 a'}\right\}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\left\{1 - \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\right\},$$

$$\gamma_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\};$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{47}), (F_{47}), (G_{47}), (H_{47}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{47})\left\{\begin{aligned} e\cos\theta = &-\left(\frac{45}{32}e' - \frac{495}{32}\gamma_0^2 e' + \frac{45}{32}e_0^2 e' + \frac{165}{128}e'^3\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'} \\ &-\left(\frac{375}{128}e' - \frac{4875}{128}\gamma_0^2 e' + \frac{16875}{256}e_0^2 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} - \frac{115413}{4096}e'\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'} - \frac{2335669}{16384}e'\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'} \\ &+ e_0\cos\theta_0(t+c) \\ &+\left[\frac{135}{128}e_0^2 e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{8625}{256}e_0^2 e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{47})\left\{\begin{aligned} e\sin\theta = &\; e_0\sin\theta_0(t+c) \\ &+\left[\frac{135}{128}e_0^2 e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{8625}{256}e_0^2 e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(G'_{47})\quad a = a_0\left\{1 - \frac{48105}{512}e_0 e'\frac{n'^5}{n_0^5}\cdot\frac{a_0}{a'}\cos\theta_0(t+c)\right\},$$

$$(H'_{47})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 - \left[\frac{45}{32}\gamma_0^2 e_0 e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{375}{128}\gamma_0^2 e_0 e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n'\left[-2 + \frac{3}{4}\frac{n'}{n_0} + \frac{225}{32}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{dR}{dH},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}&\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{675}{32}e^2\frac{n'}{n} - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right] \\ &+ \frac{n'^2}{n}\cdot\frac{a}{a'}\left[\frac{495}{32}ee' - \frac{4455}{32}\gamma^2 ee' + \frac{315}{32}e^3 e' + \frac{10455}{256}ee'\frac{n'}{n} + \frac{1396749}{4096}ee'\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{51}{32}\frac{n'^2}{n^2}\right] + \frac{n'^2}{n}\cdot\frac{a}{a'}\left[\frac{495}{32}ee' + \frac{7185}{256}ce'\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{47}), (F'_{47}), (G'_{47}), (H'_{47}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{47})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= (l) + h' + g' + 2l' + (\theta_0 + l_0)(t+c) \\ &\quad - \left[\left(\frac{495}{64}e_0 e' - \frac{4455}{64}\gamma_0^2 e_0 e' + \frac{315}{64}e_0^3 e'\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\right. \\ &\quad \left. + \frac{6375}{256}e_0 e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{1965999}{8192}e_0 e'\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{47})\quad h = (h) + h_0(t+c) - \left[\frac{495}{64}e_0 e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'} + \frac{4875}{256}e_0 e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); l_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \theta + l + h' + g' + 2l'.$$

Les six formules (E'_{47}), (F'_{47}), (G'_{47}), (H'_{47}), (K_{47}), (L_{47}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (331); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du nº **30**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(h+g-h'-g'-2l')$ par

$$-\left(\frac{45}{32}e' - \frac{495}{32}\gamma^2 e' + \frac{45}{32}e^2 e' + \frac{165}{128}e'^3\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$-\left(\frac{375}{128}e' - \frac{4875}{128}\gamma^2 e' + \frac{16875}{256}e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} - \frac{115413}{4096}e'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'} - \frac{2335669}{16384}e'\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+ e\cos(h+g-h'-g'-2l')$$

$$+\left[\frac{135}{128}e^2e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{8625}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos2(h+g-h'-g'-2l'),$$

$e\sin(h+g-h'-g'-2l')$ par

$$e\sin(h+g-h'-g'-2l')$$

$$+\left[\frac{135}{128}e^2e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{8625}{256}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin2(h+g-h'-g'-2l'),$$

a par

$$a\left\{1-\frac{48105}{512}ee'\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}\cos(h+g-h'-g'-2l')\right\},$$

γ^2 par

$$\gamma^2-\left[\frac{45}{32}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{375}{128}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g-h'-g'-2l'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{495}{64}ee'-\frac{4455}{64}\gamma^2ee'+\frac{315}{64}e^2e'\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$
$$\left.+\frac{6375}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{1965999}{8192}ee'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(h+g-h'-g'-2l')$$

h par

$$h-\left[\frac{495}{64}ee'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{4875}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(h+g-h'-g'-2l').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2+\frac{2025}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

$$-\left[\frac{45}{16}ee'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{375}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g-h'-g'-2l'),$$

$e^2 \cdot \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} 2(h+g-h'-g'-2l')$* par

$$-\left[\left(\frac{45}{16}ee' - \frac{495}{16}\gamma^2 ee' + \frac{45}{16}e^3 e'\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{375}{64}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{115413}{2048}ee'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(h+g-h'-g'-2l')$$

$$+e^2\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(h+g-h'-g'-2l')$$

$$+\frac{135}{64}e^3 e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(h+g-h'-g'-2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{47}), (F'_{47}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{47}), (H'_{47}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 753)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{2025}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2},$$

$$G_1 = \sqrt{a\mu}\cdot\frac{45}{32}ee'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 753)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{2025}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1 = \frac{1}{e}\cdot\frac{45}{32}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\cdot\frac{2025}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}.$$

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle l'usage de cette formule se trouve expliqué.

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 760 et 761) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 47e opération, et y ajoutant

$$+ 2n'(\mathrm{G} - \mathrm{G}_0) - 2n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 \mathrm{G}_1 + 2\theta_2 \mathrm{G}_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (331) de R, joint à la quantité $+ 2n'(\mathrm{G} - \mathrm{G}_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$- 2n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 \mathrm{G}_1 + 2\theta_2 \mathrm{G}_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et d'une nouvelle partie qui est donnée dans le chapitre IV avec l'indication [47 . . . . 1,331]. Quant aux valeurs de L, G, H, elles n'éprouvent aucun changement. La valeur de L est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40e opération (page 685), et celles de G, H sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 46e opération (page 753). Les valeurs qui s'en déduisent pour $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{L}}$, ... sont donc également identiques avec celles que l'on doit employer après la 46e opération.

48e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (334) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (334)*, dans lequel l'argument est $h + g - h' - g'$, et supposons que R se réduise

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (334), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante-sept premières opérations.

à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \\
& \qquad - \Big(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 \\
& \qquad\qquad + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2 \right) \frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{45}{64}e'^2 + \frac{225}{512}\frac{n'}{n} - \frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2} \right] \frac{a^2}{a'^2} \Big\} \\
& + m' \frac{a^3}{a'^4} \Big\{ - \frac{15}{16}ee' + \frac{165}{16}\gamma^2 ee' - \frac{45}{64}e^3 e' - \frac{75}{32}ee'^3 - \frac{375}{16}\gamma^4 ee' + \frac{495}{64}\gamma^2 e^3 e' \\
& \qquad - \left(\frac{585}{128}ee' - \frac{8415}{128}\gamma^2 ee' + \frac{12435}{512}e^3 e' + \frac{9435}{512}ee'^3 \right) \frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{44385}{2048}ee' - \frac{898443}{2048}\gamma^2 ee' + \frac{1711263}{8192}e^3 e' \right) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \frac{2245369}{16384}ee' \frac{n'^3}{n^3} - \frac{1423146463}{1572864}ee' \frac{n'^4}{n^4} - \frac{105}{64}ee' \frac{a^2}{a'^2} \Big\} \\
& \times \cos(h + g - h' - g')
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 0, \qquad i' = 1, \qquad i'' = 1, \qquad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant; et si l'on intègre la seconde, on aura

$$\mathrm{H} = \mathrm{G} + (\mathrm{H}),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{48})\left\{\begin{aligned} a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{ 1 &- \Bigg[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{1069}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2 - \frac{15}{64}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2} - \frac{1809}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 + \frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2 \\ &\qquad + \frac{5631}{256}e^4 - \frac{16035}{64}e^2e'^2\Bigg]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ &- \Bigg[\frac{79}{8} + \frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{731}{4}e^2 + \frac{2133}{16}e'^2\Bigg]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} \\ &- \Bigg[\frac{153}{4} + \frac{895}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}} - \frac{107697}{128}e^2 + \frac{240085}{256}e'^2\Bigg]\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} \\ &- \frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}} - \frac{99670013}{221184}\frac{n'^8\mathrm{L}^{24}}{\mu^{16}} - \frac{4431}{1024}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{48})\quad \gamma^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{G} = \mathrm{L}\Bigg\{ 1 &- \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \Bigg[\frac{225}{64}e^2 + \frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2e'^2\Bigg]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \Bigg[\frac{675}{128}e^2 + \frac{2025}{64}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2e'^2\Bigg]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{4107569}{12288}e^2\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}; \end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{G}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dg}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{48})\left\{\begin{aligned} \frac{de}{dt} = -\frac{n'^2\mathrm{L}^5}{\mu^3a'}\Bigg\{ &\frac{15}{16}e' + \frac{165}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e' + \frac{15}{64}e^2e' + \frac{75}{32}e'^3 + \frac{375}{64}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}e' + \frac{495}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e^2e' - \frac{15}{32}e^4e' \\ &+ \Bigg[\frac{585}{128}e' + \frac{8415}{256}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e' + \frac{11265}{512}e^2e' + \frac{9435}{512}e'^3\Bigg]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &+ \Bigg[\frac{57885}{2048}e' + \frac{1100943}{4096}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e' + \frac{1527993}{8192}e^2e'\Bigg]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{2933869}{16384}e'\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{1965331303}{1572864}e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{105}{64}e'\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dh}{dt} + \frac{dg}{dt} = -\frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH};$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dG}$, ... qui doivent être employées après la 47^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(D_{48})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = {} & \frac{n'^2 L^3}{\mu^2}\left\{\frac{3}{4} + 3\frac{(H)}{L} - \frac{3}{8}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 + \frac{15}{8}\frac{(H)^2}{L^2} + \frac{15}{8}\frac{(H)}{L}e^2 + \frac{9}{2}\frac{(H)}{L}e'^2 - \frac{3}{32}e^4 - \frac{9}{16}e^2 e'^2\right. \\
& + \left[\frac{225}{32} + \frac{225}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{675}{64}e^2 + \frac{825}{32}e'^2\right]\frac{n' L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{4167}{128} + \frac{4659}{64}\frac{(H)}{L} - \frac{15561}{256}e^2 + \frac{61755}{256}e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& \left. + \frac{294293}{2048}\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} + \frac{15044839}{24576}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{32}\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\right\} \\
& - \frac{n'^2 L^5}{\mu^3 a'}\cdot\frac{1}{e}\left\{\frac{15}{16}e' + \frac{165}{32}\frac{(H)}{L}e' + \frac{105}{64}e^2 e' + \frac{75}{32}e'^3 + \frac{375}{64}\frac{(H)^2}{L^2}e' + \frac{2145}{128}\frac{(H)}{L}e^2 e' - \frac{75}{64}e^4 e'\right. \\
& + \left[\frac{585}{128}e' + \frac{8415}{256}\frac{(H)}{L}e' + \frac{36135}{512}e^2 e' + \frac{9435}{512}e'^3\right]\frac{n' L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{57885}{2048}e' + \frac{1100943}{4096}\frac{(H)}{L}e' + \frac{5031519}{8192}e^2 e'\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& \left. + \frac{2933869}{16384}e'\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} + \frac{196533I303}{1572864}e'\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} + \frac{105}{64}e'\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\right\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{48}), (D_{48}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ (qui n'est autre chose que G) a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Elles rentrent d'ailleurs par leur forme dans les équations (39), et si on les intègre à l'aide des formules (40), on trouve

$$(E_{48})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = {} & \left[\frac{5}{4}e' + \frac{15}{8}\frac{(H)}{L}e' + \frac{5}{2}e_0^2 e' + \frac{5}{4}e'^3 - \frac{45}{16}\frac{(H)^2}{L^2}e' - \frac{5}{8}\frac{(H)}{L}e_0^2 e' + \frac{35}{32}e_0^4 e'\right]\frac{L^2}{\mu a'} \\
& - \left[\frac{45}{8}e' - \frac{405}{16}\frac{(H)}{L}e' - \frac{1085}{16}e_0^2 e' + \frac{2775}{128}e'^3\right]\frac{n' L^5}{\mu^3 a'} \\
& + \left[\frac{18515}{512}e' - \frac{123719}{1024}\frac{(H)}{L}e' - \frac{16623}{128}e_0^2 e'\right]\frac{n'^2 L^8}{\mu^5 a'}
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{E}_{48})\left\{\begin{aligned}
&-\frac{146837}{1536}e'\frac{n'^3\mathrm{L}^{11}}{\mu^7 a'}+\frac{1238668223}{1179648}e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{14}}{\mu^9 a'}-\frac{5}{32}e'\frac{\mathrm{L}^6}{\mu^3 a'^3}\\
&+\left\{e_0+\frac{75}{32}e_0 e'^2\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\right\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\left\{\left[\frac{25}{16}e_0^2 e'+\frac{5}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2 e'+\frac{35}{32}e_0^4 e'\right]\frac{\mathrm{L}^2}{\mu a'}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{65}{2}e_0^2 e'\frac{n'\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'}-\frac{96469}{2048}e_0^2 e'\frac{n'^2\mathrm{L}^8}{\mu^5 a'}\right\}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{48})\left\{\begin{aligned}
&e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad-\left\{\left[\frac{25}{16}e_0^2 e'+\frac{5}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2 e'+\frac{35}{32}e_0^4 e'\right]\frac{\mathrm{L}^2}{\mu a'}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{65}{2}e_0^2 e'\frac{n'\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'}-\frac{96469}{2048}e_0^2 e'\frac{n'^2\mathrm{L}^8}{\mu^5 a'}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\begin{aligned}
\theta_0=\frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}&\left\{\frac{3}{4}+3\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{3}{8}e_0^2+\frac{9}{8}e'^2\right.\\
&\left.+\left[\frac{225}{32}+\frac{225}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{675}{64}e_0^2+\frac{825}{32}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}+\frac{4167}{128}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}+\frac{294293}{2048}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\right\}.
\end{aligned}$$

Si de ces formules (E_{48}), (F_{48}) on tire la valeur de e^2 et qu'on l'introduise dans les relations (A_{48}), (B_{48}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{48})\left\{\begin{aligned}
a=\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}&\left\{1-\left[\frac{13}{32}+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{1069}{32}e_0^2+\frac{195}{64}e'^2-\frac{15}{64}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}-\frac{1809}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2+\frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2\right.\right.\\
&\qquad\left.+\frac{5631}{256}e_0^4-\frac{16035}{64}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&\quad-\left[\frac{79}{8}+\frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{731}{4}e_0^2+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\\
&\quad-\left[\frac{153}{4}+\frac{895}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{107697}{128}e_0^2+\frac{240085}{256}e'^2\right]\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\\
&\qquad\left.-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}-\frac{99670013}{221184}\frac{n'^8\mathrm{L}^{24}}{\mu^{16}}-\frac{4431}{1024}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\right\}\\
+\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}&\left\{\left[\frac{5345}{64}e_0 e'+\frac{34125}{128}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0 e'-\frac{1515}{32}e_0^3 e'\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{14}}{\mu^9 a'}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{10375}{128}e_0 e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{17}}{\mu^{11}a'}+\frac{20181815}{8192}e_0 e'\frac{n'^6\mathrm{L}^{20}}{\mu^{13}a'}\right\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{48})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = &-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{1531}{96}\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\\
&-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{\left[\frac{5}{4}e_0e'+\frac{15}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0e'+\frac{45}{16}e_0^3e'\right]\frac{\mathrm{L}^2}{\mu a'}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{45}{8}e_0e'\frac{n'\,\mathrm{L}^5}{\mu^3 a'}+\frac{18515}{512}e_0e'\frac{n'^2\,\mathrm{L}^8}{\mu^5 a'}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{1 &-\left[\frac{13}{32}+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{1069}{32}e_0^2+\frac{195}{64}e'^2-\frac{15}{64}\frac{(\mathrm{H})^2}{\mathrm{L}^2}-\frac{1809}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2+\frac{225}{32}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e'^2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{5631}{256}e_0^4-\frac{16035}{64}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&-\left[\frac{79}{8}+\frac{167}{8}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{731}{4}e_0^2+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\\
&-\left[\frac{153}{4}+\frac{895}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{107697}{128}e_0^2+\frac{240085}{256}e'^2\right]\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\\
&-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}-\frac{99670013}{221184}\frac{n'^8\,\mathrm{L}^{24}}{\mu^{16}}-\frac{4431}{1024}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\gamma_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{3}{8}e_0^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{1531}{96}\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{48}), (F_{48}), (G_{48}), (H_{48}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{48})\left\{\begin{aligned}
e\cos\theta = &\left(\frac{5}{4}e'-\frac{15}{4}\gamma_0^2e'+\frac{5}{2}e_0^2e'+\frac{5}{4}e'^3-\frac{45}{4}\gamma_0^4e'+\frac{25}{8}\gamma_0^2e_0^2e'+\frac{35}{32}e_0^4e'\right)\frac{a_0}{a'}\\
&-\left(\frac{45}{8}e'+\frac{405}{8}\gamma_0^2e'-\frac{1085}{16}e_0^2e'+\frac{2775}{128}e'^3\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\\
&+\left(\frac{18515}{512}e'+\frac{123719}{512}\gamma_0^2e'-\frac{16623}{128}e_0^2e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\\
&-\frac{146837}{1536}e'\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{1239267263}{1179648}e'\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'}-\frac{5}{32}e'\cdot\frac{a_0^3}{a'^3}
\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{E}'_{48})\left\{\begin{aligned} &+\left[e_0+\frac{75}{32}e_0e'^2\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\cos\theta_0(t+c)\\ &-\left[\left(\frac{25}{16}e_0^2e'-\frac{5}{16}\gamma_0^2e_0^2e'+\frac{35}{32}e_0^4e'\right)\frac{a_0}{a'}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{65}{2}e_0^2e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}-\frac{96469}{2048}e_0^2e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{48})\left\{\begin{aligned} &e\sin\theta=e_0\sin\theta_0(t+c)\\ &-\left[\left(\frac{25}{16}e_0^2e'-\frac{5}{16}\gamma_0^2e_0^2e'+\frac{35}{32}e_0^4e'\right)\frac{a_0}{a'}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{65}{2}e_0^2e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}-\frac{96469}{2048}e_0^2e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\sin2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{48})\left\{\begin{aligned} &a=a_0\left\{1+\left[\left(\frac{5345}{64}e_0e'-\frac{34125}{64}\gamma_0^2e_0e'-\frac{1515}{32}e_0^3e'\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\cdot\frac{a_0}{a'}\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\frac{10375}{128}e_0e'\frac{n'^5}{n_0^5}\cdot\frac{a_0}{a'}+\frac{20181815}{8192}e_0e'\frac{n'^6}{n_0^6}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\},\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{48})\left\{\begin{aligned} &\gamma^2=\gamma_0^2+\left[\left(\frac{5}{4}\gamma_0^2e_0e'-\frac{15}{4}\gamma_0^4e_0e'+\frac{35}{16}\gamma_0^2e_0^3e'\right)\frac{a_0}{a'}-\frac{45}{8}\gamma_0^2e_0e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{18515}{512}\gamma_0^2e_0e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\right]\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0=\frac{n'^2}{n_0}\left[\frac{3}{4}-6\gamma_0^2-\frac{3}{8}e_0^2+\frac{9}{8}e'^2+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma_0^2-\frac{675}{64}e_0^2+\frac{825}{32}e'^2\right)\frac{n'}{n_0}+\frac{4167}{128}\frac{n'^2}{n_0}+\frac{294293}{2048}\frac{n'^3}{n_0^3}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},\qquad \frac{dh}{dt}=-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt}=n-\frac{n'^2}{n}\Bigg[&1-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{9}{8}e^2+\frac{3}{2}e'^2+3\gamma^4-\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{3}{32}e^4+\frac{27}{16}e^2e'^2+\frac{15}{8}e'^4\\ &+\left(\frac{675}{32}e^2-\frac{1125}{16}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{2475}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\left(\frac{451}{64}-\frac{207}{8}\gamma^2-\frac{11325}{128}e^2+\frac{6765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{787}{32}-\frac{717}{8}\gamma^2-\frac{219075}{512}e^2+\frac{21249}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4}-\frac{77029}{288}\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{9}{8}+\frac{2475}{512}\frac{n'}{n}\right)\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]$$

$$+\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{a}{a'}\Bigg[\frac{165}{32}ee'-\frac{1485}{32}\gamma^2ee'+\frac{105}{32}e^3e'+\frac{825}{64}ee'^3$$

$$+\left(\frac{9945}{256}ee'-\frac{126225}{256}\gamma^2ee'+\frac{93555}{512}e^3e'\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\frac{1101855}{4096}ee'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{69732701}{32768}ee'\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{8}e'^2-3\gamma^2e^2-\frac{9}{4}\gamma^2e'^2+\frac{27}{32}e^4+\frac{9}{4}e^2e'^2+\frac{225}{32}e^2\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{51}{32}-\frac{165}{32}\gamma^2-\frac{3309}{128}e^2+\frac{765}{64}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{203}{32}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{17567}{768}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{45}{32}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]$$

$$+\frac{n'^2}{n}\cdot\frac{a}{a'}\Bigg[\frac{165}{32}ee'-\frac{375}{16}\gamma^2ee'+\frac{825}{128}e^3e'+\frac{8415}{256}ee'\frac{n'}{n}+\frac{925443}{4096}ee'\frac{n'^2}{n^2}\Bigg]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{48}), (F'_{48}), (G'_{48}), (H'_{48}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{48})\left\{\begin{aligned}h+g+l&=(l)+h'+g'+(\theta_0+l_0)(t+c)\\&+\Bigg[\left(\frac{25}{8}e_0e'-\frac{45}{8}\gamma_0^2e_0e'+\frac{5}{2}e_0^3e'+\frac{25}{8}e_0e'^3\right)\frac{a_0}{a'}\\&-\left(\frac{495}{16}e_0e'+\frac{3645}{16}\gamma_0^2e_0e'-\frac{9315}{64}e_0^3e'\right)\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}\\&+\frac{265255}{1024}e_0e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}-\frac{2628001}{3072}e_0e'\frac{n'^3}{n_0^3}\cdot\frac{a_0}{a'}\Bigg]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(L_{48})\left\{\begin{aligned}h&=(h)+h_0(t+c)\\&+\Bigg[\left(\frac{15}{8}e_0e'+\frac{45}{4}\gamma_0^2e_0e'+\frac{5}{32}e_0^3e'\right)\frac{a_0}{a'}\\&+\frac{405}{16}e_0e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0}{a'}-\frac{146219}{1024}e_0e'\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0}{a'}\Bigg]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); l_0 et h_0

sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\theta+l+h'+g'.$$

Les six formules (E'_{48}), (F'_{48}), (G'_{48}), (H'_{48}), (K_{48}), (L_{48}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (334); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du n° **50**, et nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

$e\cos(h+g-h'-g')$ par

$$\left(\frac{5}{4}e'-\frac{15}{4}\gamma^2e'+\frac{5}{2}e^2e'+\frac{5}{4}e'^3-\frac{45}{4}\gamma^4e'+\frac{25}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{35}{32}e^4e'\right)\frac{a}{a'}$$

$$-\left(\frac{45}{8}e'+\frac{405}{8}\gamma^2e'-\frac{1085}{16}e^2e'+\frac{2775}{128}e'^3\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$+\left(\frac{18515}{512}e'+\frac{123719}{512}\gamma^2e'-\frac{16623}{128}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}$$

$$-\frac{146837}{1536}e'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{1239267263}{1179648}e'\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{5}{32}e'\cdot\frac{a^3}{a'^3}$$

$$+\left[e+\frac{75}{32}ee'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\cos(h+g-h'-g')$$

$$-\left[\left(\frac{25}{16}e^2e'-\frac{5}{16}\gamma^2e^2e'+\frac{35}{32}e^4e'\right)\frac{a}{a'}+\frac{65}{2}e^2e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{96469}{2048}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos2(h+g-h'-g'),$$

$e\sin(h+g-h'-g')$ par

$$e\sin(h+g-h'-g')$$

$$-\left[\left(\frac{25}{16}e^2e'-\frac{5}{16}\gamma^2e^2e'+\frac{35}{32}e^4e'\right)\frac{a}{a'}+\frac{65}{2}e^2e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{96469}{2048}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin2(h+g-h'-g'),$$

a par

$$a\left\{1+\left[\left(\frac{5345}{64}ee'-\frac{34125}{64}\gamma^2ee'-\frac{1515}{32}e^3e'\right)\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a}{a'}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{10375}{128}ee'\frac{n'^5}{n^5}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{20181815}{8192}ee'\frac{n'^6}{n^6}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g-h'-g')\right\},$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\left(\frac{5}{4}\gamma^2ee'-\frac{15}{4}\gamma^4ee'+\frac{35}{16}\gamma^2e^3e'\right)\frac{a}{a'}-\frac{45}{8}\gamma^2ee'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{18515}{512}\gamma^2ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g-h'-g'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\left[\left(\frac{25}{8}ee'-\frac{45}{8}\gamma^2ee'+\frac{5}{2}e^3e'+\frac{25}{8}ee'^3\right)\frac{a}{a'}\right.$$
$$-\left(\frac{495}{16}ee'+\frac{3645}{16}\gamma^2ee'-\frac{9315}{64}e^3e'\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}$$
$$\left.+\frac{265255}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{2628001}{3072}ee'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(h+g-h'-g'),$$

h par

$$h+\left[\left(\frac{15}{8}ee'+\frac{45}{4}\gamma^2ee'+\frac{5}{32}e^3e'\right)\frac{a}{a'}+\frac{405}{16}ee'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{146219}{1024}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(h+g-h'-g').$$

Formules qui s'en déduisent.

On remplace

e^2 par

$$e^2+\left(\frac{25}{16}e'^2-\frac{75}{8}\gamma^2e'^2+\frac{275}{32}e^2e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}-\frac{225}{16}e'^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{124975}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$
$$+\left[\left(\frac{5}{2}ee'-\frac{15}{2}\gamma^2ee'+\frac{15}{8}e^3e'\right)\frac{a}{a'}-\frac{45}{4}ee'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}+\frac{18515}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g-h'-g');$$

$e^2\cos 2(h+g-h'-g')$* par

$$\frac{25}{16}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{225}{16}e'^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* *Voir* à la fin de ce chapitre une note dans laquelle se trouve expliqué l'usage de cette formule et des suivantes.

$$+\left[\left(\frac{5}{2}ee' - \frac{15}{2}\gamma^2 ee' + 5e^3e' + \frac{5}{2}ee'^3\right)\frac{a}{a'}\right.$$

$$-\left(\frac{45}{4}ee' + \frac{405}{4}\gamma^2 ee' - \frac{1085}{8}e^3e'\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a}$$

$$\left.+\frac{18515}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} - \frac{146837}{768}ee'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos(h+g-h'-g')$$

$$+e^2\cos 2(h+g-h'-g')$$

$$-\left[\frac{25}{8}e^3e'\cdot\frac{a}{a'} + 65e^3e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cos 3(h+g-h'-g'),$$

$e^2\sin 2(h+g-h'-g')$ par

$$\left[\left(\frac{5}{2}ee' - \frac{15}{2}\gamma^2 ee' + 5e^3e' + \frac{5}{2}ee'^3\right)\frac{a}{a'} - \left(\frac{45}{4}ee' + \frac{405}{4}\gamma^2 ee' - \frac{1085}{8}e^3e'\right)\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right.$$

$$\left.+\frac{18515}{256}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'} - \frac{146837}{768}ee'\frac{n'^3}{n^3}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin(h+g-h'-g')$$

$$+e^2\sin 2(h+g-h'-g')$$

$$-\left[\frac{25}{8}e^3e'\cdot\frac{a}{a'} + 65e^3e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}\right]\sin 3(h+g-h'-g'),$$

$e^3\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(h+g-h'-g')$ par

$$\frac{75}{16}ee'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(h+g-h'-g')$$

$$+\left[\left(\frac{15}{4}e^2e' - \frac{45}{4}\gamma^2e^2e' + \frac{15}{2}e^4e'\right)\frac{a}{a'} - \frac{135}{8}e^2e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'} + \frac{55545}{512}e^2e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}2(h+g-h'-g')$$

$$+e^3\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}3(h+g-h'-g')$$

$$-\frac{75}{16}e^4e'\cdot\frac{a}{a'}\cdot\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}4(h+g-h'-g').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si, après avoir déduit des formules (E'_{48}), (F'_{48}) la valeur de e^2 en fonction de t, on introduit cette valeur, ainsi que celles de a et γ^2 données par les formules (G'_{48}), (H'_{48}), dans les expressions de L, G, H, en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0, et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 753)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{25}{32}e'^2-\frac{75}{16}\gamma^2e'^2+\frac{325}{64}e^2e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}+\frac{225}{32}e'^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{113725}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\},$$

$$G_1=\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{5}{4}ee'-\frac{15}{4}\gamma^2ee'+\frac{25}{16}e^3e'\right)\frac{a}{a'}+\frac{45}{8}ee'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{14015}{512}ee'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 753)

$$+\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{25}{32}e'^2-\frac{25}{4}\gamma^2e'^2+\frac{325}{64}e^2e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}+\frac{225}{32}e'^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}-\frac{113725}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

D'ailleurs, en calculant θ_1 à l'aide de la première formule (41), on trouve

$$\theta_1=\frac{1}{e}\left\{-\left(\frac{5}{4}e'-\frac{15}{4}\gamma^2e'+\frac{65}{16}e^2e'\right)\frac{a}{a'}+\frac{45}{8}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a}{a'}-\frac{18515}{512}e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a}{a'}\right\}.$$

De là on conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1G_1+2\theta_2G_2+\ldots)=$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{25}{32}e'^2-\frac{75}{16}\gamma^2e'^2+\frac{225}{64}e^2e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}-\frac{225}{32}e'^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{113725}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 771 et 772) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 48ᵉ opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (334) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [48. . . . 1,334].

Ensuite les nouvelles valeurs de G, H seront

$$
\begin{aligned}
G = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{675}{32}\gamma^4 e^2 + \frac{225}{32}\gamma^2 e^4 - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& + \left(\frac{675}{128}e^2 - \frac{2025}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& + \left(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 + \frac{147261}{4096}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 - \frac{175059}{512}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{3035787}{16384}e^4 + \frac{257925}{2048}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 + \frac{2954417}{12288}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \left(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 + \frac{497099911}{393216}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{25}{16}e^2 e'^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{5625}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4} \cdot \frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{675}{32}\gamma^4 e^2 + \frac{1575}{128}\gamma^2 e^4 - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& + \left(\frac{675}{128}e^2 - \frac{2025}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& + \left(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 + \frac{147261}{4096}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{1389}{32}\gamma^4 - \frac{191227}{512}\gamma^2 e^2 + \frac{2805}{64}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad \left. - \frac{3035787}{16384}e^4 + \frac{257925}{2048}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{79}{16} + \frac{55}{48}\gamma^2 + \frac{2954417}{12288}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \left(\frac{153}{8} + \frac{3245}{96}\gamma^2 + \frac{497099911}{393216}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} \\
& + \left(\frac{25}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{25}{16}e^2 e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2} + \left(\frac{225}{256}\gamma^2 + \frac{5625}{1024}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4} \cdot \frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Quant à la valeur de L, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40ᵉ opération (page 685). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{ 1 - e^2 + \Big(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 + \frac{225}{64}e^2 + \frac{325}{32}e'^2 + \frac{675}{16}\gamma^4 - \frac{225}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{325}{8}\gamma^2 e'^2$$
$$- \frac{1125}{64}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+ \Big(\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 + \frac{675}{128}e^2 + \frac{4675}{128}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+ \Big(\frac{316927}{2048} - \frac{305493}{256}\gamma^2 - \frac{1425967}{4096}e^2 + \frac{660735}{1024}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+ \frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{25}{8}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2 ne}\Big\{ 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6$$
$$+ \Big(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 - \frac{675}{64}e^2 + \frac{325}{32}e'^2 + \frac{675}{16}\gamma^4 + \frac{675}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{325}{8}\gamma^2 e'^2$$
$$+ \frac{225}{128}e^4 - \frac{1425}{64}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+ \Big(\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 - \frac{675}{64}e^2 + \frac{4675}{128}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+ \Big(\frac{316927}{2048} - \frac{305493}{256}\gamma^2 - \frac{3606567}{4096}e^2 + \frac{660735}{1024}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+ \frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{25}{8}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{H}} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{\Big(\frac{225}{32}e^2 - \frac{675}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{64}e^4 + \frac{325}{32}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{63777}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2 n\gamma}\Big\{\Big(\frac{225}{64}\gamma^2 - \frac{225}{16}\gamma^4 + \frac{675}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{325}{64}\gamma^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{675}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{279519}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\mathrm{G}} = \frac{1}{4a^2 n\gamma}\Big\{ 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 - \gamma^4 e^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{3}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{5}{16}e^6$$
$$- \Big(\frac{225}{16}\gamma^2 - \frac{225}{4}\gamma^4 + \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{325}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{675}{256}e^4\Big)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{675}{32}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+ \Big(\frac{217}{64} - \frac{235711}{1024}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+ \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{225}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{d\text{H}} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 - \left(\frac{225}{16}\gamma^2e^2 - \frac{675}{256}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$

$$+\left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$\left. + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{225}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{d\text{L}}$, $\frac{da}{d\text{G}}$, $\frac{da}{d\text{H}}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 41^e opération (page 702).

49^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (63) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (63)*, dans lequel l'argument est $2g$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\text{R} = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2e'^2 + \frac{9}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 + \frac{9}{4}\gamma^4e^2\right.$$

$$+ \frac{9}{4}\gamma^4e'^2 - \frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2$$

$$+\left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2e^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left. + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (63), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante-huit premières opérations.

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{5515}{192}-\frac{635}{6}\gamma^2-\frac{6380965}{12288}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}\\
&\qquad+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{15}{128}e'^2+\frac{225}{512}\frac{n'}{n}-\frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\\
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{15}{4}\gamma^4e^2+\frac{45}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{45}{8}\gamma^4e^2e'^2\\
&\qquad+\left(\frac{135}{32}\gamma^2e^2-\frac{495}{32}\gamma^4e^2-\frac{135}{64}\gamma^2e^4+\frac{495}{32}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\\
&\qquad+\left(\frac{1359}{256}\gamma^2e^2-\frac{5607}{256}\gamma^4e^2-\frac{3689}{512}\gamma^2e^4+\frac{26991}{512}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&\qquad+\frac{91407}{1024}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{734729}{16384}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{945}{64}\gamma^2e^2\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\cos 2g.
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=0,\qquad i'=2,\qquad i''=0,\qquad i'''=0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt}=0,\qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt}=0.$$

L et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e. En les résolvant, on trouve

$$
(\mathrm{A}_{39})\left\{
\begin{aligned}
a=\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{1&-\left[\frac{13}{32}-\frac{15}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}-\frac{527}{16}e^2+\frac{195}{64}e'^2-\frac{15}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2+\frac{3633}{64}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{225}{32}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e'^2-\frac{795}{128}e^4-\frac{7905}{32}e^2e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^6}\\
&-\left[\frac{79}{8}-\frac{167}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}-\frac{2757}{16}e^2+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\\
&-\left[\frac{153}{4}-\frac{895}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}-\frac{836311}{1024}e^2+\frac{240085}{256}e'^2\right]\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\\
&-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}-\frac{99670013}{221184}\frac{n'^8\mathrm{L}^{24}}{\mu^{16}}-\frac{4431}{1024}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(\mathrm{B}_{49})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = {} & \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\left\{1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{115}{32}\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{1531}{96}\,\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\\
& -\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{16}e^4-\frac{5}{32}e^6+\left[\frac{225}{128}e^2-\frac{225}{64}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2+\frac{675}{512}e^4+\frac{325}{128}e^2e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
& +\left[\frac{675}{256}e^2-\frac{2025}{128}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2+\frac{675}{128}e^4+\frac{4675}{512}e^2e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{208733}{8192}e^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{4009585}{24576}e^2\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} = \mathrm{L}\Big\{ & 1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6\\
& +\left[\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{32}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2+\frac{225}{256}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
& +\left[\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{64}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2+\frac{2025}{256}e^4+\frac{4675}{256}e^2e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{4107569}{12288}e^2\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\Big\};
\end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{G}}{dt}=\dfrac{d\mathrm{R}}{dg}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{49})\left\{\begin{aligned}
\frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{15}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2-\frac{15}{4}e^4-\frac{15}{4}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2e^2+\frac{15}{4}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^4+\frac{45}{4}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2e'^2\\
& -\frac{15}{8}e^6-\frac{45}{8}e^4e'^2-\frac{15}{8}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2e^4-\frac{45}{8}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2e^2e'^2+\frac{45}{16}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^6\\
& +\frac{45}{8}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^4e'^2-\frac{45}{32}e^8-\frac{45}{16}e^6e'^2\\
& +\Big[\frac{135}{16}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2-\frac{135}{32}e^4-\frac{495}{32}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2e^2+\frac{45}{4}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^4\\
& \qquad\qquad +\frac{495}{16}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2e'^2-\frac{45}{16}e^6-\frac{495}{32}e^4e'^2\Big]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
& +\Big[\frac{8109}{128}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2-\frac{1359}{256}e^4-\frac{39357}{256}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2e^2+\frac{959}{128}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^4\\
& \qquad\qquad +\frac{66741}{256}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2e'^2+\frac{3581}{512}e^6-\frac{26991}{512}e^4e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
& +\left[\frac{81141}{256}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2-\frac{91407}{1024}e^4\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
& +\left[\frac{11766449}{8192}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2-\frac{905609}{16384}e^4\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\left[\frac{945}{32}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2-\frac{945}{64}e^4\right]\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\sin\theta.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dg}{dt} = -2\frac{dR}{dG};$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dG}$, $\frac{de}{dG}$, $\frac{d\gamma}{dG}$, qui doivent être employées après la 48^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$(D_{19})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{n'^2 L^3}{\mu^2}\Bigg\{ & 3 - \frac{15}{2}\frac{L-H}{L} + 6e^2 + \frac{9}{2}e'^2 + \frac{15}{4}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 - \frac{45}{4}\frac{L-H}{L}e^2 - \frac{45}{4}\frac{L-H}{L}e'^2 \\
& + \frac{57}{8}e^4 + 9e^2e'^2 + \left[\frac{225}{16} - \frac{225}{8}\frac{L-H}{L} + \frac{225}{32}e^2 + \frac{825}{16}e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{3963}{64} - \frac{2247}{16}\frac{L-H}{L} - \frac{1665}{64}e^2 + \frac{58695}{128}e'^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4} \\
& \qquad + \frac{281301}{1024}\frac{n'^3L^9}{\mu^6} + \frac{4823821}{4096}\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{8}\frac{L^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\} \\
+ \frac{n'^2L^3}{\mu^2}\Bigg\{ & \frac{15}{2}\frac{L-H}{L} - \frac{15}{2}e^2 - \frac{15}{4}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 + \frac{45}{4}\frac{L-H}{L}e^2 + \frac{45}{4}\frac{L-H}{L}e'^2 \\
& - \frac{15}{2}e^4 - \frac{45}{4}e^2e'^2 - \frac{45}{8}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2e^2 - \frac{45}{8}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2e'^2 + \frac{225}{16}\frac{L-H}{L}e^4 \\
& + \frac{135}{8}\frac{L-H}{L}e^2e'^2 - \frac{135}{16}e^6 - \frac{45}{4}e^4e'^2 \\
& + \left[\frac{135}{16}\frac{L-H}{L} - \frac{135}{16}e^2 - \frac{495}{32}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 + \frac{855}{32}\frac{L-H}{L}e^2\right. \\
& \qquad \left. + \frac{495}{16}\frac{L-H}{L}e'^2 - \frac{675}{64}e^4 - \frac{495}{16}e^2e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{8109}{128}\frac{L-H}{L} - \frac{1359}{128}e^3 - \frac{39357}{256}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 + \frac{11945}{256}\frac{L-H}{L}e^2\right. \\
& \qquad \left. + \frac{66741}{256}\frac{L-H}{L}e'^2 + \frac{1173}{64}e^4 - \frac{26991}{256}e^2e'^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{81141}{256}\frac{L-H}{L} - \frac{91407}{512}e^2\right]\frac{n'^3L^9}{\mu^6} \\
& + \left[\frac{11766449}{8192}\frac{L-H}{L} - \frac{905609}{8192}e^2\right]\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8} + \left[\frac{945}{32}\frac{L-H}{L} - \frac{945}{32}e^2\right]\frac{L^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{49}), (D_{49}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\,G\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$
(\mathrm{E}_{49})\left\{
\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 - \Big\{ & \frac{5}{2}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2 - \frac{5}{4}\,e_0^4 + 5\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{55}{8}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^4 + \frac{15}{8}\,e_0^6 \\
& + \frac{75}{8}\left(\frac{L-H}{L}\right)^3 e_0^2 - \frac{395}{16}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^4 + \frac{265}{16}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^6 - \frac{205}{64}\,e_0^8 \\
& - \Big[\frac{285}{32}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2 - \frac{285}{64}\,e_0^4 + \frac{1755}{64}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{1515}{32}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^4 \\
& \qquad\qquad + \frac{1235}{64}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2\,e'^2 + \frac{1005}{64}\,e_0^6 - \frac{1235}{128}\,e_0^4\,e'^2\Big]\frac{n'\,L^3}{\mu^2} \\
& + \Big[\frac{5767}{512}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2 + \frac{3233}{1024}\,e_0^4 + \frac{9161}{256}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{407779}{6144}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^4 \\
& \qquad\qquad - \frac{35119}{512}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2\,e'^2 + \frac{59273}{6144}\,e_0^6 + \frac{48119}{1024}\,e_0^4\,e'^2\Big]\frac{n'^2\,L^6}{\mu^4} \\
& + \Big[\frac{63579}{8192}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2 - \frac{360579}{16384}\,e_0^4\Big]\frac{n'^3\,L^9}{\mu^6} \\
& + \Big[\frac{17316885}{393216}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2 + \frac{80613555}{786432}\,e_0^4\Big]\frac{n'^4\,L^{12}}{\mu^8} \\
& \qquad\qquad + \Big[\frac{165}{32}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2 - \frac{165}{64}\,e_0^4\Big]\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\cos\theta_0\,(t+c) \\
+ \Big\{ & \frac{75}{32}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^4 - \frac{75}{32}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^6 + \frac{75}{128}\,e_0^8\Big\}\cos 2\,\theta_0\,(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{49})\left\{
\begin{aligned}
\theta = \theta_0\,(t+c) & \\
+ \Big\{ & \frac{5}{2}\,\frac{L-H}{L} - \frac{5}{2}\,e_0^2 + 5\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 - \frac{25}{2}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^2 + 5\,e_0^4 + \frac{425}{32}\left(\frac{L-H}{L}\right)^3 \\
& - \frac{3625}{64}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 + \frac{7205}{128}\,\frac{L-H}{L}\,e_0^4 - \frac{1975}{128}\,e_0^6
\end{aligned}
\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\left[\frac{285}{32}\,\frac{L-H}{L}-\frac{285}{32}e_0^2+\frac{1755}{64}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2-\frac{5775}{64}\,\frac{L-H}{L}e_0^2\right.$$

$$\left.+\frac{1235}{64}\,\frac{L-H}{L}e'^2+\frac{5745}{128}e_0^4-\frac{1235}{64}e_0^2e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2}$$

$$+\left[\frac{5767}{512}\,\frac{L-H}{L}+\frac{3233}{512}e_0^2+\frac{9161}{256}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2-\frac{195239}{1536}\,\frac{L-H}{L}e_0^2\right.$$

$$\left.-\frac{35119}{512}\,\frac{L-H}{L}e'^2+\frac{31253}{1024}e_0^4+\frac{48119}{512}e_0^2e'^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4}$$

$$+\left[\frac{63579}{8192}\,\frac{L-H}{L}-\frac{360579}{8192}e_0^2\right]\frac{n'^3L^9}{\mu^6}$$

$$+\left[\frac{17316885}{393216}\,\frac{L-H}{L}+\frac{80613555}{393216}e_0^2\right]\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}$$

$$(F_{19})\qquad+\left[\frac{165}{32}\,\frac{L-H}{L}-\frac{165}{32}e_0^2\right]\frac{L^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c)$$

$$+\Bigg\{\frac{25}{16}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2-\frac{25}{16}\,\frac{L-H}{L}e_0^2+\frac{25}{32}e_0^4+\frac{25}{4}\left(\frac{L-H}{L}\right)^3-\frac{225}{16}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2e_0^2$$

$$+\frac{775}{64}\,\frac{L-H}{L}e_0^4-\frac{225}{64}e_0^6$$

$$-\left[\frac{1425}{128}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2-\frac{1425}{128}\,\frac{L-H}{L}e_0^2+\frac{1425}{256}e_0^4\right]\frac{n'L^3}{\mu^2}$$

$$+\left[\frac{138895}{4096}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2-\frac{93895}{4096}\,\frac{L-H}{L}e_0^2+\frac{48895}{8192}e_0^4\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4}\Bigg\}\sin2\theta_0(t+c)$$

$$+\Bigg\{\frac{125}{64}\left(\frac{L-H}{L}\right)^3-\frac{375}{128}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2e_0^2+\frac{375}{256}\,\frac{L-H}{L}e_0^4-\frac{125}{256}e_0^6\Bigg\}\sin3\theta_0(t+c).$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0=\frac{n'^2L^3}{\mu^2}\Bigg\{3-\frac{15}{2}\,\frac{L-H}{L}+6e_0^2+\frac{9}{2}e'^2-\frac{45}{8}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2+\frac{135}{8}\,\frac{L-H}{L}e_0^2-\frac{45}{4}\,\frac{L-H}{L}e'^2$$

$$-\frac{111}{16}e_0^4+9e_0^2e'^2+\left[\frac{225}{16}-\frac{225}{8}\,\frac{L-H}{L}+\frac{225}{32}e_0^2+\frac{825}{16}e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2}$$

$$+\left[\frac{3963}{64}-\frac{2247}{16}\,\frac{L-H}{L}-\frac{1665}{64}e_0^2+\frac{58695}{128}e'^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4}$$

$$+\frac{281301}{1024}\,\frac{n'^3L^9}{\mu^6}+\frac{4823821}{4096}\,\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}+\frac{45}{8}\,\frac{L^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}.$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{49}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{49}), (B_{49}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$
(G_{49})\quad
\begin{aligned}
a = \frac{L^2}{\mu}\Big\{ 1 - \Big[& \frac{13}{32} - \frac{15}{16}\frac{L-H}{L} - \frac{527}{16} e_0^2 + \frac{195}{64} e'^2 - \frac{15}{64}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 + \frac{3633}{64}\frac{L-H}{L} e_0^2 \\
& - \frac{225}{32}\frac{L-H}{L} e'^2 - \frac{795}{128} e_0^4 - \frac{7905}{32} e_0^2 e'^2 \Big] \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& - \Big[\frac{79}{8} - \frac{167}{8}\frac{L-H}{L} - \frac{2757}{16} e_0^2 + \frac{2133}{16} e'^2 \Big] \frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \\
& - \Big[\frac{153}{4} - \frac{895}{16}\frac{L-H}{L} - \frac{836311}{1024} e_0^2 + \frac{240085}{256} e'^2 \Big] \frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \\
& - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}} - \frac{99670013}{221184}\frac{n'^8 L^{24}}{\mu^{16}} - \frac{4431}{1024}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \cdot \frac{L^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \\
- \frac{L^2}{\mu}\Big\{ \Big[& \frac{2635}{32}\frac{L-H}{L} e_0^2 - \frac{2635}{64} e_0^4 + \frac{2915}{128}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{31855}{256}\frac{L-H}{L} e_0^4 \\
& + \frac{39525}{64}\frac{L-H}{L} e_0^2 e'^2 + \frac{11835}{256} e_0^6 - \frac{39525}{128} e_0^4 e'^2 \Big] \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& + \Big[\frac{70365}{512}\frac{L-H}{L} e_0^2 - \frac{70365}{1024} e_0^4 \Big] \frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \\
& + \Big[\frac{7193509}{8192}\frac{L-H}{L} e_0^2 - \frac{2450509}{16384} e_0^4 \Big] \frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \Big\} \cos\theta_0 (t+c);
\end{aligned}
$$

$$
(H_{49})\quad
\begin{aligned}
\gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{L-H}{L}\Big\{ & 1 + \frac{1}{2} e_0^2 + \frac{3}{8} e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{96}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \Big\} \\
& - \frac{1}{4} e_0^2 - \frac{3}{16} e_0^4 - \frac{5}{32} e_0^6 + \Big[\frac{225}{128} e_0^2 - \frac{225}{64}\frac{L-H}{L} e_0^2 + \frac{675}{512} e_0^4 + \frac{325}{128} e_0^2 e'^2 \Big] \frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& + \Big[\frac{675}{256} e_0^2 - \frac{2025}{128}\frac{L-H}{L} e_0^2 + \frac{675}{128} e_0^4 + \frac{4675}{512} e_0^2 e'^2 \Big] \frac{n'^3 L^9}{\mu^6} + \frac{208733}{8192} e_0^2 \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& + \frac{4009585}{24576} e_0^2 \frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \\
& + \Big\{ \frac{5}{8}\frac{L-H}{L} e_0^2 - \frac{5}{16} e_0^4 + \frac{5}{8}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{15}{32}\frac{L-H}{L} e_0^4 + \frac{35}{32}\left(\frac{L-H}{L}\right)^3 e_0^2 \\
& \quad - \frac{225}{64}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^4 + \frac{175}{64}\frac{L-H}{L} e_0^6 - \frac{175}{256} e_0^8
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(\mathrm{H}_{19})\left\{
\begin{aligned}
&-\left[\frac{285}{128}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2-\frac{285}{256}\,e_0^4+\frac{1185}{256}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2 e_0^2-\frac{945}{128}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^4\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1235}{256}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2\,e'^2+\frac{1155}{512}\,e_0^6-\frac{1235}{512}\,e_0^4\,e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&-\left[\frac{3233}{2048}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2-\frac{12233}{4096}\,e_0^4-\frac{12555}{2048}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2 e_0^2\right.\\
&\qquad+\frac{296371}{24576}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)e_0^4+\frac{48119}{2048}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2\,e'^2-\frac{44185}{12288}\,e_0^6\\
&\qquad\qquad\qquad\left.-\frac{61119}{4096}\,e_0^4\,e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&+\left[\frac{360579}{32768}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2-\frac{657579}{65536}\,e_0^4\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&-\left[\frac{77080755}{1572864}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2-\frac{126411195}{3145728}\,e_0^4\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad+\left[\frac{165}{128}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2-\frac{165}{256}\,e_0^4\right]\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)\\
&-\left\{\frac{75}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2 e_0^4-\frac{75}{64}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^6+\frac{75}{256}\,e_0^8\right\}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0=\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{1-&\left[\frac{13}{32}-\frac{15}{16}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}-\frac{527}{16}\,e_0^2+\frac{195}{64}\,e'^2-\frac{15}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2+\frac{3633}{64}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{225}{32}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e'^2-\frac{795}{128}\,e_0^4-\frac{7905}{32}\,e_0^2\,e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
-&\left[\frac{79}{8}-\frac{167}{8}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}-\frac{2757}{16}\,e_0^2+\frac{2133}{16}\,e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\\
-&\left[\frac{153}{4}-\frac{895}{16}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}-\frac{836311}{1024}\,e_0^2+\frac{240085}{256}\,e'^2\right]\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\\
&\qquad-\frac{22441}{144}\,\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}-\frac{99670013}{221184}\,\frac{n'^8\mathrm{L}^{24}}{\mu^{16}}-\frac{4431}{1024}\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_0^2=\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}&\left\{1+\frac{1}{2}\,e_0^2+\frac{3}{8}\,e_0^4+\frac{115}{32}\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{1531}{96}\,\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\right\}\\
&-\frac{1}{4}\,e_0^2-\frac{3}{16}\,e_0^4-\frac{5}{32}\,e_0^6+\left[\frac{225}{128}\,e_0^2-\frac{225}{64}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2+\frac{675}{512}\,e_0^4+\frac{325}{128}\,e_0^2\,e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&+\left[\frac{675}{256}\,e_0^2-\frac{2025}{128}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\,e_0^2+\frac{675}{128}\,e_0^4+\frac{4675}{512}\,e_0^2\,e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{208733}{8192}\,e_0^2\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{4009585}{24576}\,e_0^2\,\frac{n'^5\mathrm{L}^{10}}{\mu^{10}}.
\end{aligned}
$$

De ces relations nous pouvons tirer L et H en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et H par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{49}), (F_{49}), (G_{49}), (H_{49}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{49})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 - \Big[& 5\gamma_0^2 e_0^2 + 20\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{25}{4}\gamma_0^2 e_0^4 + 75\gamma_0^6 e_0^2 - \frac{125}{2}\gamma_0^4 e_0^4 + \frac{25}{16}\gamma_0^2 e_0^6 \\ & - \left(\frac{285}{16}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{1755}{16}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{195}{4}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{1235}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\ & + \left(\frac{5767}{256}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{9161}{64}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{330517}{3072}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{35119}{256}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \frac{63579}{4096}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{13784085}{196608}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{165}{16}\gamma_0^2 e_0^2 \cdot \frac{a_0^2}{a'^2}\Big] \cos\theta_0(t+c) \\ & + \frac{75}{8}\gamma_0^4 e_0^4 \cos 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(F'_{49})\left\{\begin{aligned} \theta = \theta_0(t+c) & \\ + \Big[& 5\gamma_0^2 - \frac{5}{4}e_0^2 + 20\gamma_0^4 - \frac{35}{2}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{5}{16}e_0^4 + \frac{425}{4}\gamma_0^6 - \frac{1335}{8}\gamma_0^4 e_0^2 \\ & + \frac{915}{32}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{145}{256}e_0^6 \\ & - \left(\frac{285}{16}\gamma_0^2 - \frac{285}{64}e_0^2 + \frac{1755}{16}\gamma_0^4 - \frac{4305}{32}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{1235}{32}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{495}{64}e_0^4 \right. \\ & \qquad \left. - \frac{1235}{128}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\ & + \left(\frac{5767}{256}\gamma_0^2 + \frac{3233}{1024}e_0^2 + \frac{9161}{64}\gamma_0^4 - \frac{351847}{1536}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{35119}{256}\gamma_0^2 e'^2 \right. \\ & \qquad \left. + \frac{126313}{12288}e_0^4 + \frac{48119}{1024}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \left(\frac{63579}{4096}\gamma_0^2 - \frac{360579}{16384}e_0^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} + \left(\frac{13784085}{196608}\gamma_0^2 + \frac{80613555}{786432}e_0^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4} \\ & + \left(\frac{165}{16}\gamma_0^2 - \frac{165}{64}e_0^2\right)\frac{a_0^2}{a'^2}\Big] \sin\theta_0(t+c) \\ + \Big[& \frac{25}{4}\gamma_0^4 + \frac{25}{64}e_0^4 + 50\gamma_0^6 - 25\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{25}{4}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{25}{128}e_0^6 \\ & - \left(\frac{1425}{32}\gamma_0^4 + \frac{1425}{512}e_0^4\right)\frac{n'}{n_0} + \left(\frac{138895}{1024}\gamma_0^4 + \frac{48895}{16384}e_0^4\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\Big] \sin 2\theta_0(t+c) \\ + \Big[& \frac{125}{12}\gamma_0^6 - \frac{125}{768}e_0^6\Big] \sin 3\theta_0(t+c); \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{19})\left\{\begin{aligned} a = a_0 \Big\{ 1 - \Big[\Big(&\frac{2635}{16}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{2915}{32}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{36565}{128}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{39525}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} \\ &+ \frac{70365}{256}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{7193509}{4096}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^6}{n_0^6} \Big] \cos\theta_0(t+c) \Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}'_{19})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big[&\frac{5}{4}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{5}{2}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{5}{16}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{35}{4}\gamma_0^6 e_0^2 - 10\gamma_0^4 e_0^4 + \frac{5}{64}\gamma_0^2 e_0^6 \\ &- \Big(\frac{285}{64}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{1185}{64}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{495}{64}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{1235}{128}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'}{n_0} \\ &- \Big(\frac{3233}{1024}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{12555}{512}\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{126313}{12288}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{48119}{1024}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ &+ \frac{360579}{16384}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{80613555}{786432}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{165}{64}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{a_0^2}{a'^2} \Big] \cos\theta_0(t+c) \\ - \frac{75}{16}&\gamma_0^4 e_0^4 \cos 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\begin{aligned} \theta_0 = \frac{n'^2}{n_0} \Big[3 &- 15\gamma_0^2 + \frac{9}{4}e_0^2 + \frac{9}{2}e'^2 - \frac{45}{2}\gamma_0^4 + 30\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{45}{2}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{27}{32}e_0^4 + \frac{27}{8}e_0^2 e'^2 \\ &+ \Big(\frac{225}{16} - \frac{225}{4}\gamma_0^2 - \frac{225}{32}e_0^2 + \frac{825}{16}e'^2 \Big) \frac{n'}{n_0} \\ &+ \Big(\frac{3963}{64} - \frac{2247}{8}\gamma_0^2 - \frac{8943}{128}e_0^2 + \frac{58695}{128}e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{281301}{1024}\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{4831309}{4096}\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{45}{8}\frac{a_0^2}{a'^2} \Big]. \end{aligned}$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} \Big[1 &- \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 \\ &+ \Big(\frac{675}{32}e^2 - \frac{1125}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{2475}{32}e^2 e'^2 \Big) \frac{n'}{n} \\ &- \Big(\frac{451}{64} - \frac{207}{8}\gamma^2 - \frac{11325}{128}e^2 + \frac{6765}{128}e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2} \end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\left(\frac{787}{32}-\frac{717}{8}\gamma^2-\frac{219075}{512}e^2+\frac{21249}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4}-\frac{77029}{288}\frac{n'^5}{n^5}+\left(\frac{9}{8}+\frac{2475}{512}\frac{n'}{n}\right)\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]$$

$$-\frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{15}{2}\gamma^2 e^2-\frac{15}{4}\gamma^4 e^2-\frac{15}{16}\gamma^2 e^4+\frac{45}{4}\gamma^2 e^2 e'^2$$

$$+\left(\frac{675}{32}\gamma^2 e^2-\frac{495}{8}\gamma^4 e^2-\frac{1215}{128}\gamma^2 e^4+\frac{2475}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\frac{12843}{64}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1552227}{1024}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta,$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{8}e'^2-3\gamma^2 e^2-\frac{9}{4}\gamma^2 e'^2+\frac{27}{32}e^4+\frac{9}{4}e^2 e'^2+\frac{225}{32}e^2\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{51}{32}-\frac{165}{32}\gamma^2-\frac{3309}{128}e^2+\frac{765}{64}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{203}{32}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{17567}{768}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{45}{32}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]$$

$$+\frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{15}{8}e^2-\frac{15}{4}\gamma^2 e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{45}{16}e^2 e'^2-\frac{15}{8}\gamma^2 e^4-\frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'^2+\frac{45}{64}e^6+\frac{45}{32}e^4 e'^2$$

$$+\left(\frac{135}{64}e^2-\frac{495}{32}\gamma^2 e^2+\frac{495}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{1359}{512}e^2-\frac{19107}{256}\gamma^2 e^2-\frac{1165}{512}e^4+\frac{26991}{1024}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\frac{91407}{2048}e^3\frac{n'^3}{n^3}+\frac{943049}{32768}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{945}{128}e^2\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta,$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{49}), (F'_{49}), (G'_{49}), (H'_{49}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{49})\left\{\begin{aligned}&h+g+l=(h)+(l)+\left(\frac{1}{2}\theta_0+h_0+l_0\right)(t+c)\\&\qquad+\Bigg[\frac{5}{4}\gamma_0^2 e_0^2+10\gamma_0^4 e_0^2-\frac{25}{16}\gamma_0^2 e_0^4\\&\qquad\quad+\left(\frac{285}{32}\gamma_0^2 e_0^2+\frac{1755}{64}\gamma_0^4 e_0^2-\frac{2835}{256}\gamma_0^2 e_0^4+\frac{1235}{64}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\\&\qquad\quad-\frac{37835}{1024}\gamma_0^2 e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}-\frac{218829}{2048}\gamma_0^2 e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}\Bigg]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{L}_{49})\left\{
\begin{aligned}
h = {} & (h) + h_0(t+c) \\
& + \Big[\frac{5}{8}e_0^2 + 5\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{5}{32}e_0^4 + \frac{575}{16}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{85}{8}\gamma_0^2 e_0^4 + \frac{145}{512}e_0^6 \\
& \qquad - \left(\frac{285}{128}e_0^2 + \frac{1755}{64}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{495}{128}e_0^4 + \frac{1235}{256}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\
& \qquad - \left(\frac{3233}{2048}e_0^2 - \frac{4661}{256}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{126313}{24576}e_0^4 + \frac{48119}{2048}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& \qquad\qquad + \frac{360579}{32768}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{80613555}{1572864}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{165}{128}e_0^2\frac{a_0^2}{a'^2}\Big]\sin\theta_0(t+c) \\
& - \Big[\frac{25}{128}e_0^4 + \frac{25}{8}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{25}{256}e_6^6 - \frac{1425}{1024}e_0^4\frac{n'}{n_0} + \frac{48895}{32768}e_0^4\frac{n'^2}{n_0^2}\Big]\sin 2\theta_0(t+c) \\
& + \frac{125}{1536}e_0^6 \sin 3\theta_0(t+c).
\end{aligned}
\right.
$$

(h) et (l) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); h_0 et l_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + h + l.$$

Les six formules (E'_{49}), (F'_{49}), (G'_{49}), (H'_{49}), (K_{49}), (L_{49}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (63); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du n° **30**, et si nous remarquons que l est égal à

$$-\frac{1}{2}\theta + (h+g+l) - h,$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$
a\left\{1 - \left[\left(\frac{2635}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{2915}{32}\gamma^4 e^2 - \frac{36565}{128}\gamma^2 e^4 + \frac{39525}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} + \frac{70365}{256}\gamma^2 e^2\frac{n'^5}{n^5} + \frac{7193509}{4096}\gamma^2 e^2\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos 2g\right\},
$$

e^2 par

$$
\begin{aligned}
e^2 - \Bigg[& 5\gamma^2 e^2 + 20\gamma^4 e^2 - \frac{25}{4}\gamma^2 e^4 + 75\gamma^6 e^2 - \frac{125}{2}\gamma^4 e^4 + \frac{25}{16}\gamma^2 e^6 \\
& - \left(\frac{285}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{1755}{16}\gamma^4 e^2 - \frac{195}{4}\gamma^2 e^4 + \frac{1235}{32}\gamma^2 e^2 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \\
& + \left(\frac{5767}{256}\gamma^2 e^2 + \frac{9161}{64}\gamma^4 e^2 - \frac{330517}{3072}\gamma^2 e^4 - \frac{35119}{256}\gamma^2 e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad + \frac{63579}{4096}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{13784085}{196608}\gamma^2 e^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{165}{16}\gamma^2 e^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Bigg] \cos 2g \\
+ & \frac{75}{8}\gamma^4 e^4 \cos 4g,
\end{aligned}
$$

γ^2 par

$$
\begin{aligned}
\gamma^2 + \Bigg[& \frac{5}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{5}{2}\gamma^4 e^2 - \frac{5}{16}\gamma^2 e^4 + \frac{35}{4}\gamma^6 e^2 - 10\gamma^4 e^4 + \frac{5}{64}\gamma^2 e^6 \\
& - \left(\frac{285}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{1185}{64}\gamma^4 e^2 - \frac{495}{64}\gamma^2 e^4 + \frac{1235}{128}\gamma^2 e^2 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \\
& - \left(\frac{3233}{1024}\gamma^2 e^2 - \frac{12555}{512}\gamma^4 e^2 + \frac{126313}{12288}\gamma^2 e^4 + \frac{48119}{1024}\gamma^2 e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad + \frac{360579}{16384}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{80613555}{786432}\gamma^2 e^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{165}{64}\gamma^2 e^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Bigg] \cos 2g \\
- & \frac{75}{16}\gamma^4 e^4 \cos 4g,
\end{aligned}
$$

l par

$$
\begin{aligned}
l - \Bigg[& \frac{5}{2}\gamma^2 + 10\gamma^4 - 5\gamma^2 e^2 + \frac{425}{8}\gamma^6 - \frac{115}{2}\gamma^4 e^2 + \frac{335}{64}\gamma^2 e^4 \\
& - \left(\frac{285}{32}\gamma^2 + \frac{1755}{32}\gamma^4 - \frac{495}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{1235}{64}\gamma^2 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \\
& + \left(\frac{5767}{512}\gamma^2 + \frac{9161}{128}\gamma^4 - \frac{91205}{1536}\gamma^2 e^2 - \frac{35119}{512}\gamma^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad + \frac{63579}{8192}\gamma^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{13784085}{393216}\gamma^2 \frac{n'^4}{n^4} + \frac{165}{32}\gamma^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Bigg] \sin 2g \\
- & \left[\frac{25}{8}\gamma^4 + 25\gamma^6 - \frac{25}{2}\gamma^4 e^2 - \frac{1425}{64}\gamma^4 \frac{n'}{n} + \frac{138895}{2048}\gamma^4 \frac{n'^2}{n^2} \right] \sin 4g \\
- & \frac{125}{24}\gamma^6 \sin 6g,
\end{aligned}
$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\Bigg[\frac{5}{4}\gamma^2 e^2+10\gamma^4 e^2-\frac{25}{16}\gamma^2 e^4$$

$$+\left(\frac{285}{32}\gamma^2 e^2+\frac{1755}{64}\gamma^4 e^2-\frac{2835}{256}\gamma^2 e^4+\frac{1235}{64}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\frac{37835}{1024}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{218829}{2048}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\sin 2g,$$

h par

$$h+\Bigg[\frac{5}{8}e^2+5\gamma^2 e^2-\frac{5}{32}e^4+\frac{575}{16}\gamma^4 e^2-\frac{85}{8}\gamma^2 e^4+\frac{145}{512}e^6$$

$$-\left(\frac{285}{128}e^2+\frac{1755}{64}\gamma^2 e^2-\frac{495}{128}e^4+\frac{1235}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{3233}{2048}e^2-\frac{4661}{256}\gamma^2 e^2+\frac{126313}{24576}e^4+\frac{48119}{2048}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\frac{360579}{32768}e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{80613555}{1572864}e^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{165}{128}e^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin 2g$$

$$-\left[\frac{25}{128}e^4+\frac{25}{8}\gamma^2 e^4-\frac{25}{256}e^6-\frac{1425}{1024}e^4\frac{n'}{n}+\frac{48895}{32768}e^4\frac{n'^2}{n^2}\right]\sin 4g$$

$$+\frac{125}{1536}e^6\sin 6g.$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{49}), (G'_{49}), (H'_{49}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 775)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{25}{16}\gamma^4 e^4,$$

$$G_1=\sqrt{a\mu}\left\{\frac{5}{2}\gamma^2 e^2+10\gamma^4 e^2-\frac{15}{8}\gamma^2 e^4-\frac{285}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'}{n}-\frac{3233}{512}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}\right\};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 775)

$$-\sqrt{a\mu}\cdot\frac{75}{16}\gamma^4 e^4.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0\,(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{49}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1\mathrm{G}_1+2\theta_2\mathrm{G}_2+\ldots)=$$

$$\sqrt{a\mu}\left\{\frac{25}{4}\gamma^4e^2-\frac{25}{16}\gamma^2e^4+50\gamma^6e^2-\frac{525}{16}\gamma^4e^4+\frac{25}{16}\gamma^2e^6\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1425}{32}\gamma^4e^2-\frac{1425}{128}\gamma^2e^4\right)\frac{n'}{n}+\left(\frac{93895}{1024}\gamma^4e^2-\frac{48895}{4096}\gamma^2e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 788 à 790) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 49^e^ opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (63) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [49 · · · · 1, 63]. Ensuite les nouvelles valeurs de G, H seront

$$\mathrm{G}=\sqrt{a\mu}\left\{1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{25}{4}\gamma^4e^2-\frac{25}{16}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6+50\gamma^6e^2-\frac{275}{8}\gamma^4e^4+\frac{25}{16}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8\right.$$
$$-\left(\frac{1425}{32}\gamma^4e^2-\frac{1425}{128}\gamma^2e^4\right)\frac{n'}{n}$$
$$+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{256}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2+\frac{115495}{1024}\gamma^4e^2-\frac{20095}{4096}\gamma^2e^4\right.$$
$$\left.-\frac{325}{16}\gamma^2e^2e'^2-\frac{225}{256}e^6-\frac{975}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{4675}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+\left(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4-\frac{175059}{512}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{257925}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{25}{16}e^2e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5625}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\mathrm{H}=\sqrt{a\mu}\Big\{1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{75}{16}\gamma^4e^4+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{256}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2+\frac{675}{32}\gamma^4e^2+\frac{1575}{128}\gamma^2e^4-\frac{325}{16}\gamma^2e^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{225}{256}e^6-\frac{975}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{4675}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{187}{32}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{1389}{32}\gamma^4-\frac{191227}{512}\gamma^2e^2+\frac{2805}{64}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{257925}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}+\frac{55}{48}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{3245}{96}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}$$

$$+\left(\frac{25}{16}\gamma^2e'^2-\frac{25}{16}e^2e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}+\left(\frac{225}{256}\gamma^2+\frac{5625}{1024}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Quant à la valeur de L, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40$^{\text{e}}$ opération (page 685). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{de}{d\mathrm{L}}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-e^2+\frac{25}{2}\gamma^4-\frac{25}{4}\gamma^2e^2+100\gamma^6-150\gamma^4e^2+\frac{275}{16}\gamma^2e^4-\left(\frac{1425}{16}\gamma^4-\frac{1425}{32}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2+\frac{325}{32}e'^2+\frac{205495}{512}\gamma^4-\frac{167695}{1024}\gamma^2e^2-\frac{325}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{1125}{64}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2+\frac{675}{128}e^2+\frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{1425967}{4096}e^2+\frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{25}{8}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{25}{2}\gamma^4 - \frac{25}{2}\gamma^2e^2 + \frac{21}{32}e^4 + 100\gamma^6 - \frac{425}{2}\gamma^4e^2 + \frac{775}{16}\gamma^2e^4 - \frac{27}{32}e^6 \\ & - \left(\frac{1425}{16}\gamma^4 - \frac{1425}{16}\gamma^2e^2 + \frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n} \\ & + \left(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 - \frac{675}{64}e^2 + \frac{325}{32}e'^2 + \frac{205495}{512}\gamma^4 - \frac{128095}{512}\gamma^2e^2 - \frac{325}{8}\gamma^2e'^2\right. \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{108295}{8192}e^4 - \frac{975}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & + \left(\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 - \frac{675}{64}e^2 + \frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\ & + \left(\frac{316927}{2048} - \frac{305493}{256}\gamma^2 - \frac{3606567}{4096}c^2 + \frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & \qquad\qquad + \frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{25}{8}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{ & -\frac{25}{4}\gamma^2e^2 + \frac{25}{32}e^4 - 75\gamma^4e^2 + \frac{275}{8}\gamma^2e^4 - \frac{25}{32}e^6 + \left(\frac{1425}{32}\gamma^2e^2 - \frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n} \\ & + \left(\frac{225}{32}e^2 - \frac{160495}{1024}\gamma^2e^2 + \frac{65095}{8192}e^4 + \frac{325}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{63777}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dL} = \frac{1}{a^2n\gamma}\Big\{ & -\frac{25}{8}\gamma^4 + \frac{25}{16}\gamma^2e^2 - \frac{75}{4}\gamma^6 + \frac{425}{16}\gamma^4e^2 - \frac{175}{64}\gamma^2e^4 + \left(\frac{1425}{64}\gamma^4 - \frac{1425}{128}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n} \\ & + \left(\frac{225}{64}\gamma^2 - \frac{167695}{2048}\gamma^4 + \frac{137095}{4096}\gamma^2e^2 + \frac{325}{64}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{675}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{279519}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dG} = \frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{25}{2}\gamma^4 - \frac{27}{2}\gamma^2e^2 + \frac{37}{32}e^4 + 75\gamma^6 - \frac{625}{4}\gamma^4e^2 + \frac{463}{16}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ & - \left(\frac{1425}{16}\gamma^4 - \frac{1425}{16}\gamma^2e^2 + \frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n} \\ & - \left(\frac{225}{16}\gamma^2 - \frac{167695}{512}\gamma^4 + \frac{101095}{512}\gamma^2e^2 + \frac{325}{16}\gamma^2e'^2 - \frac{70495}{8192}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & - \frac{675}{32}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} + \left(\frac{217}{64} - \frac{235711}{1024}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & \qquad\qquad + \frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{225}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},\end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{25}{4}\gamma^2e^2 + \frac{37}{32}e^4 - \frac{125}{2}\gamma^4e^2 + \frac{175}{8}\gamma^2e^4 + \frac{5}{16}e^6$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{1425}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n} - \left(\frac{108295}{1024}\gamma^2 e^2 - \frac{70495}{8192}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{217}{64} - \frac{351}{8}\gamma^2 - \frac{1587}{128}e^2 + \frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{225}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 41ᵉ opération (page 702).

50ᵉ OPÉRATION

destinée à faire disparaître une seconde fois le terme (125) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (125) *, dans lequel l'argument est $2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e^4 - \frac{33}{2}\gamma^4 e^2$$

$$+\frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

$$+\left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{15}{128}e'^2 + \frac{225}{512}\frac{n'}{n} - \frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour le terme (1), dans le chapitre IV, que la partie qui existait dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des quarante-neuf premières opérations; et pour le terme (125) que les parties qui proviennent des opérations effectuées après la 40ᵉ jusqu'à la 49ᵉ inclusivement.

$$
\begin{aligned}
&+ m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{\frac{15}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{16}\gamma^4 e^2 + \frac{75}{32}\gamma^2 e^4 - \frac{75}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right. \\
&\qquad - \left(\frac{855}{128}\gamma^2 e^2 + \frac{7695}{128}\gamma^4 e^2 - \frac{4905}{256}\gamma^2 e^4 + \frac{1875}{128}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\
&\qquad - \left(\frac{17859}{2048}\gamma^2 e^2 - \frac{3375}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{1004137}{32768}\gamma^2 e^2 + \frac{9225}{1024}e^4 + \frac{89505}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{7875}{1024}e^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\} \\
&\qquad \times \cos(2h + 2g - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 0, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt} = 0, \qquad \frac{dG}{dt} = \frac{dH}{dt}.$$

La première de ces équations montre que L est constant; et si l'on intègre la seconde, on aura

$$H = G + (H),$$

(H) étant une constante arbitraire. Cette dernière relation et celle qui lie L aux variables a, e, γ, peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(A_{50})\quad a = \frac{L^2}{\mu}\left\{1 - \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{1069}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}}\right\},$$

$$(B_{50})\quad \gamma^2 = -\frac{1}{2}\frac{(H)}{L}\left\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{25}{16}\frac{(H)}{L}e^2 + \frac{37}{32}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$
\begin{aligned}
G = L&\left\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{25}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{25}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6\right. \\
&\left. + \left[\frac{225}{64}e^2 + \frac{225}{32}\frac{(H)}{L}e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} + \frac{675}{128}e^2\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} + \frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\right\},
\end{aligned}
$$

et si l'on remarque que $\frac{dG}{dt} = \frac{dR}{dg}$, on en déduit

$$
(C_{50})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d.e^2}{dt} = -\frac{n'^2 L^3}{\mu^2}\Bigg\{ & \frac{15}{4}\frac{(H)}{L}e^2 - \frac{15}{16}\frac{(H)^2}{L^2}e^2 + \frac{75}{16}\frac{(H)}{L}e^4 - \frac{75}{8}\frac{(H)}{L}e^2 e'^2 \\
& - \left[\frac{855}{64}\frac{(H)}{L}e^2 - \frac{7695}{128}\frac{(H)^2}{L^2}e^2 - \frac{4905}{128}\frac{(H)}{L}e^4 + \frac{1875}{64}\frac{(H)}{L}e^2 e'^2\right]\frac{n' L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{9141}{1024}\frac{(H)}{L}e^2 - \frac{3375}{16}e^2 e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{113137}{16384}\frac{(H)}{L}e^2 - \frac{9225}{256}e^4 - \frac{89505}{64}e^2 e'^2\right]\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} - \frac{7875}{256}e^2\frac{n' L^3}{\mu^2}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\sin\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} + 2\frac{dg}{dt} - 2n' = -2\frac{dR}{dG} - 2\frac{dR}{dH} - 2n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dG}$,… qui doivent être employées après la 49^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$
(D_{50})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = n'\Bigg\{ & -2 + \left[\frac{3}{2} + 6\frac{(H)}{L} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n' L^3}{\mu^2} + \frac{225}{16}\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} + \frac{4167}{64}\frac{n'^3 L^9}{\mu^6}\Bigg\} \\
& - \frac{n'^2 L^3}{\mu^2}\Bigg\{\frac{15}{4}\frac{(H)}{L} - \frac{15}{16}\frac{(H)^2}{L^2} + \frac{45}{4}\frac{(H)}{L}e^2 - \frac{75}{8}\frac{(H)}{L}e'^2 \\
& - \left[\frac{855}{64}\frac{(H)}{L} - \frac{7695}{128}\frac{(H)^2}{L^2} - \frac{8955}{128}\frac{(H)}{L}e^2 + \frac{1875}{64}\frac{(H)}{L}e'^2\right]\frac{n' L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{9141}{1024}\frac{(H)}{L} - \frac{3375}{16}e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{113137}{16384}\frac{(H)}{L} - \frac{9225}{128}e^2 - \frac{89505}{64}e'^2\right]\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} - \frac{7875}{256}\frac{n' L^3}{\mu^2}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{50}), (D_{50}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}G\right)$ a été remplacée par la variable e dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coeffi-

cients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(E_{50})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 - \Bigg\{ & \left[\frac{15}{8}\frac{(H)}{L}e_0^2 - \frac{15}{32}\frac{(H)^2}{L^2}e_0^2 + \frac{75}{32}\frac{(H)}{L}e_0^4 - \frac{75}{16}\frac{(H)}{L}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\
& - \left[\frac{675}{128}\frac{(H)}{L}e_0^2 - \frac{9045}{256}\frac{(H)^2}{L^2}e_0^2 - \frac{5175}{256}\frac{(H)}{L}e_0^4 + \frac{2055}{128}\frac{(H)}{L}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{28041}{2048}\frac{(H)}{L}e_0^2 - \frac{3375}{32}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} \\
& + \left[\frac{1234789}{32768}\frac{(H)}{L}e_0^2 - \frac{9225}{512}e_0^4 - \frac{49815}{64}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& - \frac{7875}{512}e_0^2\frac{n'^2L^6}{\mu^4}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(F_{50})\left\{\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c) \\
& + \Bigg\{\left[\frac{15}{8}\frac{(H)}{L} - \frac{15}{32}\frac{(H)^2}{L^2} + \frac{45}{8}\frac{(H)}{L}e_0^2 - \frac{75}{16}\frac{(H)}{L}e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\
& \quad - \left[\frac{675}{128}\frac{(H)}{L} - \frac{9045}{256}\frac{(H)^2}{L^2} - \frac{9675}{256}\frac{(H)}{L}e_0^2 + \frac{2055}{128}\frac{(H)}{L}e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& \quad + \left[\frac{28041}{2048}\frac{(H)}{L} - \frac{3375}{32}e'^2\right]\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} \\
& \quad + \left[\frac{1234789}{32768}\frac{(H)}{L} - \frac{9225}{256}e_0^2 - \frac{49815}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} - \frac{7875}{512}\frac{n'^2L^6}{\mu^4}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c) \\
& + \frac{225}{256}\frac{(H)^2}{L^2}\frac{n'^2L^6}{\mu^4}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = n'\left\{-2 + \left[\frac{3}{2} + 6\frac{(H)}{L} - \frac{3}{4}e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} + \frac{225}{16}\frac{n'^2L^6}{\mu^4} + \frac{4167}{64}\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\right\}.$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{50}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{50}), (B_{50}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{50})\left\{\begin{aligned}
a = {} & \frac{L^2}{\mu}\left\{1 - \left[\frac{13}{32} + \frac{15}{16}\frac{(H)}{L} - \frac{1069}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6L^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\
& - \frac{L^2}{\mu}\cdot\frac{16035}{256}\frac{(H)}{L}e_0^2\frac{n'^5L^{15}}{\mu^{10}}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H}_{50})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = & -\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{25}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2+\frac{37}{32}e_0^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\} \\ & +\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}-\frac{675}{256}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\right\}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$a_0=\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\left\{1-\left[\frac{13}{32}+\frac{15}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}-\frac{1069}{32}e_0^2+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}-\frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\right\},$$

$$\gamma_0^2=-\frac{1}{2}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}\left\{1+\frac{1}{2}e_0^2+\frac{25}{16}\frac{(\mathrm{H})}{\mathrm{L}}e_0^2+\frac{37}{32}e_0^4+\frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer L et (H) en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et (H) par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{50}), (F_{50}), (G_{50}), (H_{50}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{50})\left\{\begin{aligned} e^2 = e_0^2 + \Bigg[& \left(\frac{15}{4}\gamma_0^2e_0^2+\frac{15}{8}\gamma_0^4e_0^2+\frac{45}{16}\gamma_0^2e_0^4-\frac{75}{8}\gamma_0^2e_0^2e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\ & -\left(\frac{675}{64}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9045}{64}\gamma_0^4e_0^2-\frac{2925}{64}\gamma_0^2e_0^4+\frac{2055}{64}\gamma_0^2e_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & +\left(\frac{28041}{1024}\gamma_0^2e_0^2+\frac{3375}{32}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & +\left(\frac{1234789}{16384}\gamma_0^2e_0^2+\frac{9225}{512}e_0^4+\frac{49815}{64}e_0^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{7875}{512}e_6^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{50})\left\{\begin{aligned} \theta = & \ \theta_0(t+c) \\ & -\Bigg[\left(\frac{15}{4}\gamma_0^2+\frac{15}{8}\gamma_0^4+\frac{75}{8}\gamma_0^2e_0^2-\frac{75}{8}\gamma_0^2e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\ & -\left(\frac{675}{64}\gamma_0^2+\frac{9045}{64}\gamma_0^4-\frac{5175}{64}\gamma_0^2e_0^2+\frac{2055}{64}\gamma_0^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ & +\left(\frac{28041}{1024}\gamma_0^2+\frac{3375}{32}e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} \\ & +\left(\frac{1234789}{16384}\gamma_0^2+\frac{9225}{256}e_0^2+\frac{49815}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}+\frac{7875}{512}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\ & +\frac{225}{64}\gamma_0^4\frac{n'^2}{n_0^2}\sin 2\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{50})\quad a = a_0\left\{1 + \frac{16035}{128}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^5}{n_0^5}\cos\theta_0(t+c)\right\},$$

$$(\mathrm{H}'_{50})\quad \gamma^2 = \gamma_0^2 + \left[\frac{15}{8}\gamma_0^4 e_0^2 \frac{n'}{n_0} - \frac{675}{128}\gamma_0^4 e_0^2 \frac{n'^2}{n_0^2}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n'\left[-2 + \left(\frac{3}{2} - 12\gamma_0^2 - \frac{3}{4}e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2\right)\frac{n'}{n_0} + \frac{225}{16}\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{4167}{64}\frac{n'^3}{n_0^3}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{675}{32}e^2\frac{n'}{n} - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right]\\ - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{16}\gamma^4 e^2 + \frac{15}{8}\gamma^2 e^4 - \frac{75}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{4275}{128}\gamma^2 e^2 \frac{n'}{n}\right.\\ \left. + \left(\frac{2391}{256}\gamma^2 e^2 + \frac{3375}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{51}{32}\frac{n'^2}{n^2}\right]\\ + \frac{n'^2}{n}\left[\frac{15}{16}e^2 + \frac{15}{16}\gamma^7 e^2 + \frac{105}{64}e^4 - \frac{75}{32}e^2 e'^2\right.\\ \left. - \left(\frac{855}{256}e^2 + \frac{7695}{128}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{1875}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} - \frac{17859}{4096}e^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{1004137}{65536}e^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{50}), (F'_{50}), (G'_{50}), (H'_{50}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{50})\left\{\begin{aligned} h+g+l = (l) + h' + g' + l' + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + l_0\right)(t+c)\\ + \left[\left(\frac{15}{8}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{15}{32}\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{15}{16}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{75}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\right.\\ \left. - \frac{3375}{256}\gamma_0^2 e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2} + \left(\frac{21291}{512}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{30375}{128}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{50})\left\{\begin{aligned} h = (h) + h_0(t+c) & \\ -\Bigg[\left(\frac{15}{32}e_0^2 + \frac{15}{32}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{105}{128}e_0^4 - \frac{75}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0} & \\ -\left(\frac{675}{512}e_0^2 + \frac{9045}{256}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{1125}{256}e_0^4 + \frac{2055}{512}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} & \\ + \frac{1041}{8192}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{1801789}{131072}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg] \sin\theta_0(t+c). & \end{aligned}\right.$$

(l) et (h) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); l_0 et h_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + l + h' + g' + l'.$$

Les six formules (E'_{50}), (F'_{50}), (G'_{50}), (H'_{50}), (K_{50}), (L_{50}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (125); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du n° **30**, et si nous remarquons que l est égal à

$$-\frac{1}{2}\theta + (h+g+l) - h' - g' - l',$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1 + \frac{16035}{128}\gamma^2 e^2 \frac{n'^5}{n^5}\cos(2h+2g-2h'-2g'-2l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2 + \Bigg[\left(\frac{15}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{15}{8}\gamma^4 e^2 + \frac{45}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{75}{8}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{675}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{9045}{64}\gamma^4 e^2 - \frac{2925}{64}\gamma^2 e^4 + \frac{2055}{64}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{28041}{1024}\gamma^2 e^2+\frac{3375}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{1234789}{16384}\gamma^2 e^2+\frac{9225}{512}e^4+\frac{49815}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{7875}{512}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(2h+2g-2h'-2g-2l')$$

γ par

$$\gamma^2+\left[\frac{15}{8}\gamma^4 e^2\frac{n'}{n}-\frac{675}{128}\gamma^4 e^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos(2h+2g-2h'-2g'-2l').$$

l par

$$l+\Bigg[\left(\frac{15}{8}\gamma^2+\frac{15}{16}\gamma^4+\frac{105}{16}\gamma^2 e^2-\frac{75}{16}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{675}{128}\gamma^2+\frac{9045}{128}\gamma^4-\frac{6975}{256}\gamma^2 e^2+\frac{2055}{128}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{28041}{2048}\gamma^2+\frac{3375}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{1234789}{32768}\gamma^2+\frac{9225}{512}e^2+\frac{49815}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}+\frac{7875}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin(2h+2g-2h-2g'-2l')$$

$$-\frac{225}{128}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}\sin 2(2h+2g-2h'-2g'-2l'),$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l+\Bigg[\left(\frac{15}{8}\gamma^2 e^2+\frac{15}{32}\gamma^4 e^2+\frac{15}{16}\gamma^2 e^4-\frac{75}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\frac{3375}{256}\gamma^2 e^2\frac{n'^2}{n^2}+\left(\frac{21291}{512}\gamma^2 e^2+\frac{30375}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\sin(2h+2g-2h'-2g-2l'),$$

h par

$$h-\Bigg[\left(\frac{15}{32}e^2+\frac{15}{32}\gamma^2 e^2+\frac{105}{128}e^4-\frac{75}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{675}{512}e^2+\frac{9045}{256}\gamma^2 e^2-\frac{1125}{256}e^4+\frac{2055}{512}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\frac{1041}{8192}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1801789}{131072}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(2h+2g-2h-2g-2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{50}), (G'_{50}), (H'_{50}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 791),

$$G_1 = -\sqrt{a\mu}\cdot\frac{15}{8}\gamma^2 e^2 \frac{n'}{n};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 792).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{50}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\cdot\frac{225}{64}\gamma^4 e^2 \frac{n'^2}{n^2}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 800 et 801) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 50e opération, et y ajoutant

$$+n'(G - G_0) - n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (125) de R, joint à la quantité $+ n'(G - G_0)$, doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et d'une nouvelle partie qui est donnée dans le chapitre IV avec l'indication [50 . . . 1,125]. Ensuite les nouvelles valeurs de G, H seront

$$
\begin{aligned}
G = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{25}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{25}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + 50\gamma^6 e^2 - \frac{275}{8}\gamma^4 e^4 + \frac{25}{16}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& - \left(\frac{1425}{32}\gamma^4 e^2 - \frac{1425}{128}\gamma^2 e^4\right)\frac{n'}{n} \\
& + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{119095}{1024}\gamma^4 e^2 - \frac{20095}{4096}\gamma^2 e^4 \right. \\
& \qquad \left. - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& + \left(\frac{675}{128}e^2 - \frac{2025}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& + \left(\frac{13}{64} - \frac{15}{16}\gamma^2 + \frac{147261}{4096}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{15}{32}\gamma^4 - \frac{175059}{512}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \left. - \frac{3035787}{16384}e^4 + \frac{257925}{2048}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{79}{16} - \frac{167}{8}\gamma^2 + \frac{2954417}{12288}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \left(\frac{153}{8} - \frac{895}{16}\gamma^2 + \frac{497099911}{393216}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad + \frac{22441.}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} - \frac{25}{16}e^2 e'^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{5625}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{75}{16}\gamma^4 e^4 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{1575}{64}\gamma^4 e^2 + \frac{1575}{128}\gamma^2 e^4 - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \left. - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& + \left(\frac{675}{128}e^2 - \frac{2025}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{4675}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& + \left(\frac{13}{64} + \frac{187}{32}\gamma^2 + \frac{147261}{4096}e^2 + \frac{195}{128}e'^2 - \frac{1389}{32}\gamma^4 - \frac{191227}{512}\gamma^2 e^2 + \frac{2805}{64}\gamma^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \left. - \frac{3035787}{16384}e^4 + \frac{257925}{2048}e^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& + \left(\frac{79}{16} + \frac{55}{48}\gamma^2 + \frac{2954417}{12288}e^2 + \frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} \\
& + \left(\frac{153}{8} + \frac{3245}{96}\gamma^2 + \frac{497099911}{393216}e^2 + \frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6} + \frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7} + \frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8} \\
& \qquad + \left(\frac{25}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{25}{16}e^2 e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2} + \left(\frac{225}{256}\gamma^2 + \frac{5625}{1024}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Quant à la valeur de L, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e opération (page 685). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\begin{aligned}\frac{de}{dL} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & 1 - e^2 + \frac{25}{2}\gamma^4 - \frac{25}{4}\gamma^2 e^2 + 100\gamma^6 - 150\gamma^4 e^2 + \frac{275}{16}\gamma^2 e^4 \\ & - \left(\frac{1425}{16}\gamma^4 - \frac{1425}{32}\gamma^2 e^2\right)\frac{n'}{n} \\ & + \left(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 + \frac{225}{64}e^2 + \frac{325}{32}e'^2 + \frac{209095}{512}\gamma^4 - \frac{167695}{1024}\gamma^2 e^2 - \frac{325}{8}\gamma^2 e'^2 \right. \\ & \left. \qquad - \frac{1125}{64}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & + \left(\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 + \frac{675}{128}e^2 + \frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\ & + \left(\frac{316927}{2048} - \frac{305493}{256}\gamma^2 - \frac{1425967}{4096}e^2 + \frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{25}{8}e'^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dG} = -\frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{25}{2}\gamma^4 - \frac{25}{2}\gamma^2 e^2 + \frac{21}{32}e^4 + 100\gamma^6 - \frac{425}{2}\gamma^4 e^2 + \frac{775}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{27}{32}e^6 \\ & - \left(\frac{1425}{16}\gamma^4 - \frac{1425}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n} \\ & + \left(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 - \frac{675}{64}e^2 + \frac{325}{32}e'^2 + \frac{209095}{512}\gamma^4 - \frac{129895}{512}\gamma^2 e^2 - \frac{325}{8}\gamma^2 e'^2 \right. \\ & \left. \qquad + \frac{108295}{8192}e^4 - \frac{975}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ & + \left(\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 - \frac{675}{64}e^2 + \frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\ & + \left(\frac{316927}{2048} - \frac{305493}{256}\gamma^2 - \frac{3606567}{4096}e^2 + \frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} \\ & + \frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{25}{8}e'^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dH} = \frac{1}{a^2 ne}\Big\{ & -\frac{25}{4}\gamma^2 e^2 + \frac{25}{32}e^4 - 75\gamma^4 e^2 + \frac{275}{8}\gamma^2 e^4 - \frac{25}{32}e^6 + \left(\frac{1425}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n} \\ & + \left(\frac{225}{32}e^2 - \frac{164095}{1024}\gamma^2 e^2 + \frac{65095}{8192}e^4 + \frac{325}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{63777}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\}.\end{aligned}$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 41^{e} opération (page 702). Les valeurs de $\frac{d\gamma}{dL}$, $\frac{d\gamma}{dG}$, $\frac{d\gamma}{dH}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 49^{e} opération (page 793).

51^{e} OPÉRATION

destinée à faire disparaître une seconde fois le terme (63) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (63)*, dans lequel l'argument est $2g$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m' \frac{a^2}{a'^3} \Big\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 \\
& \qquad - \frac{33}{2}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2 \right. \\
& \qquad \qquad \left. + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2 \right) \frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2 \right) \frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{15}{128}e'^2 + \frac{225}{512}\frac{n'}{n} - \frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2} \right] \frac{a^2}{a'^2} \Big\}
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue a la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour le terme (1), dans le chapitre IV, que la partie qui existait dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des cinquante premières opérations; et pour le terme (63) que les parties qui proviennent de la 50^{e} opération.

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\left(\frac{45}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{45}{8}\gamma^4 e^2 + \frac{585}{256}\gamma^2 e^4 - \frac{225}{64}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$- \left(\frac{2025}{1024}\gamma^2 e^2 + \frac{40365}{1024}\gamma^4 e^2 - \frac{20925}{2048}\gamma^2 e^4 + \frac{15165}{2048}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \frac{21357}{16384}\gamma^2 e^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{4878807}{262144}\gamma^2 e^2 \frac{n'^4}{n^4}\Big\}\cos 2g.$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 0, \qquad i' = 2, \qquad i'' = 0, \qquad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

L et H sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et γ en fonction de e; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{51})\left\{\begin{aligned} a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{1 &- \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}} - \frac{527}{16}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ &- \left[\frac{79}{8} - \frac{167}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}} - \frac{2757}{16}e^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{51})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\Big\{1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\} &- \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{16}e^4 - \frac{5}{32}e^6 \\ &+ \left[\frac{225}{128}e^2 - \frac{225}{64}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2 + \frac{675}{512}e^4 + \frac{325}{128}e^2 e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{675}{256}e^2\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{208733}{8192}e^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a et γ^2 par leurs valeurs en e dans l'expression de G, il vient

$$\mathrm{G} = \mathrm{L}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{25}{16}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}\right)^2 e^2 - \frac{75}{32}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^4 + \frac{23}{32}e^6$$

$$+ \left[\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{32}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e^2 + \frac{225}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{675}{128}e^2\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{216093}{4096}e^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\};$$

et si l'on remarque que $\frac{dG}{dt} = \frac{dR}{dg}$, on en déduit

$$
(C_{51})\left\{\begin{aligned}
\frac{d.e^2}{dt} = \frac{n'^3L^6}{\mu^4}\Big\{ & \frac{45}{32}\frac{L-H}{L}e^2 - \frac{45}{64}e^4 + \frac{45}{8}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e^2 - \frac{135}{128}\frac{L-H}{L}e^4 - \frac{225}{32}\frac{L-H}{L}e^2e'^2 \\
& - \frac{135}{128}e^6 + \frac{225}{64}e^4e'^2 \\
& - \left[\frac{2025}{512}\frac{L-H}{L}e^2 - \frac{2025}{1024}e^4 + \frac{40365}{1024}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e^2 - \frac{30645}{512}\frac{L-H}{L}e^4\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{15165}{1024}\frac{L-H}{L}e^2e'^2 + \frac{40095}{2048}e^6 - \frac{15165}{2048}e^4e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{59643}{8192}\frac{L-H}{L}e^2 + \frac{21357}{16384}e^4\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4} \\
& \qquad\qquad + \left[\frac{3177807}{131072}\frac{L-H}{L}e^2 - \frac{4878807}{262144}e^4\right]\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\Big\}\sin\theta.
\end{aligned}\right.
$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dg}{dt} = -2\frac{dR}{dG};$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dG}$, $\frac{de}{dG}$, $\frac{d\gamma}{dG}$, qui doivent être employées après la 50^e opération, et remplaçant a et γ^2 par leurs valeurs en e, on trouve

$$
(D_{51})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = \frac{n'^2L^3}{\mu^2}\Big\{ & 3 - \frac{15}{2}\frac{L-H}{L} + 6e^2 + \frac{9}{2}e'^2 \\
& + \left[\frac{225}{16} - \frac{225}{8}\frac{L-H}{L} + \frac{225}{32}e^2 + \frac{825}{16}e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} + \frac{3963}{64}\frac{n'^2L^6}{\mu^4} + \frac{281301}{1024}\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\Big\} \\
+ \frac{n'^3L^6}{\mu^4}\Big\{ & \frac{45}{32}\frac{L-H}{L} - \frac{45}{32}e^2 + \frac{45}{8}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 - \frac{45}{32}\frac{L-H}{L}e^2 - \frac{225}{32}\frac{L-H}{L}e'^2 \\
& - \frac{225}{64}e^4 + \frac{225}{32}e^2e'^2 \\
& - \left[\frac{2025}{512}\frac{L-H}{L} - \frac{2025}{512}e^2 + \frac{40365}{1024}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 - \frac{120555}{1024}\frac{L-H}{L}e^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{15165}{1024}\frac{L-H}{L}e'^2 + \frac{29565}{512}e^4 - \frac{15165}{1024}e^2e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{59643}{8192}\frac{L-H}{L} + \frac{21357}{8192}e^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4} \\
& \qquad\qquad + \left[\frac{3177807}{131072}\frac{L-H}{L} - \frac{4878807}{131072}e^2\right]\frac{n'^3L^9}{\mu^6}\Big\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{51}), (D_{51}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}G\right)$ a été remplacée par la variable e, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(E_{51})\quad \left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 - \Bigg\{ & \left[\frac{15}{32}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{15}{64}e_0^4 + \frac{195}{64}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{15}{8}\frac{L-H}{L}e_0^4\right.\\
&\qquad \left. - \frac{195}{64}\frac{L-H}{L}e_0^2 e'^2 + \frac{15}{128}e_0^6 + \frac{195}{128}e_0^4 e'^2\right]\frac{n' L^3}{\mu^2}\\
& - \left[\frac{225}{64}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{225}{128}e_0^4 + \frac{8145}{256}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{37755}{1024}\frac{L-H}{L}e_0^4\right.\\
&\qquad \left. - \frac{105}{16}\frac{L-H}{L}e_0^2 e'^2 + \frac{20565}{2048}e_0^6 + \frac{105}{32}e_0^4 e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4}\\
& + \left[\frac{75621}{8192}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{48621}{16384}e_0^4\right]\frac{n'^3 L^9}{\mu^6}\\
&\qquad - \left[\frac{363563}{65536}\frac{L-H}{L}e_0^2 + \frac{932437}{131072}e_0^4\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(F_{51})\quad \left\{\begin{aligned}
\theta = {} & \theta_0(t+c)\\
& + \Bigg\{\left[\frac{15}{32}\frac{L-H}{L} - \frac{15}{32}e_0^2 + \frac{195}{64}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 - \frac{225}{64}\frac{L-H}{L}e_0^2\right.\\
&\qquad \left. - \frac{195}{64}\frac{L-H}{L}e'^2 + \frac{15}{64}e_0^4 + \frac{195}{64}e_0^2 e'^2\right]\frac{n' L^3}{\mu^2}\\
& - \left[\frac{225}{64}\frac{L-H}{L} - \frac{225}{64}e_0^2 + \frac{8145}{256}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 - \frac{36855}{512}\frac{L-H}{L}e_0^2\right.\\
&\qquad \left. - \frac{105}{16}\frac{L-H}{L}e'^2 + \frac{59895}{2048}e_0^4 + \frac{105}{16}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4}\\
& + \left[\frac{75621}{8192}\frac{L-H}{L} - \frac{48621}{8192}e_0^2\right]\frac{n'^3 L^9}{\mu^6}\\
&\qquad - \left[\frac{363563}{65536}\frac{L-H}{L} + \frac{932437}{65536}e_0^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c)\\
& + \left\{\frac{225}{4096}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 - \frac{225}{4096}\frac{L-H}{L}e_0^2 + \frac{225}{8192}e_0^4\right\}\frac{n'^2 L^6}{\mu^4}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

e_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\begin{aligned}\theta_0 = \frac{n'^2 L^3}{\mu^2}\Big\{ & 3 - \frac{15}{2}\frac{L-H}{L} + 6e_0^2 + \frac{9}{2}e'^2 \\ & + \left[\frac{225}{16} - \frac{225}{8}\frac{L-H}{L} + \frac{225}{32}e_0^2 + \frac{825}{16}e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} + \frac{3963}{64}\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} + \frac{281301}{1024}\frac{n'^3 L^9}{\mu^6}\Big\}.\end{aligned}$$

Si l'on prend la valeur de e^2 donnée par la formule (E_{51}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{51}), (B_{51}), on en déduit les valeurs de a et de γ^2 en fonction de t, qui sont

$$(G_{51})\left\{\begin{aligned} a = \frac{L^2}{\mu}\Big\{ & 1 - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{16}\frac{L-H}{L} - \frac{527}{16}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ & - \left[\frac{79}{8} - \frac{167}{8}\frac{L-H}{L} - \frac{2757}{16}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}}\Big\} \\ - \frac{L^2}{\mu}\Big\{ & \left[\frac{7905}{512}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{7905}{1024}e_0^4\right]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \\ & - \left[\frac{35865}{1024}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{35865}{2048}e_0^4\right]\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\cos\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(H_{51})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = \frac{1}{2}\frac{L-H}{L}\Big\{ & 1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\Big\} - \frac{1}{4}e_0^2 - \frac{3}{16}e_0^4 - \frac{5}{32}e_0^6 \\ & + \left[\frac{225}{128}e_0^2 - \frac{225}{64}\frac{L-H}{L}e_0^2 + \frac{675}{512}e_0^4 + \frac{325}{128}e_0^2 e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} + \frac{675}{256}e_0^2\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} + \frac{208733}{8192}e_0^2\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ + \Big\{ & \left[\frac{15}{128}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{15}{256}e_0^4 + \frac{165}{256}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{15}{64}\frac{L-H}{L}e_0^4\right. \\ & \left. - \frac{195}{256}\frac{L-H}{L}e_0^2 e'^2 - \frac{15}{256}e_0^6 + \frac{195}{512}e_0^4 e'^2\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\ & - \left[\frac{225}{256}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{225}{512}e_0^4 + \frac{7245}{1024}\left(\frac{L-H}{L}\right)^2 e_0^2 - \frac{30555}{4096}\frac{L-H}{L}e_0^4\right. \\ & \left. - \frac{105}{64}\frac{L-H}{L}e_0^2 e'^2 + \frac{15165}{8192}e_0^6 + \frac{105}{128}e_0^4 e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\ & + \left[\frac{48621}{32768}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{21621}{65536}e_0^4\right]\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} \\ & + \left[\frac{932437}{262144}\frac{L-H}{L}e_0^2 - \frac{2228437}{524288}e_0^4\right]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\Big\}\cos\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 et γ_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et γ^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{ 1 &- \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{16}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}} - \frac{527}{16}e_0^2 + \frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\
&- \left[\frac{79}{8} - \frac{167}{8}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}} - \frac{2757}{16}e_0^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\,\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\,\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}&\left\{1 + \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{3}{8}e_0^4 + \frac{115}{32}\,\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\} - \frac{1}{4}e_0^2 - \frac{3}{16}e_0^4 - \frac{5}{32}e_0^6 \\
&+ \left[\frac{225}{128}e_0^2 - \frac{225}{64}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{H}}{\mathrm{L}}e_0^2 + \frac{675}{512}e_0^4 + \frac{325}{128}e_0^2\,e'^2\right]\frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{675}{256}e_0^2\,\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{208733}{8192}e_0^2\,\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}.
\end{aligned}$$

De ces relations nous pouvons tirer L et H en fonction de a_0 et γ_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et H par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{51}), (F_{51}), (G_{51}), (H_{51}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(\mathrm{E}'_{51})\left\{\begin{aligned}
e^2 = e_0^2 - \Bigg[&\left(\frac{15}{16}\gamma_0^2\,e_0^2 + \frac{195}{16}\gamma_0^4\,e_0^2 + \frac{15}{8}\gamma_0^2\,e_0^4 - \frac{195}{32}\gamma_0^2\,e_0^2\,e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\
&- \left(\frac{225}{32}\gamma_0^2\,e_0^2 + \frac{8145}{64}\gamma_0^4\,e_0^2 - \frac{6975}{512}\gamma_0^2\,e_0^4 - \frac{105}{8}\gamma_0^2\,e_0^2\,e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&+ \frac{75621}{4096}\gamma_0^2\,e_0^2\,\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{363563}{32768}\gamma_0^2\,e_0^2\,\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg]\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}'_{51})\left\{\begin{aligned}
\theta = \theta_0&(t+c) \\
&+ \Bigg[\left(\frac{15}{16}\gamma_0^2 - \frac{15}{64}e_0^2 + \frac{195}{16}\gamma_0^4 - \frac{45}{32}\gamma_0^2\,e_0^2 - \frac{195}{32}\gamma_0^2\,e'^2 - \frac{45}{64}e_0^4 + \frac{195}{128}e_0^2\,e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\
&\quad - \left(\frac{225}{32}\gamma_0^2 - \frac{225}{128}e_0^2 + \frac{8145}{64}\gamma_0^4 - \frac{21465}{256}\gamma_0^2\,e_0^2 - \frac{105}{8}\gamma_0^2\,e'^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{3375}{2048}e_0^4 + \frac{105}{32}e_0^2\,e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
&\quad + \left(\frac{75621}{4096}\gamma_0^2 - \frac{48621}{16384}e_0^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3} - \left(\frac{363563}{32768}\gamma_0^2 + \frac{932437}{131072}e_0^2\right)\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg]\sin\theta_0(t+c) \\
&+ \left[\frac{225}{1024}\gamma_0^4 + \frac{225}{16384}e_0^4\right]\frac{n'^2}{n_0^2}\sin 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{51})\quad a = a_0\left\{1 - \left[\frac{7905}{256}\gamma_0^2\,e_0^2\,\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{35865}{512}\gamma_0^2\,e_0^2\,\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\},$$

$$
(\mathrm{H}'_{51})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big[& \left(\frac{15}{64}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{165}{64}\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{45}{64}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{195}{128}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0} \\
& - \left(\frac{225}{128}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{7245}{256}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{3375}{2048}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{105}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& + \frac{48621}{16384}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{932437}{131072}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4}\Big] \cos\theta_0 (t + c).
\end{aligned}
\right.
$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$
\theta_0 = \frac{n'^2}{n_0}\left[3 - 15\gamma_0^2 + \frac{9}{4}e_0^2 + \frac{9}{2}e'^2 + \left(\frac{225}{16} - \frac{225}{4}\gamma_0^2 - \frac{225}{32}e_0^2 + \frac{825}{16}e'^2\right)\frac{n'}{n_0} + \frac{3963}{64}\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{281301}{1024}\frac{n'^3}{n_0^3}\right].
$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de h en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$
\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},
$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Big[& 1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 \\
& + \frac{675}{32}e^2\frac{n'}{n} - \left(\frac{451}{64} - \frac{207}{8}\gamma^2 - \frac{11325}{128}e^2 + \frac{6765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Big] \\
- \frac{n'^3}{n^2}\Big[& \frac{225}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{45}{2}\gamma^4 e^2 + \frac{2295}{256}\gamma^2 e^4 - \frac{1125}{64}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& - \frac{2025}{128}\gamma^2 e^2 \frac{n'}{n} + \frac{251073}{16384}\gamma^2 e^2 \frac{n'^2}{n^2}\Big]\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = & -\frac{n'^2}{n}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 + \frac{225}{32}e^2\frac{n'}{n} - \frac{51}{32}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{203}{32}\frac{n'^3}{n^3}\right] \\
& + \frac{n'^3}{n^2}\Big[\frac{45}{128}e^2 + \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{675}{512}e^4 - \frac{225}{128}e^2 e'^2 \\
& - \left(\frac{2025}{2048}e^2 + \frac{40365}{1024}\gamma^2 e^2 - \frac{4725}{1024}e^4 + \frac{15165}{4096}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} - \frac{21357}{32768}e^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{4878807}{524288}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cos\theta;
\end{aligned}
$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{51}), (F'_{51}), (G'_{51}), (H'_{51}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{51})\left\{\begin{aligned}
h+g+l &= (h)+(l)+\left(\frac{1}{2}\theta_0+h_0+l_0\right)(t+c)\\
&\quad-\left[\left(\frac{15}{32}\gamma_0^2 e_0^2+\frac{195}{64}\gamma_0^4 e_0^2+\frac{135}{256}\gamma_0^2 e_0^4-\frac{195}{64}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1125}{128}\gamma_0^2 e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{68871}{2048}\gamma_0^2 e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(L_{51})\left\{\begin{aligned}
h &= (h)+h_0(t+c)\\
&\quad+\left[\left(\frac{15}{128}e_0^2+\frac{195}{64}\gamma_0^2 e_0^2+\frac{45}{128}e_0^4-\frac{195}{256}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\right.\\
&\qquad-\left(\frac{225}{256}e_0^2+\frac{8145}{256}\gamma_0^2 e_0^2-\frac{3375}{4096}e_0^4-\frac{105}{64}e_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\qquad\left.+\frac{48621}{32768}e_0^2\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{932437}{262144}e_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c)\\
&\quad-\frac{225}{32768}e_0^4\frac{n'^2}{n_0^2}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

(h) et (l) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); h_0 et l_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+h+l.$$

Les six formules (E'_{51}), (F'_{51}), (G'_{51}), (H'_{51}), (K_{51}), (L_{51}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (63); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la première règle du nº **30**, et si nous remarquons que l est égal à

$$-\frac{1}{2}\theta+(h+g+l)-h,$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1-\left[\frac{7905}{256}\gamma^2e^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{35865}{512}\gamma^2e^2\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos 2g\right\},$$

e^2 par

$$e^2-\left[\left(\frac{15}{16}\gamma^2e^2+\frac{195}{16}\gamma^4e^2+\frac{15}{8}\gamma^2e^4-\frac{195}{32}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{225}{32}\gamma^2e^2+\frac{8145}{64}\gamma^4e^2-\frac{6975}{512}\gamma^2e^4-\frac{105}{8}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{75621}{4096}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{363563}{32768}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 2g,$$

γ^2 par

$$\gamma^2+\left[\left(\frac{15}{64}\gamma^2e^2+\frac{165}{64}\gamma^4e^2+\frac{45}{64}\gamma^2e^4-\frac{195}{128}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{225}{128}\gamma^2e^2+\frac{7245}{256}\gamma^4e^2-\frac{3375}{2048}\gamma^2e^4-\frac{105}{32}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{48621}{16384}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{932437}{131072}\gamma^2e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos 2g,$$

l par

$$l-\left[\left(\frac{15}{32}\gamma^2+\frac{195}{32}\gamma^4+\frac{45}{16}\gamma^2e^2-\frac{195}{64}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{225}{64}\gamma^2+\frac{8145}{128}\gamma^4-\frac{675}{512}\gamma^2e^2-\frac{105}{16}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{75621}{8192}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{363563}{65536}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2g$$
$$-\frac{225}{2048}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}\sin 4g,$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{15}{32}\gamma^2e^2+\frac{195}{64}\gamma^4e^2+\frac{135}{256}\gamma^2e^4-\frac{195}{64}\gamma^2e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}-\frac{1125}{128}\gamma^2e^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{68871}{2048}\gamma^2e^2\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 2g,$$

h par

$$h+\left[\left(\frac{15}{128}e^2+\frac{195}{64}\gamma^2e^2+\frac{45}{128}e^4-\frac{195}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{225}{256}e^2+\frac{8145}{256}\gamma^2e^2-\frac{3375}{4096}e^4-\frac{105}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{48621}{32768}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{932437}{262144}e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2g$$
$$-\frac{225}{32768}e^4\frac{n'^2}{n^2}\sin 4g.$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{51}), (G'_{51}), (H'_{51}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 803),

$$G_1 = \sqrt{a\mu} \cdot \frac{15}{32}\gamma^2 e^2 \frac{n'}{n};$$

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 803).

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0\,(t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{51}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 G_1 + 2\theta_2 G_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{\frac{225}{1024}\gamma^4 e^2 - \frac{225}{4096}\gamma^2 e^4\right\}\frac{n'^2}{n^2}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la première règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i', i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (page 813) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 51^e opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (63) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, n'est autre chose que la valeur qu'avait précédemment le terme (1). Ensuite la nouvelle valeur de G sera

$$\begin{aligned} G = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{25}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{25}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + 50\gamma^6 e^2 - \frac{275}{8}\gamma^4 e^4 + \frac{25}{16}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\ & - \left(\frac{1425}{32}\gamma^4 e^2 - \frac{1425}{128}\gamma^2 e^4\right)\frac{n'}{n} \\ & + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{14915}{128}\gamma^4 e^2 - \frac{635}{128}\gamma^2 e^4 \right. \\ & \qquad \left. - \frac{325}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{4675}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4-\frac{175059}{512}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{257925}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{25}{16}e^2e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5625}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Quant aux valeurs de L et de H, elles sont les mêmes que celles qui doivent être employées après la 50^e opération (valeur de L, page 685; valeur de H, page 803). De ces valeurs de L, G, H on déduit

$$\frac{de}{dL}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-e^2+\frac{25}{2}\gamma^4-\frac{25}{4}\gamma^2e^2+100\gamma^6-150\gamma^4e^2+\frac{275}{16}\gamma^2e^4$$

$$-\left(\frac{1425}{16}\gamma^4-\frac{1425}{32}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2+\frac{325}{32}e'^2+\frac{26165}{64}\gamma^4-\frac{10495}{64}\gamma^2e^2-\frac{325}{8}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.-\frac{1125}{64}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2+\frac{675}{128}e^2+\frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{1425967}{4096}e^2+\frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{25}{8}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{de}{dG}=-\frac{1}{a^2ne}\Big\{1-\frac{1}{2}e^2+\frac{25}{2}\gamma^4-\frac{25}{2}\gamma^2e^2+\frac{21}{32}e^4+100\gamma^6-\frac{425}{2}\gamma^4e^2+\frac{775}{16}\gamma^2e^4-\frac{27}{32}e^6$$

$$-\left(\frac{1425}{16}\gamma^4-\frac{1425}{16}\gamma^2e^2+\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{325}{32}e'^2+\frac{26165}{64}\gamma^4-\frac{16265}{64}\gamma^2e^2-\frac{325}{8}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.+\frac{13565}{1024}e^4-\frac{975}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{3606567}{4096}e^2+\frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{25}{8}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{de}{dH}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{-\frac{25}{4}\gamma^2e^2+\frac{25}{32}e^4-75\gamma^4e^2+\frac{275}{8}\gamma^2e^4-\frac{25}{32}e^6+\left(\frac{1425}{32}\gamma^2e^2-\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{225}{32}e^2-\frac{5135}{32}\gamma^2e^2+\frac{8165}{1024}e^4+\frac{325}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{63777}{256}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dL}=\frac{1}{a^2n\gamma}\Big\{-\frac{25}{8}\gamma^4+\frac{25}{16}\gamma^2e^2-\frac{75}{4}\gamma^6+\frac{425}{16}\gamma^4e^2-\frac{175}{64}\gamma^2e^4+\left(\frac{1425}{64}\gamma^4-\frac{1425}{128}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{225}{64}\gamma^2-\frac{10495}{128}\gamma^4+\frac{17165}{512}\gamma^2e^2+\frac{325}{64}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{675}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{279519}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dG}=\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1-2\gamma^2+\frac{1}{2}e^2+\frac{25}{2}\gamma^4-\frac{27}{2}\gamma^2e^2+\frac{37}{32}e^4+75\gamma^6-\frac{625}{4}\gamma^4e^2+\frac{463}{16}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$

$$-\left(\frac{1425}{16}\gamma^4-\frac{1425}{16}\gamma^2e^2+\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{225}{16}\gamma^2-\frac{10495}{32}\gamma^4+\frac{12665}{64}\gamma^2e^2+\frac{325}{16}\gamma^2e'^2-\frac{1105}{128}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{675}{32}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{217}{64}-\frac{235711}{1024}\gamma^2-\frac{1587}{128}e^2+\frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{225}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH}=-\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1+\frac{1}{2}e^2-\frac{25}{4}\gamma^2e^2+\frac{37}{32}e^4-\frac{125}{2}\gamma^4e^2+\frac{175}{8}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$

$$+\left(\frac{1425}{32}\gamma^2e^2-\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}-\left(\frac{13565}{128}\gamma^2e^2-\frac{1105}{128}e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{217}{64}-\frac{351}{8}\gamma^2-\frac{1587}{128}e^2+\frac{3255}{128}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{1057}{96}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{8615}{192}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{225}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}$, $\frac{da}{d\mathrm{G}}$, $\frac{da}{d\mathrm{H}}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 41e opération (page 702).

52e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (166) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (166)*, dans lequel l'argument est $2h - 2h' - 2g' - 2l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e^4 \\
& \qquad - \frac{33}{2}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad + \left(\frac{225}{64}e^2 - \frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^4 + \frac{399}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{495}{16}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{537}{16}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{635}{6}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{15}{128}e'^2 + \frac{225}{512}\frac{n'}{n} - \frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\}
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue à la page suivante

---

* Il ne faut prendre pour ces termes (1) et (166), dans le chapitre IV, que les parties qui existaient dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des cinquante et une premières opérations.

$$
\begin{aligned}
&+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 + \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{9}{4}\gamma^4 e^2 + \frac{15}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{75}{128}\gamma^2 e^4 - \frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{39}{32}\gamma^2 e'^4 \\
&\qquad + \left(\frac{225}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{2}\gamma^2 e'^2 - \frac{675}{16}\gamma^4 e^2 + \frac{81}{2}\gamma^4 e'^2 + \frac{4275}{1024}\gamma^2 e^4 - \frac{531}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\
&\qquad - \left(\frac{51}{16}\gamma^2 - \frac{93}{16}\gamma^4 - \frac{3411}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{75}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
&\qquad - \left(\frac{53}{4}\gamma^2 - \frac{327}{8}\gamma^4 - \frac{69267}{256}\gamma^2 e^2 + \frac{3025}{16}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
&\qquad\qquad - \frac{2467}{48}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{76805}{576}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5} + \frac{45}{16}\gamma^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{2475}{256}\gamma^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
&\qquad\qquad \times \cos(2h - 2h' - 2g' - 2l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 0, \qquad i' = 0, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = -2.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0.$$

L et G sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et e en fonction de γ. En les résolvant, on trouve

$$
(\mathrm{A}_{52})\left\{
\begin{aligned}
a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{1 &- \Big[\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{1069}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{195}{64}e'^2 - \frac{15}{16}\gamma^4 + 228\gamma^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{225}{16}\gamma^2 e'^2 \\
&\qquad + \frac{7769}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 - \frac{16035}{32}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2\Big]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\
&- \Big[\frac{79}{8} - \frac{167}{4}\gamma^2 - \frac{731}{2}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{2133}{16}e'^2\Big]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} \\
&- \Big[\frac{153}{4} - \frac{895}{8}\gamma^2 - \frac{1102101}{512}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{240085}{256}e'^2\Big]\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} \\
&\qquad - \frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}} - \frac{99670013}{221184}\frac{n'^8\mathrm{L}^{24}}{\mu^{16}} - \frac{4431}{1024}\frac{{}'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Big\},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{B}_{52})\left\{
\begin{aligned}
e^2 = 2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\Bigg\{ & 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{25}{2}\gamma^4 - \frac{25}{4}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \left[\frac{1425}{16}\gamma^4 - \frac{1425}{32}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 - \frac{675}{32}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{325}{32}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 - \frac{6075}{128}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{4675}{128}e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \\
& + \frac{317343}{2048}\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{5018819}{6144}\,\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}.
\end{aligned}\right.
$$

Si l'on remplace a et e^2 par leurs valeurs en γ dans l'expression de H, il vient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} = \mathrm{G} + \mathrm{L}\Bigg\{ & -2\gamma^2 + 2\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{25}{2}\gamma^4\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{25}{4}\gamma^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 \\
& + \left[\frac{1425}{16}\gamma^4\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{1425}{32}\gamma^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& + \frac{225}{16}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\,\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{675}{32}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\,\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{115}{16}\gamma^2\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{1531}{48}\gamma^2\,\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\};
\end{aligned}
$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{H}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dh}$, on en déduit

$$
(\mathrm{C}_{52})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d.\gamma^2}{dt} = \frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Bigg\{ & \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 + 6\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{15}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{99}{4}\gamma^4\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{15}{4}\gamma^4 e'^2 \\
& + \frac{195}{32}\gamma^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 - 15\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2 + \frac{39}{32}\gamma^2 e'^4 \\
& + \Bigg[\frac{225}{8}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{27}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{1575}{32}\gamma^4\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{81}{2}\gamma^4 e'^2 \\
& \qquad - \frac{675}{256}\gamma^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 - \frac{639}{8}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2\Bigg]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& - \left[\frac{51}{16}\gamma^2 - \frac{93}{16}\gamma^4 - \frac{4659}{32}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{75}{4}\gamma^2 e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
& - \left[\frac{53}{4}\gamma^2 - \frac{327}{8}\gamma^4 - \frac{201967}{256}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{3025}{16}\gamma^2 e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \\
& - \frac{9067}{192}\gamma^2\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{40045}{288}\gamma^2\,\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{45}{16}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2} + \frac{2475}{256}\gamma^2\,\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\sin\theta.
\end{aligned}\right.
$$

D'ailleurs on a

$$
\frac{d\theta}{dt} = 2\,\frac{dh}{dt} - 2n' = -2\,\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 2n';
$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{H}}$, $\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}}$, qui doivent être employées après la 51$^{\mathrm{e}}$ opération, et remplaçant a et e^2 par leurs valeurs en γ, on trouve

$$
(\mathrm{D}_{52})\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = n' \Big\{ & -2 - \Big[\frac{3}{2} - 3\gamma^2 + 6\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{9}{4}e'^2 + \frac{51}{2}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{9}{2}\gamma^2 e'^2 \\
& \qquad\qquad - \frac{45}{8}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 + 9\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\,e'^2 \Big] \frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& - \frac{225}{8}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\,\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \Big[\frac{51}{16} - \frac{165}{16}\gamma^2 - \frac{4659}{32}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{765}{32}e'^2 \Big] \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \\
& \qquad\qquad + \frac{203}{16}\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{8959}{192}\,\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{45}{16}\,\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \\
+ \frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2} \Big\{ & \frac{3}{2} - 3\gamma^2 + 6\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{15}{4}e'^2 - \frac{123}{4}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{15}{2}\gamma^2 e'^2 \\
& + \frac{195}{32}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 - 15\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\,e'^2 + \frac{39}{32}e'^4 \\
& + \Big[\frac{225}{8}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{27}{2}e'^2 - \frac{1125}{32}\gamma^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + 81\gamma^2 e'^2 \\
& \qquad\qquad - \frac{675}{256}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{639}{8}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\,e'^2 \Big] \frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& - \Big[\frac{51}{16} - \frac{93}{8}\gamma^2 - \frac{4659}{32}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{75}{4}e'^2 \Big] \frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
& - \Big[\frac{53}{4} - \frac{327}{4}\gamma^2 - \frac{201967}{256}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{3025}{16}e'^2 \Big] \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \\
& \qquad - \frac{9067}{192}\,\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{40045}{288}\,\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{45}{16}\,\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2} + \frac{2475}{256}\,\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{52}), (D_{52}) correspondent aux équations (23) du chapitre III ; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{H}\right)$ a été remplacée par la variable γ dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$
(\mathrm{E}_{52})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Bigg\{ & \left[\frac{3}{4}\gamma_0^2 - \frac{3}{4}\gamma_0^4 + 3\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{15}{8}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{99}{8}\gamma_0^4\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{15}{8}\gamma_0^4 e'^2 \right.\\
& \qquad \left. + \frac{195}{64}\gamma_0^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 - \frac{15}{2}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2 + \frac{39}{64}\gamma_0^2 e'^4\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
& - \left[\frac{9}{16}\gamma_0^2 - \frac{27}{16}\gamma_0^4 - \frac{153}{16}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{99}{16}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{9}{8}\gamma_0^6 - \frac{1989}{64}\gamma_0^4\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right.\\
& \qquad \left. - \frac{297}{16}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{5373}{512}\gamma_0^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 + \frac{567}{16}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
& - \left[\frac{75}{64}\gamma_0^2 - \frac{3}{8}\gamma_0^4 - \frac{3633}{64}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{525}{128}\gamma_0^2 e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
& - \left[\frac{1165}{256}\gamma_0^2 - \frac{7071}{512}\gamma_0^4 - \frac{160513}{512}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{21545}{256}\gamma_0^2 e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
& - \frac{50189}{3072}\gamma_0^2\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{1666525}{36864}\gamma_0^2\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} + \frac{45}{32}\gamma_0^2\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\\
& \qquad + \frac{1395}{512}\gamma_0^2\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)\\
- \Bigg\{ & \frac{225}{128}\gamma_0^4\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{27}{128}\gamma_0^4\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} - \frac{81}{128}\gamma_0^4\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\cos 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{52})\left\{
\begin{aligned}
\theta = \theta_0(t+c)&\\
- \Bigg\{ & \left[\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma_0^2 + 3\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{15}{8}e'^2 - \frac{123}{8}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{15}{4}\gamma_0^2 e'^2\right.\\
& \qquad \left. + \frac{195}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 - \frac{15}{2}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2 + \frac{39}{64}e'^4\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
& - \left[\frac{9}{16} - \frac{27}{8}\gamma_0^2 - \frac{153}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{99}{16}e'^2 + \frac{27}{8}\gamma_0^4 + \frac{747}{64}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right.\\
& \qquad \left. - \frac{297}{8}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{5373}{512}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 + \frac{567}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
& - \left[\frac{273}{256} - \frac{57}{256}\gamma_0^2 - \frac{1857}{32}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{2505}{512}e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
& - \left[\frac{4903}{1024} - \frac{15357}{512}\gamma_0^2 - \frac{323213}{1024}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{43819}{512}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
& - \frac{408559}{24576}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{13725617}{294912}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} + \frac{45}{32}\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2} + \frac{1395}{512}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c)
\end{aligned}\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(\mathrm{F}_{52})\quad
\begin{aligned}
&+\Big\{\Big[\frac{9}{64}-\frac{9}{32}\gamma_0^2+\frac{9}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}-\frac{45}{64}e'^2+\frac{9}{32}\gamma_0^4-\frac{513}{128}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\\
&\qquad\qquad+\frac{45}{32}\gamma_0^2e'^2+\frac{1737}{512}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2-\frac{45}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&\quad-\Big[\frac{27}{128}-\frac{135}{128}\gamma_0^2-\frac{351}{128}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{459}{256}e'^2\Big]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\quad-\Big[\frac{657}{2048}+\frac{351}{512}\gamma_0^2-\frac{4473}{256}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}-\frac{153}{512}e'^2\Big]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad-\frac{3063}{2048}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{1206691}{262144}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}+\frac{135}{256}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\sin 2\theta_0(t+c)\\
&-\Big\{\Big[\frac{9}{256}-\frac{27}{256}\gamma_0^2+\frac{27}{64}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}-\frac{135}{512}e'^2\Big]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\quad-\Big[\frac{81}{1024}-\frac{243}{512}\gamma_0^2-\frac{729}{1024}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{243}{512}e'^2\Big]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad-\frac{1485}{16384}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{30357}{65536}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\sin 3\theta_0(t+c)\\
&+\Big\{\Big[\frac{81}{8192}-\frac{81}{2048}\gamma_0^2+\frac{81}{512}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}-\frac{405}{4096}e'^2\Big]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&\qquad\qquad-\frac{243}{8192}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{2997}{131072}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\sin 4\theta_0(t+c)\\
&-\Big\{\frac{243}{81920}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{729}{65536}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}\sin 5\theta_0(t+c)\\
&+\frac{243}{262144}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\sin 6\theta_0(t+c).
\end{aligned}
$$

γ_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\begin{aligned}
\theta_0=n'\Big\{&-2-\Big[\frac{3}{2}-3\gamma_0^2+6\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{9}{4}e'^2\Big]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&+\Big[\frac{9}{16}-\frac{27}{8}\gamma_0^2-\frac{189}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}-\frac{45}{16}e'^2\Big]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}+\frac{177}{64}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{10949}{1024}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Si l'on prend la valeur de γ^2 donnée par la formule (E_{52}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{52}), (B_{52}), on en déduit les valeurs de a et de e^2

en fonction de t, qui sont

$$(G_{52})\quad \begin{aligned}
a = \frac{L^2}{\mu}\Bigg\{ 1 - \Bigg[& \frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma_0^2 - \frac{1069}{16}\frac{L-G}{L} + \frac{195}{64}e'^2 - \frac{15}{16}\gamma_0^4 + 228\gamma_0^2\frac{L-G}{L} \\
& - \frac{225}{16}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{7769}{64}\left(\frac{L-G}{L}\right)^2 - \frac{16035}{32}\frac{L-G}{L}e'^2 \Bigg]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\
& - \left[\frac{79}{8} - \frac{167}{4}\gamma_0^2 - \frac{731}{2}\frac{L-G}{L} + \frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \\
& - \left[\frac{153}{4} - \frac{895}{8}\gamma_0^2 - \frac{1102101}{512}\frac{L-G}{L} + \frac{240085}{256}e'^2\right]\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \\
& - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}} - \frac{99670013}{221184}\frac{n'^8 L^{24}}{\mu^{16}} - \frac{4431}{1024}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\} \\
+ \frac{L^2}{\mu}\Bigg\{\Bigg[& \frac{45}{32}\gamma_0^2 - \frac{1323}{8}\gamma_0^2\frac{L-G}{L} + \frac{225}{32}\gamma_0^2 e'^2\Bigg]\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} \\
& + \frac{3873}{128}\gamma_0^2\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} + \frac{29811}{512}\gamma_0^2\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}$$

$$(H_{52})\quad \begin{aligned}
e^2 = 2\frac{L-G}{L}\Bigg\{ 1 & - \frac{1}{2}\frac{L-G}{L} + \frac{25}{2}\gamma_0^4 - \frac{25}{4}\gamma_0^2\frac{L-G}{L} - \left[\frac{1425}{16}\gamma_0^4 - \frac{1425}{32}\gamma_0^2\frac{L-G}{L}\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma_0^2 - \frac{675}{32}\frac{L-G}{L} + \frac{325}{32}e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& + \left[\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma_0^2 - \frac{6075}{128}\frac{L-G}{L} + \frac{4675}{128}e'^2\right]\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} \\
& + \frac{317343}{2048}\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} + \frac{5018819}{6144}\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\} \\
+ 2\frac{L-G}{L}\Bigg\{ & \left[\frac{75}{4}\gamma_0^4 - \frac{75}{16}\gamma_0^2\frac{L-G}{L}\right]\frac{n'L^3}{\mu^2} - \left[\frac{4725}{32}\gamma_0^4 - \frac{4725}{128}\gamma_0^2\frac{L-G}{L}\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\
& - \frac{675}{32}\gamma_0^2\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} - \frac{10125}{128}\gamma_0^2\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c) \\
+ 2\frac{L-G}{L} & \cdot\frac{225}{64}\gamma_0^4\frac{n'^2 L^6}{\mu^4}\cos 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}$$

Désignons maintenant par a_0 et e_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et e^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{L^2}{\mu}\Bigg\{ 1 - \Bigg[& \frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma_0^2 - \frac{1069}{16}\frac{L-G}{L} + \frac{195}{64}e'^2 - \frac{15}{16}\gamma_0^4 + 228\gamma_0^2\frac{L-G}{L} - \frac{225}{16}\gamma_0^2 e'^2 \\
& + \frac{7769}{64}\left(\frac{L-G}{L}\right)^2 - \frac{16035}{32}\frac{L-G}{L}e'^2\Bigg]\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
\begin{aligned}
&-\left[\frac{79}{8}-\frac{167}{4}\gamma_0^2-\frac{731}{2}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\\
&-\left[\frac{153}{4}-\frac{895}{8}\gamma_0^2-\frac{1102101}{512}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{240085}{256}e'^2\right]\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\\
&\qquad\qquad-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}-\frac{99670013}{221184}\frac{n'^8\mathrm{L}^{24}}{\mu^{16}}-\frac{4431}{1024}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_0^2=2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\Bigg\{&1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{25}{2}\gamma_0^4-\frac{25}{4}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}-\left[\frac{1425}{16}\gamma_0^4-\frac{1425}{32}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&+\left[\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma_0^2-\frac{675}{32}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{325}{32}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&+\left[\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma_0^2-\frac{6075}{128}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{4675}{128}e'^2\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{317343}{2048}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{5018819}{6144}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

De ces relations nous pouvons tirer L et G en fonction de a_0 et e_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et G par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{52}), (F_{52}), (G_{52}), (H_{52}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$
(\mathrm{E}'_{52})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2=\gamma_0^2+\Bigg[\Bigg(&\frac{3}{4}\gamma_0^2-\frac{3}{4}\gamma_0^4+\frac{3}{2}\gamma_0^2e_0^2-\frac{15}{8}\gamma_0^2e'^2-\frac{99}{16}\gamma_0^4e_0^2+\frac{15}{8}\gamma_0^4e'^2\\
&\qquad+\frac{291}{256}\gamma_0^2e_0^4-\frac{15}{4}\gamma_0^2e_0^2e'^2+\frac{39}{64}\gamma_0^2e'^4\Bigg)\frac{n'}{n_0}\\
-\Bigg(&\frac{9}{16}\gamma_0^2-\frac{27}{16}\gamma_0^4-\frac{153}{32}\gamma_0^2e_0^2+\frac{99}{16}\gamma_0^2e'^2+\frac{9}{8}\gamma_0^6-\frac{1989}{128}\gamma_0^4e_0^2\\
&\qquad-\frac{297}{16}\gamma_0^4e'^2+\frac{2925}{2048}\gamma_0^2e_0^4+\frac{567}{32}\gamma_0^2e_0^2e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
-\Bigg(&\frac{75}{64}\gamma_0^2-\frac{3}{8}\gamma_0^4-\frac{2283}{128}\gamma_0^2e_0^2+\frac{525}{128}\gamma_0^2e'^2\Bigg)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
-\Bigg(&\frac{1165}{256}\gamma_0^2-\frac{7071}{512}\gamma_0^4-\frac{1717}{16}\gamma_0^2e_0^2+\frac{21545}{256}\gamma_0^2e'^2\Bigg)\frac{n'^4}{n_0^4}\\
&-\frac{48785}{3072}\gamma_0^2\frac{n'^5}{n_0^5}-\frac{1282261}{36864}\gamma_0^2\frac{n'^6}{n_0^6}+\frac{45}{32}\gamma_0^2\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}+\frac{1395}{512}\gamma_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\\
-\Bigg[&\frac{225}{256}\gamma_0^4e_0^2\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{27}{128}\gamma_0^4\frac{n'^3}{n_0^3}-\frac{81}{128}\gamma_0^4\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg]\cos2\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(F'_{52})\quad \left\{
\begin{aligned}
\theta &= \theta_0(t+c) \\
&- \Bigg[\Big(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\gamma_0^2 + \frac{3}{2}e_0^2 - \frac{15}{8}e'^2 - \frac{123}{16}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{15}{4}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{291}{256}e_0^4 \\
&\qquad\qquad - \frac{15}{4}e_0^2 e'^2 + \frac{39}{64}e'^4 \Big) \frac{n'}{n_0} \\
&\quad - \Big(\frac{9}{16} - \frac{27}{8}\gamma_0^2 - \frac{153}{32}e_0^2 + \frac{99}{16}e'^2 + \frac{27}{8}\gamma_0^4 + \frac{747}{128}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{297}{8}\gamma_0^2 e'^2 \\
&\qquad\qquad + \frac{2925}{2048}e_0^4 + \frac{567}{32}e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
&\quad - \Big(\frac{273}{256} - \frac{57}{256}\gamma_0^2 - \frac{591}{32}e_0^2 + \frac{2505}{512}e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} \\
&\quad - \Big(\frac{4903}{1024} - \frac{15357}{512}\gamma_0^2 - \frac{221963}{2048}e_0^2 + \frac{43819}{512}e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} \\
&\qquad\qquad - \frac{397327}{24576}\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{10651505}{294912}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{45}{32}\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} + \frac{1395}{512}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} \Bigg] \sin\theta_0(t+c) \\
&+ \Bigg[\Big(\frac{9}{64} - \frac{9}{32}\gamma_0^2 + \frac{9}{16}e_0^2 - \frac{45}{64}e'^2 + \frac{9}{32}\gamma_0^4 - \frac{513}{256}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{45}{32}\gamma_0^2 e'^2 \\
&\qquad\qquad + \frac{2025}{2048}e_0^4 - \frac{45}{16}e_0^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n_0^2} \\
&\quad - \Big(\frac{27}{128} - \frac{135}{128}\gamma_0^2 - \frac{351}{256}e_0^2 + \frac{459}{256}e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} \\
&\quad - \Big(\frac{657}{2048} + \frac{351}{512}\gamma_0^2 - \frac{153}{32}e_0^2 - \frac{153}{512}e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} \\
&\qquad\qquad - \frac{3063}{2048}\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{1161763}{262144}\frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{135}{256}\frac{n'^2}{n_0^2}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2} \Bigg] \sin 2\theta_0(t+c) \\
&- \Bigg[\Big(\frac{9}{256} - \frac{27}{256}\gamma_0^2 + \frac{27}{128}e_0^2 - \frac{135}{512}e'^2 \Big) \frac{n'^3}{n_0^3} \\
&\quad - \Big(\frac{81}{1024} - \frac{243}{512}\gamma_0^2 - \frac{729}{2048}e_0^2 + \frac{243}{512}e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{1485}{16384}\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{30357}{65536}\frac{n'^6}{n_0^6} \Bigg] \sin 3\theta_0(t+c) \\
&+ \Bigg[\Big(\frac{81}{8192} - \frac{81}{2048}\gamma_0^2 + \frac{81}{1024}e_0^2 - \frac{405}{4096}e'^2 \Big) \frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{243}{8192}\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{2997}{131072}\frac{n'^6}{n_0^6} \Bigg] \sin 4\theta_0(t+c) \\
&- \Bigg[\frac{243}{81920}\frac{n'^5}{n_0^5} - \frac{729}{65536}\frac{n'^6}{n_0^6} \Bigg] \sin 5\theta_0(t+c) \\
&+ \frac{243}{262144}\frac{n'^6}{n_0^6} \sin 6\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$(G'_{32})\quad a = a_0 \left\{ 1 + \left[\left(\frac{45}{32}\gamma_0^2 - \frac{1323}{16}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{225}{32}\gamma_0^2 e'^2 \right) \frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{3873}{128}\gamma_0^2 \frac{n'^6}{n_0^6} + \frac{29811}{512}\gamma_0^2 \frac{n'^7}{n_0^7} \right] \cos\theta_0 (t + c) \right\},$$

$$(H'_{32})\left\{ \begin{aligned} e^2 = e_0^2 + \Bigg[&\left(\frac{75}{4}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{75}{32}\gamma_0^2 e_0^4 \right) \frac{n'}{n_0} - \left(\frac{4725}{32}\gamma_0^4 e_0^2 - \frac{4725}{256}\gamma_0^2 e_0^4 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ &- \frac{675}{32}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{10125}{128}\gamma_0^2 e_0^2 \frac{n'^4}{n_0^4} \Bigg] \cos\theta_0 (t + c) \\ &+ \frac{225}{64}\gamma_0^4 e_0^2 \frac{n'^2}{n_0^2} \cos 2\theta_0 (t + c). \end{aligned} \right.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\begin{aligned} \theta_0 = n' \Bigg[-2 - &\left(\frac{3}{2} - 3\gamma_0^2 + 3e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2 \right) \frac{n'}{n_0} \\ &+ \left(\frac{9}{16} - \frac{27}{8}\gamma_0^2 - \frac{189}{16}e_0^2 - \frac{45}{16}e'^2 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{177}{64}\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{10949}{1024}\frac{n'^4}{n_0^4} \Bigg]. \end{aligned}$$

Calculons maintenant les valeurs de $h + g + l$ et de l en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h + g + l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d(h + g + l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} \Bigg[1 &- \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 \\ &+ \left(\frac{675}{32}e^2 - \frac{1125}{16}\gamma^2 e^2 - \frac{2025}{256}e^4 + \frac{2475}{32}e^2 e'^2 \right) \frac{n'}{n} \\ &- \left(\frac{451}{64} - \frac{207}{8}\gamma^2 - \frac{11325}{128}e^2 + \frac{6765}{128}e'^2 \right) \frac{n'^2}{n^2} \\ &- \left(\frac{787}{32} - \frac{717}{8}\gamma^2 - \frac{219075}{512}e^2 + \frac{21249}{64}e'^2 \right) \frac{n'^3}{n^3} \\ &- \frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4} - \frac{77029}{288}\frac{n'^5}{n^5} + \left(\frac{9}{8} + \frac{2475}{512}\frac{n'}{n} \right) \frac{a^2}{a'^2} \Bigg] \end{aligned}$$

$$- \frac{n'^2}{n} \left[\frac{9}{2}\gamma^2 - 3\gamma^4 + \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{45}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{69}{8}\gamma^4 e^2 + \frac{15}{2}\gamma^4 e'^2 - \frac{519}{128}\gamma^2 e^4 - \frac{75}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{1125}{16}\gamma^2 e^2 - 81\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{459}{16}\gamma^2 - \frac{93}{2}\gamma^4 - \frac{17745}{32}\gamma^2 e^2 + \frac{675}{4}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-159\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{92389}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{315}{16}\gamma^2\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta,$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{7}{4} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{21}{8}e'^2 - \frac{33}{4}\gamma^4 + \frac{39}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{63}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{8}e^2 e'^2$$

$$+\left(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 + \frac{675}{64}e^2 + \frac{825}{32}e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{3265}{128} - \frac{3831}{32}\gamma^2 + \frac{7089}{256}e^2 + \frac{48225}{256}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{243925}{2048}\frac{n'^3}{n^3} + \frac{12626759}{24576}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{81}{32}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]$$

$$-\frac{n'^2}{n}\Bigg[\frac{21}{2}\gamma^2 - \frac{159}{8}\gamma^4 + \frac{219}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{105}{4}\gamma^2 e'^2$$

$$+\left(\frac{225}{8}\gamma^2 - \frac{1125}{64}\gamma^4 + \frac{13725}{256}\gamma^2 e^2 - \frac{1287}{8}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} + \frac{3741}{32}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{161263}{256}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{52}), (F'_{52}), (G'_{52}), (H'_{52}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{52})\left\{\begin{aligned}
h+g+l &= (g) + (l) + h' + g' + l' + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + g_0 + l_0\right)(t+c)\\
&+\Bigg[\Bigg(\frac{9}{4}\gamma_0^2 - \frac{3}{2}\gamma_0^4 + \frac{15}{8}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{45}{8}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{69}{16}\gamma_0^4 e_0^2 + \frac{15}{4}\gamma_0^4 e'^2\\
&\qquad - \frac{519}{256}\gamma_0^2 e_0^4 - \frac{75}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e'^2\Bigg)\frac{n'}{n_0}\\
&\quad -\left(\frac{27}{8}\gamma_0^2 - \frac{135}{16}\gamma_0^4 - \frac{819}{32}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{297}{8}\gamma_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\quad -\left(\frac{1269}{128}\gamma_0^2 - \frac{21}{16}\gamma_0^4 - \frac{54861}{256}\gamma_0^2 e_0^2 + \frac{10665}{256}\gamma_0^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\qquad - \frac{7233}{128}\gamma_0^2\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{2086301}{8192}\gamma_0^2\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{315}{32}\gamma_0^2\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c)\\
&+\left[\frac{9}{64}\gamma_0^4\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{81}{128}\gamma_0^4\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin 2\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{52})\left\{\begin{aligned} l &= (l) + l_0(t+c) \\ &\quad + \left[\left(\frac{21}{4}\gamma_0^2 - \frac{159}{16}\gamma_0^4 + \frac{219}{64}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{105}{8}\gamma_0^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\right. \\ &\qquad + \left(\frac{99}{16}\gamma_0^2 + \frac{549}{128}\gamma_0^4 + \frac{5283}{512}\gamma_0^2 e_0^2 - \frac{1161}{16}\gamma_0^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{6105}{128}\gamma_0^2\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{66155}{256}\gamma_0^2\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin\theta_0(t+c) \\ &\quad - \frac{225}{256}\gamma_0^4\frac{n'^2}{n_0^2}\sin 2\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

(g) et (l) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); g_0 et l_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h + g + l$ vient de ce que l'on a

$$h + g + l = \frac{1}{2}\theta + g + l + h' + g' + l'.$$

Les six formules (E'_{52}), (F'_{52}), (G'_{52}), (H'_{52}), (K_{52}), (L_{52}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction **R** y est supposée réduite aux deux termes (1) et (166); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la seconde règle du n° **30**, et si nous remarquons que h est égal à $\frac{1}{2}\theta + h' + g' + l'$, nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1 + \left[\left(\frac{45}{32}\gamma^2 - \frac{1323}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{225}{32}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{3873}{128}\gamma^2\frac{n'^6}{n^6} + \frac{29811}{512}\gamma^2\frac{n'^7}{n^7}\right]\cos(2h - 2h' - 2g' - 2l')\right\},$$

e^2 par

$$\begin{aligned} e^2 &+ \left[\left(\frac{75}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{75}{32}\gamma^2 e^4\right)\frac{n'}{n} - \left(\frac{4725}{32}\gamma^4 e^2 - \frac{4725}{256}\gamma^2 e^4\right)\frac{n'^2}{n^2}\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{675}{32}\gamma^2 e^2\frac{n'^3}{n^3} - \frac{10125}{128}\gamma^2 e^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\cos(2h - 2h' - 2g' - 2l') \\ &+ \frac{225}{64}\gamma^4 e^2\frac{n'^2}{n^2}\cos 2(2h - 2h' - 2g' - 2l'), \end{aligned}$$

γ^2 par

$$\gamma^2 + \Big[\Big(\frac{3}{4}\gamma^2 - \frac{3}{4}\gamma^4 + \frac{3}{2}\gamma^2 e^2 - \frac{15}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{99}{16}\gamma^4 e^2 + \frac{15}{8}\gamma^4 e'^2$$

$$+ \frac{291}{256}\gamma^2 e^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{39}{64}\gamma^2 e'^4\Big)\frac{n'}{n}$$

$$- \Big(\frac{9}{16}\gamma^2 - \frac{27}{16}\gamma^4 - \frac{153}{32}\gamma^2 e^2 + \frac{99}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{8}\gamma^6 - \frac{1989}{128}\gamma^4 e^2$$

$$- \frac{297}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{2925}{2048}\gamma^2 e^4 + \frac{567}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$- \Big(\frac{75}{64}\gamma^2 - \frac{3}{8}\gamma^4 - \frac{2283}{128}\gamma^2 e^2 + \frac{525}{128}\gamma^2 e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$- \Big(\frac{1165}{256}\gamma^2 - \frac{7071}{512}\gamma^4 - \frac{1717}{16}\gamma^2 e^2 + \frac{21545}{256}\gamma^2 e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$- \frac{48785}{3072}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{1282261}{36864}\gamma^2\frac{n'^6}{n^6} + \frac{45}{32}\gamma^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{1395}{512}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos(2h - 2h' - 2g' - 2l$$

$$- \Big[\frac{225}{256}\gamma^4 e^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{27}{128}\gamma^4\frac{n'^3}{n^3} - \frac{81}{128}\gamma^4\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cos 2(2h - 2h' - 2g' - 2l'),$$

l par

$$l + \Big[\Big(\frac{21}{4}\gamma^2 - \frac{159}{16}\gamma^4 + \frac{219}{64}\gamma^2 e^2 - \frac{105}{8}\gamma^2 e'^2\Big)\frac{n'}{n}$$

$$+ \Big(\frac{99}{16}\gamma^2 + \frac{549}{128}\gamma^4 + \frac{5283}{512}\gamma^2 e^2 - \frac{1161}{16}\gamma^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \frac{6105}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{66155}{256}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\Big]\sin(2h - 2h' - 2g' - 2l')$$

$$- \frac{225}{256}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}\sin 2(2h - 2h' - 2g' - 2l'),$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l + \Big[\Big(\frac{9}{4}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma^4 + \frac{15}{8}\gamma^2 e^2 - \frac{45}{8}\gamma^2 e'^2 + \frac{69}{16}\gamma^4 e^2$$

$$+ \frac{15}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{519}{256}\gamma^2 e^4 - \frac{75}{16}\gamma^2 e^2 e'^2\Big)\frac{n'}{n}$$

Cette formule se continue a la page suivante.

$$-\left(\frac{27}{8}\gamma^2-\frac{135}{16}\gamma^4-\frac{819}{32}\gamma^2e^2+\frac{297}{8}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{1269}{128}\gamma^2-\frac{21}{16}\gamma^4-\frac{54861}{256}\gamma^2e^2+\frac{10665}{256}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\frac{7233}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{2086301}{8192}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{315}{32}\gamma^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin(2h-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\frac{9}{64}\gamma^4\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{128}\gamma^4\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin 2(2h-2h'-2g'-2l'),$$

h par

$$h-\Bigg[\Bigg(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\gamma^2+\frac{3}{4}e^2-\frac{15}{16}e'^2-\frac{123}{32}\gamma^2e^2+\frac{15}{8}\gamma^2e'^2$$

$$+\frac{291}{512}e^4-\frac{15}{8}e^2e'^2+\frac{39}{128}e'^4\Bigg)\frac{n'}{n}$$

$$-\Bigg(\frac{9}{32}-\frac{27}{16}\gamma^2-\frac{153}{64}e^2+\frac{99}{32}e'^2+\frac{27}{16}\gamma^4+\frac{747}{256}\gamma^2e^2$$

$$-\frac{297}{16}\gamma^2e'^2+\frac{2925}{4096}e^4+\frac{567}{64}e^2e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{273}{512}-\frac{57}{512}\gamma^2-\frac{591}{64}e^2+\frac{2505}{1024}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{4903}{2048}-\frac{15357}{1024}\gamma^2-\frac{221963}{4096}e^2+\frac{43819}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$-\frac{397327}{49152}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{10651505}{589824}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{45}{64}\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{1395}{1024}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin(2h-2h'-2g'-2l')$$

$$+\Bigg[\Bigg(\frac{9}{128}-\frac{9}{64}\gamma^2+\frac{9}{32}e^2-\frac{45}{128}e'^2+\frac{9}{64}\gamma^4-\frac{513}{512}\gamma^2e^2$$

$$+\frac{45}{64}\gamma^2e'^2+\frac{2025}{4096}e^4-\frac{45}{32}e^2e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{27}{256}-\frac{135}{256}\gamma^2-\frac{351}{512}e^2+\frac{459}{512}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{657}{4096}+\frac{351}{1024}\gamma^2-\frac{153}{64}e^2-\frac{153}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$-\frac{3063}{4096}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{1161763}{524288}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{135}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin 2(2h-2h'-2g'-2l')$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$-\left[\left(\frac{9}{512}-\frac{27}{512}\gamma^2+\frac{27}{256}e^2-\frac{135}{1024}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$

$$-\left(\frac{81}{2048}-\frac{243}{1024}\gamma^2-\frac{729}{4096}e^2+\frac{243}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$\left.-\frac{1485}{32768}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{30357}{131072}\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin 3(2h-2h'-2g'-2l')$$

$$+\left[\left(\frac{81}{16384}-\frac{81}{4096}\gamma^2+\frac{81}{2048}e^2-\frac{405}{8192}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{243}{16384}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{2997}{262144}\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin 4(2h-2h'-2g'-2l')$$

$$-\left[\frac{243}{163840}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{729}{131072}\frac{n'^6}{n^6}\right]\sin 5(2h-2h'-2g'-2l')$$

$$+\frac{243}{524288}\frac{n'^6}{n^6}\sin 6(2h-2h'-2g'-2l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{52}), (G'_{52}), (H'_{52}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 685);

G_0 = ancienne valeur de G (page 814)

$$+\sqrt{a\mu}\cdot\frac{225}{128}\gamma^4 e^2\frac{n'^2}{n^2};$$

H_0 = ancienne valeur de H (page 803),

$$H_1=\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{3}{2}\gamma^4+\frac{9}{4}\gamma^2 e^2-\frac{15}{4}\gamma^2 e'^2-\frac{9}{4}\gamma^4 e^2+\frac{15}{4}\gamma^4 e'^2-\frac{75}{128}\gamma^2 e^4-\frac{45}{8}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}\right.$$

$$+\left(\frac{9}{8}\gamma^2-\frac{27}{8}\gamma^4-\frac{81}{8}\gamma^2 e^2+\frac{99}{8}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$\left.+\left(\frac{75}{32}\gamma^2-\frac{3}{4}\gamma^4-\frac{1179}{32}\gamma^2 e^2+\frac{525}{64}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{1165}{128}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}+\frac{56597}{1536}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5}-\frac{45}{16}\gamma^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0\,(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{52}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots) =$$

$$\sqrt{a\mu}\Big\{\left(\frac{9}{16}\gamma^2 - \frac{27}{16}\gamma^4 + \frac{63}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{45}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{8}\gamma^6 - \frac{603}{64}\gamma^4 e^2 + \frac{135}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{297}{128}\gamma^2 e^4 - \frac{315}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{27}{32}\gamma^2 - \frac{81}{16}\gamma^4 - \frac{189}{32}\gamma^2 e^2 + \frac{459}{64}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{1395}{1024}\gamma^2 - \frac{81}{512}\gamma^4 - \frac{39267}{2048}\gamma^2 e^2 - \frac{2259}{512}\gamma^2 e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{5883}{1024}\gamma^2\frac{n'^5}{n^5} - \frac{637019}{32768}\gamma^2\frac{n'^6}{n^6} + \frac{135}{64}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la seconde règle du nº **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 828 à 831) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 52ᵉ opération, et y ajoutant

$$+ n'(H - H_0) - n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (166) de R, joint à la quantité

$$+ n'(H - H_0),$$

doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$- n'\cdot\frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1), et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [52 . . . 1, 166]. Ensuite les nouvelles valeurs de G, H seront

$$G = \sqrt{a\mu}\Big\{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{25}{4}\gamma^4 e^2 - \frac{25}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 + 50\gamma^6 e^2 - \frac{275}{8}\gamma^4 e^4 + \frac{25}{16}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8$$

$$-\left(\frac{1425}{32}\gamma^4 e^2 - \frac{1425}{128}\gamma^2 e^4\right)\frac{n'}{n}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{225}{64}e^2-\frac{225}{16}\gamma^2e^2-\frac{675}{256}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2+\frac{3785}{32}\gamma^4e^2-\frac{635}{128}\gamma^2e^4-\frac{325}{16}\gamma^2e^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{225}{256}e^6-\frac{975}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{675}{128}e^2-\frac{2025}{32}\gamma^2e^2-\frac{2025}{256}e^4+\frac{4675}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{13}{64}-\frac{15}{16}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{15}{32}\gamma^4-\frac{175059}{512}\gamma^2e^2-\frac{225}{32}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{257925}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{167}{8}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}-\frac{895}{16}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}-\frac{25}{16}e^2e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5625}{1024}e^2\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\},$$

$$\mathrm{H}=\sqrt{a\mu}\Bigg\{1-2\gamma^2-\frac{1}{2}e^2+\gamma^2e^2-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{4}\gamma^2e^4-\frac{1}{16}e^6-\frac{75}{16}\gamma^4e^4+\frac{1}{8}\gamma^2e^6-\frac{5}{128}e^8$$

$$+\left(\frac{9}{16}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2-\frac{27}{16}\gamma^4-\frac{387}{32}\gamma^2e^2-\frac{45}{16}\gamma^2e'^2-\frac{675}{256}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2+\frac{9}{8}\gamma^6\right.$$

$$\left.+\frac{243}{16}\gamma^4e^2+\frac{135}{16}\gamma^4e'^2+\frac{117}{8}\gamma^2e^4-\frac{965}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{225}{256}e^6-\frac{975}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{27}{32}\gamma^2-\frac{675}{128}e^2-\frac{81}{16}\gamma^4+\frac{459}{8}\gamma^2e^2+\frac{459}{64}\gamma^2e'^2+\frac{2025}{256}e^4-\frac{4675}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{4589}{1024}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{22143}{512}\gamma^4-\frac{725641}{2048}\gamma^2e^2+\frac{24699}{512}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{257925}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{14129}{3072}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{1411823}{98304}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}$$

$$+\left(\frac{25}{16}\gamma^2e'^2-\frac{25}{16}e^2e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}+\left(\frac{765}{256}\gamma^2+\frac{5625}{1024}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}.$$

Quant à la valeur de L, elle est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e^ opération (page 685). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{da}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{an}\Big\{ 2 + \left(\frac{1969}{32} - \frac{1629}{8}\gamma^2 + \frac{17887}{64}e^2 + \frac{29535}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{415}{2} - \frac{2745}{4}\gamma^2 + \frac{31395}{16}e^2 + \frac{11205}{4}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{730005}{512}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{54693247}{9216}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{527}{8} - \frac{3633}{16}\gamma^2 - \frac{4151}{64}e^2 + \frac{7905}{16}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{2757}{8} - \frac{2493}{2}\gamma^2 - \frac{7215}{16}e^2 + \frac{74439}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{536663}{256}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{1737817}{192}\frac{n'^7}{n^7}\Big\},$$

$$\frac{da}{d\mathrm{H}} = -\frac{1}{an}\Big\{\left(\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\gamma^2 - \frac{1809}{32}e^2 + \frac{225}{32}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \left(\frac{167}{8} - 66\gamma^2 - \frac{2625}{8}e^2 + \frac{4509}{16}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5} + \frac{28775}{512}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{2874959}{9216}\frac{n'^7}{n^7}\Big\};$$

$$\frac{de}{d\mathrm{L}} = \frac{1}{a^2ne}\Big\{ 1 - e^2 + \frac{25}{2}\gamma^4 - \frac{25}{4}\gamma^2e^2 + 100\gamma^6 - 150\gamma^4e^2 + \frac{275}{16}\gamma^2e^4$$

$$- \left(\frac{1425}{16}\gamma^4 - \frac{1425}{32}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+ \left(\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma^2 + \frac{225}{64}e^2 + \frac{325}{32}e'^2 + \frac{13195}{32}\gamma^4 - \frac{10495}{64}\gamma^2e^2 - \frac{325}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left. - \frac{1125}{64}e^4 + \frac{325}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+ \left(\frac{675}{64} - \frac{2025}{16}\gamma^2 + \frac{675}{128}e^2 + \frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+ \left(\frac{316927}{2048} - \frac{305493}{256}\gamma^2 - \frac{1425967}{4096}e^2 + \frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+ \frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6} - \frac{25}{8}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2} + \frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{de}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{a^2ne}\Big\{ 1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{25}{2}\gamma^4 - \frac{25}{2}\gamma^2e^2 + \frac{21}{32}e^4 + 100\gamma^6 - \frac{425}{2}\gamma^4e^2 + \frac{775}{16}\gamma^2e^4 - \frac{27}{32}e^6$$

$$- \left(\frac{1425}{16}\gamma^4 - \frac{1425}{16}\gamma^2e^2 + \frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\left(\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{325}{32}e'^2+\frac{13195}{32}\gamma^4-\frac{8245}{32}\gamma^2e^2-\frac{325}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{6895}{512}e^4-\frac{975}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$+\left(\frac{675}{64}-\frac{2025}{16}\gamma^2-\frac{675}{64}e^2+\frac{4675}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{316927}{2048}-\frac{305493}{256}\gamma^2-\frac{3598467}{4096}e^2+\frac{660735}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{4988483}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{1043900203}{196608}\frac{n'^6}{n^6}-\frac{25}{8}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{5625}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{de}{dH}=\frac{1}{a^2ne}\Big\{-\frac{25}{4}\gamma^2e^2+\frac{25}{32}e^4-75\gamma^4e^2+\frac{275}{8}\gamma^2e^4-\frac{25}{32}e^6+\left(\frac{1425}{32}\gamma^2e^2-\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{225}{32}e^2-\frac{10495}{64}\gamma^2e^2+\frac{4195}{512}e^4+\frac{325}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2025}{64}e^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{257133}{1024}e^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\}.$$

$$\frac{d\gamma}{dL}=\frac{1}{a^2n\gamma}\Big\{-\frac{25}{8}\gamma^4+\frac{25}{16}\gamma^2e^2-\frac{75}{4}\gamma^6+\frac{425}{16}\gamma^4e^2-\frac{175}{64}\gamma^2e^4+\left(\frac{1425}{64}\gamma^4-\frac{1425}{128}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{351}{64}\gamma^2-\frac{11701}{128}\gamma^4+\frac{10171}{256}\gamma^2e^2-\frac{305}{64}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{783}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{335319}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dG}=\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1-2\gamma^2+\frac{1}{2}e^2+\frac{25}{2}\gamma^4-\frac{27}{2}\gamma^2e^2+\frac{37}{32}e^4+75\gamma^6-\frac{625}{4}\gamma^4e^2+\frac{463}{16}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$

$$-\left(\frac{1425}{16}\gamma^4-\frac{1425}{16}\gamma^2e^2+\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{9}{32}-\frac{81}{4}\gamma^2+\frac{81}{64}e^2-\frac{45}{32}e'^2+\frac{11485}{32}\gamma^4-\frac{7291}{32}\gamma^2e^2+\frac{85}{8}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{5887}{512}e^4-\frac{405}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{27}{64}+27\gamma^2-\frac{81}{32}e^2+\frac{459}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{5711}{2048}-\frac{308089}{1024}\gamma^2-\frac{11553}{4096}e^2+\frac{27489}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{48541}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{7249715}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{765}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH}=-\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1+\frac{1}{2}e^2-\frac{25}{4}\gamma^2e^2+\frac{37}{32}e^4-\frac{125}{2}\gamma^4e^2+\frac{175}{8}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{1425}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{9}{32} - \frac{27}{16}\gamma^2 + \frac{81}{64}e^2 - \frac{45}{32}e'^2 + \frac{27}{16}\gamma^4 - \frac{7831}{64}\gamma^2 e^2 + \frac{135}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{5887}{512}e^4 - \frac{405}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{27}{64} - \frac{81}{16}\gamma^2 - \frac{81}{32}e^2 + \frac{459}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{5711}{2048} - \frac{22869}{512}\gamma^2 - \frac{11553}{4096}e^2 + \frac{27489}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\frac{48541}{6144}\frac{n'^5}{n^5} + \frac{7249715}{196608}\frac{n'^6}{n^6} + \frac{25}{32}e'^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} + \frac{765}{512}\frac{n'^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

53^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (167) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1)* avec le terme périodique (167), dans lequel l'argument est $2h - 2h' - 2g' - 3l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R = \frac{\mu}{2a}$$

$$+ m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e^4 - \frac{33}{2}\gamma^4 e^2$$

$$+ \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2$$

$$+\left(\frac{9}{16}\gamma^2 + \frac{225}{64}e^2 - \frac{27}{16}\gamma^4 - \frac{387}{32}\gamma^2 e^2 - \frac{45}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{273}{64}\gamma^4 + \frac{5709}{64}\gamma^2 e^2 - \frac{333}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

---

* Il ne faut prendre pour ce terme (1), dans le chapitre IV, que la partie qui existait dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des cinquante-deux premières opérations.

$$-\left(\frac{255}{32}-\frac{31515}{1024}\gamma^2-\frac{551115}{4096}e^2+\frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\left(\frac{5515}{192}-\frac{296779}{3072}\gamma^2-\frac{6380965}{12288}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{15}{128}e'^2+\frac{225}{512}\frac{n'}{n}-\frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{\frac{21}{4}\gamma^2 e'-\frac{21}{4}\gamma^4 e'+\frac{63}{8}\gamma^2 e^2 e'-\frac{369}{32}\gamma^2 e'^3-\frac{63}{8}\gamma^4 e^2 e'-\frac{525}{256}\gamma^2 e^4 e'$$

$$+\left(\frac{27}{8}\gamma^2 e'-\frac{81}{8}\gamma^4 e'+\frac{2103}{32}\gamma^2 e^2 e'-\frac{1107}{32}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'}{n}$$

$$-\left(\frac{537}{32}\gamma^2 e'-\frac{2049}{64}\gamma^4 e'-\frac{33759}{128}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\frac{22815}{256}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{883555}{2048}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{435}{64}\gamma^2 e'\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}$$

$$\times\cos(2h-2h'-2g'-3l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=0,\qquad i'=0,\qquad i''=2,\qquad i'''=-3.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt}=0,\qquad \frac{dG}{dt}=0.$$

L et G sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et e en fonction de γ; en les résolvant, on trouve

$$(\mathrm{A}_{53})\left\{\begin{aligned}a=\frac{L^2}{\mu}\Bigg\{1&-\left[\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{1069}{16}\frac{L-G}{L}+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}\\&-\left[\frac{79}{8}-\frac{167}{4}\gamma^2-\frac{731}{2}\frac{L-G}{L}+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5L^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6L^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7L^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B}_{53})\left\{\begin{aligned}e^2=2\frac{L-G}{L}\Bigg\{1&-\frac{1}{2}\frac{L-G}{L}+\frac{25}{2}\gamma^4-\frac{25}{4}\gamma^2\frac{L-G}{L}\\&+\left[\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2-\frac{675}{32}\frac{L-G}{L}+\frac{325}{32}e'^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4}+\frac{675}{64}\frac{n'^3L^9}{\mu^6}+\frac{317343}{2048}\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a et e^2 par leurs valeurs en γ dans l'expression de H, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} = \mathrm{G} + \mathrm{L} \Big\{ & -2\gamma^2 + 2\gamma^2 \frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{25}{2}\gamma^4 \frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{25}{4}\gamma^2 \left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 \\
& + \left[\frac{9}{16}\gamma^2 - \frac{27}{16}\gamma^4 + 18\gamma^2 \frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{45}{16}\gamma^2 e'^2\right] \frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} - \frac{27}{32}\gamma^2 \frac{n'^3 \mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{5965}{1024}\gamma^2 \frac{n'^4 \mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \Big\};
\end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\dfrac{d\mathrm{H}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dh}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{53}) \left\{ \begin{aligned}
\frac{d.\gamma^2}{dt} = \frac{n'^2 \mathrm{L}^3}{\mu^2} \Big\{ & \frac{21}{4}\gamma^2 e' - \frac{21}{4}\gamma^4 e' + 21\gamma^2 \frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} e' - \frac{369}{32}\gamma^2 e'^3 - \frac{693}{8}\gamma^4 \frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} e' \\
& + \frac{1365}{64}\gamma^2 \left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 e' \\
& + \left[\frac{27}{8}\gamma^2 e' - \frac{81}{8}\gamma^4 e' + \frac{2157}{16}\gamma^2 \frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} e' - \frac{1107}{32}\gamma^2 e'^3\right] \frac{n' \mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& - \left[\frac{1959}{128}\gamma^2 e' - \frac{2775}{128}\gamma^4 e' - \frac{43269}{64}\gamma^2 \frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} e'\right] \frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} \\
& - \frac{23139}{256}\gamma^2 e' \frac{n'^3 \mathrm{L}^9}{\mu^6} - \frac{3490825}{8192}\gamma^2 e' \frac{n'^4 \mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{435}{64}\gamma^2 e' \cdot \frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2} \Big\} \sin\theta.
\end{aligned} \right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} - 3n' = -2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 3n';$$

en tenant compte des valeurs de $\dfrac{da}{d\mathrm{H}}$, $\dfrac{de}{d\mathrm{H}}$, $\dfrac{d\gamma}{d\mathrm{H}}$ données à la suite de la 52$^{\mathrm{e}}$ opération, et remplaçant a et e^2 par leurs valeurs en γ, on trouve

$$(\mathrm{D}_{53}) \left\{ \begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} = n' \Big\{ & -3 - \left[\frac{3}{2} - 3\gamma^2 + 6\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{9}{4}e'^2\right] \frac{n' \mathrm{L}^3}{\mu^2} \\
& + \left[\frac{9}{16} - \frac{27}{8}\gamma^2 - \frac{189}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} - \frac{45}{16}e'^2\right] \frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{177}{64}\frac{n'^3 \mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{10949}{1024}\frac{n'^4 \mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \Big\} \\
& + \frac{n'^2 \mathrm{L}^3}{\mu^2} \Big\{ \frac{21}{4}e' - \frac{21}{2}\gamma^2 e' + 21\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} e' - \frac{369}{32}e'^3 - \frac{861}{8}\gamma^2 \frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} e' + \frac{1365}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 e' \\
& + \left[\frac{27}{8}e' - \frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{2157}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} e' - \frac{1107}{32}e'^3\right] \frac{n' \mathrm{L}^3}{\mu^2}
\end{aligned} \right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$(\mathrm{D}_{53})\left\{\begin{aligned}
&-\left[\frac{1959}{128}e' - \frac{1671}{32}\gamma^2 e' - \frac{43269}{64}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&\qquad - \frac{23139}{256}e'\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} - \frac{3490825}{8192}e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{435}{64}e'\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{53}), (D_{53}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{H}\right)$ a été remplacée par la variable γ dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{53})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Bigg\{&\left[\frac{7}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{7}{4}\gamma_0^4 e' + 7\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' - \frac{123}{32}\gamma_0^2 e'^3 - \frac{231}{8}\gamma_0^4\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right.\\
&\qquad\left. + \frac{455}{64}\gamma_0^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&+\left[\frac{1}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{3}{4}\gamma_0^4 e' + \frac{607}{16}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' - \frac{699}{64}\gamma_0^2 e'^3\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&-\left[\frac{627}{128}\gamma_0^2 e' - \frac{711}{128}\gamma_0^4 e' - \frac{12379}{64}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\qquad - \frac{6661}{256}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{1011573}{8192}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{145}{64}\gamma_0^2 e'\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c)
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{53})\left\{\begin{aligned}
\theta &= \theta_0(t+c)\\
&-\Bigg\{\left[\frac{7}{4}e' - \frac{7}{2}\gamma_0^2 e' + 7\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' - \frac{123}{32}e'^3 - \frac{287}{8}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right.\\
&\qquad\left. + \frac{455}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&\quad+\left[\frac{1}{4}e' - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e' + \frac{607}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' - \frac{699}{64}e'^3\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&\quad-\left[\frac{627}{128}e' - \frac{225}{16}\gamma_0^2 e' - \frac{12379}{64}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\qquad - \frac{6661}{256}e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{1011573}{8192}e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{145}{64}e'\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c)\\
&+\Bigg\{\left[\frac{49}{64}e'^2 - \frac{49}{32}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{49}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{7}{32}e'^2\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} - \frac{4373}{1024}e'^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

γ_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = n' \left\{ -3 - \left[\frac{3}{2} - 3\gamma_0^2 + 6\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{9}{4}e'^2 \right] \frac{n'\,\mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{9}{16}\,\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{177}{64}\,\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} \right\}.$$

Si l'on prend la valeur de γ^2 donnée par la formule (E_{53}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{53}), (B_{53}), on en déduit les valeurs de a et de e^2 en fonction de t, qui sont

$$(\mathrm{G}_{53})\quad \left\{ \begin{aligned} a = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu} \Bigg\{ & 1 - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma_0^2 - \frac{1069}{16}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{195}{64}e'^2 \right] \frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ & - \left[\frac{79}{8} - \frac{167}{4}\gamma_0^2 - \frac{731}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{2133}{16}e'^2 \right] \frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\,\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\,\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}} \Bigg\} \\ & + \frac{\mathrm{L}^2}{\mu} \left\{ \frac{105}{32}\gamma_0^2 e'\,\frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{2353}{32}\gamma_0^2 e'\,\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} \right\} \cos\theta_0(t+c), \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{H}_{53})\quad \left\{ \begin{aligned} e^2 = 2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} \Bigg\{ & 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{25}{2}\gamma_0^4 - \frac{25}{4}\gamma_0^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} \\ & + \left[\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma_0^2 - \frac{675}{32}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{325}{32}e'^2 \right] \frac{n'^2\,\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{675}{64}\,\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{317343}{2048}\,\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \Bigg\} \\ & + 2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} \left\{ \left[\frac{175}{4}\gamma_0^4 e' - \frac{175}{16}\gamma_0^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' \right] \frac{n'\,\mathrm{L}^3}{\mu^2} - \frac{1575}{32}\gamma_0^2 e'\,\frac{n'^3\,\mathrm{L}^9}{\mu^6} \right\} \cos\theta_0(t+c). \end{aligned} \right.$$

Désignons maintenant par a_0 et e_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et e^2, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu} \Bigg\{ & 1 - \left[\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma_0^2 - \frac{1069}{16}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{195}{64}e'^2 \right] \frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \\ & - \left[\frac{79}{8} - \frac{167}{4}\gamma_0^2 - \frac{731}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{2133}{16}e'^2 \right] \frac{n'^5\,\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\,\frac{n'^6\,\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\,\frac{n'^7\,\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}} \Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_0^2 = 2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} \Bigg\{ & 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{25}{2}\gamma_0^4 - \frac{25}{4}\gamma_0^2\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} \\ & + \left[\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma_0^2 - \frac{675}{32}\,\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}} + \frac{325}{32}e'^2 \right] \frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{675}{64}\,\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{317343}{2048}\,\frac{n'^4\,\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} \Bigg\}. \end{aligned}$$

De ces relations nous pouvons tirer L et G en fonction de a_0 et e_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et G par les valeurs ainsi obtenues dans les

formules (E_{53}), (F_{53}), (G_{53}), (H_{53}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{53})\left\{\begin{aligned}\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Bigg[\Bigg(&\frac{7}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{7}{4}\gamma_0^4 e' + \frac{7}{2}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{123}{32}\gamma_0^2 e'^3 - \frac{231}{16}\gamma_0^4 e_0^2 e' + \frac{679}{256}\gamma_0^2 e_0^4 e'\Bigg)\frac{n'}{n_0}\\ &+\left(\frac{1}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{3}{4}\gamma_0^4 e' + \frac{607}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{699}{64}\gamma_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &-\left(\frac{627}{128}\gamma_0^2 e' - \frac{711}{128}\gamma_0^4 e' - \frac{9229}{128}\gamma_0^2 e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &-\frac{6661}{256}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{1002837}{8192}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{145}{64}\gamma_0^2 e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0(t+c)\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{53})\left\{\begin{aligned}\theta = \theta_0&(t+c)\\ -\Bigg[\Bigg(&\frac{7}{4}e' - \frac{7}{2}\gamma_0^2 e' + \frac{7}{2}e_0^2 e' - \frac{123}{32}e'^3 - \frac{287}{16}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{679}{256}e_0^4 e'\Bigg)\frac{n'}{n_0}\\ &+\left(\frac{1}{4}e' - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e' + \frac{607}{32}e_0^2 e' - \frac{699}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &-\left(\frac{627}{128}e' - \frac{225}{16}\gamma_0^2 e' - \frac{9229}{128}e_0^2 e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\ &-\frac{6661}{256}e'\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{1002837}{8192}e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{145}{64}e'\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0(t+c)\\ +\Bigg[\Bigg(&\frac{49}{64}e'^2 - \frac{49}{32}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{49}{16}e_0^2 e'^2\Bigg)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{7}{32}e'^2\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{4373}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg]\sin 2\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{53})\qquad a = a_0\left\{1 + \left[\frac{105}{32}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{2353}{32}\gamma_0^2 e'\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\cos\theta_0(t+c)\right\},$$

$$(H'_{53})\quad e^2 = e_0^2 + \left[\left(\frac{175}{4}\gamma_0^4 e_0^2 e' - \frac{175}{32}\gamma_0^2 e_0^4 e'\right)\frac{n'}{n_0} - \frac{1575}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos\theta_0(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n'\left[-3 - \left(\frac{3}{2} - 3\gamma_0^2 + 3e_0^2 + \frac{9}{4}e'^2\right)\frac{n'}{n_0} + \frac{9}{16}\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{177}{64}\frac{n'^3}{n_0^3}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de l en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Big[& 1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2 \\
& + \left(\frac{27}{8}\gamma^2 + \frac{675}{32}e^2\right)\frac{n'}{n} - \left(\frac{451}{64} - \frac{747}{32}\gamma^2 - \frac{11325}{128}e^2 + \frac{6765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Big] \\
- \frac{n'^2}{n}\Big[& \frac{63}{4}\gamma^2 e' - \frac{21}{2}\gamma^4 e' + \frac{105}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{1107}{32}\gamma^2 e'^3 \\
& + \left(\frac{81}{4}\gamma^2 e' - \frac{405}{8}\gamma^4 e' + \frac{10461}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n} \\
& - \frac{9099}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{146787}{128}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\Big]\cos\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Big[& \frac{7}{4} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{21}{8}e'^2 \\
& + \left(\frac{225}{32} - \frac{81}{4}\gamma^2 + \frac{675}{64}e^2 + \frac{825}{32}e'^2\right)\frac{n'}{n} + \frac{3265}{128}\frac{n'^2}{n^2} + \frac{243925}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\Big] \\
- \frac{n'^2}{n}\Big[& \frac{147}{4}\gamma^2 e' - \frac{1113}{16}\gamma^4 e' + \frac{1533}{64}\gamma^2 e^2 e' + \frac{2481}{16}\gamma^2 e'\frac{n'}{n} + \frac{8133}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}\Big]\cos\theta;
\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, e, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{53}), (F'_{53}), (G'_{53}), (H'_{53}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{53})\left\{\begin{aligned}
h+g+l = {} & (g) + (l) + \frac{1}{2}(2h' + 2g' + 3l') + \left(\frac{1}{2}\theta_0 + g_0 + l_0\right)(t+c) \\
& + \Big[\left(\frac{21}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{7}{2}\gamma_0^4 e' + \frac{35}{8}\gamma_0^2 e_0^2 e' - \frac{369}{32}\gamma_0^2 e'^3\right)\frac{n'}{n_0} \\
& + \left(\frac{3}{2}\gamma_0^2 e' - \frac{15}{4}\gamma_0^4 e' + \frac{3011}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\
& - \frac{729}{16}\gamma_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{79473}{256}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4}{n_0^4}\Big]\sin\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(L_{53})\left\{\begin{aligned}
l = {} & (l) + l_0(t+c) \\
& + \Big[\left(\frac{49}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{371}{16}\gamma_0^4 e' + \frac{511}{64}\gamma_0^2 e_0^2 e'\right)\frac{n'}{n_0} + \frac{631}{16}\gamma_0^2 e'\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{8917}{64}\gamma_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3}\Big]\sin\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.$$

(g) et (l) sont les deux constantes introduites par l'intégration (n° **21**); g_0 et l_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+g+l+\frac{1}{2}(2h'+2g'+3l').$$

Les six formules (E'_{53}), (F'_{53}), (G'_{53}), (H'_{53}), (K_{53}), (L_{53}) constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (167); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la seconde règle du n° **30**, et si nous remarquons que h est égal à

$$\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}(2h'+2g'+3l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1+\left[\frac{105}{32}\gamma^2e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{2353}{32}\gamma^2e'\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h-2h'-2g'-3l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2+\left[\left(\frac{175}{4}\gamma^4e^2e'-\frac{175}{32}\gamma^2e^3e'\right)\frac{n'}{n}-\frac{1575}{32}\gamma^2e^2e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\cos(2h-2h'-2g'-3l').$$

γ^2 par

$$\begin{aligned}\gamma^2+\Bigg[&\left(\frac{7}{4}\gamma^2e'-\frac{7}{4}\gamma^4e'+\frac{7}{2}\gamma^2e^2e'-\frac{123}{32}\gamma^2e'^3-\frac{231}{16}\gamma^4e^2e'+\frac{679}{256}\gamma^2e^4e'\right)\frac{n'}{n}\\&+\left(\frac{1}{4}\gamma^2e'-\frac{3}{4}\gamma^4e'+\frac{607}{32}\gamma^2e^2e'-\frac{699}{64}\gamma^2e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\\&-\left(\frac{627}{128}\gamma^2e'-\frac{711}{128}\gamma^4e'-\frac{9229}{128}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\\&-\frac{6661}{256}\gamma^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1002837}{8192}\gamma^2e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{145}{64}\gamma^2e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(2h-2h'-2g'-3l')\end{aligned}$$

l par

$$l+\left[\left(\frac{49}{4}\gamma^2 e'-\frac{371}{16}\gamma^4 e'+\frac{511}{64}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n}+\frac{631}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{8917}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2h-2h'-2g'-3l'),$$

$h+g+l$ par

$$\begin{aligned}h+g+l+\Bigg[&\left(\frac{21}{4}\gamma^2 e'-\frac{7}{2}\gamma^4 e'+\frac{35}{8}\gamma^2 e^2 e'-\frac{369}{32}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'}{n}\\&+\left(\frac{3}{2}\gamma^2 e'-\frac{15}{4}\gamma^4 e'+\frac{3011}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\\&-\frac{729}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{79473}{256}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(2h-2h'-2g'-3l'),\end{aligned}$$

h par

$$\begin{aligned}h-\Bigg[&\left(\frac{7}{8}e'-\frac{7}{4}\gamma^2 e'+\frac{7}{4}e^2 e'-\frac{123}{64}e'^3-\frac{287}{32}\gamma^2 e^2 e'+\frac{679}{512}e^4 e'\right)\frac{n'}{n}\\&+\left(\frac{1}{8}e'-\frac{3}{4}\gamma^2 e'+\frac{607}{64}e^2 e'-\frac{699}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\\&-\left(\frac{627}{256}e'-\frac{225}{32}\gamma^2 e'-\frac{9229}{256}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}\\&-\frac{6661}{512}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{1002837}{16384}e'\frac{n'^5}{n^5}+\frac{145}{128}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin(2h-2h'-2g'-3l')\\+\Bigg[&\left(\frac{49}{128}e'^2-\frac{49}{64}\gamma^2 e'^2+\frac{49}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{7}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{4373}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(2h-2h'-2g'-3l').\end{aligned}$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{53}), (G'_{53}), (H'_{53}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 685);

G_0 = ancienne valeur de G (page 832);

H_0 = ancienne valeur de H (page 833),

$$H_1=\sqrt{a\mu}\left\{-\left(\frac{7}{2}\gamma^2 e'-\frac{7}{2}\gamma^4 e'+\frac{21}{4}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n}-\frac{1}{2}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{345}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right\}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{53}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{49}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{147}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{343}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{7}{8}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{9187}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la seconde règle du n° 30, et qu'on tienne compte des valeurs de i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 843 et 844) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 53^e^ opération, et y ajoutant

$$+\frac{3}{2}n'(H - H_0) - \frac{3}{2}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (167) de R, joint à la quantité

$$+\frac{3}{2}n'(H - H_0),$$

doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{3}{2}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [53 · · · 1, 167].
Ensuite la nouvelle valeur de H sera

$$\begin{aligned}
H = \sqrt{a\mu}\Big\{ & 1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{75}{16}\gamma^4 e^4 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8 \\
& + \left(\frac{9}{16}\gamma^2 + \frac{225}{64}e^2 - \frac{27}{16}\gamma^4 - \frac{387}{32}\gamma^2 e^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{675}{256}e^4 + \frac{325}{64}e^2 e'^2 + \frac{9}{8}\gamma^6\right. \\
& \qquad \left. + \frac{243}{16}\gamma^4 e^2 - \frac{3}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{117}{8}\gamma^2 e^4 - \frac{311}{16}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{225}{256}e^6 - \frac{975}{256}e^4 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& - \left(\frac{27}{32}\gamma^2 - \frac{675}{128}e^2 - \frac{81}{16}\gamma^4 + \frac{459}{8}\gamma^2 e^2 + \frac{403}{64}\gamma^2 e'^2 + \frac{2025}{256}e^4 - \frac{4675}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{4589}{1024}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{22143}{512}\gamma^4-\frac{725641}{2048}\gamma^2e^2+\frac{1939}{64}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{257925}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{14129}{3072}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$
$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{1411823}{98304}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}$$
$$+\left(\frac{25}{16}\gamma^2e'^2-\frac{25}{16}e^2e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}+\left(\frac{765}{256}\gamma^2+\frac{5625}{1024}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{.$$

Quant aux valeurs de L et de G, elles sont les mêmes que celles qui doivent être employées après la 52ᵉ opération (valeur de L, page 685; valeur de G, page 832). De ces valeurs de L, G, H, on déduit

$$\frac{d\gamma}{dL}=\frac{1}{a^2n\gamma}\Big\}-\frac{25}{8}\gamma^4+\frac{25}{16}\gamma^2e^2-\frac{75}{4}\gamma^6+\frac{425}{16}\gamma^4e^2-\frac{175}{64}\gamma^2e^4+\left(\frac{1425}{64}\gamma^4-\frac{1425}{128}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n}$$
$$+\left(\frac{351}{64}\gamma^2-\frac{11701}{128}\gamma^4+\frac{10171}{256}\gamma^2e^2+\frac{381}{64}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{783}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{335319}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\Big\{,$$

$$\frac{d\gamma}{dG}=\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\}1-2\gamma^2+\frac{1}{2}e^2+\frac{25}{2}\gamma^4-\frac{27}{2}\gamma^2e^2+\frac{37}{32}e^4+75\gamma^6-\frac{625}{4}\gamma^4e^2+\frac{463}{16}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$
$$-\left(\frac{1425}{16}\gamma^4-\frac{1425}{16}\gamma^2e^2+\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$
$$+\left(\frac{9}{32}-\frac{81}{4}\gamma^2+\frac{81}{64}e^2+\frac{1}{8}e'^2+\frac{11485}{32}\gamma^4-\frac{7291}{32}\gamma^2e^2-\frac{369}{16}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.+\frac{5887}{512}e^4+\frac{9}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\left(\frac{27}{64}+27\gamma^2-\frac{81}{32}e^2+\frac{403}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+\left(\frac{5711}{2048}-\frac{308089}{1024}\gamma^2-\frac{11553}{4096}e^2+\frac{1199}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\frac{48541}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{7249715}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{765}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\{,$$

$$\frac{d\gamma}{dH}=-\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\}1+\frac{1}{2}e^2-\frac{25}{4}\gamma^2e^2+\frac{37}{32}e^4-\frac{125}{2}\gamma^4e^2+\frac{175}{8}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$
$$+\left(\frac{1425}{32}\gamma^2e^2-\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{9}{32}-\frac{27}{16}\gamma^2+\frac{81}{64}e^2+\frac{1}{8}e'^2+\frac{27}{16}\gamma^4-\frac{7831}{64}\gamma^2e^2-\frac{3}{4}\gamma^2e'^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{5887}{512}e^4+\frac{9}{16}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\
&-\left(\frac{27}{64}-\frac{81}{16}\gamma^2-\frac{81}{32}e^2+\frac{403}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&+\left(\frac{5711}{2048}-\frac{22869}{512}\gamma^2-\frac{11553}{4096}e^2+\frac{1199}{64}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&\qquad\qquad+\frac{48541}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{7249715}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{765}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, $\frac{de}{dG}$, $\frac{de}{dH}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 52^e opération (pages 834 et 835).

54^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (171) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1)*, avec le terme périodique (171), dans lequel l'argument est $2h-2h'-2g'-l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}=&\ \frac{\mu}{2a}\\
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{2}\gamma^4-\frac{9}{4}\gamma^2e^2-\frac{9}{4}\gamma^2e'^2+\frac{9}{16}e^2e'^2+\frac{15}{32}e'^4-\frac{33}{2}\gamma^4e^2\\
&\qquad+\frac{9}{4}\gamma^4e'^2+\frac{75}{16}\gamma^2e^4-\frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2\\
&\qquad+\left(\frac{9}{16}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2-\frac{27}{16}\gamma^4-\frac{387}{32}\gamma^2e^2+\frac{57}{32}\gamma^2e'^2-\frac{225}{128}e^4+\frac{825}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'}{n}\\
&\qquad-\left(\frac{31}{32}-\frac{33}{8}\gamma^2-\frac{971}{32}e^2+\frac{465}{64}e'^2+\frac{273}{64}\gamma^4+\frac{5709}{64}\gamma^2e^2-\frac{855}{32}\gamma^2e'^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{4989}{256}e^4-\frac{1905}{8}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

Cette formule se continue a la page suivante

---

* Il ne faut prendre pour ce terme (1), dans le chapitre IV, que la partie qui existait dans la valeur primitive de R, avec celles qui y ont été introduites par suite des cinquante-trois premières opérations.

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{255}{32}-\frac{31515}{1024}\gamma^2-\frac{551115}{4096}e^2+\frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\\
&-\left(\frac{5515}{192}-\frac{296779}{3072}\gamma^2-\frac{6380965}{12288}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}\\
&-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}+\left[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{15}{128}e'^2+\frac{225}{512}\frac{n'}{n}-\frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+m'\frac{a^2}{a'^3}\Bigg\{-\frac{3}{4}\gamma^2e'+\frac{3}{4}\gamma^4e'-\frac{9}{8}\gamma^2e^2e'+\frac{3}{32}\gamma^2e'^3+\frac{9}{8}\gamma^4e^2e'+\frac{75}{256}\gamma^2e^4e'\\
&-\left(\frac{27}{8}\gamma^2e'-\frac{81}{8}\gamma^4e'+\frac{153}{32}\gamma^2e^2e'+\frac{135}{32}\gamma^2e'^3\right)\frac{n'}{n}\\
&-\left(\frac{75}{32}\gamma^2e'-\frac{21}{64}\gamma^4e'-\frac{7191}{128}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{649}{256}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{68135}{6144}\gamma^2e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{45}{8}\gamma^2e'\frac{a^2}{a'^2}\Bigg\}\\
&\times\cos(2h-2h'-2g'-l').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=0,\qquad i'=0,\qquad i''=2,\qquad i'''=-1.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt}=0,\qquad \frac{dG}{dt}=0.$$

L et G sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et e en fonction de γ; en les résolvant, on trouve

$$
(A_4)\left\{
\begin{aligned}
a=\frac{L^2}{\mu}\Bigg\{1&-\left[\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{1069}{16}\frac{L-G}{L}+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}\\
&-\left[\frac{79}{8}-\frac{167}{4}\gamma^2-\frac{731}{2}\frac{L-G}{L}+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5L^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6L^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7L^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(B_4)\left\{
\begin{aligned}
e^2=2\frac{L-G}{L}\Bigg\{1&-\frac{1}{2}\frac{L-G}{L}+\frac{25}{2}\gamma^2-\frac{25}{4}\gamma^2\frac{L-G}{L}\\
&+\left[\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma^2-\frac{675}{32}\frac{L-G}{L}+\frac{325}{32}e'^2\right]\frac{n'^2L^6}{\mu^4}+\frac{675}{64}\frac{n'^3L^9}{\mu^6}+\frac{317343}{2048}\frac{n'^4L^{12}}{\mu^8}\Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on remplace a et e^2 par leurs valeurs en γ dans l'expression de H, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{H}=\mathrm{G}+\mathrm{L}\Big\{&-2\gamma^2+2\gamma^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}-\frac{25}{2}\gamma^4\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{25}{4}\gamma^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2\\&+\left[\frac{9}{16}\gamma^2-\frac{27}{16}\gamma^4+18\gamma^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{1}{4}\gamma^2e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}-\frac{27}{32}\gamma^2\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{5965}{1024}\gamma^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\},\end{aligned}$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{H}}{dt}=\frac{d\mathrm{R}}{dh}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{54})\left\{\begin{aligned}\frac{d.\gamma^2}{dt}=-\frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{&\frac{3}{4}\gamma^2e'-\frac{3}{4}\gamma^4e'+3\gamma^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'-\frac{3}{32}\gamma^2e'^3-\frac{99}{8}\gamma^4\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\\&+\frac{195}{64}\gamma^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2e'\\&+\left[\frac{27}{8}\gamma^2e'-\frac{81}{8}\gamma^4e'+\frac{207}{16}\gamma^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'+\frac{135}{32}\gamma^2e'^3\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\&+\left[\frac{327}{128}\gamma^2e'-\frac{231}{128}\gamma^4e'-\frac{5529}{64}\gamma^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\&+\frac{811}{256}\gamma^2e'\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{293915}{24576}\gamma^2e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{45}{8}\gamma^2e'\cdot\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Big\}\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt}=2\frac{dh}{dt}-n'=-2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}-n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{H}}$, $\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}}$, qui doivent être employées après la 53^e opération, et remplaçant a et e^2 par leurs valeurs en γ, on trouve

$$(\mathrm{D}_{54})\left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt}=n'\Big\{&-1-\left[\frac{3}{2}-3\gamma^2+6\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\&+\left[\frac{9}{16}-\frac{27}{8}\gamma^2-\frac{189}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{57}{32}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}+\frac{177}{64}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{10949}{1024}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big\}\\&-\frac{n'^2\mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{\frac{3}{4}e'-\frac{3}{2}\gamma^2e'+3\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'-\frac{3}{32}e'^3-\frac{123}{8}\gamma^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'+\frac{195}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2e'\end{aligned}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$
(\mathrm{D}_{54})\left\{
\begin{aligned}
&+\left[\frac{27}{8}e' - \frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{207}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' + \frac{135}{32}e'^3\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&+\left[\frac{327}{128}e' - \frac{75}{32}\gamma^2 e' - \frac{5529}{64}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&\qquad\qquad + \frac{811}{256}e'\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} + \frac{293915}{24576}e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{45}{8}\gamma^2 e'\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux équations différentielles (C_{54}), (D_{54}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{H}\right)$ a été remplacée par la variable γ, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$
(\mathrm{E}_{54})\left\{
\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 - \Bigg\{&\left[\frac{3}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{3}{4}\gamma_0^4 e' + 3\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' - \frac{3}{32}\gamma_0^2 e'^3 - \frac{99}{8}\gamma_0^4\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{195}{64}\gamma_0^2\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&+\left[\frac{9}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{27}{4}\gamma_0^4 e' + \frac{63}{16}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' + \frac{171}{64}\gamma_0^2 e'^3\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\\
&-\left[\frac{51}{128}\gamma_0^2 e' - \frac{1551}{128}\gamma_0^4 e' + \frac{7797}{64}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\quad + \frac{1819}{256}\gamma_0^2 e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} + \frac{376481}{24576}\gamma_0^2 e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} + \frac{45}{8}\gamma_0^2 e'\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2 a'^2}\Bigg\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{F}_{54})\left\{
\begin{aligned}
\theta &= \theta_0(t+c)\\
&+\Bigg\{\left[\frac{3}{4}e' - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e' + 3\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' - \frac{3}{32}e'^3 - \frac{123}{8}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{195}{64}\left(\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\right)^2 e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\\
&\quad+\left[\frac{9}{4}e' - \frac{27}{2}\gamma_0^2 e' + \frac{63}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e' + \frac{171}{64}e'^3\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}
\end{aligned}
\right.
$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$
(\mathrm{F}_{54})\left\{\begin{aligned}
&-\left[\frac{51}{128}e'-\frac{51}{2}\gamma_0^2e'+\frac{7797}{64}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right]\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\\
&\qquad+\frac{1819}{256}e'\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}+\frac{376481}{24576}e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}+\frac{45}{8}e'\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^4}{\mu^2a'^2}\Bigg\}\sin\theta_0(t+c)\\
&+\left\{\left[\frac{9}{64}e'^2-\frac{9}{32}\gamma_0^2e'^2+\frac{9}{8}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}+\frac{27}{32}e'^2\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{1143}{1024}e'^2\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\right\}\sin 2\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

γ_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$
\theta_0=n'\left\{-1-\left[\frac{3}{2}-3\gamma_0^2+6\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{9}{4}e'^2\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}+\frac{9}{16}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}+\frac{177}{64}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\right\}.
$$

Si l'on prend la valeur de γ^2 donnée par la formule (E_{54}), et qu'on la substitue dans les formules (A_{54}), (B_{54}), on en déduit les valeurs de a et de e^2 en fonction de t, qui sont

$$
(\mathrm{G}_{54})\left\{\begin{aligned}
a=\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{&1-\left[\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma_0^2-\frac{1069}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&-\left[\frac{79}{8}-\frac{167}{4}\gamma_0^2-\frac{731}{2}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\}\\
&-\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\left\{\frac{45}{32}\gamma_0^2e'\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}+\frac{1137}{32}\gamma_0^2e'\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\right\}\cos\theta_0(t+c),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{H}_{54})\left\{\begin{aligned}
e^2=2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\Bigg\{&1-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{25}{2}\gamma_0^4-\frac{25}{4}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\\
&+\left[\frac{225}{32}-\frac{225}{8}\gamma_0^2-\frac{675}{32}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{325}{32}e'^2\right]\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}+\frac{675}{64}\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}+\frac{317343}{2048}\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Bigg\}\\
&-2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}\left\{\left[\frac{75}{4}\gamma_0^4e'-\frac{75}{16}\gamma_0^2\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}e'\right]\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2}-\frac{675}{32}\gamma_0^2e'\frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6}\right\}\cos\theta_0(t+c).
\end{aligned}\right.
$$

Désignons maintenant par a_0 et e_0^2 les parties constantes des valeurs que nous venons de trouver pour a et e^2, de sorte qu'on ait

$$
\begin{aligned}
a_0=\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Bigg\{&1-\left[\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma_0^2-\frac{1069}{16}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{195}{64}e'^2\right]\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\\
&-\left[\frac{79}{8}-\frac{167}{4}\gamma_0^2-\frac{731}{2}\frac{\mathrm{L}-\mathrm{G}}{\mathrm{L}}+\frac{2133}{16}e'^2\right]\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}-\frac{22441}{144}\frac{n'^7\mathrm{L}^{21}}{\mu^{14}}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$e_0^2 = 2\,\frac{L-G}{L}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{L-G}{L} + \frac{25}{2}\gamma_0^4 - \frac{25}{4}\gamma_0^2\,\frac{L-G}{L}\right.$$

$$\left. + \left[\frac{225}{32} - \frac{225}{8}\gamma_0^2 - \frac{675}{32}\,\frac{L-G}{L} + \frac{325}{32}e'^2\right]\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} + \frac{675}{64}\,\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} + \frac{317343}{2048}\,\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8}\right\}.$$

De ces relations nous pouvons tirer L et G en fonction de a_0 et e_0^2; nous pourrons ensuite remplacer L et G par les valeurs ainsi obtenues dans les formules (E_{54}), (F_{54}), (G_{54}), (H_{54}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\dfrac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{54})\left\{\begin{aligned}
\gamma^2 = \gamma_0^2 - \Bigg[&\left(\frac{3}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{3}{4}\gamma_0^4 e' + \frac{3}{2}\gamma_0^2 e_0^2\, e' - \frac{3}{32}\gamma_0^2 e'^3 - \frac{99}{16}\gamma_0^4 e_0^2 e' + \frac{291}{256}\gamma_0^2 e_0^4 e'\right)\frac{n'}{n_0}\\
&+ \left(\frac{9}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{27}{4}\gamma_0^4\, e' + \frac{63}{32}\gamma_0^2 e_0^2 e' + \frac{171}{64}\gamma_0^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&- \left(\frac{51}{128}\gamma_0^2\, e' - \frac{1551}{128}\gamma_0^4\, e' + \frac{9147}{128}\gamma_0^2\; e_0^2\, e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&+ \frac{1819}{256}\gamma_0^2\, e'\,\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{387713}{24576}\gamma_0^2\, e'\,\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{45}{8}\gamma_0^2\, e'\,\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\cos\theta_0\,(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{54})\left\{\begin{aligned}
\theta = {}&\theta_0\,(t+c)\\
&+ \Bigg[\left(\frac{3}{4}e' - \frac{3}{2}\gamma_0^2 e' + \frac{3}{2}e_0^2 e' - \frac{3}{32}e'^3 - \frac{123}{16}\gamma_0^2\, e_0^2\, e' + \frac{291}{256}e_0^4\, e'\right)\frac{n'}{n_0}\\
&\quad + \left(\frac{9}{4}e' - \frac{27}{2}\gamma_0^2\, e' + \frac{63}{32}e_0^2\, e' + \frac{171}{64}e'^3\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\
&\quad - \left(\frac{51}{128}e' - \frac{51}{2}\gamma_0^2\, e' + \frac{9147}{128}e_0^2\, e'\right)\frac{n'^3}{n_0^3}\\
&\quad + \frac{1819}{256}e'\,\frac{n'^4}{n_0^4} + \frac{387713}{24576}e'\,\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{45}{8}e'\,\frac{n'}{n_0}\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\Bigg]\sin\theta_0\,(t+c)\\
&+ \left[\left(\frac{9}{64}e'^2 - \frac{9}{32}\gamma_0^2\, e'^2 + \frac{9}{16}e_0^2\, e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} + \frac{27}{32}e'^2\,\frac{n'^3}{n_0^3} + \frac{1143}{1024}e'^2\,\frac{n'^4}{n_0^4}\right]\sin 2\,\theta_0\,(t+c),
\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{54})\quad a = a_0\left\{1 - \left[\frac{45}{32}\gamma_0^2\, e'\,\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{1137}{32}\gamma_0^2\, e'\,\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\cos\theta_0\,(t+c)\right\},$$

$$(H'_{54})\quad e^2 = e_0^2 - \left[\left(\frac{75}{4}\gamma_0^4\, e_0^2\, e' - \frac{75}{32}\gamma_0^2 e_0^4\, e'\right)\frac{n'}{n_0} - \frac{675}{32}\gamma_0^2\, e_0^2\, e'\,\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\cos\theta_0\,(t+c).$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n'\left[-1-\left(\frac{3}{2}-3\gamma_0^2+3e_0^2+\frac{9}{4}e'^2\right)\frac{n'}{n_0}+\frac{9}{16}\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{177}{64}\frac{n'^3}{n_0^3}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de l en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}}-\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Bigg[&1-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{9}{8}e^2+\frac{3}{2}e'^2+3\gamma^4-\frac{15}{4}\gamma^2e^2-\frac{27}{4}\gamma^2e'^2+\frac{3}{32}e^4+\frac{27}{16}e^2e'^2\\ &+\left(\frac{27}{8}\gamma^2+\frac{675}{32}e^2\right)\frac{n'}{n}-\left(\frac{451}{64}-\frac{747}{32}\gamma^2-\frac{11325}{128}e^2+\frac{6765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\ &-\frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3}-\frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\\ +\frac{n'^2}{n}\Bigg[&\frac{9}{4}\gamma^2e'-\frac{3}{2}\gamma^4e'+\frac{15}{8}\gamma^2e^2e'-\frac{9}{32}\gamma^2e'^3\\ &+\left(\frac{81}{4}\gamma^2e'-\frac{405}{8}\gamma^4e'+\frac{711}{32}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'}{n}+\frac{1431}{64}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{8517}{256}\gamma^2e'\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\cos\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} = n-\frac{n'^2}{n}\Bigg[&\frac{7}{4}-\frac{21}{2}\gamma^2+\frac{3}{4}e^2+\frac{21}{8}e'^2\\ &+\left(\frac{225}{32}-\frac{81}{4}\gamma^2+\frac{675}{64}e^2+\frac{825}{32}e'^2\right)\frac{n'}{n}+\frac{3265}{128}\frac{n'^2}{n^2}+\frac{243925}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\\ +\frac{n'^2}{n}\Bigg[&\frac{21}{4}\gamma^2e'-\frac{159}{16}\gamma^4e'+\frac{219}{64}\gamma^2e^2c'+\frac{531}{16}\gamma^2e'\frac{n'}{n}-\frac{519}{8}\gamma^2e'\frac{n'^2}{n^2}\Bigg]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, c, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{54}), (F'_{54}), (G'_{54}), (H'_{54}), puis intégrant, nous tirerons

$$(\mathrm{K}_{54})\left\{\begin{aligned}h+g+l = {}&(g)+(l)+\frac{1}{2}(2h'+2g'+l')+\left(\frac{1}{2}\theta_0+g_0+l_0\right)(t+c)\\ &-\Bigg[\left(\frac{9}{4}\gamma_0^2e'-\frac{3}{2}\gamma_0^4e'+\frac{15}{8}\gamma_0^2e_0^2e'-\frac{9}{32}\gamma_0^2e'^3\right)\frac{n'}{n_0}\\ &+\left(\frac{27}{2}\gamma_0^2e'-\frac{135}{4}\gamma_0^4e'+\frac{99}{32}\gamma_0^2e_0^2e'\right)\frac{n'^2}{n_0^2}\\ &-\frac{135}{32}\gamma_0^2e'\frac{n'^3}{n_0^3}+\frac{21099}{256}\gamma_0^2e'\frac{n'^4}{n_0^4}\Bigg]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{L}_{54})\left\{\begin{aligned} l &= (l) + l_0(t+c)\\ &\quad - \left[\left(\frac{21}{4}\gamma_0^2 e' - \frac{159}{16}\gamma_0^4 e' + \frac{219}{64}\gamma_0^2 e_0^2 e'\right)\frac{n'}{n_0} + \frac{279}{16}\gamma_0^2 e'\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{8121}{64}\gamma_0^2 e'\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

(g) et (l) sont les deux constantes introduites par l'intégration (**n° 21**); g_0 et l_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e_0, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + g + l + \frac{1}{2}(2h' + 2g' + l').$$

Les six formules (E'_{54}), (F'_{54}), (G'_{54}), (H'_{54}), (K_{54}), (L_{54}), constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (171); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la seconde règle du **n° 30**, et si nous remarquons que h est égal à

$$\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}(2h' + 2g' + l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1 - \left[\frac{45}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{1137}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h - 2h' - 2g' - l')\right\},$$

e^2 par

$$e^2 - \left[\left(\frac{75}{4}\gamma^4 e^2 e' - \frac{75}{32}\gamma^2 e^4 e'\right)\frac{n'}{n} - \frac{675}{32}\gamma^2 e^2 e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\cos(2h - 2h' - 2g' - l'),$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \left[\left(\frac{3}{4}\gamma^2 e' - \frac{3}{4}\gamma^4 e' + \frac{3}{2}\gamma^2 e^2 e' - \frac{3}{32}\gamma^2 e'^3 - \frac{99}{16}\gamma^4 e^2 e' + \frac{291}{256}\gamma^2 e^4 e'\right)\frac{n'}{n}\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{9}{4}\gamma^2 e' - \frac{27}{4}\gamma^4 e' + \frac{63}{32}\gamma^2 e^2 e' + \frac{171}{64}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{51}{128}\gamma^2 e' - \frac{155}{128}\gamma^4 e' + \frac{9147}{128}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{1819}{256}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{387713}{24576}\gamma^2 e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{45}{8}\gamma^2 e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\cos(2h - 2h' - 2g' - l'),$$

l par

$$l - \left[\left(\frac{21}{4}\gamma^2 e' - \frac{159}{16}\gamma^4 e' + \frac{219}{64}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n} + \frac{279}{16}\gamma^2 e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{8121}{64}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3}\right]\sin(2h - 2h' - 2g' - l'),$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \Bigg[\left(\frac{9}{4}\gamma^2 e' - \frac{3}{2}\gamma^4 e' + \frac{15}{8}\gamma^2 e^2 e' - \frac{9}{32}\gamma^2 e'^3\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{27}{2}\gamma^2 e' - \frac{135}{4}\gamma^4 e' + \frac{99}{32}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\frac{135}{32}\gamma^2 e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{21099}{256}\gamma^2 e'\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(2h - 2h' - 2g' - l').$$

h par

$$h + \Bigg[\left(\frac{3}{8}e' - \frac{3}{4}\gamma^2 e' + \frac{3}{4}e^2 e' - \frac{3}{64}e'^3 - \frac{123}{32}\gamma^2 e^2 e' + \frac{291}{512}e^4 e'\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{9}{8}e' - \frac{27}{4}\gamma^2 e' + \frac{63}{64}e^2 e' + \frac{171}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{51}{256}e' - \frac{51}{4}\gamma^2 e' + \frac{9147}{256}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\frac{1819}{512}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{387713}{49152}e'\frac{n'^5}{n^5} + \frac{45}{16}e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Bigg]\sin(2h - 2h' - 2g' - l')$$

$$+\left[\left(\frac{9}{128}e'^2 - \frac{9}{64}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{27}{64}e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{1143}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2(2h - 2h' - 2g' - l').$$

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a, e^2 et γ^2 données par les formules (E'_{54}), (G'_{54}), (H'_{54}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 685);

G_0 = ancienne valeur de G (page 832);

H_0 = ancienne valeur de H (page 845),

$$H_1 = \sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{3}{2}\gamma^2 e' - \frac{3}{2}\gamma^4 e' + \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 e'\right)\frac{n'}{n} + \frac{9}{2}\gamma^2 e' \frac{n'^2}{n^2} - \frac{39}{32}\gamma^2 e' \frac{n'^3}{n^3}\right\}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0 (t + c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{54}); en y supprimant également les indices de a_0, e_0, γ_0 et n_0, on en conclut

$$\frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots) = \sqrt{a\mu}\left\{\left(\frac{9}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{27}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{63}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{27}{8}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} + \frac{2205}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n'}\right\}.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la seconde règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 854 et 855) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 54^e opération, et y ajoutant

$$+\frac{1}{2}n'(H - H_0) - \frac{1}{2}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (171) de R, joint à la quantité

$$+\frac{1}{2}n'(H - H_0),$$

doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, réunie à la quantité

$$-\frac{1}{2}n' \cdot \frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots),$$

se compose de la valeur qu'avait précédemment le terme (1) et de quelques nouvelles parties qui sont données dans le chapitre IV avec l'indication [54 . . . 1,171]. Ensuite la nouvelle valeur de H sera

$$H = \sqrt{a\mu}\left\{1 - 2\gamma^2 - \frac{1}{2}e^2 + \gamma^2 e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{4}\gamma^2 e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{75}{16}\gamma^4 e^4 + \frac{1}{8}\gamma^2 e^6 - \frac{5}{128}e^8\right.$$

Cette formule se continue à la page suivante

$$+\left(\frac{9}{16}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2-\frac{27}{16}\gamma^4-\frac{387}{32}\gamma^2e^2+\frac{13}{16}\gamma^2e'^2-\frac{675}{256}e^4+\frac{325}{64}e^2e'^2+\frac{9}{8}\gamma^6\right.$$

$$\left.+\frac{243}{16}\gamma^4e^2-\frac{39}{16}\gamma^4e'^2+\frac{117}{8}\gamma^2e^4-\frac{559}{32}\gamma^2e^2e'^2-\frac{225}{256}e^6-\frac{975}{256}e^4e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{27}{32}\gamma^2-\frac{675}{128}e^2-\frac{81}{16}\gamma^4+\frac{459}{8}\gamma^2e^2+\frac{187}{64}\gamma^2e'^2+\frac{2025}{256}e^4-\frac{4675}{256}e^2e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$+\left(\frac{13}{64}+\frac{4589}{1024}\gamma^2+\frac{147261}{4096}e^2+\frac{195}{128}e'^2-\frac{22143}{512}\gamma^4-\frac{725641}{2048}\gamma^2e^2+\frac{17717}{512}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.-\frac{3035787}{16384}e^4+\frac{257925}{2048}e^2e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$

$$+\left(\frac{79}{16}-\frac{14129}{3072}\gamma^2+\frac{2954417}{12288}e^2+\frac{2133}{32}e'^2\right)\frac{n'^5}{n^5}$$

$$+\left(\frac{153}{8}+\frac{1411823}{98304}\gamma^2+\frac{497099911}{393216}e^2+\frac{240085}{512}e'^2\right)\frac{n'^6}{n^6}+\frac{22441}{288}\frac{n'^7}{n^7}+\frac{99916415}{442368}\frac{n'^8}{n^8}$$

$$\left.+\left(\frac{25}{16}\gamma^2e'^2-\frac{25}{16}e^2e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}+\left(\frac{765}{256}\gamma^2+\frac{5625}{1024}e^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{4431}{2048}\frac{n'^4}{n^4}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right\}.$$

Quant aux valeurs de L et de G, elles sont les mêmes que celles qui doivent être employées après la 53^{e} opération (valeur de L, page 685; valeur de G, page 832). De ces valeurs de L, G, H on déduit

$$\frac{d\gamma}{dL}=\frac{1}{a^2n\gamma}\left\{-\frac{25}{8}\gamma^4+\frac{25}{16}\gamma^2e^2-\frac{75}{4}\gamma^6+\frac{425}{16}\gamma^4e^2-\frac{175}{64}\gamma^2e^4+\left(\frac{1425}{64}\gamma^4-\frac{1425}{128}\gamma^2e^2\right)\frac{n'}{n}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{351}{64}\gamma^2-\frac{11701}{128}\gamma^4+\frac{10171}{256}\gamma^2e^2+\frac{507}{64}\gamma^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{783}{128}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{335319}{4096}\gamma^2\frac{n'^4}{n^4}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dG}=\frac{1}{4a^2n\gamma}\left\{1-2\gamma^2+\frac{1}{2}e^2+\frac{25}{2}\gamma^4-\frac{27}{2}\gamma^2e^2+\frac{37}{32}e^4+75\gamma^6-\frac{625}{4}\gamma^4e^2+\frac{463}{16}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6\right.$$

$$-\left(\frac{1425}{16}\gamma^4-\frac{1425}{16}\gamma^2e^2+\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$

$$+\left(\frac{9}{32}-\frac{81}{4}\gamma^2+\frac{81}{64}e^2+\frac{13}{32}e'^2+\frac{11485}{32}\gamma^4-\frac{7291}{32}\gamma^2e^2-\frac{117}{4}\gamma^2e'^2\right.$$

$$\left.+\frac{5887}{512}e^4+\frac{117}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\left(\frac{27}{64}+27\gamma^2-\frac{81}{32}e^2+\frac{187}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\left(\frac{5711}{2048}-\frac{308089}{1024}\gamma^2-\frac{11553}{4096}e^2+\frac{21551}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\frac{48541}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{7249715}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{765}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\},$$

$$\frac{d\gamma}{dH}=-\frac{1}{4a^2n\gamma}\Big\{1+\frac{1}{2}e^2-\frac{25}{4}\gamma^2e^2+\frac{37}{32}e^4-\frac{125}{2}\gamma^4e^2+\frac{175}{8}\gamma^2e^4+\frac{5}{16}e^6$$
$$+\left(\frac{1425}{32}\gamma^2e^2-\frac{1425}{256}e^4\right)\frac{n'}{n}$$
$$+\left(\frac{9}{32}-\frac{27}{16}\gamma^2+\frac{81}{64}e^2+\frac{13}{32}e'^2+\frac{27}{16}\gamma^4-\frac{7831}{64}\gamma^2e^2-\frac{39}{16}\gamma^2e'^2\right.$$
$$\left.+\frac{5887}{512}e^4+\frac{117}{64}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}$$
$$-\left(\frac{27}{64}-\frac{81}{16}\gamma^2-\frac{81}{32}e^2+\frac{187}{128}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$+\left(\frac{5711}{2048}-\frac{22869}{512}\gamma^2-\frac{11553}{4096}e^2+\frac{21551}{1024}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$+\frac{48541}{6144}\frac{n'^5}{n^5}+\frac{7249715}{196608}\frac{n'^6}{n^6}+\frac{25}{32}e'^2\cdot\frac{a^2}{a'^2}+\frac{765}{512}\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}.$$

Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, $\frac{de}{dG}$, $\frac{de}{dH}$ sont les mêmes que celles qui ont été données à la suite de la 52e opération (pages 834 et 835).

55e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (168) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1), avec le terme périodique (168), dans lequel l'argument est $2h-2h'-2g'-4l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$R=\frac{\mu}{2a}$$
$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{8}e^2+\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{2}\gamma^4-\frac{9}{4}\gamma^2e^2-\frac{9}{4}\gamma^2e'^2+\frac{9}{16}e^2e'^2+\frac{15}{32}e'^4-\frac{33}{2}\gamma^4e^2$$
$$+\frac{9}{4}\gamma^4e'^2+\frac{75}{16}\gamma^2e^4-\frac{27}{8}\gamma^2e^2e'^2$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\Big(\frac{9}{16}\gamma^2+\frac{225}{64}e^2-\frac{27}{16}\gamma^4-\frac{387}{32}\gamma^2e^2+\frac{33}{16}\gamma^2e'^2-\frac{225}{128}e^4+\frac{825}{64}e^2e'^2\Big)\frac{n'}{n}$$

$$-\Big(\frac{31}{32}-\frac{33}{8}\gamma^2-\frac{971}{32}e^2+\frac{465}{64}e'^2+\frac{273}{64}\gamma^4+\frac{5709}{64}\gamma^2e^2-\frac{117}{4}\gamma^2e'^2$$

$$+\frac{4989}{256}e^4-\frac{1905}{8}e^2e'^2\Big)\frac{n'^2}{n^2}$$

$$-\Big(\frac{255}{32}-\frac{31515}{1024}\gamma^2-\frac{551115}{4096}e^2+\frac{6885}{64}e'^2\Big)\frac{n'^3}{n^3}$$

$$-\Big(\frac{5515}{192}-\frac{296779}{3072}\gamma^2-\frac{6380965}{12288}e^2+\frac{16285}{24}e'^2\Big)\frac{n'^4}{n^4}-\frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5}-\frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6}$$

$$+\Big[\frac{9}{64}-\frac{45}{16}\gamma^2+\frac{45}{64}e^2+\frac{15}{128}e'^2+\frac{225}{512}\frac{n'}{n}-\frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2}\Big]\frac{a^2}{a'^2}\Big\}$$

$$+m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{51}{4}\gamma^2e'^2-\frac{51}{4}\gamma^4e'^2+\frac{153}{8}\gamma^2e^2e'^2-\frac{115}{4}\gamma^2e'^4$$

$$+\Big(\frac{459}{32}\gamma^2e'^2-\frac{1377}{32}\gamma^4e'^2+\frac{12213}{64}\gamma^2e^2e'^2\Big)\frac{n'}{n}-\frac{11787}{256}\gamma^2e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{496813}{1024}\gamma^2e'^2\frac{n'^3}{n^3}\Big\}$$

$$\times\cos(2h-2h'-2g'-4l').$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i=0,\qquad i'=0,\qquad i''=2,\qquad i'''=-4.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt}=0,\qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt}=0.$$

L et G sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et e en fonction de γ. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de e^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder e comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(\mathrm{A}_{55})\quad a=\frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\Big\{1-\Big(\frac{13}{32}-\frac{15}{8}\gamma^2-\frac{1069}{32}e^2+\frac{195}{64}e'^2\Big)\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}-\frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}-\frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\Big\}.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en γ dans l'expression de H, et qu'on tienne compte de la valeur de G, il vient

$$\mathrm{H} = \mathrm{G} + \mathrm{L}\left\{ -2\gamma^2 + \gamma^2 e^2 + \frac{9}{16}\gamma^2 \frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} - \frac{27}{32}\gamma^2 \frac{n'^3 \mathrm{L}^9}{\mu^6} \right\};$$

et si l'on remarque que $\frac{d\mathrm{H}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{dh}$, on en déduit

$$(\mathrm{C}_{55})\left\{\begin{aligned} \frac{d.\gamma^2}{dt} = \frac{n'^2 \mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{ & \frac{51}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{51}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{51}{2}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{115}{4}\gamma^2 e'^4 \\ & + \left(\frac{459}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{1377}{32}\gamma^4 e'^2 + 198\,\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n' \mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ & - \frac{10869}{256}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} - \frac{249095}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3 \mathrm{L}^9}{\mu^6} \Big\} \sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} - 4n' = -2\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}} - 4n';$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{H}}$, $\frac{de}{d\mathrm{H}}$, $\frac{d\gamma}{d\mathrm{H}}$, qui doivent être employées après la 54$^{\mathrm{e}}$ opération, et remplaçant a par sa valeur en γ, on trouve

$$(\mathrm{D}_{55})\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = n'\Big\{ & -4 - \left(\frac{3}{2} - 3\gamma^2 + 3e^2 + \frac{9}{4}e'^2\right)\frac{n' \mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{9}{16}\frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} + \frac{177}{64}\frac{n'^3 \mathrm{L}^9}{\mu^6} \Big\} \\ & + \frac{n'^2 \mathrm{L}^3}{\mu^2}\Big\{ \frac{51}{4}e'^2 - \frac{51}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{51}{2}e^2 e'^2 - \frac{115}{4}e'^4 \\ & + \left(\frac{459}{32}e'^2 - \frac{1377}{16}\gamma^2 e'^2 + 198\,e^2 e'^2\right)\frac{n' \mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ & - \frac{10869}{256}e'^2 \frac{n'^2 \mathrm{L}^6}{\mu^4} - \frac{249095}{512}e'^2 \frac{n'^3 \mathrm{L}^9}{\mu^6} \Big\} \cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{55}), (D_{55}) correspondent aux équations (23) du chapitre III ; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}\mathrm{H}\right)$ a été remplacée par la variable γ, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(\mathrm{E}_{55})\left\{\begin{aligned} \gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big[&\left(\frac{51}{16}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{51}{16}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{51}{8}\gamma_0^2 e^2 e'^2 - \frac{115}{16}\gamma_0^2 e'^4\right)\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &+ \left(\frac{153}{64}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{459}{64}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{1431}{32}\gamma_0^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &- \frac{177}{16}\gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} - \frac{235397}{2048}\gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big]\cos\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{F}_{55})\left\{\begin{aligned} \theta = {} & \theta_0(t+c) \\ &- \Big[\left(\frac{51}{16}e'^2 - \frac{51}{8}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{51}{8}e^2 e'^2 - \frac{115}{16}e'^4\right)\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} \\ &+ \left(\frac{153}{64}e'^2 - \frac{459}{32}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{1431}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4} \\ &- \frac{177}{16}e'^2 \frac{n'^3\mathrm{L}^9}{\mu^6} - \frac{235397}{2048}e'^2 \frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8}\Big]\sin\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

γ_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = n'\left\{-4 - \frac{3}{2}\frac{n'\mathrm{L}^3}{\mu^2} + \frac{9}{16}\frac{n'^2\mathrm{L}^6}{\mu^4}\right\}.$$

Si l'on prend la valeur de γ^2 donnée par la formule (E_{55}), et qu'on la substitue dans la formule (A_{55}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$(\mathrm{G}_{55})\left\{\begin{aligned} a = {} & \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\left\{1 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma_0^2 - \frac{1069}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\right\} \\ &+ \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\cdot\frac{765}{128}\gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}}\cos\theta_0(t+c). \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$a_0 = \frac{\mathrm{L}^2}{\mu}\left\{1 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma_0^2 - \frac{1069}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4\mathrm{L}^{12}}{\mu^8} - \frac{79}{8}\frac{n'^5\mathrm{L}^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6\mathrm{L}^{18}}{\mu^{12}}\right\}.$$

De cette relation nous pouvons tirer L en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer L par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{55}), (F_{55}), (G_{55}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0\sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{55})\left\{\begin{aligned}\gamma^2 = \gamma_0^2 + \Big[\Big(\frac{51}{16}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{51}{16}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{51}{8}\gamma_0^2 e^2 e'^2 - \frac{115}{16}\gamma_0^2 e'^4\Big)\frac{n'}{n_0} \\ + \Big(\frac{153}{64}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{459}{64}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{1431}{32}\gamma_0^2 e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ - \frac{177}{16}\gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{235397}{2048}\gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4}\Big]\cos\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(F'_{55})\left\{\begin{aligned}\theta = \theta_0(t+c) \\ - \Big[\Big(\frac{51}{16}e'^2 - \frac{51}{8}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{51}{8}e^2 e'^2 - \frac{115}{16}e'^4\Big)\frac{n'}{n_0} \\ + \Big(\frac{153}{64}e'^2 - \frac{459}{32}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{1431}{32}e^2 e'^2\Big)\frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{177}{16}e'^2\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{235397}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4}\Big]\sin\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(G'_{55})\quad a = a_0\left\{1 + \frac{765}{128}\gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^5}{n_0^5}\cos\theta_0(t+c)\right\}.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = n'\Big[-4 - \frac{3}{2}\frac{n'}{n_0} + \frac{9}{16}\frac{n'^2}{n_0^2}\Big].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de l en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{dR}{dL} - \frac{dR}{dG} - \frac{dR}{dH}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\Big[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \Big(\frac{27}{8}\gamma^2 + \frac{675}{32}e^2\Big)\frac{n'}{n} - \frac{451}{64}\frac{n'^2}{n^2} - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3}\Big] \\ - \frac{n'^2}{n}\Big[\frac{153}{4}\gamma^2 e'^2 - \frac{51}{2}\gamma^4 e'^2 + \frac{255}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{1377}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n} - \frac{100575}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}\Big]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left[\frac{7}{4} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{21}{8}e'^2 + \frac{225}{32}\frac{n'}{n} + \frac{3265}{128}\frac{n'^2}{n^2}\right]$$

$$- \frac{n'^2}{n}\left[\frac{357}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{7713}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'}{n}\right]\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant a, γ, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{55}), (F'_{55}), (G'_{55}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{55})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= (g)+(l)+\frac{1}{2}(2h'+2g'+4l')+\left(\frac{1}{2}\theta_0+g_0+l_0\right)(t+c) \\ &\quad +\left[\left(\frac{135}{16}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{51}{8}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{255}{32}\gamma_0^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\right. \\ &\quad\quad \left. + \frac{459}{32}\gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^2}{n_0^2} - \frac{52353}{512}\gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{55})\quad l = (l)+l_0(t+c)+\left[\frac{357}{16}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'}{n_0} + \frac{3321}{32}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(g) et (l) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); g_0 et l_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l = \frac{1}{2}\theta + g + l + \frac{1}{2}(2h'+2g'+4l').$$

Les cinq formules (E'_{55}), (F'_{55}), (G'_{55}), (K_{55}), (L_{55}), jointes à la condition que c est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (168); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la seconde règle du nº **30**, et si nous remarquons que h est égal à

$$\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}(2h'+2g'+4l'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1+\frac{765}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^5}{n^5}\cos(2h-2h'-2g'-4l')\right\},$$

γ^2 par

$$\begin{aligned}\gamma^2+\Bigg[&\left(\frac{51}{16}\gamma^2 e'^2-\frac{51}{16}\gamma^4 e'^2+\frac{51}{8}\gamma^2 e^2 e'^2-\frac{115}{16}\gamma^2 e'^4\right)\frac{n'}{n}\\ &+\left(\frac{153}{64}\gamma^2 e'^2-\frac{459}{64}\gamma^4 e'^2+\frac{1431}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}\\ &-\frac{177}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{235397}{2048}\gamma^2 e'^2\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\cos(2h-2h'-2g'-4l'),\end{aligned}$$

l par

$$l+\left[\frac{357}{16}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n}+\frac{3321}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\sin(2h-2h'-2g'-4l'),$$

$h+g+l$ par

$$\begin{aligned}h+g+l+\Bigg[&\left(\frac{153}{16}\gamma^2 e'^2-\frac{51}{8}\gamma^4 e'^2+\frac{255}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n}\\ &+\frac{459}{32}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{52353}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3}\Bigg]\sin(2h-2h'-2g'-4l'),\end{aligned}$$

h par

$$\begin{aligned}h-\Bigg[&\left(\frac{51}{32}e'^2-\frac{51}{16}\gamma^2 e'^2+\frac{51}{16}e^2 e'^2-\frac{115}{32}e'^4\right)\frac{n'}{n}\\ &+\left(\frac{153}{128}e'^2-\frac{459}{64}\gamma^2 e'^2+\frac{1431}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{177}{32}e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{235397}{4096}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\Bigg]\sin(2h-2h'-2g'-4l').\end{aligned}$$

e ne change pas.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a et γ^2 données par les formules (E'_{55}), (G'_{55}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, γ_0 et n_0,

$L_0 =$ ancienne valeur de L (page 685);

$G_0 =$ ancienne valeur de G (page 832);

$H_0 =$ ancienne valeur de H (page 856),

$H_1 = -\sqrt{a\mu}\cdot\frac{51}{8}\gamma^2 e'^2 \frac{n'}{n}.$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0\,(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{55}); on en conclut facilement que, d'après le degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, on a

$$\frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots) = 0.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la seconde règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (page 864) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 55^e^ opération, et y ajoutant

$$+2n'(H - H_0).$$

Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (168) de R, joint à la quantité

$$+2n'(H - H_0).$$

doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonction de a, e, γ, ainsi obtenue, n'est autre chose que la valeur qu'avait précédemment le terme (1). Quant aux valeurs de L, G, H, elles n'éprouvent aucun changement. La valeur de L est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e^ opération (page 685), celle de G est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 52^e^ opération (page 832), et celle de H est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 54^e^ opération (page 856). Les valeurs qui s'en déduisent pour $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... sont donc également identiques avec celles que l'on doit employer après la 54^e^ opération.

56^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître le terme (172) *de* R.

Prenons dans R le terme non périodique (1) avec le terme périodique (172), dans lequel l'argument est $2h - 2h' - 2g'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \frac{\mu}{2a} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 - \frac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16}e^2 e'^2 + \frac{15}{32}e'^4 \\
& \qquad - \frac{33}{2}\gamma^4 e^2 + \frac{9}{4}\gamma^4 e'^2 + \frac{75}{16}\gamma^2 e^4 - \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 \\
& \qquad + \left(\frac{9}{16}\gamma^2 + \frac{225}{64}e^2 - \frac{27}{16}\gamma^4 - \frac{387}{32}\gamma^2 e^2 + \frac{33}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{225}{128}e^4 + \frac{825}{64}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{31}{32} - \frac{33}{8}\gamma^2 - \frac{971}{32}e^2 + \frac{465}{64}e'^2 + \frac{273}{64}\gamma^4 + \frac{5709}{64}\gamma^2 e^2 - \frac{117}{4}\gamma^2 e'^2\right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{4989}{256}e^4 - \frac{1905}{8}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad - \left(\frac{255}{32} - \frac{31515}{1024}\gamma^2 - \frac{551115}{4096}e^2 + \frac{6885}{64}e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& \qquad - \left(\frac{5515}{192} - \frac{296779}{3072}\gamma^2 - \frac{6380965}{12288}e^2 + \frac{16285}{24}e'^2\right)\frac{n'^4}{n^4} - \frac{28841}{288}\frac{n'^5}{n^5} - \frac{9960575}{36864}\frac{n'^6}{n^6} \\
& \qquad\qquad + \left[\frac{9}{64} - \frac{45}{16}\gamma^2 + \frac{45}{64}e^2 + \frac{15}{128}e'^2 + \frac{225}{512}\frac{n'}{n} - \frac{1443}{512}\frac{n'^2}{n^2}\right]\frac{a^2}{a'^2}\Big\} \\
& + m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{-\left(\frac{27}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{81}{32}\gamma^4 e'^2 + \frac{189}{64}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{165}{64}\gamma^2 e'^4\right)\frac{n'}{n} \\
& \qquad - \left(\frac{117}{256}\gamma^2 e'^2 + \frac{4221}{256}\gamma^4 e'^2 + \frac{51867}{512}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& \qquad\qquad - \frac{6891}{1024}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{2329243}{16384}\gamma^2 e'^2\frac{n'^4}{n^4} + \frac{15}{16}\gamma^2 e'^2\frac{a^2}{a'^2}\Big\}\cos(2h - 2h' - 2g').
\end{aligned}
$$

D'après la valeur de l'argument θ du terme périodique que l'on a conservé seul dans cette expression, on a

$$i = 0, \qquad i' = 0, \qquad i'' = 2, \qquad i''' = 0.$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura

$$\frac{dL}{dt} = 0, \qquad \frac{dG}{dt} = 0.$$

L et G sont donc constants. Les relations qui lient ces deux quantités aux variables a, e, γ peuvent être regardées comme déterminant a et e en fonction de γ. En les résolvant, on reconnaît d'abord que, dans la valeur de e^2 en fonction de t, tous les termes variables sont d'un ordre supérieur au huitième; il en résulte que, en raison du degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, nous pouvons regarder e comme constant. On trouve ensuite pour a la valeur

$$(A_{56})\left\{\begin{aligned} a = \frac{L^2}{\mu}\Big\{ 1 &- \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8}\gamma^2 - \frac{1069}{32}e^2 + \frac{195}{64}e'^2\right)\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ &- \left(\frac{79}{8} - \frac{167}{4}\gamma^2 - \frac{731}{4}e^2 + \frac{2133}{16}e'^2\right)\frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4}\frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144}\frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace a par sa valeur en γ dans l'expression de H, et qu'on tienne compte de la valeur de G, il vient

$$H = G + L\left\{-2\gamma^2 + \gamma^2 e^2 + \frac{9}{16}\gamma^2\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} - \frac{27}{32}\gamma^2\frac{n'^3 L^9}{\mu^6}\right\},$$

et si l'on remarque que $\frac{dH}{dt} = \frac{dR}{dh}$, on en déduit

$$(C_{56})\left\{\begin{aligned} \frac{d.\gamma^2}{dt} = -\frac{n'^2 L^3}{\mu^2}\Big\{&\left(\frac{27}{32}\gamma^2 e'^2 - \frac{81}{32}\gamma^4 e'^2 + \frac{27}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{165}{64}\gamma^2 e'^4\right)\frac{n' L^3}{\mu^2} \\ &+ \left(\frac{117}{256}\gamma^2 e'^2 + \frac{4221}{256}\gamma^4 e'^2 + \frac{3249}{32}\gamma^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{3567}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} - \frac{2332969}{16384}\gamma^2 e'^2\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} - \frac{15}{16}\gamma^2 e'^2 \cdot \frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\sin\theta. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{dh}{dt} = -2\frac{dR}{dH};$$

en tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dH}$, $\frac{d\gamma}{dH}$, qui doivent être employées après la 55^e opération, et remplaçant a par sa valeur en γ, on trouve

$$(D_{56})\left\{\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} = \frac{n'^2 L^3}{\mu^2}\Big\{ &-\frac{3}{2} + 3\gamma^2 - 3e^2 - \frac{9}{4}e'^2 \\ &+ \left(\frac{9}{16} - \frac{27}{8}\gamma^2 - \frac{189}{16}e^2 + \frac{33}{16}e'^2\right)\frac{n' L^3}{\mu^2} + \frac{177}{64}\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} + \frac{10949}{1024}\frac{n'^3 L^9}{\mu^6}\Big\} \\ - \frac{n'^2 L^3}{\mu^2}\Big\{ &\left(\frac{27}{32}e'^2 - \frac{81}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{27}{8}e^2 e'^2 + \frac{165}{64}e'^4\right)\frac{n' L^3}{\mu^2} \\ &+ \left(\frac{117}{256}e'^2 + \frac{4221}{128}\gamma^2 e'^2 + \frac{3249}{32}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{3567}{512}e'^2\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} - \frac{2332969}{16384}e'^2\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} - \frac{15}{16}e'^2\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Big\}\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations différentielles (C_{56}), (D_{56}) correspondent aux équations (23) du chapitre III; elles n'en diffèrent qu'en ce que la variable Θ $\left(\text{qui n'est autre que } \frac{1}{2}H\right)$ a été remplacée par la variable γ, dont Θ est fonction. Si on les intègre par approximations successives, en négligeant d'abord les coefficients de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, puis tenant compte de la première puissance de ces coefficients, et ainsi de suite, on trouve

$$(E_{56})\left\{\begin{aligned}\gamma^2 = \gamma_0^2 - \Big[&\left(\frac{9}{16}\gamma_0^2 e'^2 - \frac{9}{16}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{9}{8}\gamma_0^2 e^2 e'^2 + \frac{7}{8}\gamma_0^2 e'^4\right)\frac{n' L^3}{\mu^2} \\ &+ \left(\frac{33}{64}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{675}{64}\gamma_0^4 e'^2 + \frac{8019}{128}\gamma_0^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{47}{8}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} - \frac{269615}{3072}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} - \frac{5}{8}\gamma_0^2 e'^2\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Big]\cos\theta_0(t+c),\end{aligned}\right.$$

$$(F_{56})\left\{\begin{aligned}\theta = \theta_0&(t+c) \\ &+ \Big[\left(\frac{9}{16}e'^2 - \frac{9}{8}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{9}{8}e^2 e'^2 + \frac{7}{8}e'^4\right)\frac{n' L^3}{\mu^2} \\ &+ \left(\frac{33}{64}e'^2 + \frac{675}{32}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{8019}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \\ &+ \frac{47}{8}e'^2\frac{n'^3 L^9}{\mu^6} - \frac{269615}{3072}e'^2\frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} - \frac{5}{8}e'^2\cdot\frac{L^4}{\mu^2 a'^2}\Big]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

γ_0 et c sont les deux constantes introduites par l'intégration, et θ_0 a pour valeur

$$\theta_0 = \frac{n'^2 L^3}{\mu^2} \left\{ -\frac{3}{2} + 3\gamma_0^2 - 3e^2 - \frac{9}{4} e'^2 + \frac{9}{16} \frac{n' L^3}{\mu^2} + \frac{177}{64} \frac{n'^2 L^6}{\mu^4} \right\}.$$

Si l'on prend la valeur de γ^2 donnée par la formule (E_{56}), et qu'on la substitue dans la formule (A_{56}), on en déduit la valeur de a en fonction de t, qui est

$$(G_{56}) \left\{ \begin{aligned} a = \frac{L^2}{\mu} \Bigg\{ & 1 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8} \gamma_0^2 - \frac{1069}{32} e^2 + \frac{195}{64} e'^2 \right) \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ & - \left(\frac{79}{8} - \frac{167}{4} \gamma_0^2 - \frac{731}{4} e^2 + \frac{2133}{16} e'^2 \right) \frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4} \frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144} \frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}} \Bigg\} \\ & - \frac{L^2}{\mu} \left\{ \frac{135}{128} \gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} + \frac{12519}{512} \gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} \right\} \cos \theta_0 (t + c). \end{aligned} \right.$$

Désignons maintenant par a_0 la partie constante de la valeur que nous venons de trouver pour a, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{L^2}{\mu} \Bigg\{ & 1 - \left(\frac{13}{32} - \frac{15}{8} \gamma_0^2 - \frac{1069}{32} e^2 + \frac{195}{64} e'^2 \right) \frac{n'^4 L^{12}}{\mu^8} \\ & - \left(\frac{79}{8} - \frac{167}{4} \gamma_0^2 - \frac{731}{4} e^2 + \frac{2133}{16} e'^2 \right) \frac{n'^5 L^{15}}{\mu^{10}} - \frac{153}{4} \frac{n'^6 L^{18}}{\mu^{12}} - \frac{22441}{144} \frac{n'^7 L^{21}}{\mu^{14}} \Bigg\}. \end{aligned}$$

De cette relation nous pouvons tirer L en fonction de a_0; nous pourrons ensuite remplacer L par la valeur ainsi obtenue dans les formules (E_{56}), (F_{56}), (G_{56}), et elles deviendront, en mettant n_0 pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a_0 \sqrt{a_0}}$,

$$(E'_{56}) \left\{ \begin{aligned} \gamma^2 = \gamma_0^2 - \Bigg[& \left(\frac{9}{16} \gamma_0^2 e'^2 - \frac{9}{16} \gamma_0^4 e'^2 + \frac{9}{8} \gamma_0^2 e^2 e'^2 + \frac{7}{8} \gamma_0^2 e'^4 \right) \frac{n'}{n_0} \\ & + \left(\frac{33}{64} \gamma_0^2 e'^2 + \frac{675}{64} \gamma_0^4 e'^2 + \frac{8019}{128} \gamma_0^2 e^2 e'^2 \right) \frac{n'^2}{n_0^2} \\ & + \frac{47}{8} \gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{269615}{3072} \gamma_0^2 e'^2 \frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{5}{8} \gamma_0^2 e'^2 \cdot \frac{a_0^2}{a'^2} \Bigg] \cos \theta_0 (t + c); \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{F}'_{56})\left\{\begin{aligned} \theta = \theta_0(t+c) & \\ &+\left[\left(\frac{9}{16}e'^2 - \frac{9}{8}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{9}{8}e^2 e'^2 + \frac{7}{8}e'^4\right)\frac{n'}{n_0}\right. \\ &\quad + \left(\frac{33}{64}e'^2 + \frac{675}{32}\gamma_0^2 e'^2 + \frac{8019}{128}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n_0^2} \\ &\quad\left. + \frac{47}{8}e'^2\frac{n'^3}{n_0^3} - \frac{269615}{3072}e'^2\frac{n'^4}{n_0^4} - \frac{5}{8}e'^2\cdot\frac{a_0^2}{a'^2}\right]\sin\theta_0(t+c).\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{G}'_{56})\quad a = a_0\left\{1 - \left[\frac{135}{128}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^5}{n_0^5} + \frac{12519}{512}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^6}{n_0^6}\right]\sin\theta_0(t+c)\right\}.$$

La valeur de θ_0 deviendra de même

$$\theta_0 = \frac{n'^2}{n_0}\left[-\frac{3}{2} + 3\gamma_0^2 - 3e^2 - \frac{9}{4}e'^2 + \frac{9}{16}\frac{n'}{n_0} + \frac{177}{64}\frac{n'^2}{n_0^2}\right].$$

Calculons maintenant les valeurs de $h+g+l$ et de l en fonction de t. Ces valeurs nous seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}},$$

où nous devons mettre pour R l'expression simple à laquelle nous supposons que cette fonction se réduise. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d(h+g+l)}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}&\left[1 - \frac{9}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma^4 - \frac{15}{4}\gamma^2 e^2 - \frac{27}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2 e'^2\right. \\ &\quad + \left(\frac{27}{8}\gamma^2 + \frac{675}{32}e^2\right)\frac{n'}{n} - \left(\frac{451}{64} - \frac{747}{32}\gamma^2 - \frac{11325}{128}e^2 + \frac{6765}{128}e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} \\ &\quad\left. - \frac{787}{32}\frac{n'^3}{n^3} - \frac{18979}{192}\frac{n'^4}{n^4} + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\right] \\ &+ \frac{n'^3}{n^2}\left[\frac{81}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{405}{32}\gamma^4 e'^2 + \frac{459}{32}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{1053}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n} + \frac{42075}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}&\left[\frac{7}{4} - \frac{21}{2}\gamma^2 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{21}{8}e'^2 + \left(\frac{225}{32} - \frac{81}{4}\gamma^2 + \frac{675}{64}e^2 + \frac{825}{32}e'^2\right)\frac{n'}{n} + \frac{3265}{128}\frac{n'^2}{n^2} + \frac{243925}{2048}\frac{n'^3}{n^3}\right] \\ &+ \frac{n'^3}{n^2}\left[\frac{189}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{53037}{256}\gamma^2 e'^2\frac{n'}{n}\right]\cos\theta;\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant a, γ, θ par leurs valeurs en t données par les formules (E'_{56}), (F'_{56}), (G'_{56}), puis intégrant, nous tirerons

$$(K_{56})\left\{\begin{aligned} h+g+l &= (g)+(l)+\frac{1}{2}(2h'+2g')+\left(\frac{1}{2}\theta_0+g_0+l_0\right)(t+c) \\ &\quad -\left[\left(\frac{27}{16}\gamma_0^2 e'^2-\frac{9}{8}\gamma_0^4 e'^2+\frac{45}{32}\gamma_0^2 e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n_0}\right. \\ &\quad\quad \left.+\frac{99}{32}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}+\frac{26829}{512}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^3}{n_0^3}\right]\sin\theta_0(t+c), \end{aligned}\right.$$

$$(L_{56})\quad l=(l)+l_0(t+c)-\left[\frac{63}{16}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'}{n_0}+\frac{8217}{64}\gamma_0^2 e'^2\frac{n'^2}{n_0^2}\right]\sin\theta_0(t+c).$$

(g) et (l) sont les deux constantes introduites par l'intégration (nº **21**); g_0 et l_0 sont des quantités qui, comme θ_0, dépendent de n_0, e, γ_0, n', e', mais dont nous ne donnons pas les valeurs, parce que nous n'en avons pas besoin. La forme sous laquelle nous avons mis la partie non périodique de la valeur de $h+g+l$ vient de ce que l'on a

$$h+g+l=\frac{1}{2}\theta+g+l+\frac{1}{2}(2h'+2g').$$

Les cinq formules (E'_{56}), (F'_{56}), (G'_{56}), (K_{56}), (L_{56}), jointes à la condition que e est constant, constituent les intégrales de nos six équations différentielles, dans le cas où la fonction R y est supposée réduite aux deux termes (1) et (172); dès lors nous n'avons plus qu'à appliquer la seconde règle du nº **30**, et si nous remarquons que h est égal à

$$\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}(2h'+2g'),$$

nous serons conduits à effectuer la transformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

a par

$$a\left\{1-\left[\frac{135}{128}\gamma^2 e'^2\frac{n'^5}{n^5}+\frac{12519}{512}\gamma^2 e'^2\frac{n'^6}{n^6}\right]\cos(2h-2h'-2g')\right\},$$

γ^2 par

$$\gamma^2 - \Big[\Big(\frac{9}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{9}{16}\gamma^4 e'^2 + \frac{9}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 + \frac{7}{8}\gamma^2 e'^4 \Big) \frac{n'}{n}$$
$$+ \Big(\frac{33}{64}\gamma^2 e'^2 + \frac{675}{64}\gamma^4 e'^2 + \frac{8019}{128}\gamma^2 e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2}$$
$$+ \frac{47}{8}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{269615}{3072}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{5}{8}\gamma^2 e'^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Big] \cos(2h - 2h' - 2g'),$$

l par

$$l - \Big[\frac{63}{16}\gamma^2 e'^2 \frac{n'}{n} + \frac{8217}{64}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} \Big] \sin(2h - 2h' - 2g'),$$

$h + g + l$ par

$$h + g + l - \Big[\Big(\frac{27}{16}\gamma^2 e'^2 - \frac{9}{8}\gamma^4 e'^2 + \frac{45}{32}\gamma^2 e^2 e'^2 \Big) \frac{n'}{n} + \frac{99}{32}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^2}{n^2} + \frac{26829}{512}\gamma^2 e'^2 \frac{n'^3}{n^3} \Big] \sin(2h - 2h' - 2g'),$$

h par

$$h + \Big[\Big(\frac{9}{32} e'^2 - \frac{9}{16}\gamma^2 e'^2 + \frac{9}{16} e^2 e'^2 + \frac{7}{16} e'^4 \Big) \frac{n'}{n}$$
$$+ \Big(\frac{33}{128} e'^2 + \frac{675}{64}\gamma^2 e'^2 + \frac{8019}{256} e^2 e'^2 \Big) \frac{n'^2}{n^2}$$
$$+ \frac{47}{16} e'^2 \frac{n'^3}{n^3} - \frac{269615}{6144} e'^2 \frac{n'^4}{n^4} - \frac{5}{16} e'^2 \cdot \frac{a^2}{a'^2} \Big] \sin(2h - 2h' - 2g').$$

e ne change pas.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

Si l'on introduit les valeurs de a et γ^2 données par les formules (E'_{56}), (G'_{56}), dans les expressions de L, G, H en a, e, γ, on aura, en supprimant les indices de a_0, γ_0 et n_0,

L_0 = ancienne valeur de L (page 685);

G_0 = ancienne valeur de G (page 832);

H_0 = ancienne valeur de H (page 856),

$$H_1 = \sqrt{a\mu} \cdot \frac{9}{8}\gamma^2 e'^2 \frac{n'}{n}.$$

D'ailleurs θ_1 est le coefficient de $\sin\theta_0(t+c)$ dans la valeur de θ donnée par la formule (F'_{56}); on en conclut facilement que, d'après le degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, on a

$$\frac{1}{2}(\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 + \ldots) = 0.$$

Cela posé, si l'on se reporte à la seconde règle du n° **30**, et qu'on tienne compte des valeurs de i'', i''', on voit que d'abord la nouvelle fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions indiquées précédemment (pages 871 et 872) dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 56^e opération. Par ces substitutions, l'ensemble des deux termes (1) et (172) de R doit se réduire à une simple fonction de a, e, γ, ce qui fournit une vérification des formules de transformation employées; la fonetion de a, e, γ, ainsi obtenue, n'est autre chose que la valeur qu'avait précédemment le terme (1). Quant aux valeurs de L, G, H, elles n'éprouvent aucun changement. La valeur de L est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 40^e opération (page 685), celle de G est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 52^e opération (page 832), et celle de H est la même que celle qui a été donnée à la suite de la 54^e opération (page 856). Les valeurs qui s'en déduisent pour $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... sont donc également identiques avec celles que l'on doit employer après la 54^e opération.

57^e OPÉRATION

destinée à faire disparaître une seconde fois les termes (2), (3), (4) *et* (5) *de* R.

Prenons dans R les termes (2), (3), (4) et (5)*, dans lesquels les arguments sont l', $2l'$, $3l'$, $4l'$, et supposons que R se réduise à ces termes seuls, de

---

* Il ne faut prendre pour les coefficients de ces termes (2), (3), (4) et (5), dans le chapitre IV, que les parties qui y ont été introduites après la première opération.

sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ & -\frac{225}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{225}{16}\gamma^2 e^4 e' \\
& + \left(\frac{27}{8}\gamma^2 e' + \frac{675}{32} e^2 e' - \frac{81}{8}\gamma^4 e' - \frac{1161}{16}\gamma^2 e^2 e' + \frac{339}{64}\gamma^2 e'^3 - \frac{675}{64} e^2 e'^3 + \frac{8475}{256} e^4 e'\right)\frac{n'}{n} \\
& - \left(\frac{147}{32} e' - \frac{531}{32}\gamma^2 e' - \frac{12501}{128} e^2 e' + \frac{5733}{256} e'^3 + \frac{63}{4}\gamma^4 e' \right. \\
& \qquad \left. + \frac{24507}{64}\gamma^2 e^2 e' + \frac{36207}{512} e^4 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& - \left(\frac{291}{16} e' - \frac{7233}{128}\gamma^2 e' - \frac{104457}{256} e^2 e' + \frac{5723}{32} e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& - \left(\frac{4571}{64} e' - \frac{160015}{512}\gamma^2 e' - \frac{4048921}{2048} e^2 e'\right)\frac{n'^4}{n^4} \\
& - \frac{9703}{48} e'\frac{n'^5}{n^5} - \frac{4336087}{18432} e'\frac{n'^6}{n^6} + \frac{225}{64} e'\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2} - \frac{1797}{512} e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}\cos l \\
- m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ & \left(\frac{33}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{825}{16} e^2 e'^2 - \frac{99}{4}\gamma^4 e'^2 - \frac{1419}{8}\gamma^2 e^2 e'^2 - \frac{825}{32} e^4 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\
& - \left(\frac{1323}{128} e'^2 - \frac{2553}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{52167}{256} e^2 e'^2 - \frac{4317383}{16384} e'^4\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
& - \left(\frac{4631}{128} e'^2 - \frac{46985}{512}\gamma^2 e'^2 - \frac{2350909}{2048} e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3} \\
& - \frac{273133}{1536} e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{150497}{288} e'^2\frac{n'^5}{n^5} + \frac{4275}{512} e'^2\frac{n'}{n}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\Big\}\cos 2l \\
- m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ & \left(\frac{657}{64}\gamma^2 e'^3 - \frac{16425}{256} e^2 e'^3\right)\frac{n'}{n} - \frac{5243}{256} e'^3\frac{n'^2}{n^2} - \frac{12271}{128} e'^3\frac{n'^3}{n^3}\Big\}\cos 3l \\
- m'\frac{a^2}{a'^3}\Big\{ & -\frac{54131}{1024} e'^4\frac{n'^2}{n^2}\Big\}\cos 4l.
\end{aligned}$$

Si l'on introduit cette valeur de R dans les équations différentielles, on aura d'abord

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{G}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

L, G et H sont donc constants, et par suite il en est de même de a, e, γ.

Quant aux valeurs de l, $h+g+l$ et h, elles seront fournies par les équations différentielles

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}}, \qquad \frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{L}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{G}} - \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}, \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}},$$

qui, en vertu des valeurs de $\frac{da}{d\mathrm{L}}, \frac{da}{d\mathrm{G}}, \frac{da}{d\mathrm{H}}, \frac{de}{d\mathrm{L}}, \ldots,$ deviennent

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\Big[&-\frac{225}{2}\gamma^2 e' + \frac{225}{4}\gamma^2 e^2 e' + \left(\frac{675}{16}e' - \frac{243}{2}\gamma^2 e' + \frac{2025}{32}e^2 e' + \frac{8475}{128}e'^3\right)\frac{n'}{n} \\
&+ \left(\frac{9561}{64}e' - \frac{19197}{32}\gamma^2 e' + \frac{63801}{128}e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{448647}{512}e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{9481465}{2048}e'\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cos l \\
-\frac{n'^3}{n^2}\Big[&\frac{825}{8}e'^2 - 297\gamma^2 e'^2 + \frac{2475}{16}e^2 e'^2 + \frac{38937}{128}e'^2\frac{n'}{n} + \frac{2611785}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\Big]\cos 2l \\
-\frac{n'^3}{n^2}&\cdot\frac{16425}{128}e'^3\cos 3l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(h+g+l)}{dt} = -\frac{n'^3}{n^2}\Big[&\frac{81}{4}\gamma^2 e' + \frac{2025}{16}e^2 e' - \frac{405}{8}\gamma^4 e' - \frac{729}{2}\gamma^2 e^2 e' - \frac{6075}{128}e^4 e' \\
&- \left(\frac{735}{16}e' - \frac{4779}{32}\gamma^2 e' - \frac{112509}{128}e^2 e' + \frac{28665}{128}e'^3\right)\frac{n'}{n} \\
&- \left(\frac{3783}{16}e' - \frac{87525}{128}\gamma^2 e' - \frac{2962593}{512}e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} \\
&- \frac{4571}{4}e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{184357}{48}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{2475}{64}e'\frac{a^2}{a'^2}\Big]\cos l \\
-\frac{n'^4}{n^3}\Big[&\frac{99}{2}\gamma^2 e'^2 + \frac{2475}{8}e^2 e'^2 - \left(\frac{6615}{64}e'^2 - \frac{22977}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{469503}{256}e^2 e'^2\right)\frac{n'}{n} \\
&- \frac{60203}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2} - \frac{273133}{96}e'^2\frac{n'^3}{n^3}\Big]\cos 2l \\
+\frac{n'^4}{n^3}&\cdot\frac{26215}{128}e'^3\cos 3l.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} = \frac{n'^2}{n}\Big[&-\frac{225}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{225}{32}e^4 e' + \left(\frac{27}{16}e' - \frac{81}{8}\gamma^2 e' - \frac{567}{16}e^2 e' + \frac{339}{128}e'^3\right)\frac{n'}{n} \\
&+ \left(\frac{531}{64}e' - \frac{63}{4}\gamma^2 e' - \frac{2997}{16}e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{14709}{512}e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{323351}{2048}e'\frac{n'^4}{n^4}\Big]\cos l
\end{aligned}$$

Cette formule se continue à la page suivante.

$$+\frac{n'^3}{n^2}\left[\frac{33}{8}e'^2-\frac{99}{4}\gamma^2e'^2-\frac{693}{8}e^2e'^2+\frac{2553}{128}e'^2\frac{n'}{n}+\frac{48173}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\right]\cos 2l'$$

$$+\frac{n'^3}{n^2}\cdot\frac{657}{128}e'^3\cos 3l'.$$

Si l'on intègre ces équations différentielles, en se rappelant que l' est égal à

$$n't+\text{const.},$$

et qu'ensuite on applique la règle du n° **31**, on sera conduit à effectuer la tranformation suivante :

Formules de transformation.

On remplace

l par

$$l-\left[\left(-\frac{225}{2}\gamma^4e'+\frac{225}{4}\gamma^2e^2e'\right)\frac{n'}{n}+\left(\frac{675}{16}e'-\frac{243}{2}\gamma^2e'+\frac{2025}{32}e^2e'+\frac{8475}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{9561}{64}e'-\frac{19197}{32}\gamma^2e'+\frac{63801}{128}e^2e'\right)\frac{n'^3}{n^3}+\frac{448647}{512}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{9481465}{2048}e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin l'$$

$$-\left[\left(\frac{825}{16}e'^2-\frac{297}{2}\gamma^2e'^2+\frac{2475}{32}e^2e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{38937}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{2611785}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2l'$$

$$-\frac{5475}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}\sin 3l',$$

$h+g+l$ par

$$h+g+l-\left[\left(\frac{81}{4}\gamma^2e'+\frac{2025}{16}e^2e'-\frac{405}{8}\gamma^4e'-\frac{729}{2}\gamma^2e^2e'-\frac{6075}{128}e^4e'\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$-\left(\frac{735}{16}e'-\frac{4779}{32}\gamma^2e'-\frac{112509}{128}e^2e'+\frac{28665}{128}e'^3\right)\frac{n'^3}{n^3}$$
$$-\left(\frac{3783}{16}e'-\frac{87525}{128}\gamma^2e'-\frac{2962593}{512}e^2e'\right)\frac{n'^4}{n^4}$$
$$\left.-\frac{4571}{4}e'\frac{n'^5}{n^5}-\frac{184357}{48}e'\frac{n'^6}{n^6}+\frac{2475}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}\cdot\frac{a^2}{a'^2}\right]\sin l'$$

Cette formule se continue a la page suivante

$$-\left[\left(\frac{99}{4}\gamma^2 e'^2 + \frac{2475}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} - \left(\frac{6615}{128}e'^2 - \frac{22977}{128}\gamma^2 e'^2 - \frac{469503}{512}e^2 e'^2\right)\frac{n'^3}{n^3}\right.$$
$$\left. - \frac{60203}{256}e'^2\frac{n'^4}{n^4} - \frac{273133}{192}e'^2\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin 2l'$$
$$+ \frac{26215}{384}e'^3\frac{n'^3}{n^3}\sin 3l',$$

h par

$$h + \left[\left(-\frac{225}{4}\gamma^2 e^2 e' + \frac{225}{32}e^4 e'\right)\frac{n'}{n} + \left(\frac{27}{16}e' - \frac{81}{8}\gamma^2 e' - \frac{567}{16}e^2 e' + \frac{339}{128}e'^3\right)\frac{n'^2}{n^2}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{531}{64}e' - \frac{63}{4}\gamma^2 e' - \frac{2997}{16}e^2 e'\right)\frac{n'^3}{n^3} + \frac{14709}{512}e'\frac{n'^4}{n^4} + \frac{323351}{2048}e'\frac{n'^5}{n^5}\right]\sin l'$$
$$+ \left[\left(\frac{33}{16}e'^2 - \frac{99}{8}\gamma^2 e'^2 - \frac{693}{16}e^2 e'^2\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{2553}{256}e'^2\frac{n'^3}{n^3} + \frac{48173}{2048}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\right]\sin 2l'$$
$$+ \frac{219}{128}e'^3\frac{n'^2}{n^2}\sin 3l'.$$

a, e et γ ne changent pas.

Nouvelles valeurs de R, L, G, H.

La nouvelle valeur de la fonction R s'obtiendra en faisant les substitutions précédentes dans la valeur qu'avait cette fonction avant la 57^e opération, après en avoir ôté les termes (2), (3), (4) et (5).

Les quantités L, G, H ne changent pas de valeurs; elles sont exprimées en a, e, γ par les mêmes formules que précédemment (valeur de L, page 685; valeur de G, page 832; valeur de H, page 856). Les valeurs de $\frac{da}{dL}$, $\frac{da}{dG}$, $\frac{da}{dH}$, $\frac{de}{dL}$, ... sont aussi les mêmes que celles que l'on doit employer après la 54^e opération.

NOTE

sur l'emploi des formules établies précédemment.

Les diverses opérations dont le détail vient d'être donné ont pour objet d'établir une suite de formules de transformation destinées à faire disparaître successivement les termes principaux de la fonction perturbatrice R, tout en conservant exactement la même forme aux équations différentielles du problème. Les changements de variables indiqués par ees formules de transformation doivent être effectués successivement dans chacune des quatre expressions qui donnent 1° la fonction perturbatrice R, 2° les trois coordonnées V, U, $\frac{1}{r}$ de la Lune. Ces quatre quantités se modifient ainsi peu à peu et sont toujours exprimées explicitement en fonction des six variables a, e, γ, l, g, h, les trois premières étant mises au lieu des variables L, G, H, auxquelles elles sont liées par des relations que nous avons eu soin de faire connaître après chacune des opérations dont il s'agit. Nous allons donner dans cette note quelques explications sur la manière dont on devra s'y prendre pour se servir des formules de transformation établies.

Considérons d'abord les formules fournies par les opérations 26, 27 et 28. Leur emploi ne présentera aucune difficulté. Les termes des quatre fonctions R, V, U, $\frac{1}{r}$, dans lesquelles on doit effectuer les changements de variables qu'elles indiquent, sont tous compris dans les deux formes A cos B, A sin B, dans lesquelles A est une fonction de a, e, γ, et B une fonction linéaire de l, g, h. La première de ces deux formes est celle des termes de R et de $\frac{1}{r}$, et la seconde celle des termes de U et de V. Les formules dont nous nous occupons faisant connaître les expressions que l'on doit mettre à la place des quantités $h+g+l$, g et h, on commencera par combiner ces expressions par voie d'addition ou de soustraction, après les avoir multipliées par des facteurs numériques convenables, de manière à trouver l'expression qui doit être substituée à l'argument B; puis on effectuera le développement du cosinus ou du sinus de cet argument à l'aide de la formule (42) du chapitre III; ensuite on mettra dans A, à la place de a, e^2 et γ^2, les expressions qui doivent être substituées à ces variables, en ayant soin de ne pas oublier que n est mis pour $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$; enfin on multipliera la valeur trouvée pour $\cos B$ ou $\sin B$ par celle qu'on aura obtenue pour A. Dans ces calculs, on aura soin de remplacer toujours les puissances et les produits des sinus et cosinus par leurs valeurs en sinus ou cosinus d'angles multiples.

Si les 57 opérations dont nous avons donné le détail conduisaient toutes à des formules de transformation aussi simples que celles qui proviennent des opérations 26, 27 et 28, nous n'aurions eu besoin d'entrer dans aucune explication spéciale sur leur emploi. Mais il n'en est pas ainsi. Si l'on se reporte aux 24 opérations comprises entre la 1^re^ et la 26^e^, et aussi aux opérations 46, 47, 48, on voit que dans chacune d'elles la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ renferme e en dénominateur. Si nous avions intégré les équations différentielles (C), (D) de chacune de ces opérations, de manière à en tirer directement les valeurs de e et de θ, nous aurions eu pour θ une valeur contenant également e en dénominateur, et il en aurait été de même dans une au moins des formules de transformation que nous en aurions déduites. Il en serait résulté des difficultés que nous avons cherché à éviter en intégrant autrement les équations (C), (D). Au lieu d'en tirer les valeurs de e et de θ, nous en avons tiré les valeurs de $e\cos\theta$ et de $e\sin\theta$, ce qui revient évidemment au même. A cet effet, nous avons établi les formules (40), qui donnent sous cette forme les intégrales des équations générales (39), et nous n'avons eu qu'à appliquer ces formules (40) à chacune des 27 opérations dont il s'agit. Il suit naturellement de cette manière d'intégrer les équations différentielles (C), (D), que deux des six formules de transformation données à la suite de chacune de ces opérations ont une forme particulière, en vertu de laquelle elles ne semblent pas se prêter si facilement aux substitutions que l'on doit effectuer, que si elles avaient toutes la forme simple correspondant aux opérations 26, 27 et 28. Quelques exemples suffiront pour montrer la marche que l'on doit suivre dans ce cas.

1^er^ Exemple. Supposons qu'on en soit à la 4^e^ opération, et qu'on veuille effectuer le changement de variables qu'elle indique, dans le terme (152) de R, qui a alors pour valeur

$$m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{9}{8}\gamma^2 e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{2}\gamma^2 c\frac{n'^3}{n^3}\right\}\cos(2h+4g+5l-2h'-2g'-2l').$$

Ce terme peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{gathered}\mathrm{A}\cos(4h+6g+6l-4h'-4g'-4l')\times e\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-2l')\\+\mathrm{A}\sin(4h+6g+6l-4h'-4g'-4l')\times e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-2l'),\end{gathered}$$

A désignant la quantité

$$m'\frac{a^2}{a'^3}\left\{-\frac{9}{8}\gamma^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3}{2}\gamma^2\frac{n'^3}{n^3}\right\}.$$

Les formules de transformation fournies par la 4$^\mathrm{e}$ opération faisant connaître les expressions qu'on doit substituer aux quantités

$$h+g+l \quad \text{et} \quad h.$$

on en déduira facilement la valeur de l'angle

$$4h+6g+6l-4h'-4g'-4l',$$

et par suite on calculera sans peine les valeurs des deux quantités

$$\mathrm{A}\cos(4h+6g+6l-4h'-4g'-4l'),\qquad \mathrm{A}\sin(4h+6g+6l-4h'-4g'-4l').$$

Dès lors, en tenant compte des valeurs que les mêmes formules indiquent pour

$$e\cos(2h+2h+l-2h'-2g'-2l');\qquad e\sin(2h+2g+l-2h'-2g'-2l'),$$

on pourra obtenir la valeur que prend le terme (152) de R par suite du changement de variables auquel conduit la 4$^\mathrm{e}$ opération.

II$^\mathrm{e}$ Exemple. Supposons en second lieu qu'on veuille effectuer, dans le terme

$$\left(-\frac{13}{4}\gamma^2e^2-\frac{13}{4}\gamma^4e^2+\frac{259}{24}\gamma^2e^4\right)\sin(2g+4l)$$

de la valeur de V, le changement de variables auquel conduit la 3$^\mathrm{e}$ opération. Ce terme de V peut s'écrire

$$\begin{gathered}\mathrm{A}\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-4l')\times e^2\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l')\\-\mathrm{A}\sin(4h+2g+2l-4h'-4g'-4l')\times e^2\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l'),\end{gathered}$$

A désignant la quantité

$$\left(-\frac{13}{4}\gamma^2-\frac{13}{4}\gamma^4+\frac{259}{24}\gamma^2 e^2\right).$$

Dès lors on calculera séparément les valeurs que prennent les quantités

$$\mathrm{A}\cos(4h+2g+2l-4h'-4g'-4l'),\qquad \mathrm{A}\sin(4h+2g+2l-4h'-4g'-4l');$$

puis on n'aura plus qu'à les multiplier respectivement par les expressions qui doivent être substituées aux quantités

$$e^2\sin 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l'),\qquad e^2\cos 2(2h+2g+3l-2h'-2g'-2l'),$$

pour en conclure la valeur du terme de V dont on s'occupe.

Remarquons que, dans le premier de ces deux exemples, l'angle

$$4h+6g+6l-4h'-4g'-4l'$$

s'obtient en ajoutant l'argument

$$2h+2g+l-2h'-2g'-2l',$$

considéré spécialement dans la 4^e^ opération, à l'argument

$$2h+4g+5l-2h'-2g'-2l'$$

du terme dans lequel on veut introduire les formules de transformation de cette 4^e^ opération; et aussi que, dans le second exemple, l'angle

$$4h+2g+2l-4h'-4g'-4l',$$

s'obtient (au signe près) en retranchant le double de l'argument

$$2h+2g+3l-2h'-2g'-2l',$$

considéré spécialement dans la 3^e^ opération, de l'argument

$$2g+4l$$

du terme où l'on veut faire le changement de variables indiqué par cette 3^e^ opération. Nous pouvons dire d'une manière générale que, dans tous les cas, l'angle qui jouera le rôle des angles

$$4h + 6g + 6l - 4h' - 4g' - 4l'$$

et

$$4h + 2g + 2l - 4h' - 4g' - 4l'$$

dans les deux exemples précédents, s'obtiendra (soit avec son signe, soit avec un signe contraire) en ajoutant à l'argument du terme où l'on veut faire la substitution, ou bien en en retranchant 1, 2, 3,... fois l'argument spécialement considéré dans l'opération à laquelle correspondent les formules de transformation, *de manière à rendre égaux les coefficients des deux variables* g et l.

Pour faire les substitutions indiquées à la suite des 17 opérations comprises entre la 28ᵉ et la 46ᵉ, et celles qui résultent des 8 opérations comprises entre la 48ᵉ et la 57ᵉ, on peut opérer directement comme dans les opérations 26, 27 et 28. Cependant il est plus simple de calculer tout d'abord les valeurs qui doivent être substituées à $e\cos l$, $e\sin l$, $e^2\cos 2l$, $e^2\sin 2l$, $e^3\cos 3l$, $e^3\sin 3l, \ldots$, ou bien à $\gamma\cos(g+l)$, $\gamma\sin(g+l)$, $\gamma^2\cos(2g+2l)$, $\gamma^2\sin(2g+2l)$, $\gamma^3\cos(3g+3l)$, $\gamma^3\sin(3g+3l), \ldots$, suivant celle des deux variables e, γ, qui joue le rôle principal dans l'opération dont on s'occupe; et d'opérer ensuite comme il vient d'être dit dans les exemples donnés précédemment.

Quant aux formules de transformation fournies par les opérations 1 et 57, il n'y a rien de particulier à en dire; on s'en servira comme de celles qui sont fournies par les opérations 26, 27 et 28.

FIN DU TOME XXVIII.

(PREMIER VOLUME DE LA THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, RUE DE SEINE-SAINT-GERMAIN, 10, PRÈS L'INSTITUT.

ERRATA.

Page 37, 3^e ligne en remontant, *ajoutez* $+\frac{405}{32}\gamma^2 e' \frac{a^2}{a'^2}$ à la fin du coefficient de $\cos(2h - 2h' - 2g' - 3l')$.

Même page, 2^e ligne en remontant, *ajoutez* $+\frac{45}{32}\gamma^2 e' \frac{a^2}{a'^2}$ à la fin du coefficient de $\cos(2h - 2h' - 2g' - l')$.

Page 39, 7^e ligne, *ajoutez* $+\frac{945}{64}\gamma^2 e^2 \frac{a^2}{a'^2}$ à la fin du coefficient de $\cos 2g$.

Page 53, entre la dernière et l'avant-dernière ligne, *ajoutez*

$$+\frac{315}{256}e^2 e'^2 \cos(2h + 2g - 2h' - 2g')$$
$$+\frac{135}{64}\gamma^2 e'^2 \cos(2h - 2h' - 2g').$$

Page 68, au commencement de la formule qui termine la page, *au lieu de* $\frac{dR_1}{dC} = \frac{dR_1}{dL}\Big(\cdots$, *lisez* $\frac{dR_1}{dL} = \frac{dR_1}{dC}\Big(\cdots$

Page 116, 9^e ligne, à la fin, *au lieu de* c'est le, *lisez* elle provient du.

Même page, 14^e ligne, après (n° **28**), *terminez la phrase ainsi :* se compose de la valeur qu'avait le terme (**1**) avant l'opération dont il s'agit, et de quelques nouvelles parties : ce sont ces nouvelles parties qui portent l'indication [9 · · · 1, 12].

Page 131, 1^{re} ligne du terme (**8**), *au lieu de* $-\frac{27}{32}ee$, *lisez* $-\frac{27}{32}ee'^3$.

Page 148, 1^{re} ligne du terme (**63**), *après* $-\frac{45}{8}\gamma^4 e^2 e'^2$, *ajoutez* $+\frac{945}{64}\gamma^2 e^2 \frac{a^2}{a'^2}$.

Page 155, 6^e ligne, *au lieu de* $-\frac{2187}{82}\gamma^2 e'$, *lisez* $-\frac{2187}{32}\gamma^2 e'$.

Page 165, 1^{re} ligne, *au lieu de* $-\frac{719}{512}e^2 \frac{n'^4}{n^4}$, *lisez* $-\frac{729}{512}e^2 \frac{n'^4}{n^4}$.

Page 179, 1^{re} ligne du terme (**131**), *ajoutez au commencement* $+\frac{315}{256}e^2 e'^2 \frac{a^2}{a'^2}$.

Page 188, 1^{re} ligne du terme (**167**), *ajoutez à la fin* $+\frac{405}{32}\gamma^2 e' \frac{a^2}{a'^2}$.

Page 190, 1^{re} ligne du terme (**171**), *ajoutez à la fin* $+\frac{45}{32}\gamma^2 e' \frac{a^2}{a'^2}$.

Page 192, 1^{re} ligne du terme (**172**), *ajoutez au commencement* $+\frac{135}{64}\gamma^2 e'^2 \frac{a^2}{a'^2}$.

Page 200, 6^e ligne du terme (**215**), *au lieu de* $-\frac{74241}{2028}\frac{n'^6}{n^6}$, *lisez* $-\frac{74241}{2048}\frac{n'^6}{n^6}$.

Page 218, dernière ligne du terme (**283**), *au lieu de* $+\frac{42525}{512}e^2 e' \frac{n'^3}{n^5}$, *lisez* $+\frac{42525}{512}e^2 e' \frac{n'^5}{n^3}$.